

## **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Изложены основные вопросы теории нелинейных колебаний, начиная с исходных, прочно вошедших в науку, и кончая вопросами, вводящими читателя в ее современное состояние.

Рассмотрены как точные, так и приближенные методы теории нелинейных колебаний. Особое место занимают методы научной школы Мандельштама — Андропова. Вместе с тем в книге нашли определенное отражение идеи и методы, разнимаемые другими научными школами.

Для широкого круга читателей,— как для желающих ознакомиться с основными понятиями и методами теории нелинейных колебаний, так и для специалистов, желающих узнать о ее современном состоянии.

### Содержание

Предисловие ко второму изданию	5
Предисловие к первому изданию	6
<b>Глава 1. Математические модели колебательных систем</b>	<b>7</b>
§ 1. Понятие динамической системы	8
§ 2. Классификация динамических систем	9
§ 3. Автоколебательные системы. Типовые нелинейности	10
§ 4. Фазовый портрет динамической системы. Понятие устойчивости движения	12
<b>Глава 2. Исследование простейших колебательных систем</b>	<b>19</b>
§ 1 Системы первого порядка	19
§ 2. Консервативные системы второго порядка	27
§ 3. Системы с полной диссипацией энергии	35
<b>Глава 3. Системы второго порядка и их исследование методами качественной теории дифференциальных уравнений</b>	<b>40</b>
§ 1. Фазовая плоскость и качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории	40
§ 2. Свойство грубости динамической системы	43
§ 3. Автоколебательные системы	45
§ 4. Бифуркации динамических систем второго порядка	48
§ 5. Примеры исследования конкретных систем методами качественной теории	51
<b>Глава 4. Простейшие кусочно-линейные системы (системы с переменной структурой) и их исследование методом точечных отображений</b>	<b>65</b>
§ 1. Сведение рассмотрения поведения фазовых траекторий к точечному отображению прямой в прямую и плоскости в плоскость	68
§ 2. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Скользящие движения	78
§ 3. Точечное отображение сдвига $T_m$ и его применение к изучению вынужденных и параметрических колебаний динамической системы	84
§ 4. Примеры исследования динамики систем при помощи метода точечных отображений	88

<b>Глава 5. Квазилинейные динамические системы</b>	<b>115</b>
§ 1. Автономные динамические системы с одной степенью свободы	117
§ 2. Неавтономные квазилинейные динамические системы с одной степенью свободы	129
§ 3. Автономные динамические системы с двумя степенями свободы	145
§ 4. Автономные системы с гироскопическими силами	162
§ 5. Неавтономные динамические системы с двумя степенями свободы	168
§ 6. Неавтономные динамические системы с гироскопическими силами	183
<b>Глава 6. Разрывные колебания и дифференциальные уравнения с малыми параметрами при (старших) производных</b>	<b>204</b>
§ 1. Рассмотрение вырожденных систем с помощью гипотезы скачка	204
§ 2. Уточнение математической модели. Быстрые и медленные движения	215
<b>Глава 7. Введение в качественную теорию и теорию нелинейных колебаний многомерных динамических систем</b>	<b>228</b>
§ 1. Локальное изучение состояний равновесия и периодических движений	232
§ 2. Динамические системы с простейшими установившимися движениями	257
§ 3. Вспомогательные сведения о точечных отображениях	271
1. Преобразование прямой в прямую (272). 2. Отображение окружности в окружность (284). 3- Критерии существования неподвижной точки многомерного точечного отображения (287). 4. Метод вспомогательных отображений (291).	
§ 4. Гомоклинические структуры	303
§ 5. Синхронизация и стохастичность	314
1. Синхронизация, десинхронизация и многопериодическая стохастичность (316). 2. Притягивающие гомоклинические структуры и стохастические колебания (319). 3. Численные эксперименты на ЭВМ по изучению притягивающих гомоклинических структур (328). 4. Неавтономные системы, близкие к автономным (335). 5. Синхронизмы разных порядков (337). 6. Стохастический синхронизм (340). 7. Бифуркации синхронизмов (343). 8. Бифуркация от сепаратрисы седла (356).	
§ 6. Заключение	364
Список литературы	370
Список дополнительной литературы	377
Именной указатель	378
Предметный указатель	380

Именной указатель

Айзерман М. А. 116, 366	Арнольд В. И. 251, 334, 368
Алексеев В. М. 263, 301, 369	Банах С. (Banach S.) 290
Андронов А. А. 9, 40, 44, 45, 59, 66, 95, 101 116, 120, 131, 139, 206, 215, 219, 221, 228, 229, 251, 272, 356, 366, 368	Барсук Л. О. 251, 368 Баутин Н. Н. 51, 66, 365, 368 Белослудцев Н. М. 251, 368 Белых В. Н. 368
Аносов Д. В. 368	Белюстина Л. Н. 237, 368, 369

- Берниссон Дж. (Bernisson J.) 369  
Беспалова Л. В. 237, 369  
Биркгоф Дж. Д. (Birkhoff D.) 66, 289, 369  
Боголюбов Н. Н. 116, 257, 366, 367, 369  
Булгаков Б. В. 116, 149, 183, 366  
Бутенин Н. В. 131, 145, 149, 150, 162, 168, 183, 192, 211, 366, 367  
Ван-дер-Поль 116, 119, 131, 366  
Васильева Л. Б. 215, 367  
Витт А. А. 9, 40, 44, 45, 59, 67, 88, 95, 101, 116, 131, 139, 206, 215, 219, 221, 228, 229, 251, 272, 366, 368  
Власов Н. П. 164, 165, 366  
Вольтер В. В. 51, 368  
Вышнеградский И. А. 66  
Гаврилов Н. К. 363, 369  
Гордон И. И. 40, 44, 228, 229, 356, 363, 365, 368  
Горелик Г. С. 228, 368  
Градштейн И. С. 215, 218, 367  
Груздев В. П. 363, 369  
Гуртовшга А. С. 319, 369  
Дельшамбр М. (Delchambre M.) 187, 366  
Донжуа А. 285  
Железцов Н. А. 215, 218, 367  
Заславский Г. М. 319, 369, 371  
Кадомцев Б. Б. 319, 369  
Кайдановский Н. Л. 207, 219, 368  
Канторович В. М. 319, 369  
Каток А. В. 263, 301, 369  
Киняпин С. Д. 67, 365  
Коган Н. Я. 371  
Крылов Н. М. 116, 367  
Кушниренко А. Г., 263, 301, 361)  
Ланда П. С. 371  
Ландау Л. Д. 318, 369  
Леонов Н. Н. 67, 90, 319, 366, 370  
Леонтович Е. А. 40, 44, 51, 228, 229, 356, 365, 368  
Леонтович-Андропова Е. А. 369  
Либерман М. 371  
Лившиц Е. М. 318, 369  
Лихтенберг А. 371  
Ляпунов А. М. 122, 367  
Майер А. Г. 40, 44, 66, 173, 285, 338, 365, 367. 370  
Малкин И. Г. 257, 370  
Мальшев В. А. 367  
Мандельштам Л. И. 116, 131, 367  
Меркин Д. Р. 116, 367  
Метрикин В. С. 237, 369  
Минакова И. И. 131, 367  
Митропольский Ю. И. 116, 257, 366, 367, 369  
Мищенко К. Ф. 215, 219, 368  
Морзе Е. (Morse E.) 263, 283, 370  
Неймарк Ю. И. 8, 27, 32, 44, 67, 68, 80, 82, 84, 228, 231, 239, 251, 253, 257, 268, 303, 319, 322, 340, 363, 365, 368, 369—371  
Немыцкий В. В. 287, 289, 370  
Папалекси Н. Д. 116, 131, 367  
Петровский А. Г. 232  
Плисе В. А. 370  
Понтрягин Л. С. 215, 219, 368  
Пуанкаре А. (Poincare H.) 66, 228, 261, 285, 370  
Пулькин С. П. 370  
Рабинович М. И. 319, 370, 371  
Родыгин А. В. 215, 219, 367  
Рубаник В. П. 367  
Савельев В. П. 371  
Салганская Н. М. 251, 368  
Сальников И. Е. 51, 368  
Серебрякова Н. Н. 131, 367  
Синай Я. Г. 371  
Смейл С. (Smale S.) 44, 263, 301, 371  
Смирнова И. М. 116, 366  
Сонечкин Д. М. 371  
Степанова Н. В. 131, 367  
Стрелков С. П. 124, 367  
Тихонов А. Н. 215, 218, 368  
Тондл А. 237, 371  
Трубецков Д. И. 371  
Труженикова В. М. 371

Фуфаев Н. А. 106, 112, 366  
Хайкин С. Э. 9, 40, 44, 45, 59, 67, 88,  
95, 101, 116, 131, 139, 206, 207,  
215, 219, 221, 228, 229, 251, 272,  
366, 368  
Хаяси Т. 237, 371

Хедлунд Г. (Hedlund G.) 263, 283, 370  
Хопф Э. 371  
Чирков Б. В. 319, 369  
Шарковский А. И. 371  
Шильников А. П. 253, 363, 369, 370

Предметный указатель

Автоколебания 45, 66, 128, 220  
—, жесткий режим 128  
—, механизм возникновения 315  
—, мягкое возбуждение 127  
— периодические разрывные 220  
— связанных маятников 150  
Автоколебательные системы 10, 45,  
130  
— — принудительная синхронизация  
130  
Автономная динамическая система  
65, 85  
— — — второго порядка 69  
— — — консервативная 27  
— — — с двумя степенями свободы  
145, 162  
— — — с одной степенью свободы  
40, 117  
Бендиксона критерий 46, 58  
Бифуркационный параметр 21, 31, 42,  
176, 241  
Бифуркация 49, 228, 241, 246, 353  
— от сепаратрисы седла 356  
— периодических движений 247, 251  
— синхронизмов 343  
— состояния равновесия 252, 305  
— специфическая 257  
— точечного отображения 276  
Брауэра теорема 290  
Ван-дер-Поля уравнения 119  
Вырожденная система 205, 216 222  
Гипотеза скачка 205, 210  
Гироскопические члены (силы) 115  
Грубость динамических систем 43,  
301  
— — — второго порядка 43, 48  
Диаграмма Кёнигса — Ламерея 272

— Ламерея 70, 111, 113  
Динамическая система 8  
— — второго порядка неавтономная  
320  
— — — —, фазовое пространство 40  
— — квазилинейная 65, 115  
— — — автономная с двумя  
степенями свободы 162  
— — классификация математических  
моделей 9  
— — линейная 65  
— — многомерная 228, 230, 303  
— — неавтономная с двумя  
степенями свободы 168  
— — — с гироскопическими силами  
183  
— — нелинейная 10  
— — первого порядка 19  
— — — —, фазовый портрет 20  
— — с полной диссипацией энергии  
35  
— — сильно нелинейная 66  
— —, фазовое пространство 12, 85  
— —, фазовый портрет 12  
Дюлака критерий 47  
Запаздывания механизм 137  
Кёнигса — Ламерея диаграмма 272  
— теорема 71, 73  
Консервативные системы второго  
порядка 27  
Критерий Бендиксона 46, 58  
— Дюлака 47  
Ламерея диаграмма 70, 111, 113  
Марковский процесс 328, 364  
— — с двумя состояниями 343  
Метод кривой контактов 139

— точечных отображений 66, 69, 74,  
76, 78, 271, 274, 305  
— — —, применение 88, 90, 95, 101,  
109  
— — —, эффективность 239  
Механизм запаздывания 137  
Морса — Смейла системы 263  
Невырожденная система 210  
Особая траектория 13, 41  
Особые точки 12—15  
Поверхность без контакта 73  
— секущая 73, 84  
Подкова Смейла 301  
Предельный цикл 12, 44, 45, 49, 76,  
132, 139, 220  
— —, задача отыскания 72  
— — неустойчивый 46, 128, 357  
— —, условие устойчивости 45, 70,  
73  
— — устойчивый 45, 49, 71  
Пуанкаре — Дюлака теорема 139,  
140  
— теория периодических движений  
257  
Синхронизация принудительная  
автоколебательных систем 130  
Смейла подкова 301  
Теорема Брауэра 290  
— Кёнига 71, 73  
— Пуанкаре — Дюлака 139, 140  
Теория периодических движений  
Пуанкаре 257  
Точечное отображение 231  
— — вспомогательное 292, 296, 305  
— — кольца в кольцо 289, 355  
— — окружности в окружность 284  
— — отрезка полупрямой 72  
— — плоскости в плоскость 74, 78,  
321, 345  
— — прямой в прямую 272, 330  
— — сдвига 84, 87, 98, 239

— — седловое 297  
— — сжимающее 291, 296  
— —, символическое описание 283  
— —, способ получения 73  
Точка изображающая 12, 41  
Траектория особая 12, 41  
— фазовая 12, 20, 28, 36, 60, 67, 80,  
211, 214, 216, 228  
— — в трехмерном пространстве 73  
— — замкнутая 44, 238  
Уравнения Ван-дер-Поля 119  
Условие скачка 210  
Устойчивость движения 13  
— орбитная 13, 15, 17, 68, 74  
— по Ляпунову 13, 15, 17  
— состояния равновесия 13, 21  
Фазовая плоскость 41, 45, 49, 69, 121,  
124, 198, 206, 214  
— — вырожденной системы 206  
Фазовая плоскость, топологическая  
структура разбиения 40  
— траектория 12, 20, 28, 36, 60, 67,  
80, 211, 214, 216, 228  
— — в трехмерном пространстве 73  
— — замкнутая 44, 238  
Фазовое пространство 9, 12, 17, 29,  
60, 68, 103, 112, 228  
— — двумерное 40, 69, 232  
— — многомерное 67, 79, 84, 230,  
263  
— — одномерное 19, 27  
Фазовое пространство  
 $n$ -мерное 82  
— — расширенное 85  
— — трехмерное 68, 73, 84, 232  
Фазовый портрет 12, 45  
— — динамической системы  
первого порядка 22  
Функция исследования 69  
Ячейка односвязная 41  
—, связность 41

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

По сравнению с первым изданием во второе внесены исправления и небольшие добавления.

Изложение раздела стохастических и хаотических колебаний дополнено списком новой литературы. Он может служить отправным пунктом для желающих более полно ознакомиться с этим важным направлением исследований. Ко времени первого издания книги исследования стохастических движений только зарождались и в дальнейшем получили огромное развитие. К настоящему времени в этой области насчитывается уже более тысячи публикаций.

*Авторы*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В книге сделана попытка изложить основные вопросы теории нелинейных колебаний, начиная с исходных понятий и методов, прочно вошедших в науку, и кончая вопросами, вводящими читателя в ее современное состояние. Для того чтобы не увеличивать объем книги, пришлось ограничиться основными вопросами, привлекая описание деталей лишь в той мере, в какой это необходимо для понимания целого. Авторы стремились отразить то огромное развитие, которое получили идеи теории нелинейных колебаний. Значительное место в книге занимают методы научной школы Мандельштама — Андропова, к которой принадлежат авторы. Особое внимание уделено методу точечных отображений и его применению в теории нелинейных колебаний. Вместе с тем в книге нашли определенное отражение идеи и методы, развиваемые другими научными школами.

Книга предназначена для широкого круга читателей, как для желающих ознакомиться с основными понятиями и методами теории нелинейных колебаний, так и для специалистов, которые хотели бы узнать о последних достижениях в этой области. Она может служить дополнением к курсу теоретической механики Н. В. Бутенина, Я. Л. Лунца и Д. Р. Меркина («Наука», 1985).

Главы 1—4 написаны Н. А. Фуфаевым, главы 5 и 6 — Н. В. Бутениным и глава 7 — Ю. И. Неймарком.

Список цитируемой литературы ни в коей мере не претендует на полноту, а скорее является исходным для отыскания дальнейших работ, которые помогут читателям полнее и глубже разобраться в отдельных вопросах. Авторы благодарны профессорам М. А. Айзерману и С. И. Макарихину за ценные советы и замечания, сделанные ими при рецензировании рукописи.

*Авторы*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Эта глава, которая является вводной, содержит изложение основных понятий и положений, необходимых для изучения нелинейных колебаний. Прежде всего следует сказать несколько слов о колебательных явлениях вообще и о нелинейных колебаниях в частности. Общие закономерности, которыми обладают колебательные процессы в системах различной физической природы, составляют предмет науки, получившей название теории колебаний. Под колебательным явлением принято понимать либо то, что связано с фактом установившегося движения в рассматриваемой системе, либо то, что связано с процессом перехода от одного установившегося движения к другому. Установившееся движение характеризуется повторяемостью и определенной устойчивостью (смысл последнего понятия будет уточнен ниже). Переходные процессы характеризуются тем установившимся движением, к которому они приближаются. Множество переходных процессов данного установившегося движения образует его область притяжения. Смена установившихся движений, которая происходит в результате изменения какого-нибудь физического параметра рассматриваемой системы при его переходе через некоторое значение, называется бифуркацией. Если при этом смена установившихся движений происходит достаточно быстро, т. е. скачкообразно, то говорят о «жестком» возникновении нового режима. В противном случае возникновение нового режима называют «мягким». Колебательные явления, возникающие в так называемых нелинейных системах, называются нелинейными колебаниями. Однако, прежде чем определить, что такое нелинейная система, рассмотрим более общий класс систем, называемых динамическими системами.



## § 1. Понятие динамической системы [1]

Понятие динамической системы возникло как обобщение понятия механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона. В своем историческом развитии понятие динамической системы, как и всякое другое понятие, постепенно изменялось, наполняясь новым, более глубоким содержанием. Уже в книге Рейли по теории звука с единой точки зрения рассматриваются колебательные явления в механике, акустике и электрических системах. В настоящее время понятие динамической системы является весьма широким. Оно охватывает системы любой природы: физической, химической, биологической, экономической и др., причем не только детерминированные системы, но и стохастические. Описание динамических систем также допускает большое разнообразие: оно может осуществляться или при помощи дифференциальных уравнений, или такими средствами, как функции алгебры логики, графы, марковские цепи и т. д.

В настоящее время для исследования этих систем используются два разных подхода, отличающихся типом математической модели, которая отражает поведение динамической системы. При одном подходе математическая модель динамической системы  $S$  основывается на понятии состояния  $x$ , под которым понимается описание системы  $S$  в некоторый момент времени\*), и на понятии оператора  $T$ , определяющего изменение этого состояния  $x$  во времени. Оператор  $T$  указывает процедуру, выполняя которую можно по описанию  $x(t)$  в момент времени  $t$  найти описание  $x(t + \Delta t)$  той же системы в некоторый следующий момент времени  $t + \Delta t$ . Если оператор  $T$  не зависит явно от времени, то система  $S$  называется автономной, в противном случае — неавтономной. Состояние  $x$  системы  $S$  можно рассматривать как точку некоторого пространства  $\Phi$ , называемого фазовым пространством системы  $S$ . Изменению состояния  $x$  отвечает в фазовом пространстве  $\Phi$  движение соответствующей точки, которая называется изображающей. При этом движении изображающая точка описывает кривую, на-

---

\*) В механике, например, состояние системы определяется совокупностью обобщенных координат и скоростей. В случаях же, например, систем автоматов, стохастических систем и др. описание может быть осуществлено при помощи других параметров.

зывается фазовой траекторией. Фазовое пространство  $\Phi$  и оператор  $T$  составляют математическую модель динамической системы. Исследование поведения динамической системы при таком подходе сводится к изучению характера разбиения фазового пространства  $\Phi$  на траектории и к выяснению зависимости структуры этого разбиения от значений физических параметров системы.

Другой подход к изучению динамических систем основан на исследовании функциональной стороны рассматриваемой системы. Этот подход может диктоваться невозможностью или отсутствием необходимости проникнуть во все тонкости внутренней структуры динамической системы. Поэтому система в этом случае трактуется как некий «черный ящик», обладающий входными и выходными переменными. Между этими переменными «черный ящик» реализует связь, определяемую некоторым оператором. Таким образом, математическая модель при втором подходе определяется пространствами входов и выходов, а также оператором, который осуществляет однозначное преобразование входных переменных в выходные.

Второй подход оказывается полезным при изучении систем автоматического регулирования, вычислительных машин, поисковых и самообучающихся систем. В этой книге используется первый подход, который позволяет изучить динамику системы с исчерпывающей полнотой.

## § 2. Классификация динамических систем

Математические модели динамических систем можно классифицировать в зависимости от структуры их фазового пространства  $\Phi$  и вида оператора  $T$ . Различают случаи непрерывного и дискретного фазового пространства в зависимости от того, какой ряд значений могут принимать величины  $x$ , характеризующие состояние динамической системы: непрерывный или дискретный. Изменение состояния  $x$  во времени также может быть непрерывным или дискретным. Изменение непрерывно во времени, если  $\Delta t$  — произвольное неотрицательное число, и дискретно во времени, если  $\Delta t$  может принимать лишь некоторые дискретные положительные значения. Операторы  $T$  принято различать по их свойствам и по форме задания. Если оператор  $T$  обладает свойством суперпозиции, то он называется линейным. Если оператор  $T$  является нелинейным, то и соответствующая динамическая система назы-

вается нелинейной. Кроме того, оператор  $T$  может быть непрерывным или дискретным. Форма задания оператора  $T$  может быть дифференциальной, интегральной, матричной, табличной и т. д. В этой книге речь пойдет о дискретных математических моделях динамических систем, состояние которых определяется конечным числом переменных, с непрерывным фазовым пространством и непрерывным дифференциальным оператором  $T$ , в общем случае нелинейным. Таким образом, мы будем рассматривать динамические системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных.

### § 3. Автоколебательные системы. Типовые нелинейности [2]

Среди нелинейных систем особое место занимают автоколебательные системы. Термины «автоколебания» и «автоколебательные системы» предложены более 50 лет тому назад А. А. Андроновым. Явление автоколебаний проявляется в самых разнообразных формах, таких, как, например, свист телеграфных проводов, скрип открываемой двери, звучание человеческого голоса или смычковых и духовых музыкальных инструментов. Автоколебательными системами являются часы, ламповые генераторы электромагнитных колебаний, паровые машины и двигатели внутреннего сгорания, словом, все реальные системы, которые способны совершать незатухающие колебания при отсутствии периодических воздействий извне. (Слово «реальные» здесь означает, что исключается идеализированный случай, когда система не обладает трением.) Характерные свойства автоколебательных систем обусловлены нелинейностью дифференциальных уравнений, которые описывают поведение таких систем. Правые части этих дифференциальных уравнений обычно содержат нелинейные функции фазовых переменных  $x$ . На рис. 1.1—1.4 приведены графики функций, которые отражают типовые нелинейности, встречающиеся при рассмотрении многих механических и электрических автоколебательных систем. Характеристика силы сухого (кулонова) трения имеет вид, показанный на рис. 1.1, а, где  $v$  — относительная скорость трущихся поверхностей. Во многих случаях эту зависимость можно аппроксимировать так называемой  $z$ -характеристи-

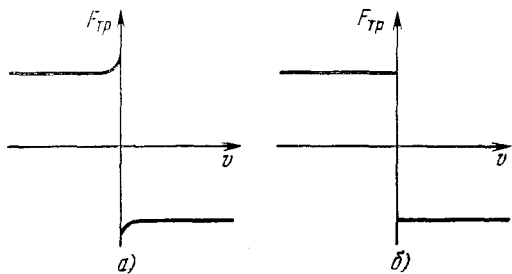


Рис. 1.1

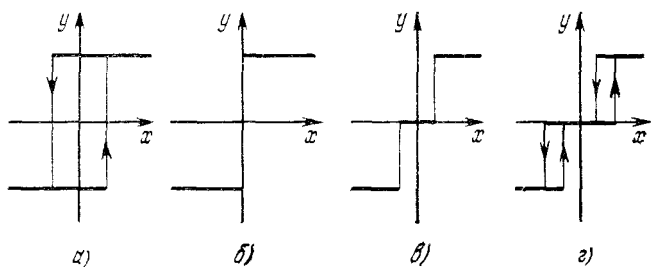


Рис. 1.2

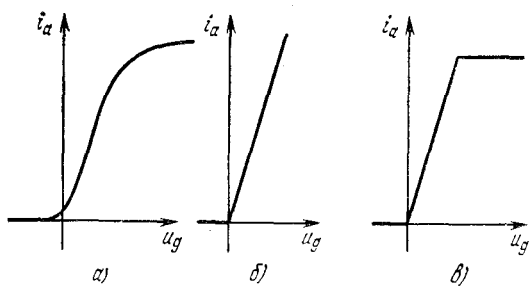


Рис. 1.3

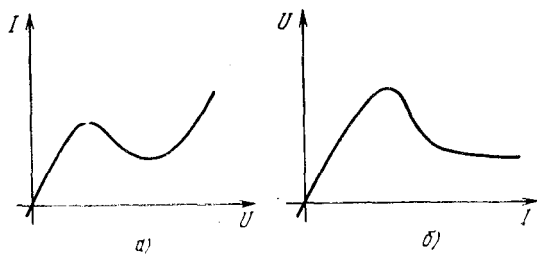


Рис. 1.4

кой (рис. 1.1, б). Некоторые часто встречающиеся характеристики релейных элементов изображены на рис. 1.2. Функции на рис. 1.2, а и г обладают зонами неоднозначности, т. е. имеют гистерезисный характер. Средняя часть кривых на рис. 1.2, в и з указывает на существование зоны нечувствительности. Зависимость анодного тока электронной лампы от сеточного напряжения имеет вид кривой, показанной на рис. 1.3, а. Эту кривую можно аппроксимировать в виде двух полупрямых (рис. 1.3, б) или трех отрезков прямых (рис. 1.3, в) в зависимости от того, в каком режиме работает лампа. Часто используемые в современных радиосхемах туннельный диод и диностор имеют характеристики, изображенные соответственно на рис. 1.4, а и б, где  $I$  — ток,  $U$  — напряжение. Эти и другие аналогичные нелинейности, обладающие участками с отрицательным наклоном касательной, требуют для своей реализации наличия внешних источников энергии.

#### § 4. Фазовый портрет динамической системы.

##### Понятие устойчивости движения

Как уже было отмечено выше, исследование поведения динамической системы сводится к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве  $\Phi$ . Структура разбиения пространства  $\Phi$  на фазовые траектории называется фазовым портретом рассматриваемой динамической системы. С геометрической точки зрения под структурой разбиения фазового пространства на траектории понимается геометрическая картина взаиморасположения фазовых траекторий в пространстве  $\Phi$ . Следует отметить, что полное описание фазового портрета для произвольной динамической системы представляет собою очень сложную и до сих пор нерешенную проблему. Однако ряд основных особенностей этой структуры изучен, а для некоторых классов динамических систем в настоящее время получено полное описание фазового портрета.

Основную роль в описании структуры фазового пространства динамической системы играет разделение фазовых траекторий на обыкновенные и особые. К последним принадлежат: особые точки, соответствующие состояниям равновесия системы или ее стационарным движениям; изолированные замкнутые траектории, называемые предельными циклами, которые соответствуют периодическим движениям; сепаратрисные кривые и поверхности, кото-

рые являются границами областей притяжения к различным устойчивым особым траекториям. Особые элементы фазового пространства  $\Phi$  могут образовывать, вообще говоря, интегральные многообразия. Они разделяются на устойчивые, неустойчивые и седловые. Устойчивые состояния равновесия и периодические движения являются простейшими примерами установившихся движений, о которых шла речь в начале этой главы.

Понятие устойчивости движения является в теории нелинейных колебаний одним из основных понятий, поэтому остановимся на нем подробнее. Среди многих определений устойчивости наиболее известны устойчивость по Ляпунову и орбитная устойчивость. В отношении состояния равновесия эти определения совпадают и состоят в следующем. Состояние равновесия  $x = x^*$  называется устойчивым, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать настолько малое число  $\delta(\varepsilon)$ , что для любого другого движения  $x = x(t)$  с начальными условиями, отличающимися от  $x^*$  менее чем на  $\delta$ , при всех последующих значениях  $t$  выполняется неравенство

$$\rho(x(t), x^*) < \varepsilon,$$

где  $\rho(x(t), x^*)$  — расстояние между фазовыми точками с координатами  $x(t)$  и  $x^*$ . Состояние равновесия называется асимптотически устойчивым, если в дополнение к сказанному  $\rho$  стремится к нулю при неограниченном возрастании времени. Характер особой точки определяется характером поведения фазовых траекторий в ее малой окрестности. Рассмотрим фазовый портрет в окрестности состояния равновесия на примере динамической системы, которая описывается тремя дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = X(x, y, z), \dot{y} = Y(x, y, z), \dot{z} = Z(x, y, z) \quad (1.1)$$

с гладкими правыми частями. В состоянии равновесия  $M_0(x^*, y^*, z^*)$  правые части дифференциальных уравнений (1.1) обращаются в нуль. Поведение фазовых траекторий вблизи точки  $M_0$  описывается уравнениями в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_0 \zeta, \\ \dot{\eta} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_0 \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 \zeta. \end{aligned} \quad (1.2)$$

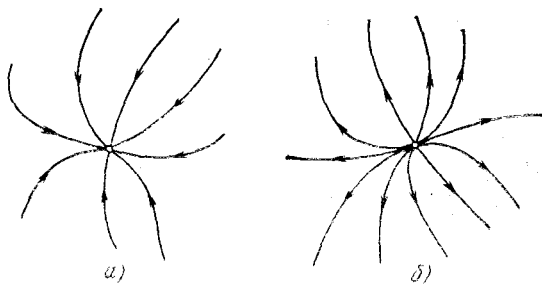


Рис. 1.5

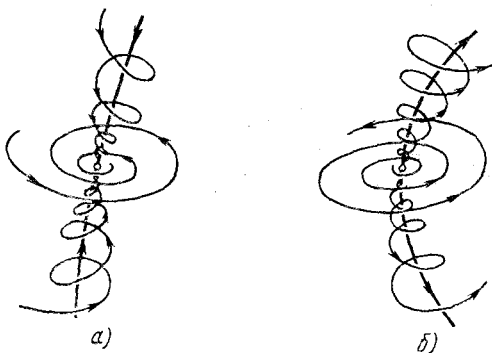


Рис. 1.6

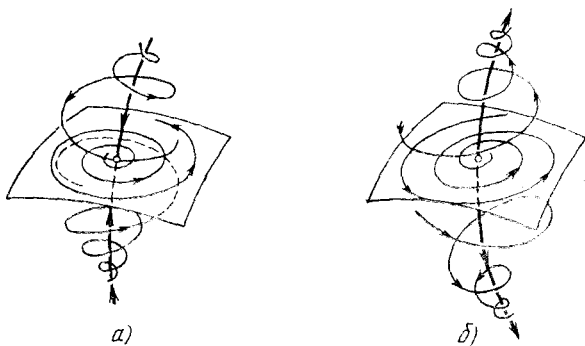


Рис. 1.7

Эти уравнения получаются в результате линеаризации уравнений (1.1) в окрестности состояния равновесия  $(x^*, y^*, z^*)$  относительно малых величин  $\xi = x - x^*$ ,  $\eta = y - y^*$ ,  $\zeta = z - z^*$ . Решение уравнений (1.2) определяется корнями характеристического уравнения

$$\chi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} - \lambda & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.3)$$

в котором все производные вычислены при  $x = x^*$ ,  $y = y^*$ ,  $z = z^*$ . Здесь возможны следующие основные случаи:

1. Корни уравнения (1.3) — действительные отрицательные (положительные) числа. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым (неустойчивым) узлом и изображено на рис. 1.5, *а*, *б*.

2. Один из корней — действительный, два других — комплексные, причем все корни имеют отрицательные (положительные) действительные части. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым (неустойчивым) фокусом (рис. 1.6, *а* и *б*).

3. Один из корней — действительный, два других — комплексные, причем знаки действительного корня и действительных частей двух других — комплексно-сопряженных корней — разные. Состояние равновесия в этом случае изображается особой точкой типа седло-фокус (рис. 1.7, *а* и *б*).

4. Все корни действительные и разных знаков. Этот случай соответствует двум типам особых точек седло-узла, изображенным на рис. 1.8, *а* и *б*.

Для периодических движений понятия устойчивости по Ляпунову и орбитной устойчивости различаются. Периодическое движение  $x = x^*(t)$  называется устойчивым по Ляпунову, если для любого сколь угодно малого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\epsilon)$ , что для всякого другого движения  $x = x(t)$ , для которого  $\rho(x^*(t_0), x(t_0)) < \delta$ , при всех  $t > t_0$  выполняется неравенство  $\rho(x^*(t), x(t)) < \epsilon$  (рис. 1.9). Определение орбитной устойчивости состоит в следующем. Пусть  $\gamma$  — замкнутая фазовая траектория, отвечающая периодическому движению  $x = x^*(t)$ , устойчивость которого исследуется, а  $x = x(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) — произвольная фазовая кривая. Периодическое



движение  $x = x^*(t)$  называется орбитно устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что при выполнении неравенства  $\rho(x(t_0), \gamma) < \delta$  следует

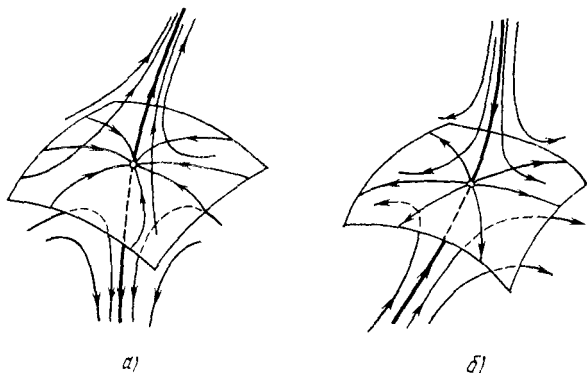


Рис. 1.8

выполнение неравенства  $\rho(x(t), \gamma) < \varepsilon$  для всех значений  $t > t_0$  (рис. 1.10). Этим определениям можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Требование

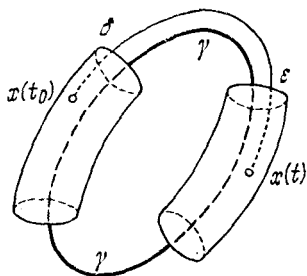


Рис. 1.9

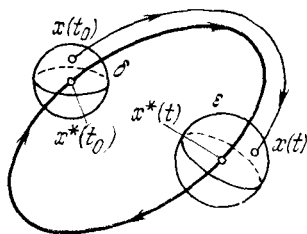


Рис. 1.10

устойчивости по Ляпунову означает, что фазовые точки, расстояние между которыми в начальный момент не превышало  $\delta$ , в дальнейшем будут находиться друг от друга на расстоянии, меньшем  $\varepsilon$ . Требование орбитной устойчивости несколько слабее: если в начальный момент расстояние фазовой точки от замкнутой траектории было меньше  $\delta$ , то в дальнейшем это расстояние не превысит  $\varepsilon$ . Итак, орбитно устойчивое движение может быть неустойчивым по Ляпунову, однако периодическое движение, устойчивое по Ляпунову, всегда орбитно устойчиво.

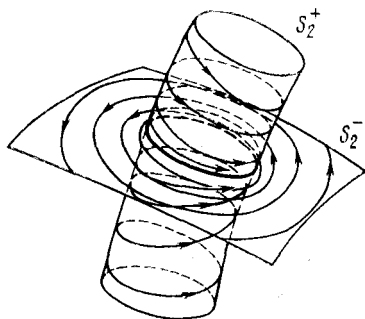


Рис. 1.11

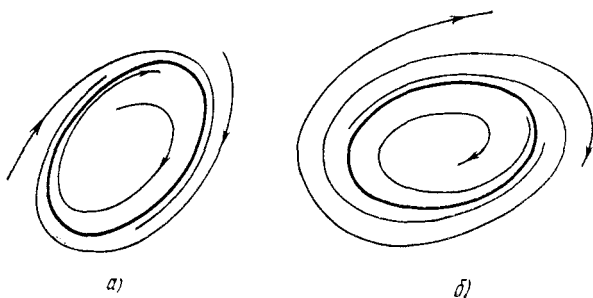


Рис. 1.12

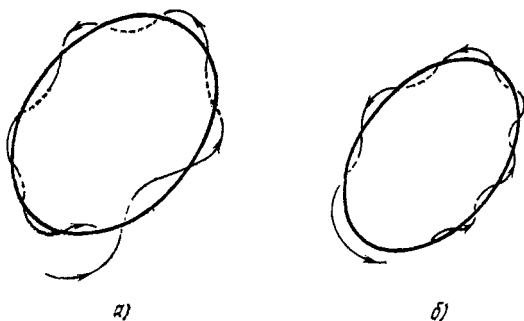


Рис. 1.13

Рассмотрим структуру разбиения фазового пространства на траектории в окрестности периодического движения на примере трехмерного фазового пространства. Пусть  $x = x^*(t)$ ,  $y = y^*(t)$ ,  $z = z^*(t)$  — периодическое решение периода  $\tau$  системы дифференциальных уравнений (1.1). Линеаризуя эти уравнения в окрестности рассматриваемого периодического движения, мы приходим к уравнениям в вариациях вида (1.2), в которых частные производные

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=x^*(t), y=y^*(t), z=z^*(t)}, \dots, \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{x=x^*(t), y=y^*(t), z=z^*(t)}$$

представляют собою периодические функции периода  $\tau$ . Пусть  $\xi^i(t)$ ,  $\eta^i(t)$ ,  $\zeta^i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — фундаментальная система решений этих дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, т. е. система решений, удовлетворяющая начальным условиям  $\xi^i(0) = \delta_{1i}$ ,  $\eta^i(0) = \delta_{2i}$ ,  $\zeta^i(0) = \delta_{3i}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, равный единице при  $i = j$  и нулю при  $i \neq j$ . Характеристическое уравнение для рассматриваемого периодического движения имеет вид

$$\chi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \xi^1(\tau) - \lambda & \eta^1(\tau) & \zeta^1(\tau) \\ \xi^2(\tau) & \eta^2(\tau) - \lambda & \zeta^2(\tau) \\ \xi^3(\tau) & \eta^3(\tau) & \zeta^3(\tau) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

Один из корней этого уравнения всегда равен единице. В зависимости от значений двух других корней возможны следующие основные случаи:

1. Корни действительные и разных знаков. Это — случай седлового периодического движения (рис. 1.11). Через замкнутую траекторию, соответствующую седловому периодическому движению, проходят две интегральные поверхности  $S_2^+$  и  $S_2^-$ , состоящие из фазовых кривых, асимптотически приближающихся к кривой  $\gamma$  при  $t \rightarrow +\infty$  и соответственно при  $t \rightarrow -\infty$ .

2. Корни действительные и отрицательные (положительные). Этот случай, изображенный на рис. 1.12, а и б, соответствует устойчивому (неустойчивому) узловому периодическому движению.

3. Корни комплексные с отрицательными (положительными) действительными частями. В этом случае, изображенном на рис. 1.13, а и б, фазовые кривые возмущенного движения напоминают винтовые линии, осью которых является замкнутая траектория.

## Г Л А В А 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этой главе на ряде конкретных примеров будут изучены колебательные процессы в системах, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями первого порядка, в консервативных системах второго порядка, а также в системах любого порядка с полной диссипацией энергии.

#### § 1. Системы первого порядка

Динамической системой первого порядка (или системой с половинной степенью свободы) называется динамическая модель, движение которой описывается одним дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

где переменная  $x$  характеризует состояние системы, а функция  $f(x)$  предполагается аналитической на всей прямой  $x$ , за исключением, быть может, конечного числа точек \*). Фазовое пространство рассматриваемой системы одномерно, поэтому исследуемое движение можно представить движением изображающей точки на фазовой прямой.

Если по своему физическому смыслу переменная  $x$  является периодической с периодом  $2\pi$ , т. е. значения  $x$  и  $x + 2\pi$  соответствуют одному и тому же состоянию системы, то функция  $f(x)$  будет также периодической с периодом  $2\pi$ . Фазовым пространством такой системы

\*) Функция  $f(x)$  называется аналитической, если в окрестности каждой точки она может быть разложена в степенной ряд с отличным от нуля радиусом сходимости.

будет отрезок прямой длиной  $2\pi$  с отождествленными концами. Соединив эти концы, получим окружность единичного радиуса.

В общем случае будем рассматривать фазовое пространство в виде бесконечной прямой (рис. 2.1). Основными элементами, которые полностью определяют разбиение фазовой прямой на траектории, являются состояния

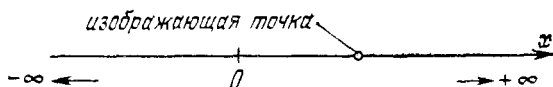


Рис. 2.1

равновесия системы. Равновесные значения  $x = x_k$ , обращающие функцию  $f(x)$  в нуль, представляют собой самостоятельные фазовые траектории. Остальные траектории состоят из отрезков фазовой прямой, заключенных между корнями уравнения  $f(x) = 0$ , или из полупрямых, образующих интервалы между одним из корней и бесконечностью. Направление движения изображающей точки по этим траекториям определяет знак функции  $f(x)$ : при  $f(x) > 0$  изображающая точка движется вправо,

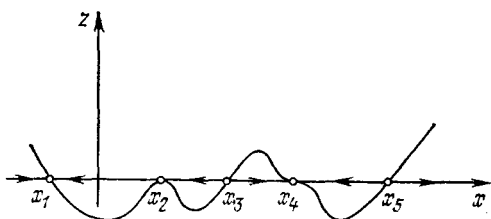


Рис. 2.2

а при  $f(x) < 0$  — влево. Зная вид кривой  $z = f(x)$ , нетрудно установить разбиение фазовой прямой на траектории. Пример такого разбиения приведен на рис. 2.2, где стрелками указано направление движения изображающей точки. Из вида разбиения фазовой прямой (рис. 2.2) на траектории непосредственно следует, что состояния равновесия системы в точках  $x = x_1$ ,  $x = x_4$  являются устойчивыми, а в точках  $x = x_2$ ,  $x = x_3$ ,  $x = x_5$  — неустойчивыми.

На рис. 2.2 видно, что в устойчивых состояниях равновесия производная  $f'(x_k) < 0$ , а в неустойчивых состояниях  $f'(x_k) > 0$ . Значение  $f'(x_k) = 0$  может быть как в точках устойчивого, так и неустойчивого состояния равновесия (см., например, точки  $x = x_2$ ,  $x = x_4$  на рис. 2.2). Поскольку характер движения в системе первого порядка полностью определяется видом функции  $f(x)$ , представляет интерес рассмотреть случай, когда эта функция зависит от некоторого параметра  $\lambda$ , и изучить влияние параметра  $\lambda$  на характер фазового портрета рассматриваемой системы.

Для этого, согласно предыдущему, достаточно изучить поведение корней уравнения

$$f(x, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

в зависимости от изменения параметра  $\lambda$ . Уравнение (2.2) можно представить на плоскости  $x\lambda$  в виде кривой (рис. 2.3).

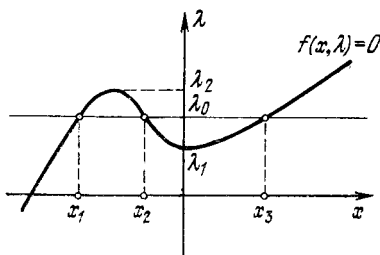


Рис. 2.3

Точки пересечения прямой  $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$  и кривой (2.2) определяют значения  $x = x_k$  в состояниях равновесия, число которых и характеризует качественную картину разбиения фазовой прямой на траектории. Из рис. 2.3 следует, что при значениях  $\lambda_0$  в интервале  $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$  система обладает тремя состояниями равновесия, а при значениях  $\lambda_0 < \lambda_1$  или  $\lambda_0 > \lambda_2$  — одним состоянием равновесия. Значения параметра  $\lambda$ , при переходе через которые происходит качественное изменение фазового портрета системы, называются бифуркационными ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на рис. 2.3). Устойчивость состояний равновесия по-прежнему определяется знаком производной по  $x$ : равновесие в точке  $x = x_k$  устойчиво, если  $f'_x(x_k, \lambda_0) < 0$ , и неустойчиво, если  $f'_x(x_k, \lambda_0) > 0$ .

Устойчивость состояний равновесия легко определить по бифуркационной диаграмме, которая получается из рис. 2.3 путем несложного дополнения. Заметив, что кривая  $f(x, \lambda) = 0$  разделяет плоскость  $x\lambda$  на две области:  $f(x, \lambda) > 0$  и  $f(x, \lambda) < 0$ , заштрихуем область, в которой  $f(x, \lambda) > 0$ . Тогда, согласно смыслу производной  $f'_x(x, \lambda)$ , если точка, соответствующая состоянию равновесия  $x =$

$= x_k$ , лежит на кривой  $f(x, \lambda) = 0$  справа от заштрихованной области, то  $f'_x(x_k, \lambda) < 0$ , а если слева, то  $f'_x(x_k, \lambda) > 0$ . В результате получаем бифуркационную диаграмму (рис. 2.4), на которой точками отмечены участки кривой

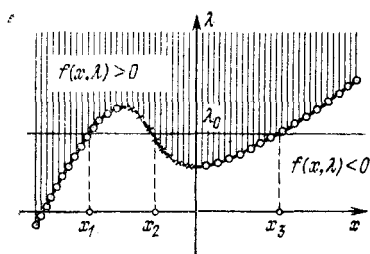


Рис. 2.4

$f(x, \lambda) = 0$ , соответствующие устойчивым состояниям равновесия, а крестиками — неустойчивым состояниям равновесия. Изучение фазового портрета системы первого порядка позволяет сделать следующий вывод: если функция  $f(x)$  аналитическая на всей прямой, то периодические движения

в системе невозможны. Однако, как будет видно из приводимых ниже примеров, в случае неоднозначности функции  $f(x)$  могут возникнуть условия, при которых в системе возможны периодические движения.

Систему первого порядка можно рассматривать с точки зрения динамики как вырожденную систему второго порядка. В самом деле, уравнение динамики автономной системы с одной степенью свободы, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$\dot{q} = F(q, \dot{q}). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) представляет собою оператор, который по заданным в момент времени  $t$  величинам  $q, \dot{q}$  позволяет найти эти же величины в момент времени  $t + \Delta t$ . Следовательно, состояние системы с одной степенью свободы определяется двумя величинами: обобщенной координатой и обобщенной скоростью. Рассмотрим три логически возможных случая, когда динамика системы, описываемой уравнением (2.3), сводится к изучению решений некоторого дифференциального уравнения первого порядка.

1. Обобщенная координата  $q$  не входит в уравнение (2.3) явно. В этом случае уравнение (2.3) принимает вид

$$\dot{q} = f(\dot{q}). \quad (2.4)$$

Отсюда, вводя обозначение  $x = \dot{q}$ , приходим к уравнению (2.1). Каков физический смысл решений уравнения (2.1) в рассматриваемом случае? Состояния равновесия для

уравнения (2.1), определяемые корнями уравнения  $f(x) = 0$ , соответствуют стационарным движениям исходной системы. При этом координата  $q$  изменяется во времени с постоянной скоростью  $\dot{q}_k = x_k = \text{const}$ , где  $f(x_k) = 0$ .

Нулевой корень уравнения  $f(x) = 0$  соответствует одномерному многообразию состояний равновесия исходной системы, потому что уравнению (2.4) удовлетворяет множество значений  $q = \text{const}$ . Устойчивость этого многообразия определяется устойчивостью точки  $x = 0$  на фазовой прямой  $x$ .  $\circ$

2. Уравнение (2.3) может быть представлено в виде

$$\mu \ddot{q} = F_1(q, \dot{q}), \quad (2.5)$$

где  $\mu$  — некоторый параметр, который предполагается достаточно малым. В этом случае мы приходим к дифференциальному уравнению с малым параметром при старшей производной. Фазовая плоскость при  $\mu \rightarrow 0$  разбивается на две области: область быстрых движений и область медленных движений (см. гл. 6). Медленные движения описываются дифференциальным уравнением первого порядка  $F_1(q, \dot{q}) = 0$ . Разрешая это уравнение относительно  $\dot{q}$  (что, впрочем, не является существенным), получаем дифференциальное уравнение вида (2.1).

Рассматриваемый случай может возникнуть, например, при исследовании движения тела в вязкой среде, когда масса тела пренебрежимо мала. При однозначной функции  $f(x)$  такая динамическая модель оказывается вполне корректной, однако в случае неоднозначности  $f(x)$  хотя бы на некотором интервале изменения  $x$  можно прийти к противоречивой модели. В последнем случае возникающее противоречие устраняется или при помощи дополнительного постулата о мгновенном перескоке изображающей точки в некоторое положение на фазовой прямой, которое определяется или из энергетических соображений, или при помощи рассмотрения предельных движений системы второго порядка при стремлении малого параметра  $\mu$  к нулю.

3. Уравнение (2.3) может быть представлено в виде  $\frac{d}{dt} \Phi(q, \dot{q}) = 0$ . Отсюда получаем первый интеграл движения

$$\Phi(q, \dot{q}) = h \quad (h = \text{const}), \quad (2.6)$$



который при заданном значении произвольной постоянной  $h$  и является дифференциальным уравнением первого порядка, описывающим динамику первоначальной системы в рассматриваемом случае.

После этих замечаний общего характера перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

**Пример 1. Однофазный асинхронный двигатель [1].** Движение ротора асинхронного двигателя, статор которого питается однофазным переменным током, описывается уравнением

$$I \frac{d\omega}{dt} = M(\omega) - N(\omega), \quad (2.7)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения ротора,  $I$  — момент инерции ротора,  $M(\omega)$  — электромеханический вращающий момент,  $N(\omega)$  — момент сил трения на валу ротора. Зависимость вращающего момента  $z = M(\omega)$  от числа оборотов ротора однофазного двигателя имеет вид, изображенный на рис. 2.5. На этой же диаграмме показан график зависимости  $z = N(\omega)$ , который получается при учете сил сухого и вязкого трения. Состояния равновесия

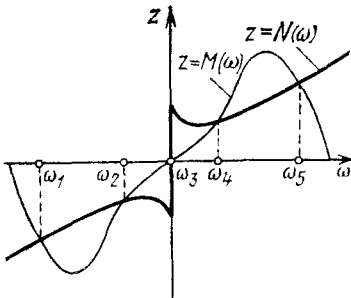


Рис. 2.5

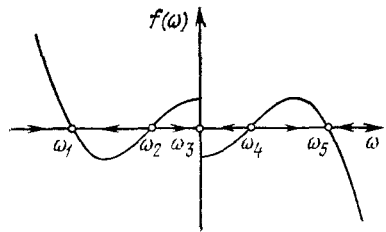


Рис. 2.6

для уравнения (2.7), соответствующие режимам равномерного вращения ротора (или его состоянию покоя при  $\omega = 0$ ), определяются корнями уравнения

$$M(\omega) - N(\omega) = 0, \quad (2.8)$$

или, что то же самое, абсциссами точек пересечения графиков функций  $z = M(\omega)$  и  $z = N(\omega)$  на рис. 2.5.

Функция  $f(\omega) = \frac{1}{I} [M(\omega) - N(\omega)]$ , график которой приведен на рис. 2.6, позволяет найти разбиение фазовой

прямой  $\omega$  на траектории и определить на ней устойчивость состояний равновесия. Поскольку корни уравнения (2.8) расположены симметрично относительно начала координат, динамика рассматриваемой системы не зависит от направления вращения ротора. Согласно рис. 2.6, состояние покоя  $\omega = 0$  ротора и его вращения с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_5$  устойчивы, а вращения с угловыми скоростями  $\omega_2$  и  $\omega_4$  неустойчивы. Отсюда следует, что ротор такого двигателя, находясь в покое, не может прийти во вращение «без посторонней помощи». Если мы хотим, чтобы ротор вращался с угловой скоростью  $\omega_5$ , ему следует сообщить первоначальную угловую скорость, превышающую  $\omega_4$ .

Заметим, что аналогичным образом можно исследовать вращение любого динамически осесимметричного тела, движение которого описывается уравнением вида (2.7). Более того, приводимый ниже пример показывает, что движение системы совершенно другой природы также описывается уравнением вида (2.7).

**Пример 2. Движение судна на подводных крыльях.** Уравнение прямолинейного движения судна на подводных крыльях без учета килевой и бортовой качки может быть записано в виде

$$\frac{dv}{dt} = T(v) - S(v), \quad (2.9)$$

где  $v$  — скорость судна,  $T(v)$  — сила тяги винта и  $S(v)$  — результирующая сила сопротивления движению, отнесенные к единице массы судна. При заданном режиме работы двигателя сила тяги  $T(v)$  обычно монотонно убывает с увеличением скорости, а график зависимости  $S(v)$  представляет собой возрастающую кривую, которую имеет на некотором интервале скоростей падающий участок (рис. 2.7). Наличие падающего участка на кривой  $S = S(v)$  связано с изменением условий движения судна при выходе корпуса судна из воды. При малых скоростях движения судно на подводных крыльях ведет себя как судно с обычным корпусом: с увеличением скорости сопротивление движению возрастает. Однако по мере увеличения скорости возникает гидродинамическая подъемная сила, в результате чего корпус судна постепенно выходит из воды, и на интервале скоростей, при которых судно полностью выходит из воды (рис. 2.8), сила сопротивления движению уменьшается с увеличением скорости. После

этого судно переходит в режим движения на подводных крыльях. При дальнейшем повышении скорости движения судна поверхность погруженных в воду стоек с подводными крыльями почти не уменьшается, и сопротивление движению снова возрастает с увеличением скорости.

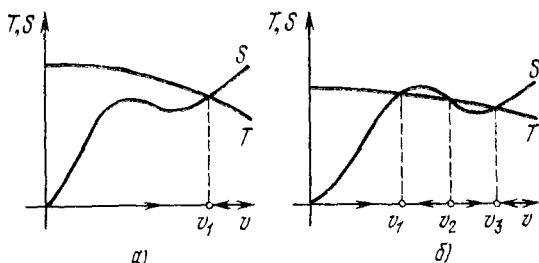


Рис. 2.7

Состояния равновесия для уравнения (2.9), которые соответствуют режимам равномерного движения судна, определяются уравнением

$$T(v) = S(v).$$

Здесь возможны случаи, когда имеется либо один, либо три режима равномерного движения судна на подводных крыльях. Согласно рис. 2.7, на котором эти случаи изображены, один режим является всегда устойчивым

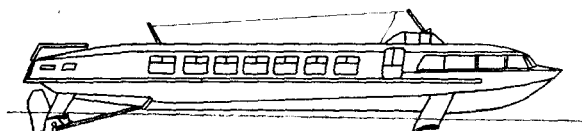


Рис. 2.8

(рис. 2.7, а), а при наличии трех режимов (рис. 2.7, б) движение со скоростями  $v_1$  и  $v_3$  устойчиво, а со скоростью  $v_2$  — неустойчиво.

**Пример 3. Осциллятор с заданной энергией.** Уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (2.10)$$

где производная берется по безразмерному времени  $\tau = \omega t$  ( $\omega$  — круговая частота), допускает первый интеграл

$$\dot{x}^2 + x^2 = 2h, \quad (2.11)$$

выражающий сохранение механической энергии осциллятора. Пусть задана величина

$$2h = R^2 = \text{const.}$$

Тогда движение осциллятора описывается дифференциальным уравнением (2.11), т. е. мы получаем динамическую систему первого порядка. Введем новую переменную  $\varphi$  посредством соотношений

$$x = R \sin \varphi, \quad \dot{x} = R \cos \varphi, \quad (2.12)$$

геометрический смысл которых ясен из рис. 2.9. Соотношениями (2.12) уравнение (2.11) удовлетворяется тождественно. Найдем из (2.12) величину  $\ddot{x} = -R\dot{\varphi} \sin \varphi$ . Подставляя это выражение вместе с (2.12) в уравнение (2.10), получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = 1, \quad (2.13)$$

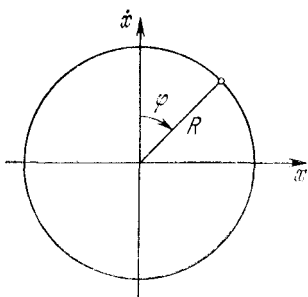


Рис. 2.9

которое и описывает движение осциллятора в рассматриваемом случае. Из соотношений (2.12) следует, что введенная нами переменная  $\varphi$  является периодической с периодом  $2\pi$ , поэтому в качестве фазового пространства рассматриваемой системы можно взять окружность, изображенную на рис. 2.9.

Согласно уравнению (2.13), изображающая точка при любых начальных условиях движется по фазовой окружности по ходу часовой стрелки с постоянной скоростью, что и соответствует гармоническим колебаниям осциллятора.

## § 2. Консервативные системы второго порядка

Гармонический осциллятор, рассмотренный выше, представляет собою пример автономной консервативной системы второго порядка. Как мы видели, такая система обладает интегралом движения (обычно интегралом сохранения энергии). Фиксируя значение произвольной постоянной в интеграле движения, мы получаем динамическую систему с одномерным фазовым пространством,

которое может представлять замкнутую или незамкнутую кривую, состоящую из одной или нескольких фазовых траекторий. Придавая произвольной постоянной различные значения, получим множество одномерных фазовых пространств, которые в совокупности образуют фазовое пространство консервативной системы второго порядка. В конечном итоге двумерное фазовое пространство этой системы оказывается разбитым на фазовые траектории. Замкнутая фазовая траектория соответствует, как известно, периодическому движению в системе.

Периодические движения в консервативной системе отличаются той особенностью, что они никогда не бывают изолированными. Это связано с тем, что если при некотором значении произвольной постоянной в интеграле движения мы имеем замкнутую фазовую траекторию, то в силу непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных условий и при близких значениях этой постоянной фазовые траектории будут оставаться замкнутыми. Таким образом, замкнутые траектории образуют континуум, заполняя целые области двумерного фазового пространства. При этом возможны два случая: в первом случае замкнутые траектории, вложенные одна в другую, стягиваются либо к особой точке типа центра, либо к сепаратрисам седловых особых точек. В случае, когда фазовое пространство представляет собою цилиндрическую поверхность, замкнутые траектории могут охватывать фазовый цилиндр.

Мы видим, что изучение консервативных систем второго порядка позволяет довольно простыми средствами полностью исследовать их динамику. Решение этой задачи оказывается полезным также при изучении движений систем, близких к консервативным. Рассмотрим примеры консервативных систем.

**Пример 1. Маятник на вращающейся платформе.** Пусть физический маятник, представляющий собою тело вращения с главными моментами инерции  $A$  и  $C$ , может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси подвеса. Основание подвеса вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси. Рассмотрим общий случай, когда точка подвеса маятника не лежит на оси вращения платформы, на которой установлен маятник (рис. 2.10). Пусть  $a, b, c$  — декартовы координаты точки подвеса маятника в системе координат  $Oxyz$ , скрепленной с платформой так, что ось  $Oz$  совпадает с осью вращения

платформы,  $m$  — масса маятника,  $l$  — расстояние его центра масс от оси подвеса,  $\theta$  — угол отклонения маятника от вертикали, тогда функция Лагранжа  $L$  имеет вид

$$L = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (A - C) \omega^2 \sin^2 \theta + mal\omega^2 \sin \theta + mgl \cos \theta.$$

Если пренебречь трением и ввести безразмерные величины

$$t_{\text{нов}} = t \sqrt{\frac{mgl}{A}}, \quad \alpha = \frac{(A - C) \omega^2}{2mgl}, \quad \beta = \frac{a\omega^2}{g}, \quad (2.14)$$

то движение маятника описывается уравнением

$$\ddot{\theta} - \alpha \sin 2\theta - \beta \cos \theta + \sin \theta = 0. \quad (2.15)$$

Из уравнения (2.15) непосредственно видно, что величина  $b$  не влияет на динамику маятника. Фазовым пространством рассматриваемой системы является цилиндр с координатами  $\theta, \dot{\theta}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ). Поскольку функция Лагранжа  $L$  не зависит явно от времени, имеет место обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \alpha \sin^2 \theta - \beta \sin \theta - \cos \theta = h. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) определяет связь между  $\theta$  и  $\dot{\theta}$  и, тем самым, является уравнением фазовых траекторий. Из (2.16) следует, что

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2 [f(\theta) + h]}. \quad (2.17)$$

Таким образом, характер поведения функции

$$f(\theta) = \alpha \sin^2 \theta + \beta \sin \theta + \cos \theta \quad (2.18)$$

полностью определяет характер разбиения фазового цилиндра  $\theta, \dot{\theta}$  на траектории. Используя соотношение (2.17), нетрудно получить фазовую траекторию для любого заданного значения  $h$ . Для этого нужно построить график функции (2.18) и затем, задавая значения  $\theta$ , последовательно извлекать квадратные корни из выражения  $2[f(\theta) + h]$ , откладывая получаемые значения на фазовом цилиндре от оси  $\theta$  в положительном и отрицательном направлениях оси  $\dot{\theta}$ . Примеры такого построения приведены на

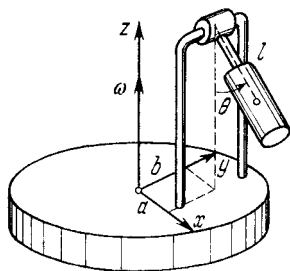
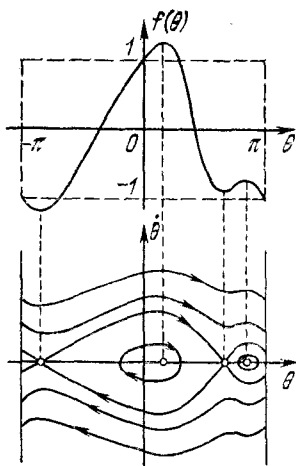
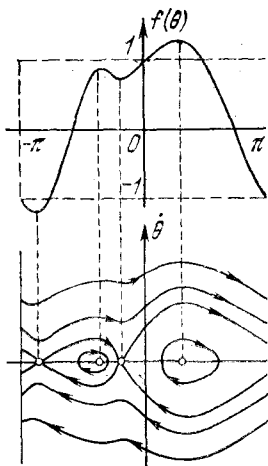


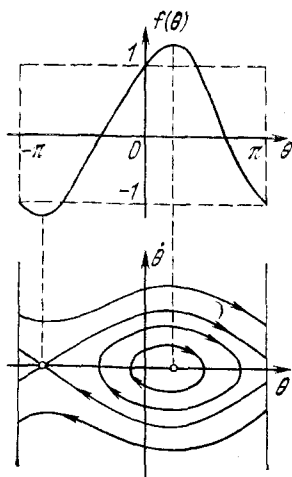
Рис. 2.10



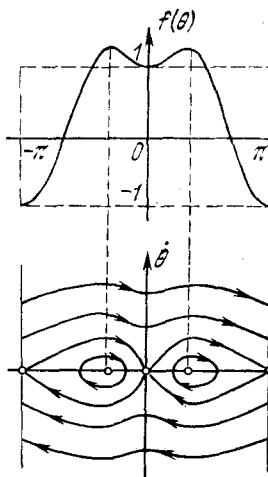
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.11

рис. 2.11. Экстремальные значения на графике функции  $f(\theta)$  соответствуют состояниям равновесия уравнения (2.15), т. е. особым точкам на фазовом цилиндре  $\theta, \dot{\theta}$ . Из выражения (2.18) функции  $f(\theta)$  следует, что в зависимости от значений физических параметров  $\alpha, \beta$  могут существовать или две, или четыре особые точки. Бифуркационное соотношение параметров  $\alpha, \beta$ , разделяющее эти случаи, находится из условия слияния двух особых точек, что осуществляется при одновременном выполнении двух соотношений:  $f'(\theta) = 0$  и  $f''(\theta) = 0$  или, согласно (2.18),

$$\alpha \sin 2\theta + \beta \cos \theta - \sin \theta = 0, \quad 2\alpha \cos 2\theta - \beta \sin \theta - \cos \theta = 0.$$

Разрешая эти соотношения относительно  $\alpha$  и  $\beta$ , получаем параметрическое представление бифуркационной кривой  $\beta = \beta(\alpha)$ :

$$\alpha = (2 \cos^3 \theta)^{-1}, \quad \beta = -\operatorname{tg}^3 \theta, \quad (2.19)$$

где  $\theta$  является текущим параметром. Из выражений (2.14) следует, что параметры  $\alpha, \beta$  могут принимать любые действительные значения ( $-\infty < \alpha < +\infty, -\infty < \beta < +\infty$ ). Однако достаточно рассмотреть лишь область  $\beta \geq 0$ , потому что случай  $\beta < 0$  сводится к случаю  $\beta > 0$  путем замены  $\theta$  на  $-\theta$ . Согласно (2.19), на полуплоскости  $\alpha\beta, \beta > 0$ , протекают две ветви кривой  $\beta = \beta(\alpha)$ , соответствующие изменению  $\theta$  в интервале  $-\pi/2 < \theta \leq 0$  для значений  $\alpha > 0$  и в интервале  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  для значений

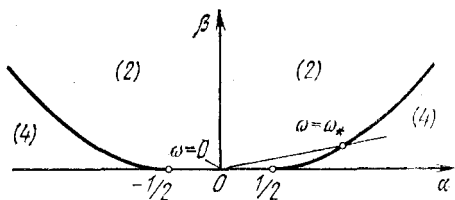


Рис. 2.12

$\alpha < 0$  (рис. 2.12). Кривая (2.19) разбивает полуплоскость  $\beta > 0$  на области (2) и (4). При параметрах  $\alpha, \beta$ , находящихся в области (4), на фазовом цилиндре имеются четыре особые точки (рис. 2.11, а, б), а в области (2) — две особые точки (рис. 2.11, в). Для значений парамет-



ров  $\alpha$ ,  $\beta$  на прямой  $\beta = 0$  график кривой (2.19) является симметричным относительно оси  $\theta = 0$ . В качестве примера на рис. 2.11, *г* изображена функция  $f(\theta)$  и соответствующий фазовый портрет системы, которые получаются при  $\alpha < -0,5$ ;  $\beta = 0$ . Для параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ , принимающих значения  $\alpha = \pm 0,5$ ;  $\beta = 0$ , происходит слияние трех особых точек: при  $\theta = 0$  для  $\alpha = +0,5$ ;  $\beta = 0$  и при  $\theta = \pm\pi$  для  $\alpha = -0,5$ ;  $\beta = 0$ .

Проведенное исследование показывает, что вид разбиения фазового цилиндра на траектории зависит от угловой скорости  $\omega$  вращения платформы и от знака разности  $A - C$ . При заданных параметрах системы и возрастании  $\omega$  от нуля изображающая точка на плоскости  $\alpha\beta$  будет двигаться, согласно выражениям (2.14), из начала координат вдоль прямой  $\beta = \frac{2mal}{A-C} \alpha$ . Если выполнено неравенство  $mal < |A - C|$ , то найдется такое значение  $\omega = \omega_*$ , при котором изображающая точка пересечет бифуркационную кривую (2.19) и затем при  $\omega > \omega_*$  окажется в области (4). Критическое значение  $\omega_*$  определяется выражением

$$\omega_*^2 = \frac{g\gamma}{a(1-\gamma^{2/3})^{3/2}}, \quad \gamma = \frac{mal}{|A-C|}.$$

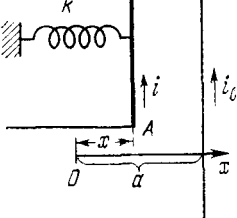


Рис. 2.13

В случае прямой, изображенной на рис. 2.12, при переходе  $\omega$  через значение  $\omega = \omega_*$  в сторону возрастания  $\omega$  фазовый портрет системы, изображенный на рис. 2.11, *г*, превращается в фазовый портрет, изображенный на рис. 2.11, *а*. В момент достижения значения  $\omega = \omega_*$  на фазовом цилиндре рождается сложная особая точка типа точки возврата первого рода, которая затем распадается на особую точку типа центра и на седловую особую точку.

Замкнутые фазовые траектории, охватывающие особую точку типа центра, соответствуют колебательным движениям маятника, а кривые, охватывающие фазовый цилиндр, — вращательным движениям маятника вокруг своей оси подвеса.

**Пример 2.** Движение отрезка провода с током [1]. Пусть неподвижный бесконечный прямолинейный провод,

питаемый постоянным током  $i_0$ , взаимодействует с параллельным ему отрезком провода  $AB$  длины  $l$  и массы  $m$ . К подвижному проводу  $AB$ , удерживаемому пружиной жесткости  $k$ , при помощи перпендикулярных ему проводников подводится постоянный ток  $i$  (рис. 2.13). Возьмем за начало отсчета на оси  $Ox$  то положение провода, при котором пружина не деформирована, и обозначим через  $a$  координату провода с током  $i_0$ . Будем предполагать, что отрезок  $AB$  может перемещаться вдоль направления  $Ox$  в области  $x < a$ , оставаясь всегда параллельным неподвижному проводу. Тогда силу взаимодействия между проводами можно принять равной  $\frac{2blii_0}{a-x}$ , где значение  $b$  определяется используемой системой единиц. Принимая во внимание силу пружины  $-kx$ , получим следующее выражение результирующей силы, действующей на провод  $AB$ :

$$F = -kx + \frac{2blii_0}{a-x}.$$

Отсюда следует, что сила  $F$  является потенциальной, поэтому движение провода  $AB$  описывается функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - 2bli_0 \ln(a-x).$$

В безразмерных величинах

$$t_{\text{нов}} = t \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{2bli_0}{ka^2}$$

уравнение движения провода  $AB$  имеет вид

$$\ddot{\xi} + \xi - \frac{\lambda}{1-\xi} = 0 \quad (\xi < 1).$$

Следовательно, параметр  $\lambda$  и координата  $\xi_0$  положения равновесия провода  $AB$  связаны соотношением

$$f(\xi_0, \lambda) \equiv \xi_0^2 - \xi_0 + \lambda = 0, \quad (2.20)$$

которое представляет собой уравнение (2.2), рассмотренное в § 1. Согласно (2.20), бифуркационная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 2.14, где светлыми точками обозначены устойчивые состояния равновесия, а крестиками — неустойчивые. При значениях  $0 < \lambda < 1/4$  сис-

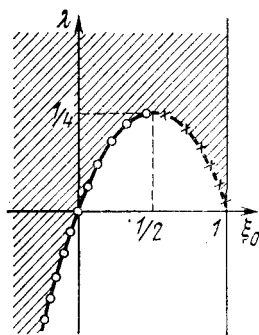


Рис. 2.14

тема обладает двумя состояниями равновесия: устойчивым и неустойчивым, а при  $\lambda < 0$  (знак  $\lambda$  изменяется при изменении направления одного из токов) — одним устойчивым состоянием равновесия. В точке  $(1/2, 1/4)$  производная  $f'_\xi(\xi_0, \lambda) = 0$ , поэтому  $\lambda = 1/4$  есть бифуркационное значение параметра. Для построения фазового портрета рассматриваемой системы напомним интеграл энергии. В безразмерных величинах интеграл энергии имеет вид

$$\frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} \xi^2 + \lambda \ln(1 - \xi) = h. \quad (2.21)$$

Отсюда  $\dot{\xi} = \sqrt{2h + f(\xi)}$ , где  $f(\xi) = -2\lambda \ln(1 - \xi) - \xi^2$ . При помощи графика функции  $f(\xi)$  и построения, аналогичного проведенному в предыдущем примере, получаем

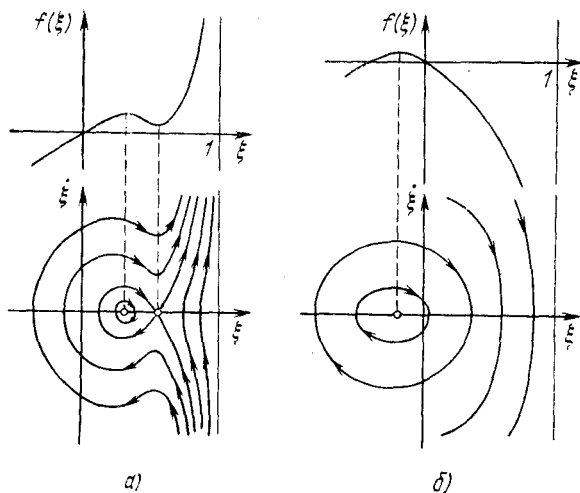


Рис. 2.15

разбиение фазовой полуплоскости  $\xi < 1$  на траектории, изображенное на рис. 2.15, а для случая  $0 < \lambda < 1/4$  и на рис. 2.15, б для случая  $\lambda < 0$ . Подставляя в интеграл энергии (2.21) координаты седловой точки  $\xi_* = \frac{1}{2} +$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, \dot{\xi}_* = 0, \text{ находим уравнение сепаратрисы} \quad (2.22)$$

$$\xi + \xi^2 - \xi_*^2 + 2\lambda \ln \frac{1 - \xi}{1 - \xi_*} = 0.$$

Фазовый портрет рис. 2.15, *a* указывает на то, что при начальных условиях, при которых фазовая точка лежит внутри сепаратрисы (2.22), отрезок провода *AB* всегда совершает периодическое движение. При любых начальных условиях вне сепаратрисы (2.22) колебательное движение провода невозможно. В случае  $\lambda < 0$  (см. рис. 2.15, *b*) провод *AB* при любых начальных условиях совершает колебания.

При значениях параметра  $\lambda$  в области  $\lambda > 1/4$  система не имеет состояний равновесия. Фазовый портрет для этого случая изображен на рис. 2.16. При любых начальных условиях провод *AB* в конце концов приближается с возрастающей скоростью к бесконечному проводу.

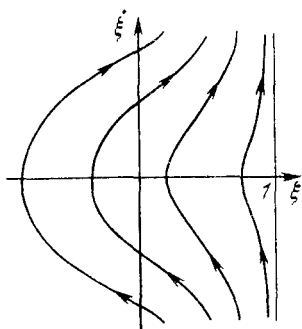


Рис. 2.16

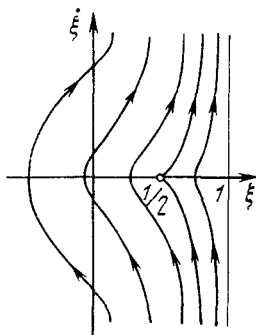


Рис. 2.17

При бифуркационном значении  $\lambda = 1/4$  фазовый портрет системы имеет вид, изображенный на рис. 2.17. На фазовой полуплоскости  $\xi < 1$  в этом случае имеется единственная особая точка ( $\xi = 1/2$ ,  $\dot{\xi} = 0$ ), которую можно рассматривать как результат слияния двух особых точек: центра и седла. Периодические движения в системе при  $\lambda = 1/4$  также невозможны.

### § 3. Системы с полной диссипацией энергии

Рассеяние энергии, связанное с наличием трения, оказывает существенное влияние на характер движения динамической системы, поэтому изучение этого влияния представляет определенный интерес. Наиболее простые закономерности выявляются в системе с полной дисси-

пацией энергии, т. е. в такой системе без источников энергии, в которой силы трения действуют по всем степеням свободы. Рассмотрим сначала простейший пример системы с полной диссипацией энергии.

**Пример. Линейный осциллятор с вязким трением.** Предположим, что сила вязкого трения пропорциональна скорости, тогда малые колебания осциллятора описываются уравнением

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = 0,$$

где  $m$  — масса,  $h$  — коэффициент трения,  $k$  — коэффициент упругости осциллятора. Электрическим аналогом этой системы служит колебательный контур с омическим сопротивлением  $R$ , подчиняющийся уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Здесь  $q$  — заряд конденсатора,  $C$  — емкость,  $L$  — индуктивность. В безразмерных величинах  $x = \frac{z}{z_0} = \frac{q}{q_0}$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}}t = t(\sqrt{LC})^{-1}$ ,  $2\delta = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{h}{\sqrt{mk}}$  оба эти уравнения записываются в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0. \quad (2.23)$$

В отсутствие вязкого трения ( $\delta = 0$ ) получаем консервативную систему. Фазовые траектории на плоскости  $x\dot{x}$  представляют собой concentрические окружности с центром в начале координат. Однако для любого сколь угодно малого  $\delta$  ( $0 < \delta \ll 1$ ) фазовый портрет претерпевает качественные изменения. В самом деле, общим решением уравнения (2.23) при  $0 < \delta \ll 1$  является

$$x = Ae^{-\delta\tau} \cos(\omega\tau + \alpha),$$

где  $\omega = \sqrt{1 - \delta^2}$ ;  $A$ ,  $\alpha$  — произвольные постоянные. Согласно этому решению, параметрические уравнения траекторий на фазовой плоскости  $xu$  имеют вид

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-\delta\tau} \cos(\omega\tau + \alpha), \\ y = \dot{x} &= -Ae^{-\delta\tau} [\delta \cos(\omega\tau + \alpha) + \omega \sin(\omega\tau + \alpha)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Если ввести переменные  $u = \omega x$ ,  $v = y + \delta x$ , то уравнения фазовых траекторий на плоскости  $uv$  в полярных координатах  $\rho$ ,  $\varphi$  ( $u = \rho \cos \varphi$ ,  $v = \rho \sin \varphi$ ) принимают

вид

$$\rho = \omega A e^{-\delta \tau}, \quad \varphi = -(\omega \tau + \alpha),$$

или, после исключения времени  $\tau$ ,  $\rho = C \exp \frac{\delta}{\omega} \varphi$ , где  $C$  — новая произвольная постоянная.

Таким образом, на плоскости  $uv$  фазовыми траекториями служит семейство логарифмических спиралей с асимптотической точкой в начале координат. На плоскости  $xu$  фазовые траектории также представляют собою спирали, скручивающиеся к началу координат (рис. 2.18).

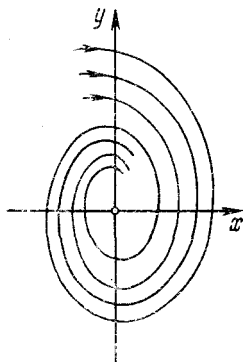


Рис. 2.18

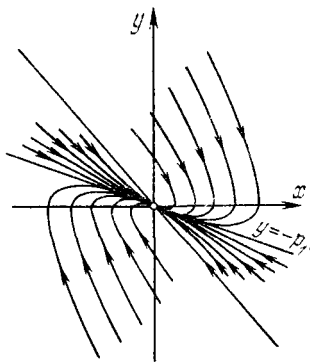


Рис. 2.19

Двигаясь по любой из этих фазовых траекторий, изображающая точка асимптотически (при  $t \rightarrow +\infty$ ) приближается к началу координат, где находится особая точка — устойчивый фокус. Точка  $x = 0$ ,  $y = 0$  представляет собою отдельную фазовую траекторию, соответствующую асимптотически устойчивому состоянию равновесия осциллятора.

Если коэффициент вязкого трения достаточно велик ( $\delta > 1$ ), то общее решение уравнения (2.23) записывается в виде

$$x = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t}, \quad p_{1,2} = \frac{1}{2} (-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}),$$

где  $A$ ,  $B$  — произвольные постоянные. Отсюда следует, что при любых начальных условиях движение затухает по экспоненциальному закону. В этом случае семейство интегральных кривых  $(y + p_1 x)^{p_1} = C (y + p_2 x)^{p_2}$  представляет собой на плоскости  $xu$  деформированные пара-

болы, касающиеся прямой  $y = -p_1x$  (рис. 2.19, где стрелками отмечено направление движения изображающей точки). Единственная особая точка этого семейства, как и в предыдущем случае, находится в начале координат и представляет собою устойчивый узел.

В граничном случае ( $\delta = 1$ ) также получаем семейство интегральных кривых параболического типа, а в начале координат — устойчивую особую точку типа узла.

Таким образом, при любых значениях физических параметров в области  $\delta > 0$  рассматриваемая система обладает единственным глобально устойчивым состоянием равновесия: какие бы начальные условия мы не задавали, система совершает затухающие (периодические или аperiodические) движения.

Это свойство является общим для всех динамических систем с полной диссипацией энергии. В самом деле, рассмотрим систему, конфигурация которой определяется  $n$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Пусть движение этой системы характеризуется функцией Лагранжа  $L =$

$$= T - V, \text{ где кинетическая энергия } T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

а потенциальная энергия  $V = V(q)$  — знакоопределенная положительная функция всех обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . В такой системе при отсутствии других сил выполняется закон сохранения механической энергии  $T + V = h$  ( $h = \text{const}$ ). В фазовом пространстве системы  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$  выражение  $T + V = h$  при различных значениях произвольной постоянной  $h$  представляет собою семейство вложенных одна в другую замкнутых поверхностей, стягивающихся к началу координат при  $h \rightarrow 0$  (аналог концентрических окружностей в примере с гармоническим осциллятором).

Пусть теперь в рассматриваемой системе имеется вязкое трение, которое полностью учитывается функцией

$$\text{диссипации Рэлея } F = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(q) \dot{\zeta}_i \dot{\zeta}_j, \text{ являющейся зна-}$$

коопределенной положительной квадратичной формой всех обобщенных скоростей  $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dots, \dot{\zeta}_n$ . Уравнения движения этой системы записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{v}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.25)$$

Умножим  $i$ -е уравнение системы (2.25) на  $\dot{q}_i$  и сложим полученные выражения. Используя затем теорему Эйлера об однородных функциях, приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -2F < 0.$$

Отсюда следует, что при любых начальных условиях изображающая точка в фазовом пространстве  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dots, \dot{\zeta}_n)$  с течением времени всегда пересекает семейство поверхностей  $T + V = h$  снаружи внутрь, приближаясь к началу координат. Таким образом, точка  $q_i = 0, \dot{q}_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) соответствует состоянию глобально устойчивого равновесия системы.



## Г Л А В А 3

# СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДАМИ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе рассматриваются автономные динамические системы с одной степенью свободы. Уравнения движения такой системы в общем случае записываются в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (3.1)$$

правые части которых нелинейные, вообще говоря, функции  $x, y$ . К уравнениям вида (3.1) приводит исследование многих механических и электромеханических систем, а также радиотехнических схем. Уравнения (3.1) достаточно полно изучены методами качественной теории дифференциальных уравнений; ниже излагаются основные результаты этой теории [1—3].

### § 1. Фазовая плоскость и качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории

Согласно уравнениям (3.1), состояние системы второго порядка полностью определяется значениями  $x, y$ , поэтому ее фазовое пространство является двумерным, т. е. некоторой поверхностью.

В простейшем случае фазовая поверхность представляет собою обычную плоскость с декартовыми координатами  $x, y$ , а функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  являются аналитическими на всей плоскости. Основная задача исследования динамической системы состоит в том, чтобы выяснить качественную картину разбиения фазовой плоскости на траектории или, другими словами, установить топологическую структуру этого разбиения. Под топологической

структурой принято понимать все те свойства, которые остаются инвариантными при топологическом (т. е. взаимно однозначном и непрерывном) преобразовании плоскости в себя.

Оказывается, что для выяснения качественной картины для системы второго порядка нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых из них, называемых особыми траекториями. К последним относятся состояния равновесия, предельные циклы и незамкнутые траектории, у которых хотя бы одна полутраектория (т. е. кривая, описываемая изображающей точкой при  $t \rightarrow +\infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$  из начального положения точки в момент времени  $t = t_0$ ) является сепаратрисой какого-нибудь состояния равновесия. Если взаимное расположение этих особых траекторий известно и, кроме того, определена устойчивость состояний равновесия и предельных циклов, то мы получаем полную качественную картину разбиения плоскости  $xu$  на траектории.

Особые траектории разделяют фазовую плоскость на конечное число ячеек, поскольку из аналитичности правых частей системы (3.1) вытекает, что число особых траекторий конечно. Граница каждой ячейки состоит из особых траекторий, причем точки одной и той же траектории могут быть граничными для нескольких ячеек. Все ячейки заполнены неособыми траекториями, поведение которых одинаково. Если все траектории, принадлежащие одной и той же ячейке, не замкнуты, то они имеют одни и те же предельные множества. Если же внутри какой-нибудь ячейки существует хотя бы одна замкнутая траектория, то все траектории этой ячейки замкнуты, одна лежит внутри другой и между любыми двумя траекториями этой ячейки не могут лежать точки, не принадлежащие этой ячейке. Основной топологической характеристикой, отличающей одну ячейку от другой, является ее связность.

Если граница ячейки состоит из одного граничного континуума, то ячейка называется односвязной, если из двух, трех и т. д., то ячейка соответственно называется двухсвязной, трехсвязной и т. д. Один из граничных континуумов многосвязной ячейки называется внешним граничным континуумом, остальные — внутренними, причем внутренние граничные континуумы могут быть, в частности, отдельными точками. Простейшим примером односвязной ячейки является область внутри окружнос-

ти, двухсвязной — область между двумя концентрическими окружностями.

На рис. 3.1 приведены примеры более сложных ячеек: односвязной (рис. 3.1, а) и двухсвязной (рис. 3.1, б), где ячейки выделены штриховкой.

Очевидно, что ячейки с неодинаковым числом связности заведомо топологически различны. В качественной

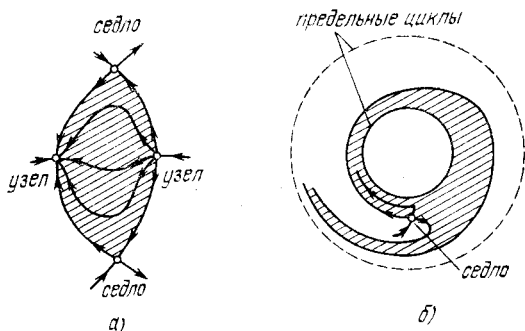


Рис. 3.1

теории доказывается, что всякая ячейка не более чем двухсвязна. В частности, ячейки, заполненные замкнутыми траекториями, всегда двухсвязны. Если двухсвязная ячейка заполнена незамкнутыми траекториями, то один из ее граничных континуумов является предельным множеством при  $t \rightarrow +\infty$ , а другой — предельным множеством при  $t \rightarrow -\infty$  для траекторий этой ячейки. Используя эти результаты качественной теории, можно исчерпывающим образом описать все возможные границы ячеек и установить условия, при которых две ячейки имеют одинаковую топологическую структуру разбиения на траектории.

Можно также показать, что в случае грубых систем (см. следующий параграф) число различных типов ячеек конечно.

Итак, если известны все состояния равновесия, предельные циклы и их характер, а также расположение сепаратрис, то это позволяет полностью установить топологическую структуру всех ячеек и их взаимное расположение, т. е. полностью выяснить структуру разбиения фазовой плоскости на траектории.

## § 2. Свойство грубости динамической системы

Из физических соображений очевидно, что в дифференциальных уравнениях (3.1), описывающих движение реальной физической системы, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во времени. Следовательно, правые части уравнений (3.1), вообще говоря, изменяются вместе с входящими в них физическими параметрами. Однако если эти изменения достаточно малы, то, как показывает практика, физическая система как бы не замечает этих изменений, качественные черты ее поведения сохраняются. Поэтому, если мы хотим, чтобы уравнения (3.1) отображали эту особенность, нужно придать им свойство грубости, а именно: при малых изменениях параметров должна оставаться неизменной качественная структура разбиения фазовой плоскости на траектории. Тем самым выделится класс «грубых» динамических систем. Грубость динамической системы можно трактовать как устойчивость структуры разбиения ее фазового пространства на траектории по отношению к малым изменениям дифференциальных уравнений (3.1).

А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин дали строгое математическое определение понятия грубости для систем второго порядка; согласно этому определению динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями (3.1), является грубой, если существует такое малое число  $\delta > 0$ , что все динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = P(x, y) + p(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + q(x, y),$$

в которых аналитические функции  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  удовлетворяют неравенству

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| < \delta,$$

имеют одинаковую структуру разбиения фазовой плоскости на траектории.

Требование грубости для автономных систем второго порядка, являясь естественным с точки зрения приложений, существенно упрощает возможные структуры фазовой плоскости. Каждая из этих структур определяется конечным числом особых фазовых траекторий: состояний равновесия, сепаратрисных кривых седловых состояний

равновесия и замкнутых фазовых траекторий (предельных циклов). При этом состояния равновесия и периодические движения не имеют нулевых характеристических показателей и нет сепаратрисных кривых, идущих из седла в седло. Это означает, что точки пересечения кривых

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0,$$

определяющих координаты состояний равновесия грубой системы, являются простыми, т. е. коэффициент

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x, y) & P'_y(x, y) \\ Q'_x(x, y) & Q'_y(x, y) \end{vmatrix}$$

в характеристическом уравнении

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad (3.2)$$

где  $\sigma = -[P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)]$ , не должен обращаться в нуль. Кроме того, коэффициент  $\sigma$  также должен быть отличным от нуля, т. е. состояние равновесия грубой системы не может представляться особой точкой типа центра. Аналитическое выражение условия, которому должна удовлетворять замкнутая фазовая траектория в грубой системе, состоит в том, что величина  $h \neq 0$ , где

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)] dt, \quad (3.3)$$

$x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  — уравнения периодического движения с периодом  $\tau$  вдоль этой траектории.

Итак, в грубой системе существуют лишь такие состояния равновесия, для которых  $\Delta \neq 0$  и  $\sigma \neq 0$ , если  $\Delta > 0$ ; лишь такие предельные циклы, для которых  $h \neq 0$ ; лишь такие сепаратрисы, которые не идут из седла в седло. Эти условия накладывают ограничения и на типы ячеек, возможных в грубых системах [1, 2].

В заключение этого параграфа отметим, что перенесение понятия грубости на многомерные системы встретило некоторые затруднения. Благодаря работам Смейла [5] выяснилось, что грубые системы могут быть весьма сложными и, что существенно, в пространстве параметров многомерной динамической системы могут существовать целые области негрубых систем. (Подробнее об этом, см., например, в книге [6].)

### § 3. Автоколебательные системы

Из всего многообразия динамических систем второго порядка полезно выделить системы, в которых может осуществляться периодическое изменение состояния системы. На фазовой плоскости периодическому движению соответствует замкнутая траектория. Если эта замкнутая траектория является одной из континуума вложенных одна в другую кривых, то мы имеем дело с консервативной системой. В такой системе период и амплитуда периодических колебаний зависят от начальных условий, а сама система является негрубой.

Если замкнутая траектория на фазовой плоскости является изолированной, она называется предельным циклом. Наличие устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости говорит о том, что в системе возможно установление незатухающих периодических колебаний, амплитуда и период которых в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяются лишь значениями параметров системы. Такие периодические движения А. А. Андро́нов назвал автоколебаниями, а системы, в которых возможны такие процессы, — автоколебательными [1]. В отличие от вынужденных или параметрических колебаний, возникновение автоколебаний не связано с действием периодической внешней силы или с периодическим изменением параметров системы. Автоколебания возникают за счет неперiodических источников энергии и обусловлены внутренними связями и взаимодействиями в самой системе. Одним из признаков автоколебательной системы может служить присутствие так называемой обратной связи, которая управляет расходом энергии неперiodического источника. Из всего сказанного непосредственно следует, что математическая модель автоколебательной системы должна быть грубой и существенно нелинейной.

Итак, наличие устойчивых предельных циклов на фазовом портрете системы является определяющим признаком автоколебательной системы. Условие устойчивости предельного цикла состоит в выполнении неравенства  $h < 0$ , где величина  $h$  называется характеристическим показателем предельного цикла и определяется выражением (3.3). В качестве примера системы, имеющей устойчивый предельный цикл, рассмотрим модель, движение

которой описывается уравнениями

$$\dot{x} = -y + x [1 - (x^2 + y^2)], \quad \dot{y} = x + y [1 - (x^2 + y^2)]. \quad (3.4)$$

Нетрудно убедиться в том, что закон движения  $x = \cos(t - t_0)$ ,  $y = \sin(t - t_0)$  представляет периодическое решение системы дифференциальных уравнений (3.4), которое можно рассматривать как параметрическое описание замкнутой траектории

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.5)$$

Фазовая траектория (3.5) изолированная, потому что уравнения всех других траекторий на фазовой плоскости  $xy$  имеют вид

$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + C e^{-2(t-t_0)}}}, \quad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + C e^{-2(t-t_0)}}}.$$

Двигаясь по этим траекториям при значении  $C > 0$ , изображающая точка приближается к замкнутой траектории (3.5) изнутри, а при значениях  $C < 0$  — снаружи. Следовательно, замкнутая траектория (3.5) представляет собой устойчивый предельный цикл. К этому результату можно также прийти, вычислив значение характеристического показателя  $h$  предельного цикла (3.5) по формуле (3.3). В рассматриваемом случае  $h = -2 < 0$ .

Наряду с устойчивыми предельными циклами фазовый портрет автоколебательной системы может содержать также неустойчивые предельные циклы, для которых  $h > 0$ . Двигаясь в окрестности неустойчивого предельного цикла, изображающая точка постепенно удаляется от него. Обычно такой цикл играет роль границы между областями с различным поведением фазовых траекторий.

Для нахождения предельных циклов на фазовой плоскости, к сожалению, не существует регулярных и достаточно эффективных методов, применимых в общем случае. Вместе с тем для решения вопроса об отсутствии замкнутых фазовых траекторий в ряде случаев можно воспользоваться критериями, которые приводятся ниже.

Эти критерии относятся к системе дифференциальных уравнений (3.1), правые части которых являются аналитическими функциями на всей фазовой плоскости. Сформулируем сначала критерий Бендиксона, указывающий достаточное условие отсутствия замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий: если в некото-

рой односвязной области на фазовой плоскости выражение  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий динамической системы (3.1).

В справедливости этого критерия нетрудно убедиться, воспользовавшись теоремой Грина

$$\iint \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint (P dy - Q dx).$$

При интегрировании по замкнутому контуру, целиком состоящему из фазовых траекторий, интеграл в правой части этого соотношения обратится в нуль, в силу уравнений движения (3.1). Но тогда выражение  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  должно обязательно менять знак в области, ограниченной этим замкнутым контуром.

Другим критерием, который обобщает критерий Бендиксона, является критерий Дюлака: если существует такая аналитическая функция  $R(x, y)$ , что в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение  $\frac{\partial}{\partial x}(PR) + \frac{\partial}{\partial y}(QR)$  знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (3.1). Доказательство этого критерия проводится также с помощью теоремы Грина. Иногда об отсутствии замкнутых траекторий можно судить из общих соображений. Например, на фазовой плоскости не может быть замкнутых траекторий в случае, если не существует особых точек, или в случае, когда существует единственная особая точка, являющаяся седлом.

Аналогичные рассуждения общего характера в ряде случаев могут помочь в установлении факта существования предельного цикла. Так, например, если система обладает единственным неустойчивым положением равновесия, отображаемым на фазовой плоскости особой точкой типа узла или фокуса, и существует цикл без контакта \*), охватывающий эту особую точку и притом такой, что все фазовые траектории входят в ограниченную циклом область, то особая точка окружена по меньшей мере одним (с точностью до четного числа) устойчивым предельным циклом. Вообще говоря, при указанных условиях

\*) Циклом без контакта называется замкнутая кривая, которая ни в одной из своих точек не соприкасается с фазовыми кривыми.



может существовать нечетное число вложенных друг в друга циклов, из которых устойчивых циклов будет на один цикл больше, чем неустойчивых.

#### § 4. Бифуркации динамических систем второго порядка

Пусть правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (3.1) зависят от некоторого параметра  $\lambda$ , т. е. имеют вид

$$\dot{x} = P(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Q(x, y, \lambda), \quad (3.6)$$

где  $P(x, y, \lambda)$  и  $Q(x, y, \lambda)$  — аналитические функции своих аргументов. Если при некотором значении  $\lambda$  система является грубой, то, согласно изложенному в предыдущем параграфе, при небольшом изменении  $\lambda$  качественная картина на фазовой плоскости не изменится. Однако не для всех значений параметра  $\lambda$  это условие может быть выполнено. В связи с этим вводится понятие бифуркационного значения параметра. По определению, значение параметра  $\lambda = \lambda_0$  называется бифуркационным, если при сколь угодно близких к  $\lambda_0$  значениях  $\lambda < \lambda_0$  и  $\lambda > \lambda_0$  топологическая структура фазовой плоскости различна. Из самого определения бифуркационного значения параметра следует, что при  $\lambda = \lambda_0$  система является негрубой.

Поскольку качественная картина траекторий на фазовой плоскости определяется особыми элементами (особыми траекториями), только те значения параметра  $\lambda$  оказываются бифуркационными, при которых появляются особые элементы, имеющие негрубую природу. В том случае, когда при бифуркационном значении параметра  $\lambda$  на фазовой плоскости появляется только один особый элемент, говорят, что автономная система второго порядка (3.6) обладает первой степенью негрубости. В такой системе негрубые элементы могут быть одного из следующих типов:

1) сложное состояние равновесия, получающееся при слиянии двух простых особых точек (например, типа узла и седла);

2) вырожденный фокус или центр;

3) двойной предельный цикл, который может, например, получиться при слиянии устойчивого и неустойчивого предельных циклов;

4) сепаратриса, идущая из одного седла в другое или в него же.

Соответствующие этим типам особых элементов структуры разбиения фазовой плоскости на траектории показаны на рис. 3.2—3.5. На рис. 3.2 изображены три последовательные фазы изменения поведения фазовых траекторий в окрестности двух простых особых точек: узла  $O_1$  и седла  $O_2$ . При достижении параметром  $\lambda$  бифуркационного значения точки  $O_1$  и  $O_2$  сливаются, образуя сложную особую точку типа седло-узел (рис. 3.2, б), и затем исчезают (рис. 3.2, в). На рис. 3.3 представлена бифуркация второго типа, когда простой фокус превращается в сложный фокус (момент бифуркации, соответствующий вырождению фокуса), из которого затем рождается предельный цикл. На рис. 3.4 изображены три последовательных фазовых портрета при бифуркации третьего типа, когда два предельных цикла (устойчивый и неустойчивый) (рис. 3.4, а) в момент бифуркации сливаются, образуя полуустойчивый предельный цикл (рис. 3.4, б), и затем исчезают (рис. 3.4, в). Если рассмотреть эти картинки в обратной последовательности, то получим случай рождения двух предельных циклов из так называемого уплотнения фазовых траекторий.

Наконец, последний тип бифуркации проиллюстрирован на рис. 3.5, где показан случай рождения устойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы седла. Пусть сепаратрисы седла при некотором значении  $\lambda$  имеют расположение, представленное на рис. 3.5, а. Предположим, что при увеличении параметра  $\lambda$  ветви сепаратрисы сближаются и при некотором значении  $\lambda = \lambda_0$  сливаются, образуя петлю (рис. 3.5, б). Если при дальнейшем увеличении  $\lambda$  сепаратрисы седла вновь разделяются так, как показано на рис. 3.5, в, то из петли рождается предельный цикл. Значение  $\lambda = \lambda_0$  в этом случае является бифуркационным.

Заметим, что в автономной системе второго порядка, состояние которой изображается точками на фазовом круговом цилиндре, может встретиться новый тип бифуркации, который невозможен в случае фазовой плоскости, а именно: бифуркация, связанная с рождением или исчезновением предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр. В отличие от фазовой плоскости, где устойчивый предельный цикл отображает автоколебательное движение в системе, устойчивый предельный цикл, охватывающий



фазовый цилиндр, соответствует периодическому ротационному (вращательному) движению.

Для системы (3.4), содержащей лишь один параметр  $\lambda$ , пространство параметров представляет собою прямую, а бифуркационные значения  $\lambda = \lambda_i$  — точки, разбивающие эту прямую на области, в каждой из которых изменение параметра  $\lambda$  не приводит к изменению фазового портрета. Если система (3.4) содержит два параметра  $\lambda$  и  $\mu$ , тогда пространством параметров будет плоскость, разделенная на области одинакового поведения системы при помощи бифуркационных кривых. Зная структуру разбиения фазового пространства для какой-нибудь точки плоскости параметров  $\lambda\mu$ , можно, непрерывно перемещаясь в этой плоскости, найти структуру фазового пространства для любой другой точки плоскости параметров. При этом нужно знать лишь характер бифуркации, которая происходит в фазовом пространстве при переходе той или другой бифуркационной границы. В этом заключается эвристическая ценность теории бифуркаций [7].

## § 5. Примеры исследования конкретных систем методами качественной теории

В этом параграфе приводятся примеры конкретных систем второго порядка, построение и исследование фазовых портретов которых проводится при помощи методов качественной теории дифференциальных уравнений.

**Пример 1. Динамика химического реактора [4].** Рассмотрим модель химического реактора, который представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания. В такой системе происходит непрерывный массо- и теплообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи дифференциальных уравнений в полных производных. Предположим, что рассматриваемый химический реактор — это емкость, в которую непрерывно подается вещество  $A$  с концентрацией  $x_0$  и температурой  $y_B$  \*). Пусть в результате химической реакции  $A \rightarrow B + Q$  образуется продукт  $B$  и выделяется тепло  $Q$ , а смесь продукта и реагента

---

\*) В этом примере все величины предполагаются записанными в безразмерном виде.

выводится из системы со скоростью, характеризуемой величиной  $\lambda$ . Тепло, образующееся в результате реакции, отводится потоком вещества и посредством теплопередачи через стенку реактора. Условия теплопередачи характеризуются температурой стенки  $y_{ст}$  и коэффициентом  $\omega$ . Для составления уравнений динамики химического реактора воспользуемся законами химической кинетики, выражающими зависимость скорости химического превращения от концентраций реагирующих веществ и от температуры, законом сохранения массы (условием материального баланса), а также законом сохранения энергии (условием температурного баланса реактора).

В результате получим уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -xe^{-1/y} + \lambda(x_0 - x), \\ \frac{dy}{dt} &= xe^{-1/y} + \beta(y_0 - y),\end{aligned}\tag{3.7}$$

где  $x$  — концентрация,  $y$  — температура реагента, а параметры  $y_0$ ,  $\beta$  связаны с введенными выше величинами при помощи соотношений

$$y_0 = \frac{\lambda y_B + \omega y_{ст}}{\lambda + \omega}, \quad \beta = \lambda + \omega.$$

Таким образом, рассматриваемая модель химического реактора имеет четыре существенных параметра:  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ , которые являются положительными величинами. В соответствии с физическим смыслом переменных  $x$  и  $y$  фазовым пространством системы является первый квадрант плоскости  $xy$ .

Система уравнений (3.7) имеет вид уравнений (3.1), где

$$\begin{aligned}P(x, y) &= -xe^{-1/y} + \lambda(x_0 - x), \\ Q(x, y) &= xe^{-1/y} + \beta(y_0 - y).\end{aligned}$$

Для построения фазового портрета определим прежде всего число состояний равновесия, их топологический тип и устойчивость.

Приравняв правые части системы (3.7) нулю, получим два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned}P(x, y) &= -xe^{-1/y} + \lambda(x_0 - x) = 0, \\ Q(x, y) &= xe^{-1/y} + \beta(y_0 - y) = 0,\end{aligned}\tag{3.8}$$

решения которых и определяют координаты  $x_*$ ,  $y_*$  особых точек на фазовой плоскости  $xy$ , соответствующие равновесным состояниям системы. Из (3.8) следует, что кривая  $Q(x, y) = 0$ , представляющая собой изоклину  $dy/dx = 0$  интегральных кривых, пересекает ось  $y$  в точке  $y = y_0$ , а кривая  $P(x, y) = 0$ , представляющая собой изоклину  $dy/dx = \infty$  интегральных кривых, пересекает ось  $x$  при  $x = x_0$  и имеет асимптоту  $x = \lambda x_0 / (1 + \lambda)$ . В зависимости от соотношений параметров  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  кривые  $P = 0$  и  $Q = 0$  могут пересекаться в одной точке или в трех точках.

В качестве примера на рис. 3.6 изображен случай, когда система имеет три состояния равновесия. Для определения числа состояний равновесия в зависимости от значений параметров системы воспользуемся бифуркационной диаграммой — кривой, связывающей значения какого-нибудь из параметров с координатой состояния равновесия. Уравнение бифуркационной кривой получается после исключения из уравнений (3.8) величины  $x_*$ :

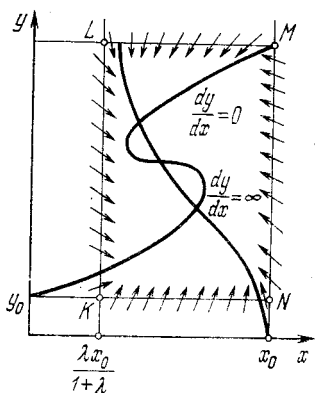


Рис. 3.6

$$y_0 = y_* - \frac{\lambda x_0}{\beta (1 + \lambda e^{1/y_*})}. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) представляет зависимость  $y_0 = f(y_*)$ , а величины  $x_0$ ,  $\lambda$  и  $\beta$  считаются фиксированными. Возможные варианты вида бифуркационных диаграмм при различных значениях  $x_0$  и фиксированных значениях  $\lambda$  и  $\beta$  показаны на рис. 3.7. Число состояний равновесия в системе равно числу точек пересечения прямой  $y_0 = \text{const}$  с кривой (3.9) при заданном значении  $x_0$ . Из вида кривых на рис. 3.7 следует, что бифуркационное соотношение между параметрами  $x_0$ ,  $y_0$  находится из условия соприкосновения прямой  $y_0 = \text{const}$  с одним из экстремумов кривой (3.9). Дифференцируя функцию (3.9) и приравнявая производную  $dy_0/dy_*$  нулю, получаем соотношение, которое вместе с (3.9) составляет систему параметрических

уравнений граничной кривой на плоскости  $y_0 x_0$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= \beta \lambda^{-2} y_*^2 e^{-1/y_*} (1 + \lambda e^{1/y_*})^2, \\ y_0 &= y_* - \lambda^{-1} y_*^2 e^{-1/y_*} (1 + \lambda e^{1/y_*}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $y_*$  является текущим параметром.

Кривая (3.10) на плоскости  $y_0 x_0$  имеет вид клина, в вершине которого находится точка возврата первого рода (рис. 3.8). Форма кривой (3.10) сохраняется при всех имеющих физический смысл значениях параметров

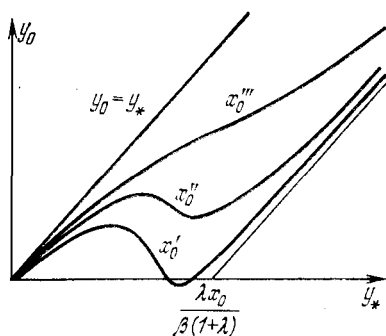


Рис. 3.7

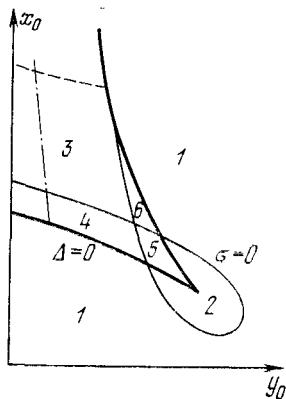


Рис. 3.8

$\lambda$  и  $\beta$ . При значениях параметров  $x_0$ ,  $y_0$  внутри клина система обладает тремя состояниями равновесия, а при значениях  $x_0$ ,  $y_0$  вне клина — одним состоянием равновесия. Топологический тип и устойчивость особой точки на фазовой плоскости с координатами  $x_*$ ,  $y_*$ , соответствующей состоянию равновесия системы, определяются знаком выражений  $\sigma = -(a + d)$  и  $\Delta = ad - bc$  в этой точке. В нашем случае

$$\begin{aligned} a &= P'_x(x_*, y_*) = -e^{-1/y_*} - \lambda, \\ b &= P'_y(x_*, y_*) = -x_* y_*^{-2} e^{-1/y_*}, \\ c &= Q'_y(x_*, y_*) = e^{-1/y_*}, \\ d &= Q'_x(x_*, y_*) = x_* y_*^{-2} e^{-1/y_*} - \beta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Согласно общей теории, уравнение  $\Delta = 0$  определяет границу седел, а уравнение  $\sigma = 0$  — границу устойчивости узлов и фокусов.

Подставляя в уравнение  $\Delta = 0$  выражения (3.11) и учитывая (3.8), получим параметрические уравнения для границы седел на плоскости  $x_0y_0$ , совпадающие с уравнениями (3.10). Таким образом, граничная кривая области параметров, при которых в системе имеется три состояния равновесия, совпадает с кривой рождения (или исчезновения) седловой особой точки.

Подставляя далее выражения (3.11) в уравнение  $\sigma = 0$ , получаем параметрические уравнения

$$\begin{aligned} y_0 &= y_* [1 - \beta^{-1} y_* (\beta + \lambda + e^{-1/y_*})], \\ x_0 &= \lambda^{-1} y_*^2 [\beta + 2\lambda + \lambda (\beta + \lambda) e^{1/y_*} + e^{-1/y_*}] \end{aligned} \quad (3.12)$$

с текущим параметром  $y_*$ . Уравнения (3.12) определяют на плоскости  $y_0x_0$  другую граничную кривую. Часть этой кривой, показанной на рис. 3.8, является границей устойчивости особых точек неседлового типа. Картина разбиения плоскости параметров  $y_0, x_0$  на области, различающиеся числом и устойчивостью состояний равновесия системы, показана на рис. 3.8, где кривая (3.10) показана сплошной жирной линией, а кривая (3.11) — сплошной тонкой линией. Область 1 соответствует наличию одной устойчивой особой точки на фазовой плоскости; область 2 — одной неустойчивой особой точки типа узла или фокуса; области 3—6 — трем особым точкам, из которых в области 3 две устойчивы, а третья — седло. В областях 4 и 6 неустойчивы две особые точки, а в области 5 неустойчивы все три особые точки.

Число различных областей и взаимное расположение кривых (3.10) и (3.12) на плоскости  $y_0x_0$  зависят от значений параметров  $\lambda$  и  $\beta$ . Случай разбиения плоскости параметров  $y_0, x_0$ , изображенный на рис. 3.8, заведомо осуществляется при значениях  $\lambda, \beta$ , удовлетворяющих неравенству  $\beta \gg \lambda^2$ . Рассмотрим этот случай подробнее и выясним, какие из особых траекторий, кроме состояний равновесия, могут быть на фазовой плоскости  $xu$  при различных значениях параметров  $x_0, y_0$ .

Для этого построим сначала цикл без контакта, охватывающий все состояния равновесия. В качестве цикла без контакта возьмем прямоугольник  $KLMN$ , образуемый отрезками прямых  $x = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda}$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  и  $y = y_M$ , где  $y_M$  — ордината верхней точки пересечения изоклины  $dy/dx = 0$  с прямой  $x = x_0$  (см рис. 3.6). Согласно уравнениям (3.7) в



точках прямой  $x = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda}$  производная  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=\lambda x_0/(1+\lambda)} = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda} (1 - e^{-1/y}) > 0$ , в точках прямой  $x = x_0$ , наоборот,  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=x_0} = -x_0 e^{-1/y} < 0$ . Подставляя  $y = y_0$  в правую часть второго уравнения системы (3.7), находим  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_0} = x e^{-1/y_0} > 0$ , а на отрезке прямой  $y = y_M$ ,  $0 < x < x_0$  производная  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_M} < 0$ . Это означает,

что все фазовые траектории входят внутрь прямоугольника  $KLMN$ : если изображающая точка попадает внутрь прямоугольника  $KLMN$ , то она в дальнейшем остается в этой области. Нетрудно видеть, что не существует предельных циклов, не охватывающих контур  $KLMN$ , потому что вне контура  $KLMN$  нет особых точек. Не может быть также предельных циклов, охватывающих контур  $KLMN$ , потому что на всей полупрямой  $x = \lambda x_0 / (1 + \lambda)$ , часть которой  $KL$  составляет границу контура, производная  $dx/dt$  положительна. Таким образом, дальнейшее исследование фазового портрета рассматриваемой системы достаточно провести лишь внутри прямоугольника  $KLMN$ .

При значениях параметров  $x_0, y_0$  в области 1 (рис. 3.8), когда на фазовой плоскости  $xu$  имеется одна устойчивая особая точка, возможны два случая: 1) предельные циклы отсутствуют, 2) имеются два предельных цикла, охватывающие особую точку\*), внешний цикл устойчивый, а внутренний — неустойчивый. Фазовые портреты, соответствующие этим случаям, изображены на рис. 3.9. При значениях параметров  $x_0, y_0$  в области 2 рис. 3.8, когда единственная особая точка является неустойчивой, на фазовой плоскости существует устойчивый предельный цикл, и фазовый портрет системы имеет вид, показанный на рис. 3.10. Следовательно, для значений параметров  $x_0, y_0$  в области 2 рис. 3.8 в химическом реакторе при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания — незатухающие колебания концентрации вещества и температуры. Изменение параметров  $x_0, y_0$ , связанное с переходом из области 2 в область 1 на рис. 3.8, вызывает смену устойчивости единственного состояния равновесия. Характер бифуркации на

\*) Здесь и далее все утверждения относительно числа предельных циклов верны, строго говоря, с точностью до их четного числа.

этой плоскости параметров  $x_0, y_0$  определяется знаком некоторого выражения  $\alpha_3$ , называемого ляпуновской величиной. Для рассматриваемого состояния равновесия  $\alpha_3 > 0$ , поэтому, когда особая точка из неустойчивой превращается в устойчивую, то при этом из нее рождается неустойчивый предельный цикл. При удалении от границы в область  $I$  неустойчивый и устойчивый циклы сливаются и затем исчезают. Условие исчезновения предельных циклов определяет в области  $I$  рис. 3.8 границу между описанными выше случаями, которые изображены на рис. 3.9, *а* и *б*. При переходе из области 2

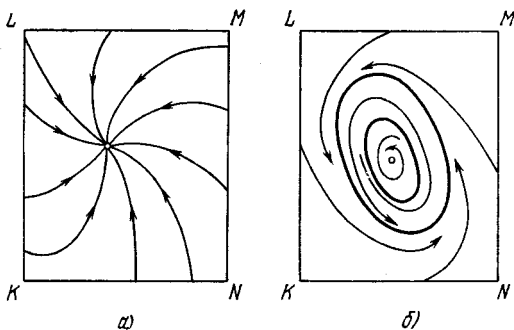


Рис. 3.9

в область 5 через границу  $\Lambda = 0$  вблизи острия клина или через само острие неустойчивая особая точка — узел распадается на три особые точки: одно седло и два неустойчивых узла. Все они оказываются внутри предельного цикла (рис. 3.11). Нетрудно показать, что предельный цикл не сохраняется для всех значений параметров  $x_0, y_0$  внутри кривой  $\Lambda = 0$ . В самом деле, предельный цикл заведомо отсутствует в том случае, если точка изоклины  $dy/dx = 0$ , в которой касательная к изоклине вертикальна, находится вне прямоугольника  $KLMN$ . Из условий соприкосновения изоклины  $dy/dx = 0$  с прямой  $x = \lambda x_0 / (1 + \lambda)$  и с прямой  $x = x_0$  получаются соответственно кривая

$$x_0 = \frac{\beta(1+\lambda)}{2\lambda} \cdot (1 - 2y_0 + \sqrt{1 - 4y_0}) e^{\frac{2}{1+\sqrt{1-4y_0}}}, \quad (3.13)$$

а также кривая

$$x_0 = \frac{\beta}{2} (1 - 2y_0 - \sqrt{1 - 4y_0}) e^{1 - \sqrt{1 - 4y_0}}, \quad (3.14)$$

ограничивающие область плоскости  $y_0 x_0$ , в которой заведомо нет цикла, охватывающего все три особые точки. На рис. 3.8 изображены дуги этих кривых, расположенные внутри кривой  $\Delta = 0$ . Предельный цикл заведомо отсутствует для значений  $x_0, y_0$  в области над

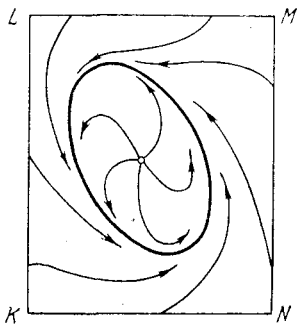


Рис. 3.10

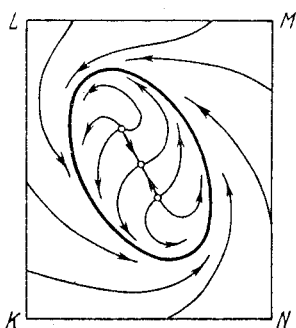


Рис. 3.11

кривой (3.13) (штриховая линия) и слева от кривой (3.14) (штрихпунктирная линия). Каков механизм исчезновения устойчивого предельного цикла, охватывающего три особые точки? При удалении от острия клина по направлению к кривым (3.13) и (3.14) наступает момент, когда на фазовой плоскости возникает петля сепаратрисы, идущая из седла в седло и охватывающая крайние особые точки. При дальнейшем изменении параметров  $x_0, y_0$  происходит либо влипание цикла в эту петлю, либо рождение из петли неустойчивого предельного цикла, сливающегося впоследствии с устойчивым. В обоих случаях результатом является исчезновение устойчивого предельного цикла.

В заключение выделим область параметров  $x_0, y_0$ , при которых в системе не могут возникнуть автоколебания. Для этого воспользуемся критерием Бендиксона, согласно которому предельные циклы \*) отсутствуют

\*) Имеются в виду предельные циклы, целиком лежащие в этой области.

в той области фазовой плоскости, где выражение  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  не меняет знак. Граница этой области определяется равенством

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Подставляя в левую часть этого равенства выражения (3.11), получаем уравнение кривой

$$x = y^2 [1 + (\lambda + \beta) e^{1/y}]. \quad (3.15)$$

Потребовав, чтобы кривая (3.15) не пересекалась с циклом без контакта  $KLMN$ , приходим к следующим условиям: циклы заведомо отсутствуют в заштрихованной области плоскости  $y_0 x_0$  (рис. 3.12), ограниченной прямой  $x_0 = \bar{x}_0$ , где  $\bar{x}_0$  — корень уравнения

$$\begin{aligned} (\lambda + \beta) \exp(\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{x_0}) x_0^{-1/2} = \\ = 2 \sqrt{x_0} (\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{x_0}), \end{aligned}$$

а также частью кривой

$$x_0 = y_0^2 [1 + (\lambda + \beta) e^{1/y_0}],$$

которая в своем минимуме касается прямой  $x_0 = \bar{x}_0$ .

**Пример 2. Задача Жуковского о полете планера [1].** Рассмотрим полет планера в вертикальной плоскости  $xz$  (ось  $Oz$  направлена вверх) при следующих предположениях: 1) сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости полета; 2) угол атаки планера остается постоянным независимо от режима полета. При сделанных допущениях аэродинамические коэффициенты силы сопротивления воздуха  $C_1$  и подъемной силы крыльев планера  $C_2$  будут постоянными. Составим уравнения движения центра масс планера в проекциях на касательную и нормаль к его траектории

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \theta - \frac{1}{2} \rho S C_1 v^2, \\ mv \frac{d\theta}{dt} &= -mg \cos \theta + \frac{1}{2} \rho S C_2 v^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

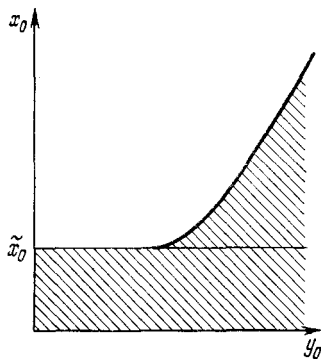


Рис. 3.12

Здесь  $m$  — масса планера,  $v$  — скорость движения,  $\theta$  — угол между касательной к траектории и осью  $Ox$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — плотность воздуха,  $S$  — площадь крыльев планера. Введем далее безразмерные величины:

$$y = v \sqrt{\frac{\rho S C_2}{2mg}}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{\rho g S C_2}{2m}}, \quad a = \frac{C_1}{C_2}$$

и запишем уравнения (3.16) в виде

$$\dot{y} = -\sin \theta - ay^2, \quad \dot{\theta} = \frac{y^2 - \cos \theta}{y}, \quad (3.17)$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ . Из вида уравнений (3.17) следует, что динамика полета планера характеризуется одним существенным положительным параметром  $a$ , который равен отношению силы сопротивления движению планера к его подъемной силе.

Поскольку значения  $(\theta, y)$  и  $(\theta + 2\pi, y)$  соответствуют одному и тому же состоянию, фазовым пространством рассматриваемой динамической системы является поверхность цилиндра, на котором вдоль образующей отложена величина  $y$ , а вдоль направляющей — угол  $\theta$ . Будем рассматривать лишь область  $y \geq 0$  (тем самым исключается случай полета хвостом вперед), в которой интегральные кривые, согласно (3.17), удовлетворяют уравнению

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{y(\sin \theta + ay^2)}{\cos \theta - y^2}. \quad (3.18)$$

Интегральная кривая  $y = 0$  является особой фазовой траекторией системы уравнений (3.17) и соответствует мгновенному опрокидыванию планера из положения  $\theta = \pi/2$  в положение  $\theta = -\pi/2$  при обращении скорости  $v$  в нуль. Рассмотрим сначала частный случай  $a = 0$ , когда силы сопротивления отсутствуют и рассматриваемая система оказывается консервативной. Уравнения движения (3.17) в этом случае принимают вид

$$\dot{y} = -\sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{y^2 - \cos \theta}{y}. \quad (3.19)$$

Единственное состояние равновесия системы (3.19) находится в точке  $\theta = 0, y = 1$  и соответствует режиму горизонтального полета планера с постоянной скоростью.

Фазовые траектории определяются соотношением

$$\frac{y^3}{3} - y \cos \theta = \text{const}, \quad (3.20)$$

которое представляет собой первый интеграл уравнения (3.18) при  $a = 0$ . Согласно (3.20) на фазовом цилиндре имеются две другие особые точки с координатами  $\theta = \pi/2, y = 0$  и  $\theta = -\pi/2, y = 0$ . Однако они не являются состояниями равновесия системы (3.19), поскольку в этих точках производная  $\dot{y}$  отлична от нуля. Для построения интегральных кривых на фазовом цилиндре

удобно воспользоваться кривыми (3.20) на вспомогательной плоскости, где по осям координат отложены величины  $y$  и  $\cos \theta$  (рис. 3.13). Значению  $C = -2/3$  соответствует особая точка  $\theta = 0, y = 1$  типа центра. Для значений  $C$  на интервале  $-2/3 < C < 0$  фазовые траектории представляют собой замкнутые кривые, охватывающие центр, и для значений  $C > 0$  — замкнутые кривые, охватывающие фазовый цилиндр.

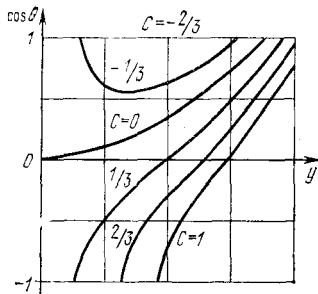


Рис. 3.13

Интегральная кривая, соответствующая значению  $C = 0$ , разделяет эти два типа замкнутых траекторий. Она состоит из сепаратрис седловых особых точек  $\theta = \pi/2, y = 0$  и  $\theta = -\pi/2, y = 0$ , определяемых уравнением  $y = 0, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$  и  $y^2 = 3 \cos \theta$ . Разбиение фазового цилиндра на траектории приведено на рис. 3.14, где изображена развертка цилиндра на плоскость. Траектории движения планера, соответствующие различным типам фазовых траекторий, показаны на рис. 3.15.

Таким образом, движение изображающей точки по замкнутым фазовым траекториям, охватывающим состояние равновесия на фазовом цилиндре, соответствует полету планера по волнообразным линиям, а при движении по кривым, охватывающим фазовый цилиндр, — полету, при котором планер совершает мертвые петли.

Рассмотрим теперь, как изменяется фазовый портрет системы и, следовательно, характер движения планера в общем случае  $a \neq 0$ .

Согласно уравнениям (3.17) система по-прежнему имеет одно состояние равновесия, однако теперь его координаты определяются выражениями

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\operatorname{arctg} a \quad (-\pi/2 < \theta_0 < 0), \\ y_0 &= \frac{1}{\sqrt[4]{1+a^2}} \quad (0 < y_0 < 1). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Состояние равновесия системы (3.21) соответствует полету планера по нисходящей прямой с постоянной скоростью  $y_0 < 1$ . Устойчивость этого состояния равновесия определяется корнями характеристического уравнения

$$p^2 + 3ap + 2 = 0,$$

откуда следует, что равновесие всегда устойчиво: при значениях  $a < 2\sqrt{2}/3$  особая точка — фокус, а при

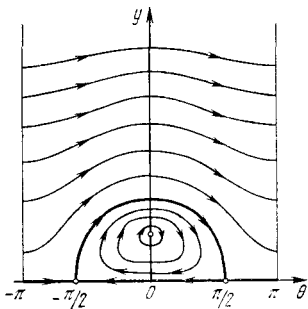


Рис. 3.14

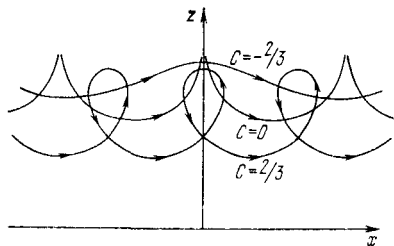


Рис. 3.15

$a > 2\sqrt{2}/3$  — узел. Покажем, что в рассматриваемом случае на фазовом цилиндре не может быть замкнутых фазовых траекторий ни при каком значении параметра  $a \neq 0$ . Для этого воспользуемся критерием Дюлака, взяв  $y$  в качестве функции  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(yP)}{\partial y} + \frac{\partial(yQ)}{\partial \theta} &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}(y \sin \theta + ay^3) + \frac{\partial}{\partial \theta}(y^2 - \cos \theta) = -3ay^2. \end{aligned}$$

Это выражение обращается в нуль лишь на окружности  $y = 0$ , охватывающей фазовый цилиндр. Следовательно, в области  $y > 0$  замкнутые фазовые траектории отсутствуют.

Убедимся также в том, что в области  $y > 0$  не может быть замкнутых траекторий, охватывающих фазовый цилиндр. В самом деле, предположим, что такая траектория

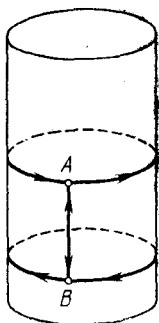


Рис. 3.16



Рис. 3.17

существует. Тогда, соединив эту замкнутую фазовую кривую с интегральной кривой  $y = 0$  при помощи отрезка образующей, получим замкнутый контур (рис. 3.16),

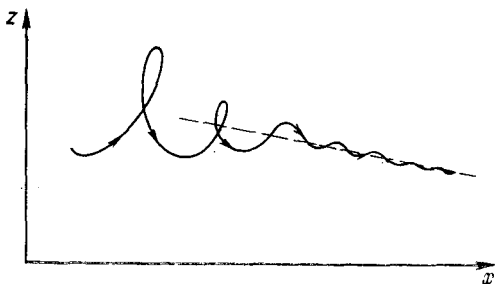


Рис. 3.18

ограничивающий область, заключенную между интегральными кривыми. Интеграл  $\int y(Pdy - Qdx)$ , взятый вдоль этого контура, равен нулю, потому что отрезок  $AB$  на рис. 3.16 проходится два раза (в прямом и обратном направлении), а остальные участки этого замкнутого контура состоят из интегральных кривых. Следова-



но, выражение  $\frac{\partial (yP)}{\partial y} + \frac{\partial (yQ)}{\partial x}$  должно было бы в рассматриваемой области обратиться в нуль, что невозможно.

Итак, в случае  $a \neq 0$  все фазовые траектории асимптотически приближаются к устойчивому состоянию равновесия, а фазовый портрет системы имеет вид, показанный на рис. 3.17. Таким образом, при наличии сил сопротивления воздуха планер при любых начальных условиях приходит к единственному устойчивому равновесному режиму. Если начальная скорость планера достаточно велика, то планер совершит сначала одну или несколько мертвых петель, затем по волнообразно затухающей траектории будет приближаться к траектории прямолинейного полета. Одна из возможных траекторий полета планера показана на рис. 3.18.

## ПРОСТЕЙШИЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ (СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ) И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим динамическую систему, поведение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.1)$$

где переменные  $x_1, \dots, x_n$  определяют состояние динамической системы, а функции  $f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$  предполагаются кусочно-гладкими. Допустим, кроме того, что эти функции в заданных областях изменения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  обеспечивают существование единственного решения дифференциальных уравнений (4.1) (по крайней мере для возрастающих значений времени  $t$ ) и его непрерывную зависимость от начальных условий. Поскольку функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  не содержат явно времени  $t$ , динамическая система называется автономной, а ее фазовое пространство является  $n$ -мерным. Если правая часть уравнений (4.1) может быть представлена в виде  $f = Ax$ , где  $A$  обозначает матрицу, элементы которой не зависят от  $x_i$ , то динамическая система называется линейной. Свойство линейности тесно связано с широко используемым принципом суперпозиции. В случае автономной системы элементы матрицы  $A$  — постоянные величины и решение системы дифференциальных уравнений (4.1) находится наиболее просто.

Динамическая система называется квазилинейной, если уравнения (4.1) имеют вид

$$\dot{x} = Ax + \mu g(x),$$

где  $\mu$  — малый параметр. Теория квазилинейных систем разработана достаточно полно, с ее помощью решены многие нелинейные задачи. Квазилинейные системы представляют собою, пожалуй, единственный широкий класс динамических систем, допускающих сравнительно полное аналитическое исследование. Существенный недостаток этой теории, однако, состоит в том, что в практических приложениях значения параметра  $\mu$ , который в теории предполагается сколь угодно малым, часто не удовлетворяют оценкам, при которых построена теория. Поэтому границы достоверности получаемых при помощи этой теории результатов оказываются трудно определяемыми. Наиболее сложными для теоретического исследования динамическими системами являются так называемые сильно нелинейные системы.

Под сильно нелинейной системой обычно понимают либо динамическую систему, не допускающую линеаризации в малом, либо систему, в которой проявляются нелинейные эффекты, не обнаруживаемые квазилинейной теорией. К таким системам относятся релейные системы автоматического регулирования, динамические системы с ударным взаимодействием, системы с люфтом и сухим трением и др. Одним из эффективных методов изучения динамики сильно нелинейных систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями (4.1) с кусочно-гладкими правыми частями, является метод точечных отображений. Этот метод, зарождение которого связано с именем А. Пуанкаре и Дж. Биркгофа, был введен в теорию нелинейных колебаний А. А. Андроновым. Установив связь между автоколебаниями и предельными циклами А. Пуанкаре и опираясь на математический аппарат качественной теории дифференциальных уравнений, А. А. Андронов существенно расширил возможности метода «припасовывания» и сформулировал принципы, которые легли в основу метода точечных отображений и позволили эффективно использовать этот метод при исследовании конкретных систем автоматического регулирования и радиотехники. С помощью метода точечных отображений оказалось возможным полностью решить ряд основных задач теории автоматического регулирования и, в первую очередь, классическую задачу И. А. Вышнеградского о регуляторе прямого действия с сухим трением в чувствительном элементе [1, 2]. Была рассмотрена динамика часовых ходов [3], построена теория релейных

систем [4, 5], виброударных устройств [6] и систем с циклической автоматикой, изучена динамика экстремальных регуляторов и самонастраивающихся систем [7], сложных радиосхем — ламповых и транзисторных [8] и т. д. Успех в решении этих и других существенно нелинейных задач связан в значительной мере с возможностью кусочно-линейной аппроксимации нелинейностей, что позволяет получать аналитические выражения точечного отображения в явном или параметрическом виде. При кусочно-линейной аппроксимации нелинейностей фазовое пространство динамической системы может быть разбито на области  $D_1, D_2, \dots, D_m$ , в каждой из которых поведение системы описывается системой линейных дифференциальных уравнений. Следовательно, в каждой из областей  $D_1, D_2, \dots, D_m$  решение дифференциальных уравнений (4.1) находится без труда, а при переходе изображающей точки из одной области в другую решения «сшиваются» по непрерывности. Этот прием исследования, получивший название метода припасовывания, применялся вначале лишь для отыскания периодических движений. Его дальнейшее развитие и систематическое использование послужило одним из источников, из которых возник метод точечных отображений. Параметрическое представление функций последования, впервые введенное А. А. Андроновым, существенно увеличило «пробивную силу» метода точечных отображений и позволило в короткий срок решить большое число задач, долгое время остававшихся не исследованными. Итог большой работы, сделанной А. А. Андроновым, его сотрудниками и учениками, был подведен в книге А. А. Андропова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина «Теория колебаний». Во втором издании этой книги, вышедшем под редакцией Н. А. Железцова, содержится описание метода точечных отображений в применении к динамическим системам второго порядка. В дальнейшем изучение точечных отображений, порождаемых фазовыми траекториями динамической системы, позволило с единой точки зрения рассмотреть такие, казалось бы, разнородные задачи, как движение блуждающей частицы, эволюция популяций, работа конечного автомата, математические модели уличного движения автотранспорта на перекрестке, динамика перцептрона, представляющего модель процесса обучения, и другие задачи. Изучение при помощи метода точечных отображений гомоклинических структур в многомерном фазовом простран-

стве дало возможность установить связь между детерминированными и стохастическими системами (см. гл. 7). Итоги проделанной работы по развитию метода точечных отображений применительно к динамическим системам с многомерным фазовым пространством изложены в книге [9].

В данной главе излагаются начальные сведения о методе точечных отображений: вводятся основные понятия и приемы исследования, которые позволяют изучать поведение фазовых траекторий в двумерном и трехмерном фазовом пространстве. На конкретных примерах простейших кусочно-линейных систем рассматриваются автоколебания, вынужденные и параметрические колебания, а также скользящие движения, возможные в этих системах.

### **§ 1. Сведéние рассмотрения поведения фазовых траекторий к точечному отображению прямой в прямую и плоскости в плоскость**

Многие стороны поведения фазовых траекторий динамической системы, а в ряде случаев и полная картина разбиения фазового пространства на траектории могут быть выяснены путем исследования поведения точек пересечения траекторий с так называемым отрезком без контакта (в случае двумерного фазового пространства) или с секущей поверхностью (в случае трехмерного фазового пространства). Последовательность точек пересечения образует некоторое точечное преобразование  $T$ , к изучению которого и сводится задача об исследовании поведения фазовых траекторий. При этом оказывается, что структура рассматриваемой динамической системы взаимно однозначно определяется структурой порождаемого ею точечного отображения  $T$ . Это означает, что каждому вопросу в отношении структуры решений дифференциальных уравнений отвечает некоторый вопрос, относящийся к структуре точечного отображения  $T$ . В частности, периодическим решениям дифференциальных уравнений или, что то же самое, замкнутым фазовым траекториям ставятся в соответствие неподвижные точки соответствующего точечного отображения  $T$ .

Орбитно устойчивому или орбитно неустойчивому периодическому движению отвечает соответственно устойчивая или неустойчивая неподвижная точка. Для того чтобы убедиться в справедливости всех этих утверждений,

а также выяснить другие свойства точечного отображения, вновь рассмотрим случай двумерного фазового пространства, т. е. рассмотрим автономную динамическую систему второго порядка, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (4.2)$$

Предположим, как и прежде, что для системы уравнений (4.2) выполняются теоремы единственности решения и его непрерывной зависимости от начальных условий по крайней мере в сторону возрастания времени, а фазовое пространство представляет собою плоскость.

Проведем на фазовой плоскости через неособые точки отрезок без контакта  $AB$ , т. е. такой отрезок прямой или дуги некоторой гладкой кривой, в каждой точке которого фазовые траектории системы (4.2) пересекают его, нигде не касаясь. Рассмотрим фазовую траекторию  $\Gamma$ , проходящую через некоторую точку  $M$  отрезка  $AB$ , где  $M$  отлична от точек  $A$  или  $B$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  изображающая точка, движущаяся на траектории  $\Gamma$  согласно уравнениям (4.2), совпадает с точкой  $M$ . Если при дальнейшем движении изображающей точки вдоль фазовой кривой  $\Gamma$  она будет вновь и вновь пересекать отрезок без контакта  $AB$ , то говорят, что точка  $M$  имеет последующие. Тогда на основании теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий все точки на отрезке

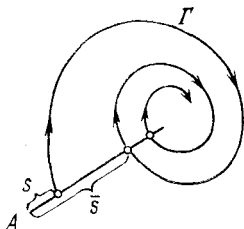


Рис. 4.1

$AB$ , достаточно близкие к точке  $M$ , также имеют последующие. Пусть  $s$  и  $\bar{s}$  — координаты точки  $M$  и ее последующей (рис. 4.1). Согласно сказанному выше, будет существовать функциональная зависимость

$$\bar{s} = f(s), \quad (4.3)$$

которая называется функцией последования. Она выражает закон некоторого точечного отображения отрезка  $AB$  (или его части) в себя, устанавливая взаимно однозначное соответствие между точками этого отрезка и их последующими. Тем самым задача изучения структуры разбиения фазовой плоскости (или ее части) на траектории сводится

к изучению структуры соответствующего точечного отображения  $T$  отрезка без контакта в себя с функцией последования (4.3). Геометрически непосредственно ясно (рис. 4.1), что для существования функции последования необходимо, чтобы траектории на фазовой плоскости обладали свойством возвращаемости, причем возвращение изображающей точки на отрезок без контакта должно происходить за конечный промежуток времени.

Для замкнутой фазовой траектории точка  $M$  совпадает со своей последующей, поэтому  $s^* = f(s^*)$ . Точка  $s = s^*$  называется неподвижной точкой точечного отображения  $T$ . Отсюда следует, что отыскание замкнутых траекторий

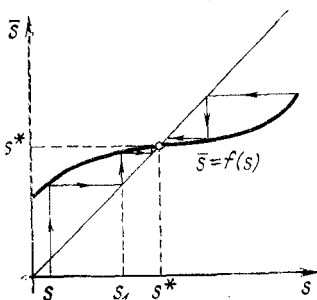


Рис. 4.2

(предельных циклов) на фазовой плоскости сводится к отысканию неподвижных точек точечного отображения  $T$ . Эта задача может быть решена графически при помощи построения на плоскости  $s\bar{s}$  графика функции  $\bar{s} = f(s)$ . Кривая  $\bar{s} = f(s)$  обладает тем свойством, что ее производная  $d\bar{s}/ds$  всегда положительна, так как в силу теоремы Коши фазовые траектории не могут пересекаться. Неподвижные точки отображения  $T$  находятся из условия пересечения графика функции последования  $\bar{s} = f(s)$  с биссектрисой  $\bar{s} = s$ . Указанное геометрическое построение называется диаграммой Ламерея (рис. 4.2).

Существенно, что характер поведения кривой  $\bar{s} = f(s)$  вблизи точки  $\bar{s} = s$  полностью определяется характером поведения фазовых траекторий вблизи соответствующего этой точке предельного цикла. Это позволяет сформулировать на языке точечных преобразований условие устойчивости предельного цикла. Рассмотрим последовательность точек, определяемую соотношениями

$$s_1 = f(s), s_2 = f(s_1), s_3 = f(s_2), \dots \quad (4.4)$$

Если фазовая траектория при  $t \rightarrow \infty$  стремится к предельному циклу, то соответствующая последовательность (4.4) будет иметь своей предельной точкой неподвижную точку  $s = s^*$ . И наоборот, из сходимости последовательности (4.4) к неподвижной точке  $s = s^*$  следует, что соответствующая ей фазовая траектория стремится при  $t \rightarrow \infty$

к предельному циклу. В этом случае неподвижная точка называется устойчивой, ибо она соответствует устойчивому предельному циклу. Последовательность (4.4) можно изобразить на диаграмме рис. 4.2 в виде «лестницы Ламерея», направление перемещения по которой дает возможность наглядно определить устойчивость неподвижной точки  $s = s^*$  в большом (потому что это построение можно провести на всей кривой  $\bar{s} = f(s)$ ). Условие устойчивости неподвижной точки  $s = s^*$  в малом дается следующей теоремой Кёнигса: неподвижная точка  $s = s^*$  точечного отображения  $\bar{s} = f(s)$  устойчива, если  $|\bar{d}\bar{s}/ds|_{s=s^*} < 1$ , и неустойчива, если  $|\bar{d}\bar{s}/ds|_{s=s^*} > 1$ \*). Для доказательства этой теоремы достаточно линеаризовать функцию  $\bar{s} = f(s)$  в малой окрестности точки  $s = s^*$  и построить соответствующую «лестницу Ламерея», что мы предлагаем проделать читателю.

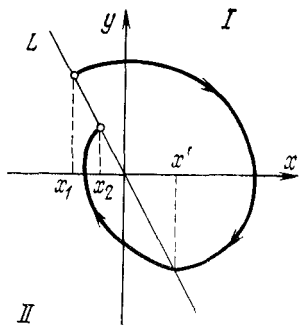


Рис. 4.3

Во многих задачах не представляется возможным получить функцию последования, записанную в явном виде (4.3). В таком случае прибегают к параметрической форме этой записи, что часто облегчает не только нахождение функции последования, но и ее исследование. Пусть, например, фазовая плоскость  $xu$  рассматриваемой динамической системы разбивается прямой  $L$ , определяемой уравнением  $y = -kx$ , на две области:  $I$  и  $II$  (рис. 4.3), в каждой из которых уравнения движения (4.2) различны, но линейны. Обозначим через  $x_1, x'$  абсциссы точек пересечения прямой  $y = -kx$  с некоторой фазовой траекторией, по которой изображающая точка движется в области  $I$ , а через  $x', x_2$  — абсциссы точек пересечения той же прямой с фазовой траекторией, которая проходит через точку  $x', y' = -kx'$  и принадлежит области  $II$ . Интегрируя ли-

\*) Теорема Кёнигса справедлива и для случая, когда производная  $\bar{d}\bar{s}/ds < 0$ . Указанный случай имеет место, например, при исследовании вырожденного трехмерного фазового пространства, когда это исследование сводится к изучению точечного отображения полупрямой в себя (см. § 3).



нейные дифференциальные уравнения в области  $I$  с начальными условиями  $t = 0$ ,  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ , получим решение  $x = \varphi_1(t, x_1, y_1)$ ,  $y = \varphi_2(t, x_1, y_1)$ , которое зависит от начальных значений  $x_1, y_1$  фазовых переменных линейно. Через промежуток времени  $\tau_1$  изображающая точка вновь придет на прямую  $L$  в точку с координатами  $x', y' = -kx'$ . Подставляя эти значения в найденное решение и используя уравнение прямой  $L$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}x' &= \varphi_1(\tau_1, x_1, y_1), & y' &= -kx', \\y' &= \varphi_2(\tau_1, x_1, y_1), & y_1 &= -kx_1,\end{aligned}$$

откуда после исключения величин  $y_1, y'$  получаем искомую функцию последования в параметрическом представлении

$$x_1 = \psi_1(\tau_1), \quad x' = \psi_2(\tau_1) \quad (4.5)$$

с текущим параметром  $\tau_1$ . Функция последования (4.5) осуществляет точечное отображение  $T_1$  верхней части прямой  $L$  в нижнюю ее часть.

Проводя аналогичное рассмотрение области  $II$  на рис. 4.3, получим точечное отображение  $T_2$  нижней части прямой  $L$  в верхнюю ее часть с функцией последования

$$x_2 = \psi_3(\tau_2), \quad x' = \psi_4(\tau_2), \quad (4.6)$$

где текущий параметр  $\tau_2$  представляет собою время пробега изображающей точки в области  $II$ . Точечное отображение  $T$  отрезка полупрямой  $L$  в себя получается в результате

последовательного применения точечных отображений  $T_1$  и  $T_2$ , т. е. отображение  $T = T_1 \cdot T_2$  является произведением отображений  $T_1$  и  $T_2$ . Задача отыскания предельных циклов, охватывающих обе области, сводится, таким образом, к нахождению точек пересечения кривых (4.5) и (4.6) (рис. 4.4) или, что то же самое, к решению системы уравнений

$$\psi_1(\tau_1^*) = \psi_3(\tau_2^*), \quad \psi_2(\tau_1^*) = \psi_4(\tau_2^*),$$

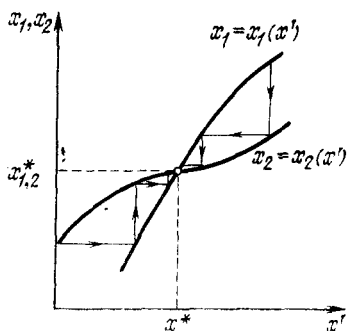


Рис. 4.4

которые обычно оказываются трансцендентными. Устойчивость неподвижной точки и соответствующего предельного цикла определяется по-прежнему теоремой Кёнигса, в которой нужно использовать выражение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx_1} = \frac{\psi_3'(\tau_2^*)}{\psi_4'(\tau_2^*)} \cdot \frac{\psi_2'(\tau_1^*)}{\psi_1'(\tau_1^*)}. \quad (4.7)$$

Описанный способ получения точечных отображений применим для любых кусочно-линейных динамических систем второго порядка и в более общем случае, когда фазовая плоскость разбивается на три, четыре и большее число областей. Однако практические трудности в решении задачи при этом возрастают из-за громоздкости получаемых выражений. Лишь с созданием быстродействующих электронно-вычислительных машин появились новые возможности для преодоления математических трудностей при решении не только этих, но и более сложных и громоздких задач.

Обратимся теперь к исследованию поведения траекторий в трехмерном фазовом пространстве. Поведение соответствующей динамической системы описывается системой трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Будем по-прежнему предполагать, что для их решений в сторону возрастания времени соблюдаются теоремы единственности и непрерывной зависимости от начальных условий. Введем понятие поверхности без контакта. По определению поверхностью без контакта называется гладкая поверхность, во всех своих точках пересекать фазовыми траекториями без касания. Секущей поверхностью будем называть поверхность без контакта, которая при возрастании времени вновь и вновь пересекается фазовыми траекториями, причем так, что промежутки времени между последовательными пересечениями ограничены. При выполнении сделанных выше предположений фазовые траектории рассматриваемой динамической системы порождают на секущей поверхности  $S$  некоторое непрерывное точечное отображение  $T$ , которое любой точке  $M$  поверхности  $S$  ставит в соответствие ближайшую, следующую за  $M$ , точку  $\bar{M}$  пересечения фазовой траектории, выходящей из точки  $M$ , с поверхностью  $S$ . Часто в качестве секущей поверхности  $S$  выбирают некоторую плоскость. В этом случае задача изучения поведения траекторий в трехмерном фазовом пространстве сводится

к исследованию точечного отображения  $T$  плоскости в себя. Неподвижная точка отображения  $T$  так же, как и в случае фазовой плоскости, соответствует замкнутой траектории в трехмерном фазовом пространстве. Устойчивая неподвижная точка отвечает орбитно устойчивому предельному циклу. Процедура нахождения точечного отображения  $T$  в рассматриваемом случае аналогична

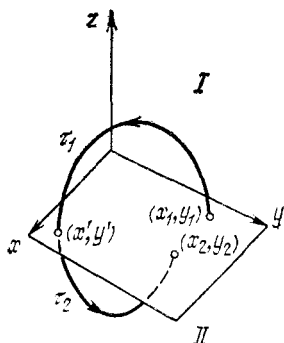


Рис. 4.5

описанной выше для случая фазовой плоскости, однако получаемые при этом выражения значительно усложняются. Пусть, например, трехмерное фазовое пространство  $\Phi$  с декартовыми координатами  $x, y, z$  разбивается плоскостью  $z = 0$  на две области, в каждой из которых уравнения динамики

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= R(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.8)$$

различны, но линейны. Интегрируя линейные дифференциальные уравнения (4.8) в области  $I$  фазового пространства  $\Phi$  (рис. 4.5), запишем решение с начальными условиями  $t = 0, x = x_0, y = y_0, z = z_0$  в виде

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Начальные значения  $x_0, y_0, z_0$  входят в выражения (4.9) линейно, что существенно упрощает дальнейшие выкладки. Пусть изображающая точка, которая в начальный момент времени  $t = 0$  находилась на плоскости  $z = 0$  в точке  $M_1(x_1, y_1)$ , перемещается в области  $I$  согласно уравнениям (4.8) и через промежуток времени  $\tau_1$  вновь попадает на плоскость  $z = 0$  в другую, вообще говоря, точку  $M'(x', y')$ . При этом в соответствии с законом движения (4.9) мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} x' &= \varphi_1(\tau_1, x_1, y_1, 0), \quad y' = \varphi_2(\tau_1, x_1, y_1, 0), \\ 0 &= \varphi_3(\tau_1, x_1, y_1, 0), \end{aligned} \quad (4.10)$$

определяющие точечное отображение  $T_1$  плоскости  $z = 0$  в себя. В самом деле, пусть значения  $x_1, y_1$  заданы. Тогда, подставляя эти значения в (4.10), получаем уравнение

$\varphi_3(\tau_1, x_1, y_1, 0) = 0$ , которое обычно оказывается трансцендентным относительно  $\tau_1$ . Затем находим наименьший корень  $\tau_1$  уравнения  $\varphi_3 = 0$  и подставляем найденное значение  $\tau_1$  в первые два соотношения (4.10). В результате находим координаты точки  $(x', y')$ , в которую преобразуется точка  $(x_1, y_1)$ . Если разрешить первые два соотношения (4.10) относительно  $x_1, y_1$  и подставить полученные выражения  $x_1, y_1$  в третье соотношение (4.10), то можно представить точечное отображение  $T_1$  в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(\tau_1, x', y'), \quad y_1 = \psi_2(\tau_1, x', y'), \\ \psi_3(\tau_1, x', y') &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отсюда по заданным значениям  $x', y'$  сначала из третьего соотношения (4.11) определяем наименьший корень  $\tau_1$  полученного уравнения  $\psi_3 = 0$  и, подставляя затем это значение  $\tau_1$  в первые два соотношения (4.11), находим величины  $x_1, y_1$ . Тем самым точке  $M'$  плоскости  $z = 0$  однозначно ставится в соответствие некоторая точка  $M_1$  той же плоскости.

Проинтегрируем теперь уравнения (4.8) в области  $II$  фазового пространства  $\Phi$  и запишем найденное решение в виде

$$\begin{aligned} x &= \varphi_4(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_5(t, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \varphi_6(t, x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Начальные значения  $x_0, y_0, z_0$  входят сюда также линейно. Пусть изображающая точка находится в начальный момент времени  $t = 0$  на плоскости  $z = 0$  в точке  $M'$  ( $x', y'$ ) и затем, перемещаясь в области  $II$ , через промежуток времени  $\tau_2$  вновь приходит на плоскость  $z = 0$  в некоторую точку  $M_2(x_2, y_2)$ ; тогда согласно (4.12) получаем соотношения

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_4(\tau_2, x', y', 0), \quad y_2 = \varphi_5(\tau_2, x', y', 0), \\ 0 &= \varphi_6(\tau_2, x', y', 0), \end{aligned} \quad (4.13)$$

которые осуществляют точечное отображение  $T_2$  плоскости  $z = 0$  в себя: точке  $M'$  однозначно ставится в соответствие точка  $M_2$ . Точечное отображение  $T_1$ , определяемое соотношениями (4.10), и точечное отображение  $T_2$ , определяемое соотношениями (4.13), проведенные последовательно, определяют точечное отображение  $T = T_2 \cdot T_1$ , которое является произведением точечных отображений  $T_1$  и  $T_2$ , осуществляющее преобразование точки  $M_1$  плоскости  $z = 0$  в точку  $M_2$ . Это отображение можно записать в виде

краткой формулы  $TM_1 = M_2$ . При совпадении точек  $M_1$  и  $M_2$  эта формула превращается в уравнение  $TM^* = M^*$ , которому должна удовлетворять неподвижная точка  $M_1 = M_2 = M^*$ . Неподвижная точка отображения  $T$  соответствует замкнутой траектории в трехмерном фазовом пространстве  $\Phi$ . Из условия совпадения точек  $M_1$  и  $M_2$  после подстановки в соотношения (4.10) и (4.13) значений  $x_1 = x_2 = x^*$ ,  $y_1 = y_2 = y^*$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x'^* &= \varphi_1(\tau_1^*, x^*, y^*, 0), & y'^* &= \varphi_2(\tau_1^*, x^*, y^*, 0), \\ &\varphi_3(\tau_1^*, x^*, y^*) = 0, \\ x^* &= \varphi_4(\tau_1^*, x'^*, y'^*, 0), & y^* &= \varphi_5(\tau_2^*, x'^*, y'^*, 0), \\ &\varphi_6(\tau_2^*, x'^*, y'^*) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

для определения координат  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $x'^*$ ,  $y'^*$  точек, через которые проходит замкнутая фазовая траектория, а также величин  $\tau_1^*$  и  $\tau_2^*$ , определяющих период  $\tau = \tau_1^* + \tau_2^*$  соответствующего периодического движения. Устойчивая изолированная неподвижная точка отображения  $T$  соответствует наличию в фазовом пространстве  $\Phi$  орбитно устойчивого предельного цикла.

Может оказаться, что  $TM_1 = M_2 \neq M_1$ , однако при вторичном применении отображения  $T$  точка  $M_3 = TM_2 = T(TM_1) = T^2M_1$  совпадает с точкой  $M_1$ . Точка  $M_1 = M_3 = M^*$ , удовлетворяющая уравнению  $T^2M^* = M^*$ , называется двукратной неподвижной точкой отображения  $T$ . Предельный цикл, соответствующий двукратной неподвижной точке, состоит из двух витков, каждый из которых охватывает обе области  $I$  и  $II$  трехмерного фазового пространства  $\Phi$ . В общем случае, когда  $M^*$  является  $m$ -кратной неподвижной точкой отображения  $T$ , для которой удовлетворяется соотношение  $T^m M^* = M^*$  (и при целых  $s$ , меньших  $m$ ,  $T^s M^* \neq M^*$ ), в фазовом пространстве рассматриваемой динамической системы имеется предельный цикл, состоящий из  $m$  витков.

Если для точечного отображения  $T_1$  воспользоваться выражениями (4.11), то процедуру отыскания неподвижных точек полного отображения  $T = T_2 \cdot T_1$  можно свести, аналогично случаю фазовой плоскости, к некоторым геометрическим построениям. Для этого рассмотрим трехмерное пространство  $\Psi$  с декартовыми координатными осями  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$ . Соотношения (4.11) определяют в этом пространстве уравнения поверхностей  $x_1 = \Psi_1(x', y')$ ,

$y_1 = \Psi_2(x', y')$ , а соотношения (4.12) — уравнения поверхностей  $x_2 = \Psi_3(x', y')$ ,  $y_2 = \Psi_4(x', y')$ . Отложим сначала вдоль направления оси  $Oz'$  величины  $x_1 = \Psi_1(x', y')$  и  $x_2 = \Psi_3(x', y')$ . В результате получаем две поверхности, пересекающиеся вдоль некоторой кривой, проекция которой на

плоскость  $z' = 0$  дает кривую  $\Gamma_1$  (рис. 4.6). Если затем отложить по направлению оси  $Oz'$  величины  $y_1 = \Psi_2(x', y')$  и  $y_2 = \Psi_4(x', y')$ , то получаем две другие поверхности, кривая пересечения которых дает в проекции на плоскость  $z' = 0$  кривую  $\Gamma_2$  (рис. 4.7). Совместим теперь плоскости  $z' = 0$  рис. 4.6 и 4.7 с имеющимися

на них кривыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , тогда получим диаграмму, изображенную на рис. 4.8. Точки пересечения кривых на этой диаграмме (на рис. 4.8 показан случай одной точки пересечения) соответствуют неподвижным точкам отображения  $T$ . В самом деле, в точке пересечения кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  на рис. 4.8 одновременно выполняются два условия:  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ , которые говорят о том, что полное

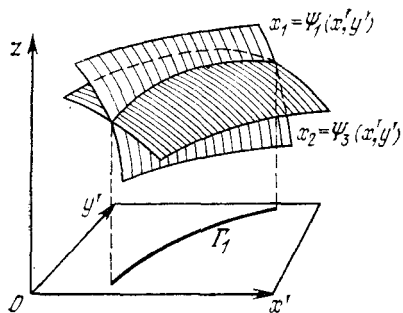


Рис. 4.6

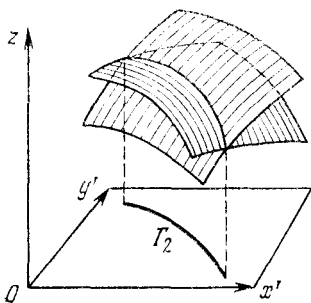


Рис. 4.7

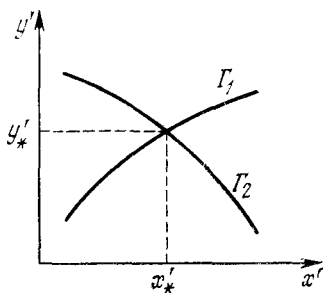


Рис. 4.8

точечное отображение  $T = T_2 \cdot T_1$  оставляет точку  $M_1 = M_2 = M^*$  неподвижной. Одновременно неподвижной точкой является, конечно, и точка  $M'^*$  с координатами

$x'^*$ ,  $y'^*$  потому, что соответствующий предельный цикл проходит и через эту точку.

Этот геометрический прием отыскания неподвижных точек отображения  $T$  при помощи построения некоторых поверхностей и кривых можно рассматривать как обобщение геометрического метода исследования точечного отображения прямой в прямую при помощи построения диаграммы Кёнигса—Ламерея на случай точечного отображения плоскости в плоскость. Объем вычислений, которые необходимо выполнить при построении поверхностей и кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , значительно превышает объем вычислений, связанных с построением диаграмм Кёнигса—Ламерея, и практически эти вычисления в большинстве случаев удастся проделать лишь с привлечением электронных вычислительных машин.

Описанная процедура отыскания неподвижных точек отображения плоскости самой в себя может быть с успехом использована и в случае, когда фазовое пространство  $\Phi$  разделяется на две области произвольно расположенной в этом пространстве плоскостью. В этом случае на разделяющей плоскости  $S$  нужно ввести систему координат, например, с декартовыми осями  $u$ ,  $v$  и выразить фазовые переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  через величины  $u$ ,  $v$ . Эти соотношения будут иметь вид

$$x = a_1u + b_1v + c_1, \quad y = a_2u + b_2v + c_2,$$

$$z = a_3u + b_3v + c_3,$$

где  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  — известные постоянные коэффициенты. Затем находятся параметрические уравнения, выражающие  $u_1$ ,  $v_1$  и  $u_2$ ,  $v_2$  через величины  $u'$ ,  $v'$ .

## § 2. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Скользящие движения

В ряде случаев рассмотрение динамической системы сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений (4.1), правые части которых терпят разрывы непрерывности первого рода на некоторых гладких поверхностях  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , разбивающих фазовое пространство на некоторые области  $D_1, D_2, \dots, D_m$ . В каждой из областей  $D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) движение системы определяется дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n, \\ j = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

в которых функции  $f_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  являются гладкими. Однако для полного описания рассматриваемой динамической системы необходимо еще выяснить, как движется изображающая точка в фазовом пространстве при попадании на граничные поверхности  $S_1, S_2, \dots, S_k$ .

С этой целью рассмотрим сначала простейший случай двумерного фазового пространства. Пусть фазовая плоскость разделяется некоторой прямой  $S$  на две области  $D_1$  и  $D_2$ , в каждой из которых правые части соответствующих дифференциальных уравнений (4.15) являются гладкими функциями фазовых переменных. Среди всех возможных типов поведения фазовых траекторий в окрестности прямой  $S$  рассмотрим лишь три основных случая-

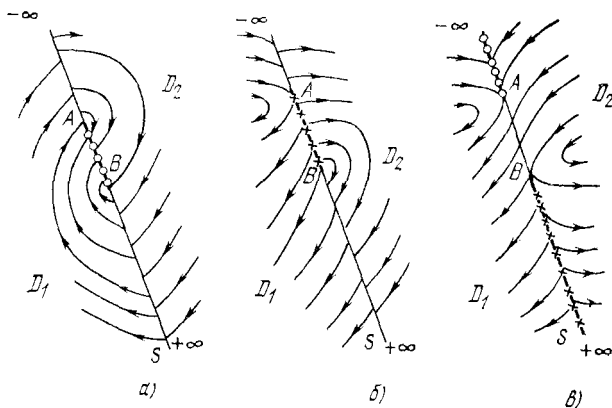


Рис. 4.9

которые показаны на рис. 4.9. В первом случае (рис. 4.9, а) при возрастании времени  $t$  изображающая точка переходит из области  $D_1$  в область  $D_2$  на участке  $(-\infty, A)$  границы  $S$ , переходит из  $D_2$  в  $D_1$  на участке  $(B, +\infty)$  и остается на отрезке  $AB$  границы  $S$ . Предположим, что в рассматриваемой динамической системе не могут происходить скачкообразные изменения фазовых переменных, т. е. они изменяются во времени непрерывно (по крайней мере в малой окрестности границы  $S$ ). Тогда при возрастании времени изображающая точка, пересекая границу  $S$ , на участках  $(-\infty, A)$  и  $(B, +\infty)$  переходит из одной области в другую. Непрерывный переход фазовой точки через поверхность разрыва из одной области гладкости



в другую соответствует так называемому «сшиванию» решений по непрерывности. Иная ситуация возникает на участке стыка фазовых траекторий. При попадании на отрезок  $AB$  изображающая точка вынуждена двигаться по нему до тех пор, пока не достигнет состояния равновесия, если оно существует, или одной из конечных точек отрезка  $AB$ . Перемещение изображающей точки по отрезку  $AB$  называется скользящим движением. Во втором случае (рис. 4.9, б) изображающая точка при возрастании времени  $t$  переходит из области  $D_1$  в область  $D_2$  на участке  $(-\infty, A)$  и из области  $D_2$  в область  $D_1$  на участке  $(B, +\infty)$  прямой  $S$ . Что касается отрезка  $AB$ , то он является границей, разделяющей фазовые траектории областей  $D_1$  и  $D_2$ , от которой изображающая точка, двигаясь по фазовым траекториям, уходит от прямой  $S$  с возрастанием времени. По аналогии с предыдущим случаем отрезок  $AB$  на рис. 4.9, б можно назвать участком неустойчивого скользящего движения. Наконец, в третьем случае (рис. 4.9, в) устойчивое скользящее движение осуществляется на участке  $(-\infty, A)$ , неустойчивое скользящее движение — на участке  $(B, +\infty)$ , а на отрезке  $AB$  прямой  $S$  изображающая точка переходит из области  $D_2$  в область  $D_1$ . Направление наклона касательных фазовых кривых, приходящих навстречу друг другу на участок  $(-\infty, A)$  устойчивого скользящего движения, указывает на то, что движение изображающей точки по этому участку будет происходить в направлении точки  $A^*$ ). После достижения точки  $A$ , которая не является состоянием равновесия рассматриваемой динамической системы, изображающая точка уходит в область  $D_1$ , по траектории, касающейся прямой  $S$  в точке  $A$ .

Рассмотрим теперь поведение фазовой точки вблизи и на поверхности разрыва правой части дифференциальных уравнений (4.1) в случае трехмерного фазового пространства. Пусть  $S$  — одна из поверхностей разрыва  $S_i$  и пусть к рассматриваемому ее участку примыкают области  $D_1$  и  $D_2$ . По-прежнему предполагая, что в динамической системе не могут происходить скачкообразные изменения фазовых переменных, рассмотрим некоторые основные случаи, которые могут здесь представиться. На рис. 4.10 показан один из наиболее простых случаев. Упрощение состоит в том, что со стороны области  $D_1$  поведение фазо-

\*) Строгое обоснование этого утверждения приведено в [9].

вых траекторий в малой окрестности поверхности  $S$  одинаково: двигаясь по любой из этих траекторий, изображающая точка или всегда приходит на рассматриваемый участок поверхности  $S$  (рис. 4.10, *a* и *б*), или уходит от этой поверхности (рис. 4.10, *в*). В малой окрестности поверхности  $S$  со стороны области  $D_2$  поведение фазовых

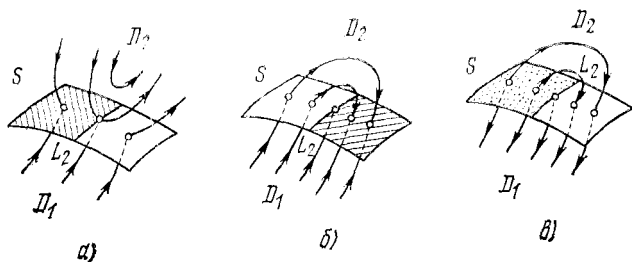


Рис. 4.10

траекторий более сложное: двигаясь по кривым в области  $D_2$  рис. 4.10, *a*, изображающая точка или попадает на поверхность  $S$ , или, приближаясь к поверхности  $S$ , достигает некоторого минимального расстояния от этой поверхности и затем удаляется от нее, или, наконец, постоянно удаляется от поверхности  $S$ . Кривая  $L_2$ , которая состоит из точек соприкосновения поверхности  $S$  с фазовыми траекториями области  $D_2$ , отделяет область скользящих движений на поверхности  $S$  от области непрерывного перехода изображающей точки из  $D_1$  в  $D_2$  (рис. 4.10, *a* и *б*) или из  $D_2$  в  $D_1$  (рис. 4.10, *в*). В той части поверхности  $S$ , где фазовые траектории стыкуются, находится область устойчивых скользящих движений (на рис. 4.10, *a* и *б* эта область отмечена штриховкой). Слева от кривой  $L_2$  на рис. 4.10, *в* находится область неустойчивых скользящих движений, которая по существу является граничной поверхностью, разделяющей фазовые траектории на участки с различным направлением движения по ним изображающей точки.

Если в результате устойчивого скользящего движения изображающая точка приходит на граничную кривую  $L_2$ , то в случае рис. 4.10, *a* фазовая точка покидает поверхность  $S$  и уходит в область  $D_2$ , а в случае рис. 4.10, *б* она продолжает движение вдоль кривой  $L_2$ . Рассмотрим теперь более сложный случай, когда поведение траекторий

в области  $D_1$  аналогично поведению траекторий в области  $D_2$  только что описанного случая. Тогда на поверхности  $S$  появляется кривая  $L_1$ , аналогичная кривой  $L_2$  в первом случае. На рис. 4.11 показан практически часто встречающийся случай совпадения кривых  $L_1$  и  $L_2$ . Область устойчивых скользящих движений заштрихована,

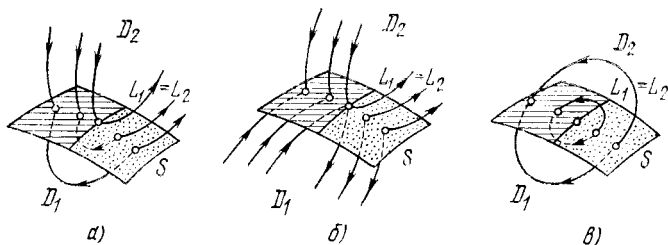


Рис. 4.11

а область неустойчивых скользящих движений отмечена точками. Более общий случай, когда кривые  $L_1$  и  $L_2$  не совпадают, изображен на рис. 4.12, а, б, в. Границу области скользящих движений на рис. 4.12 образуют кривые  $L_1$  и  $L_2$ . Если изображающая точка в результате устойчивого скользящего движения по поверхности  $S$  приходит на границу области — кривую  $L_1$  или  $L_2$ , то в дальнейшем фазовая точка или движется вдоль этой границы, если эта граница является устойчивым множеством (например, кривая  $L_2$  на рис. 4.12), или уходит в одну из областей, примыкающих к поверхности  $S$ . (Например, при достижении кривой  $L_1$  на рис. 4.12, в изображающая точка уходит в область  $D_1$ .)

В общем случае  $n$ -мерного фазового пространства изображающая точка, пришедшая на устойчивую границу  $S$  размерности  $n - 2$  области скользящих движений размерности  $n - 1$ , движется по ней до тех пор, пока не дойдет до соответствующей границы размерности  $n - 3$  и т. д. вплоть до границы нулевой размерности. В соответствии с этим описанием фазовое пространство  $\Phi$  распадается на подпространства  $\Phi_i$ , роль которых играют области  $D_j$  размерности  $n$ , области устойчивых скользящих движений на граничных поверхностях  $S_l$  размерности  $n - 1$ , их границы размерности  $n - 2$ ,  $n - 3$  и т. д. [9].

Вопрос о том, каким уравнениям подчиняется скользящее движение, решается после рассмотрения характера

той идеализации, в результате которой возникла разрывность правой части дифференциальных уравнений (4.1). В случае, когда некоторая характеристика, имеющая участок с крутым наклоном касательной, заменяется двумя горизонтальными прямыми с разрывом первого рода

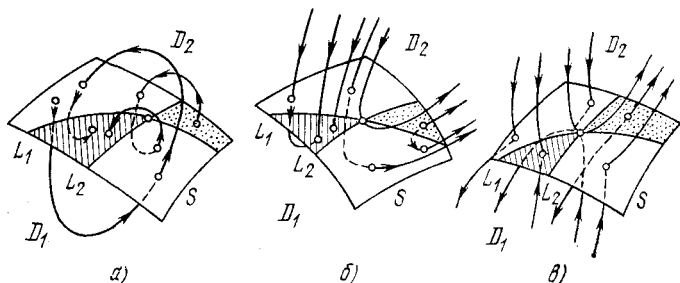


Рис. 4.12

(т. е. идеализируется при помощи так называемой  $Z$ -характеристики), уравнения скользящего движения можно получить следующим предельным переходом: участок кривой с крутым наклоном заменяется сначала наклонной прямой, далее составляются уравнения движения системы в этой «переходной» области и затем совершается переход к пределу, при котором угол наклона прямой устремляется к значению  $\pi/2$ . В рассмотренном случае разрывность правых частей дифференциальных уравнений движения является идеализацией очень быстрого изменения правых частей в окрестности поверхностей  $S$ . В других случаях эта разрывность может быть следствием пренебрежения некоторыми быстро меняющимися в окрестности  $S$  дополнительными переменными  $\xi_i$ , от которых зависят правые части системы уравнений (4.1), а сами уравнения (4.1) являются упрощением некоторой более общей системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad (4.16)$$

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_m) = 0 \quad (4.17)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m),$$

где присоединенные уравнения (4.17) и зависимость правых частей уравнений (4.16) от переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  нам не известны. При этом, однако, предполагается, что в силу уравнений (4.16) и (4.17) вне малой окрестности

поверхности  $S_l$  ( $l = 1, 2, \dots, k$ ) функции  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  пренебрежимо мало отличаются от функций  $f_{i,s}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f_{i,r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в уравнениях (4.15), описывающих движение системы в областях  $D_s$  и  $D_r$ , отделенных одна от другой поверхностью  $S_l$ . Кроме того, должно быть известно, что в окрестности поверхности  $S_l$  происходит быстрое изменение величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ , идеализация которого скачкообразным изменением приводит к разрывности правых частей уравнений (4.1). При этих условиях предельный переход, частный случай которого был описан выше, приводит к правильным уравнениям скользящих движений. Общий прием составления уравнений скользящих движений в практически важном частном случае, когда разрыв непрерывности порождается одной быстро меняющейся вблизи поверхности  $S$  ограниченной функцией  $\Omega(x, \xi)$ , указан в книге [9].

### § 3. Точечное отображение сдвига $T_\tau$ и его применение к изучению вынужденных и параметрических колебаний динамической системы

В § 1 было показано, что динамической системе, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями (4.1), можно сопоставить некоторое точечное отображение  $T$  при помощи отрезка без контакта в случае двумерного фазового пространства или при помощи секущей поверхности в случае трехмерного пространства. В этом параграфе мы рассмотрим еще один тип точечного отображения, называемого отображением сдвига. По определению, отображением сдвига  $T_\tau$  динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.18)$$

называется точечное отображение, ставящее в соответствие каждой точке фазового пространства такую точку, в которую эта точка перейдет согласно дифференциальным уравнениям (4.18) спустя время  $\tau$ . При этом предполагается, что дифференциальные уравнения (4.18) допускают единственное решение, определенное для всех значений времени  $t$ . При различных значениях  $\tau$  на интервале  $-\infty < \tau < \infty$  точечные отображения  $T_\tau$  образуют однопараметрическую группу, причем

$$T_{\tau_1} T_{\tau_2} = T_{\tau_1 + \tau_2}. \quad (4.19)$$

При значении  $\tau = 0$  оператор сдвига  $T_\tau$  представляет тождественное преобразование, а при изменении  $\tau$  от  $-\infty$  до  $\infty$  оператор  $T_\tau$  определяет фазовые траектории рассматриваемой динамической системы. В силу соотношения (4.19) оператор  $T_\tau$  определен для любого  $\tau$ , если он определен для всех достаточно малых значений  $\tau$ .

Нетрудно видеть, что оператор  $T_\tau$  находится непосредственно в случае, когда известно общее решение дифференциальных уравнений (4.18). В самом деле, пусть это общее решение имеет вид

$$x_i = \varphi_i(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t^0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.20)$$

где  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  — значения фазовых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в начальный момент времени  $t_0$ . Тогда в расширенном фазовом пространстве  $\Phi_{n+1}$ , в котором по осям координат отложены фазовые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и время  $t$ , изображающая точка, перемещаясь в соответствии с законом движения (4.20), в момент времени  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ) достигает некоторой точки  $M_1$  с координатами  $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$ . Согласно (4.20) координаты точки  $M_1$  ( $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$ ) и точки  $M_0$  ( $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ ) связаны соотношениями  $x_i^1 = \varphi_i(t_1, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Если в этих соотношениях положить  $t_1 = t_0 + \tau$ , где  $\tau$  — фиксированная величина, то они определяют в пространстве  $\Phi_{n+1}$  отображение сдвига  $T_\tau$ :

$$x_i^1 = \varphi_i(t_0 + \tau, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.21)$$

В случае автономной системы правые части формул преобразования (4.21) не зависят от времени явно и отображение  $T_\tau$  принимает вид

$$x_i^1 = \varphi_i(\tau, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.22)$$

Остановимся теперь на вопросе о связи точечного отображения  $T$ , порождаемого фазовыми траекториями на секущей поверхности, с отображением сдвига  $T_\tau$ . Отображение  $T$  секущей поверхности определено в пространстве, размерность которого по крайней мере на единицу меньше, чем размерность фазового пространства системы. В отличие от  $T$ , точечное отображение сдвига  $T_\tau$  определено в пространстве той же размерности, что и фазовое простран-

ство. Поэтому характер связи между структурой фазового портрета динамической системы и структурой точечного отображения сдвига  $T_\tau$  отличается от связи структуры разбиения фазового пространства на траектории со структурой отображения  $T$  секущей поверхности. Вместе с тем отображение сдвига  $T_\tau$  автономной системы или неавтономной системы, правые части дифференциальных уравнений которой являются периодическими функциями времени  $t$ , можно интерпретировать как точечное отображение  $T$ , порождаемое решениями дифференциальных уравнений на секущей поверхности  $t = \text{const}$  в расширенном фазовом пространстве  $\Phi_{n+1}$ . Таким образом, мы получаем возможность применять отображение сдвига  $T_\tau$  для изучения вынужденных и параметрических колебаний динамической системы. В самом деле, пусть  $\tau$  — период изменения параметра или внешней силы, действующей на рассматриваемую динамическую систему. Расширенное фазовое пространство такой системы представляет собою топологическое произведение пространства  $\Phi_n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и окружности, которая соответствует фазе  $\varphi = t - \left[ \frac{t}{\tau} \right] \tau$  (квадратные скобки означают целую часть от стоящего внутри выражения). Поверхность  $\varphi = 0$  в этом расширенном фазовом пространстве является секущей, и фазовые траектории порождают на ней некоторое точечное отображение  $T$ , совпадающее в этом случае с отображением сдвига  $T_\tau$ . Неподвижная точка этого отображения для неавтономной системы соответствует периодическому решению с периодом  $\tau$ . Что касается автономной системы, то периодическому движению, изображаемому в пространстве  $\Phi_n$  замкнутой кривой  $\Gamma$ , соответствует кривая, инвариантная по отношению к отображению сдвига. В случае, когда период периодического движения соизмерим с временем сдвига  $\tau$ , инвариантная кривая состоит из кратных неподвижных точек отображения  $T_\tau$ . Неподвижной точке отображения сдвига  $T_\tau$  для автономной динамической системы отвечает либо состояние равновесия, либо периодическое движение с периодом, кратным времени сдвига  $\tau$ .

В заключение этого параграфа покажем, каким образом можно обосновать известный метод усреднения и его модификации (метод Ван-дер-Поля, стробоскопический метод Минорского и др.) при помощи метода точечных отображений. Идея метода усреднения, как известно, состоит

в том, что исследование уравнений

$$\dot{x}_i = \mu f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.23)$$

где функции  $f_i$  предполагаются периодическими по  $t$  с периодом  $\tau$ , заменяется исследованием уравнений

$$\dot{x}_i = \mu F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.24)$$

правая часть которых получается путем усреднения по времени правой части исходных уравнений (4.23).

Для доказательства правомерности такой замены покажем, что точечное отображение  $T$ , построенное для системы дифференциальных уравнений (4.23), близко к точечному отображению сдвига  $T_\tau$ , построенному для уравнений (4.24), с точностью до малых величин порядка  $\mu^2$ . В самом деле, точечное отображение  $T$ , порождаемое фазовыми траекториями уравнений (4.23), легко находится, если известно общее решение этих уравнений. В нашем случае общее решение уравнений (4.23) с точностью до малых величин порядка  $\mu^2$  записывается в виде

$$x_i(t) = x_i(0) + \mu \int_0^t f_i(x_i(\xi), \dots, x_n(\xi), \xi) d\xi \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда, обозначая через  $\tau$  время перехода изображающей точки из  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в  $\bar{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ , получаем отображение  $T$  с той же степенью точности:

$$\bar{x}_i = x_i + \mu \int_0^\tau f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.25)$$

Найдем теперь точечное отображение сдвига  $T_\tau$  системы автономных дифференциальных уравнений (4.24). С точностью до малых членов порядка  $\mu^2$  отображение  $T_\tau$  имеет вид

$$x_i(\tau) = x_i + \mu F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \tau \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.26)$$

Сравнивая выражения (4.25) и (4.26), нетрудно видеть, что они совпадают в случае, если функции  $f_i$  и  $F_i$  связаны соотношениями

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$



т. е. когда функция  $F_i$  получается в результате усреднения по времени функции  $f_i$ . При этом точечные отображения  $T$  и  $T_\tau$  совпадают с точностью до  $\mu^2$ . Таким образом, возможность исследования дифференциальных уравнений (4.23) с помощью совсем не близких к ним уравнений (4.24) имеет свое обоснование с точки зрения метода точечных отображений в близости (порядка  $\mu^2$ ) их точечных отображений  $T$  и  $T_\tau$ .

#### § 4. Примеры исследования динамики систем при помощи метода точечных отображений

В этом параграфе приводятся ряд примеров динамических систем второго и третьего порядка, исследование которых при помощи метода точечных отображений оказывается весьма эффективным.

**Пример 1. Простейшая модель часов [8].** Основными рабочими деталями часов являются балансир  $A$  и ходовой механизм  $B$  (рис. 4.13). При нормальной работе часов балансир совершает незатухающие колебания, которые поддерживаются в результате взаимодействия балансира с ходовым механизмом.

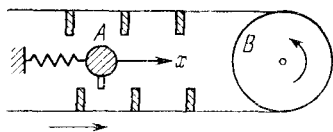


Рис. 4.13

В простейшей модели часов обычно пренебрегают временем этого взаимодействия, а также не учитывают обратное влияние балансира на ходовой механизм. При такой постановке задача сводится к рассмотрению колебаний балансира, которому в определенные моменты времени сообщается внешний импульс. Значение импульса и момент его приложения определяются состоянием балансира. Таким образом, рассматриваемую модель часов можно представить в виде осциллятора, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad (4.27)$$

которому в состояниях, удовлетворяющих некоторому соотношению вида  $f(x, \dot{x}) = 0$ , сообщается импульс  $p = p(x, \dot{x})$ . Фазовыми переменными описанной модели динамической системы являются переменные  $x$  и  $y = \dot{x}$ , а пространство состояний представляет собою двумерную плоскость  $xy$  с разрезом по кривой  $f(x, y) = 0$ , в точках

которой система получает «удар» в виде импульса  $p$  (рис. 4.14). Заштрихованная сторона линии разреза на рис. 4.14 соответствует доударным состояниям балансира. Достигнув кривой  $f(x, y) = 0$  после движения на фазовой плоскости, согласно дифференциальному уравнению (4.27), изображающая точка совершает мгновенный скачок в новое положение согласно формулам

$$x_{\text{п}} = x_{\text{д}}, \quad y_{\text{п}} = y_{\text{д}} + p(x_{\text{д}}, y_{\text{д}}), \quad (4.28)$$

где  $(x_{\text{д}}, y_{\text{д}})$  — доударное состояние,  $(x_{\text{п}}, y_{\text{п}})$  — послеударное состояние системы. Решения уравнения (4.27) вместе с соотношениями (4.28) определяют на линии разреза точечное отображение  $T$ , неподвижные устойчивые точки которого соответствуют устойчивым периодическим колебаниям балансира, т. е. нормальной работе часового механизма.

Найдем вид точечного отображения  $T$  в случае, когда балансиру сообщается постоянный по величине импульс  $p = \text{const}$  в точках полуоси  $x = 0, y \geq 0$ . Подставляя в общее решение уравнения (4.28)

$$\begin{aligned} x &= e^{-ht} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t), \\ y &= e^{-ht} [(B\Omega - Ah) \cos \Omega t - (A\Omega + Bh) \sin \Omega t] \\ & \quad (\Omega = \sqrt{\omega^2 - h^2}) \end{aligned}$$

начальные значения  $t = 0, x = 0, y = y_1$ , получим

$$x = y_1 \Omega^{-1} e^{-ht} \sin \Omega t, \quad y = y_1 e^{-ht} (\cos \Omega t - h \Omega^{-1} \sin \Omega t).$$

Через время  $\tau = 2\pi/\Omega$  изображающая точка вновь придет на полупрямую  $x = 0, y > 0$  (рис. 4.15), имея ординату  $y' = e^{-\delta} y_1$  ( $\delta = 2\pi h (\omega^2 - h^2)^{-1/2}$ ). Затем, согласно условию, она совершает скачок в точку  $y_2 = y' + p$  этой полупрямой. В результате точка  $y = y_1$  полупрямой  $x = 0, y > 0$  преобразуется в точку  $y = y_2$  этой же полупрямой по закону

$$y_2 = y_1 e^{-\delta} + p, \quad (4.29)$$

который и представляет искомое отображение  $T$ . На плоскости  $y_1 y_2$  соотношение (4.29) изображается прямой, кото-

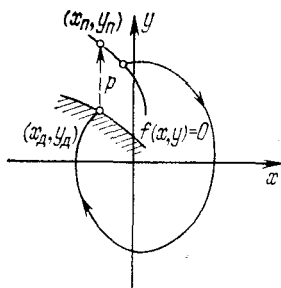


Рис. 4.14

рая пересекает биссектрису первого квадранта в точке  $y_1 = y_2 = y^*$  рис. (4.16, а). Из полученной таким образом диаграммы Ламерея непосредственно видно, что точечное отображение  $T$  рассматриваемой модели часов обладает единственной глобально устойчивой неподвижной точкой.

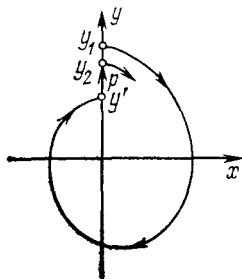


Рис. 4.15

Если при передаче импульса балансиру сохраняется постоянным не импульс, а энергия, тогда передаваемый балансиру импульс равен  $p = \sqrt{y^2 + \varepsilon} - y$ , где  $\varepsilon = \text{const.}$  В этом случае точечное отображение  $T$  имеет вид

$$y_2 = e^{-\delta} \sqrt{y_1^2 + \varepsilon_1} \quad (\varepsilon_1 = \text{const.}) \quad (4.30)$$

Соотношение (4.30) изображается на плоскости  $y_1 y_2$  в виде отрезка гиперболы, пересекающей биссектрису в единственной точке  $y_1 = y_2 = y^*$ , которая является глобально устойчивой неподвижной точкой отображения  $T$ . Соот-

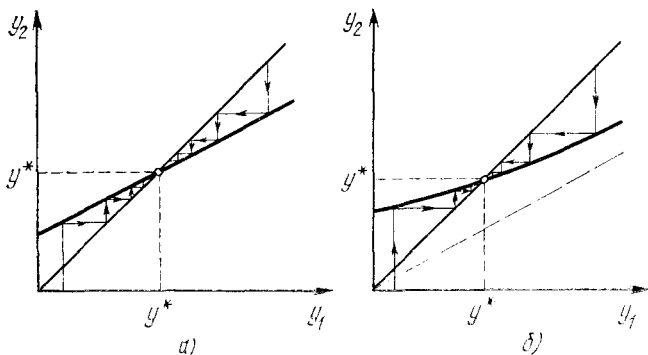


Рис. 4.16

ветствующая этому случаю диаграмма Ламерея показана на рис. 4.16, б).

**Пример 2. Экстремальный регулятор с автоколебательным типом поиска [7].** Для регулирования параметров объекта, содержащего медленно изменяющиеся величины, которые характеризуют неконтролируемые процессы в объекте, применяют самонастраивающиеся систе-

мы автоматического регулирования. Одной из таких систем и является экстремальный регулятор, включающий в себя объект регулирования и управляющий автомат (рис. 4.17). Объект регулирования имеет входную управляемую переменную  $u$  и выходную переменную  $\varphi$ , значение которой должно поддерживаться наибольшим

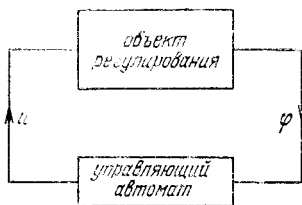


Рис. 4.17

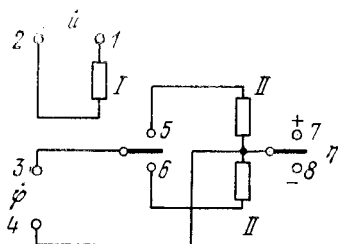


Рис. 4.18

(экстремальным). Поэтому регулятор, выполняющий эту задачу, и называется экстремальным. Рассмотрим динамику простейшей системы, объект регулирования которой описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -\alpha u^2, \quad (4.31)$$

где  $T$  — постоянная времени объекта,  $\alpha$  — медленно изменяющийся параметр, который мы пока будем считать постоянным. Согласно рис. 4.17, управляющий автомат вырабатывает управляющее воздействие  $u$  по входной переменной  $\varphi$ . В зависимости от способа формирования переменной  $u$  различают автоколебательный и шаговый тип поиска экстремума. Рассмотрим простую схему управляющего автомата, который осуществляет автоколебательный тип поиска, определяемый уравнениями

$$\dot{u} = \eta, \quad \eta = \Phi[\dot{u}(t - \theta), \varphi(t - \theta)], \quad (4.32)$$

где

$$\Phi[\dot{u}, \varphi] = \begin{cases} +1, & \text{если в течение времени } \theta \text{ до этого } \dot{u} > 0, \\ & \varphi + \Delta > 0 \text{ или } \dot{u} < 0, \varphi + \Delta < 0; \\ -1, & \text{если в течение времени } \theta \text{ до этого } \dot{u} < 0, \\ & \varphi + \Delta > 0 \text{ или } \dot{u} > 0, \varphi + \Delta < 0. \end{cases}$$

Здесь  $\theta$  — время запаздывания при срабатывании реле, реверсивного устройства и дифференциаторов;  $\Delta$  — порог

нечувствительности, связанной с особенностями характеристики реле. Нелинейная функция  $\Phi[\dot{u}, \varphi]$  реализуется при помощи двух поляризованных реле, соединенных в схему, показанную на рис. 4.18. В самом деле, пусть входному значению  $\dot{u} = +1$  соответствует знак (+) на клемме 1 и знак (-) на клемме 2. При этом якорь реле I притянется к клемме 5 и замкнет цепь 3, 5, 4, на вход которой подается  $\varphi$ . Значению  $\varphi + \Delta > 0$  соответствует знак (+) на клемме 3 и знак (-) на клемме 4. При этом якорь реле II притягивается к клемме 7 и на выходе получаем  $\eta = +1$ . Напротив, значению  $\varphi + \Delta < 0$  соответствует знак (-) на клемме 3 и знак (+) на клемме 4. В этом случае якорь реле II притягивается к клемме 8 и на выходе получаем  $\eta = -1$ . Аналогичное рассмотрение случая, когда на входные клеммы 1, 2 подается напряжение (-), (+), соответствующее значению  $\dot{u} = -1$ , убеждает нас в том, что при  $\varphi + \Delta > 0$  получаем на выходе значение  $\eta = -1$ , а при  $\varphi + \Delta < 0$  — значение  $\eta = +1$ .

Описанная модель экстремального регулятора характеризуется четырьмя положительными физическими параметрами  $T, \alpha, \Delta$  и  $\theta$ . Согласно уравнениям (4.32) управляющий автомат обладает двумя состояниями, которым соответствуют значения выхода  $\eta = +1$  и  $\eta = -1$ . Фазовыми переменными экстремального регулятора, который представляет собою автономную динамическую систему, в соответствии с уравнениями (4.31) и (4.32), являются переменные  $u, \varphi$  и состояние  $\eta = 1$  или  $\eta = -1$  управляющего автомата. Фазовое пространство состоит из двух плоскостей  $u\varphi$ . На одной плоскости величина  $\eta = +1$ , а переменные  $u, \varphi$  подчиняются дифференциальным уравнениям

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -\alpha u^2, \quad \dot{u} = +1. \quad (4.33)$$

На второй плоскости величина  $\eta = -1$ , а переменные  $u, \varphi$  изменяются согласно уравнениям

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -\alpha u^2, \quad \dot{u} = -1, \quad (4.34)$$

При смене значения  $\eta$ , согласно соотношениям (4.32), изображающая точка переходит с одной плоскости на другую. Из уравнения (4.31) следует, что величина  $\dot{\varphi} = 0$  на кривой  $\varphi = -\alpha u^2$ . Выше этой кривой производная  $\dot{\varphi} < 0$ , и ниже кривой производная  $\dot{\varphi} > 0$  на каждой из плоскостей  $\eta = +1$  и  $\eta = -1$ . Величина  $\varphi + \Delta$  отрица-

тельна в области  $O_+$  над кривой  $\Gamma$ , определяемой уравнением

$$\varphi = T\Delta - \alpha u^2,$$

и положительна в области  $O_-$  под этой кривой (рис. 4.19). В соответствии с (4.32) переход изображающей точки с одного листа фазовой плоскости  $\Phi$  на другой происходит через каждый промежуток времени длительности  $\theta$  пребывания фазовой точки в области  $O_+$ . Поэтому в области  $O_+$  движение изображающей точки происходит вниз

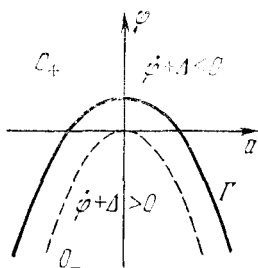


Рис. 4.19

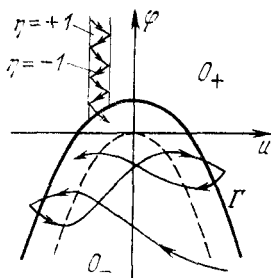


Рис. 4.20

по ломаной кривой до тех пор, пока эта траектория не пересечет кривую  $\Gamma$  (рис. 4.20). В области  $O_-$  изображающая точка движется на листе  $\eta = +1$  или  $\eta = -1$  до тех пор, пока не пересечет граничную кривую  $\Gamma$ . Спустя время  $\theta$  после пересечения кривой  $\Gamma$  она переходит с одного листа на другой, в результате чего траектория движения изображающей точки имеет вид, показанный на рис. 4.20. Таким образом, при любых начальных условиях изображающая точка начиная с некоторого момента времени вновь и вновь пересекает кривую  $\Gamma$ , порождая на ней некоторое точечное отображение, которое и позволяет изучить динамику экстремального регулятора.

Найдем вид этого точечного отображения в случае, когда запаздывание  $\theta$  пренебрежимо мало, хотя и отлично от нуля \*). В этом случае в области  $O_+$  движение изображающей точки сколь угодно мало отличается от движения вдоль прямой  $u = u_0$  по закону  $\varphi = (\varphi_0 + \alpha u_0^2) e^{-t/T} - \alpha u_0^2$ .

\*) Нетрудно видеть, что полагать  $\theta = 0$  нельзя, так как при  $\theta = 0$  описание (4.32) оказывается противоречивым, т. е. постановка задачи является некорректной.

Отсюда следует, что из любого начального положения в области  $O_+$  изображающая точка через конечный промежуток времени пересекает границу  $\Gamma$  и в дальнейшем остается в области  $O_-$ . Поэтому для нахождения точечного отображения кривой  $\Gamma$  в себя достаточно рассмотреть движение изображающей точки в области  $O_-$ . Решение уравнений (4.33) и (4.34) при начальных условиях  $t = 0$ ,  $u = u_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  имеет вид

$$u = u_0 + \eta t, \quad \varphi = C_1 e^{-t/T} - \alpha (t^2 + at + b), \quad (4.35)$$

где  $C_1 = \varphi_0 + \alpha b$ ,  $a = 2(\eta u_0 - T)$ ,  $b = u_0^2 - 2\eta u_0 T + 2T^2$ . Исключая из (4.35) время  $t$ , получаем уравнение фазовой траектории

$$\varphi = (\varphi_0 + \alpha u_0^2 - 2\alpha \eta T u_0 + 2\alpha T^2) e^{\frac{\eta(u_0 - u)}{T}} - \alpha (u^2 - 2\eta T u + 2T^2). \quad (4.36)$$

Из выражения (4.36) следует, что траектории плоскости  $\eta = +1$  симметричны относительно оси  $u = 0$  траекториям плоскости  $\eta = -1$ , поэтому для исследования динамики системы в рассматриваемом случае  $\theta \ll 1$  достаточно рассмотреть точечное отображение, порождаемое на кривой  $\Gamma$  траекториями плоскости  $\eta = +1$ , и преобразование симметрии относительно оси  $u = 0$ , переводящее точку  $(u, \varphi)$  в точку  $(-u, \varphi)$ . Траектории плоскости  $\eta = +1$  касаются кривой  $\Gamma$  в точке  $u_k = \Delta/2\alpha$ , поэтому порождаемое этими траекториями точечное отображение преобразует точки кривой  $\Gamma$ , для которых  $-\infty < u < u_k$ , в точки той же кривой, для которых  $u > u_k$ . Подставляя в выражение (4.36) координаты начальной точки ( $u_0 = -x$ ,  $\varphi_0 = T\Delta - \alpha x^2$ ) и конечной точки ( $u = y$ ,  $\varphi = T\Delta - \alpha y^2$ ), находим искомое точечное отображение в виде

$$[\Delta + 2\alpha (T - y)]e^{y/T} = [\Delta + 2\alpha (T + x)]e^{-x/T}. \quad (4.37)$$

При построении графика функции последования на плоскости  $xy$  следует принять во внимание, что кривая (4.37) начинается в точке ( $x_0 = -\Delta/2\alpha$ ,  $y_0 = \Delta/2\alpha$ ), имеет асимптоту  $y = T + \frac{\Delta}{2\alpha}$ , а ее производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\alpha x + \Delta}{2\alpha y - \Delta} e^{-\frac{x+y}{T}}$$

положительна, так как  $y > \Delta/2\alpha$ ,  $x > -\Delta/2\alpha$ . Соответствующая диаграмма Ламерея изображена на рис. 4.21. Из этой диаграммы следует, что точечное отображение кривой  $\Gamma$  в себя имеет единственную устойчивую неподвижную точку  $x = y = u^*$ , соответствующую глобально устойчивому предельному циклу, т. е. устойчивому периодическому движению экстремального регулятора

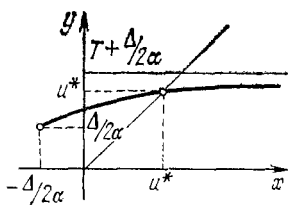


Рис. 4.21

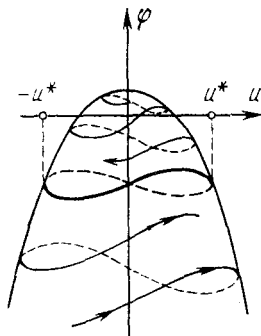


Рис. 4.22

(рис. 4.22). Значение  $u^*$  является корнем трансцендентного уравнения

$$u^* = \left( \frac{\Delta}{2\alpha} + T \right) \operatorname{th} \frac{u^*}{T},$$

которое получается при подстановке  $x = y = u^*$  в уравнение (4.37). Проведенное исследование показывает, что устойчивое периодическое движение экстремального регулятора сохраняется при любых значениях параметров  $T$ ,  $\alpha$ ,  $\Delta$ . Найденный режим сохраняется и при произвольных изменениях параметра  $\alpha$ , если эти изменения будут происходить достаточно медленно.

**Пример 3. Ламповый генератор [8].** Рассмотрим простейшую схему генератора с индуктивной обратной связью и колебательным контуром в цепи сетки, изображенную на рис. 4.23. При выбранных положительных направлениях токов  $i$ ,  $i_a$  и полярности конденсатора  $C$  имеем, на основании законов Кирхгофа, следующие соотношения:

$$i = -C \frac{dv}{dt}, \quad Ri = v - L \frac{di}{dt} - M \frac{di_a}{dt}.$$



Отсюда получаем уравнение

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = M \frac{di_a}{dt}. \quad (4.38)$$

Знак коэффициента взаимной индукции  $M$  определяется относительным расположением витков катушек  $L$  и  $L_a$ . Пусть величина  $M > 0$ . (Это означает, что при  $i > 0$ ,  $i_a > 0$  для направлений токов  $i$  и  $i_a$ , указанных на рис. 4.23, магнитные потоки в катушке  $L$  усиливают друг друга.) Зависимость анодного тока  $i_a$  от сеточного напряжения  $v$  имеет вид кривой, показанной на рис. 4.24. Заменяя в

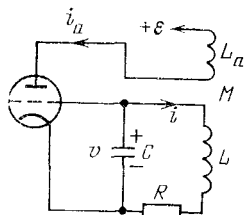


Рис. 4.23

(4.38) производную  $\frac{di_a}{dt}$  ее выражением  $\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = S(v) \frac{dv}{dt}$ , где  $S(v)$  —

крутизна характеристики лампы (рис. 4.24), получим нелинейное уравнение

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + [RC - MS(v)] \frac{dv}{dt} + v = 0, \quad (4.39)$$

которое и описывает электрические процессы в ламповом генераторе. В дальнейшем воспользуемся кусочно-линейной

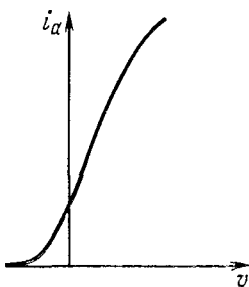


Рис. 4.24

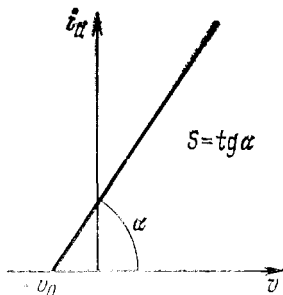


Рис. 4.25

аппроксимацией ламповой характеристики (рис. 4.25) и введем безразмерные величины

$$x = \frac{v}{v_0}, \quad t' = \omega_0 t \left( \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right), \quad h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC, \quad h_2 = \\ = \frac{\omega_0}{2} (MS - RC).$$

После этого уравнение (4.39) записывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + x &= 0, \text{ если } x < -1, \\ \ddot{x} - 2h_2\dot{x} + x &= 0, \text{ если } x > -1, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где точкой над буквой обозначена операция дифференцирования по безразмерному времени  $t'$ . Фазовая плоскость  $xy$  ( $y = \dot{x}$ ) лампового генератора разбивается прямой  $x = -1$  на две области  $O_1$  и  $O_2$ , в каждой из которых фазовые траектории определяются соответствующим линейным дифференциальным уравнением (4.40). На границе  $x = -1$  решения уравнений (4.40) «склеиваются» по непрерывности. Рассматриваемая модель лампового генератора характеризуется двумя существенными физическими параметрами  $h_1, h_2$ , которые мы будем считать положительными величинами (т. е. мы предполагаем, что выполнено неравенство  $MS > RC$ , когда генератор обладает

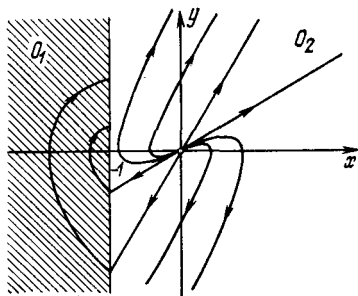


Рис. 4.26

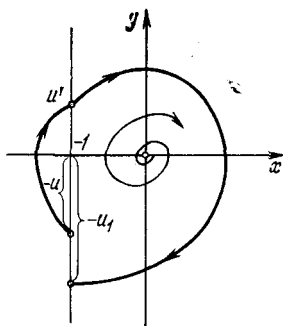


Рис. 4.27

самовозбуждением). Фазовые траектории разбивают прямую  $x = -1$  на две полупрямые ( $x = -1, y > 0$ ) и ( $x = -1, y < 0$ ), которые являются полупрямыми без контакта. Заметив, что в случае  $h_2 > 1$  состояние равновесия  $x = y = 0$  является неустойчивым узлом и, следовательно, при любых начальных условиях изображающая точка на фазовой плоскости уходит в бесконечность (рис. 4.26), рассмотрим в дальнейшем случай  $0 < h_2 < 1$ .

Фазовые траектории при  $0 < h_2 < 1$  порождают на полупрямой ( $x = -1, y > 0$ ) точечное отображение  $T = T_1 \cdot T_2$ , которое можно представить в виде произведения двух отображений: точечного отображения  $T_2$  полупрямой ( $x = -1, y > 0$ ) в полупрямую ( $x = -1, y < 0$ ),

осуществляемого траекториями области  $O_2$ , и точечного отображения  $T_1$  полупрямой ( $x = -1, y < 0$ ) в полупрямую ( $x = -1, y > 0$ ) осуществляемого траекториями области  $O_1$ . Найдем эти отображения. Фазовые траектории в области  $O_1$  определяются первым уравнением (4.40). Его решением при начальных условиях ( $t = 0, x_0 = -1, y_0 = -u$ ) будет

$$\begin{aligned} x &= -e^{-h_1 t'} \left( \cos \omega_1 t' + \frac{u + h_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t' \right), \\ y &= e^{-h_1 t'} \left( -u \cos \omega_1 t' + \frac{1 + h_1 u}{\omega_1} \sin \omega_1 t' \right) \quad (4.41) \\ (\omega_1 &= \sqrt{1 - h_1^2}). \end{aligned}$$

В некоторый момент времени  $t'_1 = \tau_1/\omega_1$  изображающая точка придет на полупрямую ( $x = -1, y > 0$ ) в точку  $y = u' > 0$  (рис. 4.27). Подставляя эти значения в (4.41) и разрешая полученные выражения относительно  $u$  и  $u'$ , находим функцию соответствия  $u = f(u')$  для отображения  $T_1$ , записанную в параметрической форме:

$$u = \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1}, \quad u' = \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1} \quad (4.42)$$

$$\left( \gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{h_1}{\sqrt{1 - h_1^2}} \right).$$

Текущий параметр  $\tau_1$  имеет смысл приведенного времени пробега изображающей точки в области  $O_1$ . Поэтому из

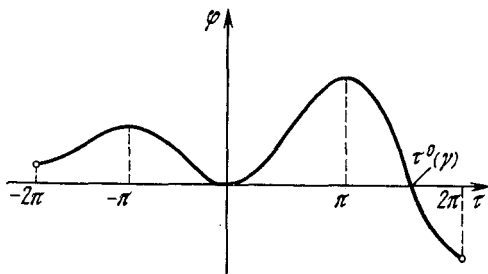


Рис. 4.28

всех возможных значений  $\tau_1$ , соответствующих заданному значению  $u$ , следует брать наименьшее положительное. Согласно первому соотношению (4.42) интервал  $0 < u <$

$< +\infty$  соответствует интервалу  $0 < \tau_1 < \pi$ . Для построения графика функции соответствия (4.42) введем вспомогательную функцию

$$\varphi(\tau, \gamma) = 1 - e^{\gamma\tau} (\cos \tau - \gamma \sin \tau), \quad (4.43)$$

график которой для  $\gamma > 0$  изображен на рис. 4.28. Используя функцию (4.43) и ее свойства:  $\varphi(-\tau, -\gamma) \equiv \varphi(\tau, \gamma)$ ,  $\frac{d\varphi}{d\tau} = (1 + \gamma^2) e^{\gamma\tau} \sin \tau$ , представим выражения (4.42) и их производные в виде

$$u = \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1}, \quad u' = \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1},$$

$$\frac{du}{d\tau_1} = \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin^2 \tau_1}, \quad \frac{du'}{d\tau_1} = \frac{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin^2 \tau_1}, \quad \frac{du}{du'} = \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}.$$

Из этих выражений следует, что на интервале  $0 < \tau_1 < \pi$  производная  $du/du' > 0$  и при изменении  $\tau_1$  от нуля до  $\pi$  монотонно возрастает от единицы до  $e^{\gamma_1 \pi}$ , так как

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{du'^2} &= \frac{d}{d\tau_1} \left[ \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)} \right] \left( \frac{du'}{d\tau_1} \right)^{-1} = \\ &= \frac{2(1 + \gamma_1^2)^{3/2} \sin^2 \tau_1}{[\varphi(\tau_1, -\gamma_1)]^3} [\operatorname{sh} \gamma_1 \tau_1 - \\ &\quad - \gamma_1 \sin \tau_1] > 0. \end{aligned}$$

При  $\tau_1 \rightarrow \pi - 0$  кривая (4.42) имеет асимптоту

$$u = e^{\gamma_1 \pi} u' - \frac{2\gamma_1(1 + e^{\gamma_1 \pi})}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}}.$$

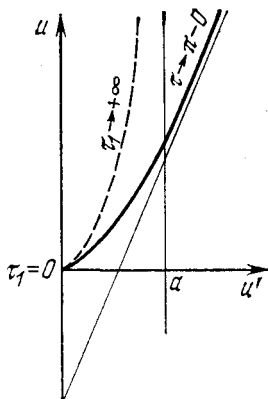


Рис. 4.29

Таким образом, кривая (4.42) монотонно возрастает от нуля до бесконечности и имеет вид, изображенный на рис. 4.29 сплошной линией.

В случае  $h_1 > 1$  решение уравнения (4.40) получается из (4.41) заменой тригонометрических функций на гиперболические и  $\omega_1$  на  $\bar{\omega}_1 = \sqrt{h_1^2 - 1}$ . В результате имеем

функцию соответствия для точечного отображения  $T_1$  в виде

$$u = \frac{e^{\bar{\gamma}_1 \tau_1} - \operatorname{ch} \tau_1 - \bar{\gamma}_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1} \operatorname{sh} \tau_1}, \quad u' = \frac{e^{-\bar{\gamma}_1 \tau_1} - \operatorname{ch} \tau_1 + \bar{\gamma}_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1} \operatorname{sh} \tau_1} \quad (4.44)$$

$$\left( \bar{\gamma}_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 - 1}} \right).$$

При изменении  $\tau_1$  от нуля до бесконечности величина  $u$  монотонно растет от нуля до  $+\infty$ , а  $u'$  — от нуля до значения  $a = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1 - 1}{\bar{\gamma}_1 + 1}}$ . График кривой  $u = f_1(u')$  в этом случае изображен на рис. 4.29 штриховой линией.

Точечное отображение  $T_2$ , порождаемое фазовыми траекториями области  $O_2$ , находится аналогично. В случае  $0 < h_2 < 1$  функция соответствия для отображения  $T_2$  имеет вид (см. рис. 4.27):

$$u_1 = -\frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \varphi(\tau_2, -\gamma_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}, \quad u' = -\frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \varphi(\tau_2, \gamma_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}. \quad (4.45)$$

Из свойств функции  $\varphi(\tau, \gamma)$  и выражений (4.45) следует, что при возрастании  $u'$  от нуля до  $+\infty$  параметр  $\tau_2$  уменьшается от значения  $\tau = \tau_2^0$ , где  $\tau_2^0$  — наименьший положительный корень уравнения  $\varphi(\tau_2, \gamma_2) = 0$ , до значения  $\tau = \pi$ . При этом  $u_1$  возрастает от некоторого значения  $u_1 = u_1^0$  до  $+\infty$ . Принимая во внимание, что  $\frac{du_1}{du'} = \frac{\varphi(\tau_2, \gamma_2)}{\varphi(\tau_2, -\gamma_2)} > 0$  и  $\frac{d^2 u_1}{du'^2} > 0$ , мы видим, что кривая (4.45) является монотонно возрастающей. При  $\tau_2 \rightarrow \pi + 0$  она имеет асимптоту

$$u_1 = e^{\gamma_2 \pi} u' + \frac{2\gamma_2(1 + e^{\gamma_2 \pi})}{\sqrt{1 + \gamma_2^2}}.$$

Следовательно, график функции последования для  $T_2$  имеет вид, показанный на рис. 4.30. Нанесем теперь найденные кривые для точечных отображений  $T_1$  и  $T_2$  на одной диаграмме, тогда получим диаграмму Ламерея, показанную на рис. 4.31. Проведенное исследование показывает, что в рассматриваемом случае ( $0 < h_1 < \infty$ ,

$0 < h_2 < 1$ ) существует единственная неподвижная точка отображения  $T = T_1 \cdot T_2$ , которая является глобально устойчивой. Таким образом, на фазовой плоскости  $xu$  имеется только один предельный цикл, устойчивый в большом, т. е. к этому предельному циклу приближаются асимптотически (при  $t \rightarrow +\infty$ ) все фазовые траектории (рис. 4.32).

Проведенное рассмотрение позволяет провести разбиение плоскости физических параметров  $h_1 h_2$  на области

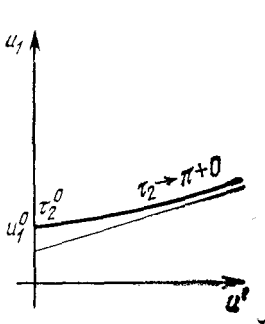


Рис. 4.30

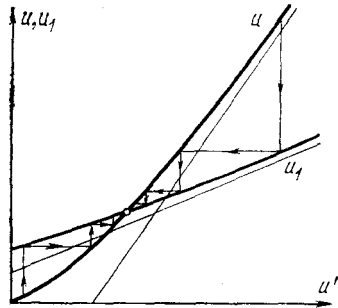


Рис. 4.31

различного качественного поведения лампового генератора. На рис. 4.33 дано такое разбиение, из которого видно, что первый квадрант плоскости  $h_1 h_2$  состоит из области

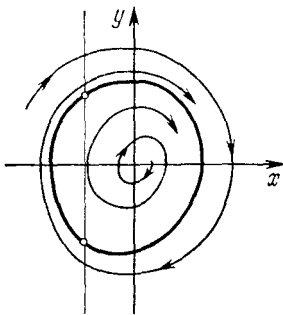


Рис. 4.32

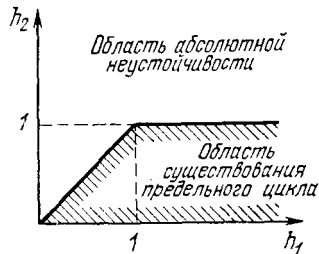


Рис. 4.33

существования предельного цикла и области абсолютной неустойчивости.

**Пример 4.** Динамика судна, курс которого стабилизируется при помощи двухпозиционного авторулевого [8]. Уравнение вращательного движения судна вокруг верти-

кальной оси, проходящей через центр масс судна, имеет вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + h \frac{d\varphi}{dt} = M. \quad (4.46)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между продольной осью судна и неизменным направлением (заданным курсом судна (рис. 4.34)),  $I$  — главный центральный момент инерции,  $h$  — коэффициент вязкого трения,  $M$  — момент внешних сил. Пусть

$M = M(\varphi)$  является известной функцией угла  $\varphi$  поворота руля. При  $M = 0$  установившийся угол  $\varphi$  зависит от начальных условий и может принимать согласно (4.46) любое значение  $\varphi = \text{const}$ , т. е. при  $M = 0$  судно обладает многообразием равновесных состояний. Создание одного устойчивого состояния равновесия, соответствующего заданному курсу  $\varphi = 0$ , возможно лишь посредством перемещения руля. Одной из простейших систем автоматической стабилизации курса является двухпозиционный авторулевой, при котором руль может находиться лишь в двух

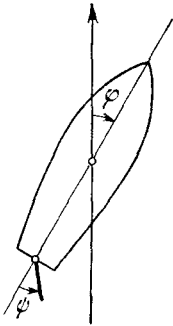


Рис. 4.34

положениях:  $\varphi = \pm\varphi_0$ , создавая в каждом из них равные, но противоположно направленные моменты сил  $M = \pm M_0$ . При этом положение руля зависит от состояния судна, т. е. является определенной функцией переменных  $\varphi$  и  $d\varphi/dt$ , определяющих состояние судна. Пусть перекладка руля из одного крайнего положения в другое осуществляется при прохождении нулевого значения величины  $\xi = \varphi + b \frac{d\varphi}{dt}$ , где  $b = \text{const}$  — параметр, характеризующий величину коррекции по скорости, а функция  $M = M(\xi)$  имеет вид, изображенный на рис. 4.35. При  $\xi = 0$  рулевая машина выключена, и угол  $\varphi$  руля может принимать любое значение в интервале  $-\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0$ .

В переменных  $x = \frac{h^2}{M_0 I} \varphi$ ,  $t_{\text{нов}} = \frac{h}{I} t$ ,  $\beta = \frac{bh}{I}$  движение корабля описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -y - 1, \quad \text{если } x + \beta y > 0, \quad (4.47)$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -y + 1, \quad \text{если } x + \beta y < 0. \quad (4.48)$$

Поскольку величины  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi$  соответствуют одному и тому же положению судна, фазовое пространство рассматриваемой системы представляет собою двумерный цилиндр, развертка которого на плоскость изображена на рис. 4.36 в виде полосы шириною  $2a = \frac{2\pi h^2}{M_0 I}$ . Прямая переключений  $x + \beta y = 0$  разбивает фазовую полосу на две области:  $O_1$ , в которой движение изображающей точки

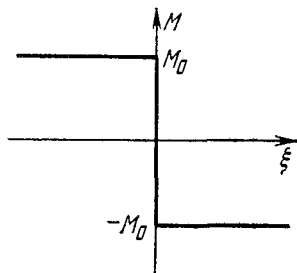


Рис. 4.35

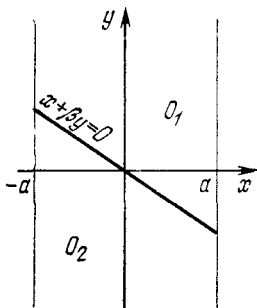


Рис. 4.36

подчиняется уравнениям (4.47), и  $O_2$ , где справедливы уравнения (4.48). Поскольку уравнения (4.48) получаются из (4.47) заменой  $x, y$  на  $-x, -y$ , соответствующие траектории области  $O_1$  и области  $O_2$  симметричны друг другу относительно начала координат. Следовательно, для разбиения фазовой полосы  $xu$  на траектории достаточно изучить их поведение в области  $O_1$ , включая граничную прямую  $x + \beta y = 0$ .

Рассмотрим сначала ход фазовых траекторий области  $O_1$  вблизи прямой  $x + \beta y = 0$ . Для этого введем величину  $\xi = x + \beta y$  и найдем  $\dot{\xi} = \dot{x} + \beta \dot{y} = (1 - \beta)y - \beta$ . Производная  $\dot{\xi}$  обращается в нуль на прямой  $y = \frac{\beta}{1 - \beta}$ , которая, таким образом, является геометрическим местом точек, где траектории области  $O_1$  имеют касательную, параллельную прямой  $x + \beta y = 0$ . Пусть  $0 < \beta < 1$ . В этом случае для значений  $y > \frac{\beta}{1 - \beta}$  на прямой  $x + \beta y = 0$  фазовые траектории удаляются от граничной прямой, а для значений  $y < \frac{\beta}{1 - \beta}$  приближаются к ней. Таким образом, принимая во внимание аналогичное поведение траекторий области  $O_2$  в окрестности граничной прямой,



приходим к выводу, что на прямой  $x + \beta y = 0$  имеется отрезок

$$|y| \leq \frac{\beta}{1-\beta}, \quad (4.49)$$

к которому фазовые траектории подходят с обеих сторон, а вне этого отрезка в соответствии с требованием непрерывности движения изображающей точки пересекают ее (т. е. изображающая точка, двигаясь по этим траекториям, переходит из одной области в другую). Если изображающая точка приходит на отрезок (4.49) граничной прямой  $x + \beta y = 0$ , то в дальнейшем она движется по этому отрезку. Движение вдоль отрезка (4.49) соответствует устойчивому скользящему режиму двухпозиционного авторулевого. Закон движения изображающей точки на отрезке (4.49) находится из уравнения  $x + \beta \dot{x} = 0$ , которое получается при подстановке  $y = \dot{x}$  в уравнение граничной прямой. Отсюда  $x = x_0 e^{-t/\beta}$  и, следовательно, при скользящем режиме двухпозиционного рулевого отклонение судна от заданного курса затухает по экспоненциальному закону.

Поведение фазовых траекторий вне отрезка (4.49) изучим путем сведения задачи к точечному отображению граничной прямой  $x + \beta y = 0$  в себя. Общее решение системы (4.47) имеет вид

$$y = -1 + (y_0 + 1) e^{-t}, \quad x = x_0 - t + (y_0 + 1)(1 - e^{-t}), \quad (4.50)$$

где  $x_0, y_0$  — значения фазовых переменных  $x, y$  при  $t = 0$ . Пусть в начальный момент времени  $x_0 = -\beta y_1, y_0 = y_1$ , а через время  $\tau \geq 0$  изображающая точка возвратилась на граничную прямую  $x + \beta y = 0$ , имея координаты  $(\beta y_2, -y_2)$ . Подставляя эти значения в (4.50) и разрешая полученные выражения относительно  $y_1$  и  $y_2$ , приходим к параметрической записи искомого точечного отображения:

$$y_1 = -1 + \frac{\tau}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \quad y_2 = 1 - \frac{\tau}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}, \quad (4.51)$$

где время перехода  $\tau$  является текущим параметром. Согласно (4.51) при  $\tau \rightarrow 0$  имеем  $y_1 \rightarrow \frac{\beta}{1-\beta}, y_2 \rightarrow -\frac{\beta}{1-\beta}$ . При  $\tau \rightarrow \infty$  кривые  $y_1 = y_1(\tau)$  и  $y_2 = y_2(\tau)$  уходят в

бесконечность, приближаясь к асимптотам  $y_1 = \frac{\tau}{1-\beta}$  и соответственно  $y_2 = 1$ . Производные

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \frac{1 - (\tau + 1)e^{-\tau}}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})^2}, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = \frac{e^{\tau}[\tau - (1-e^{-\tau})]}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)^2}$$

при всех значениях  $\tau > 0$  положительны. Графики функций  $y_1 = y_1(\tau)$  и  $y_2 = y_2(\tau)$  изображены на рис. 4.37. Поскольку эти кривые не пересекаются, точечное отображение (4.51) не имеет неподвижных точек. «Лестница Ламерея»,

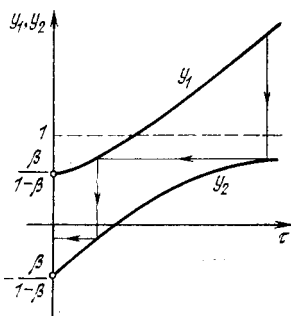


Рис. 4.37

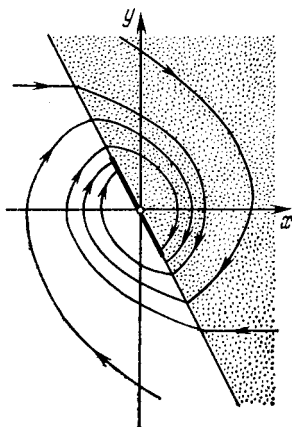


Рис. 4.38

построенная на этих кривых, может содержать самое большее две «ступеньки». Это означает, что при любых начальных условиях изображающая точка попадает на отрезок (4.49) скользящих движений не более чем после двух пересечений граничной прямой  $x + \beta y = 0$ . Соответствующее разбиение фазовой плоскости  $xy$  на траектории для рассматриваемого случая  $0 < \beta < 1$  показано на рис. 4.38. Рассмотрение случая  $\beta < 0$  проводится аналогично. Функция последования по-прежнему определяется соотношениями (4.51), а диаграмма Ламерея имеет вид, показанный на рис. 4.39. Таким образом, в случае  $\beta < 0$  точечное отображение (4.51) имеет единственную неподвижную точку, которая является устойчивой. На фазовой плоскости  $xy$  этой точке соответствует устойчивый предельный цикл, расположенный симметрично относительно начала координат (рис. 4.40). При этом режиме корабль

совершает устойчивые колебания относительно заданного курса. Период автоколебаний  $\tau^*$  определяется из уравнения  $1 - \beta = \frac{\tau^*}{2} \operatorname{cth} \frac{\tau^*}{2}$ , которое получается из соотношений

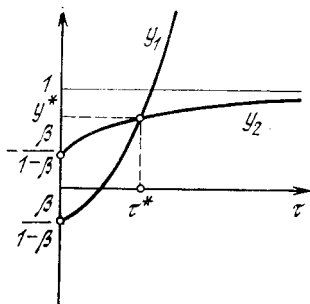


Рис. 4.39

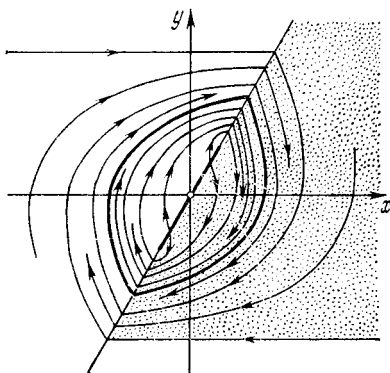


Рис. 4.40

(4.51) после подстановки в них  $y_1 = y_2 = y^*$  и исключения величины  $y^*$ .

Период автоколебаний, так же как и их амплитуда, стремится к нулю вместе с  $\beta \rightarrow 0$ .

**Пример 5. Электромагнитный прерыватель [10].** Рассмотрим модель электромагнитного прерывателя (рис. 4.41), представляющую собой пример динамической системы с трехмерным фазовым пространством, которое оказывается вырожденным. Это позволяет свести задачу

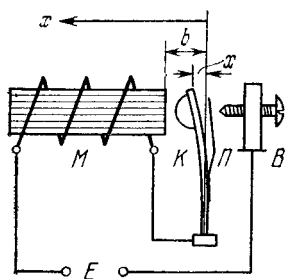


Рис. 4.41

к изучению точечного отображения полупрямой в себя. На схеме рис. 4.41 катушка  $M$  с железным сердечником включена в цепь с источником постоянной э. д. с.  $E$ . Электрическая цепь может замыкаться и размыкаться при помощи подвижного контакта (молоточка), укрепленного на упругой ножке. Обозначим через  $x$  координату смещения молоточка прерывателя от его положения в отсут-

ствие источника э. д. с. Будем считать, что мягкая пластинка  $\Pi$ , укрепленная на молоточке, не препятствует его отклоне-

нию в сторону отрицательных  $x$ . Координату  $x = a$ , при которой происходит замыкание и размыкание цепи, можно задавать, изменяя положение винта  $B$ . На расстоянии  $b$  от начала координат осуществляется неупругий удар молоточка о преграду, например о неподвижный сердечник катушки, с мгновенной потерей части кинетической энергии. Процесс удара описывается уравнением

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = -\mu \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \quad (x = b), \quad (4.52)$$

где  $(dx/dt)_0$  — скорость молоточка до удара,  $(dx/dt)_1$  — скорость после удара,  $\mu$  — коэффициент восстановления ( $\mu = 1$  при абсолютно упругом ударе,  $\mu = 0$  при абсолютно неупругом ударе). Пусть  $L$  — коэффициент самоиндукции,  $R$  — омическое сопротивление,  $m$  — масса молоточка,  $k$  — коэффициент упругости его ножки,  $y$  — ток в цепи,  $gy$  — сила притяжения со стороны электромагнита. Тогда, пренебрегая силами вязкого трения, действующими на молоточек прерывателя, и считая, что разрыв цепи происходит мгновенно и без искры, получим уравнения динамики:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = gy, \quad L \frac{dy}{dt} + R(x)y = E;$$

$$R(x) = \begin{cases} R, & \text{если } x \leq a, \\ \infty, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

В безразмерных переменных

$$x_{\text{нов}} = \frac{kR}{gE} x, \quad y_{\text{нов}} = \frac{R}{E} y, \quad t_{\text{нов}} = t \sqrt{\frac{k}{m}}$$

уравнения движения электромагнитного прерывателя имеют вид

$$\ddot{x} + x = y, \quad \dot{y} + \rho y = \rho \quad (x \leq \xi), \quad (4.53)$$

$$\ddot{x} + x = 0, \quad y = 0 \quad (\xi < x < \beta), \quad (4.54)$$

$$\dot{x}_1 = -\mu \dot{x}_0 \quad (x = \beta), \quad (4.55)$$

где точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени и введены безразмерные параметры

$$\rho = \frac{R}{L} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \xi = \frac{kR}{gE} a, \quad \beta = \frac{kR}{gE} b.$$

Таким образом, рассматриваемая система характеризуется четырьмя существенными параметрами:  $\xi$ ,  $\beta$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ , изме-

няющимися в пределах  $-\infty < \xi < \beta < +\infty$ ,  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ . Фазовое пространство системы является трехмерным  $(x, y, z \equiv \dot{x})$  при  $x \leq \xi$  и двумерным  $(x, y=0, z)$  при  $\xi < x < \beta$ , причем фазовая полоса ( $\xi < x < \beta$ ,  $y=0$ ) «склеена» с фазовым полупространством ( $x \leq \xi$ )

вдоль прямой  $x = \xi$ ,  $y = 0$  (рис. 4.42). Движение изображающей точки в фазовом пространстве происходит следующим образом; перемещаясь в фазовой полосе, изображающая точка приходит на граничную прямую  $x = \xi$ ,  $y = 0$ , после чего совершает переход в фазовом полупространстве согласно уравнениям (4.53). Попадая на граничную плоскость  $x = \xi$ , изображающая точка мгновенно

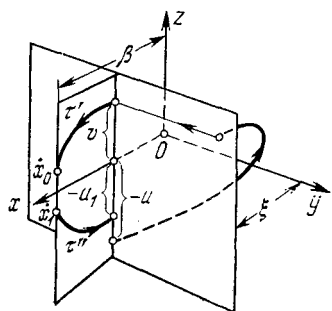


Рис. 4.42

(в соответствии с предположением о мгновенном спаде тока  $y$  при размыкании цепи) переносится вдоль прямой  $x = \xi + 0$ ,  $z = \text{const}$  на границу фазовой полосы, после чего продолжает двигаться в фазовой полосе согласно уравнениям (4.54). Из точки  $x = \beta$ ,  $z = \dot{x}_0$  она совершает мгновенный скачок в точку  $x = \beta$ ,  $z = \dot{x}_1$  (уравнение удара (4.55)) и далее движется в фазовой полосе согласно уравнениям (4.54) до прихода на граничную прямую  $x = \xi$ ,  $y = 0$ . Затем описанный процесс повторяется. Если начальная и конечная точки совпадают, то траектория оказывается замкнутой. Структура фазового пространства позволяет свести исследование его разбиения на траектории и отыскание, в частности, замкнутых кривых к рассмотрению точечного отображения  $T$  полупрямой  $x = \xi$ ,  $y = 0$ ,  $z < 0$  в себя. Отображение  $T = T_2 \cdot T_1$  можно представить в виде двух преобразований, проведенных последовательно: преобразования  $T_1$  точек нижней полупрямой ( $x = \xi$ ,  $y = 0$ ,  $z < 0$ ) в точки верхней полупрямой ( $x = \xi$ ,  $y = 0$ ,  $z > 0$ ), порождаемого траекториями в фазовом полупространстве, и преобразования  $T_2$  точек верхней полупрямой в нижнюю, порождаемого траекториями в фазовой полосе, включая скачок изображающей точки вдоль границы  $x = \beta$ .

Согласно обозначениям на рис. 4.42, отображение  $T_2$  можно записать в виде функции соответствия  $u_1 =$

$= u_1(v)$ . Для значений  $v < v_0$ , где  $v_0^2 = \beta^2 - \xi^2$ , имеем, пользуясь уравнением семейства траекторий  $x^2 + z^2 = c^2 = \text{const}$  системы (4.54):

$$u_1 = v. \quad (4.56)$$

Для значений  $v > v_0$ , согласно (4.54) и (4.55), получаем следующее выражение:

$$u_1^2 = \mu^2 v^2 + \sigma, \quad \sigma = (\beta^2 - \xi^2)(1 - \mu^2). \quad (4.57)$$

С целью нахождения функции последования  $u = u(v)$  точечного отображения  $T_1$  воспользуемся общим решением системы дифференциальных уравнений (4.53):

$$x = A \cos t + B \sin t + 1 + \frac{C}{1 + \rho^2} e^{-\rho t}, \quad y = 1 + C e^{-\rho t}.$$

Определив произвольные постоянные  $A, B, C$  из начальных условий  $t = 0, x = \xi, y = 0, z = -u$ , следим далее за движением изображающей точки, которая через промежуток времени  $\tau$  вновь приходит на граничную плоскость  $x = \xi$ , имея аппликату  $z = v$ . Подставляем эти значения в выражения для  $x$  и  $\dot{x} \equiv z$ :

$$\begin{aligned} \xi &= \left( \xi - \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \right) \cos \tau - \left( u + \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right) \sin \tau + 1 - \frac{1}{1 - \rho^2} e^{-\rho \tau}, \\ v &= - \left( \xi - \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \right) \sin \tau - \left( u + \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right) \cos \tau + \frac{\rho}{1 + \rho^2} e^{-\rho \tau}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Отсюда мы и получаем функцию соответствия  $u = u(v)$  в параметрическом представлении:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1 - \chi) \cos \tau + \chi - e^{-\rho \tau} - \rho \sin \tau}{(1 + \rho^2) \sin \tau}, \\ v &= \frac{\rho e^{-\rho \tau} \sin \tau - 1 + \chi - (\chi - e^{-\rho \tau}) \cos \tau}{(1 + \rho^2) \sin \tau}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

где введено обозначение  $\chi = (1 - \xi)(1 + \rho^2)$ . Исследуем поведение кривых  $u = u(v)$  и  $u_1 = u_1(v)$  в зависимости от значений параметров системы, принимая во внимание, что диаграмма Ламерея имеет смысл лишь для  $u > 0, u_1 > 0, v > 0$ .

Кривая  $u_1 = u_1(v)$  состоит из отрезка биссектрисы координатного угла (для значений  $v < v_0$ ) и части гиперболы (4.57), имеющей асимптоту  $u_1 = \mu v$  (для  $v > v_0$ ). Характер поведения кривой не изменяется при любых

значениях параметров, если  $|\xi| < |\beta|$ . При  $|\xi| = |\beta|$  ( $\xi < 0, \beta > 0$ ) кривая  $u_1 = u_1(v)$  совпадает со своей асимптотой, а при  $|\xi| > |\beta|$  ( $\xi < 0$ ) она проходит ниже асимптоты, пересекая ось  $Ov$  в точке  $\bar{v} = \mu^{-1} \sqrt{(\xi^2 - \beta^2)(1 - \mu^2)}$ .

Переходя к исследованию поведения кривой  $u = u(v)$ , заметим, что при всех значениях  $\tau$ , изменяющегося в пределах  $0 < \tau < 2\pi$ , выполняется неравенство  $u < v$ . Кроме того, выражение для производной

$$\frac{du}{dv} = \frac{v}{u + \frac{\rho}{1 + \rho^2} [1 - e^{-\rho\tau} (\cos \tau + \rho \sin \tau)]}$$

показывает, что для  $u > 0, v > 0$  производная  $du/dv$  всегда положительна. Обозначим через  $\varphi(\xi, \rho, \pi) \equiv \equiv 2\chi - 1 - e^{-\rho\pi}$  числители в выражениях (4.59) при  $\tau = \pi$ , совпадающие при этом значении  $\tau$ . При  $\tau \rightarrow \pi$  кривая  $u = u(v)$  приближается к асимптоте

$$u = v - \frac{\rho}{1 + \rho^2} (1 + e^{-\rho\pi}), \quad (4.60)$$

оставаясь выше нее, если  $\varphi(\xi, \rho, \pi) > 0$ , или ниже нее, если  $\varphi(\xi, \rho, \pi) < 0$ . При значениях физических параметров, удовлетворяющих соотношению  $\varphi(\xi, \rho, \pi) = 0$ , функция соответствия  $u = u(v)$  вырождается в прямую (4.60), которая получается из второго соотношения (4.58) при подстановке в него значения  $\tau = \pi$ . (При этом первое соотношение (4.58) обращается в тождество.) Используя далее выражение  $\frac{du}{d\tau} = \frac{v}{\sin \tau}$  и разложения функций  $u = u(\tau)$  и  $v = v(\tau)$  в ряды для малых значений  $\tau$ :

$$u = -\frac{\xi}{2} \tau + \frac{\rho}{6} \tau^2 - \frac{\xi - \rho^3}{24} \tau^3 + \dots,$$

$$v = -\frac{\xi}{2} \tau + \frac{\rho}{3} \tau^2 + \frac{\xi - 3\rho^2}{24} \tau^3 + \dots,$$

получим различные случаи возможного поведения кривой  $u = u(v)$ , изображенные на рис. 4.43. Кривая 1 относится

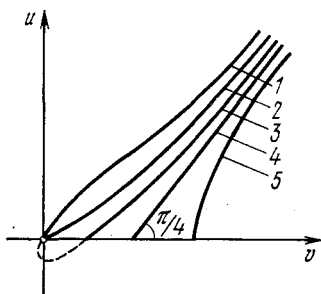


Рис. 4.43

ся к значениям параметров в области  $\xi < 0$ ; кривая 2 получается при  $\xi = 0$ ; кривая 3 — в области  $\xi > 0$ ,  $\varphi(\xi, \rho, \pi) > 0$ ; прямая 4 — при значениях параметров, удовлетворяющих условию  $\varphi(\xi, \rho, \pi) = 0$ ; кривая 5 — в области значений параметров  $\varphi(\xi, \rho, \pi) < 0$ . Перейдем теперь к построению диаграмм Ламерея, которые представляют собой сочетание какого-нибудь типа кривой  $u = u(v)$  с одним из возможных (при данных значениях

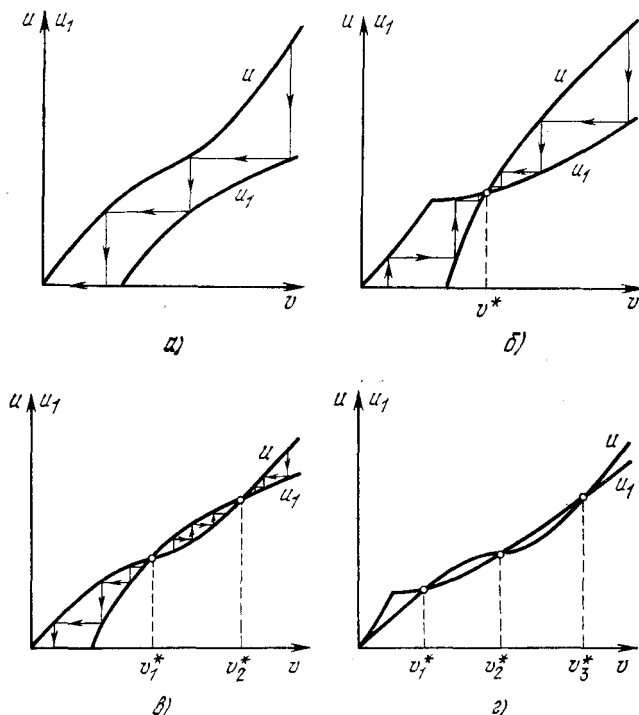


Рис. 4.44

параметров) типов кривой  $u_1 = u_1(v)$ . В результате получаем четыре диаграммы Ламерея (рис. 4.44), различающиеся числом точек пересечения кривых  $u = u(v)$  и  $u_1 = u_1(v)$ . Значения параметра  $\tau$ , соответствующие точкам пересечения этих кривых, являются корнями уравнения

$$[u(\tau)]^2 - \mu^2 [v(\tau)]^2 - \sigma = 0 \quad (0 < \tau < 2\pi), \quad (4.61)$$



причем имеет место следующее утверждение: при любых значениях физических параметров в области  $\xi < 0$  уравнение (4.61) может иметь не более трех корней, отличных от нуля, а в области  $\xi > 0$  — не более одного корня, отличного от нуля. Доказательство этого утверждения, которое мы здесь опускаем, содержится в работе [10]. Из диаграмм Ламерея на рис. 4.44 следует, что возможны следующие случаи разбиения фазового пространства на траектории:

1) все траектории являются скручивающимися, предельные циклы отсутствуют (рис. 4.44, а), в системе нет периодических движений, связанных с разрывом электрической цепи;

2) в фазовом пространстве существует один устойчивый предельный цикл, соответствующий точке  $v^*$  на рис. 4.44, б;

3) существуют два предельных цикла, соответствующие точкам  $v_1^*$  и  $v_2^*$  на рис. 4.44, в: внешний цикл устойчивый, а внутренний — неустойчивый;

4) существуют одновременно три предельных цикла (точки  $v_1^*$ ,  $v_2^*$ ,  $v_3^*$  на рис. 4.44, г): внутренний и внешний циклы устойчивы, а средний — неустойчивый.

В соответствии с этими случаями пространство параметров системы разбивается на области значений, при которых топологическая структура разбиения фазового пространства на траектории остается одинаковой. Уравнения границ указанных областей находятся из условия изменения числа точек пересечения кривых  $u = u(v)$  и  $u_1 = u_1(v)$  на диаграммах Ламерея, изображенных на рис. 4.44. Исчезновение одной точки пересечения с уходом в начало координат приводит к границе  $|\xi| = |\beta|$ . Другая возможность изменения числа точек пересечения состоит в слиянии двух точек с их последующим исчезновением. На этой границе должны быть выполнены условия

$$u(\tau) = u_1, \quad v_{T_1}(\tau) = v_{T_2}, \quad \frac{du_1}{dv} = \frac{du}{dv}.$$

Подставляя сюда выражения входящих в эти соотношения величин  $u(\tau)$ ,  $u_1$ ,  $v_{T_1}(\tau)$ ,  $v_{T_2}$ , получаем параметрические уравнения границы

$$(1 + \rho^2) \xi = f_1(\rho, \tau) - \frac{\kappa \sin \tau}{1 - \cos \tau} f_2(\rho, \tau),$$

$$(1 + \rho^2)^2 (\beta^2 - \xi^2) = \kappa \{ \kappa f_2(\rho, \tau) [f_2(\rho, \tau) - 2f_3(\rho, \tau)] - [f_3(\rho, \tau)]^2 \},$$

где введены обозначения:

$$f_1(\rho, \tau) = \rho^2 + \frac{1 - \rho \sin \tau - e^{-\rho\tau}}{1 - \cos \tau},$$

$$f_2(\rho, \tau) = \rho [1 - e^{-\rho\tau} (\cos \tau + \rho \sin \tau)],$$

$$f_3(\rho, \tau) = 2\rho - \left( \rho + \frac{1 + \cos \tau}{\sin \tau} \right) (1 - e^{-\rho\tau}), \quad \kappa = \frac{\mu^2}{1 - \mu^2}$$

$$(0 < \tau < 2\pi).$$

В качестве примера на рис. 4.45 приведено разбиение плоскости параметров  $(\beta^2 - \xi^2, \xi)$  при фиксированных

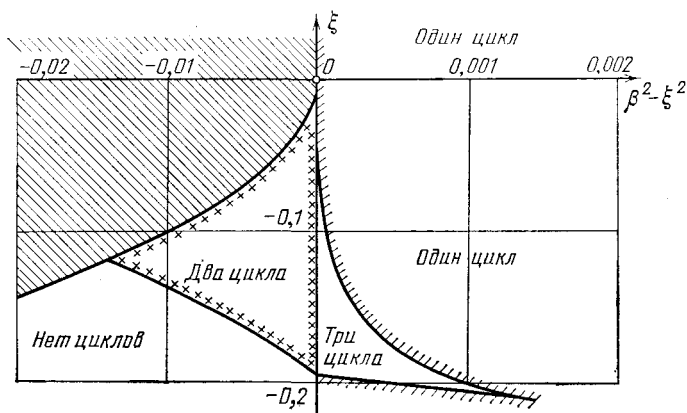


Рис. 4.45

значениях  $\kappa = 1$ ,  $\rho = 1$ . В выбранных таким образом переменных следует рассматривать всю плоскость, за исключением полностью заштрихованной части, так как эта область не соответствует никаким действительным значениям физических параметров. Качественный характер разбиения этой плоскости, изображенный на рис. 4.45, сохраняется и при значениях  $\kappa$  и  $\rho$ , отличных от единицы.

Диаграммы Ламерея на рис. 4.44 показывают, что в рассматриваемой системе все существующие периодические движения являются простыми (т. е. фазовая траектория предельного цикла замыкается после одного оборота). В системе не может быть сложных периодических движений в силу того, что кривые  $u = u(\tau)$  и  $v = v(\tau)$  непрерывны и ни в одной точке первого квадранта не имеют отрицательного наклона касательной.

Период автоколебаний равен  $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2$ , где  $\tau_0$  является корнем трансцендентного уравнения

$$\left[ \frac{(1 - \chi) \cos \tau_0 + \chi - e^{-\rho \tau_0}}{\sin \tau_0} - \rho \right]^2 = \\ = \mu^2 \left[ \rho e^{-\rho \tau_0} - \frac{1 - \chi + (\chi - e^{-\rho \tau_0}) \cos \tau_0}{\sin \tau_0} \right]^2 + \\ + (\rho^2 + 1)^2 (1 - \mu^2) (\beta^2 - \xi^2),$$

а  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определяются выражениями

$$\tau_1 = \arccos \frac{\xi \beta + v \sqrt{v^2 + \xi^2 - \beta^2}}{\xi^2 + v^2},$$

$$\tau_2 = \arccos \frac{\xi \beta + \mu \sqrt{(v^2 + \xi^2 - \beta^2) [\mu^2 (v^2 + \xi^2 - \beta^2) + \beta^2 - \xi^2]}}{\beta^2 + \mu^2 (v^2 + \xi^2 - \beta^2)},$$

куда нужно подставить значение

$$v = \frac{1}{1 + \rho^2} \left[ \rho e^{-\rho \tau_0} - \frac{1 - \chi + (\chi - e^{-\rho \tau_0}) \cos \tau_0}{\sin \tau_0} \right].$$

## Г Л А В А 5

### КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В этой главе будут рассмотрены некоторые свойства динамических систем, уравнения движения которых могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^s (a_{jk}\ddot{q}_k + d_{jk}\dot{\zeta}_k + c_{jk}q_k) = \\ = \mu f_j(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{\zeta}_s, t) + F_j(t) \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (5.1)$$

где  $a_{jk}$ ,  $c_{jk}$ ,  $d_{jk} = -d_{kj}$  ( $d_{jj} = 0$ ) — постоянные коэффициенты;  $f_j(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dots, \dot{\zeta}_s, t)^*$  — нелинейные функции обобщенных координат ( $q_k$ ), обобщенных скоростей ( $\dot{\zeta}_k$ ) и времени;  $F_j(t)$  — функции времени;  $\mu$  — малый параметр. При  $\mu = 0$  система уравнений (5.1) становится линейной, при  $\mu \neq 0$ , но достаточно малом, динамическая система близка к линейной и поэтому называется «квазилинейной». Будем предполагать, что коэффициенты  $a_{jk}$ ,  $c_{jk}$  и  $d_{jk}$  таковы, что характеристическое уравнение линейной однородной системы уравнений

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk}\ddot{q}_k + d_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

имеет чисто мнимые корни. Члены  $d_{jk}\dot{q}_k$ , входящие в левую часть уравнений (5.1), называются «гироскопическими членами» или «гироскопическими силами». Сумма работ этих сил на действительном перемещении динамической системы равна нулю. Название «гироскопические» про-

---

\*) Будем в дальнейшем предполагать, что функции  $f_j$  обладают свойствами, позволяющими проводить с ними необходимые операции.

исходит от того, что такие силы появляются в динамической системе, если она имеет в своем составе гироскопы. Однако гироскопические члены могут появиться и в системе без гироскопов, но при наличии нестационарных связей [24]. Заметим, что рассматриваемые нами динамические системы при  $F_j(t) = 0$  являются системами, в которых при  $\mu = 0$  действует закон сохранения энергии, и если гироскопические силы в системе отсутствуют, то эти динамические системы при  $\mu = 0$  будут консервативными.

Разработке и обоснованию методов исследования таких квазилинейных систем и приложению этих методов к решению конкретных задач посвящена большая литература. Не останавливаясь на обзоре всей этой литературы, укажем только основополагающие работы. Это фундаментальные исследования по разработке асимптотических методов исследования нелинейных систем Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [18, 19, 5, 25]; работы Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андропова, А. А. Витта [3, 4, 23, 27]; работы Б. В. Булгакова [6, 7]. В основе этих методов лежит гипотеза о наличии порождающего решения, за которое берется решение системы (5.1) при  $\mu = 0$ .

Отметим, что существуют и другие методы малого параметра, определения периодических режимов, которые не предполагают наличия порождающего решения, а исходят из так называемой гипотезы фильтра [1, 2], которая опирается на наличие у любой реальной системы конечной полосы пропускания частот.

В данной главе, имеющей целью показать характерные особенности квазилинейных систем, рассматривается лишь один метод — метод медленно меняющихся коэффициентов, связанный с проблемой осреднения. Начало применения этого метода к задачам теории нелинейных колебаний принадлежит Ван-дер-Полю [15]: дальнейшее его развитие и обоснование связано с именами Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андропова, Б. В. Булгакова и их учеников и последователей. Указанный метод нами используется еще и потому, что позволяет в наибольшей степени использовать идеи А. А. Андропова по качественному исследованию дифференциальных уравнений.

## § 1. Автономные динамические системы с одной степенью свободы

Уравнение движения квазилинейной автономной динамической системы имеет вид

$$a_{11}\ddot{q} + c_{11}q = \mu f_1(q, \dot{q}). \quad (5.2)$$

Будем считать, что обычно безразмерный коэффициент  $\mu > 0$ .

Введем в рассмотрение безразмерное время  $\tau = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} t$ , тогда в силу  $\dot{q} = \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dq}{d\tau} \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$ ,  $\ddot{q} = \frac{d^2q}{d\tau^2} \frac{c_{11}}{a_{11}}$  уравнение (5.2) примет вид

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu f\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right), \quad (5.3)$$

где

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) = \frac{1}{c_{11}} f_1\left(q, \frac{dq}{d\tau} \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}\right).$$

Если ввести обозначение  $q^* = dq/d\tau$ , то уравнение (5.3) можно представить в виде двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dq^*}{d\tau} &= -q + \mu f(q, q^*), \\ \frac{dq}{d\tau} &= q^*. \end{aligned}$$

На фазовой плоскости  $qq^*$  уравнение интегральных кривых будет

$$\frac{dq^*}{dq} = \frac{-q + \mu f(q, q^*)}{q^*}. \quad (5.4)$$

При  $\mu = 0$  рассматриваемая динамическая система будет линейной консервативной и фазовые траектории на плоскости  $qq^*$  представляют собой вложенные друг в друга концентрические окружности с центром в начале координат, являющимся состоянием равновесия. В этом случае решением уравнения (5.3) служит

$$q = a \cos \tau + b \sin \tau, \quad (5.5)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные числа (постоянные интегрирования).

Пусть теперь  $\mu$  отлично от нуля, но достаточно мало. Выясним, как изменится при этом картина разбиения плоскости  $qq^*$  на траектории. Будем искать решение уравнения (5.3) в виде (5.5), считая коэффициенты  $a$  и  $b$  функциями времени. Тогда

$$\frac{dq}{d\tau} = -a \sin \tau + b \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau + \frac{da}{d\tau} \sin \tau. \quad (5.6)$$

Из выражения (5.5) видно, что при заданном  $q$  функции  $a$  и  $b$  недостаточно определены, поэтому наложим на них ограничение, заключающееся в том, что производная от  $q$  по  $\tau$  должна иметь такой же вид, как при постоянных  $a$  и  $b$ . Следовательно,

$$\frac{dq}{d\tau} = -a \sin \tau + b \cos \tau \quad (5.7)$$

и

$$\frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau = 0. \quad (5.8)$$

Дифференцируя выражение (5.7) по  $\tau$ , получаем

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} = -a \cos \tau - b \sin \tau - \frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau. \quad (5.9)$$

Подставляя это соотношение и соотношение (5.7) в уравнение (5.3), имеем

$$\begin{aligned} -\frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau &= \\ &= \mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Уравнения (5.8) и (5.10) представляют собой систему уравнений для определения  $da/d\tau$  и  $db/d\tau$ . Решая эту систему, будем иметь

$$\frac{da}{d\tau} = -\mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau, \quad (5.11)$$

$$\frac{db}{d\tau} = \mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau.$$

Полученные уравнения — это уравнение (5.3), преобразованное к новым переменным. Эта система уравнений неавтономна, тогда как исходное уравнение было автономным. Из выражений (5.11) следует, что производные  $da/d\tau$  и  $db/d\tau$  при достаточно малом  $\mu$  достаточно малы, и мы можем считать, что функции  $a$  и  $b$  являются медленно меняю-

щимися функциями времени. Исходя из этого, предположим, что функции  $a$  и  $b$  меняются столь медленно, что их изменением за один период колебаний исходной системы можно пренебречь. Будем также считать, что  $da/d\tau$  и  $db/d\tau$ , имеющие порядок  $\mu$ , в течение одного периода постоянны. Умножая теперь обе части уравнений (5.11) на  $d\tau$  и интегрируя от 0 до  $2\pi$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (5.11) тем, что в правых частях этих уравнений стоят средние интегральные за периоды  $2\pi$  от правых частей уравнений (5.11). Вводя обозначения

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau, \\ Q(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau, \end{aligned}$$

перепишем уравнения (5.12) в виде

$$\frac{da}{d\tau} = \mu P(a, b), \quad \frac{db}{d\tau} = \mu Q(a, b). \quad (5.13)$$

Эти уравнения называются «укороченными» или уравнениями Ван-дер-Поля. Из уравнений (5.13) получается, что

$$\frac{db}{da} = \frac{Q(a, b)}{P(a, b)}. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.14) позволяет исследовать поведение интегральных кривых на плоскости  $ab$ .

Очевидно, что состояние равновесия  $a = 0, b = 0$  на плоскости  $ab$  согласно (5.5) соответствует состоянию равновесия  $q = 0, q^* = 0$  для исходной динамической системы. Состояния равновесия системы (5.14), для которых  $a \neq 0, b \neq 0$ , соответствуют периодическим движениям



для исходной системы. Следовательно, изучив состояния равновесия уравнения (5.14), а также расположение фазовых траекторий на плоскости  $ab$ , можно судить о возможных движениях исходной динамической системы. Этот прием был впервые предложен А. А. Андроновым [3]. Переход к полярным координатам в системе уравнений (5.13) позволит ответить на вопрос о поведении интегральных кривых на плоскости  $qq^*$ . Пусть

$$a = \rho \cos \vartheta, \quad b = \rho \sin \vartheta; \quad (5.15)$$

тогда

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau},$$

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau},$$

$$a \cos \tau + b \sin \tau = \rho \cos(\vartheta - \tau),$$

$$-a \sin \tau + b \cos \tau = -\rho \sin(\vartheta - \tau).$$

После подстановки этих выражений в уравнения (5.12) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \sin \tau \, d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \cos \tau \, d\tau, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \sin(\tau - \vartheta) \, d\tau, \end{aligned}$$

$$\rho \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \cos(\tau - \vartheta) \, d\tau.$$

Поскольку подынтегральные функции периодические, то, введя замену  $\xi = \tau - \vartheta$ , окончательно получим

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\tau} &= \mu\Phi(\rho), \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \mu\Psi(\rho),\end{aligned}\tag{5.16}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(\rho) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \sin \xi \, d\xi, \\ \Psi(\rho) &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \cos \xi \, d\xi.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Первое уравнение системы (5.16) не зависит от  $\vartheta$ , и фазовая плоскость для него вырождается в прямую. Состояния равновесия этого уравнения располагаются на фазовой прямой. По характеру и расположению этих состояний равновесия можно полностью определить качественную картину поведения координаты  $\rho$ .

Координаты положений равновесия уравнения

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu\Phi(\rho)\tag{5.18}$$

являются корнями уравнения

$$\Phi(\rho) = 0.\tag{5.19}$$

Рассмотрим поведение изображающей точки около какого-либо состояния равновесия уравнения (5.18). Пусть  $\rho = \rho_0$  является корнем уравнения (5.19). Введем новую переменную  $u$ , характеризующую поведение изображающей точки вблизи состояния равновесия  $\rho = \rho_0$ :

$$\rho = \rho_0 + u.$$

Уравнение (5.18) при этом примет вид

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\Phi(\rho_0 + u).$$

Разлагая функцию  $\Phi(\rho_0 + u)$  в ряд по степеням  $u$ :  $\Phi(\rho_0 + u) = \Phi'(\rho_0)u +$  члены высших порядков малости и ограничиваясь членами с первой степенью  $u$ , получим уравнение первого приближения

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\Phi'(\rho_0)u.$$

При достаточно малом  $u$ , когда членами высших порядков в разложении функции  $\Phi(\rho_0 + u)$  можно пренебречь, по знаку производной  $\Phi'(\rho_0)$  можно судить о характере состояния равновесия  $\rho = \rho_0$ .

Если

$$\Phi'(\rho_0) < 0,$$

то состояние равновесия устойчиво, так как при этом  $du/d\tau < 0$  и  $u \rightarrow 0$ . При  $\Phi'(\rho_0) > 0$  состояние равновесия неустойчиво \*).

Интегрируя уравнение (5.18), получим закон движения изображающей точки по фазовой прямой:

$$\mu(\tau - \tau_0) = \int_{\rho'}^{\rho} \frac{d\rho}{\Phi(\rho)}, \quad \text{где } \rho' = \rho_{\tau=\tau_0}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu\Psi(\rho).$$

Если  $\Psi(\rho) \equiv 0$ , то  $\frac{d\vartheta}{d\tau} = 0$  и  $\vartheta = \vartheta_0$  — постоянное число.

Значит, на плоскости  $ab$  все интегральные кривые представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Движение изображающей точки по всем этим прямым происходит одинаково. Состояния равновесия на плоскости  $ab$  целиком заполняют дуги окружностей, радиусы которых являются корнями уравнения (5.19). Плоскость  $ab$  для случая, когда уравнение (5.19) имеет корни  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 < \rho_3$ , представлена на рис. 5.1. Выясним, какая же картина будет на плоскости  $qq^*$ . В соответствии с форму-

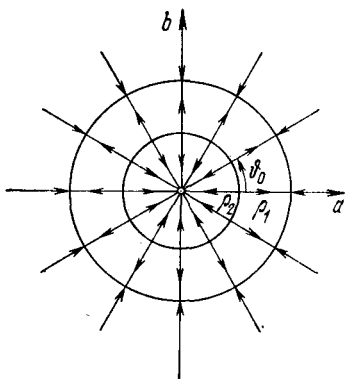


Рис. 5.1

лами (5.5), (5.7) и (5.15) получим

$$q = \rho \cos \vartheta \cos \tau + \rho \sin \vartheta \sin \tau = \rho \cos(\tau - \vartheta),$$

$$q^* = -\rho \cos \vartheta \sin \tau + \rho \sin \vartheta \cos \tau = -\rho \sin(\tau - \vartheta).$$

\*) Строго это доказано А. М. Ляпуновым [20].

Для какого-либо состояния равновесия  $\rho = \rho_k$  будет

$$\begin{aligned} q &= \rho_k \cos (\tau - \vartheta_0), \\ q^* &= -\rho_k \sin (\tau - \vartheta_0). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Это означает, что на плоскости  $qq^*$  имеется замкнутая интегральная кривая — круговой предельный цикл

$$q^2 + q^{*2} = \rho_k^2.$$

Если  $\rho_k$  соответствует устойчивому состоянию равновесия, то на плоскости  $qq^*$  — устойчивый предельный цикл; все соседние интегральные кривые — спирали, накручивающиеся на этот предельный цикл. Если же  $\rho_k$  соответствует неустойчивому состоянию равновесия, то на плоскости  $qq^*$  — неустойчивый предельный цикл.

Пусть теперь  $\Psi(\rho)$  не равно тождественно нулю. Предположим, что  $\rho = \rho_k$  является корнем уравнения  $\Phi(\rho) = 0$  (\*); тогда согласно второму уравнению системы (5.16)

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu \Psi(\rho_k), \quad \vartheta = \mu \Psi(\rho_k) \tau + \vartheta_0;$$

изображающая точка на плоскости  $ab$  будет двигаться по закону

$$a = \rho_k \cos [\mu \Psi(\rho_k) \tau + \vartheta_0], \quad b = \rho_k \sin [\mu \Psi(\rho_k) \tau + \vartheta_0],$$

т. е. существует предельный цикл радиуса  $\rho = \rho_k$ . Характер предельного цикла определяется характером состояния равновесия  $\rho = \rho_k$ . Направление движения изображающей точки по предельному циклу определяется знаком  $\Psi(\rho_k)$ . Так как  $\vartheta$  сохраняет знак между окружностями, радиусы которых являются корнями уравнения  $\Psi(\rho) = 0$ , то все остальные интегральные кривые представляют собой спирали, накручивающиеся на предельный цикл или раскручивающиеся с него. Отметим, что радиальные касательные у этих интегральных кривых будут только в пересечении с окружностями, определяемыми корнями уравнения  $\Psi(\rho) = 0$ . На плоскости  $qq^*$  имеем

$$\begin{aligned} q &= \rho_k \cos \{ [1 - \mu \Psi(\rho_k)] \tau - \vartheta_0 \}, \\ q^* &= -\rho_k \sin \{ [1 - \mu \Psi(\rho_k)] \tau - \vartheta_0 \}, \end{aligned}$$

\* Мы предполагаем, что корни уравнения  $\Phi(\rho) = 0$  не совпадают с корнями уравнения  $\Psi(\rho) = 0$ , так как в противном случае получается тот же результат, что и при  $\Psi(\rho) \equiv 0$ .

т. е. круговые предельные циклы, соответствующие корням уравнения  $\Phi(\rho) = 0$ .

Таким образом, картина на фазовой плоскости для рассмотренных случаев остается одной и той же. Отличие заключается в том, что при  $\Psi(\rho) \neq 0$  имеет место поправка на частоту  $\Delta\omega = -\mu\Psi(\rho_k)$ .

Применим рассмотренный метод к исследованию движения динамической системы, представляющей собой твердое тело, прикрепленное к неподвижной точке пружиной жесткостью  $c$  и находящееся на горизонтальной ленте, которая движется с постоянной скоростью  $\bar{v}$ \*) (рис. 5.2).

Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = T_x,$$

где  $m$  — масса тела;  $b$  — коэффициент сопротивления воздуха;  $T_x$  — сила трения, возникающая между телом и движущейся лентой. Сила трения является функцией относительной скорости  $v_{rx} = v + \dot{x}$ . Примерный график

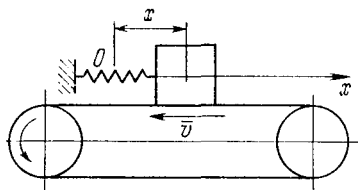


Рис. 5.2

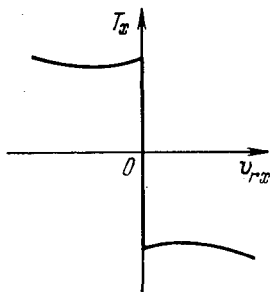


Рис. 5.3

этой функции изображен на рис. 5.3. Как видно из рисунка,  $T(v_{rx})$  может иметь участки, где  $T'_x > 0$  (падающие участки). Предполагая, что  $v \gg |\dot{x}|$ , разложим  $T_x(v + \dot{x})$  в ряд по степеням  $\dot{x}$ :

$$T_x(v + \dot{x}) = T_x(v) + T'_x(v)\dot{x} + \frac{1}{2}T''_x(v)\dot{x}^2 + \\ + \frac{1}{6}T'''_x(v)\dot{x}^3 + \frac{1}{24}T_x^{(IV)}(v)\dot{x}^4 + \frac{1}{120}T_x^{(V)}(v)\dot{x}^5 + \dots$$

Ограничимся приведенными членами и исключим в этом разложении члены со второй и четвертой производными, так как при осреднении они исчезнут.

\*) Эта динамическая система является аналогом так называемого маятника Фроуда [30].

Уравнение движения тела будет теперь иметь вид

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{T_x(v)}{m} + \frac{T'_x(v)}{m} \dot{x} + \frac{T''_x(v)}{6m} \dot{x}^3 + \frac{T_x^{(V)}(v)}{120m} \dot{x}^5.$$

Введем  $\tau = kt$  ( $k = \sqrt{c/m}$ ), тогда

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = -\frac{b}{mk} \frac{dx}{d\tau} + \frac{T_x(v)}{mk^2} + \frac{T'_x(v)}{mk} \frac{dx}{d\tau} + \\ + \frac{T''_x(v)k}{6m} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^3 + \frac{T_x^{(V)}(v)k^3}{120m} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^5.$$

Введя новую переменную  $q = x - \frac{T_x(v)}{mk^2}$ , получим

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \left(\frac{T'_x(v)}{mk} - \frac{b}{mk}\right) \frac{dq}{d\tau} + \frac{kT''_x(v)}{6m} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^3 + \\ + \frac{k^3T_x^{(V)}(v)}{120m} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^5.$$

Предположим, что коэффициент вязкого трения мал, а сила сухого трения мало отличается от постоянной, т. е. предположим, что безразмерные величины

$$\frac{b}{mk} \ll 1, \quad \frac{|T'_x(v)|}{mk} \ll 1, \quad \frac{k|T''_x(v)|}{m} \ll 1, \quad \frac{k^3|T_x^{(V)}(v)|}{m} \ll 1.$$

Пусть  $\mu = \frac{b}{mk}$  — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной консервативной. Вводя обозначения

$$\alpha = \frac{T'_x(v)}{b} - 1, \quad \beta = \frac{k^2}{6} \frac{T''_x(v)}{b}, \quad \gamma = \frac{k^4 T_x^{(V)}(v)}{b},$$

перепишем уравнение движения в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu \left[ \alpha \frac{dq}{d\tau} + \beta \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^3 + \gamma \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^5 \right].$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (5.3), видим, что для рассматриваемого случая

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) = \alpha \frac{dq}{d\tau} + \beta \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^3 + \gamma \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^5.$$

Тогда в соответствии с формулами (5.17) получим

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{2} \rho \left( \alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 \right),$$

$$\Psi(\rho) = 0.$$

Состояния равновесия системы находятся из уравнения

$$\rho \left( \alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 \right) = 0.$$

Корень  $\rho_1 = 0$  соответствует состоянию равновесия исходной динамической системы. Так как

$$\Phi'(\rho) = \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{9}{4} \beta \rho^2 + \frac{25}{8} \gamma \rho^4 \right), \quad (5.21)$$

то состояние равновесия  $\rho_1 = 0$  будет устойчивым, если  $\alpha < 0$ , и неустойчивым, если  $\alpha > 0$ . Другие состояния равновесия находятся из уравнения

$$\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 = 0. \quad (5.22)$$

Нас интересуют только положительные корни этого уравнения. Рассмотрим, как зависят эти корни от коэффициента  $\alpha$  при фиксированных  $\beta$  и  $\gamma$ .

Исследуем случай, когда  $\beta < 0$ ,  $\gamma < 0$ . Введем в рассмотрение плоскость  $\alpha \rho^2$ . На этой плоскости уравнение (5.22) представляет собой уравнение параболы. Из уравнения (5.22) следует, что

$$\rho^2 = -\frac{3}{5} \frac{\beta}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{9}{25} \frac{\beta^2}{\gamma^2} - \frac{8}{5} \frac{\alpha}{\gamma}}.$$

При  $\alpha = 0$  один корень уравнения (5.22) равен нулю, а второй отрицательный, так как  $\beta$  и  $\gamma$  одного знака. При  $\alpha > 0$  уравнение (5.22) будет иметь только один положительный корень. Таким образом, парабола расположена, как показано на рис. 5.4. Согласно выражению (5.21) парабола

$$\alpha + \frac{9}{4} \beta \rho^2 + \frac{25}{8} \gamma \rho^4 = 0 \quad (5.23)$$

отделяет на плоскости  $\alpha \rho^2$  области устойчивости, где  $\Phi'(\rho) < 0$ , от области неустойчивости, где  $\Phi'(\rho) > 0$ . В рассматриваемом случае область устойчивости находится вне параболы (5.23), нанесенной на рис. 5.4 штрихами. Из рассмотрения рис. 5.4 следует, что при  $\alpha < 0$  будет только одно устойчивое состояние равновесия  $\rho = 0$ . При  $\alpha > 0$  будет два состояния равновесия: неустойчивое

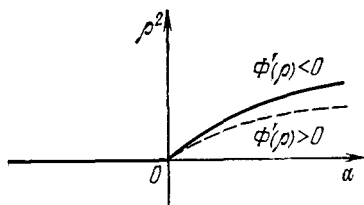


Рис. 5.4

$\rho = 0$  и устойчивое, соответствующее верхней ветви параболы.

На фазовой плоскости  $q - \frac{dq}{dt}$  при  $\alpha < 0$  будет устойчивое состояние равновесия в начале координат и, следовательно, система совершает затухающие колебания. При  $\alpha > 0$  на фазовой плоскости  $q - \frac{dq}{dt}$  будет неустойчивое состояние равновесия в начале координат и устойчивый предельный цикл (рис. 5.5). При уменьшении  $\alpha$  предельный

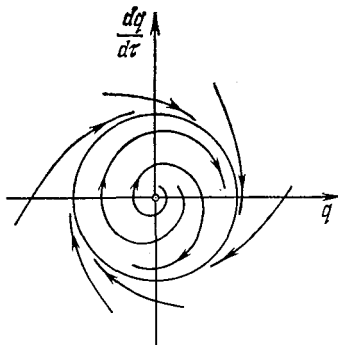


Рис. 5.5

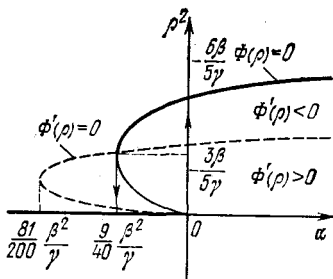


Рис. 5.6

цикл стягивается к началу координат и при  $\alpha = 0$  сольется с неустойчивым состоянием равновесия и передаст ему свою устойчивость. При увеличении  $\alpha$  от отрицательных значений к положительным при переходе через нуль возникают автоколебания, амплитуда которых увеличивается непрерывно (при непрерывном увеличении  $\alpha$ ). Такой характер возникновения автоколебаний называется «мягким» возбуждением.

Пусть теперь  $\beta > 0$ ,  $\gamma < 0$ . В этом случае на плоскости  $\alpha\rho^2$  парабола (5.22) пересекает ось  $\rho^2$  в точках  $\alpha_2 = 0$ ,  $\rho_2^2 = 0$  и  $\alpha_3 = 0$ ,  $\rho_3^2 = -\frac{6}{5} \frac{\beta}{\gamma}$ . Расположение этой параболы показано на рис. 5.6. В рассматриваемом случае область устойчивости находится вне параболы (5.23), нанесенной на рис. 5.6 штрихами. Из рассмотрения рис. 5.6 следует, что при  $\alpha < \frac{9}{40} \frac{\beta^2}{\gamma}$  будет только одно устойчивое состояние равновесия и динамическая система совершает затухающие колебания.



При  $\frac{9}{40} \frac{\beta^2}{\gamma} < \alpha < 0$  состояний равновесия три: устойчивое состояние равновесия  $\rho = 0$ , неустойчивое состояние равновесия, соответствующее нижней ветви параболы (5.22), и устойчивое состояние равновесия, соответствующее верхней части параболы (5.22). На фазовой плоскости  $q \frac{dq}{dt}$  это соответствует устойчивой особой точке в начале координат, неустойчивому предельному циклу и устойчивому предельному циклу. Таким образом, для начальных условий, лежащих внутри неустойчивого предельного цикла, колебания динамической системы затухающие. При начальных условиях, расположенных вне этого цикла, устанавливаются автоколебания. При  $\alpha > 0$  состояние равновесия в начале координат неустойчиво и при любых начальных условиях устанавливаются устойчивые автоколебания (см. рис. 5.5).

Заметим, что при  $\frac{9}{40} \frac{\beta^2}{\gamma} < \alpha < 0$  динамическая система может находиться в равновесии или совершать автоколебания. Следовательно, если она находится в покое, то мы, сообщив ей достаточно большую скорость, можем привести ее в режим автоколебаний.

Проследим, как возникают автоколебания при изменении  $\alpha$  от отрицательных значений к положительным. Пусть при  $\alpha < 0$  динамическая система находится в устойчивом состоянии покоя, при  $\alpha = 0$  возникнут автоколебания конечной амплитуды. Далее, при увеличении  $\alpha$  амплитуда колебаний будет постепенно нарастать. Такой режим возникновения автоколебаний называется «жестким» режимом. При обратном изменении  $\alpha$  — от положительных к отрицательным — амплитуда автоколебаний постепенно уменьшается и при  $\alpha = \frac{9}{40} \frac{\beta^2}{\gamma}$  автоколебания прекратятся (при конечной амплитуде), а система придет к устойчивому состоянию равновесия.

Следовательно, возникновение и исчезновение автоколебаний происходит при различных значениях параметра  $\alpha$ , который часто называют коэффициентом возбуждения.

Мы не будем приводить здесь исследования случаев  $\beta < 0$ ,  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ , которые проводятся аналогично. Отметим только, что в этих случаях при определенных значениях в динамической системе могут возникнуть неограниченно возрастающие колебания. Однако неогра-

ниченное возрастание колебаний требует неограниченного поступления в систему энергии извне, но это практически невозможно. Следовательно, в этих случаях приближение, взятое при разложении  $T_x(v + \dot{x})$ , недостаточно и нужно учитывать члены более высоких порядков.

## § 2. Неавтономные квазилинейные динамические системы с одной степенью свободы

Рассмотрим движения неавтономной квазилинейной динамической системы вида

$$a_{11}\ddot{q} + c_{11}q = \mu f_1(q, \dot{q}, t). \quad (5.24)$$

Предположим, что нелинейная функция  $f_1(q, \dot{q}, t)$  является периодической функцией по переменной  $t$  с периодом  $2\pi/p$ , т. е.

$$f_1\left(q, \dot{q}, t + \frac{2\pi}{p}\right) = f_1(q, \dot{q}, t).$$

Введя «безразмерное время»  $\tau = pt$  и обозначив  $k^2 = c_{11}/a_{11}$ , перепишем уравнение (5.24) в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \frac{k^2}{p^2}q = \mu \frac{f_1\left(q, p \frac{dq}{d\tau}, \frac{\tau}{p}\right)}{p^2}.$$

В дальнейшем будем рассматривать случаи, когда отношение  $(k^2 - p^2)/p^2$  имеет порядок малого параметра  $\mu$ , т. е.

$$\frac{k^2 - p^2}{p^2} = \mu\zeta, \quad (5.25)$$

где  $\zeta$  — так называемая расстройка — параметр, характеризующий различие между величинами  $k$  и  $p$ . Используя соотношение (5.25), уравнению движения можно придать вид

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right), \quad (5.26)$$

где функция

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right) = -\zeta q + \frac{1}{p^2} f_1\left(q, p \frac{dq}{d\tau}, \frac{\tau}{p}\right)$$

обладает свойством периодичности по  $\tau$ :

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau + 2\pi\right) = f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right).$$

При  $\mu = 0$  уравнение (5.26) имеет решение

$$q = a \cos \tau + b \sin \tau. \quad (5.27)$$

Если искать решение уравнения (5.26) при  $\mu \neq 0$  в виде (5.27), считая  $a$  и  $b$  медленно меняющимися функциями времени, то, поступая аналогично тому, как это было сделано в § 1 гл. 5, получим для нахождения  $a$  и  $b$  укороченные уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau, \tau) \sin \tau d\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau, \tau) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Заметим, что система уравнений (5.28) является автономной. В частном случае, когда

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right) = \psi\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) + A_0 \sin \tau,$$

уравнения (5.28) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu A_0}{2} - \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(a \cos \tau + \\ &\quad + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.29)$$

В качестве первого примера на применение полученных уравнений рассмотрим задачу о действии внешней синусоидальной силы на автоколебательную систему. Это рассмотрение связано с одним из интересных и важных свойств автоколебательных систем — явлением принудительной синхронизации, которое иногда называется захватыванием. Это явление заключается в том, что при достаточно малой разности между частотой автоколебательной системы и частотой внешней силы устойчивое периодическое движение системы приобретает частоту внешней силы. Основ-

ным вопросом теории является нахождение интервала захватывания, т. е. той наибольшей разности частот, при которой еще имеет место захватывание, в то время как при дальнейшем увеличении различия между частотами захватывание уже не имеет места и наступает особый режим, связанный с наличием в системе квазипериодического движения с двумя основными частотами, из которых одна — частота внешней силы, а другая — более или менее измененная частота автоколебательной системы (режим биений).

Впервые приближенную теорию явления захватывания в регенеративном приемнике дал Ван-дер-Поль [15]. Математическое обоснование теории захватывания было дано в работах А. А. Андропова и А. А. Витта [4]. В настоящее время имеется большая литература, посвященная этому вопросу ([23, 27, 29, 26] и др.).

Мы рассмотрим явление захватывания на примере маятника, возбуждаемого подталкивающей силой [13]. Для малых колебаний маятника уравнение движения будет иметь вид

$$ml^2\ddot{\phi} + mgl\dot{\phi} + \gamma'\phi = E(\phi) + A' \sin pt.$$

Здесь  $m$  — масса маятника,  $l$  — его длина,  $\gamma'$  — коэффициент вязкого трения,  $p$  — частота внешней силы,  $E(\phi)$  — подталкивающая сила. Функцию  $E(\phi)$  будем считать запаздывающей. Это значит, что изменение этой функции всегда опаздывает на постоянный отрезок времени  $\Delta t$  по отношению к соответствующему значению аргумента, при котором должно произойти изменение функции. Если бы запаздывания не было, то эта функция аппроксимировалась бы следующим образом:

$$E(\phi) = \begin{cases} E' & \text{при } \phi > 0, \\ -E' & \text{при } \phi < 0 \end{cases} \quad (E' > 0).$$

Вводя обозначения  $\tau = pt$ ,  $k^2 = g/l$ , получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{k^2}{p^2}\varphi = \frac{A'}{ml^2p^2} \sin \tau - \frac{\gamma'}{ml^2p} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{E\left(\frac{d\varphi}{d\tau} p\right)}{ml^2p^2}.$$

Рассмотрим систему, близкую к «резонансу», т. е. будем считать, что

$$\frac{|k^2 - p^2|}{p^2} \ll 1.$$

Предполагая, что безразмерные величины имеют значения

$$\frac{A'}{m l^2 p^2} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{m l^2 p} \ll 1, \quad \frac{|E|}{m l^2 p^2} \ll 1,$$

и вводя расстройку  $\zeta$  при помощи соотношения

$$\frac{k^2}{p^2} = 1 + \mu \zeta,$$

перепишем уравнение движения в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \varphi = \mu \left[ A_0 \sin \tau - \frac{d\varphi}{d\tau} - \zeta \varphi + E^* \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right) \right], \quad (5.30)$$

где  $\mu = \frac{\gamma'}{m l^2 p}$  — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной консервативной,  $E^* = \frac{E}{\gamma' p}$ ,  $A_0 = \frac{A'}{\gamma' p}$ . Уравнение (5.30) имеет вид (5.26), и, следовательно, в соответствии с уравнениями (5.29) получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \frac{\mu}{2} \left( -a + \zeta b - A_0 + \frac{4E_0}{\pi} \frac{a \cos \Delta - b \sin \Delta}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2} \left( -b - \zeta a + \frac{4E_0}{\pi} \frac{a \sin \Delta + b \cos \Delta}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \end{aligned}$$

где  $\Delta = p \Delta t$ ,  $E_0 = \frac{E'}{\gamma' p}$ . После введения обозначений

$$B = \frac{4E_0}{\pi}, \quad x = \frac{a}{B}, \quad y = \frac{b}{B}, \quad A = \frac{A_0}{B}, \quad \tau_1 = \tau \frac{2}{\mu}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau_1} &= -x + \zeta y - A + \frac{x \cos \Delta - y \sin \Delta}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{dy}{d\tau_1} &= -y - \zeta x + \frac{x \sin \Delta + y \cos \Delta}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Так как решение уравнения (5.30) мы искали в виде  $\varphi = a \cos \tau + b \sin \tau$ , то особая точка на плоскости  $xu$  соответствует предельному циклу для исходной динамической системы. Предельные циклы на плоскости  $xu$  соответствуют для исходной системы режимам биений. Для удобства исследования системы (5.31) перейдем к полярным координатам

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta.$$

Вычисляя производные

$$\frac{dx}{d\tau_1} = \frac{d\rho}{d\tau_1} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau_1},$$

$$\frac{dy}{d\tau_1} = \frac{d\rho}{d\tau_1} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau_1},$$

и подставляя их в уравнения (5.31), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau_1} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau_1} &= \\ &= -\rho \cos \vartheta + \zeta \rho \sin \vartheta - A + \cos \vartheta \cos \Delta - \sin \vartheta \sin \Delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau_1} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau_1} &= \\ &= -\rho \sin \vartheta - \zeta \rho \cos \vartheta + \cos \vartheta \sin \Delta + \sin \vartheta \cos \Delta, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d\rho}{d\tau_1} = -\rho - A \cos \vartheta + \cos \Delta = P(\rho, \vartheta), \quad (5.32)$$

$$\rho \frac{d\vartheta}{d\tau_1} = -\zeta \rho + A \sin \vartheta + \sin \Delta = \rho Q(\rho, \vartheta).$$

Особые точки (состояния равновесия) этой системы находятся из уравнений

$$-\rho - A \cos \vartheta + \cos \Delta = 0,$$

$$-\zeta \rho + A \sin \vartheta + \sin \Delta = 0.$$

Исключая из этих уравнений  $\vartheta$ , получим уравнение для  $\rho$ , соответствующих особым точкам

$$\rho^2 (1 + \zeta^2) - 2\rho (\cos \Delta + \zeta \sin \Delta) + 1 = A^2. \quad (5.33)$$

Кривая (5.33) называется резонансной кривой. Характеристическое уравнение для уравнений первого приближения системы уравнений (5.32) имеет вид (§ 4 гл. 1)

$$s^2 + ps + q = 0,$$

где

$$p = -[P'_\rho(\rho, \vartheta) + Q'_\vartheta(\rho, \vartheta)] = 2 - \frac{\cos \Delta}{\rho},$$

$$\begin{aligned} q &= P'_\rho(\rho, \vartheta) Q'_\vartheta(\rho, \vartheta) - P'_\vartheta(\rho, \vartheta) Q'_\rho(\rho, \vartheta) = \\ &= 1 + \zeta^2 - \frac{1}{\rho} (\cos \Delta + \zeta \sin \Delta), \end{aligned}$$

а  $\rho$ ,  $\vartheta$  — корни уравнений  $P(\rho, \vartheta) = 0$ ,  $Q(\rho, \vartheta) = 0$ .  
Знаки величин  $p$ ,  $q$  и

$$\delta = p^2 - 4q = \frac{1}{\rho^2} - \left(2\zeta - \frac{\sin \Delta}{\rho}\right)^2$$

определяют характер состояний равновесия.

При  $q < 0$  состояния равновесия неустойчивы (седла).  
При  $q > 0$ ,  $p > 0$  состояния равновесия устойчивы, при  
 $q > 0$ ,  $p < 0$  состояния равновесия неустойчивы. При  
 $\delta > 0$  состояния равновесия — узлы, при  $\delta < 0$  — фокусы.

Рассмотрим плоскость  $\zeta\rho$ . На этой плоскости кривая  
 $q = 0$  определяет область неустойчивых состояний равновесия (седла). При  $q > 0$  линия  $p = 0$  отделяет устойчивые  
состояния равновесия от неустойчивых. Граница между  
фокусами и узлами определяется уравнением  $\delta = 0$ , т. е.

$$\left[\frac{1}{\rho} - \left(2\zeta - \frac{\sin \Delta}{\rho}\right)\right] \left[\frac{1}{\rho} + \left(2\zeta - \frac{\sin \Delta}{\rho}\right)\right] = 0. \quad (5.34)$$

Линия  $p = 0$  представляет собой прямую

$$\rho = \frac{1}{2} \cos \Delta. \quad (5.35)$$

Уравнение кривой  $q = 0$  имеет вид

$$\rho = \frac{\cos \Delta + \zeta \sin \Delta}{1 + \zeta^2}. \quad (5.36)$$

Эта кривая пересекает ось  $\zeta$  при  $\zeta = -\operatorname{ctg} \Delta$ , при  $\zeta \rightarrow \infty$   
 $\rho \rightarrow 0$ . При  $\zeta = \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}$   $\rho_{\max} = \cos^2 \frac{\Delta}{2}$ . Кривая  $q = 0$  пере-  
секает прямую  $p = 0$  при

$$\zeta = \frac{1 + \sin \Delta}{\cos \Delta}, \quad \zeta = -\frac{1 - \sin \Delta}{\cos \Delta}.$$

Кривая  $\delta = 0$  пересекает линию  $p = 0$  в точках ее пере-  
сечения с линией  $q = 0$ . На рис. 5.7 и 5.8 показаны диа-  
граммы характера особых точек, построенные на плоско-  
сти  $\zeta\rho$  соответственно для  $\Delta = 0$  и  $\Delta = 0,5$ .

Перейдем к построению резонансных кривых, опреде-  
ляемых уравнением (5.33) при различных значениях  $A$ .  
Из уравнения (5.33) следует

$$\rho_{12} = \frac{\cos \Delta + \zeta \sin \Delta \pm \sqrt{A^2(1 + \zeta^2) - (\sin \Delta - \zeta \cos \Delta)^2}}{1 + \zeta^2}. \quad (5.37)$$

При  $A = 0$  резонансная кривая стягивается в точку  
с координатами  $\zeta = \operatorname{tg} \Delta$ ,  $\rho = \cos \Delta$ . Из выражения (5.37)

следует, что  $\rho$  при  $A > 1$  имеет одно положительное значение, а при  $A < 1$  — два положительных значения. На основании соотношения (5.33) получим

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\rho (\sin \Delta - \xi \rho)}{\rho (1 + \xi^2) - (\cos \Delta + \xi \sin \Delta)},$$

т. е. резонансные кривые пересекают кривую  $q = 0$ , имея вертикальные касательные. Геометрическим местом горизонтальных касательных резонансных кривых является

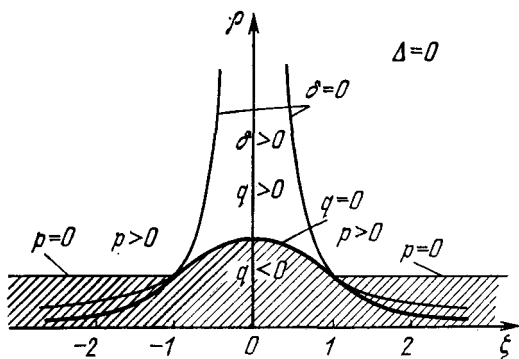


Рис. 5.7

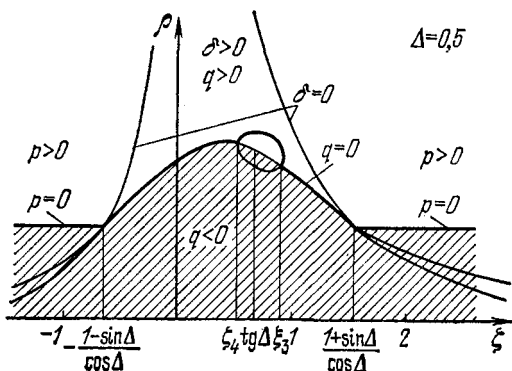


Рис. 5.8

гипербола  $\xi \rho = \sin \Delta$ . Пересечение резонансных кривых с прямой  $p = 0$  происходит при

$$\xi_{1,2} = \frac{2 \sin \Delta \pm \sqrt{4A^2 - \cos^2 \Delta}}{\cos \Delta}. \quad (5.38)$$



Это значит, что резонансная кривая пересекает прямую  $p = 0$  только при  $A > \frac{\cos \Delta}{2}$ .

Резонансные кривые пересекают кривую  $q = 0$  при

$$\zeta_{3,4} = \frac{\cos \Delta \sin \Delta \pm \sqrt{A^2(1 - A^2)}}{\cos \Delta}, \quad (5.39)$$

т. е. резонансная кривая пересекает кривую  $q = 0$  только при  $A^2 < 1$ . Через точку пересечения кривой  $q = 0$  и прямой  $p = 0$  с координатами  $\rho = \frac{\cos \Delta}{2}$ ,  $\zeta = \frac{1 + \sin \Delta}{\cos \Delta}$  проходит резонансная кривая, для которой  $A_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin \Delta)$ , а через точку с координатами  $\rho = \frac{\cos \Delta}{2}$ ,  $\zeta = -\frac{1 - \sin \Delta}{\cos \Delta}$  — резонансная кривая, для которой  $A_2^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin \Delta)$ . На рис. 5.9 и 5.10 построены в плоскости  $\xi\rho$  резонансные кривые при различных фиксированных  $A$  соответственно для  $\Delta = 0$  и  $\Delta = 0,5$ .

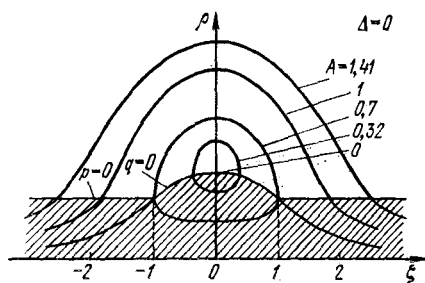


Рис. 5.9

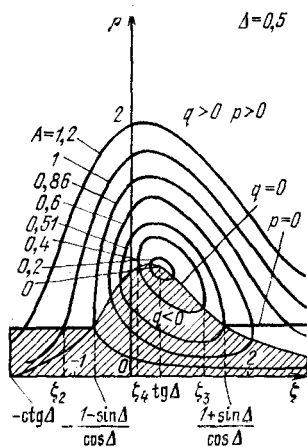


Рис. 5.10

Из рассмотрения этих рисунков следует, что при  $\Delta = 0$  резонансные кривые симметричны относительно оси  $\rho$ . При  $\Delta \neq 0$  эта симметрия нарушается, т. е. запаздывание вызывает сдвиг резонансных кривых. Как видно из рис. 5.10, при  $A^2 > A_1^2$  часть резонансной кривой, соответствующая устойчивым состояниям равновесия и, следова-

тельно, периодическим колебаниям с частотой внешней силы, расположена над кривой  $q = 0$  и прямой  $p = 0$ . Следовательно, захватывание имеет место для  $\zeta$ , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{2 \sin \Delta - \sqrt{4A^2 - \cos^2 \Delta}}{\cos \Delta} < \zeta < \frac{2 \sin \Delta + \sqrt{4A^2 - \cos^2 \Delta}}{\cos \Delta}.$$

При  $A_1^2 < A^2 < A_2^2$  захватывание имеет место для

$$\frac{\cos \Delta \sin \Delta - \sqrt{A^2(1 - A^2)}}{\cos^2 \Delta - A^2} < \zeta < \frac{2 \sin \Delta + \sqrt{4A^2 - \cos^2 \Delta}}{\cos \Delta}.$$

Наконец, при  $0 < A^2 < A_1^2$  захватывание произойдет при

$$\frac{\cos \Delta \sin \Delta - \sqrt{A^2(1 - A^2)}}{\cos^2 \Delta - A^2} < \zeta < \frac{\cos \Delta \sin \Delta + \sqrt{A^2(1 - A^2)}}{\cos^2 \Delta - A^2}.$$

Перейдем теперь к выяснению механизма захватывания. Ограничимся рассмотрением случая слабых сигналов ( $A < (\cos \Delta)/2$ ).

Из первого уравнения системы (5.32) следует, что при достаточно больших  $\rho$  производная  $dp/d\tau_1 < 0$ , т. е. бесконечность неустойчива.

Особые точки системы на плоскости  $xu$  в соответствии с уравнениями (5.32) определяются пересечением кривых

$$\begin{aligned} -\rho^2 - Ax + \rho \cos \Delta &= 0, \\ -\zeta \rho^2 + Ay + \rho \sin \Delta &= 0. \end{aligned}$$

Так как  $x = \rho \cos \vartheta$ ,  $y = \rho \sin \vartheta$ , то уравнение первой кривой, не зависящее от  $\zeta$ , имеет вид

$$\rho = \cos \Delta - A \cos \vartheta. \quad (5.40)$$

Уравнение второй кривой

$$\rho = \frac{\sin \Delta}{\zeta} + \frac{A}{\zeta} \sin \vartheta. \quad (5.41)$$

На рис. 5.11 даны кривые (5.40) и (5.41) для  $A = 0,2$  и различных  $\zeta$ . В соответствии с рис. 5.12, построенным для тех же значений  $A$  и  $\Delta$ , можно сказать, что при  $\zeta = \operatorname{tg} \Delta$  имеются три особые точки: одна — устойчивый узел, вторая — седло и третья ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) — существенно особая точка.

При  $\operatorname{tg} \Delta < \zeta < \zeta_3$  и  $\zeta_4 < \zeta < \operatorname{tg} \Delta$  имеются также три особые точки. При  $\zeta = \zeta_3$  и  $\zeta = \zeta_4$  устойчивый узел

и седло сливаются в одно состояние равновесия. Точка  $x = 0, y = 0$  остается.

При  $\zeta > \zeta_3$  и  $\zeta < \zeta_4$  имеется только одна особая точка  $x = 0, y = 0$ . Для выяснения характера этой особой точки рассмотрим первое уравнение системы (5.32)

$$\frac{d\rho}{d\tau_1} = -\rho - A \cos \vartheta + \cos \Delta.$$

Если  $A < \cos \Delta$ , то можно подобрать такое  $\rho_1$ , при котором

$$\rho_1 < \cos \Delta - A \cos \vartheta;$$

тогда для всех  $\rho < \rho_1$  будет  $d\rho_1/d\tau_1 > 0$ . Это означает, что окружности  $\rho = c$  ( $c < \rho_1$ ) образуют вокруг точки  $x = 0, y = 0$  систему циклов без соприкосновений, т. е. систему

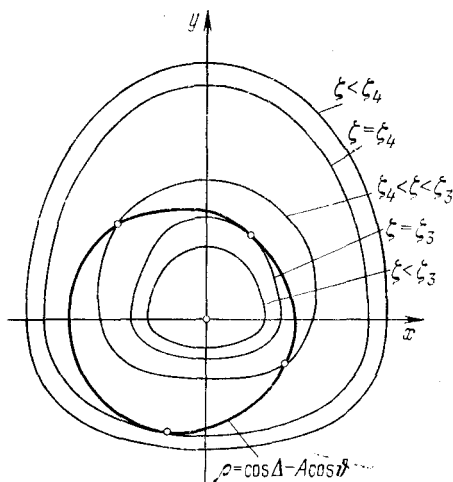


Рис. 5.11

замкнутых кривых, в каждой точке которых вектор фазовой скорости направлен наружу. Следовательно, из точки  $x = 0, y = 0$  все траектории выходят при возрастании  $\tau_1$ . Так как это происходит при  $A < \cos \Delta$  и любых  $\zeta$ , то можно утверждать, что характер точки  $x = 0, y = 0$  не меняется при слиянии двух других особых точек.

Для доказательства существования и единственности предельного цикла на плоскости  $xu$ , а также для установ-

ления границ его расположения воспользуемся методом кривой контактов и теоремой Пуанкаре — Дюлака.

Вначале кратко изложим сущность метода кривой контактов [4]. Пусть дано семейство замкнутых непересекающихся кривых, сплошь заполняющих плоскость

$$F(x, y) = C. \quad (5.42)$$

Назовем эту систему кривых топографической системой. Назовем кривой контактов кривую, являющуюся геометрическим местом точек соприкосновения кривых топографической системы с интегральными кривыми. Выберем топографическую систему таким образом, чтобы кривая контактов была замкнутой; проведем наибольшую и наименьшую

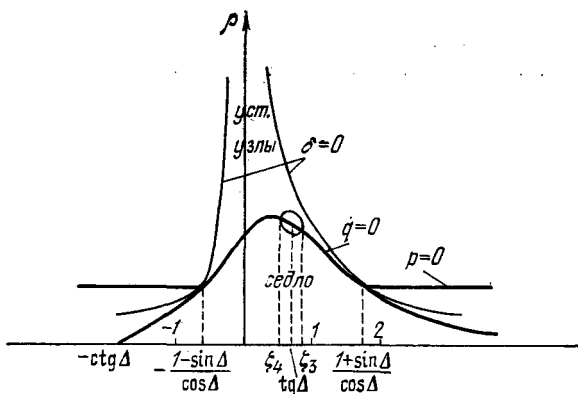


Рис. 5.12

кривые топографической системы, касающиеся кривой контактов. Очевидно, что все кривые топографической системы, лежащие вне такой наибольшей кривой и внутри наименьшей кривой, будут циклами без соприкосновений. Таким образом, если предельные циклы существуют, то они расположены в кольцеобразной области, ограниченной двумя выбранными кривыми топографической системы. Достаточным условием существования по крайней мере одного цикла будет условие, чтобы вектор фазовой скорости на выбранных кривых топографической системы был направлен или везде наружу, или везде внутрь соответствующей кольцеобразной области.

Пусть динамическая система описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

В силу уравнения (5.42) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

и, следовательно, уравнение кривой контактов будет иметь вид

$$\frac{P}{Q} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial x}.$$

Если топографическая система представляет собой семейство окружностей  $x^2 + y^2 = c$ , то уравнение кривой контактов будет

$$\frac{P}{Q} = - \frac{y}{x}.$$

Для рассматриваемой нами задачи в качестве топографической системы возьмем семейство окружностей

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Кривая контактов в соответствии с уравнениями (5.31) будет определяться уравнением

$$-\frac{x}{y} = \frac{-y - \zeta x + (x \sin \Delta + y \cos \Delta) / \sqrt{x^2 + y^2}}{-x + \zeta y - A + (x \cos \Delta - y \sin \Delta) / \sqrt{x^2 + y^2}}$$

или

$$x^2 + y^2 + Ax - \sqrt{x^2 + y^2} \cos \Delta = 0.$$

В полярных координатах это уравнение имеет вид

$$\rho = \cos \Delta - A \cos \vartheta.$$

Таким образом, радиусы крайних кругов топографической системы, касающихся кривой контактов, равны

$$R_1 = \cos \Delta - A, \quad R_2 = \cos \Delta + A.$$

Следовательно, если предельные циклы существуют, то они лежат внутри кольцеобразной области, образуемой окружностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . Докажем с помощью теоремы Пуанкаре — Дюлака, что в рассматриваемом случае в кольцевой области между крайними кругами топографической системы при  $\zeta > \zeta_3$  и  $\zeta < \zeta_4$  имеется самое большое один устойчивый предельный цикл.

Теорему Пуанкаре — Дюлака можно сформулировать следующим образом. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  предполагаются однозначными и имеющими производные, и пусть  $F(x, y)$  — некоторая однозначная и дифференцируемая функция. Тогда, если

$$B(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(PF) + \frac{\partial}{\partial y}(QF)$$

не меняет знака в некоторой кольцевой области  $D$ , то имеется самое большее один предельный цикл внутри  $D$ . В нашем случае функция

$$B(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(PF) + \frac{\partial}{\partial y}(QF) = \frac{1}{\rho} \cos \Delta - 2$$

(где выбрано  $F = 1$ ) внутри кольца между крайними кругами топографической системы при  $A < (\cos \Delta)/2$  знака не меняет, так как кривая  $(\cos \Delta)/\rho - 2 = 0$  в этом случае лежит внутри меньшего круга топографической системы

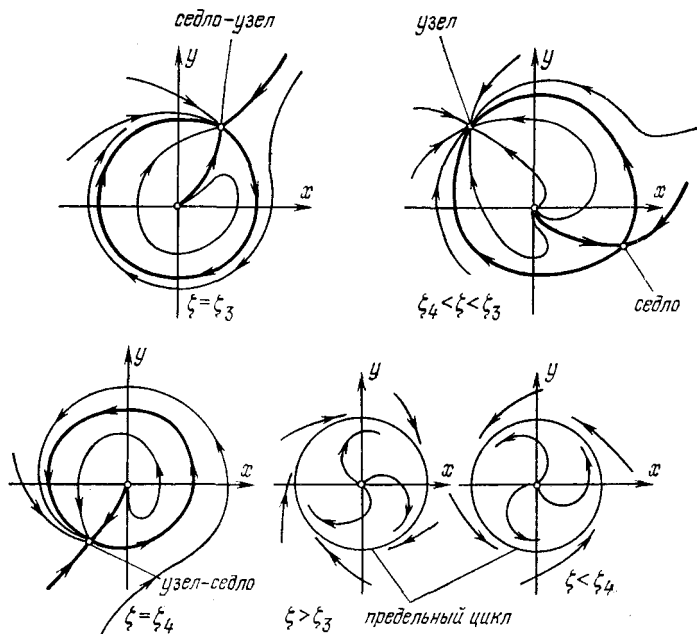


Рис. 5.13

и, следовательно, между крайними кругами топографической системы при  $\zeta > \zeta_3$  и  $\zeta < \zeta_4$  имеется один предельный цикл.

При

$$\frac{\cos \Delta}{2} < A < \sqrt{\frac{1 - \sin \Delta}{2}}$$

также будет существовать предельный цикл, так как все траектории выходят из точки  $x = 0, y = 0$ , бесконечность неустойчива и при  $\zeta > \zeta_3$  и  $\zeta < \zeta_4$  особых точек, кроме  $x = 0, y = 0$ , нет. На рис. 5.13 показаны качественные картины плоскости  $xu$  при различных значениях  $\zeta$  для  $A < (\cos \Delta)/2$ .

В заключение отметим, что, как видно из рассмотрения рис. 5.9 и 5.10, запаздывание  $\Delta$  делает полосу захватывания не симметричной по отношению к расстройке  $\zeta$ .

Рассмотрим теперь задачу о действии внешней синусоидальной силы на нелинейную неавтоколебательную систему.

Пусть тело массы  $m$  совершает движение по горизонтальной направляющей под действием силы пружины и внешней синусоидальной силы  $A' \sin pt$ . Пренебрегая силой сухого трения, уравнение движения тела можно написать в виде

$$m\ddot{x} + \gamma'\dot{x} + \varphi(x) = A' \sin pt,$$

где  $\gamma'$  — коэффициент вязкого трения;  $\varphi(x)$  — функция, определяющая восстанавливающую силу пружины. Рассмотрим случай, когда  $\varphi(x)$  может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = cx - \beta'x^3 \quad (c > 0, \beta' > 0).$$

Уравнение движения в этом случае примет вид

$$m\ddot{x} + \gamma'\dot{x} + cx - \beta'x^3 = A' \sin pt.$$

Вводя новую безразмерную переменную  $q = x/l$ , где  $l$  — постоянная величина, имеющая размерность длины, и  $\tau = pt$ , получим

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \frac{k^2}{p^2}q = -\frac{\gamma'}{mp} \frac{dq}{d\tau} + \frac{\beta'l^2}{mp^2}q^3 + \frac{A'}{mp^2l} \sin \tau.$$

Предположим, что рассматриваемая система близка к линейной консервативной, т. е. предположим, что безразмерные величины

$$\frac{\gamma'}{mp} \ll 1, \quad \frac{\beta'l^2}{mp^2} \ll 1, \quad \frac{A'}{mp^2l} \ll 1.$$

Будем также предполагать, что система близка к резонансу, т. е.  $|k^2 - p^2|/p^2 \ll 1$ . Тогда, вводя безразмерный малый

параметр  $\mu = \frac{\gamma'}{m\rho}$  и расстройку  $\zeta$  при помощи соотношения

$$\frac{k^2}{p^2} = 1 + \mu\zeta,$$

получим окончательный вид уравнения движения

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu \left( -\zeta q - \frac{dq}{d\tau} + \beta_0 q^3 + A_0 \sin \tau \right),$$

где

$$\beta_0 = \frac{\beta' l^2}{\gamma' p}, \quad A_0 = \frac{A'}{\gamma' p l}.$$

Если искать решение этого уравнения в виде

$$q = a \cos \tau + b \sin \tau, \quad (5.43)$$

где  $a$  и  $b$  — медленно меняющиеся функции времени, то согласно выражениям (5.29) получим

$$\frac{da}{d\tau_1} = -A_0 - a + \zeta b - \frac{3}{4} \beta_0 b (a^2 + b^2),$$

$$\frac{db}{d\tau_1} = -b - \zeta a + \frac{3}{4} \beta_0 a (a^2 + b^2),$$

где  $\tau_1 = \frac{2}{\mu} \tau$ . Вводя  $x = a \sqrt{\frac{3}{4} \beta_0}$ ,  $y = b \sqrt{\frac{3}{4} \beta_0}$  и  $A = A_0 \sqrt{\frac{3}{4} \beta_0}$ , можем написать

$$\frac{dx}{d\tau_1} = -A - x + \zeta y - y(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{d\tau_1} = -y - \zeta x + x(x^2 + y^2).$$

Перейдем к полярным координатам. Так как

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta,$$

то

$$\frac{d\rho}{d\tau_1} = -A \cos \vartheta - \rho = P(\rho, \vartheta),$$

$$\rho \frac{d\vartheta}{d\tau_1} = A \sin \vartheta - \zeta \rho + \rho^3 = \rho Q(\rho, \vartheta). \quad (5.44)$$

Особые точки этой системы уравнений (состояния равновесия), согласно выражению (5.43), соответствуют периодическому движению с частотой внешней силы. Уравнения



для определения особых точек будут

$$A \cos \vartheta + \rho = 0,$$

$$A \sin \vartheta - \zeta \rho + \rho^3 = 0.$$

Исключая из этих уравнений  $\vartheta$ , получаем уравнение резонансной кривой

$$\rho^2 [1 + (\rho^2 - \zeta)^2] = A^2. \quad (5.45)$$

Определенные этим уравнением  $\rho^2$  соответствуют состояниям равновесия системы (5.44). Величины, определяющие характер состояния равновесия, определяются формулами (§ 4 гл. 1)

$$p = -(P'_\rho + Q'_\vartheta) = 2 > 0,$$

$$q = P'_\rho Q'_\vartheta - P'_\vartheta Q'_\rho = 1 + 3\rho^4 - 4\rho^2 \zeta + \zeta^2.$$

Так как  $p > 0$ , то состояния равновесия будут устойчивы при  $q > 0$  и неустойчивы при  $q < 0$ .

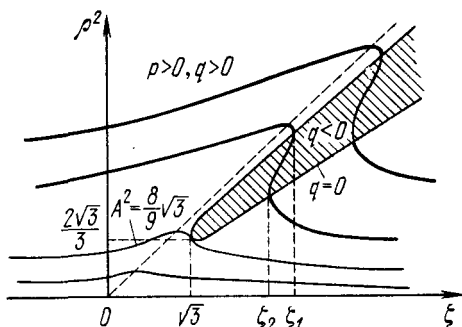


Рис. 5.14

Перейдем к построению на плоскости  $\zeta\rho^2$  резонансных кривых при фиксированных  $A$ . В соответствии с (5.45) получим

$$\frac{d\rho^2}{d\zeta} = \frac{2\rho^2(\rho^2 - \zeta)}{1 + 3\rho^4 - 4\rho^2\zeta + \zeta^2}.$$

Это значит, что резонансные кривые пересекают прямую  $\rho^2 = \zeta$ , имея горизонтальную касательную. Кривую же  $q = 0$  резонансные кривые пересекают, имея вертикальную касательную. На рис. 5.14 показаны расположения кривой  $q = 0$  и резонансных кривых для различных  $A$ . Из рас-

смотрения этого рисунка следует, что при  $A^2 < \frac{8}{9} \sqrt{3}$  и любых значениях расстройки резонансная кривая соответствует устойчивым состояниям равновесия и, следовательно, исходная динамическая система совершает движение с частотой внешней силы при любом  $\zeta$ . При  $A^2 > \frac{8}{9} \sqrt{3}$  часть резонансной кривой расположена внутри области  $q < 0$ , т. е. соответствует неустойчивому состоянию равновесия системы (5.44); части резонансной кривой, расположенные вне области  $q < 0$ , соответствуют устойчивому состоянию равновесия.

Таким образом, при изменении  $\zeta$  от отрицательных значений до  $\zeta = \zeta_1$  система совершает периодическое движение с частотой внешней силы и амплитудой, соответствующей верхней части резонансной кривой. При  $\zeta = \zeta_1$  происходит скачкообразное изменение амплитуды, и система при дальнейшем увеличении  $\zeta$  совершает движение с амплитудой, соответствующей нижней части резонансной кривой. При обратном изменении  $\zeta$  скачкообразное изменение происходит уже при  $\zeta = \zeta_2$ , и при дальнейшем уменьшении  $\zeta$  движение происходит с амплитудой, соответствующей верхней части резонансной кривой.

Итак, при  $\zeta < \zeta_2$  и  $\zeta > \zeta_1$  в исходной динамической системе при любых начальных условиях устанавливаются периодические движения с частотой внешней силы и соответственно с амплитудой, соответствующей верхней части и нижней части резонансной кривой. При  $\zeta_2 < \zeta < \zeta_1$  в системе в зависимости от начальных условий устанавливаются периодические движения с амплитудами, соответствующими нижней или верхней части резонансной кривой.

### § 3. Автономные динамические системы с двумя степенями свободы [13]

Рассмотрим сначала автономную динамическую систему, не содержащую гироскопических сил. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = \mu f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2),$$

$$a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = \mu g_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2),$$

где  $a_{ik}$  и  $c_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) — постоянные коэффициенты,  $\mu$  — малый параметр,  $f_1$  и  $g_1$  — нелинейные функции.

Введя обозначения

$$A_1 = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad B_1 = \frac{c_{12}}{a_{11}}, \quad n_1^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad A_2 = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

$$B_2 = \frac{c_{12}}{a_{22}}, \quad n_2^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}, \quad f = \frac{f_1}{a_{11}}, \quad g = \frac{g_1}{a_{22}},$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\ddot{q}_1 + A_1 \ddot{q}_2 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 = \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \quad (5.46)$$

$$\ddot{q}_2 + A_2 \ddot{q}_1 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 = \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2).$$

При  $\mu = 0$  система уравнений (5.46) имеет решение

$$q_1 = a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2), \quad (5.47)$$

$$q_2 = \alpha_1 a \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \beta_2),$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  — постоянные интегрирования,  $k_1$  и  $k_2$  ( $k_2 > k_1$ ) — главные частоты, являющиеся корнями уравнения

$$\sigma k^4 - (n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1) k^2 + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2 = 0 \quad (5.48)$$

( $\sigma = 1 - A_1 A_2$ ), а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — коэффициенты распределения, определяемые по формулам

$$\alpha_1 = \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{n_2^2 - k_1^2} = \frac{n_1^2 - k_1^2}{A_1 k_1^2 - B_1}, \quad (5.49)$$

$$\alpha_2 = \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2} = \frac{n_1^2 - k_2^2}{A_1 k_2^2 - B_1}.$$

Будем предполагать, что корни уравнения (5.48) не кратные и ни один из них не равен нулю. Решение системы уравнений (5.46) при  $\mu \neq 0$  будем искать в форме (5.47), считая, что  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — медленно меняющиеся функции времени. Дополнительные условия, которые мы наложим на функции  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  для их определенности, заключаются в предположении, что первые производные от  $q_1$  и  $q_2$  по времени имеют такой же вид, как и при  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  постоянных. Принимая это во внимание после дифференцирования  $q_1$  и  $q_2$ , получим

$$\dot{q}_1 = a k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b k_2 \cos(k_2 t + \beta_2), \quad (5.50)$$

$$\dot{q}_2 = \alpha_1 a k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b k_2 \cos(k_2 t + \beta_2)$$

и

$$\dot{a} \sin(k_1 t + \beta_1) + \dot{b} \sin(k_2 t + \beta_2) + a\dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b\dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) = 0, \quad (5.51)$$

$$\alpha_1 \dot{a} \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 \dot{b} \sin(k_2 t + \beta_2) + \alpha_1 a \dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) = 0. \quad (5.52)$$

Если теперь продифференцировать по времени  $\dot{q}_1$  и  $\dot{q}_2$  и подставить полученные выражения для  $\ddot{q}_1$  и  $\ddot{q}_2$  в уравнения (5.46), приняв при этом во внимание соотношения (5.49), то будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{a}k_1(1 + \alpha_1 A_1) \cos(k_1 t + \beta_1) + \dot{b}k_2(1 + \alpha_2 A_1) \cos(k_2 t + \beta_2) - \\ - k_1 a \dot{\beta}_1(1 + \alpha_1 A_1) \sin(k_1 t + \beta_1) - \\ - k_2 b \dot{\beta}_2(1 + \alpha_2 A_1) \sin(k_2 t + \beta_2) = \mu f^*, \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}k_1(\alpha_1 + A_2) \cos(k_1 t + \beta_1) + \\ + \dot{b}k_2(\alpha_2 + A_2) \cos(k_2 t + \beta_2) - k_1 a \dot{\beta}_1(\alpha_1 + A_2) \sin(k_1 t + \beta_1) - \\ - k_2 b \dot{\beta}_2(\alpha_2 + A_2) \sin(k_2 t + \beta_2) = \mu g^*, \end{aligned} \quad (5.54)$$

где

$$\begin{aligned} f^* = f [a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2), \\ \alpha_1 a \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ \alpha_1 k_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 k_2 b \cos(k_2 t + \beta_2)], \\ g^* = g [a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2), \\ \alpha_1 a \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ \alpha_1 k_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 k_2 b \cos(k_2 t + \beta_2)]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Уравнения (5.51)—(5.54) являются системой уравнений для определения  $\dot{a}$ ,  $\dot{b}$ ,  $a\dot{\beta}_1$  и  $b\dot{\beta}_2$ . Решая эти уравнения относительно  $\dot{a}$ , найдем

$$\frac{da}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \xi & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ \alpha_1 \sin \xi & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ k_1 D_1 \cos \xi & k_2 D_2 \cos \eta & -k_1 D_1 \sin \xi & -k_2 D_2 \sin \eta \\ k_1 D_3 \cos \xi & k_2 D_4 \cos \eta & -k_1 D_3 \sin \xi & -k_2 D_4 \sin \eta \end{vmatrix} = \\ = k_1 k_2 \sigma (\alpha_2 - \alpha_1)^2,$$

$$D_1 = 1 + \alpha_1 A_1, \quad D_2 = 1 + \alpha_2 A_1, \quad D_3 = \alpha_1 + A_2, \\ D_4 = \alpha_2 + A_2, \quad \xi = k_1 t + \beta_1, \quad \eta = k_2 t + \beta_2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ 0 & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ \mu f^* & k_2 D_2 \cos \eta & -k_1 D_1 \sin \xi & -k_2 D_2 \sin \eta \\ \mu g^* & k_2 D_4 \cos \eta & -k_1 D_3 \sin \xi & -k_2 D_4 \sin \eta \end{vmatrix} = \\ = \mu (\alpha_2 - \alpha_1) k_2 [(\alpha_2 + A_2) f^* - (1 + \alpha_2 A_1) g^*] \cos \xi.$$

Следовательно,

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{k_1 \sigma (\alpha_2 - \alpha_1)} [(\alpha_2 + A_2) f^* - (1 + \alpha_2 A_1) g^*] \cos \xi. \quad (5.56)$$

Используя выражения (5.49), получаем

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{(k_2^2 - k_1^2)(A_2 n_2^2 - B_2)}{(n_2^2 - k_1^2)(n_2^2 - k_2^2)},$$

$$\alpha_2 + A_2 = \frac{A_2 n_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2}, \quad 1 + \alpha_2 A_1 = \frac{n_2^2 - A_1 B_1 - \sigma k_2^2}{n_2^2 - k_2^2}.$$

Из выражения (5.48) следует, что

$$\sigma (k_1^2 + k_2^2) = n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1;$$

тогда

$$1 + \alpha_2 A_1 = - \frac{n_1^2 - k_1^2}{n_2^2 - k_2^2} \left( 1 + \frac{A_2}{\alpha_1} \right) = - \frac{n_1^2 - k_1^2 A_2 k_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2 A_2 k_1^2 - B_2}.$$

Подставляя полученные выражения для  $\alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\alpha_2 + A_2$ ,  $1 + \alpha_2 A_1$  в выражение (5.56) и учитывая (5.49), имеем

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{k_1 \sigma (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{\alpha_1} f^* + (A_1 k_1^2 - B_1) g^* \right] \cos \xi.$$

Аналогично получим

$$\frac{db}{dt} = - \frac{\mu}{k_2 \sigma (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} f^* + (A_1 k_2^2 - B_1) g^* \right] \cos \eta,$$

$$a \frac{d\beta_1}{dt} = - \frac{\mu}{k_1 \sigma (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{\alpha_1} f^* + (A_1 k_1^2 - B_1) g^* \right] \sin \xi,$$

$$b \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\mu}{k_2 \sigma (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} f^* + (A_1 k_2^2 - B_1) g^* \right] \sin \eta.$$

Полученные уравнения представляют собой преобразованную к другим переменным систему уравнений (5.46). Предположим, что изменение  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  происходит значительно медленнее по сравнению с колебаниями, происходящими в исходной динамической системе. Усредняя правые части полученных уравнений за периоды  $2\pi/k_1$  и  $2\pi/k_2$ , получим для определения  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  следующие укороченные уравнения \*):

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{2k_1\sigma(k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{\alpha_1} F_1 + (A_1 k_1^2 - B_1) G_1 \right], \quad (5.57)$$

$$\frac{db}{dt} = - \frac{\mu}{2k_2\sigma(k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} F_2 + (A_1 k_2^2 - B_1) G_2 \right],$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = - \frac{\mu}{2ak_1\sigma(k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{\alpha_1} F_3 + (A_1 k_1^2 - B_1) G_3 \right], \quad (5.58)$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\mu}{2\sigma k_2 b(k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} F_4 + (A_1 k_2^2 - B_1) G_4 \right],$$

где

$$F_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi \, d\xi \, d\eta, \quad G_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi \, d\xi \, d\eta,$$

$$F_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta \, d\xi \, d\eta, \quad G_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta \, d\xi \, d\eta, \quad (5.59)$$

$$F_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi \, d\xi \, d\eta, \quad G_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi \, d\xi \, d\eta,$$

$$F_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta \, d\xi \, d\eta, \quad G_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta \, d\xi \, d\eta.$$

Здесь  $\xi = k_1 t + \beta_1$ ,  $\eta = k_2 t + \beta_2$ , а  $f^*$  и  $g^*$  определяются выражениями (5.55).

Правые части уравнений (5.57) и (5.58) не зависят от  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Поэтому уравнения (5.57) служат для исследования  $a$  и  $b$  (амплитуд). Значения  $a$  и  $b$ , соответствующие стационар-

\*) Прием усреднения по нескольким периодам, по-видимому, впервые применен в работах [8, 9, 7].

нарным движениям, находятся из уравнений, получаемых после приравнивания нулю правых частей уравнений (5.57). Находя из этих уравнений  $a$  и  $b$  и подставляя их в уравнения (5.58), получаем поправки на частоты в соответствующих стационарных режимах.

В качестве примера рассмотрим задачу об автоколебаниях связанных маятников.

Рассмотрим схему двух связанных маятников (рис. 5.15). Пусть  $\varphi$  — угол отклонения первого маятника,  $\psi$  — угол отклонения второго маятника,  $m_1$  и  $m_2$  — массы соответственно первого и второго маятников,

$c$  — жесткость пружины,  $\gamma'$  и  $\gamma''$  — коэффициенты вязкого трения,  $l$  — длина маятников,  $a$  — расстояние до точек крепления пружины.

Уравнения движения такой системы при малых  $\varphi$  и  $\psi$  будут [14]

$$m_1 l^2 \ddot{\varphi} + m_1 g l \dot{\varphi} + c a^2 \varphi - c a^2 \psi = -\gamma' l \dot{\varphi} + \bar{M}(\varphi),$$

$$m_2 l^2 \ddot{\psi} + m_2 g l \dot{\psi} + c a^2 \psi - c a^2 \varphi = -\gamma'' l \dot{\psi},$$

где нелинейная функция

$$\bar{M}(\varphi) = E' \operatorname{sign} \varphi \quad (E' > 0).$$

Вводя обозначения

$$q_1 = l\varphi, \quad q_2 = l\psi, \quad n_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{c}{m_1} \frac{a^2}{l^2}, \quad n_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{c}{m_2} \frac{a^2}{l^2},$$

$$B_1 = -\frac{c}{m_1} \frac{a^2}{l^2}, \quad B_2 = -\frac{c}{m_2} \frac{a^2}{l^2}, \quad E = \frac{E'}{m_1 l},$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\ddot{q}_1 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 = -\frac{\gamma'}{m_1 l} \dot{q}_1 + E \operatorname{sign} \dot{q}_1,$$

$$\ddot{q}_2 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 = -\frac{\gamma''}{m_2 l} \dot{q}_2.$$

Предположим теперь, что затухание обеих парциальных систем мало, т. е. пусть безразмерные величины

$$\frac{\gamma'}{m_1 l n_1} \ll 1, \quad \frac{\gamma''}{m_2 l n_2} \ll 1.$$

Предположим также, что возбуждающий момент «мал», т. е.

$$\frac{E}{n_1^2} \ll 1.$$

Тогда уравнения движения системы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 &= \mu n_1 (-\dot{\zeta}_1 + E_0 \operatorname{sign} \dot{\zeta}_1), \\ \ddot{q}_2 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 &= \mu n_1 (-\lambda \dot{\zeta}_2), \end{aligned} \quad (5.60)$$

где

$$\mu = \frac{\gamma'}{m_1 l n_1}, \quad E_0 = \frac{E'}{\gamma'}, \quad \lambda = \frac{m_1 \gamma''}{m_2 \gamma'}.$$

Будем считать  $\mu$  тем малым параметром, который характеризует близость системы (5.60) к линейной консервативной. Система (5.60) имеет вид (5.46), но  $A_1 = A_2 = 0$ . Следовательно, уравнение частот (5.48) примет вид

$$k^4 - (n_1^2 + n_2^2)k^2 + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2 = 0,$$

а коэффициенты распределения определяются по формулам

$$\alpha_1 = -\frac{B_2}{n_2^2 - k_1^2} = -\frac{n_1^2 - k_1^2}{B_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{B_2}{n_2^2 - k_2^2} = -\frac{n_1^2 - k_2^2}{B_1}.$$

Уравнения (5.57) и (5.58) при этом будут иметь вид

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{1}{k_1 n_1^3} \left[ \frac{B_2}{\alpha_1} F_1 + B_1 G_1 \right], \quad (5.61)$$

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{1}{k_2 n_1^3} \left[ \frac{B_2}{\alpha_2} F_2 + B_1 G_2 \right];$$

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{1}{k_1 a n_1^3} \left[ \frac{B_2}{\alpha_1} F_3 + B_1 G_3 \right], \quad (5.62)$$

$$\frac{d\beta_2}{d\tau} = -\frac{1}{k_2 b n_1^3} \left[ \frac{B_2}{\alpha_2} F_4 + B_1 G_4 \right],$$

где  $\tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(k_2^2 - k_1^2)}$ , а  $F_1, F_2, F_3, F_4, G_1, G_2, G_3, G_4$  определяются по формулам (5.59).

Так как в рассматриваемом случае

$$f(q_1, \dot{\zeta}_1, q_2, \dot{q}_2) = n_1 (-\dot{q}_1 + E_0 \operatorname{sign} \dot{\zeta}_1),$$

$$g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{\zeta}_2) = -n_1 \lambda \dot{\zeta}_2,$$



то

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{n_1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [-ak_1 \cos \xi - bk_2 \cos \eta + \\
 &\quad + E_0 \operatorname{sign}(ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta)] \cos \xi \, d\xi \, d\eta = \\
 &= -n_1 k_1 a + \frac{n_1 E_0}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sign}(ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta) \cos \xi \, d\xi \, d\eta.
 \end{aligned}$$

На рис. 5.16 и 5.17 построены на плоскости  $\xi\eta$  области, где  $\dot{q}_1 = ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta$  имеет положительное и отри-

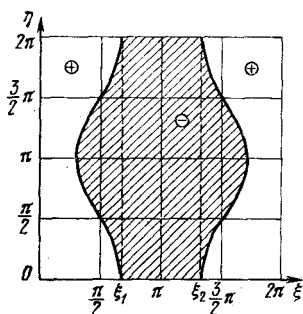


Рис. 5.16

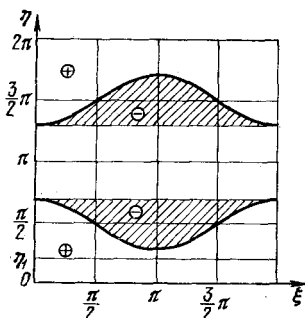


Рис. 5.17

цательное значения соответственно для  $ak_1 > bk_2$  и  $ak_1 < bk_2$ . Для случая  $ak_1 > bk_2$  имеем

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \\
 &= -n_1 k_1 a + \frac{n_1 E_0}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\eta \left[ \int_0^{\xi_1} \cos \xi \, d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \cos \xi \, d\xi + \int_{\xi_2}^{2\pi} \cos \xi \, d\xi \right] = \\
 &= -n_1 k_1 a + \frac{4E_0 n_1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta} \, d\eta, \quad (5.63)
 \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
 \sin \xi_1 &= \sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta}, \\
 \sin \xi_2 &= -\sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta}.
 \end{aligned}$$

Если  $ak_1 < bk_2$ , то

$$F_1 = -n_1 k_1 a + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta} \, d\eta, \quad (5.64)$$

где  $\eta_1 = \arccos \frac{ak_1}{bk_2}$ . Преобразуем интеграл

$$\Phi = \int_{\eta_1}^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta} d\eta.$$

Введем замену  $\frac{bk_2}{ak_1} \cos \eta = \cos \psi$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{ak_1}{bk_2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} = \\ &= \frac{ak_1}{bk_2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} + \frac{bk_2}{ak_1} \int_0^{\pi/2} \frac{-\left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} = \\ &= \frac{ak_1}{bk_2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} + \\ &+ \frac{bk_2}{ak_1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi} d\psi - \\ &- \frac{bk_2}{ak_1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} = \left[ \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right) - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right) \right] \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} + \frac{bk_2}{ak_1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi} d\psi. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi} d\psi &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \sin^2 \psi} d\psi, \\ \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \sin^2 \psi}}, \end{aligned}$$

то выражения (5.63) и (5.64) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} F_1 &= -n_1 k_1 a + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} E \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right), \\ F_1 &= -n_1 k_1 a + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} \left\{ \left[ \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right) - \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) \right] K \left( \frac{ak_1}{ak_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{bk_2}{ak_1} E \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

— полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго ряда.

Для  $G_1$  имеем

$$G_1 = -\frac{n_1 \lambda}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha_1 k_1 a \cos \xi + \alpha_2 k_2 b \cos \eta) \cos \xi d\xi d\eta = -n_1 \lambda \alpha_1 a k_1.$$

Аналогично вычисляются  $F_2, G_2, F_3, F_4, G_3, G_4$ . Для  $ak_1 > bk_2$

$$F_2 = -n_1 k_2 b + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} \left\{ \left[ \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) - \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right) \right] K \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) + \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right) E \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) \right\}.$$

Для  $ak_1 < bk_2$

$$F_2 = -n_1 b k_2 + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} E \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right), \quad G_2 = -n_1 \lambda \alpha_2 b k_2.$$

Вычисления показывают, что  $F_3 = F_4 = G_3 = G_4 = 0$ . Подставляя вычисленные значения интегралов (5.59) в уравнения (5.61) и (5.62), получим \*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= A \left[ E \left( \frac{v}{u} \right) - \alpha u \right] = P_1(u, v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= B \frac{v}{u} \left[ \left( 1 - \frac{u^2}{v^2} \right) K \left( \frac{v}{u} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2}{v^2} E \left( \frac{v}{u} \right) - \beta u \right] = Q_1(u, v), \end{aligned} \right\}, u > v,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= A \frac{u}{v} \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{u^2} \right) K \left( \frac{u}{v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v^2}{u^2} E \left( \frac{u}{v} \right) - \alpha v \right] = P_2(u, v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= B \left[ E \left( \frac{u}{v} \right) - \beta v \right] = Q_2(u, v), \\ \beta_1 &= \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const}, \end{aligned} \right\}, u < v, \quad (5.65)$$

\*) Достаточно изучить поведение системы при  $a > 0, b > 0$ , так как поведение в остальных трех квадрантах получается при помощи зеркального отображения.

где

$$u = \frac{ak_1\pi^2}{8E_0}, \quad v = \frac{bk_2\pi^2}{8E_0}, \quad A = -\frac{B_2}{n_1^2\alpha_1} > 0, \\ B = \frac{B_2}{n_1^2\alpha_2} > 0, \quad \alpha = 1 + \lambda \frac{B_1}{B_2} \alpha_1^2, \quad \beta = 1 + \lambda \frac{B_1}{B_2} \alpha_2^2. \quad (5.66)$$

Система уравнений (5.65) на плоскости  $uv$  создает непрерывное поле направлений, так как правые части этих уравнений являются непрерывными функциями  $u$ ,  $v$  и направления интегральных кривых по прямой  $u = v$ , определяемые из первой пары уравнений (5.65), совпадают с направлениями, которые получаются из второй пары. Прямые  $u = 0$  ( $v > 0$ ),  $v = 0$  ( $u > 0$ ) являются интегральными кривыми.

Рассмотрим часть плоскости  $uv$ , удовлетворяющую условию  $u > v$ . Обозначая  $v/u = \xi$  ( $0 < \xi < 1$ ), имеем для определения координат состояния равновесия уравнения:

$$E(\xi) - \alpha u = 0, \quad (5.67)$$

$$\xi \left[ \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) K(\xi) + \frac{1}{\xi^2} E(\xi) - \beta \frac{E(\xi)}{\alpha} \right] = 0. \quad (5.68)$$

Второе уравнение распадается на два:

$$\xi = 0, \quad (5.69)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{E(\xi) \xi^2}{E(\xi) - (1 - \xi^2) K(\xi)}. \quad (5.70)$$

Уравнения (5.67) и (5.69) дают состояние равновесия на оси  $u$  с координатами  $v = 0$ ,  $u = E(0)/\alpha$ . Для определения корней уравнения (5.70) построим на плоскости  $y\xi^2$  кривую \*

$$y = \frac{E(\xi) \xi^2}{E(\xi) - (1 - \xi^2) K(\xi)}.$$

Из рассмотрения рис. 5.18 следует, что при  $y = \alpha/\beta = 1$  уравнение (5.70) имеет один корень  $\xi = 1$ , при  $y = \alpha/\beta = 2$  уравнение имеет корень  $\xi = 0$ . При  $1 < \alpha/\beta <$

\*) При построении кривой использованы формулы

$$\frac{dK}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \frac{B(\xi)}{1 - \xi^2}, \quad \frac{dE}{d\xi^2} = -\frac{1}{2} D(\xi),$$

где

$$B(\xi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \psi}}, \quad D(\xi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \psi}}.$$

$< 2$  уравнение имеет один положительный корень  $\xi = \xi_1$ . Для остальных значений  $\alpha/\beta$  это уравнение не имеет интересующих нас корней. Зная корень  $\xi_1$ , определим координаты состояния равновесия по (5.67).

Совершенно аналогично проводится рассмотрение части плоскости, где  $v > u$ . Обозначая  $\eta = u/v$ , имеем для определения координат состояния равновесия уравнения

$$E(\eta) - \beta\nu = 0, \quad (5.71)$$

$$\eta \left[ \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) K(\eta) + \frac{1}{\eta^2} E(\eta) - \frac{\alpha E(\eta)}{\beta} \right] = 0. \quad (5.72)$$

Второе уравнение распадается на два:

$$\eta = 0, \quad (5.73)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{E(\eta)\eta^2}{E(\eta) - (1 - \eta^2)K(\eta)}. \quad (5.74)$$

Уравнения (5.71) и (5.73) дают состояние равновесия на оси  $v$  с координатами  $u = 0$ ,  $v = E(0)/\beta$ . Уравнение (5.74), для исследования которого воспользуемся

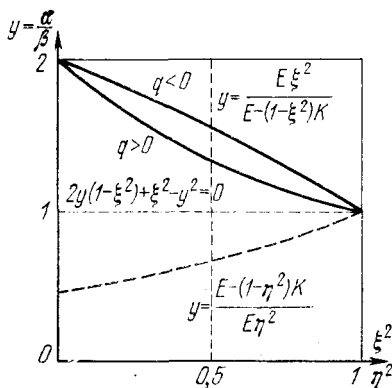


Рис. 5.18

рис. 5.18, имеет один и только один положительный корень  $\eta = \eta_1$  для  $1 \leq \beta/\alpha \leq 2$ , не имея для других значений  $\beta/\alpha$  интересующих нас корней; при  $\beta/\alpha = 1$   $\eta_1 = 1$ , при  $\beta/\alpha = 2$   $\eta_1 = 0$ . Кривая

$$y = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{E(\eta) - (1 - \eta^2)K(\eta)}{\eta^2 E(\eta)}$$

на рис. 5.18 нанесена штрихами. Зная корень  $\eta_1$ , определим координаты состояния равновесия по

уравнению (5.71). Таким образом, в рассматриваемом квадранте, включая оси (точку  $u = 0$ ,  $v = 0$  мы исключаем из рассмотрения), могут быть:

1) два состояния равновесия, расположенные на осях, когда  $0 < \alpha/\beta < 1/2$  и  $2 < \alpha/\beta < \infty$ ;

2) три состояния равновесия — два на осях и одно вне осей, когда  $1/2 < \alpha/\beta < 2$ . Координаты третьего состояния равновесия  $u_3$ ,  $v_3$  удовлетворяют условию  $u_3 > v_3$  для

$1 < \alpha/\beta < 2$  и условием  $u_3 < v_3$  для  $1/2 < \alpha/\beta < 1$ . Для  $\alpha/\beta = 1$   $u_3 = v_3$ .

Перейдем к исследованию характера состояний равновесия. Как было показано в § 4 гл. 1, характер состояний равновесия для уравнений

$$\frac{du}{d\tau} = P(u, v), \quad \frac{dv}{d\tau} = Q(u, v)$$

в тех простейших случаях, которые нас интересуют, определяется знаками величин

$$p = - [P'_u(u_0, v_0) + Q'_v(u_0, v_0)],$$

$$q = P'_u(u_0, v_0) Q'_v(u_0, v_0) - P'_v(u_0, v_0) Q'_u(u_0, v_0),$$

где  $u_0, v_0$  — координаты состояния равновесия. Для состояния равновесия, расположенного на оси  $u$  ( $u_1 = = E(0)/\alpha = \pi/(2\alpha), v_1 = 0$ ),

$$p = A\alpha - B \left( \frac{\pi}{4u_1} - \beta \right), \quad q = -AB\alpha \left( \frac{\pi}{4u_1} - \beta \right).$$

Для  $4u_1/\pi < 1/\beta$  (т. е. для  $\alpha/\beta > 2$ )  $q < 0$  и, следовательно, рассматриваемое состояние равновесия является седлом. Для  $4u_1/\pi > 1/\beta$  (т. е. для  $\alpha/\beta < 2$ )  $q > 0$ , а также и  $p > 0$ , состояние равновесия будет устойчивым узлом, так как фокуса быть не может, ибо ось  $u$  является интегральной кривой и проходит через это состояние равновесия. Рассуждая аналогичным образом, для состояния равновесия  $u_2 = 0, v_2 = E_0/\beta = \pi/2\beta$  найдем, что для  $4v_2/\pi < 1/\alpha$  (т. е.  $\alpha/\beta < 1/2$ ) это состояние равновесия — седло, а для  $\alpha/\beta > 1/2$  — устойчивый узел.

Рассмотрим характер равновесия, расположенного вне координатных осей. Для случая  $u_3 > v_3$  получаем

$$p = A \left( \frac{E-K}{u} + \alpha \right) + B \left[ \frac{u(E-K)}{v^3} + \beta \right],$$

$$q = AB \left[ \frac{(E-K)}{u} (\beta + \alpha) \frac{u^2}{v^3} + \alpha\beta \right].$$

Пользуясь равенствами (5.67) и (5.70), представим уравнение для  $q$  в виде

$$q = AB \left[ \frac{2y(1-\xi^2) + \xi^2 - y^2}{1-\xi^2} \right] \beta^2 \quad \left( y = \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

В этом выражении  $\xi$  удовлетворяют уравнению (5.70). На рис. 5.18 построена кривая  $q = 0$ , т. е.

$$2y(1-\xi^2) + \xi^2 - y^2 = 0,$$

которая на плоскости  $\xi^2 y$  отделяет область, где  $q > 0$ , от области, где  $q < 0$ . Из рассмотрения рисунка следует, что для  $1 < \alpha/\beta < 2$   $q < 0$ , т. е. состояние равновесия между осями  $u$  и  $v$  является седлом. Аналогично показывается, что состояние равновесия  $u_3, v_3$ , когда  $v_3 > u_3$ , также является седлом.

Таким образом, число и характер состояний равновесия однозначно определяются отношением  $\alpha/\beta$  (табл. 1).

Таблица 1

$\frac{\alpha}{\beta}$	Состояние равновесия на оси $u$	Состояние равновесия на оси $v$	Состояние равновесия вне осей
$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{2}$	Устойчивый узел	Седло	Нет
$\frac{1}{2} < \frac{\alpha}{\beta} < 2$	Устойчивый узел	Устойчивый узел	Седло
$2 < \frac{\alpha}{\beta} < \infty$	Седло	Устойчивый узел	Нет

Рассмотрим теперь точку  $u = 0, v = 0$ . В этой точке уравнения (5.65) теряют смысл, так как значения  $u$  и  $v$  не определены, а следовательно, не имеют смысла и правые части этих уравнений. Так как исходные уравнения движения динамической системы удовлетворяются решениями  $a = 0, b = 0$ , или, что то же,  $u = 0, v = 0$ , то целесообразно доопределить правые части системы (5.65) таким образом, чтобы точка  $u = 0, v = 0$  была состоянием равновесия. Однако следует иметь в виду, что в окрестности точки  $u = 0, v = 0$  становится сомнительной возможность использования уравнений (5.65) для приближенного анализа системы (5.60), так как для колебаний с достаточно малой амплитудой момент  $\bar{M}(\phi)$ , удовлетворяющий условию  $E/n_1^2 \ll 1$ , уже не может считаться малым. Можно считать, что в окрестности состояния равновесия  $u = 0, v = 0$  характер фазовых траекторий подобен характеру фазовых траекторий в окрестности неустойчивого узла.

Перейдем к рассмотрению поведения интегральных кривых системы (5.65) во всем квадранте. Во-первых, в рассматриваемом квадранте не может быть предельных циклов, так как внутри предельного цикла должно быть по крайней мере одно состояние равновесия и это состояние равновесия не может быть седлом или такой точкой, через которую проходят интегральные кривые, идущие в бесконечность. Во-вторых, при достаточно больших  $u$  и  $v$  для всех интересующих нас значений  $\alpha$  и  $\beta$   $du/dt < 0$ ,  $dv/dt < 0$ , т. е. движение по интегральным кривым для достаточно больших  $u$  и  $v$  направлено внутрь.

Рассмотрим теперь поведение сепаратрис.

1. Для  $0 < \alpha/\beta < 1/2$  сепаратрисы порождаются лишь состоянием равновесия, расположенным на оси  $v$ . Интересующий нас ус седла, выходя из этого состояния равновесия, не может идти в бесконечность и не может накручиваться на цикл, так как циклов не существует, следовательно, он стремится к устойчивому состоянию равновесия, расположенному на оси  $u$ . Весь квадрант в данном случае является областью «устойчивости в большом» для устойчивого состояния равновесия, расположенного на оси  $u$ . Качественная картина плоскости  $uv$  для рассматриваемого случая показана на рис. 5.19.

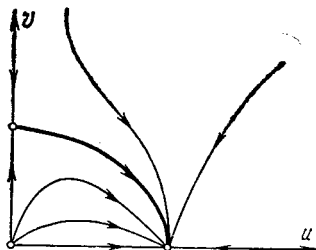


Рис. 5.19

2. Для случая  $1/2 < \alpha/\beta < 2$  сепаратрисы порождаются лишь состоянием равновесия, расположенным вне осей. Из неустойчивых усов один идет в устойчивое состояние равновесия на оси  $u$ , другой — в устойчивое состояние равновесия на оси  $v$ . Один устойчивый ус идет из бесконечности, другой — из начала координат. Квадрант разбивается на две области «устойчивости в большом», являющиеся областями притяжения для двух устойчивых состояний равновесия, расположенных на осях (рис. 5.20).

3. Для  $2 < \alpha/\beta < \infty$  сепаратриса седла, расположенного на оси  $u$ , идет в устойчивый узел, расположенный на оси  $v$ . Весь квадрант является областью «устойчивости в большом» для этого состояния равновесия (рис. 5.21).



Пользуясь проведенными исследованиями плоскости переменных  $uv$ , можно утверждать, что основными интересующими нас движениями являются периодические движения, близкие к нормальным колебаниям, имеющим частоты  $k_1$  и  $k_2$ . Эти движения соответствуют на плоскости

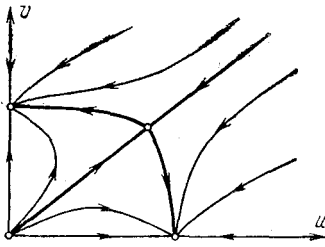


Рис. 5.20

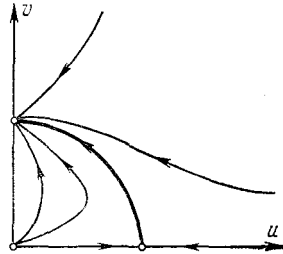


Рис. 5.21

$uv$  состояниям равновесия, расположенным на осях. Седло, расположенное вне осей, отвечает неустойчивому бигармоническому движению, которое представляет физический интерес только в связи с теми сепаратрисами, которые отделяют на фазовой плоскости области «устойчивости в большом», принадлежащие движениям, близким к гармоническим.

Для исследования наглядной картины явлений, которые могут происходить в рассматриваемой системе, будем менять массу  $m_2$  второго маятника, оставляя все другие параметры системы постоянными. В качестве параметра, характеризующего изменение массы  $m_2$ , возьмем отношение парциальных частот  $\zeta = n_2^2/n_1^2$ . При постепенном изменении  $\zeta$  в прямом и обратном направлениях мы получим наглядную картину явлений, происходящих в системе, если мы построим в зависимости от  $\zeta$  кривые амплитуд маятников и кривые частот и укажем на этих графиках части кривых, соответствующие устойчивым движениям. Амплитуды колебаний первого маятника  $z_1 = \frac{2}{\pi} u_1$  и  $z_2 = \frac{2}{\pi} v_2 \left( \frac{z_2}{z_1} = \frac{\alpha}{\beta} \right)$  являются функциями  $\zeta$  и выражаются формулами

$$z_1 = \frac{1}{1 + \lambda_0 (\zeta - a_0) \frac{1 - \zeta + \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\epsilon_0 (\zeta - a_0)}}{\zeta - 1 + \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\epsilon_0 (\zeta - a_0)}}},$$

$$z_2 = \frac{1}{1 + \lambda_0 (\zeta - a_0) \frac{1 - \zeta - \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\sigma_0 (\zeta - a_0)}}{\zeta - 1 - \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\sigma_0 (\zeta - a_0)}}},$$

где

$$\lambda_0 = \frac{m_1 n_1^2 \gamma''}{c \gamma'}, \quad \sigma_0 = \frac{c}{m_1 n_1^2}, \quad a_0 = \frac{g}{n_1^2 l}.$$

На рис. 5.22 показаны расположения кривых  $z_1$  и  $z_2$  на плоскости  $\zeta z$ . Стрелками указаны переоскоки с одной амплитуды на другую при прямом и обратном изменениях  $\zeta$ . На рис. 5.23 показаны амплитуды второго маятника  $\eta_1 = \alpha_1 z_1$  и  $\eta_2 = \alpha_2 z_2$ . На рисунках хорошо видно явление затягивания при прямом и обратном изменениях  $\zeta$ . На рис. 5.24 изображены кривые частот, определяемые уравнением

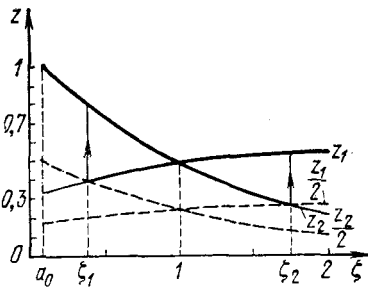


Рис. 5.22

$$\Omega^4 - (1 + \zeta) \Omega^2 + \zeta - \sigma_0 (\zeta - a_0) = 0,$$

где  $\Omega^2 = k^2/n_1^2$ .

Части кривых, соответствующие устойчивым режимам, представлены жирными линиями. При изменении  $\zeta$  от

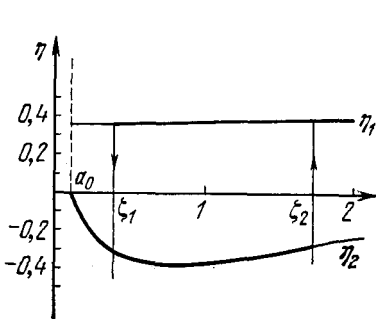


Рис. 5.23

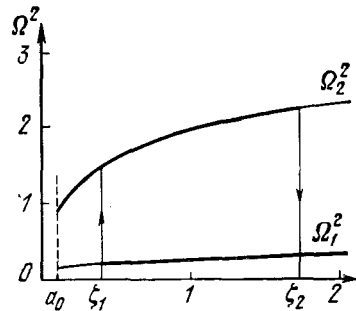


Рис. 5.24

нуля до  $\zeta = \zeta_2$  система совершает устойчивое гармоническое движение с частотой, близкой к нормальной частоте  $k_2$ . Далее система изменяет частоту скачком, и при дальнейшем увеличении  $\zeta$  в системе происходят колеба-

ния с частотой, близкой к нормальной частоте  $k_1$ . При обратном изменении  $\zeta$  скачок с частоты  $k_1$  к частоте  $k_2$  произойдет уже при  $\zeta = \zeta_1$ . Это явление носит название затягивания по частоте. При  $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$  в системе в зависимости от начальных условий могут установиться устойчивые колебания и с частотой, близкой к  $k_1$  или  $k_2$ . Кривые на рис. 5.22, 5.23 и 5.24 построены при  $a_0 = 0,16$ ;  $\sigma_0 = 0,8$ ;  $\lambda_0 = 2$ . При других значениях этих величин получаются аналогичные кривые.

#### § 4. Автономные системы с гироскопическими силами [9]

В этом параграфе рассматриваются квазилинейные динамические системы с двумя степенями свободы при наличии гироскопических сил. Уравнения движения такой системы в общем случае имеют вид

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}q_2 \pm c_{11}q_1 + d_{12}\dot{\zeta}_2 = \mu f_1(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2),$$

$$a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 \pm c_{22}q_2 + d_{21}\dot{\zeta}_1 = \mu g_1(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2),$$

где  $d_{12} = -d_{21}$ .

Если координаты  $q_1$  и  $q_2$  будут нормальными координатами, то уравнения движения запишутся в более простой форме

$$a_{11}\ddot{q}_1 - d_{21}\dot{\zeta}_2 \pm c_{11}q_1 = \mu f_1(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2),$$

$$a_{22}\ddot{q}_2 + d_{21}\dot{\zeta}_1 \pm c_{22}q_2 = \mu g_1(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2).$$

Поделив первое уравнение на  $a_{11}$ , а второе на  $a_{22}$ , получим

$$\ddot{q}_1 - \kappa_1\dot{\zeta}_2 + (\pm n_1^2) q_1 = \mu f(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2), \quad (5.75)$$

$$\ddot{q}_2 + \kappa_2\dot{\zeta}_1 + (\pm n_2^2) q_2 = \mu g(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2),$$

где

$$\kappa_1 = \frac{d_{21}}{a_{11}}, \quad \kappa_2 = \frac{d_{21}}{a_{22}}, \quad n_1^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}},$$

$$n_2^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}, \quad f = \frac{f_1}{a_{11}}, \quad g = \frac{g_1}{a_{22}}.$$

При  $\mu = 0$  система (5.75) имеет решение

$$q_1 = a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2), \quad (5.76)$$

$$q_2 = \alpha_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \cos(k_2 t + \beta_2),$$

где частоты  $k_1$  и  $k_2$  являются корнями уравнения

$$k^4 + [(\mp n_1^2) + (\mp n_2^2) - \kappa_1 \kappa_2] k^2 + n_1^2 n_2^2 = 0. \quad (5.77)$$

Коэффициенты распределения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются формулами

$$\alpha_1 = \frac{(\mp n_1^2) + k_1^2}{\kappa_1 k_1} = \frac{\kappa_2 k_1}{(\mp n_2^2) + k_1^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{(\mp n_1^2) + k_2^2}{\kappa_1 k_2} = \frac{\kappa_2 k_2}{(\mp n_2^2) + k_2^2}.$$
(5.78)

Решение системы (5.75) при  $\mu \neq 0$  будем искать в виде (5.76), считая  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  медленно меняющимися функциями времени. Пропуская выкладки, аналогичные проделанным в предыдущем параграфе, получим для определения  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  следующие приближенные уравнения\*):

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{n_1^3} \left( \kappa_1 G_1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_1 \right),$$

$$\frac{db}{d\tau} = -\frac{1}{n_1^3} \left( \kappa_1 G_2 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_2 \right),$$

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{1}{an_1^3} \left( \kappa_1 G_3 + \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_3 \right),$$

$$\frac{d\beta_2}{d\tau} = -\frac{1}{bn_1^3} \left( \kappa_1 G_4 + \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_4 \right),$$
(5.79)

где  $\tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(k_2^2 - k_1^2)}$  ( $k_2^2 > k_1^2$ ),

$$F_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi d\xi d\eta, \quad G_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi d\xi d\eta,$$

$$F_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta d\xi d\eta, \quad G_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta d\xi d\eta,$$
(5.80)

$$F_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi d\xi d\eta, \quad G_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi d\xi d\eta,$$

$$F_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta d\xi d\eta, \quad G_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta d\xi d\eta,$$

\* ) При выводе уравнений (5.79) использованы соотношения

$$\alpha_2 k_2 - \alpha_1 k_1 = \frac{k_2^2 - k_1^2}{\kappa_1} \quad \text{и} \quad \alpha_2 k_1 - \alpha_1 k_2 = \frac{(k_1^2 - k_2^2) \alpha_1 \alpha_2}{\kappa_2}.$$

$$\begin{aligned}
 f^* &= f(a \sin \xi + b \sin \eta, ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta, \\
 &\quad \alpha_1 a \cos \xi + \alpha_2 b \cos \eta, -\alpha_1 ak_1 \sin \xi - \alpha_2 bk_2 \sin \eta), \\
 g^* &= g(a \sin \xi + b \sin \eta, ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta, \\
 &\quad \alpha_1 a \cos \xi + \alpha_2 b \cos \eta, -\alpha_1 ak_1 \sin \xi - \alpha_2 bk_2 \sin \eta), \\
 \xi &= k_1 t + \beta_1, \quad \eta = k_2 t + \beta_2.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим колебания плоского гироскопического маятника, изображенного на рис. 5.25, предполагая, что на кожух гироскопа действует специальный момент, создаваемый с помощью асинхронного мотора [16].

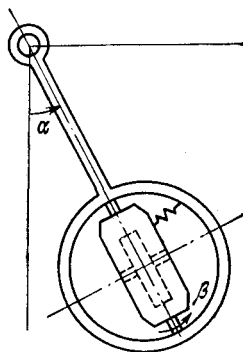


Рис. 5.25

Пусть  $\alpha$  — угол отклонения маятника от вертикального положения,  $\beta$  — угол поворота кожуха,  $\omega$  — собственная угловая скорость гироскопа. Будем рассматривать малые колебания системы. Тогда кинетическая энергия может быть представлена в виде \*)

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 - I\omega\beta\dot{\alpha},$$

где величины

$$\begin{aligned}
 I_0 &= I_M + \frac{Q + Q_1}{g} l^2 + A + A_1, \\
 I_1 &= A + A_1,
 \end{aligned}$$

входящие в формулу, представляют собой:  $I_M$  — момент инерции маятника относительно оси вращения,  $A$  — экваториальный момент инерции гироскопа,  $I$  — полярный момент инерции гироскопа,  $A_1$  — экваториальный момент инерции кожуха,  $Q$  — вес кожуха гироскопа,  $Q_1$  — вес гироскопа,  $l$  — расстояние от оси вращения до центра масс гироскопа и кожуха. Выражения для обобщенных сил при тех же предположениях имеют вид

$$\begin{aligned}
 Q_\alpha &= -Pl_1\alpha - \gamma'\dot{\alpha}, \\
 Q_\beta &= -c\beta + M_\beta(\dot{\beta}) - \gamma''\dot{\beta},
 \end{aligned}$$

где  $P$  — вес всей системы,  $l_1$  — расстояние от оси вращения до центра масс всей системы,  $c$  — коэффициент, характеризующий жесткость пружины, которой соединены

\*) Постоянные члены в этом выражении отброшены.

кожух и маятник,  $\gamma'$  и  $\gamma''$  — коэффициенты вязкого трения. Уравнения движения системы будут

$$\begin{aligned} I_0 \ddot{\alpha} - I \omega \dot{\beta} &= -Pl_1 \alpha - \gamma' \dot{\alpha}, \\ I_1 \ddot{\beta} + I \omega \dot{\alpha} &= -c\beta + M_\beta (\dot{\beta}) - \gamma'' \dot{\beta}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\kappa_1 = \frac{I\omega}{I_0}, \quad \kappa_2 = \frac{I\omega}{I_1}, \quad n_1^2 = \frac{Pl_1}{I_0}, \quad n_2^2 = \frac{c}{I_1},$$

получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \kappa_1 \dot{\beta} + n_1^2 \alpha &= -\frac{\gamma'}{I_0} \dot{\alpha}, \\ \ddot{\beta} + \kappa_2 \dot{\alpha} + n_2^2 \beta &= -\frac{\gamma''}{I_1} \dot{\beta} + \frac{M_\beta(\dot{\beta})}{I_1}. \end{aligned}$$

Аппроксимируем момент  $M_\beta(\dot{\beta})$  кубической параболой [16]:

$$M_\beta(\dot{\beta}) = c_1 \dot{\beta} - c_2 \dot{\beta}^3 \quad (c_1 > 0, \quad c_2 > 0).$$

Предположим, что рассматриваемая система близка к линейной, т. е. момент  $M_\beta(\dot{\beta})$  мал и мало вязкое трение.

Будем считать, что безразмерные величины удовлетворяют условиям

$$\frac{c_1 - \gamma''}{I_1 n_1} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{I_0 n_1} \ll 1, \quad \frac{c_2}{I_1} n_1 \ll 1.$$

Тогда, введя  $\mu = \frac{c_1 - \gamma''}{I_1 n_1} > 0$ , перепишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \kappa_1 \dot{\beta} + n_1^2 \alpha &= \mu n_1 (-\lambda_1 \dot{\alpha}), \\ \ddot{\beta} + \kappa_2 \dot{\alpha} + n_2^2 \beta &= \mu n_1 (\dot{\beta} - \lambda_2 \dot{\beta}^3), \end{aligned} \quad (5.81)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\gamma' I_1}{I_0 (c_1 - \gamma'')}, \quad \lambda_2 = \frac{c_2}{c_1 - \gamma''}.$$

Уравнения (5.81) имеют вид уравнений (5.75). Решение уравнений (5.81) будем искать в виде (5.76). Тогда уравнения для  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (5.79) будут

$$\frac{du}{d\tau} = A(a_0 - u - 2v)u = P(u, v), \quad (5.82)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = B(b_0 - v - 2u)v = Q(u, v),$$

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\beta_2}{d\tau} = 0, \quad (5.83)$$

где

$$u = \alpha_1^2 k_1^2 a^2 > 0, \quad v = \alpha_2^2 k_2^2 b^2 > 0,$$

$$A = \frac{3}{4} \lambda_2 \frac{n_1^2 - k_1^2}{n_1^2} > 0, \quad B = \frac{3}{4} \lambda_2 \frac{k_2^2 - n_1^2}{n_1^2} > 0,$$

$$a_0 = \frac{4}{3\lambda_2} \left( 1 - \lambda_1 \frac{k_1^2 - n_2^2}{k_1^2 - n_1^2} \right), \quad b_0 = \frac{4}{3\lambda_2} \left( 1 - \lambda_1 \frac{k_2^2 - n_2^2}{k_2^2 - n_1^2} \right).$$

Из уравнений (5.83) следует, что  $\beta_1 = \text{const}$  и  $\beta_2 = \text{const}$ .

Перейдем к исследованию уравнений (5.82). Особыми точками (состояниями равновесия) системы (5.82) являются:  $P_1$  с координатами  $u_1 = 0$ ,  $v_1 = 0$ , соответствующая состоянию равновесия исходной динамической системы;  $P_2$  с координатами  $u_2 = 0$ ,  $v_2 = b_0$ , соответствующая периодическому движению исходной динамической системы с частотой  $k_2$ ;  $P_3$  с координатами  $u_3 = a_0$ ,  $v_3 = 0$ , соответствующая периодическому движению исходной системы с частотой  $k_1$ ;  $P_4$  с координатами  $u_4 = 1/3(2b_0 - a_0)$ ,  $v_4 = 1/3(2a_0 - b_0)$ . Эта точка соответствует бигармоническому движению исходной системы с частотами  $k_1$  и  $k_2$ .

Характер состояний равновесия определим по знакам величин (§ 4 гл. 1)

$$p = - [P_u' (u_0, v_0) + Q_v' (u_0, v_0)],$$

$$q = P_u' (u_0, v_0) Q_v' (u_0, v_0) - P_v' (u_0, v_0) Q_u' (u_0, v_0).$$

Для рассматриваемого случая

$$p = 2(u + v)(A + B) - (Aa_0 + Bb_0),$$

$$q = AB[a_0 - 2(u + v)][b_0 - 2(u + v)] - 4ABuv.$$

Для состояния равновесия  $P_1 (u_1 = 0, v_1 = 0)$

$$p = - (Aa_0 + Bb_0), \quad q = ABa_0b_0.$$

Для состояния равновесия  $P_2 (u_2 = 0, v_2 = b_0)$

$$p = Bb_0 + A(2b_0 - a_0), \quad q = ABb_0(2b_0 - a_0).$$

Для состояния равновесия  $P_3 (u_3 = a_0, v_3 = 0)$

$$p = Aa_0 + B(2a_0 - b_0), \quad q = ABa_0(2a_0 - b_0).$$

Для состояния равновесия

$$P_4 \left( u_4 = \frac{2b_0 - a_0}{3}, v_4 = \frac{2a_0 - b_0}{3} \right)$$

$$q = -3ABu_4v_4.$$

Это значит, что если точка  $P_4$  существует, то  $q < 0$ , так как  $u_4 > 0$ ,  $v_4 > 0$ . Следовательно, состояние равновесия вне осей  $u$  и  $v$  является седлом. Таким образом, существование и характер состояний равновесия системы (5.82) определяется величинами  $a_0$  и  $b_0$ .

В табл. 2 приведены возможные случаи.

Т а б л и ц а 2

	Случай	Состояние равновесия			
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
1	$a_0 < 0, b_0 < 0$	Устойчивый узел	Нет	Нет	Нет
2	$a_0 > 0, b_0 < 0$	Седло	Нет	Устойчивый узел	Нет
3	$a_0 < 0, b_0 > 0$	Седло	Устойчивый узел	Нет	Нет
4	$a_0 > 0, b_0 > 0,$ $a_0 > 2b_0$	Неустойчивый узел	Седло	Устойчивый узел	Нет
5	$a_0 > 0, b_0 > 0,$ $a_0 < 2b_0, a_0 > b_0$	Неустойчивый узел	Устойчивый узел	Устойчивый узел	Седло
6	$a_0 > 0, b_0 > 0,$ $2a_0 > b_0, b_0 > a_0$	Неустойчивый узел	Устойчивый узел	Устойчивый узел	Седло
7	$a_0 > 0, b_0 > 0,$ $b_0 > 2a_0$	Неустойчивый узел	Устойчивый узел	Седло	Нет

Так как  $u = 0, v = 0$  — интегральные кривые и, кроме седла, вне осей других особых точек нет, то система (5.82) предельных циклов не имеет. Для больших  $u$  и  $v$   $du/d\tau < 0, dv/d\tau < 0$ , т. е. бесконечность неустойчива.

На рис. 5.26 показаны картины фазовой плоскости для случаев 1, 2, 3, 4, 5 и 7. Итак, если  $a_0 < 0, b_0 < 0$ , то исходная динамическая система при любых начальных условиях стремится к состоянию покоя. При  $a_0 > 0, b_0 < 0$  в системе устанавливаются периодические колебания с частотой  $k_1$ , при  $a_0 < 0, b_0 > 0$  — периодические колебания с частотой  $k_2$ .



При  $a_0 > 0, b_0 > 0$  и  $a_0 > 2b_0$  устанавливаются периодические колебания с частотой  $k_1$ , а при  $b_0 < 2a_0$  — с частотой  $k_2$ .

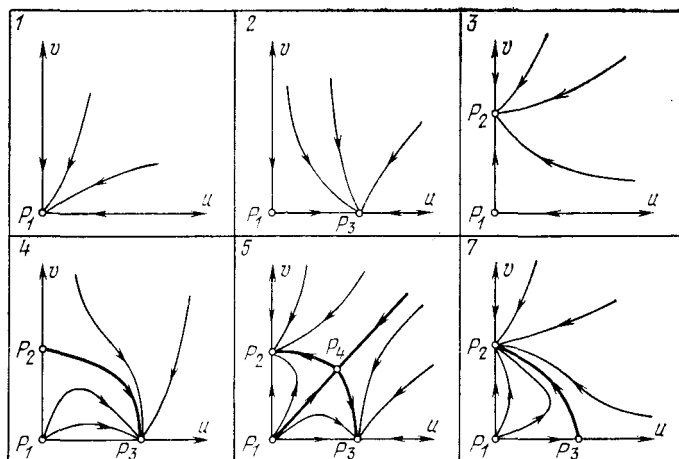


Рис. 5.26

При  $a_0 > b_0 > 0, a_0 < 2b_0$  и при  $b_0 > a_0 > 0, b_0 < 2a_0$  в системе в зависимости от начальных условий могут установиться или периодические движения с частотой  $k_1$ , или с частотой  $k_2$ .

### § 5. Неавтономные динамические системы с двумя степенями свободы [13]

В этом параграфе мы рассмотрим динамические системы, уравнения которых могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 + A_1 \dot{q}_2 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 &= \\
 &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + D_1 \sin t + E_1 \cos t, \\
 \ddot{q}_2 + A_2 \dot{q}_1 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 &= \\
 &= \mu g(q_1, \dot{q}_2, q_2, \dot{q}_2) + D_2 \sin t + E_2 \cos t,
 \end{aligned} \quad (5.84)$$

где  $A_1, A_2, B_1, B_2, n_1^2, n_2^2, D_1, E_1, D_2, E_2$  — постоянные величины,  $f, g$  — нелинейные функции,  $\mu$  — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной.

Мы ограничимся рассмотрением случаев — когда нормальные частоты линейной системы далеки от частоты внешней силы и когда одна из нормальных частот линейной системы равна частоте внешней синусоидальной силы. Рассмотрим сначала случай, когда частоты линейной системы далеки от частоты внешней силы. При  $\mu = 0$  решение системы (5.84) имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ q_2 &= \alpha_1 a \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \end{aligned} \quad (5.85)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — постоянные интегрирования,  $k_1$  и  $k_2$  — нормальные частоты линейной однородной системы, определяющиеся из уравнения \*)

$$\begin{aligned} \sigma k^4 - (n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1) k^2 + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2 = 0 \\ (\sigma = 1 - A_1 A_2), \end{aligned} \quad (5.86)$$

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — коэффициенты распределения, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{n_2^2 - k_1^2} = \frac{n_1^2 - k_1^2}{A_1 k_1^2 - B_1}, \\ \alpha_2 &= \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2} = \frac{n_1^2 - k_2^2}{A_1 k_2^2 - B_1}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{D_1(n_2^2 - 1) - D_2(B_1 - A_1)}{\Delta}, & e_1 &= \frac{E_1(n_2^2 - 1) - E_2(B_1 - A_1)}{\Delta}, \\ d_2 &= \frac{D_2(n_1^2 - 1) - D_1(B_2 - A_2)}{\Delta}, & e_2 &= \frac{E_2(n_1^2 - 1) - E_1(B_2 - A_2)}{\Delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \sigma - (n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1) + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2, \\ \sigma &= 1 - A_1 A_2. \end{aligned}$$

При  $\mu \neq 0$  можно было бы искать решение уравнений (5.84) в виде (5.85), считая  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  медленно меняющимися функциями времени. Тогда, поступая так же, как и в § 5 гл. 3, получили бы для определения  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$

\*) Как и в § 5 гл. 1, предполагаем, что  $k_1$  и  $k_2$  не равны друг другу и ни один из них не равен нулю.

укороченные уравнения (5.57) и (5.58). Но так как в этом случае осреднение уже проводится по трем периодам  $2\pi/k_1$ ,  $2\pi/k_2$  и  $2\pi$ , то имеющиеся в этих уравнениях  $F_1, \dots, \dots, F_4, G_1, \dots, G_4$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi \, d\xi \, d\eta \, dt, \\
 F_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta \, d\xi \, d\eta \, dt, \\
 F_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi \, d\xi \, d\eta \, dt, \\
 F_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta \, d\xi \, d\eta \, dt, \\
 G_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi \, d\xi \, d\eta \, dt, \\
 G_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta \, d\xi \, d\eta \, dt, \\
 G_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi \, d\xi \, d\eta \, dt, \\
 G_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta \, d\xi \, d\eta \, dt,
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

где

$$\begin{aligned}
 f^* &= f (a \sin \xi + b \sin \eta + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\
 &\quad ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + d_1 \cos t - e_1 \sin t, \\
 &\quad \alpha_1 a \sin \xi + \alpha_2 b \sin \eta + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \\
 &\quad \alpha_1 ak_1 \cos \xi + \alpha_2 bk_2 \cos \eta + d_2 \cos t - e_2 \sin t), \\
 g^* &= g (a \sin \xi + b \sin \eta + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \tag{5.89} \\
 &\quad ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + d_1 \cos t - e_1 \sin t, \\
 &\quad \alpha_1 a \sin \xi + \alpha_2 b \sin \eta + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \\
 &\quad \alpha_1 ak_1 \cos \xi + \alpha_2 bk_2 \cos \eta + d_2 \cos t - e_2 \sin t), \\
 &\quad \xi = k_1 t + \beta_1, \quad \eta = k_2 t + \beta_2.
 \end{aligned}$$

Покажем, как уравнения (5.57) и (5.58) можно получить несколько другим способом. Будем искать решение уравнений (5.84) в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ q_2 &= (\alpha_1 a + a_2) \sin(k_1 t + \beta_1 + \gamma_1) + \\ &\quad + (\alpha_2 b + b_2) \sin(k_2 t + \beta_1 + \gamma_2) + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \end{aligned} \quad (5.90)$$

где  $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2, e_1, e_2$  — те же, что и в решении (5.85). Будем считать, что  $a, b, \beta_1$  и  $\beta_2$  — медленно меняющиеся функции времени, производные от которых по времени имеют порядок  $\mu$ , а «поправки» на амплитуды  $a_2$  и  $b_2$  и частоты  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — медленно меняющиеся функции времени порядка  $\mu$ , производные от которых по времени имеют порядок  $\mu^2$ . Для удобства вычислений перепишем решение (5.90) в виде (пренебрегая членами порядка  $\mu^2$ ):

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + d_1 \sin t + \\ &\quad + e_1 \cos t, \\ q_2 &= (\alpha_1 a + a_2) \sin(k_1 t + \beta_1) + (\alpha_2 b + b_2) \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + a_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b_1 \cos(k_2 t + \beta_2) + d_2 \sin t + \\ &\quad + e_2 \cos t, \end{aligned} \quad (5.91)$$

где  $a_1$  и  $b_1$  — медленно меняющиеся функции порядка  $\mu$ . Подставляя решение (5.91) в систему уравнений (5.84), получим, сохраняя только члены порядка  $\mu$ ,

$$\begin{aligned} [2\dot{a}k_1(1 + \alpha_1 A_1) + a_1(B_1 - A_1 k_1^2)] \cos \xi + \\ + [2\dot{b}k_2(1 + \alpha_2 A_1) + b_1(B_1 - A_1 k_2^2)] \cos \eta + \\ + [-2ak_1 \dot{\beta}_1(1 + \alpha_1 A_1) + a_2(B_1 - A_1 k_1^2)] \sin \xi + \\ + [-2bk_2 \dot{\beta}_2(1 + \alpha_2 A_1) + b_2(B_1 - A_1 k_2^2)] \sin \eta = \mu f^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2\dot{a}k_1(\alpha_1 + A_2) + (n_2^2 - k_1^2)a_1] \cos \xi + \\ + [2\dot{b}k_2(\alpha_2 + A_2) + (n_2^2 - k_2^2)b_1] \cos \eta + \\ + [-2ak_1 \dot{\beta}_1(\alpha_1 + A_2) + (n_2^2 - k_1^2)a_2] \sin \xi + \\ + [-2bk_2 \dot{\beta}_2(\alpha_2 + A_2) + (n_2^2 - k_2^2)b_2] \sin \eta = \mu g^*. \end{aligned}$$

Умножим теперь последовательно полученные уравнения на  $\cos \xi, \cos \eta, \sin \xi, \sin \eta$  и возьмем их средние значения

за периоды  $2\pi/k_1$ ,  $2\pi/k_2$  и  $2\pi$ . В результате этого получим

$$\begin{aligned} 2\dot{a}k_1(1 + \alpha_1 A_1) + a_1(B_1 - A_1 k_1^2) &= \mu F_1, \\ 2\dot{a}k_1(\alpha_1 + A_2) + a_1(n_2^2 - k_1^2) &= \mu G_1, \\ 2\dot{b}k_2(1 + \alpha_2 A_1) + b_1(B_1 - A_1 k_2^2) &= \mu F_2, \\ 2\dot{b}k_2(\alpha_2 + A_2) + b_1(n_2^2 - k_2^2) &= \mu G_2, \\ -2ak_1\dot{\beta}_1(1 + \alpha_1 A_1) + a_2(B_1 - A_1 k_1^2) &= \mu F_3, \\ -2ak_1\dot{\beta}_1(\alpha_1 + A_1) + a_2(n_2^2 - k_1^2) &= \mu G_3, \\ -2bk_2\dot{\beta}_2(1 + \alpha_2 A_1) + b_2(B_1 - A_1 k_2^2) &= \mu F_4, \\ -2bk_2\dot{\beta}_2(\alpha_2 + A_2) + b_2(n_2^2 - k_2^2) &= \mu G_4. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$ , получаем уравнения (5.57) и (5.58), но  $F_1, \dots, F_4, G_1, \dots, G_4$  определяются уже формулами (5.88). Отметим, что рассмотренный метод получения укороченных уравнений более прост, чем рассмотренный в § 5 гл. 3, и может быть использован достаточно просто и для систем более высокого порядка \*).

Рассмотрим второй случай, когда одна из главных частот линейной системы равна частоте внешнего воздействия. Предположим при этом, что амплитуда внешнего воздействия имеет порядок  $\mu$ . Пусть уравнения движения будут

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + A_1 \ddot{q}_2 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 &= \mu f(q_1, \dot{c}_1, q_2, \dot{c}_2, t), \\ \ddot{q}_2 + A_2 \ddot{q}_1 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 &= \mu g(q_1, \dot{c}_1, q_2, \dot{c}_2, t), \end{aligned} \quad (5.92)$$

где нелинейные функции  $f$  и  $g$  обладают свойством

$$\begin{aligned} f(q_1, \dot{c}_1, \dot{c}_2, t + 2\pi) &= f(q_1, \dot{c}_1, q_2, \dot{c}_2, t), \\ g(q_1, \dot{c}_1, q_2, \dot{c}_2, t + 2\pi) &= g(q_1, \dot{c}_1, q_2, \dot{c}_2, t). \end{aligned}$$

Предполагая, что  $k_2^2 > k_1^2 = 1$ , решение системы (5.92) ищем в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin(k_2 t + \psi), \\ q_2 &= \alpha_1 a_1 \sin t + \alpha_1 a_2 \cos t + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \psi), \end{aligned} \quad (5.93)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  и  $\psi$  будем считать медленно меняющимися функциями времени. Аналогично предыдущим случаям получим для определения  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  и  $\psi$  приближенные

\*) При анализе движения системы в решении (5.91) членами порядка  $\mu$  следует пренебречь.

уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \frac{\mu}{2\gamma(k_2^2 - 1)} \left[ \frac{A_2 - B_2}{\alpha_1} F_1^* + (A_1 - B_1) G_1^* \right], \\ \frac{da_2}{dt} &= - \frac{\mu}{2\gamma(k_2^2 - 1)} \left[ \frac{A_2 - B_2}{\alpha_1} F_2^* + (A_1 - B_1) G_2^* \right], \\ \frac{db}{dt} &= - \frac{\mu}{2k_2\gamma(k_2^2 - 1)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} F_3^* + (A_1 k_2^2 - B_1) G_3^* \right], \\ b \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\mu}{2k_2\gamma(k_2^2 - 1)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} F_4^* + (A_1 k_2^2 - B_1) G_4^* \right], \end{aligned} \quad (5.94)$$

где  $(\xi = k_2 t + \psi)$

$$\begin{aligned} F_1^* &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos t \, d\xi \, dt, & G_1^* &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos t \, d\xi \, dt, \\ F_2^* &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin t \, d\xi \, dt, & G_2^* &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin t \, d\xi \, dt, \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$F_3^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi \, d\xi \, dt, \quad G_3^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi \, d\xi \, dt,$$

$$F_4^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi \, d\xi \, dt, \quad G_4^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi \, d\xi \, dt,$$

$$f^* = f(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \xi,$$

$$a_1 \cos t - a_2 \sin t + bk_2 \cos \xi,$$

$$\alpha_1 a_1 \sin t + \alpha_1 a_2 \cos t + \alpha_2 b \sin \xi,$$

$$\alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \alpha_2 bk_2 \cos \xi, t),$$

$$g^* = g(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \xi,$$

$$a_1 \cos t - a_2 \sin t + bk_2 \cos \xi,$$

$$\alpha_1 a_1 \sin t + \alpha_1 a_2 \cos t + \alpha_2 b \sin \xi,$$

$$\alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \alpha_2 bk_2 \cos \xi, t).$$

В качестве примера рассмотрим теорию «вынужденных» колебаний в сложном генераторе, разработанную А. Г. Маеяром [21]. Пренебрегая сеточным током, можем

написать для двух контуров, схема которых представлена на рис. 5.27, уравнения Кирхгофа в виде

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt = M \frac{di_a}{dt} + N \frac{di_2}{dt} + P_0 \sin pt, \quad (5.96)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt = N \frac{di_1}{dt}.$$

Вводя обозначения

$$v_1 = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt, \quad v_2 = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt$$

и принимая в качестве характеристики лампы кубическую параболу

$$i_a = S v_1 \left( 1 - \frac{v_1^2}{3k^2} \right),$$

где  $S$  — так называемая крутизна характеристики лампы,  $k$  — напряжение насыщения, перепишем уравнения (5.96) в виде

$$\ddot{v}_1 + n_1^2 v_1 - N C_2 n_1^2 \ddot{v}_2 = P_0 n_1^2 \sin pt + n_1^2 \left( MS - r_1 C_1 - MS \frac{v_1^2}{k^2} \right) \dot{v}_1, \quad (5.97)$$

$$\ddot{v}_2 + n_2^2 v_2 - N C_1 n_2^2 \ddot{v}_1 = -r_2 C_2 n_2^2 \dot{v}_2,$$

где  $n_1^2 = 1/(L_1 C_1)$ ,  $n_2^2 = 1/(L_2 C_2)$ . Вводя безразмерное время  $\tau = pt$ , безразмерные переменные

$$q_1 = \frac{v_1}{k} \sqrt{\frac{MS}{MS - r_1 C_1}}, \quad q_2 = \frac{v_2}{k} \sqrt{\frac{MS}{MS - r_1 C_1}}$$

и безразмерные параметры

$$\mu = (MS - r_1 C_1) \frac{n_1^2}{p}, \quad r = \frac{r_2}{L_2 (MS - r_1 C_1) n_1^2},$$

$$\lambda = \frac{P_0 n_1^2}{k p^2} \sqrt{\frac{MS}{MS - r_1 C_1}}, \quad \kappa_1 = N C_2 n_1^2, \quad \kappa_2 = N C_1 n_2^2,$$

приведем уравнения (5.97) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} - \kappa_1 \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + \bar{n}_1^2 q_1 &= \lambda \sin \tau + \mu (1 - q_1^2) \frac{dq_1}{d\tau}, \\ \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} - \kappa_2 \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + \bar{n}_2^2 q_2 &= -\mu r \frac{dq_2}{d\tau}, \end{aligned} \quad (5.98)$$

где  $\bar{n}_1^2 = n_1^2/p^2$ ,  $\bar{n}_2^2 = n_2^2/p^2$ . Примем, что  $\mu$  есть тот малый параметр, который характеризует близость рассматриваемой системы к линейной

(так как  $\mu = (MS - r_1 C_1) \frac{n_1^2}{p}$ , то рассматриваемая здесь теория теряет смысл, если  $p$  достаточно мало).

Рассмотрим сначала случай, когда частота внешней силы далека от обеих нормальных частот однородной системы. Будем искать решение системы (5.98) при  $\mu \neq 0$  в виде

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= a \sin(\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + b \sin(\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + d_1 \sin \tau, \\ q_2 &= \alpha_1 a \sin(\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + d_2 \sin \tau, \end{aligned} \right\} (5.99)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \frac{k_1}{p}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2}{p}, \quad d_1 = \frac{\lambda(\bar{n}_2^2 - 1)}{\sigma - (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2) + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2}, \\ d_2 &= \frac{\lambda \kappa_2}{\sigma - (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2) + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2} \quad (\sigma = 1 - \kappa_1 \kappa_2), \end{aligned}$$

$k_1, k_2$  ( $k_2 > k_1$ ) — корни уравнения для определения нормальных частот линейной системы

$$\sigma k^4 - (n_1^2 + n_2^2)k^2 + n_1^2 n_2^2 = 0,$$

из которого следует, что  $k_2^2 > n_1^2$ ,  $k_2^2 > n_2^2$ ,  $k_1^2 < n_1^2$ ,  $k_1^2 < n_2^2$ . Уравнения (5.57) при этом будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= Au(a_0 - u - 2v - 2d_1^2), \\ \frac{dv}{d\tau} &= Bv(b_0 - 2u - v - 2d_1^2), \end{aligned} \quad (5.100)$$

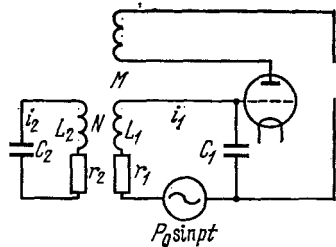


Рис. 5.27



где

$$u = a^2, \quad v = b^2, \quad A = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\sigma} \frac{n_2^2 - k_1^2}{k_2^2 - k_1^2} > 0,$$

$$B = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\sigma} \frac{k_2^2 - n_2^2}{k_2^2 - k_1^2} > 0,$$

$$a_0 = 4 - 4r \frac{n_1^2 - k_1^2}{n_2^2 - k_1^2}, \quad b_0 = 4 - 4r \frac{k_2^2 - n_1^2}{k_2^2 - n_2^2}.$$

Из уравнений (5.58) следует, что  $\beta_1 = \text{const}$ ,  $\beta_2 = \text{const}$ . Введем обозначения:

$$\alpha_0 = a_0 - 2d_1^2, \quad \beta_0 = b_0 - 2d_1^2. \quad (5.101)$$

В соответствии с уравнениями (5.100) особые точки находятся из уравнений

$$u(\alpha_0 - u - 2v) = 0, \quad v(\beta_0 - 2u - v) = 0.$$

Так как  $u = a^2$  и  $v = b^2$ , то мы будем рассматривать только первый квадрант плоскости  $uv$ . Особые точки будут

$$P_1: u_1 = 0, \quad v_1 = 0;$$

$$P_2: u_2 = 0, \quad v_2 = \beta_0;$$

$$P_3: u_3 = \alpha_0, \quad v_3 = 0;$$

$$P_4: u_4 = 1/3(2\beta_0 - \alpha_0), \quad v_4 = 1/3(2\alpha_0 - \beta_0).$$

Уравнения (5.100) при обозначениях (5.101) имеют вид уравнений (5.82), поэтому приведенные исследования характера особых точек для уравнений (5.82) справедливы и для уравнений (5.100). Из выражений (5.99) следует, что точка  $P_1$  соответствует для исходной системы движению с частотой внешней силы, точка  $P_2$  — движению с двумя частотами  $k_2$  и  $p$ , точка  $P_3$  — движению с двумя частотами  $k_1$  и  $p$ , точка  $P_4$  — движению с тремя частотами  $p$ ,  $k_1$  и  $k_2$ . Но, как ранее было показано (с. 173), эта особая точка неустойчива, следовательно, движение с тремя частотами неустойчиво.

Характер особых точек при различных значениях  $d_1^2$  показан в табл. 3. На рис. 5.26 показана картина фазовой плоскости.

Из рассмотрения этой табл. 3 легко получить как бифуркационные значения параметров, так и характер из-

менения стационарных движений генератора при увеличении амплитуды внешнего воздействия.

В случае 1 генератор из состояния покоя при  $d_1 = 0$  переходит при  $d_1 > 0$  к периодическому движению с частотой внешней силы.

В случаях 2 и 3 при отсутствии внешней силы ( $d_1 = 0$ ) генератор совершает периодическое движение с частотой  $k_1$ ; под действием внешней силы получается бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $p$ , а затем при  $d_1^2 > a_0/2$  периодическое движение с частотой  $p$ .

В случае 4 при  $d_1 = 0$  система может совершать любое из двух периодических движений с частотой  $k_1$  или  $k_2$  в зависимости от начальных условий. При малой амплитуде внешнего воздействия  $d_1^2 < (2b_0 - a_0)/2$  система может совершать любое из двух бигармонических движений с частотами  $p$  и  $k_1$  или  $p$  и  $k_2$ ; при дальнейшем увеличении амплитуды внешнего воздействия, пока  $b_0/2 > d_1^2 > (2b_0 - a_0)/2$ , становится возможным лишь одно бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $p$ , а при  $d_1^2 > a_0/2$  будет лишь одно периодическое движение с частотой внешней силы.

Рассмотрим теперь случай, когда  $k_1 = p$ . Будем считать, что в уравнениях (5.98)  $\lambda = \mu\lambda_1$ , где

$$\lambda_1 = \frac{P_0}{Kp(MS - r_1C_1)} \sqrt{\frac{MS}{MS - r_1C_1}}.$$

Решение уравнений (5.98) ищем в этом случае в виде (5.93), т. е.

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \sin \tau + a_2 \cos \tau + b \sin(\bar{k}_2 \tau + \psi), \\ q_2 &= \alpha_1 a \sin \tau + \alpha_2 a_2 \cos \tau + \alpha_2 b \sin(\bar{k}_2 \tau + \psi), \end{aligned} \quad (5.102)$$

где  $\bar{k}_2 = k_2/p$  и  $\bar{k}_1 = k_1/p$  являются корнями уравнения

$$\sigma \bar{k}^4 - (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2) \bar{k}^2 + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2 = 0.$$

Уравнения (5.94) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_1} &= u [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - 4\lambda_1, \\ \frac{dv}{d\tau_1} &= v [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)], \\ \frac{dw}{d\tau_1} &= Ew [b_0 - (2u^2 + 2v^2 + w)], \\ \frac{d\psi}{d\tau_1} &= 0, \text{ т. е. } \psi = \text{const}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

Т а б л и ц а 3

Случай	$d_1$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
1 $a_0 < 0$ $b_0 < 0$	$d_1 = 0$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
	$d_1^2 > 0$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
2 $a_0 > 0$ $b_0 < 0$	$d_1 = 0$	Седло	Нет	Устойчи- вый узел	Нет
	$\frac{a_0}{2} > d_1^2 > 0$	Седло	Нет	Устойчи- вый узел	Нет
	$d_1^2 > \frac{a_0}{2}$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
3 $a_0 > 2b_0$ $b_0 > 0$	$d_1 = 0$	Неустой- чивый узел	Седло	Устойчи- вый узел	Нет
	$\frac{b_0}{2} > d_1^2 > 0$	Неустой- чивый узел	Седло	Устойчи- вый узел	Нет
	$\frac{a_0}{2} > d_1^2 > \frac{b_0}{2}$	Седло	Нет	Устойчи- вый узел	Нет
	$d_1^2 > \frac{a_0}{2}$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
4 $a_0 > b_0$ $b_0 > 0$ $2b_0 > a_0$	$d_1 = 0$	Неустой- чивый узел	Устойчи- вый узел	Устойчи- вый узел	Седло
	$\frac{2b_0 - a_0}{2} > d_1^2 > 0$	Неустой- чивый узел	Устойчи- вый узел	Устойчи- вый узел	Седло
	$\frac{b_0}{2} > d_1^2 > \frac{2b_0 - a_0}{2}$	Неустой- чивый узел	Седло	Устойчи- вый узел	Нет
	$\frac{a_0}{2} > d_1^2 > \frac{b_0}{2}$	Седло	Нет	Устойчи- вый узел	Нет
	$d_1^2 > \frac{a_0}{2}$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
Случаи, когда $b_0 > a_0$ , $2a_0 > b_0$ ; $b_0 > 2a_0$ , $a_0 > 0$ ; $a_0 < 0$ , $b_0 > 0$ , аналогичны.					

где

$$u = a_2, v = a_1, w = b^2 > 0,$$

$$\tau_1 = \frac{\mu}{8\sigma} \frac{p^2 - n_2^2}{p^2 - k_2^2} \tau, \quad E = \frac{1}{2} \frac{n_2^2 - k_2^2}{p^2 - n_2^2} > 0,$$

$$a_0 = 4 \left( 1 - r \frac{p^2 - n_1^2}{p^2 - n_2^2} \right), \quad b_0 = 4 \left( 1 - r \frac{n_1^2 - k_2^2}{n_2^2 - k_2^2} \right).$$

В соответствии с выражением (5.102) можно сказать, что особые точки системы (5.103), расположенные на плоскости  $uv$  пространства  $uvw$ , соответствуют периодическим движениям генератора с частотой  $p = k_1$ . Особые точки, расположенные на оси  $w$ , соответствуют периодическим движениям с частотой  $k_2$ . Особые точки, расположенные вне осей  $u$ ,  $v$  и  $w$ , соответствуют бигармоническим движениям с частотами  $k_1 = p$  и  $k_2$ . Обозначив  $\rho = u^2 + v^2$ , получим уравнения для определения особых точек в виде

$$u^2 = \rho, v = 0, \quad (5.104)$$

$$\rho [a_0 - (\rho + 2w)]^2 = 16\lambda_1^2, \quad (5.105)$$

$$w (b_0 - 2\rho - w) = 0. \quad (5.106)$$

Из этих уравнений следует, что особые точки плоскости  $uv$  расположены на оси  $u$  и определяются уравнением

$$\rho (a_0 - \rho)^2 = 16\lambda_1^2, \quad (5.107)$$

которое одновременно определяет амплитудную кривую соответствующих периодических движений частоты  $k_1 = p$ .

Напомним, что устойчивость состояния равновесия  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = P_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = P_3(x, y, z)$$

определяется корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} P'_{1x}(x_0, y_0, z_0) - S & P'_{1y}(x_0, y_0, z_0) & P'_{1z}(x_0, y_0, z_0) \\ P'_{2x}(x_0, y_0, z_0) & P'_{2y}(x_0, y_0, z_0) - S & P'_{2z}(x_0, y_0, z_0) \\ P'_{3x}(x_0, y_0, z_0) & P'_{3y}(x_0, y_0, z_0) & P'_{3z}(x_0, y_0, z_0) - S \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$[E(b_0 - 2R^2) - S] [(a_0 - 3R^2) - S] [(a_0 - R^2) - S] = 0,$$

где  $R^2 = \rho$ . Корни этого уравнения равны

$$S_1 = E (b_0 - 2R^2), S_2 = a_0 - 3R^2, S_3 = a_0 - R^2.$$

Особая точка будет устойчивой, если корни  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  будут отрицательными, следовательно, условиями устойчивости будут неравенства  $R^2 > b_0/2$ ,  $R^2 > a_0$ . На оси  $w$ , как это видно из уравнения (5.105), особых точек нет. Это означает, что при действии на генератор внешней силы с частотой  $p = k_1$  периодическое движение частоты  $k_2$  невозможно. Особые точки, расположенные вне осей и соответствующие бигармоническим движениям, определяются уравнениями (5.105) и (5.106). Квадрат амплитуды этих движений равен

$$R^2 = w + \rho = b_0 - \rho.$$

Если это выражение подставить в уравнение (5.105), то получится уравнение резонансной кривой

$$(b_0 - R^2) (a_0 + b_0 - 3R^2)^2 = 16\lambda_1^2. \quad (5.108)$$

Так как  $w = b_0 - 2\rho$ ,  $R^2 = b_0 - \rho$ , то уравнение (5.108) имеет смысл только для  $b_0/2 < R^2 < b_0$ .

Характеристическое уравнение для этих движений имеет вид

$$(S - a_0 - b_0 + 3R^2) \{S^2 + S [E (2R^2 - b_0) + b_0 - a_0 + R^2] + E (2R^2 - b_0) [9R^2 - (a_0 + 7b_0)]\} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что для действительных движений ( $R^2 > b_0/2$ ) при  $R^2 > (a_0 + 7b_0)/9$  особые точки будут устойчивы.

Уравнение резонансной кривой периодических движений (5.107) может быть записано в виде

$$R^2 (a_0 - R^2)^2 = 16\lambda_1^2$$

$$\text{или} \quad y (a_0 - y)^2 = x, \quad (5.109)$$

где  $y = R^2 > 0$ ,  $x = 16\lambda_1^2 > 0$ . Рассмотрим плоскость  $xy$ . На основании формулы (5.109) получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(a_0 - y)(a_0 - 3y)}.$$

Отсюда следует, что кривая (5.109) имеет вертикальные касательные в точках  $x = 0$ ,  $y = a_0$ ,  $x_1 = 4(a_0/3)^2$ ,  $y_1 =$

$= a_0/3$ , кроме того, при  $x = 0$   $y = 0$  или  $y = a_0$ . При  $a_0 < 0$  кривая (5.109) вертикальных касательных не имеет, так как всегда  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

Уравнение резонансной кривой бигармонических движений в тех же обозначениях имеет вид

$$(b_0 - y)(a_0 + b_0 - 3y)^2 = x. \quad (5.109')$$

При  $x = 0$   $y = b_0$  или  $y = (a_0 + b_0)/3$ . Из выражения (5.109') следует, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(a_0 + b_0 - 3y)(9y - a_0 - 7b_0)}.$$

Следовательно, кривая (5.109') имеет вертикальные касательные в точках

$$x = 0, y = \frac{a_0 + b_0}{3} \text{ и } x_2 = \frac{4}{81}(2b_0 - a_0)^3, y_2 = \frac{a_0 + 7b_0}{9}.$$

При  $y_3 = b_0/2$

$$x_3 = \frac{b_0}{8}(2a_0 - b_0)^2.$$

Рассмотрим теперь состояния генератора при изменении амплитуды внешнего воздействия. Так как  $x = 16\lambda_1^2$ ,

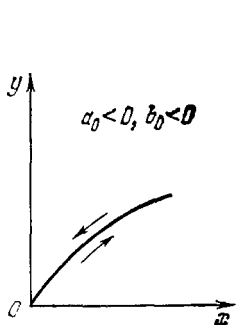


Рис. 5.28

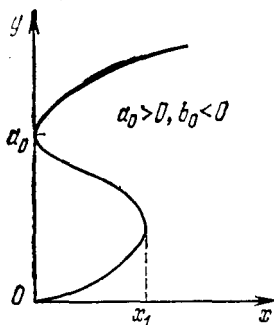


Рис. 5.29

то изменение  $x$  характеризует и изменение  $\lambda_1$ . Приведем несколько характерных случаев.

1.  $a_0 < 0$ ,  $b_0 < 0$  или  $a_0 > 0$ ,  $b_0 < 0$ . Генератор совершает периодическое движение с частотой  $p = k_1$ . Бигармонических движений нет. Эти случаи представлены соответственно на рис. 5.28 и 5.29.

2.  $a_0 < 0, b_0 > 0$ . Здесь возможны два варианта:  $y_2 < y_3$ , когда  $2a_0 + 5b_0 < 0$ , и  $y_2 > y_3$ , когда  $2a_0 + 5b_0 > 0$ ;

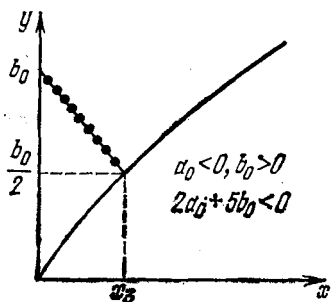


Рис. 5.30

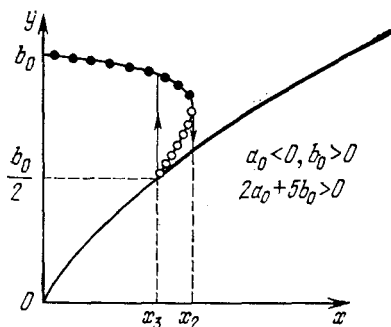


Рис. 5.31

а)  $y_2 < y_3$  ( $2a_0 + 5b_0 < 0$ ). Генератор при  $x < x_3$  совершает бигармоническое движение с частотами  $p = k_1$  и  $k_2$ , при  $x > x_3$  будет только гармоническое движение частоты  $p = k_1$  (рис. 5.30).

б)  $y_2 > y_3$  ( $2a_0 + 5b_0 > 0$ ). Устойчивое бигармоническое движение возможно при  $x < x_2$ . Периодическое с частотой  $p = k_1$  возможно при  $x > x_3$ . Таким образом, здесь возможно затягивание по  $x$  в промежутке  $x_3 < x < x_2$  (рис. 5.31).

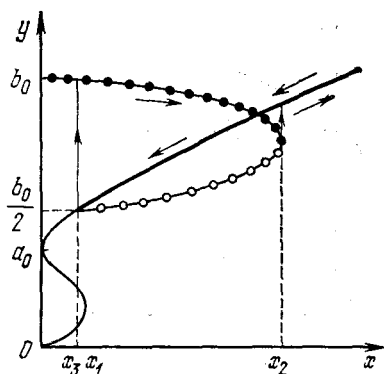


Рис. 5.32

3.  $0 < b_0 < a_0/2$ . Этот случай в отношении устойчивых движений совпадает со случаем  $a_0 > 0, b_0 < 0$ .

4.  $0 < a_0 < b_0/2$ . Этот случай представлен на рис. 5.32. При  $x < x_3$  возможно устойчивое бигармоническое движение с частотами  $p = k_1$  и  $k_2$ ; при  $x_3 < x < x_2$  возможны как бигармоническое движение с частотами  $p = k_1$  и  $k_2$ , так и периодическое движение с частотой  $p = k_1$ . При  $x > x_2$  возможно только периодическое движение с частотой  $p = k_1$ .

5.  $2a_0 > b_0 > 0$ . Здесь при  $x < x_2$  возможны устойчивое бигармоническое движение с частотами  $p = k_1$  и

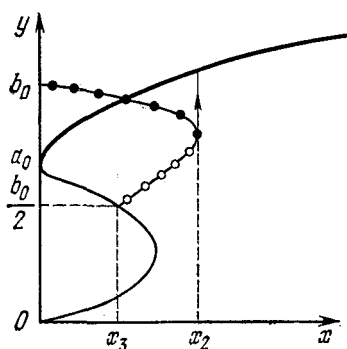


Рис. 5.33

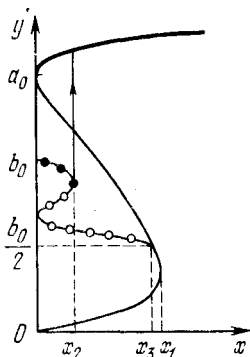


Рис. 5.34

$k_2$  и периодическое с частотой  $p = k_1$ ; при  $x > x_2$  — только периодическое с частотой  $p = k_1$  (рис. 5.33).

6.  $2b_0 > a_0 > 0$ . При  $x < x_2$  возможны устойчивое бигармоническое движение с частотами  $p = k_1$  и  $k_2$  и периодическое с частотой  $p = k_1$ ; при  $x > x_2$  возможно только периодическое движение с частотой  $p = k_1$  (рис. 5.34).

## § 6. Неавтономные динамические системы с гироскопическими силами [10, 11, 7]

Пусть уравнения динамической системы имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \kappa_1 \dot{q}_2 \pm n_1^2 q_1 &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \\ &+ D_1 \sin t + E_1 \cos t, \quad (5.110) \\ \ddot{q}_2 + \kappa_2 \dot{q}_1 \pm n_2^2 q_2 &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \\ &+ D_2 \sin t + E_2 \cos t. \end{aligned}$$

При  $\mu = 0$  эта система уравнений имеет решение

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &+ d_1 \sin t + e_1 \cos t, \quad (5.111) \\ q_2 &= \alpha_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \cos(k_2 t + \beta_2) + \\ &+ d_2 \sin t + e_2 \cos t, \end{aligned}$$



где  $k_1$  и  $k_2$  — частоты линейной однородной системы — корни уравнения (5.77),  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются формулами (5.78),

$$d_1 = \frac{-(1 \mp n_2^2) D_1 - \kappa_1 E_2}{\Delta}, \quad e_1 = \frac{-E_1 (1 \mp n_2^2) + \kappa_1 D_2}{\Delta},$$

$$d_2 = \frac{-D_2 (1 \mp n_1^2) + \kappa_2 E_1}{\Delta}, \quad e_2 = \frac{-(1 \mp n_1^2) E_2 - \kappa_2 D_1}{\Delta},$$

$$\Delta = 1 + (\mp n_1^2 \mp n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) + n_1^2 n_2^2.$$

Если искать решение системы уравнений (5.110) при  $\mu \neq 0$  в виде (5.111), считая  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  медленно меняющимися функциями времени, то приближенные уравнения для определения  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  будут

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left( \kappa_1 G_1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_1 \right), \\ \frac{db}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left( \kappa_1 G_2 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_2 \right), \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= \frac{1}{an_1^3} \left( \kappa_1 G_3 + \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_3 \right), \\ \frac{d\beta_2}{d\tau} &= -\frac{1}{bn_1^3} \left( \kappa_1 G_4 + \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_4 \right), \end{aligned} \tag{5.112}$$

где  $\tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(k_2^2 - k_1^2)} \quad (k_2 > k_1)$ ,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi \, d\xi \, d\eta \, dt, \\ F_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta \, d\xi \, d\eta \, dt, \\ F_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi \, d\xi \, d\eta \, dt, \\ F_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta \, d\xi \, d\eta \, dt, \\ G_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi \, d\xi \, d\eta \, dt, \\ G_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta \, d\xi \, d\eta \, dt, \end{aligned} \tag{5.113}$$

$$G_3 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi \, d\xi \, d\eta \, dt,$$

$$G_4 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta \, d\xi \, d\eta \, dt,$$

$$\begin{aligned} f^* &= f(a \sin \xi + b \sin \eta + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ &ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + d_1 \cos t - e_1 \sin t, \\ &\alpha_1 a \cos \xi + \alpha_2 b \cos \eta + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \\ &-\alpha_1 ak_1 \sin \xi - \alpha_2 bk_2 \sin \eta + d_2 \cos t - e_2 \sin t), \\ g^* &= g(a \sin \xi + b \sin \eta + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ &ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + d_1 \cos t - e_1 \sin t, \\ &\alpha_1 a \cos \xi + \alpha_2 b \cos \eta + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \\ &-\alpha_1 ak_1 \sin \xi - \alpha_2 bk_2 \sin \eta + d_2 \cos t - e_2 \sin t), \\ \xi &= k_1 t + \beta_1, \quad \eta = k_2 t + \beta_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случаи, когда одна из нормальных частот будет совпадать с частотой внешнего воздействия. При этом будем предполагать, что амплитуда внешнего воздействия имеет порядок  $\mu$ . Уравнения движения при этом могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \kappa_1 \dot{q}_2 \pm n_1^2 q_1 &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t), \\ \ddot{q}_2 + \kappa_2 \dot{q}_1 \pm n_2^2 q_2 &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t), \end{aligned} \quad (5.114)$$

где нелинейные функции  $f$  и  $g$  обладают свойством

$$\begin{aligned} f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t + 2\pi) &= f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t), \\ g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t + 2\pi) &= g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t). \end{aligned}$$

Полагая  $k_2^2 > k_1^2 = 1$ , будем искать решения уравнений (5.114) в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin(k_2 t + \psi), \\ q_2 &= \alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \alpha_2 b \cos(k_2 t + \psi), \end{aligned} \quad (5.115)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  и  $\psi$  — медленно меняющиеся функции времени. Приближенные уравнения для определения  $a_1$ ,  $a_2$ ,

$b$  и  $\psi$  в этом случае будут

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left[ \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_1 - \kappa_1 G_1 \right], \\ \frac{da_2}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left[ \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_2 + \kappa_1 G_2 \right], \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left[ \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_3 - \kappa_1 G_3 \right], \\ b \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left[ \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_4 + \kappa_1 G_4 \right], \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$\text{где } \tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(k_2^2 - 1)},$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos t \, d\eta \, dt, & G_1 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin t \, d\eta \, dt, \\ F_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin t \, d\eta \, dt, & G_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos t \, d\eta \, dt, \end{aligned} \quad (5.117)$$

$$F_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta \, d\eta \, dt, \quad G_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta \, d\eta \, dt,$$

$$F_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta \, d\eta \, dt, \quad G_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta \, d\eta \, dt,$$

$$\eta = k_2 t + \psi,$$

$$f^* = f(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \eta,$$

$$a_1 \cos t - a_2 \sin t + bk_2 \cos \eta, \alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \\ + \alpha_2 b \cos \eta, \quad -\alpha_1 a_1 \sin t - \alpha_1 a_2 \cos t - \alpha_2 bk_2 \sin \eta),$$

$$g^* = g(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \eta,$$

$$a_1 \cos t - a_2 \sin t + bk_2 \cos \eta,$$

$$\alpha_1 a \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \alpha_2 b \cos \eta,$$

$$-\alpha_1 a_1 \sin t - \alpha_1 a_2 \cos t - \alpha_1 bk_2 \sin \eta).$$

Если  $k_1^2 < k_2^2 = 1$ , то решение следует искать в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \psi) + b_1 \sin t + b_2 \cos t, \\ q_2 &= \alpha_1 a \cos(k_1 t + \psi) + \alpha_2 b_1 \cos t - \alpha_2 b_2 \sin t. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Приближенные уравнения для определения медленно ме-

няющихся функций времени  $a_1, b_1, b_2$  и  $\psi$  будут

$$\begin{aligned} \frac{db_1}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left( \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_1 - \kappa_1 G_1 \right), \\ \frac{db_2}{d\tau} &= - \frac{1}{n_1^3} \left( \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_2 + \kappa_1 G_2 \right), \\ \frac{da}{d\tau} &= - \frac{1}{n_1^3} \left( \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_3 - \kappa_1 G_3 \right), \\ a \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left( \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_4 + \kappa_1 G_4 \right), \end{aligned} \quad (5.119)$$

где  $\tau = \frac{\mu n_1^3 f}{2(1-k_1^2)}$ , величины  $F_1, \dots, F_4, G_1, \dots, G_4$  определяются по формулам (5.117), в которых  $\eta = k_1 t + \psi$ ,

$$f^* = f(a \sin \eta + b_1 \sin t + b_2 \cos t,$$

$$ak_1 \cos \eta + b_1 \cos t - b_2 \sin t,$$

$$\alpha_1 a \cos \eta + \alpha_2 b_1 \cos t - \alpha_2 b_2 \sin t,$$

$$-\alpha_1 a k_1 \sin \eta - \alpha_2 b_1 \sin t - \alpha_2 b_2 \cos t),$$

$$g^* = g(a \sin \eta + b_1 \sin t + b_2 \cos t,$$

$$ak_1 \cos \eta + b_1 \cos t - b_2 \sin t,$$

$$\alpha_1 a \cos \eta + \alpha_2 b_1 \cos t - \alpha_2 b_2 \sin t,$$

$$-\alpha_1 a k_1 \sin \eta - \alpha_2 b_1 \sin t - \alpha_2 b_2 \cos t).$$

В качестве примера рассмотрим поведение гироскопического маятника, рассмотренного в § 5 гл. 4, при действии на него внешней синусоидальной силы  $Q' \sin pt$  \*). Уравнения движения маятника в этом случае будут иметь вид

$$\ddot{\alpha} - \kappa_1 \dot{\beta} + n_1^2 \alpha = \mu n_1 (-\lambda_1 \dot{\alpha}) + \frac{Q'}{I_0} \sin pt,$$

$$\ddot{\beta} + \kappa_2 \dot{\alpha} + n_2^2 \beta = \mu n_1 (\dot{\beta} - \lambda_2 \beta^3),$$

где сохранены те же обозначения, что и в § 5 гл. 4.

Введя  $\tau = pt$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{d\tau^2} - \bar{\kappa}_1 \frac{d\beta}{d\tau} + \bar{n}_1^2 \alpha &= \mu \bar{n}_1 \left( -\lambda_1 \frac{d\alpha}{d\tau} \right) + Q \sin \tau, \\ \frac{d^2 \beta}{d\tau^2} + \bar{\kappa}_2 \frac{d\alpha}{d\tau} + \bar{n}_2^2 \beta &= \mu \bar{n}_1 \left( \frac{d\beta}{d\tau} - \lambda_2' \frac{d^3 \beta}{d\tau^3} \right), \end{aligned} \quad (5.120)$$

\*) Задача о вынужденных колебаниях системы двух колебательных контуров типа Ван-дер-Поля в условиях гироскопической связи с применением приведенного здесь метода решалась Дельшамбром [17].

где

$$Q = \frac{Q'}{I_0 p^2}, \quad \bar{\kappa}_1 = \frac{\kappa_1}{p}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{p}, \quad \bar{n}_1^2 = \frac{n_1^2}{p^2}, \quad \bar{n}_2^2 = \frac{n_2^2}{p^2}, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 p^2.$$

Уравнения (5.120) имеют вид уравнений (5.110). Поэтому, если искать решение этих уравнений в виде

$$\alpha = a \sin(\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + b \sin(\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + d_1 \sin \tau, \quad (5.121)$$

$$\beta = \alpha_1 a \cos(\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + \alpha_2 b \cos(\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + e_2 \cos \tau,$$

где

$$d_1 = \frac{(\bar{n}_2^2 - 1)Q}{\Delta}, \quad e_2 = \frac{-\bar{\kappa}_2 Q}{\Delta},$$

$$\Delta = 1 - (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2 + \bar{\kappa}_1 \bar{\kappa}_2) + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2,$$

то получим для определения  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  следующие уравнения:

$$\frac{du}{d\tau_1} = Au[\alpha_0 - u - 2v], \quad \frac{dv}{d\tau_1} = Bv[\beta_0 - 2u - v], \quad (5.122)$$

$$\beta_1 = \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const},$$

где

$$u = \alpha_1^2 a^2 k_1^2, \quad v = \alpha_2^2 b^2 k_2^2, \quad \alpha_0 = a_0 - 2e_2^2, \quad \beta_0 = b_0 - 2e_2^2,$$

$$a_0 = \frac{4}{3\lambda_2} \left( 1 - \lambda_1 \frac{k_1^2 - n_2^2}{k_1^2 - n_1^2} \right), \quad b_0 = \frac{4}{3\lambda_2} \left( 1 - \lambda_1 \frac{k_2^2 - n_2^2}{k_2^2 - n_1^2} \right),$$

$$A = \frac{3}{2} \lambda_2 \frac{n_1^2 - k_1^2}{n_1^2} > 0, \quad B = \frac{3}{2} \lambda_2 \frac{k_2^2 - n_1^2}{n_1^2} > 0,$$

$$\tau_1 = \frac{\mu n_1^3 \tau}{k_2^2 - k_1^2}.$$

Уравнения (5.122) совпадут с уравнениями (5.100), если там использовать обозначения (5.101) и заменить  $d_1^2$  на  $e_2^2$ . Следовательно, все выводы, сделанные при исследовании уравнений (5.100), справедливы и для уравнений (5.122), т. е. особые точки и их зависимость от  $a_0$ ,  $b_0$  и  $e_2^2$  (амплитуды внешнего воздействия) будут те же самые (см. табл. 3).

В случае 1 ( $a_0 < 0$ ,  $b_0 < 0$ ) исходная динамическая система при отсутствии внешней силы находится в равновесии. При включении внешней силы система переходит к периодическому движению с частотой внешней силы.

В случае 2 ( $a_0 > 0$ ,  $b_0 < 0$ ) или 3 ( $a_0 > 2b_0$ ,  $b_0 > 0$ ) система при отсутствии внешней силы совершает периодическое движение с частотой  $k_1$ . При включении внешней силы система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $p$  (частота внешней силы). При дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы (при  $e_2^2 > a_0/2$ ) система переходит к периодическому движению с частотой внешней силы.

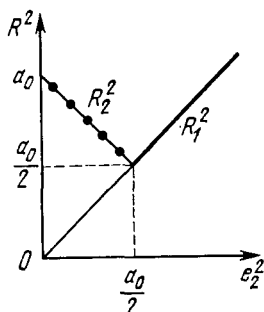


Рис. 5.35

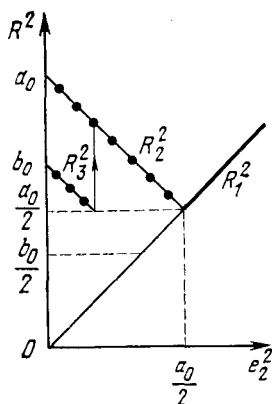


Рис. 5.36

На рис. 5.35 представлены суммы квадратов амплитуд бигармонического движения для случаев 2 и 3 ( $R_2^2 = a_0 - 2e_2^2 + e_2^2 = a_0 - e_2^2$ ) и квадрат амплитуды периодического движения ( $R_1^2 = e_2^2$ ); части рисунка, соответствующие устойчивым движениям, выделены жирно.

В случае 3 ( $a_0 > b_0$ ,  $b_0 > 0$ ,  $2b_0 > a_0$ ), в отсутствие внешней силы, система может совершать любое из двух устойчивых периодических движений с частотами  $k_1$  или  $k_2$  в зависимости от начальных условий. При включении внешней силы возможны бигармонические движения с частотами  $k_1$  и  $p$  или  $k_2$  и  $p$ . При дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы в системе возможно только бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $p$ . При  $e_2^2 > a_0/2$  система совершает периодическое движение с частотой  $p$ .

На рис. 5.36 представлена сумма квадратов амплитуд бигармонических движений  $R_2^2 = a_0 - e_2^2$ ,  $R_3^2 = b_0 - e_2^2$

и квадрат амплитуды периодического движения  $R_1^2 = e_2^2$  (устойчивые части выделены жирно).

Рассмотрим теперь случай, когда  $\bar{k}_1^2 < \bar{k}_2^2 = 1$  \*). Предполагая, что амплитуда  $Q'$  внешнего воздействия имеет порядок  $\mu$ , перепишем уравнения движения (5.120) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \bar{\kappa}_1 \frac{d\beta}{d\tau} + \bar{n}_1^2 \alpha &= \mu \bar{n}_1 \left( -\lambda_1 \frac{d\alpha}{d\tau} + Q_1 \sin \tau \right), \\ \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \bar{\kappa}_2 \frac{d\alpha}{d\tau} + \bar{n}_2^2 \beta &= \mu \bar{n}_1 \left( \frac{d\beta}{d\tau} - \lambda_2' \frac{d^3\beta}{d\tau^3} \right), \end{aligned} \quad (5.123)$$

где

$$Q_1 = \frac{Q' I_1 n_1}{I_0 p^3 (c_1 - \gamma^n)}.$$

Решение уравнений (5.123) будем искать в виде (5.118), т. е.

$$\begin{aligned} \alpha &= a \sin(\bar{k}_1 \tau + \psi) + b_1 \sin \tau + b_2 \cos \tau, \\ \beta &= \alpha_1 a \cos(\bar{k}_1 \tau + \psi) + \alpha_2 b_1 \cos \tau - \alpha_2 b_2 \sin \tau. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Уравнения (5.119) в этом случае будут

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_1} &= u [b_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - \lambda, \\ \frac{dv}{d\tau_1} &= v [b_0 - (u^2 + v^2 + 2w)], \\ \frac{dw}{d\tau_1} &= Ew [a_0 - (w + 2u^2 + 2v^2)], \\ \psi &= \text{const}, \end{aligned} \quad (5.125)$$

где

$$u = \alpha_2 b, \quad v = \alpha_1 b_1, \quad w = \alpha_1^2 k_1^2 a^2, \quad \tau_1 = \frac{3\mu n_1}{4\lambda_2'} \cdot \frac{p^2 - n_1^2}{p^2 - k_1^2} \tau,$$

$$E = 2 \frac{n_1^2 - k_1^2}{p^2 - n_1^2} > 0, \quad \lambda = \frac{4}{3\lambda_2'} Q_1,$$

$$a_0 = \frac{4}{3\lambda_2'} \left( 1 - \lambda_1 \frac{k_1^2 - n_2^2}{k_1^2 - n_1^2} \right), \quad b_0 = \frac{4}{3\lambda_2'} \left( 1 - \lambda_1 \frac{p^2 - n_2^2}{p^2 - n_1^2} \right).$$

Особые точки системы (5.125), расположенные на плоскости  $uv$  пространства  $uvw$ , соответствуют периодическим движениям маятника с частотой  $p = k_2$ . Особые точки на

\* ) Исследование случая  $\bar{k}_2^2 > \bar{k}_1^2 = 1$  приведет к тем же результатам, что и при рассмотрении сложного генератора (§ 5 гл. 5).

оси  $w$  — периодическим движениям с частотой  $k_1$ . Особые точки, расположенные вне осей, соответствуют бигармоническим движениям с частотами  $k_1$  и  $k_2 = p$ . Введем обозначение  $\rho = u^2 + v^2$ . Тогда уравнения для определения особых точек можно записать в виде

$$u^2 = \rho, v = 0, \rho [b_0 - (\rho + 2w)]^2 = \lambda^2,$$

$$w [a_0 - 2\rho - w] = 0.$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнениями (5.104) — (5.106), поэтому для анализа движения системы мы воспользуемся результатами исследования уравнений (5.103).

Рассмотрим наиболее характерные случаи.

1.  $a_0 < 0, b_0 < 0$  или  $a_0 < 0, b_0 > 0$ . Маятник совершает периодические движения с частотой  $p = k_2$ . Бигармонические движения отсутствуют.

2.  $a_0 > 0, b_0 < 0$ . Возможны два варианта:

а)  $2b_0 + 5a_0 < 0$ . Маятник при  $\lambda^2 < \lambda_3^2$  ( $\lambda_3^2 = \frac{a_0}{8} (2b_0 - a_0)^2$ ) совершает бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $p = k_2$ ; при  $\lambda^2 > \lambda_3^2$  будет только гармоническое движение с частотой  $p = k_2$ .

б)  $2b_0 + 5a_0 > 0$ . Устойчивое бигармоническое движение возможно при  $\lambda^2 < \lambda_2^2$  ( $\lambda_2^2 = \frac{4}{81} (2a_0 - b_0)^3$ ). Периодическое движение с частотой  $p = k_2$  возможно при  $\lambda^2 > \lambda_3^2$ . Здесь имеет место затягивание по  $\lambda^2$  в промежутке  $\lambda_3^2 < \lambda^2 < \lambda_2^2$ .

3.  $0 < a_0 < b_0/2$ . В отношении устойчивости этот случай совпадает со случаем  $a_0 < 0, b_0 > 0$ .

4.  $0 < b_0 < a_0/2$ . При  $\lambda^2 < \lambda_3^2$  возможно устойчивое бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $p = k_2$ ; при  $\lambda_3^2 < \lambda^2 < \lambda_2^2$  возможны как бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $k_2 = p$ , так и периодическое движение с частотой  $p = k_2$ . При  $\lambda^2 > \lambda_2^2$  возможно только периодическое движение с частотой  $p = k_2$ .

5.  $2b_0 > a_0 > 0$ . При  $\lambda^2 < \lambda_3^2$  возможно устойчивое бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $p = k_2$ ; при  $\lambda^2 > \lambda_3^2$  устойчиво только периодическое движение с частотой  $p = k_2$ .



6.  $2a_0 > b_0 > 0$ . При  $\lambda^2 < \lambda_2^2$  возможно устойчивое бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $p = k_2$  и при  $\lambda^2 > \lambda_2^2$  — только периодическое движение с частотой  $p = k_2$ .

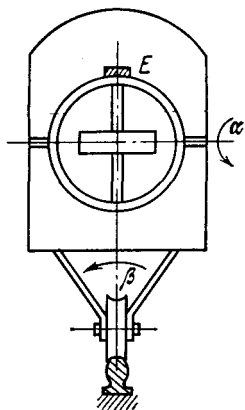


Рис. 5.37

В качестве второго примера рассмотрим динамическую систему с гироскопическим стабилизатором [10, 11]. Конкретным примером такой системы может служить однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией. При отсутствии момента, ускоряющего прецессию кольца гироскопа, такая механическая система не имеет устойчивых режимов. Для получения устойчивых режимов вводят специальный момент [9]. Будем аппроксимировать этот специальный момент (сервомомент) кубической параболой. Уравнения малых колебаний такой механической системы будут (рис. 5.37)

$$A_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} - I\omega \frac{d\beta}{dt} - ph_1\alpha = -\gamma'' \frac{d\alpha}{dt} + M_\alpha \left( \frac{d\alpha}{dt} \right),$$

$$I_0 \frac{d^2\beta}{dt^2} + I\omega \frac{d\alpha}{dt} - Ph_2\beta = -\gamma' \frac{d\beta}{dt} + Q' \sin qt,$$

где

$$A_0 = A' + B' + \frac{p}{g} h_1^2,$$

$$I_0 = I_B + \frac{Q_1 + Q_2}{g} h^2 + A' + C_1 + \frac{p}{g} (h + h_1)^2,$$

$\alpha$  — угол поворота кольца гироскопа,  $\beta$  — угол отклонения вагона от вертикали,  $\omega$  — собственная угловая скорость гироскопа,  $I_B$  — момент инерции вагона относительно рельса,  $A'$  — экваториальный момент инерции гироскопа;  $B'$  — экваториальный момент инерции кольца,  $I$  — полярный момент инерции гироскопа,  $C_1$  — полярный момент инерции кольца,  $Q_1$  — вес гироскопа,  $Q_2$  — вес рамы,  $p$  — вес груза  $E$ ,  $P$  — вес системы (без груза),  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  — коэффициенты вязкого трения,  $M_\alpha$  — стабилизирующий момент,  $h$  — расстояние от оси вращения кольца гироскопа до рельса,  $h_1$  — расстояние от оси вращения кольца до груза  $E$ , создающего неустойчивость изображенного на

рис. 5.37 положения кольца,  $h_2$  — расстояние от центра тяжести системы (без груза) до рельса,  $Q' \sin qt$  — внешняя сила, действующая на вагон.

Вводя обозначения

$$\kappa_1 = \frac{I\omega}{A_0}, \quad \kappa_2 = \frac{I\omega}{I_0}, \quad n_1^2 = \frac{ph_1}{A_0}, \quad n_2^2 = \frac{Ph_2}{I_0}, \quad \tau = qt$$

и принимая

$$M_\alpha = \left[ \alpha' - \beta' \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right] \frac{d\alpha}{d\tau} = \left[ \alpha' - \beta' q^2 \left( \frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 \right] q \frac{d\alpha}{d\tau} \\ (\alpha' > 0, \beta' > 0),$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \frac{\kappa_1}{q} \frac{d\beta}{d\tau} - \frac{n_1^2}{q^2} \alpha = - \frac{\gamma''}{A_0q} \frac{d\alpha}{d\tau} + \\ + \frac{1}{A_0q} \left[ \alpha' - \beta' q^2 \left( \frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d\alpha}{d\tau}, \\ \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{\kappa_2}{q} \frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{n_2^2}{q^2} \beta = - \frac{\gamma'}{I_0q} \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{Q'}{I_0q^2} \sin \tau.$$

Предположим, что вязкое трение, а также момент  $M_\alpha$  малы по сравнению с моментами сил инерции при парциальных колебаниях, т. е. что безразмерные величины удовлетворяют условиям

$$\frac{\gamma''}{A_0q} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{I_0q} \ll 1, \quad \frac{\alpha'}{A_0q} \ll 1, \quad \frac{\beta'q}{A_0} \ll 1.$$

Если ввести в рассмотрение малый параметр

$$\mu = \frac{\alpha' - \gamma''}{A_0n_1} > 0,$$

характеризующий близость системы к линейной, и обозначения

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\kappa_1}{q}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{q}, \quad \bar{n}_1^2 = \frac{n_1^2}{q^2}, \quad \bar{n}_2^2 = \frac{n_2^2}{q^2}, \\ \beta'' = \frac{\beta'}{\alpha' - \gamma''} q, \quad \lambda = \frac{A_0\gamma'}{I_0(\alpha' - \gamma'')}, \quad Q = \frac{Q'}{I_0q^2},$$

то уравнения движения окончательно примут вид

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \bar{\kappa}_1 \frac{d\beta}{d\tau} - \bar{n}_1^2 \alpha = \mu \bar{n}_1 \left[ \frac{d\alpha}{d\tau} - \beta'' \left( \frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \bar{\kappa}_2 \frac{d\alpha}{d\tau} - \bar{n}_2^2 \beta = \mu \bar{n}_1 \left( -\lambda \frac{d\beta}{d\tau} \right) + Q \sin \tau. \quad (5.126)$$

Уравнения (5.126) записаны в форме уравнений (5.110).  
Если решение этой системы искать в виде

$$\alpha = a \sin (\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + b \sin (\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + e \cos \tau, \quad (5.127)$$

$\beta = \alpha_1 a \cos (\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + \alpha_2 b \cos (\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + d \sin \tau$ ,  
где

$$\alpha_1 = \frac{k_1^2 + n_1^2}{\kappa_1 k_2} = \frac{\kappa_2 k_1}{k_1^2 + n_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2^2 + n_1^2}{\kappa_1 k_2} = \frac{\kappa_2 k_2}{k_2^2 + n_2^2},$$

$\bar{k}_1^2$  и  $\bar{k}_2^2$  ( $\bar{k}_2^2 > \bar{k}_1^2$ ) — корни уравнения

$$k^4 + (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2 - \bar{\kappa}_1 \bar{\kappa}_2) \bar{k}^2 + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2 = 0 \quad (\bar{k}q = k),$$

$$e = \frac{\kappa_1 Q q^3}{q^4 + (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) q^2 + n_1^2 n_2^2},$$

$$d = - \frac{Q q^2 (q^2 + n_1^2)}{q^4 + (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) q^2 + n_1^2 n_2^2},$$

то уравнения (5.112) будут

$$\frac{du}{d\tau_1} = Au (a_0 - u - 2v - 2e^2),$$

$$\frac{dv}{d\tau_1} = Bv (b_0 + v + 2u + 2e^2), \quad (5.128)$$

$$\beta_1 = \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const},$$

где

$$u = \frac{k_2^2 b^2}{q^2} > 0, \quad v = \frac{k_1^2 a^2}{q^2} > 0,$$

$$A = \frac{3\beta (k_2^2 + n_2^2)}{2n_1^2}, \quad B = \frac{3\beta (k_1^2 + n_2^2)}{2n_1^2},$$

$$a_0 = \frac{4}{3\beta} \left( 1 - \lambda \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \alpha_2^2 \right), \quad b_0 = - \frac{4}{3\beta} \left( 1 - \lambda \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \alpha_1^2 \right),$$

$$\tau_1 = \frac{\mu n_1^3 \tau}{2(k_2^2 - k_1^2)}.$$

Значения  $u$  и  $v$ , соответствующие особым точкам уравнений (5.128), найдем из уравнений

$$\begin{aligned} Au (a_0 - u - 2v - 2e^2) &= 0, \\ Bv (b_0 + v + 2u + 2e^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Особые точки будут  $P_1: u_1 = 0, v_1 = 0$ . При  $e = 0$  эта точка соответствует состоянию равновесия исходной системы; при  $e \neq 0$  — движению с частотой  $q$  внешней силы.

Особая точка  $P_2: u_2 = 0, v_2 = -b_0 - 2e^2$ . При  $e = 0$  точка  $P_2$  соответствует периодическому движению с частотой  $k_1$ ; при  $e \neq 0$  — бигармоническому движению с частотами  $k_1$  и  $q$ .

Особая точка  $P_3: u_3 = a_0 - 2e^2, v_3 = 0$ . При  $e = 0$  точка  $P_3$  соответствует периодическому движению с частотой  $k_2$ ; при  $e \neq 0$  — бигармоническому движению с частотами  $k_2$  и  $q$ .

Особая точка  $P_4: u_4 = -1/3 (a_0 + 2b_0 + 2e^2), v_4 = = 1/3 (2a_0 + b_0 - 2e^2)$ . При  $e = 0$  точка  $P_4$  соответствует бигармоническому движению с частотами  $k_1$  и  $k_2$ ; при  $e \neq 0$  — тригармоническому движению системы с частотами  $k_1, k_2$  и  $q$ . Корни характеристического уравнения, определяющие характер особых точек, будут:

для точки  $P_1$   $S_1 = A (a_0 - 2e^2), S_2 = B (b_0 + 2e^2)$ ;

для точки  $P_2$   $S_1 = A (a_0 + 2b_0 + 2e^2), S_2 = = -B (b_0 + 2e^2)$ ;

для точки  $P_3$   $S_1 = B (2a_0 + b_0 - 2e^2), S_2 = = -A (a_0 - 2e^2)$ ;

для точки  $P_4$  характеристическое уравнение будет иметь вид

$$S^2 + (Au_4 - Bv_4)S + 3ABu_4v_4 = 0.$$

Если точка  $P_4$  существует, то  $u_4 > 0$  и  $v_4 > 0$  и, следовательно,  $3ABu_4v_4 > 0$ , т. е. действительных корней разных знаков характеристическое уравнение иметь не будет. Таким образом, точка  $P_4$  будет особой точкой типа узла или фокуса. Для того чтобы  $P_4$  была устойчивой особой точкой, нужно, чтобы действительные части корней характеристического уравнения были отрицательны, т. е. должно выполняться неравенство

$$Au_4 - Bv_4 > 0 \text{ или } \frac{u_4}{v_4} > \alpha',$$

где

$$\alpha' = \frac{B}{A} = \frac{k_1^2 + n_2^2}{k_2^2 + n_2^2} < 1,$$

откуда условие устойчивости точки  $P_4$  может быть записано в виде

$$2e^2 < \frac{2|b_0| - a_0 - \alpha'(2a_0 - |b_0|)}{1 - \alpha'}.$$

Н. Н. Баутин показал, что уравнения (5.128) предельных циклов не имеют и при смене устойчивости точка  $P_4$  будет центром. Для достаточно больших  $u$  и  $v$ , в силу положительности  $A$  и  $B$ ,  $du/d\tau_1 < 0$ ,  $dv/d\tau_1 > 0$ . Таким образом, положение и характер собых точек определяются значениями величин  $a_0$ ,  $b_0$  и  $e$ . Меняя параметры динамической системы, можно получить различные значения  $a_0$  и  $b_0$ , следовательно, и различные режимы движения системы.

В качестве параметра, характеризующего изменение параметров системы, можно взять отношение парциальных частот  $\zeta = n_2^2/n_1^2$ . Из уравнения для определения  $k_1^2$  и  $k_2^2$  имеем

$$k_1^2 = \frac{1}{2} [- (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) - \sqrt{(n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2)^2 - 4n_1^2 n_2^2}], \quad (5.130)$$

$$k_2^2 = \frac{1}{2} [- (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) + \sqrt{(n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2)^2 - 4n_1^2 n_2^2}].$$

Так как

$$a_0 = \frac{4}{3\beta''} \left( 1 - \lambda \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \alpha_2^2 \right) = \frac{4}{3\beta''} \left( 1 - \lambda \frac{k_2^2 + n_1^2}{k_2^2 + n_2^2} \right),$$

$$b_0 = - \frac{4}{3\beta''} \left( 1 - \lambda \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \alpha_1^2 \right) = - \frac{4}{3\beta''} \left( 1 - \lambda \frac{k_1^2 + n_1^2}{k_1^2 + n_2^2} \right),$$

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n_2^2}{n_1^2}, \quad \frac{\kappa_1 \kappa_2}{n_1^2} = \sigma_0 \frac{n_2^2}{n_1^2}, \quad \lambda_0 = \frac{\gamma' p h_1}{(\alpha' - \gamma'') P h_2},$$

$$\sigma_0 = \frac{I^2 \omega^2}{P h_2}, \quad \zeta = \frac{n_2^2}{n_1^2},$$

то, используя (5.130), перепишем  $a_0$  и  $b_0$  в виде

$$a_0 = \frac{4}{3\beta''} [1 - \lambda_0 M(\zeta)], \quad b_0 = - \frac{4}{3\beta''} [1 - \lambda_0 N(\zeta)],$$

где

$$M(\zeta) = \zeta \frac{(\sigma_0 - 1)\zeta + 1 + \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}{(\sigma_0 + 1)\zeta - 1 + \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}},$$

$$N(\zeta) = \zeta \frac{(\sigma_0 - 1)\zeta + 1 - \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}{(\sigma_0 + 1)\zeta - 1 - \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}.$$

Мы рассматриваем только те значения  $n_1^2$ ,  $n_2^2$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , при которых  $k_1^2$  и  $k_2^2$  будут действительными и положи-

тельными, т. е. когда консервативная система стабилизирована гироскопом. В нашем случае это будет для  $\zeta > \zeta_0$ , где

$$\zeta_0 = \frac{\sigma_0 + 1 + 2\sqrt{\sigma_0}}{(\sigma_0 - 1)^2}.$$

На рис. 5.38 (для  $\lambda_0 < 1$ ) и рис. 5.39 (для  $\lambda_0 > 1$ ) построены графики  $z_1 = \frac{3\beta''}{4} a_0(\zeta)$  и  $z_2 = \frac{3\beta''}{4} b_0(\zeta)$  при фиксированных значениях  $\sigma_0$  и  $\lambda_0$ . Отметим, что при изменении  $\sigma_0$  качественный вид графиков не меняется. Эти графики позволяют установить возможные соотношения между  $a_0$  и  $b_0$  при различных значениях  $\zeta$ .

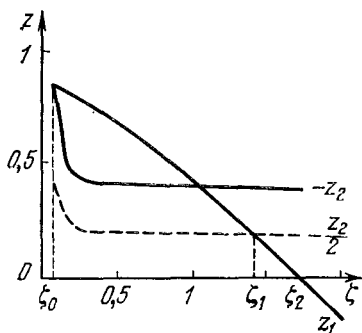


Рис. 5.38

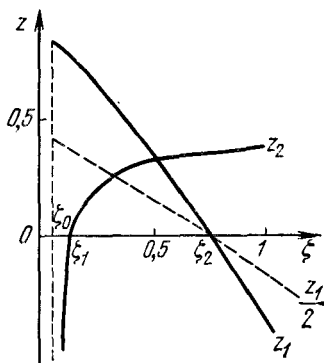


Рис. 5.39

Рассмотрим подробно случай, когда  $1 < \zeta < \zeta_1$  (рис. 5.38). В этом случае  $a_0 > 0$ ,  $b_0 < 0$ ,  $|b_0| > a_0$ ,  $2a_0 > |b_0|$ .

Для точки  $P_1$  корни характеристического уравнения будут действительными отрицательными при  $a_0 < 2e^2 < |b_0|$ . При других значениях  $e^2$  точка  $P_1$  будет седлом.

Точка  $P_2$  будет существовать, если  $|b_0| - 2e^2 > 0$ , но при этом корни характеристического уравнения будут действительными разных знаков, т. е. точка  $P_2$  будет седлом при любых значениях  $e^2$ . Это значит, что для данных значений  $\zeta$  в системе устойчивых движений с частотами  $k_1$  (при  $e = 0$ ) и  $k_1$  и  $q$  (при  $e \neq 0$ ) не может быть.

Точка  $P_3$  будет существовать, если  $a_0 - 2e^2 > 0$ . При  $2a_0 - |b_0| > 2e^2 > 0$  корни  $S_1 > 0$ ,  $S_2 < 0$ , т. е.  $P_3$  — седло; при  $a_0 > 2e^2 > 2a_0 - |b_0|$  корни  $S_1 < 0$ ,  $S_2 < 0$ ,

т. е. точка  $P_3$  — устойчивый узел (так как оси  $u$  и  $v$  являются интегральными кривыми).

Точка  $P_4$  существует, если

$$a_0 - 2|b_0| + 2e^2 < 0, \quad 2a_0 - |b_0| - 2e^2 > 0,$$

т. е. только для  $2e^2 < 2a_0 - |b_0|$ .

Точка  $P_4$  будет устойчивым фокусом или устойчивым узлом при  $2a_0 - |b_0| > 2e^2 > 0$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае при отсутствии внешней силы ( $e = 0$ ) система совершает устойчивое

бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $k_2$ .

При наличии внешней силы, при  $2a_0 - |b_0| > 2e^2 > 0$  система совершает устойчивое тригармоническое движение с частотами  $k_1$ ,  $k_2$  и  $q$  (частота внешней силы).

При  $a_0 > 2e^2 > 2a_0 - |b_0|$  система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами  $k_2$  и  $q$ .

При  $|b_0| > 2e^2 > a_0$  система совершает пе-

риодическое движение с частотой внешней силы.

При  $2e^2 > |b_0|$  система становится неустойчивой.

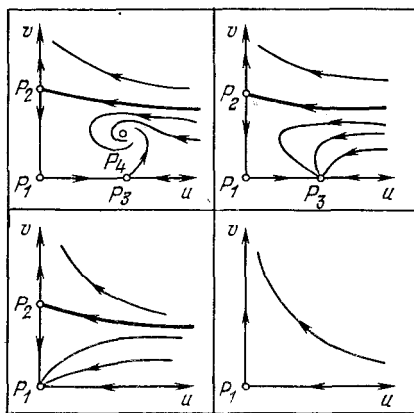
На рис. 5.40 приведены картины фазовой плоскости  $uv$ . На рис. 5.41 представлены графики соответственно

суммы квадратов амплитуд тригармонического движения  $R_1^2 = u_4 + v_4 + e^2 = \frac{a_0 + |b_0| - e^2}{3}$ , суммы квадратов ам-

плитуд бигармонического движения  $R_2^2 = u_3 + e^2 = a_0 - e^2$  и периодического движения  $R_1^2 = e^2$ .

В табл. 4 приведены другие случаи, когда в системе возможны устойчивые движения. Эти движения возможны при  $\lambda_0 < 1$ . При  $\lambda_0 > 1$  в системе устойчивых режимов не существует.

В случае  $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$  при  $e = 0$  система совершает устойчивое периодическое движение с частотой  $k_2$ ; при  $a_0 > 2e^2 > 0$  система совершает устойчивое бигармониче-



[Рис. 5.40

ское движение с частотами  $k_2$  и  $q$ ; при  $|b_0| > 2e^2 > a_0$  система совершает устойчивое периодическое движение с частотой  $q$ . При  $2e^2 > |b_0|$  устойчивых режимов нет.

На рис. 5.42 показаны графики квадрата амплитуд бигармонических движений  $R_1^2 = u_3 + e^2 = a_0 - e^2$  и квадрата амплитуды периодического движения  $R_2^2 = e^2$ .

В случае  $\xi > \xi_2$  при  $e = 0$  система находится в покое; при  $|b_0| > 2e^2 > 0$  система совершает периодическое

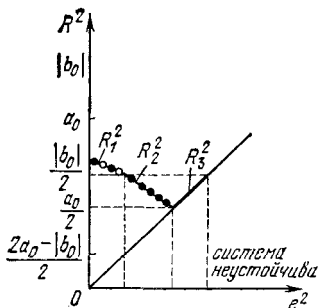


Рис. 5.41

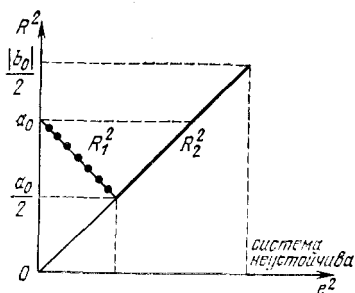


Рис. 5.42

движение с частотой  $q$  внешней силы; при  $2e^2 > |b_0|$  устойчивых режимов не существует.

Рассмотрим теперь случай «резонанса», т. е. случай, когда  $k_1 < k_2 = q$ . Предположим, что амплитуда внешней

Таблица 4

Случай	$e$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$e = 0$	Седло	Седло	Устойчивый узел	—
$a_0 > 0$	$a_0 > 2e^2 > 0$	Седло	Седло	Устойчивый узел	—
$b_0 < 0$	$ b_0  > 2e^2 > a_0$	Устойчивый узел	Седло	—	—
$2a_0 <  b_0 $	$2e^2 >  b_0 $	Седло	—	—	—
$\xi_2 < \xi$	$e = 0$	Устойчивый узел	Седло	—	—
$a_0 < 0$	$ b_0  > 2e^2 > 0$	Устойчивый узел	Седло	—	—
$b_0 < 0$	$2e^2 >  b_0 $	Седло	—	—	—



силы пропорциональна  $\mu$ , т. е.  $Q' = \mu Q''$ , где  $Q'' = Q' A_0 n_1 / (\alpha' - \gamma'')$ . Уравнения движения при этом будут

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \bar{\kappa}_1 \frac{d\beta}{d\tau} - \bar{n}_1^2 \alpha &= \mu \bar{n}_1 \left[ \frac{d\alpha}{d\tau} - \beta'' \left( \frac{d\alpha}{d\tau} \right)^3 \right], \\ \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \bar{\kappa}_2 \frac{d\alpha}{d\tau} - \bar{n}_2^2 \beta &= \mu \bar{n}_1 \left[ -\lambda \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{Q''}{\bar{r}_2} \sin \tau \right]. \end{aligned}$$

Если искать решение этих уравнений в виде (5.118):

$$\begin{aligned} \alpha &= a \sin(\bar{k}_1 \tau + \psi) + b_1 \sin \tau + b_2 \cos \tau, \\ \beta &= \alpha_1 a \cos(\bar{k}_1 \tau + \psi) + \alpha_2 b_1 \cos \tau - \alpha_2 b_2 \sin \tau, \end{aligned}$$

то, используя уравнения (5.119), получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_2} &= Au [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - Q, \\ \frac{dv}{d\tau_2} &= Av [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)], \\ \frac{dw}{d\tau_2} &= Bw [b_0 + 2u^2 + 2v^2 + w], \quad \psi = \text{const}, \end{aligned} \quad (5.131)$$

где

$$\begin{aligned} u &= b_1, \quad v = b_2, \quad w = a^2 \frac{k_1^2}{q^2}, \quad \tau_2 = \frac{\mu n_1 (q^2 + n_2^2)}{2(q^2 - k_1^2)} t, \\ a_0 &= \frac{4}{3\beta''} \left( 1 - \lambda \frac{q^2 + n_1^2}{q^2 + n_2^2} \right), \quad b_0 = -\frac{4}{3\beta''} \left( 1 - \lambda \frac{k_1^2 + n_1^2}{k_1^2 + n_2^2} \right), \\ A &= \frac{3}{4} \beta'' > 0, \quad B = \frac{3}{2} \beta'' \frac{k_1^2 + n_1^2}{q^2 + n_2^2} > 0, \\ Q &= \frac{A_0 n_1}{I_0 (\alpha' - \gamma'')} \frac{Q'}{q^2 + n_2^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что  $a_0$  и  $b_0$  те же самые, что и в предыдущем случае. Особые точки и линии системы уравнений (5.131) определяются из уравнений

$$\begin{aligned} Au [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - Q &= 0, \\ v [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] &= 0, \\ w [b_0 + 2(u^2 + v^2) + w] &= 0. \end{aligned}$$

Вводя обозначения  $\rho = u^2 + v^2$  и  $Q_0 = Q/A$ , получаем

$$\begin{aligned} \rho &= u^2, \quad v = 0, \quad \rho (a_0 - \rho - 2w)^2 = Q_0^2, \\ w (b_0 + 2\rho + w) &= 0. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Найдем сначала особые точки на плоскости  $w = 0$ . Из уравнений (5.132) следует, что

$$\rho = u^2, v = 0, \rho (a_0 - \rho)^2 = Q_0^2,$$

т. е. особые точки, соответствующие периодическим движениям с частотой  $k_2 = q$ , расположены на оси  $u$ . Резонансную кривую этих движений получим, заменяя  $\rho$  на  $R_1^2$ ,

$$R_1^2 (a_0 - R_1^2)^2 = Q_0^2. \quad (5.133)$$

Характеристическое уравнение для особых точек на оси  $u$  будет

$$[A (a_0 - 3R_1^2) - S] [A (a_0 - R_1^2) - S] [B (b_0 + 2R_1^2) - S] = 0.$$

Следовательно, условия устойчивости этих точек имеют вид (все корни должны быть отрицательными)  $a_0 < < R_1^2 < -b_0/2$ . На оси  $w$  особых точек нет, следовательно, при  $Q_0 \neq 0$  гармонические движения с частотой  $k_1$  невозможны.

Перейдем к рассмотрению особых точек вне осей  $u, v, w$ . Особые точки вне осей  $u, v, w$  соответствуют бигармоническим движениям системы с частотами  $k_1$  и  $k_2 = q$ . Введем в рассмотрение величину  $R_2^2 = \rho + w$ . Тогда на основании (5.132) получим

$$\rho = -b_0 - R_2^2, w = b_0 + 2R_2^2 \quad (5.134)$$

и, следовательно, уравнение

$$-(b_0 + R_2^2) (a_0 - b_0 - 3R_2^2) = Q_0^2 \quad (5.135)$$

будет определять значения  $R_2^2$ , соответствующие бигармоническим движениям. В силу условий (5.134), область существования уравнения (5.135) ограничена условием

$$-\frac{b_0}{2} < R_2^2 < -b_0.$$

Характеристическое уравнение для определения устойчивости бигармонических режимов имеет вид

$$[A (a_0 - b_0 - 3R_2^2) - S] \times \\ \times \{S^2 - S [A (a_0 + b_0 - R_2^2) + B (b_0 + 2R_2^2)] + \\ + AB (2R_2^2 + b_0) (a_0 - 7b_0 - 9R_2^2)\} = 0.$$

Таблица 5

$\lambda_0 < 1$				$\lambda_0 > 1$	
1	2	3	4	5	6
$\xi_0 < \xi < 1$	$1 < \xi < \xi_1$	$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$\xi > \xi_2$	$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$\xi > \xi_2$
$a_0 > 0$ $b_0 < 0$ $a_0 >  b_0 $ $a_0 < 2 b_0 $	$a_0 > 0$ $b_0 < 0$ $a_0 <  b_0 $ $2a_0 >  b_0 $	$a_0 > 0$ $b_0 < 0$ $2a_0 <  b_0 $	$a_0 < 0$ $b_0 < 0$	$a_0 > 0$ $b_0 > 0$	$b_0 > 0$ $a_0 < 0$

Условия устойчивости, очевидно, будут

$$\frac{a_0 - b_0}{3} < R_2^2 < \frac{a_0 - 7b_0}{9},$$

$$A(a_0 + b_0 - R_2^2) + B(b_0 + 2R_2^2) < 0.$$

Заметим теперь, что в плоскости  $R^2 Q_0^2$  кривая (5.133) имеет вертикальные касательные в точках

$$R_1^2 = a_0, \quad Q_0^2 = 0, \quad R_1^2 = \frac{a_0}{3}, \quad Q_{01}^2 = 4\left(\frac{a_0}{3}\right)^3,$$

кривая (5.135) — в точках

$$R_2^2 = \frac{a_0 - b_0}{3}, \quad Q_0^2 = 0,$$

$$R_2^2 = \frac{a_0 - 7b_0}{9}, \quad Q_{02}^2 = -\frac{4}{81}(2b_0 + a_0)^3.$$

Кривые (5.133) и (5.135) всегда пересекаются в точке

$$R^2 = -\frac{b_0}{2}, \quad Q_{03}^2 = -\frac{b_0}{8}(2a_0 + b_0)^3.$$

Перейдем теперь к исследованию движений вагона при изменении амплитуды внешней силы. Из рис. 5.38 и 5.39 можно составить табл. 5 возможных соотношений между  $a_0$  и  $b_0$  при различных значениях  $\xi = n_2/n_1^2$ .

Остановимся только на рассмотрении случаев 2, 3 и 4 как наиболее характерных.

В случае 2 при  $Q_0 = 0$  система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $k_2 = q$ . При  $0 < Q_0^2 < Q_{02}^2$  система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $k_2 = q$ . При  $Q_0^2 > Q_{02}^2$  устойчивых режимов движений нет.

В случае 3 при  $Q_0 = 0$  система совершает периодическое движение с частотой  $k_2 = q$ . При  $0 < Q_0^2 < Q_{03}^2$  система совершает периодическое движение с частотой  $k_2 = q$ ; при  $Q_{03}^2 < Q_0^2 < Q_{02}^2$  система совершает бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $k_2 = q$ ; при  $Q_0^2 > Q_{02}^2$  устойчивых движений нет (рис. 5.43).

В случае 4 при  $Q_0 = 0$  исходная система находится в состоянии равновесия. При  $Q_0 \neq 0$  возможны два подслучая:

а)  $2 |a_0| > 5 |b_0|$ . При  $0 < Q_0^2 < Q_{03}^2$  система совершает периодическое движение с частотой  $k_2 = q$ ; при  $Q_0^2 > Q_{03}^2$  устойчивых режимов нет.

б)  $2 |a_0| < 5 |b_0|$ . При  $0 < Q_0^2 < Q_{03}^2$  система совершает периодическое движение с частотой  $k_2 = q$ ; при  $Q_{03}^2 < Q_0^2 < Q_{02}^2$  совершается бигармоническое движение с частотами  $k_1$  и  $k_2 = q$ ; при  $Q_0^2 > Q_{02}^2$  устойчивых режимов нет.

Если провести аналогичным образом исследование случая  $k_1 = q < k_2$ , то можно сделать следующие выводы: если в отсутствие внешней силы система совершает устойчивые бигармонические движения, то при включении внешней силы устойчивый бигармонический режим сохраняется; при дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы система или теряет устойчивые режимы, или в ней возникает устойчивый периодический режим с частотой внешней силы, который исчезает при достижении амплитудой внешней силы определенного значения.

Если в отсутствии внешней силы система совершает периодическое движение с частотой  $k_2$ , то при включении внешней силы возникает устойчивый бигармонический режим, который затем переходит в устойчивое периодическое движение с частотой  $k_1 = q$ ; при дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы система теряет устойчивые режимы. Если в отсутствие внешней силы система находится в покое, то при включении внешней силы наступает периодический режим с частотой  $k_1 = q$ ; при дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы система теряет устойчивые режимы.

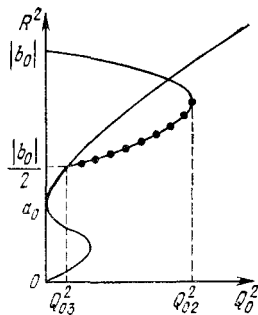


Рис. 5.43

## Г Л А В А 6

# РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ (СТАРШИХ) ПРОИЗВОДНЫХ

### § 1. Рассмотрение вырожденных систем с помощью гипотезы скачка

Как известно, исследование поведения какой-либо динамической системы всегда начинается с построения математической модели такой системы, т. е. с решения вопроса о том, что является определяющим для поведения системы в данных условиях, а что второстепенным. Однако заранее сказать, что сделанные предположения являются правильными и полученная модель правильно отражает поведение реальной системы, не представляется возможным до сравнения теории и эксперимента.

Обычно при построении математической модели динамической системы пренебрегают теми или иными параметрами, считая их малыми, несущественными, и тем самым получают математическую модель более простую, чем при учете всех параметров, описываемую системой дифференциальных уравнений более низкого порядка, так называемую вырожденную систему. Но при этом возможно возникновение ситуации, когда в некоторые моменты времени полученная система уравнений не дает однозначного ответа о поведении системы. Это значит, что среди отброшенных «малых» параметров имеются такие, влиянием которых во все время движения системы пренебрегать нельзя, несмотря на их малость. Очевидно, что одним из путей выхода из этого положения может быть учет ранее отбрасываемых параметров, но при этом возрастает порядок дифференциальных уравнений, описывающих систе-

му, и, следовательно, возрастают трудности математического исследования.

Другим путем разрешения возникшего положения при сохранении упрощенной модели может служить введение какой-либо физической гипотезы о поведении системы в этой ситуации, например гипотезы «скачка», когда физически обосновывается скачкообразный переход системы из одного состояния в другое.

Остановимся в дальнейшем на рассмотрении динамической системы с одной степенью свободы. Рассмотрим движение материальной точки под действием восстанавливающей силы в среде с сопротивлением, зависящим от скорости. Дифференциальное уравнение такой системы может быть записано в виде

$$m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + cx = 0.$$

Если в этом уравнении пренебречь членом, содержащим массу  $m$ , то получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\varphi(\dot{x}) + cx = 0,$$

которое уже описывает движение вырожденной системы. Разрешая это уравнение относительно  $\dot{x}$ , получим

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Если же пренебречь упругостью, то дифференциальное уравнение примет вид

$$m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = \psi(y),$$

где

$$y = \dot{x}, \quad \psi(y) = -\frac{1}{m} \varphi(y).$$

Задачей настоящего параграфа и является изучение движения таких вырожденных систем.

Пусть движение вырожденной системы описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{6.1}$$

где  $f(x)$  — аналитическая функция. Не останавливаясь на доказательстве существования и единственности реше-

ния этого уравнения [1], выясним, какие движения возможны в этой системе.

Если уравнение  $f(x) = 0$  не имеет действительных корней, то динамическая система, описываемая уравнением (6.1), состояний равновесия не имеет. Следовательно,

$dx/dt$  все время сохраняет знак, и функция  $x(t)$  или монотонно возрастает, или монотонно убывает.

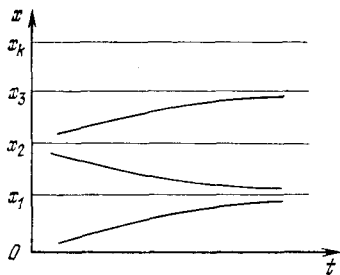


Рис. 6.1

Предположим теперь, что уравнение  $f(x) = 0$  имеет  $k$  действительных корней  $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_k$ . Эти корни соответствуют состояниям равновесия системы. Решения  $x = x_1, x = x_2, \dots, \dots, x = x_k$  на плоскости  $tx$  представляют собой прямые, параллельные оси  $t$  (рис. 6.1).

В силу теоремы существования и единственности решения уравнений (6.1) интегральные кривые не могут пересекаться и, следовательно, все другие решения находятся внутри полос, образуемых решениями  $x = x_1, x = x_2, \dots, \dots, x = x_k$  (рис. 6.1). Внутри полос функция  $f(x)$  знака не меняет и решения монотонны и, следовательно, если  $f(x)$  — аналитическая функция, то уравнение (6.1) периодических решений иметь не может.

Фазовая плоскость для уравнения (6.1) вырождается в фазовую прямую. Рассмотрим представление движения на этой фазовой прямой. Согласно теореме о единственности решения уравнения (6.1), начальное условие при  $t = t_0, x = x_0$  однозначно определяет дальнейшее движение изображающей точки. Характер движения изображающей точки не будет зависеть от момента времени  $t_0$ , так как уравнение (6.1) явно от времени не зависит. Это значит, что каждая отдельная фазовая траектория на фазовой прямой соответствует не одному движению, а бесконечному множеству движений, соответствующим различным  $t_0$ .

Траекториями изображающей точки на фазовой прямой (оси  $x$ ) могут быть точки (состояния равновесия), отрезки прямой (между состояниями равновесия), полупрямая (от состояния равновесия до бесконечности) и, наконец, вся прямая, когда  $f(x) = 0$  не имеет действительных

корней. Отметим, что изображающая точка не может достигнуть состояния равновесия за конечный промежуток времени, так как это противоречило бы теореме о единственности решения. Рассмотрим вспомогательную плоскость  $xz$ , где  $z = dx/dt$ . Если  $z = f(x)$  ось  $x$  не пересекает, то фазовой траекторией будет вся ось  $x$ . Пусть  $z = f(x)$  пересекает ось  $x$  в точках  $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_k$  (рис. 6.2). Если  $f(x) < 0$ , то изображающая точка движется в сторону уменьшения  $x$  (влево), если  $f(x) > 0$ , — то в сторону увеличения  $x$ . На рис. 6.2 показаны возможные фазовые траектории изображающей точки: состояния равновесия, отрезки между состояниями равновесия и полупрямые (от состояния равновесия до бесконечности).

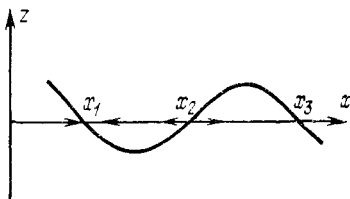


Рис. 6.2

Очевидно, что характер разбиения фазовой прямой на траектории целиком определяется состояниями равновесия.

Перейдем к вопросу о возможности периодических решений в вырожденной системе, описываемой уравнением (6.1). Как уже было установлено, дифференциальное уравнение (6.1), если  $f(x)$  — аналитическая функция, периодических решений не имеет. Можно также утверждать, что если  $f(x)$  — однозначная функция, то непрерывных периодических движений также не будет, так как при непрерывных периодических движениях система должна дважды проходить через одно и то же значение  $x$  с двумя различными значениями  $dx/dt$ .

Покажем на примере, что если  $f(x)$  — однозначная функция, то периодические движения в системе возможны тогда, когда уравнение (6.1) хотя бы в некоторых точках не определяет движения системы или теряет смысл для каких-либо значений переменных. В качестве такого примера рассмотрим теорию механических релаксационных (разрывных) колебаний, данную Хайкиным и Кайдановским [9]. Колодка малой массы  $m$  насажена с большим трением на равномерно вращающийся вал и соединена с неподвижной станиной при помощи пружины (рис. 6.3). Уравнение движения колодки при условии, что  $m = 0$ , имеет вид

$$c\phi = M(\Omega - \dot{\phi}), \quad (6.2)$$



где  $c$  — коэффициент упругости пружины,  $\Omega$  — угловая скорость вала,  $\phi$  — абсолютная угловая скорость колодки,  $M$  — функция, выражающая зависимость момента силы трения от относительной скорости точек колодки,

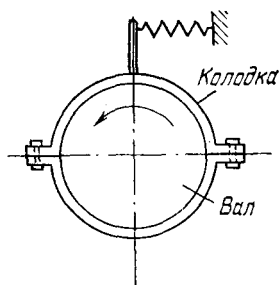


Рис. 6.3

соприкасающихся с валом, причем при  $\phi = \Omega$  —  $M_0 \leq M(0) \leq M_0$ , где  $M_0$  — максимальное значение момента силы трения покоя. Предположим, что схематизированная характеристика момента трения имеет вид, показанный на рис. 6.4. Для наглядности изображения движения вместо фазовой прямой введем фазовую кривую, в качестве которой возьмем характеристику трения, что можно сделать, так как в силу уравнения (6.2) координата  $\phi$  пропорциональна моменту трения

(это конечно верно только там, где уравнение (6.2) отображает движение колодки). На рис. 6.4 по оси абсцисс откладываем относительную скорость  $\omega = \Omega - \phi$ . Если  $\omega = 0$ , то колодка движется вместе с валом;  $\omega = \Omega$  соответствует отсутствию абсолютного движения колодки,  $\phi = 0$  — единственное состояние равновесия. При рассмотрении принятой характеристики трения нужно всегда иметь в виду, что пока  $\omega = 0$ , момент силы трения может принимать любое значение от нуля до  $M_0$  — момента силы трения покоя, т. е. характеристика трения имеет вертикальную ветвь, совпадающую с осью ординат на участке от  $M = -M_0$  до  $M = M_0$ . В силу того, что масса колодки достаточно мала, процесс ее движения можно разбить на две существенно различные области:

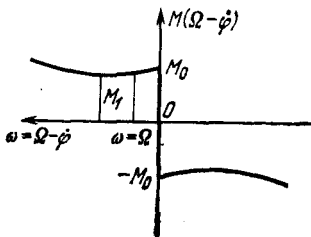


Рис. 6.4

1) область в которой сила упругости гораздо больше произведения момента инерции колодки на ее угловое ускорение. Движение в этом случае определяется силой трения и силой упругости пружины, координата системы меняется существенно, а скорость — медленно, т. е. ускорения невелики. Очевидно, для области справедливо (6.2);

2) область, в которой произведение момента инерции на угловое ускорение значительно больше силы упругости пружины и движение определяется главным образом произведением момента инерции на угловое ускорение. Но так как момент инерции мал, то ускорение велико, координата не успевает значительно изменяться, скорость же системы резко меняется. В этой области уравнение (6.2) теряет свою силу. Это мы и увидим при исследовании этого уравнения.

Мы рассмотрим тот случай, когда угловая скорость  $\Omega$  вала такова, что  $\omega = \Omega$  лежит на падающем участке характеристики трения. Напомним, что  $\omega = \Omega$  соответствует состоянию равновесия колодки ( $\phi = 0$ ). Для того чтобы определить направление движения изображающей точки, продифференцируем уравнение (6.2):

$$c\phi = -M'(\Omega - \phi)\dot{\phi}.$$

Из этого выражения следует, что при  $M' > 0$  ( $M' = dM/d\omega$ ) знаки  $\phi$  и  $\dot{\phi}$  противоположны. Если  $M' < 0$ , то знаки  $\phi$  и  $\dot{\phi}$  одинаковы. Так как состояние равновесия ( $\phi = 0$ ) находится на участке, где  $M' < 0$ , то это состояние равновесия всегда неустойчиво. При достаточно больших  $|\phi|$  изображающая точка движется в сторону малых  $|\phi|$  до тех пор, пока  $\dot{\phi}$  не меняет знака. Изменение знака  $\dot{\phi}$  может, как это видно из выражения

$$\dot{\phi} = -\frac{c\phi}{M'(\Omega - \phi)}, \quad (6.3)$$

произойти или от изменения знака  $\phi$ , или от изменения знака  $M'$ . Изменение знака функции связано с переходом  $\phi$  и  $M'$  через нуль. Если  $\dot{\phi}$  меняет знак вследствие изменения знака  $\phi$ , то она также проходит через нуль; если  $\dot{\phi}$  меняет знак вследствие изменения знака  $M'$ , то при переходе  $M'$  через нуль мы получаем из выражения (6.3)  $\dot{\phi} = \pm\infty$ . Следовательно, в точках фазовой кривой, в которых  $M' = 0$ , мы получаем точки «бесконечного ускорения». Изображающая точка или приближается с обеих сторон к такой точке, или удаляется в обе стороны от нее. Точка устойчивого бесконечного ускорения существенно отличается от точек состояния равновесия, так как изображающая точка не может оставаться в этой точке ни в коем случае. Появление точки устойчивого бесконечного ускорения и есть следствие пренебрежения массой колодки, т. е. в этой точке уравнение (6.2) не дает ответа о

поведении системы. Чтобы выйти из подобного положения, можно рассмотреть невырожденную систему, т. е. предположить, что  $m \neq 0$  (что мы и сделаем несколько позже), но можно, оставаясь в рамках сделанного предположения ( $m = 0$ ), сформулировать условия дальнейшего движения системы.

Покажем, что, исходя из рассмотрения приведенной характеристики трения, при наличии участка, где

$M'(\Omega) < 0$ , колодка будет совершать периодическое движение.

Сначала колодка вращается вместе с валом ( $\dot{\varphi} = \Omega$ ), пружина растягивается (возрастает упругая сила), но возрастает также и сила трения, оставаясь равной упругой силе.

Изображающая точка при этом движется по участку  $AB$  фазовой кривой (рис. 6.5). Когда момент упругой силы становится равным моменту силы трения покоя, изображающая точка попадет в точку  $B$  — точку устойчивого бесконечного ускорения. Остаться там она не может, выйти из нее по фазовой траектории также не может. Остается предположить, что угловая скорость в силу того, что в точке  $B$   $\dot{\varphi}$  имеет бесконечное значение, изменится скачком. Чтобы выяснить, куда придет система после скачка, следует сформулировать «условие скачка». В рассматриваемом случае сила упругости пружины и сила трения остаются неизменными (при принятой идеализации). Поэтому, если за условие скачка принять то условие, что система придет в такое новое положение, которое соответствует прежней энергии системы, и так как координата системы при скачке меняться не будет, то скачок произойдет в положение, соответствующее прежнему значению силы трения, т. е. в точку  $C$  (рис. 6.5). Далее изображающая точка будет двигаться с конечной скоростью и ускорением до точки  $D$  — точки устойчивого бесконечного ускорения.

Все сказанное относительно точки  $B$  относится и к точке  $D$ . В точке  $D$  произойдет скачок в скорости, изображающая точка попадет в точку  $A$ , и процесс, повторяясь, будет продолжаться дальше.

Для выяснения физической картины явления разрывных колебаний рассмотрим эту же задачу, приняв, что

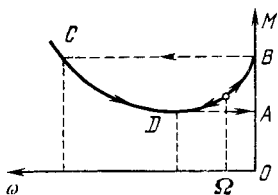


Рис. 6.5

$m \neq 0$  [2]. Так как нас интересует в основном качественная картина, то можно принять для рассмотрения грубо идеализированную характеристику трения, представленную на рис. 6.6. Точки сопряжения прямых на характеристике доопределим таким образом, чтобы в них выполнялось условие  $dT(\varphi)/d\varphi = 0$ , что вполне совместимо с действительной характеристикой. Уравнения движения имеют вид

$$I\ddot{\varphi} = -c\dot{\varphi} + M(\varphi) \begin{cases} -M_0 \leq M(\varphi) \leq M_0, \varphi = \Omega, \\ M(\varphi) = k_1\varphi + b_1, -\omega_1 < \varphi < \Omega, \\ M(\varphi) = -k_2\varphi + b_2, \varphi < -\omega_1, \end{cases} \quad (6.4)$$

где  $I$  — момент инерции колодки,  $M$  — момент силы трения,  $M_0$  — максимальный момент трения покоя,  $b_1 = M_0 - k_1\Omega$ ,  $b_2 = M_0 - k_2\Omega - \omega_1(k_1 + k_2)$ . Примем  $k_1 > k_2$  и будем считать, что  $I < \frac{k_1^2}{4c}$ . Рассмотрим область  $-\omega_1 < \varphi < \Omega$ . Уравнение (6.4) для этой области имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = -c\dot{\varphi} + k_1\varphi + b_1, \quad (6.5)$$

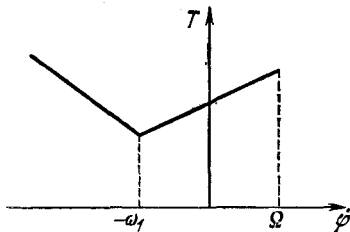


Рис. 6.6

которое можно записать в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{-c\dot{\varphi} + k_1\varphi + b_1}{I}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\frac{c\dot{\varphi} + k_1\varphi + b_1}{\dot{\varphi}I}. \quad (6.6)$$

На плоскости  $\varphi\dot{\varphi}$  точка с координатами  $\varphi = b_1/c$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  является особой точкой уравнения (6.5) типа неустойчивого узла. Других особых точек это уравнение не имеет.

Фазовые траектории даются уравнением

$$\left[ \dot{\varphi} - \beta_1 \left( \varphi - \frac{b_1}{c} \right) \right]^{\beta_1} = c_1 \left[ \dot{\varphi} - \beta_2 \left( \varphi - \frac{b_1}{c} \right) \right]^{\beta_2}, \quad (6.7)$$

где

$$\beta_1 = h_1 + \sqrt{h_1^2 - \omega^2} > 0, \quad \beta_2 = h_1 - \sqrt{h_1^2 - \omega^2},$$

$$h_1 = \frac{k_1}{2I}, \quad \omega^2 = \frac{c}{I}.$$

Геометрическое место точек, в которых кривые (6.7) имеют горизонтальные касательные, представляет собой на плоскости прямую

$$\varphi = \frac{c}{k_1} \left( \Psi - \frac{b_1}{c} \right). \quad (6.8)$$

Геометрическое место вертикальных касательных — прямая  $\varphi = 0$ . Заметим, что прямая (6.8) проходит через точку с координатами  $\varphi = M_0/c$ ,  $\varphi = \Omega$ . Рассмотрим область  $\varphi \leq -\omega_1$ . Уравнение (6.4) для этой области имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = -c\varphi - k_2\dot{\varphi} + b_2 \quad (6.9)$$

или, в другой форме записи,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{c\varphi - k_2\dot{\varphi} + b_2}{I}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi,$$

или

$$\frac{d\varphi}{d\varphi} = -\frac{c\varphi - k_2\dot{\varphi} + b_2}{I\dot{\varphi}}. \quad (6.10)$$

Здесь уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\left[ \varphi - \alpha_1 \left( \varphi - \frac{b_2}{c} \right) \right]^{\alpha_1} = c_2 \left[ \varphi - \alpha_2 \left( \varphi - \frac{b_2}{c} \right) \right]^{\alpha_2}, \quad (6.11)$$

где

$$\alpha_1 = -h_2 + \sqrt{h_2^2 - \omega^2} < 0, \quad \alpha_2 = -h_2 - \sqrt{h_2^2 - \omega^2},$$

$$h_2 = \frac{k_2}{2I}.$$

Геометрическим местом горизонтальных касательных кривых (6.11) будет прямая

$$\varphi = -\frac{c}{k_2} \left( \varphi - \frac{b_2}{c} \right). \quad (6.12)$$

Геометрическое место вертикальных касательных  $\dot{\varphi} = 0$ . Особая точка — устойчивый узел с координатами  $\varphi = b_2/c$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  (находится вне рассматриваемой области). Прямые (6.8) и (6.12) пересекаются в точке с координатами  $\varphi = \frac{M_0}{c} - \frac{k_1}{c} (\Omega + \omega_1)$ ,  $\dot{\varphi} = -\omega_1$ . На рис. 6.7 представлена фазовая плоскость  $\varphi\dot{\varphi}$  уравнения (6.4). На-

правление движения по фазовым траекториям указано стрелками. Рассмотрим движение с начальными условиями

$$-\frac{M_0}{c} < \varphi < \frac{M_0}{c}, \quad \dot{\varphi} = \Omega.$$

Изображающая точка будет перемещаться, например, от точки  $A_0$  по фазовой прямой  $\dot{\varphi} = \Omega$  до точки  $A_1$  с координатами  $\varphi = M_0/c$ ,  $\dot{\varphi} = \Omega$ , что соответствует движению колодки вместе с валом. Далее движение начинается по фазовой траектории семейства (6.7), которая, пересекая ось  $\dot{\varphi} = 0$  под прямым углом, достигает точки  $A_2$

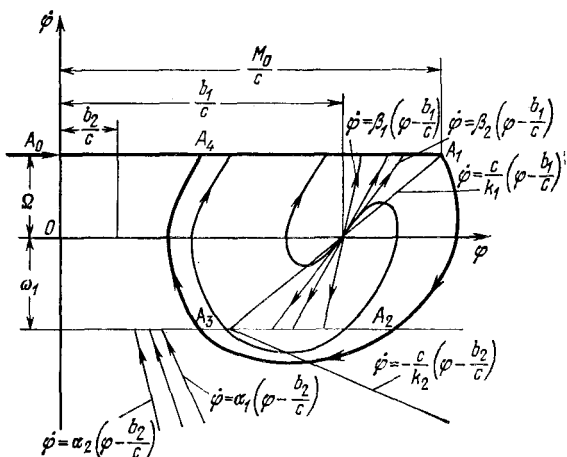


Рис. 6.7

на прямой  $\dot{\varphi} = -\omega_1$ . От точки  $A_2$  движение происходит по фазовой траектории семейства (6.11), которая при пересечении с прямой (6.12) имеет горизонтальную касательную, до точки  $A_3$ , для которой

$$\varphi = -\omega_1, \quad \frac{b_2}{c} < \varphi < \frac{b_1}{c} - \frac{k_1\omega_1}{c},$$

так как геометрическим местом вертикальных касательных для этого семейства будет прямая  $\dot{\varphi} = 0$ , а координаты особой точки  $\varphi = b_2/c$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Далее изображающая точка перемещается по фазовой траектории семейства (6.7), пока эта траектория не пересечет фазовую прямую  $\dot{\varphi} =$

$= \Omega$  в точке  $A_4$ . Затем изображающая точка перемещается по фазовой прямой  $\dot{\varphi} = \Omega$  до точки  $\varphi = M_0/c$ ,  $\dot{\varphi} = \Omega$  и далее, как это было описано выше. Таким образом, при выбранных начальных условиях мы получили периодическое движение\*).

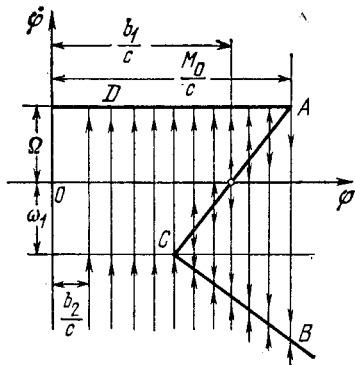


Рис. 6.8

(6.8)). Точка  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = b_1/c$  остается точкой неустойчивого равновесия. В области  $\dot{\varphi} = -\omega_1$  уравнение (6.9) вырождается в уравнение

$$\dot{\varphi} = -\frac{c}{k_2} \left( \varphi - \frac{b_2}{c} \right).$$

На фазовой плоскости это уравнение прямой (6.12). В силу уравнения (6.10)  $d\dot{\varphi}/d\varphi \rightarrow \infty$  при  $I \rightarrow 0$ , т. е. все фазовые траектории, за исключением (6.12), вырождаются в вертикальные прямые. Фазовая прямая  $\dot{\varphi} = \Omega$  остается фазовой прямой. Вид фазовой плоскости при  $I = 0$  представлен на рис. 6.8. Для начальных условий  $-M_0/c < \varphi < M_0/c$ ,  $\dot{\varphi} = \Omega$  изображающая точка, перемещаясь по фазовой прямой  $\dot{\varphi} = \Omega$  (колодка захвачена валом), попадет в точку  $\varphi = M_0/c$ ,  $\dot{\varphi} = \Omega$ . Из этой точки изображающая точка скачком по вертикальной траектории перейдет в точку  $B$  (так как  $d\dot{\varphi}/d\varphi \rightarrow \infty$  при  $I \rightarrow 0$ ), откуда, перемещаясь по прямой  $\dot{\varphi} = -\frac{c}{k_2} \left( \varphi - \frac{b_2}{c} \right)$ , попадет

Выясним теперь, что будет происходить с системой, если  $I \rightarrow 0$ . В области  $-\omega_1 < \dot{\varphi} < \Omega$  уравнение (6.5) вырождается в уравнение

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{k_1} \left( \varphi - \frac{b_1}{c} \right),$$

на фазовой плоскости это уравнение прямой (6.8). В силу уравнения (6.6) при  $I \rightarrow 0$   $d\dot{\varphi}/d\varphi \rightarrow \infty$ , т. е. все фазовые траектории вырождаются в вертикальные прямые (за исключением прямой

\* ) Читатель может убедиться, что и при других начальных условиях в системе устанавливается описанное периодическое движение.

в точку  $C$  с координатами

$$\varphi = \frac{M_0}{c} - \frac{k_1}{c} (\Omega + \omega_1), \quad \dot{\varphi} = -\omega_1.$$

Из точки  $C$  в силу того, что при  $I \rightarrow 0$   $d\varphi/dt \rightarrow \infty$ , изображающая точка скачком перейдет по вертикали в точку  $D$  на прямой  $\varphi = \Omega$ . Далее движение будет продолжаться описанным выше способом.

Таким образом, рассмотрение невырожденной системы и предельный переход помогли нам в данном случае понять сущность гипотезы скачка.

## § 2. Уточнение математической модели. Быстрые и медленные движения

При разрешении конфликтной ситуации в примере, приведенном в предыдущем параграфе, связанной с решением вопроса о дальнейшем поведении системы при попадании изображающей точки в устойчивую точку бесконечного ускорения, было рассмотрено два пути: один, связанный с введением гипотезы скачка, и другой, связанный с отказом от рассмотрения вырожденной модели.

Однако в ряде задач удовлетвориться гипотезой скачка не представляется возможным, так как при этом нельзя выяснить с достаточной полнотой влияние отбрасываемого в уравнениях движения «малого» параметра на физическую картину движения динамической системы. Рассмотрение же «полной» динамической системы приводит к необходимости рассмотрения более сложных уравнений движения. Поэтому вполне понятна идея рассмотрения уточненной вырожденной математической модели, когда при составлении дифференциальных уравнений движения эти малые параметры учитываются. Тогда некоторые коэффициенты уравнений движения будут иметь порядок учетного малого параметра. Такое введение малого параметра, особенно тогда, когда малому параметру пропорциональны коэффициенты при старших производных, позволяет значительно шире и глубже понять физическую картину движений динамической системы.

Изучению движения динамических систем с малыми коэффициентами при старших производных посвящено большое количество исследований ([1, 3—8, 11—13] и др.). Наиболее полно этот вопрос в связи с разрывными колебаниями изложен в [1]. Мы ограничимся рассмотре-



нием динамических систем, уравнения движения которых могут быть представлены в виде

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \mu \dot{y} = Q(x, y), \quad (6.13)$$

где  $\mu$  — малый положительный параметр (этот параметр характеризует «малость» какого-либо параметра динамической системы),  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — ограниченные и дифференцируемые функции  $x$  и  $y$ . При  $\mu = 0$  мы получаем из (6.13) вырожденную систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad Q(x, y) = 0. \quad (6.14)$$

Пусть плоскость  $xy$  будет фазовой плоскостью системы уравнений (6.13). Выясним, в каком случае при достаточно малом  $\mu$  движение динамической системы будет происходить в окрестности кривой  $Q(x, y) = 0$ , т. е. в каком случае можно не учитывать малых параметров при составлении уравнений движения. В соответствии с уравнениями (6.13) имеем

$$\dot{y} = \frac{Q(x, y)}{\mu}. \quad (6.15)$$

Пусть  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — координаты точек линии  $Q(x, y) = 0$ , а  $\xi$  и  $\eta$  — расстояния этих точек до какой-либо точки фазовой плоскости с координатами  $x$  и  $y$ . Считая  $\xi$  и  $\eta$  величинами порядка  $\mu$ , можно представить функцию  $Q(x, y)$  в виде

$$Q(x, y) = Q'_x \xi + Q'_y \eta + \dots, \quad (6.16)$$

так как  $Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . Подставляя выражение (6.16) в уравнение (6.15), получим

$$\dot{y} = (Q'_x \xi + Q'_y \eta + \dots) / \mu.$$

Отсюда следует, что только в малой окрестности линии  $Q(x, y) = 0$ , когда  $\xi$  и  $\eta$  имеют порядок  $\mu$ , фазовая скорость изображающей точки будет ограниченной при  $\mu \rightarrow 0$ . Вне этой окрестности при  $\mu \rightarrow 0$   $\dot{y} \rightarrow \infty$ , а  $\dot{x}$  в соответствии с уравнениями (6.13) остается ограниченной и

$$\frac{dx}{dy} = \mu \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow 0.$$

Следовательно, фазовые траектории вне малой окрестности (порядка  $\mu$ ) линии  $Q(x, y) = 0$  при малом  $\mu$  близки к прямым  $x = \text{const}$ . По этим кривым изображающая точка движется с большими скоростями. Эта область называется

областью «быстрых» движений. Приближенными уравнениями быстрых движений будут

$$x = x^0 = \text{const}, \quad \mu \dot{y} = Q(x^0, y). \quad (6.17)$$

Отметим, что особыми точками системы (6.17) будут точки пересечения линий  $x = x^0 = \text{const}$  с кривой  $Q(x, y) = 0$ .

Таким образом, уравнения (6.14) оказываются непригодными для описания движения динамической системы. Уравнения (6.14) могут отражать движение системы только в малой окрестности (порядка  $\mu$ ) линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  остаются конечными. Эти движения называются «медленными» движениями, а указанная малая окрестность линии  $Q(x, y) = 0$  областью медленных движений.

Для того чтобы выяснить, является ли малый параметр существенным при рассмотрении движения системы или нет, рассмотрим возможные случаи.

Возможен случай, когда все траектории быстрых движений при возрастании времени идут внутрь области медленных движений (малой окрестности линии  $Q(x, y) = 0$ ). Тогда изображающая точка, помещенная внутрь области медленных движений, в начальный момент будет двигаться в этой области, так как нет траекторий, выходящих из этой области. В этом случае учет малого параметра оказывается несущественным \*).

Найдем условия несущественности учета малого параметра. Как уже ранее было сказано, точки линии  $Q(x, y) = 0$  являются состояниями равновесия (особыми точками) уравнений быстрых движений, поэтому поведение траекторий быстрых движений вблизи линии  $Q(x, y) = 0$  полностью определяется характером этих состояний равновесия. Перепишем уравнения быстрых движений (6.17) в виде

$$\frac{dy}{dt'} = Q(x, y), \quad x = \text{const}, \quad t' = \frac{t}{\mu}.$$

Вводя  $y = \bar{y} + \eta$ , получим уравнение первого приближения

$$\frac{d\bar{y}}{dt'} = Q'_y \eta.$$

---

\*) Если в начальный момент изображающая точка была в области быстрых движений, то она по соответствующей траектории быстрого движения придет в область медленных движений по истечении соответствующего промежутка времени.

Отсюда следует, что если  $Q'_y < 0$ , то точки линии  $Q(x, y) = 0$  являются устойчивыми особыми точками для приближенных уравнений быстрых движений и все траектории быстрых движений входят в область медленных движений. Следовательно, условием несущественности малого параметра является условие  $Q'_y < 0$  \*). При  $Q'_y > 0$  точки линии  $Q(x, y)$  являются неустойчивыми особыми точками для уравнений быстрых движений.

Рассмотрим теперь случай, когда на какой-либо части линии  $Q(x, y) = 0$   $Q'_y < 0$ , а на другой  $Q'_y > 0$ . В этом случае изображающая точка, помещенная в начальный момент в малую окрестность линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y > 0$ , не будет оставаться там и выйдет в область быстрых движений. Следовательно, имеют место движения, которые начинаются из состояний, совместных с уравнениями

\*) Строгое доказательство условий несущественности малых параметров для системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= P_i(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_k), \\ \mu \dot{y}_j &= Q_j(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_k) \end{aligned}$$

( $i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, k, n = s + k$ ) дано в работах И. С. Градштейна и А. Н. Тихонова [4, 5, 13] и заключается в следующем: если все  $k$  корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial y_1} - \lambda & \frac{\partial Q_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial y_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial y_2} - \lambda & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial y_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Q_k}{\partial y_1} & \frac{\partial Q_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial Q_k}{\partial y_k} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеют отрицательные действительные части при любых  $x_i, y_i$ , удовлетворяющих уравнениям

$$Q_j(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

то лежащие внутри малой  $O(\mu^\alpha)$  окрестности подпространства  $Q_j$  (с числом измерений  $k < n$ ) ( $0 < \alpha < 1$ ) являются устойчивыми состояниями равновесия для приближенных уравнений быстрых движений

$$x_i = x_i^0 = \text{const}, \quad \mu \dot{y}_j = Q_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0, y_1, y_2, \dots, y_k)$$

и все траектории быстрых движений вблизи подпространства  $Q_j$  входят при возрастании времени в малую окрестность последнего.

(6.14), но не могут быть рассмотрены без учета малого параметра. Малый параметр в этом случае оказывается существенным.

Отметим, что в точках линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y$  меняет знак, производная  $Q'_y(x, y) = 0$ , т. е. в этих точках линия  $Q(x, y) = 0$  имеет вертикальные касательные.

Перейдем к решению задачи о возникновении разрывных колебаний ([1, 6, 7, 8, 10—12] и др.). Рассмотрим снова уравнения быстрых движений (6.17):

$$x = \text{const}, \quad \mu \dot{y} = Q(x, y).$$

Как было уже сказано, особыми точками этих уравнений являются точки пересечения прямых  $x = \text{const}$  с линией  $Q(x, y) = 0$ . Следовательно, эти точки пересечения разбивают прямые  $x = \text{const}$  на траектории быстрых движений. Если при достаточно больших  $|y|$  знак функции  $Q(x, y)$  противоположен знаку  $y$ , то траектории быстрых движений идут из бесконечности и от участков линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y > 0$ , к тем участкам линии, где  $Q'_y < 0$ . Это означает, что медленные движения системы, когда  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  ограничены в течение конечных интервалов времени при  $\mu \rightarrow 0$ , будут происходить только в малых окрестностях (порядка  $\mu$ ) участков  $Q(x, y) = 0$ ,  $Q'(x, y) < 0$ , т. е. будут приближенно отображаться уравнениями вырожденной системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad Q(x, y) = 0.$$

Рассмотрим теперь предельный случай, когда  $\mu \rightarrow 0$ . Предположим, что на линии  $Q(x, y) = 0$  имеются участки, на которых  $Q'_y < 0$ , и участки, на которых  $Q'_y > 0$ . Как было уже сказано, на границе этих участков линия  $Q(x, y) = 0$  имеет вертикальные касательные. Вся плоскость, за исключением линии  $Q(x, y) = 0$ , при  $\mu = 0$  будет заполнена прямыми  $x = \text{const}$  — траекториями быстрых (скачкообразных) движений, идущих к частям линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y < 0$  \*); эти части линии  $Q(x, y) = 0$  являются траекториями медленных движений, вдоль которых изображающая точка движется с ограниченными  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ .

---

\*) Отметим, что согласно уравнениям быстрых движений изображающая точка будет скачкообразно перемещаться вверх ( $\dot{y} \rightarrow \infty$ ) при  $Q(x, y) > 0$  и вниз ( $\dot{y} \rightarrow -\infty$ ) при  $Q(x, y) < 0$ .

Пусть изображающая точка, совершая «медленное» движение, дойдет до точки, где  $Q'_y = 0$ ; тогда она войдет в область быстрых движений и скачкообразно по выходящей из этой точки траектории  $x = \text{const}$  переместится снова на линию медленных движений. Таким образом, в этом случае в системе будут происходить разрывные колебания — колебания, состоящие из чередующихся между собой «медленных» и скачкообразных движений. Отметим, что в точках линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y = 0$ , при  $\mu = 0$   $\dot{y}$  обращается в бесконечность. Продифференцировав по  $t$   $Q(x, y) = 0$  и воспользовавшись уравнениями (6.14), получим для медленных движений

$$Q'_x P + Q'_y \dot{y} = 0.$$

Предполагая, что  $Q'_x \neq 0$ , получим, что

$$\dot{y} = -\frac{Q'_x P}{Q'_y}.$$

Отсюда следует, что при  $\mu = 0$  в точках, где  $Q'_y = 0$ ,  $\dot{y}$  обращается в бесконечность. При переходе через эти точки  $\dot{y}$  меняет знак, т. е. эти точки являются точками стыка фазовых траекторий. Вернемся к примеру, рассмотренному в предыдущем параграфе. Уравнение движения колодки при  $I \neq 0$  имеет вид

$$I\dot{\varphi} = -c\varphi + M(\Omega - \varphi).$$

Вид функции  $M(\Omega - \varphi)$  показан на рис. 6.4. Представим это уравнение в виде двух уравнений первого порядка:

$$I \frac{d\varphi}{dt} = -c\varphi + M(\Omega - \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi. \quad (6.18)$$

Линия  $Q(\varphi, \dot{\varphi}) = -c\varphi + M(\Omega - \varphi)$  представлена на рис. 6.9. Особая точка уравнений (6.18) определяется из уравнений

$$-c\varphi + M(\Omega - \varphi) = 0, \quad \varphi = 0.$$

Так как  $Q'_\varphi = -M'_\varphi(\Omega - \varphi)$ , то на участках  $FE$ ,  $BC$  и  $GA$  производная  $Q'_\varphi < 0$ , на участках  $EG$  и  $AC$   $Q'_\varphi > 0$ .

Вид фазовой плоскости при  $I = 0$  представлен на рис. 6.10. Изображенный на рис. 6.10 предельный цикл  $DABCD$  соответствует периодическим разрывным автоколебаниям динамической системы. На участке  $DA$   $\varphi = \Omega$  и, следо-

вательно,  $\varphi = \Omega t + M_1/c$  ( $M_1$  — минимальное значение момента силы трения). При  $t = T_1$  ( $T_1$  — время движения на участке  $DA$ )  $\varphi = M_0/c$ , значит,

$$T_1 = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{M_0}{c} - \frac{M_1}{c} \right).$$

На участках  $AB$  и  $CD$  изображающая точка перемещается

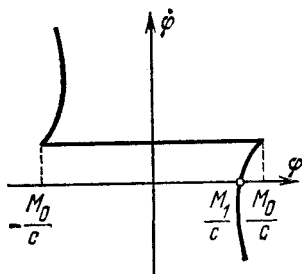


Рис. 6.9

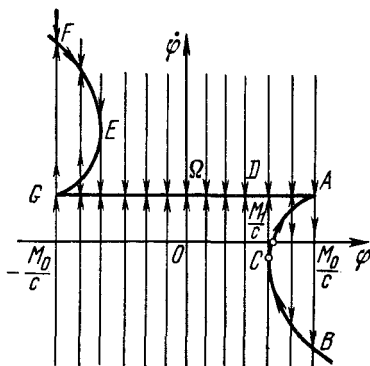


Рис. 6.10

при  $I = 0$  мгновенно. На участке  $BC$  время движения можно определить по формуле

$$T_2 = \int_{M_0/c}^{M_1/c} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}},$$

но так как на этом участке  $-c\varphi + M(\Omega - \varphi) = 0$ , то

$$d\varphi = -\frac{1}{c} M'(\Omega - \varphi) d\dot{\varphi}$$

и, следовательно,

$$T_2 = -\frac{1}{c} \int_{\dot{\varphi}_B}^{\dot{\varphi}_C} \frac{M'(\Omega - \varphi)}{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi},$$

где  $\varphi_B$  и  $\varphi_C$  — значения  $\varphi$  соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Период разрывных колебаний, очевидно, равен  $T = T_1 + T_2$ . На рис. 6.11 и 6.12 представлены примерные графики зависимостей  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  от  $t$ .

В качестве электрического аналога механической системы, совершающей разрывные (релаксационные) коле-

бания, рассмотрим генератор разрывных колебаний с неоновой лампой [1]. На рис. 6.13 представлена схема такой динамической системы. Дифференциальное уравнение, описывающее такую динамическую систему, может быть представлено в виде

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - i. \quad (6.19)$$

При выводе этого уравнения не учтены малые параметры — индуктивность контура и инертность газового разряда. Сила тока  $i$  через неоновую лампу определяется напряжением  $u$  и статической характеристикой  $i = \varphi(u)$ .

Для того чтобы выяснить возможность описания про-

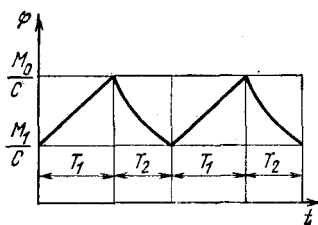


Рис. 6.11

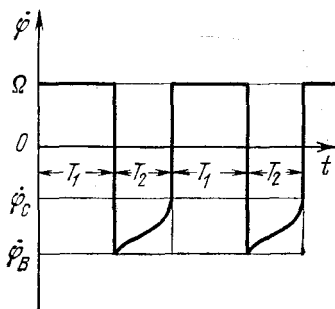


Рис. 6.12

цесса в рассматриваемой вырожденной динамической системе с помощью уравнения (6.19), рассмотрим схему, представленную на рис. 6.14, в которой малые параметры

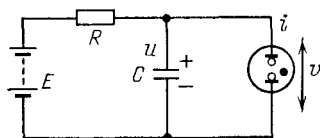


Рис. 6.13

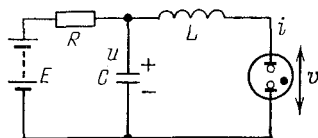


Рис. 6.14

(индуктивность контура и инертность газового разряда) учтены малой индуктивностью  $L$ .

Уравнения, описывающие динамическую систему, в этом случае будут

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - i, \quad L \frac{di}{dt} = u - v, \quad (6.20)$$

где вид функции  $i = \varphi(v)$  или  $v = \psi(i)$  представлен на рис. 6.15. Таким образом, уравнения (6.20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} C \frac{du}{dt} &= \frac{E-u}{R} - i = cP(u, i), \\ L \frac{di}{dt} &= u - \psi(i) = Q(u, i). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Выясним сначала вопрос о существовании или несуществовании малого параметра  $L$ . Так как  $Q = u - \psi(i)$ , то

$$Q'_i = -\psi'(i).$$

Из рассмотрения рис. 6.16 следует, что на линии  $Q = 0$  ( $u = \psi(i)$ ) есть участок, где  $\psi' < 0$  (участок  $BD$ ), и, следовательно, для этого участка  $Q'_i > 0$ , а это значит,

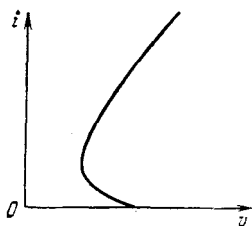


Рис. 6.15

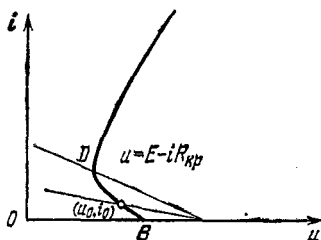


Рис. 6.16

что для этого участка параметр  $L$ , несмотря на малость, является существенным. Поэтому рассмотрение динамической системы следует проводить с помощью уравнений (6.21), считая  $L$  малым параметром. Состояния равновесия системы (6.21) определяются из уравнений

$$E - u - iR = 0, \quad u - \psi(i) = 0.$$

На плоскости  $ui$  состояния равновесия являются точками пересечения линии  $u = \psi(i)$  и прямой  $u = E - iR$  ( $i = \frac{E-u}{R}$ ). Мы рассмотрим тот случай, когда  $R > R_{кр}$ , где  $R_{кр}$  — значение  $R$ , при котором прямая  $u = E - iR$  пересекает линию  $u = \psi(i)$  в точке, где  $\psi(i)$  имеет вертикальную касательную. Примем также, что  $u_1 = E > \psi(0)$ . Состояние равновесия при этом будет единственным и расположено на участке линии, где  $\psi'(i) < 0$ . Най-



дем условия, при которых это состояние равновесия будет неустойчивым. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{RC} - S & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{\psi'}{L} - S \end{vmatrix} = 0$$

или

$$RCLS^2 + [L + RC\psi'(i_0)]S + R + \psi'(i_0) = 0.$$

При выбранных значениях  $R > R_{кр}$  и  $E > \psi(0)$   $0 < -\psi'(i_0) < R$ . Состояние равновесия будет неустойчивым при  $L + RC\psi'(i_0) < 0$  или  $\frac{L}{RC} < -\psi'(i_0)$ . При больших  $R$  и  $C$  и достаточно малом  $L$  это условие может быть удовлетворено.

Перейдем к рассмотрению предельного случая  $L \rightarrow 0$ . Вне линии  $Q = u - \psi(i) = 0$  при  $L \rightarrow 0$

$$\frac{di}{dt} = \frac{u - \psi(i)}{L} \rightarrow \infty.$$

Следовательно, вне линии  $Q = 0$  (в области быстрых движений) при  $L$ , достаточно малом, фазовые траектории близки к прямым  $u = \text{const}$ . При  $L \rightarrow 0$  фазовая плоскость вне линии  $Q = 0$  заполнена вертикальными прямолинейными траекториями, соответствующими скачкообразному изменению тока. Это значит, что для всех начальных условий (вне линии  $Q = 0$ ) имеют место скачки тока  $i$  через неоновую лампу при неизменяющемся напряжении  $u$  на конденсаторе. Медленные движения при  $L \rightarrow 0$  происходят только на том участке линии  $Q = 0$ , где  $Q'_i < 0$  ( $\psi'(i) > 0$ ), и, следовательно, только на этом участке изменения в системе удовлетворяют уравнению (6.19). Заметим, что линия  $i = 0$  (ось  $u$ ) также относится к линии  $Q = 0$ . Изме-

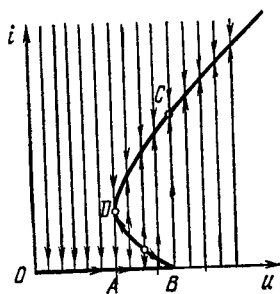


Рис. 6.17

нение  $u$  на линии  $i = 0$  определяется уравнением

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R}. \quad (6.22)$$

На рис. 6.17 показано разбиение плоскости  $ui$  на траектории при  $L \rightarrow 0$ . При любых начальных условиях в

системе установятся устойчивые разрывные колебания, которым соответствует на плоскости  $ui$  предельный цикл  $ABCD$ .

Если, например, в начальный момент времени  $i = 0$  (лампа не горит), то изображающая точка будет перемещаться по оси  $u$  до точки  $B$ , из которой скачком перейдет в точку  $C$ , где  $i = i_C$  (лампа загорается), далее, по кривой  $Q = 0$  она будет перемещаться до точки  $D$ , где  $i = i_D$ , и затем скачком перейдет в точку  $A$  (лампа погаснет). Далее процесс будет повторяться аналогичным образом. Найдем период колебаний. При движении от точки  $A$  до точки  $B$  в соответствии с уравнением (6.22) имеем

$$T_1 = RC \int_{u_D}^{u_C} \frac{du}{E - u} = RC \ln \frac{E - u_D}{E - u_C}.$$

Время движения от точки  $C$  до точки  $D$  найдем с помощью уравнения

$$\frac{du}{dt} = \frac{E - u - R\varphi(u)}{RC};$$

оно выразится формулой

$$T_2 = RC \int_{u_C}^{u_D} \frac{du}{E - u - R\varphi(u)}. \quad (6.23)$$

Период разрывных колебаний равен  $T = T_1 + T_2$ .

Аппроксимируем участок кривой  $i = \varphi(u)$ , где происходит медленное движение, прямой линией, проходящей через точки  $D$  и  $C$ :

$$\frac{i - i_D}{i_C - i_D} = \frac{u - u_D}{u_C - u_D}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$i = \frac{i_C - i_D}{u_C - u_D} u - \frac{i_C - i_D}{u_C - u_D} \frac{i_C u_D - i_D u_C}{i_C - i_D}.$$

Введя обозначения

$$R^* = \frac{u_C - u_D}{i_C - i_D}, \quad u_0 = \frac{i_C i_D - i_D u_C}{i_C - i_D},$$

окончательно получим

$$i = \frac{u - u_0}{R^*}. \quad (6.24)$$

В соответствии с формулой (6.23)

$$\begin{aligned} T_2 &= C \int_{u_C}^{u_D} \frac{RR^* du}{R^*E + Ru_0 - u(R + R^*)} = \\ &= \frac{CRR^*}{R + R^*} \ln \frac{R^*E - R(u_C u_0) - u_C R^*}{R^*E - R(u_D - u_0) - u_D R^*}; \end{aligned}$$

так как на основании (6.24)

$$\frac{u_C - u_0}{R^*} = i_C, \quad \frac{u_D - u_0}{R^*} = i_D,$$

то

$$T_2 = C \frac{RR^*}{R + R^*} \ln \frac{E - Ri_C - u_C}{E - Ri_D - u_D}.$$

Найдем теперь законы изменения  $u$  на участках  $AB$  и  $CD$ . Закон изменения  $u$  на участке  $AB$  найдем из уравнения

$$\frac{du}{dt} = \frac{E - u}{RC}.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$u = Ae^{-t/RC} + E,$$

где  $A$  — постоянная интегрирования. При  $t=0$   $u = u_D$ , следовательно,  $A = u_D - E$  и

$$u = (u_D - E)e^{-t/RC} + E.$$

На участке  $CD$  справедливо уравнение

$$\frac{du}{dt} = \frac{E - u}{RC} - \frac{i}{C}.$$

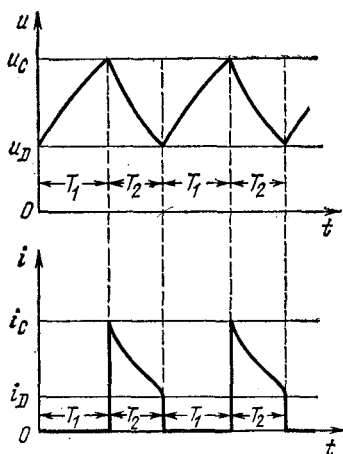


Рис. 6.18

Используя выражение (6.24), получим

$$\frac{du}{dt} + u \frac{R^* + R}{CRR^*} = \frac{R^*E + Ru_0}{CRR^*}.$$

Решая это уравнение, приняв во внимание, что при  $t = 0$   $u = u_c$ , будем иметь

$$u = \left( u_c - \frac{R^*E + Ru_0}{R + R^*} \right) e^{-\frac{R+R^*}{CRR^*} t} + \frac{R^*E + Ru_0}{R + R^*}.$$

Зная закон изменения  $u$  по формуле (6.24), можно определить закон изменения  $i$ . На рис. 6.18 показаны примерные графики изменения  $u$  и  $i$ . На графиках видно пилообразное изменение  $u$  и скачкообразное изменение  $i$ .

## Г Л А В А 7

# ВВЕДЕНИЕ В КАЧЕСТВЕННУЮ ТЕОРИЮ И ТЕОРИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задачей качественной теории многомерных динамических систем является совместное изучение структур разбиения фазового пространства и пространства параметров. Эта общая трактовка предмета исследования качественной теории, как математической основы теории нелинейных колебаний, включает в себя изучение установившихся движений и их бифуркаций, выяснение областей притяжения установившихся движений, а также глобальной картины их взаиморасположения и перехода друг в друга при изменении параметров [1—3, 36, 41].

Наибольшие трудности в таком исследовании представляют глобальные вопросы. Локальные исследования несравнимо более просты. В связи с этим можно видеть основное направление качественной теории в том, чтобы, опираясь на локальные исследования, шаг за шагом расширять исследуемые области фазового пространства и пространства параметров.

Если фазовое пространство разбить на достаточно малые области, то структура фазовых траекторий в каждой из них очень проста и вся трудность исследования состоит в соединении этих простых картинок в общую глобальную картину.

Помимо этой общей идеи изучения от локального к глобальному, фундаментальное значение имеет идея игнорирования особых случаев, ограничение рассмотрений только общими случаями.

Идеальным образцом реализации этих идей является качественная теория дифференциальных уравнений на плоскости [4, 5, 46]. Если ограничиться только общими локальными картинками разбиения, то таких существенно

разных картинок на плоскости будет только четыре. Это — окрестность обыкновенной точки и окрестности особых точек типа устойчивого или неустойчивого узла или фокуса и типа седла (рис. 7.1).

Первый шаг расширения рассматриваемых областей приводит к выявлению особой роли замкнутых траекторий



Рис. 7.1

и сепаратрис седловых состояний равновесия. Отсекая особые случаи, приходим к двум существенно разным локальным картинкам, представленным на рис. 7.2, на которых изображены окрестности простых устойчивого и неустойчивого периодических движений. После этого удастся склеить все локальные картинки вместе и прийти к полной ясности в отношении вида общего разбиения фазовой плоскости на траектории. Как известно, это разбиение в общем случае составлено из конечного числа областей притяжения, устойчивых состояний равновесия и периодических движений, все виды которых возможно перечислить [1, 4]. Некоторые из них изображены на рис. 7.3. Это означает полное исследование вопроса о структуре разбиения фазовой плоскости на фазовые траектории.

Вторая часть проблемы качественного изучения — теория зависимости от параметров — решается в таком же порядке. Проводится локальное исследование бифуркаций, затем выясняется их роль в изменении глобальной структуры. Отсекаются особые случаи.

Несомненно, что такой же путь возможен и в качественной теории многомерных динамических систем. Однако его реализация несомненно сложнее и встречается на своем

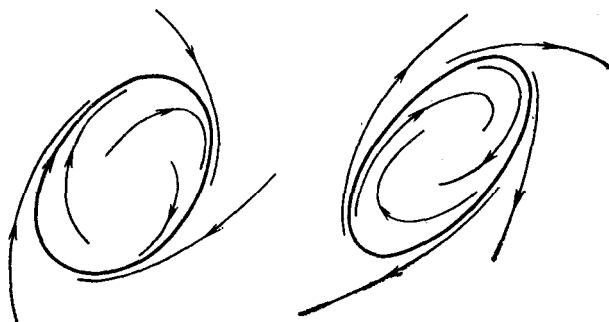


Рис. 7.2

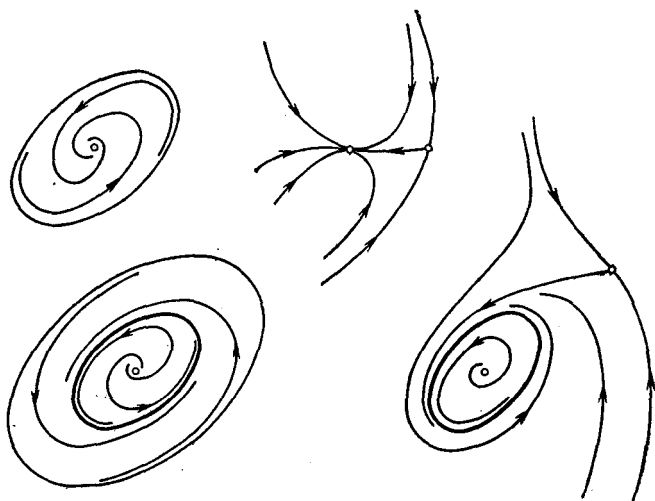


Рис. 7.3

пути немало совершенно новых трудностей. Но не только в этом дело. Конечный итог тоже будет много сложнее, возможно, что он даже настолько сложен, что целесообразно еще чем-то пожертвовать, еще что-то назвать несущественным или принять за излишне детальное.

После этих общих вводных слов перейдем к изложению накопленных к настоящему времени сведений о многомерных динамических системах. Это изложение, по необходимости выборочное, содержит факты, имеющие наибольшее значение для общего понимания особенностей многомерных динамических систем, трактуемых в первую очередь как особенности структуры разбиения на траектории ее фазового пространства.

Объектом исследования будут динамические системы  $(\Phi, T)$  с многомерным фазовым пространством  $\Phi$  и оператором  $T$ , задаваемым либо дифференциальными уравнениями, либо точечным отображением. Напомним, что в понятие математической модели динамической системы входит: фазовое пространство  $\Phi$  (как совокупность составляющих его фазовых точек), наделенное естественным понятием близости, возможно, формализованной некоторой метрикой, и однозначный оператор  $T$ , зависящий от параметров  $t_1$  и  $t_2$  (времени) с множеством значений пар  $(t_1, t_2) \in \omega(x)$ , которые удовлетворяют следующим предположениям:

1.  $T(t_1, t_2)x \in \Phi$  при любых  $(t_1, t_2) \in \omega(x)$ ,  $x \in \Phi$ .
2. Если  $(t_1, t_2) \in \omega(x)$  и  $(t_2, t_3) \in \omega(T(t_1, t_2)x)$ , то  $(t_1, t_3) \in \omega(x)$  и для любого  $x \in \Phi$

$$T(t_1, t_3)x = T(t_2, t_3)T(t_1, t_2)x.$$

Точечное отображение

$$\bar{x} = T(t_1, t_2)x$$

трактуется при этом как преобразование состояния  $x$  в момент времени  $t_1$  в состояние  $\bar{x}$  в момент времени  $t_2$ . Подчеркнем, что это определение математической модели динамической системы охватывает как детерминированные системы, так и стохастические [41].

Последующее изложение разбито на пять параграфов. Чтение их предполагает большую подготовленность, чем предыдущие главы. Читателю, впервые знакомящемуся с этими вопросами, помимо глав 1—4 настоящей книги, можно посоветовать главу 1 книги [41]. § 3 содержит вспомогательный материал по теории точечных отображений и может читаться независимо. При желании чтение главы можно начать с него. § 4 содержит общее описание и исследование движений в малой окрестности произвольной гомоклинической структуры. Последующее чтение



предполагает лишь общее знакомство с содержанием устанавливаемых в нем фактов. В § 5 рассматриваются новые для теории колебаний вопросы самогенерации динамической системой стохастических колебаний. Описываются возможные механизмы возникновения стохастичности в динамических системах. Обнаруживается связь между стохастическими колебаниями и гомоклиническими структурами, открытыми еще Пуанкаре. На примерах трехмерных неавтономных систем, близких к двумерным автономным системам, описываются бифуркации, приводящие к стохастизации колебаний.

Читателю, не ставящему целью подробное ознакомление с содержанием этой главы, рекомендуется начать ее чтение с заключительного § 6.

### § 1. Локальное изучение состояний равновесия и периодических движений

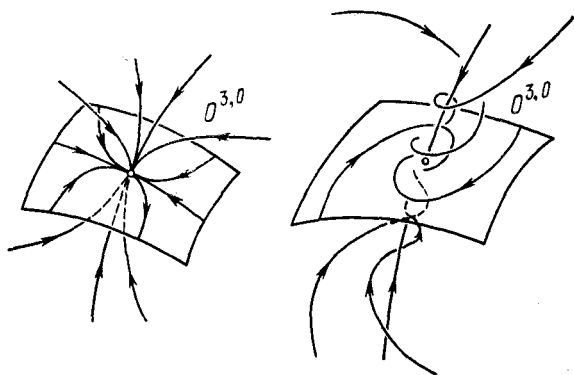
Пусть речь идет о динамической системе, описываемой гладким дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)). \quad (7.1)$$

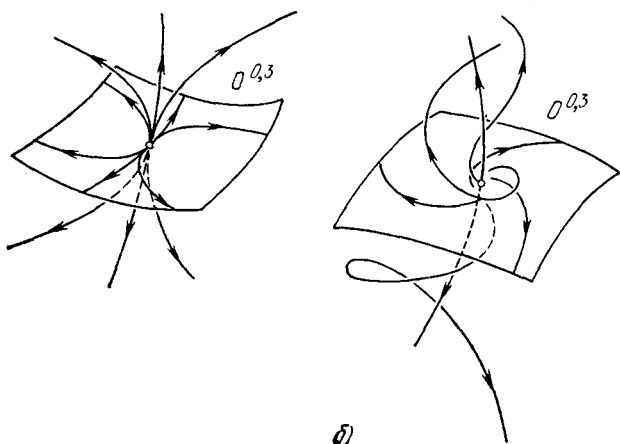
В малой окрестности каждой своей точки  $x$  разбиение фазового пространства  $\Phi$  в двумерном случае, как уже говорилось, имеет один из видов, представленных на рис. 7.1. В трехмерном случае — один из видов, представленных на рис. 7.4,  $a - \delta$ . В случае произвольной размерности  $n$  топологически различных картинок, которые, к сожалению, не могут быть представлены рисунками, будет  $n + 2$ . Одна соответствует обыкновенной точке и  $n + 1$  различным типам простых особых точек  $O^{p,q}$  ( $p = 0, 1, \dots, n, p + q = n$ ) [44]. Фазовые траектории в окрестности обыкновенной точки подобны пучку параллельных прямых. Окрестность особой точки  $O^{p,q}$  в зависимости от значений  $p$  и  $q$  имеет один из следующих видов.

При  $p = n$  все траектории при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся к точке  $O^{n,0}$ , что соответствует устойчивой особой точке. Окрестность точки  $O^{0,n}$  подобна окрестности точки  $O_z^{n,0}$  с заменой времени  $t$  на  $-t$ . При  $t \rightarrow -\infty$  все фазовые траектории входят в точку  $O^{1,n}$ . Точка  $O^{0,n}$  — это неустойчивая особая точка.

Точки  $O^{p,q}$  при  $p \neq n, 0$  — седловые особые точки. Через седловую особую точку проходят две поверхности



а)



б)

Рис. 7.4 а, б

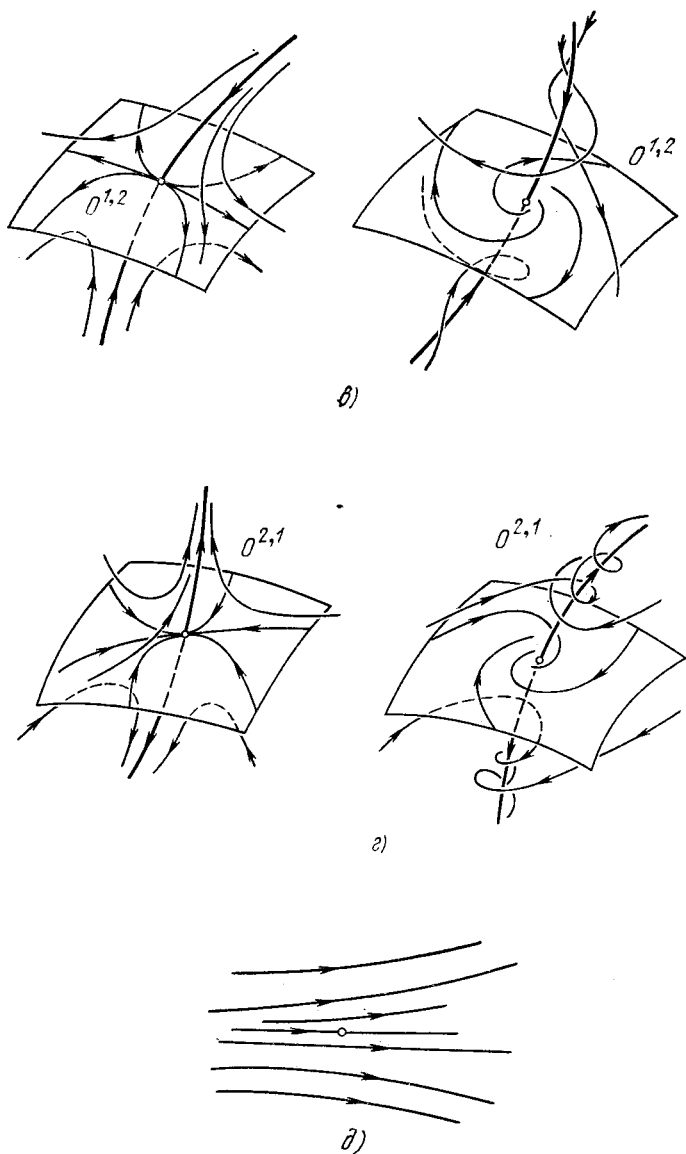


Рис. 7.4 а — д

$S_p^+$  и  $S_q^-$  размерностей  $p$  и  $q$ , составленные из траекторий, стремящихся к точке  $O^{p,q}$  при  $t \rightarrow +\infty$  и соответственно  $t \rightarrow -\infty$ .

На поверхности  $S_p^+$  точка  $O^{p,q}$  является устойчивой особой точкой  $O^{p,0}$ , а на поверхности  $S_q^-$  — неустойчивой особой точкой  $O^{0,q}$ . Все остальные фазовые траектории проходят мимо точки  $O^{p,q}$ . Наглядно движение фазовой точки можно представить как суперпозицию движений фазовых точек по поверхностям  $S_p^+$  и  $S_q^-$ . При этом имеется в виду следующее. В окрестности точки  $O^{p,q}$  можно ввести переменные  $u$  ( $u_1, u_2, \dots, u_p$ ) и  $v$  ( $v_1, v_2, \dots, v_q$ ) так, что точка  $O^{p,q}$  будет иметь координаты  $u = 0, v = 0$ , поверхности  $S_p^+$  и  $S_q^-$  — уравнения  $v = 0$  и соответственно  $u = 0$ , и движение любой фазовой точки  $(u(t), v(t))$  при изменении  $t$  таково, что точка  $(u(t), 0)$  представляет движение фазовой точки на поверхности  $S_p^+$ , а точка  $(0, v(t))$  — движение фазовой точки по поверхности  $S_q^-$ . Сказанное в трехмерном случае иллюстрируется рис. 7.5.

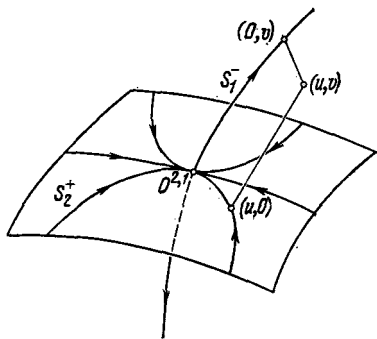


Рис. 7.5

Все фазовые точки, близкие к особой точке  $O^{n,0}$ , стремятся к ней при  $t \rightarrow +\infty$ , т. е. некоторая малая окрестность  $\delta$  точки  $O^{n,0}$  к ней стягивается при возрастании времени  $t$ . Обозначим через  $\delta(t)$  множество, в которое переходят точки окрестности  $\delta$  спустя время  $t$ . При  $t \rightarrow +\infty$   $\delta(t) \rightarrow O^{n,0}$ . При обратном изменении времени, когда  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\delta(t)$  заполняет некоторую область  $S_n^+$ , состоящую из всех фазовых траекторий, стремящихся к точке  $O^{n,0}$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Эта область

$$S_n^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta(-i) \quad (7.2)$$

называется областью притяжения устойчивой особой точки  $O^{n,0}$ . Для неустойчивой особой точки  $O^{0,n}$ , которая становится устойчивой после замены времени  $t$  на  $-t$ ,

можно ввести область заполнения

$$S_n^- = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta(i). \quad (7.3)$$

Область заполнения становится областью притяжения после замены времени  $t$  на  $-t$ .

Устойчивой особой точке  $O^{n,0}$  соответствует установившееся движение динамической системы, называемое устойчивым состоянием равновесия. Область притяжения устойчивого состояния равновесия состоит из всех переходных движений, которые имеют своим предельным движением это равновесное состояние или, проще, которые в него переходят. В некотором смысле сказанным полностью решается вопрос о состояниях равновесия и их устойчивости в большом, поскольку состояния равновесия находятся из уравнения

$$f(x) = 0. \quad (7.4)$$

Среди них устойчивые состояния равновесия отбираются требованием, чтобы все корни так называемого характеристического уравнения имели отрицательные действительные части, а формула (7.2) в принципе позволяет найти область притяжения с любой степенью точности, поскольку области  $\delta(i)$  при возрастании  $i$  ее исчерпывают.

Напомним, что характеристическим уравнением особой точки  $x^*$ , определяемой из уравнения (7.4), называется приравненный нулю полином  $n$ -й степени

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \lambda & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - \lambda \end{vmatrix} = \\ = \text{Det} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij}\lambda \right\|, \quad (7.5)$$

определяющий собственные значения матрицы  $\partial f/\partial x$  в особой точке  $x^*$ , где  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — компоненты правой части  $f(x)$  уравнения (7.1), а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — компоненты вектора  $x$ .

Выполнение всех перечисленных операций — отыскание корней (7.4), составление характеристического полинома (7.5) и проверка условия локальной устойчивости, нахождение области  $S_n^+$  — представляет значительные трудности, которые далеко не всегда могут быть преодолимы аналитически. При этом наиболее сложным является определение или оценка области притяжения. Разработанный для этого аналитический аппарат функций Ляпунова приводит к успеху лишь в ограниченном числе случаев. В остальных случаях остается только прямое вычисление областей  $\delta(i)$ . Как правило, это трудоемкая, но с привлечением вычислительных машин вполне выполнимая операция. В последнее время при решении конкретных задач к ней прибегают все чаще и чаще [56, 58, 10, 9, 14, 16, 17].

Что можно сказать о виде области притяжения, кроме того, что она полностью исчерпывается областью  $\delta(i)$  при  $i \rightarrow -\infty$ ? В некоторых случаях она довольно проста, и могут быть указаны и приближенно вычислены поверхности, из которых составлена ее граница. Но возможны случаи, когда она необычайно сложна. Соответствующие примеры будут приведены ниже в связи с рассмотрением так называемых гомоклинических структур. А сейчас вернемся к рассмотрению особых точек  $O^{p,q}$ .

Вид окрестности седловой особой точки  $O^{p,q}$  ( $p, q \neq 0$ ) был уже описан. К сказанному добавим, что числа  $p$  и  $q$  — это числа корней характеристического полинома (7.5) с отрицательной и соответственно положительной действительными частями. Окрестность седловой точки  $O^{p,q}$  описанными выше способами «расширена» быть не может. Однако такое расширение возможно в отношении поверхностей  $S_p^+$  и  $S_q^-$ . Именно, пусть  $\delta^+$  и  $\delta^-$  — малые окрестности точки  $O^{p,q}$  на поверхностях  $S_p^+$  и  $S_q^-$  соответственно. Продолжим  $\delta^+$ , меняя время в сторону  $-\infty$ , и  $\delta^-$ , меняя время в сторону  $+\infty$ . Эти продолженные поверхности по-прежнему обозначим через  $S_p^+$  и  $S_q^-$ . Точка  $O^{p,q}$  является на поверхности  $S_p^+$  устойчивой неподвижной точкой  $O^{p,0}$ . Ее область притяжения — это продолженная поверхность

$$S_p^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta^+(-i). \quad (7.6)$$

Аналогично точка  $O^{p,q}$  на поверхности  $S_q^-$  — это неустойчивая особая точка  $O^{0,q}$  с областью заполнения

$$S_q^- = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta^-(i). \quad (7.7)$$

Поверхности  $S_p^+$  и  $S_q^-$  могут быть простого вида, но могут быть и очень сложного. Как будет видно из дальнейшего, они играют важную роль в структуре разбиения фазового пространства на траектории. Особую роль при этом играют поверхности  $S_{n-1}^+$  и  $S_{n-1}^-$  размерности  $n-1$  на единицу меньшей размерности фазового пространства. Эти поверхности разделяют фазовые траектории на потоки траекторий с разным поведением. В этом смысле они подобны сепаратрисным кривым седел на фазовой плоскости. Поэтому им может быть присвоено наименование сепаратрисных поверхностей.

Перейдем теперь к рассмотрению более широких окрестностей — малых окрестностей отдельных фазовых траекторий. При этом особый интерес представляют окрестности замкнутых фазовых траекторий. С них и начнем.

Пусть  $\Gamma$  — замкнутая фазовая траектория и  $\delta$  — ее малая окрестность. Пересечем фазовую кривую  $\Gamma$  в некоторой ее точке  $O$  секущей гиперплоскостью  $S$ . Пусть  $M$  — любая точка этой секущей гиперплоскости, достаточно близкая к точке  $O$ . Выходящая из нее фазовая траектория  $\gamma$  близка к  $\Gamma$  и поэтому пересечет  $S$  в некоторой точке  $\bar{M}$ . Тем самым каждой точке  $M$  в достаточно малой окрестности точки  $O$  на поверхности  $S$  ставится во взаимно однозначное соответствие точка  $\bar{M}$  этой же поверхности. Это соответствие можно рассматривать как некоторое точечное отображение  $T$  поверхности  $S$  в себя. Точка  $O$  является неподвижной точкой отображения  $T$ .

Вид точечного отображения  $T$  в окрестности точки  $O$  полностью определяет поведение фазовых траекторий в окрестности замкнутой кривой  $\Gamma$ . Тем самым задача рассмотрения окрестности замкнутой кривой сведена к рассмотрению окрестности точки с той лишь разницей, что раньше фазовые траектории в этой окрестности описывались дифференциальными уравнениями, а теперь — точечным отображением  $T$ . Это различие не очень существенно. Во всяком случае, трудности, связанные с этим различием, значительно меньше, чем трудности непосредственного исследования фазовых траекторий в окрестнос-

ти не точки, а целой кривой. На этом и основывается эффективность метода точечных отображений.

Возможные виды точечного отображения в окрестности неподвижной точки такие же, как и для особых точек дифференциального уравнения, и все сказанное выше о них применимо и к неподвижным точкам. Дальнейшее рассмотрение этого точечного отображения  $T$  проведем независимо от его происхождения. Введем координаты  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  и запишем точечное отображение  $T$  в виде

$$x = f(x). \quad (7.8)$$

Для неподвижной точки  $x^*$  имеет место уравнение

$$x^* = f(x^*). \quad (7.9)$$

Характеристическое уравнение неподвижной точки записывается в виде

$$\chi(z) = \text{Det} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij} z \right\| = 0. \quad (7.10)$$

Если это уравнение имеет  $p$  корней внутри единичного круга и  $q$  вне него, то неподвижная точка типа  $O^{p,q}$  ( $p + q = n - 1$ ).  $O^{n-1,0}$  — это устойчивая неподвижная точка, область притяжения которой может быть записана в виде

$$S_{n-1}^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}\delta. \quad (7.11)$$

Здесь  $T^{-i}\delta$  означает  $i$  раз повторенное применение обратного преобразования  $T^{-1}$  к точкам достаточно малой окрестности  $\delta$  неподвижной точки  $O^{n-1,0}$ .

Точки  $O^{n-2,1}, \dots, O^{1,n-2}$  — седловые неподвижные точки. Точка  $O^{0,n-1}$  — неустойчивая неподвижная точка. Поведение фазовых точек в их окрестностях совершенно такое же, как и в соответствующих случаях особых точек дифференциальных уравнений. Полная аналогия качественных видов малых окрестностей простых особых точек дифференциальных уравнений и простых неподвижных точек точечного отображения может быть объяснена возможностью аппроксимации в этой окрестности точечного отображения  $T$  отображением сдвига  $T_\tau$  некоторого дифференциального уравнения [41]. При этой аппроксимации в линейном приближении точечные отображения  $T$  и  $T_\tau$  в окрестности их общей неподвижной точки совпа-



дают и между корнями  $\lambda_i$  и  $z_i$  характеристических уравнений особой и неподвижной точек при соответствующей их нумерации имеют место соотношения

$$z_i = e^{\lambda_i \tau} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (7.12)$$

из которых следует, что числа корней  $\lambda_i$ , лежащих слева и справа от мнимой оси, совпадают с числами корней  $z_i$ , лежащих внутри и вне единичного круга.

Характер неподвижной точки отображения  $T$  секущей  $S$  определяет поведение фазовых траекторий в окрестности

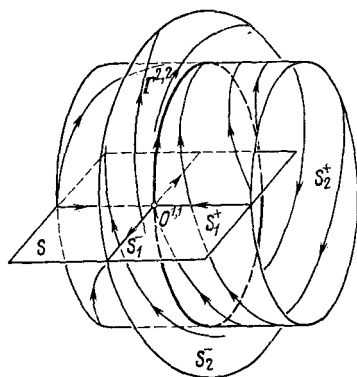


Рис. 7.6

периодического движения  $\Gamma$ . Именно, точке  $O^{n-1,0}$  соответствует устойчивое периодическое движение  $\Gamma^{n,1}$ , точке  $O^{0,n-1}$  — неустойчивое периодическое движение  $\Gamma^{1,n}$ , точке  $O^{p,q}$  ( $p, q \neq 0$ ) — седловое  $\Gamma^{p+1,q+1}$ . Через седловое периодическое движение  $\Gamma^{p+1,q+1}$ , соответствующее неподвижной точке  $O^{p,q}$ , проходят две составленные из фазовых траекторий поверхности  $S_{p+1}^+$  и  $S_{q+1}^-$ . Пересечение этих поверхностей  $S_{p+1}^+$  и  $S_{q+1}^-$  с секущей  $S$  дает инвариантные поверхности  $S_p^+$  и  $S_q^-$  неподвижной точки  $O^{p,q}$ . Сказанное пояснено на рис. 7.6, где изображено периодическое движение  $\Gamma^{2,2}$  с проходящими через него поверхностями  $S_2^+$  и  $S_2^-$ . На этом же рисунке показаны секущая  $S$ , неподвижная точка  $O^{1,1}$  и проходящие через нее кривые  $S_1^+$  и  $S_1^-$ .

Выше были выяснены структуры окрестностей особых точек и замкнутых фазовых кривых. Выявилась особая роль устойчивых особой точки и замкнутой фазовой кривой, как установившихся движений — устойчивого состояния равновесия и устойчивого периодического движения. Следующий шаг состоит в изучении зависимости особых точек и периодических движений от параметров, в изучении того, как происходит переход от одного типа особой точки или периодического движения к другому,

как они возникают и исчезают. Эти изменения и переходы при непрерывном и монотонном изменении параметра происходят не постепенно, а скачками при прохождении через отдельные значения параметра. Эти скачкообразные изменения называются бифуркациями, а значения параметра, при которых они происходят, — бифуркационными. Для изучения бифуркаций и множества бифуркационных значений параметров целесообразно ввести в рассмотрение пространство параметров динамической системы. В простейшем случае пространство параметров — это одномерная прямая с некоторым множеством бифуркационных точек. Интервалы, лежащие между бифуркационными точками, соответствуют неизменности типа состояния равновесия или периодического движения. В более общем случае это многомерное пространство параметров разбито на области некоторым множеством бифуркационных поверхностей, размерности на единицу меньшей, чем размерность пространства. Каждой точке этого пространства параметров соответствует конкретная динамическая система. Некоторые из областей, на которые разбивается пространство параметров бифуркационными поверхностями, соответствуют наличию у динамической системы устойчивых состояний равновесия или периодических движений. На границе таких областей происходит либо исчезновение одного из этих движений, либо нарушение устойчивости. Поэтому задача выделения областей существования и устойчивости простейших установившихся движений (состояний равновесия и периодических движений) является частью более общей задачи изучения бифуркаций особых точек и замкнутых фазовых кривых. Значимость теории бифуркации состоит и в том, что она открывает путь к более полному изучению динамических систем и оказывается полезной даже при изучении конкретной динамической системы, не зависящей ни от каких параметров. Последнее означает, что в ряде случаев изучение конкретной динамической системы существенно облегчается путем искусственного введения параметров и последующего использования теории бифуркаций.

Перейдем к рассмотрению бифуркаций состояний равновесия и периодических движений. Пусть правая часть уравнения (7.1) гладко зависит от параметров  $\mu$ . Состояние равновесия является корнем уравнения

$$f(x^*(\mu), \mu) = 0, \quad (7.13)$$

а его тип определяется корнями характеристического уравнения

$$\chi(\lambda, \mu) = 0. \quad (7.14)$$

При непрерывном изменении параметров  $\mu$  возможно исчезновение корня  $x^*(\mu)$  уравнения (7.13) лишь в случае обращения в нуль его якобиана. Как видно из (7.5), этот якобиан совпадает с значением характеристического полинома при  $\lambda = 0$ . В силу этого граница области существования состояния равновесия составлена из точек, удовлетворяющих уравнению

$$\chi(0, \mu) = 0. \quad (7.15)$$

Изменение типа состояния равновесия при непрерывном изменении параметров происходит при изменении чисел корней характеристического уравнения, находящихся справа и слева от мнимой оси комплексной плоскости  $\lambda$ , т. е. при обращении действительной части одного из его корней в нуль. Поэтому любая точка границы области устойчивости состояний равновесия данного типа удовлетворяет уравнению

$$\chi(i\omega, \mu) = 0 \quad (7.16)$$

при каком-нибудь действительном значении  $\omega$ . Разделяя действительную и мнимую части, запишем уравнение (7.16) в виде

$$\chi_1(\omega, \mu) = 0, \quad \chi_2(\omega, \mu) = 0. \quad (7.17)$$

Эти уравнения в общем случае определяют некоторую поверхность  $N_\omega$  с параметрическими уравнениями (7.17), где  $\omega$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , и особую поверхность  $N_0$ , точки которой удовлетворяют уравнению

$$\chi_1(0, \mu) = 0. \quad (7.18)$$

Точки поверхности  $N_\omega$  соответствуют наличию двух чисто мнимых сопряженных корней  $\pm i\omega$ , точки  $N_0$  — одного нулевого. Поверхность нулевых корней  $N_0$  совпадает с поверхностью (7.15), определяющей границу области существования особой точки  $x^*(\mu)$ . Внутри каждой области, ограничиваемой поверхностями  $N_\omega$  и  $N_0$ , состояние равновесия зависит от параметров  $\mu$  непрерывно и имеет один и тот же тип, определяемый числами  $p$  и  $q$ .

Опишем теперь, что происходит с состоянием равновесия  $O^{p,q}(\mu)$  при непрерывном изменении параметра  $\mu$  с переходом через поверхность  $N_0$  или  $N_\omega$ .

В первом случае, как оказывается, происходит исчезновение состояния равновесия  $O^{p,q}(\mu)$ . Это исчезновение происходит благодаря слиянию его с другим состоянием равновесия типа  $O^{p+1,q-1}$  или типа  $O^{p-1,q+1}$ . В момент слияния возникает сложное состояние равновесия, которое

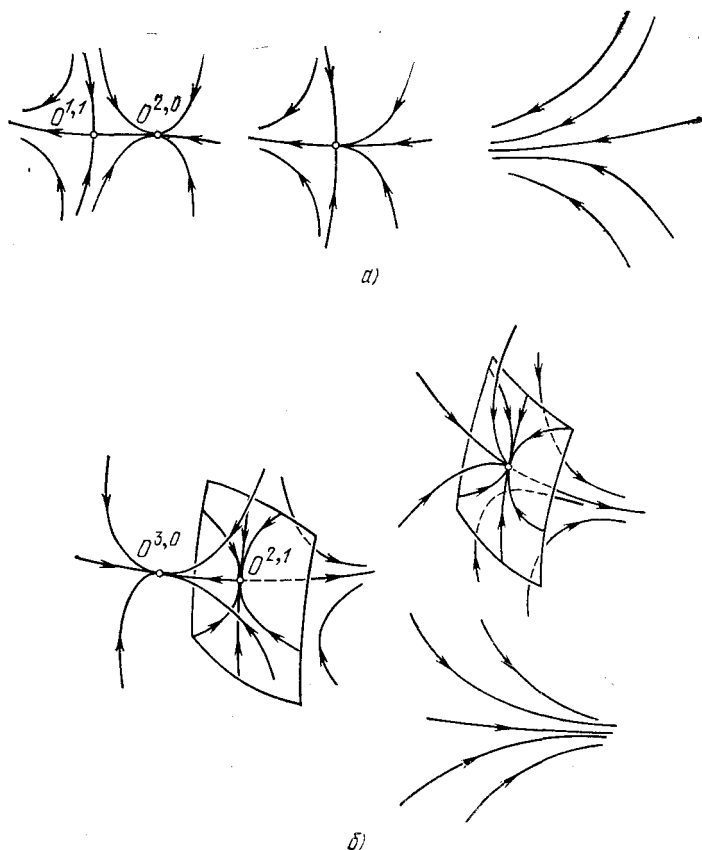


Рис. 7.7

при дальнейшем изменении параметров исчезает. Сказанное поясняет рис. 7.7, на котором представлены последовательные стадии изменения состояний равновесия в двумерном и трехмерном случаях при непрерывном изменении параметра  $\mu$ , приводящем к пересечению поверхности  $N_0$ .

Во втором случае при проходе через поверхность  $N_\omega$  состояние равновесия сохраняется. При этом, если оно ранее было типа  $O^{p,q}$ , то после прохода точкой  $\mu$  через поверхность  $N_\omega$  становится либо типа  $O^{p-2, q+2}$ , либо типа  $O^{p+2, q-2}$ . Одновременно с этим изменением типа состояния равновесия от него рождается или с ним сливается периодическое движение. Как это происходит, показано на рис. 7.8 и 7.9. На рис. 7.8 состояние равновесия  $O^{3,0}$  переходит в  $O^{1,2}$  и одновременно рождается периодическое движение  $\Gamma^{3,1}$ . На рис. 7.9 представлена другая возможность, когда такое же состояние равновесия  $O^{3,0}$  переходит в  $O^{1,2}$  и при этом с ним сливается периодическое движение  $\Gamma^{2,2}$ .

Выше были описаны основные типы бифуркаций состояний равновесия. Их можно символически записать:

$$\begin{aligned} O^{p,q} + O^{p+1, q-1} &\rightarrow \emptyset, \\ O^{p,q} + O^{p-1, q+1} &\rightarrow \emptyset; \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} O^{p,q} &\rightarrow O^{l-2, q+2} + \Gamma^{p, q+1}, \\ O^{p,q} + \Gamma^{p-1, q+2} &\rightarrow O^{p-2, q+2}; \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} O^{p,q} &\rightarrow O^{p+2, q-2} + \Gamma^{p+1, q}, \\ O^{p,q} + \Gamma^{p+2, q-1} &\rightarrow O^{p+2, q-2}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Первые две записи означают слияние с последующим исчезновением состояния равновесия  $O^{p,q}$  с  $O^{p+1, q-1}$  или  $O^{p-1, q+1}$  соответственно. Последующие четыре записи описывают все возможные варианты изменения особой точки  $O^{p,q}$ , сопровождающиеся одновременным рождением или исчезновением периодического движения.

Каждая из этих бифуркаций определяется некоторыми аналитическими условиями. Для их записи примем, что бифуркация происходит при возрастании скалярного параметра  $\mu$  в момент обращения его в нуль. Бифуркации (7.19) характеризуются тем, что при  $\mu = 0$  характеристическое уравнение (7.14) имеет нулевой корень  $\lambda = 0$ ;  $q - 1$  корней с положительной и  $p$  корней с отрицательной действительными частями в первом случае и соответственно  $q$  и  $p - 1$  корней — во втором случае.

Бифуркации (7.20) и (7.21) разделяются в зависимости от знака величины

$$\sigma = \operatorname{Re} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial \lambda}, \quad (7.22)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженное число и производные вычисляются при  $\mu = 0$  и  $\lambda = i\omega$ . При  $\sigma > 0$  имеют место бифуркации с возрастанием числа  $p$  у состояния равновесия и при  $\sigma < 0$  с его убыванием.

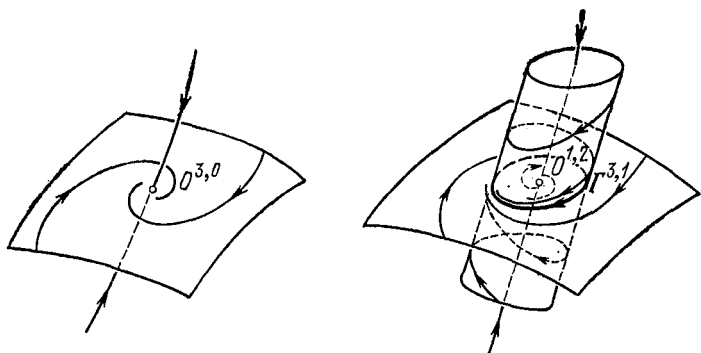


Рис. 7.8

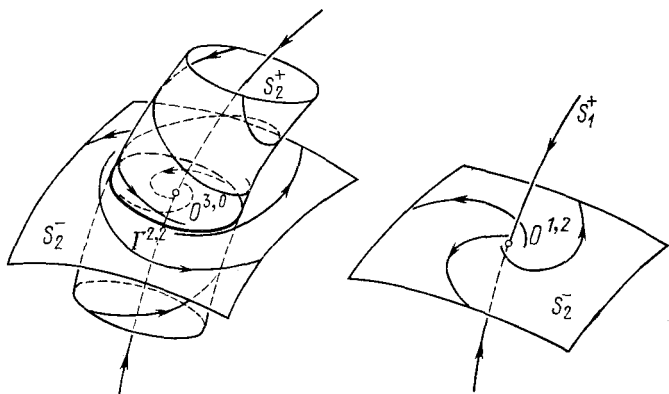


Рис. 7.9

Напомним, что при этой бифуркации при  $\mu = 0$  характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня  $\pm i\omega$ . В случае (7.20) при  $\mu = 0$ , помимо двух чисто мнимых корней  $\pm i\omega$ , имеется еще  $p - 2$  корня с отрицательной действительной частью и  $q$  с положительной. В случае (7.21) числа корней с отрицательной и положительной действительными частями соответственно равны  $p$  и  $q - 2$ . Различение случаев рождения и исчезновения

периодического движения возможно по так называемой ляпуновской величине  $g$ . Вычисление ее достаточно сложно. В случае, когда система дифференциальных уравнений записана в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i(\mu) x_i + \sum_{j,k=1}^n a_{ijk} x_j x_k + \sum_{j,k,s=1}^n a_{ijk_s} x_j x_k x_s + \dots, \quad (7.23)$$

где  $\lambda_1(0) = i\omega$ ,  $\lambda_2(0) = -i\omega$ , она равна [57]

$$\begin{aligned} g = & a_{1112} + a_{2221} + a_{2122} + a_{2212} + a_{1211} - \\ & - \frac{i}{\omega} [(a_{212} + a_{221}) a_{222} - (a_{112} + a_{121}) a_{111}] - \\ & - \sum_{k=3}^n \frac{a_{k12} + a_{k21}}{\lambda_k} (a_{22k} + a_{2k2} + a_{11k} + a_{1k1}) + \\ & + \frac{a_{k22} (a_{21k} + a_{2k1}) (\lambda_k - 2i\omega) + a_{k11} (a_{12k} + a_{1k2}) (\lambda_k + 2i\omega)}{\lambda_k^3 + 4\omega^2}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Пусть  $\sigma > 0$ , тогда при  $g > 0$  происходит исчезновение периодического движения и при  $g < 0$  — его рождение. При  $\sigma < 0$  все происходит наоборот: при  $g > 0$  — рождение и при  $g < 0$  — исчезновение.

Особый интерес представляют бифуркации устойчивого состояния равновесия. С устойчивым состоянием равновесия возможны следующие различные бифуркации:

$$O^{n,0} + O^{n-1,1} \rightarrow \emptyset; \quad (7.25)$$

$$O^{n,0} \rightarrow O^{n-2,2} + \Gamma^{n,1}, \quad O^{n,0} + \Gamma^{n-1,2} \rightarrow O^{n-2,2}. \quad (7.26)$$

При первой бифуркации устойчивое состояние равновесия  $O^{n,0}$  сливается с седловым  $O^{n-1,1}$  и они оба исчезают, превращаясь в обыкновенную точку.

При двух следующих бифуркациях состояние равновесия в обоих случаях из устойчивого переходит в седловое и при этом одновременно из него рождается или в нем исчезнет устойчивое  $\Gamma^{n,1}$  или соответственно седловое  $\Gamma^{n-1,2}$  периодическое движение.

В первом и последнем случаях происходит исчезновение устойчивого установившегося движения, во втором случае такое исчезновение не имеет места, поскольку при этом устойчивое состояние равновесия непрерывно преоб-

разуется в устойчивое же периодическое движение. Отметим, что при этом область притяжения устойчивого состояния равновесия непрерывно переходит в область притяжения устойчивого периодического движения. Сказанное поясняется рис. 7.8.

Исследование бифуркаций периодических движений несколько сложнее, чем состояний равновесия, и получаемые при этом результаты многообразнее. Прежде всего заметим, что изучение части из них может быть сведено к исследованию бифуркаций неподвижных точек преобразования. Это те бифуркации, при которых точечное отображение  $T$  секущей  $S$  продолжает существовать в некоторой фиксированной окрестности неподвижной точки  $O$ , несмотря на бифуркацию периодического движения (рис. 7.10).

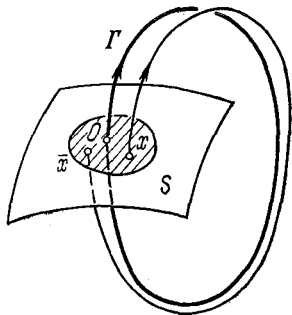


Рис. 7.10

Бифуркации неподвижных точек преобразования во многом аналогичны уже описанным бифуркациям состояний равновесия. Пусть точечное отображение  $T$  записано в виде

$$\bar{x} = f(x, \mu) \quad (7.27)$$

и пусть  $x^*(\mu)$  — его неподвижная точка. Тогда область существования этой неподвижной точки имеет своей границей поверхность, на которой обращается в нуль якобиан уравнения неподвижной точки

$$\chi(z, \mu)|_{z=1} = \text{Det} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right\|. \quad (7.28)$$

Здесь  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — компоненты  $f(x, \mu)$ , а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — компоненты вектора  $x$ . Тип неподвижной точки определяется числами  $p$  и  $q$  корней характеристического уравнения

$$\chi(z, \mu) = 0,$$

лежащих внутри и вне единичного круга  $|z| \leq 1$ . Отсюда следует, что изменение типа неподвижной точки  $x^*(\mu)$  в результате непрерывного изменения параметров  $\mu$  может произойти только при появлении корня  $z$  на границе



единичного круга, т. е. при выполнении одного из условий

$$\begin{aligned} \chi(e^{i\varphi}, \mu) &= 0 \quad (0 < \varphi < \pi), \\ \chi(1, \mu) &= 0, \quad \chi(-1, \mu) = 0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Второе из этих условий совпадает с ранее написанным условием обращения в нуль якобиана. Два других условия новые. Первое из них соответствует появлению пары комплексно-сопряженных корней вида  $e^{\pm i\varphi}$ , а второе — одного действительного корня  $z = -1$ . Поэтому граница области существования неподвижной точки  $O^{p,q}$  данного типа состоит из границы  $N_{+1}$  существования неподвижной точки и границ  $N_{\varphi}$  и  $N_{-1}$ , на которых меняется тип неподвижной точки за счет перехода через границу единичного круга двух комплексно-сопряженных корней или одного действительного отрицательного корня.

Бифуркации неподвижной точки  $O^{p,q}$  при непрерывном изменении параметра, ведущего к проходу через поверхность  $N_{+1}$ , совершенно такие же, как и для состояний равновесия. Именно при пересечении поверхности  $N_{+1}$  происходит слияние неподвижной точки  $O^{p,q}$  с неподвижной точкой одного из типов  $O^{p-1, q+1}$  или  $O^{p+1, q-1}$  с последующим их исчезновением. Однако вместе с этим исчезновением обеих неподвижных точек возможно появление простого или стохастического синхронизма (см. § 5). Обсуждение такой возможности выходит за рамки этого параграфа и будет проведено в дальнейшем в § 5. При пересечении границы  $N_{-1}$  возникает бифуркация, при которой происходит смена типа неподвижной точки и одновременно из нее рождается или в ней исчезает цикл двукратных неподвижных точек. Условно эту бифуркацию можно изобразить в виде

$$\begin{aligned} O^{p,q} &\rightarrow O^{p+1, q-1} + (O_1^{p,q}, O_2^{p,q}), \\ O^{p,q} &\rightarrow O^{p-1, q+1} + (O_1^{p,q}, O_2^{p,q}) \end{aligned} \quad (7.30)$$

в случае рождения цикла двукратных неподвижных точек  $(O_1^{p,q}, O_2^{p,q})$  и в виде

$$\begin{aligned} O^{p,q} + (O_1^{p+1, q-1}, O_2^{p+1, q-1}) &\rightarrow O^{p+1, q-1}, \\ O^{p,q} + (O_1^{p-1, q+1}, O_2^{p-1, q+1}) &\rightarrow O^{p-1, q+1} \end{aligned} \quad (7.31)$$

при слиянии с циклом двукратных неподвижных точек. Под циклом двукратных неподвижных точек  $(O_1^{p,q}, O_2^{p,q})$  имеется в виду следующее. При преобразовании  $T$  точка

$O_1^{p,q}$  переходит в точку  $O_2^{p,q}$ , а точка  $O_2^{p,q}$  — в точку  $O_1^{p,q}$ . Поэтому каждая из этих точек является неподвижной точкой отображения  $T^2$ , причем неподвижной точкой типа  $(p, q)$ , т. е. имеющей  $p$ -мерное многообразие  $S_p^+$  стремящихся к ней точек при неограниченном повторении преобразования  $T^2$  и  $q$ -мерное многообразие  $S_q^-$  точек, стремящихся к ней при повторениях обратного отображения  $T^{-2}$ . При преобразованиях  $T$  точки цикла и их инвариантные многообразия переходят друг в друга.

Особый интерес эта бифуркация представляет в случае, когда она происходит с устойчивой неподвижной точкой  $O^{n,0}$ . В этом случае она имеет один из видов

$$\begin{aligned} O^{n,0} &\rightarrow O^{n-1,1} + (O_1^{n,0}, O_2^{n,0}), \\ O^{n,0} + (O_1^{n-1,1}, O_2^{n-1,1}) &\rightarrow O^{n-1,1}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

При первой бифуркации устойчивая неподвижная точка вместе со своей областью притяжения непрерывно переходит в устойчивый цикл двукратных неподвижных точек и его область притяжения. Во втором — устойчивая неподвижная точка сливается с седловым циклом двукратных неподвижных точек и становится седловой.

Если отображение  $T$  — это отображение, порождаемое фазовыми траекториями, близкими к периодическому движению  $\Gamma$  на секущей поверхности  $S$ , то первой из описанных бифуркаций устойчивой неподвижной точки соответствует мягкий режим удвоения периода колебаний. Поясняющие этот процесс фазовые картинки в трехмерном случае представлены на рис. 7.11. Как меняются при этом осциллограммы колебаний, изображено на рис. 7.12. При этом  $\tilde{\Gamma}^{3,1}$  изображает родившееся движение удвоенного периода по отношению к периоду прежнего периодического движения  $\Gamma^{3,1}$ . Периодическое движение  $\Gamma^{3,1}$  переходит в  $\Gamma^{2,2}$ . На секущей поверхности  $S$  неподвижная точка  $O^{2,0}$  переходит в  $O^{1,1}$  и при этом одновременно рождается цикл двукратных неподвижных точек  $(O_1^{2,0}, O_2^{2,0})$ . На секущей поверхности  $S$  стрелками изображается отображение  $T^2$ . Для отображения  $T^2$  точки  $O_1^{2,0}$  и  $O_2^{2,0}$  — неподвижные точки.

Изменение параметров с переходом через поверхность  $N_\varphi$  приводит к изменению типа неподвижной точки и ( $\varphi \neq \neq 2\pi/3, \pi/4$ ) сопровождается слиянием с ней или рождением из нее инвариантной одномерной замкнутой кривой.

Эти бифуркации очень похожи на бифуркации состояния равновесия на границе  $N_\omega$ , которые сопровождаются появлением или исчезновением периодического движения, однако имеют некоторые особенности. Эти особенности проявляются в исключительности значений  $\varphi$ , равных  $2\pi/3$

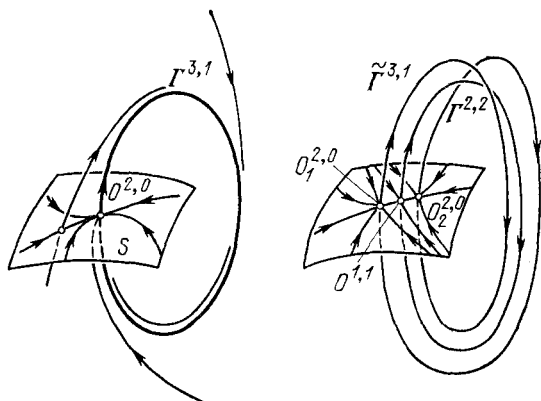


Рис. 7.11

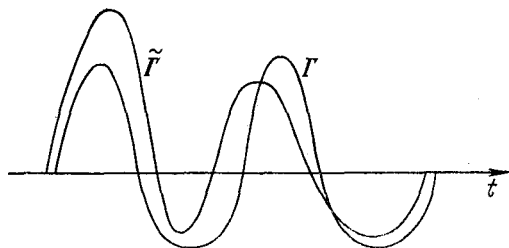


Рис. 7.12

и  $\pi/2$ , а также в том, что отображение  $T$  на этой инвариантной замкнутой кривой может отличаться от отображения, возникающего на периодическом движении. Суть этого различия можно понять из приводимого в дальнейшем описания точечного отображения окружности в окружность.

Особый интерес представляет бифуркация устойчивой неподвижной точки. Ее схема имеет один из видов

$$\begin{aligned} O^{n,0} &\rightarrow O^{n-2,2} + \Gamma^{n,1}, \\ O^{n,0} + \Gamma^{n-1,2} &\rightarrow O^{n-2,2}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

В первом случае устойчивая неподвижная точка  $O^{n,0}$  и ее область притяжения переходят в устойчивую замкнутую кривую  $\Gamma^{n,1}$  и ее область притяжения. Сама исходная неподвижная точка при этом становится седловой. Во втором случае седловая инвариантная кривая  $\Gamma^{n-1,2}$ , сливаясь с устойчивой неподвижной точкой  $O^{n,0}$ , передает ей свою седловую неустойчивость и исчезает.

Особые случаи  $\varphi = 2\pi/3$  и  $\varphi = \pi/2$  позволим оставить без внимания. Их описание имеется в работах [7, 12].

Применим теперь полученные сведения к первоначальной задаче исследования бифуркаций периодических движений. Для этого достаточно иметь в виду, что неподвижной точке  $O^{p,q}$  соответствует периодическое движение

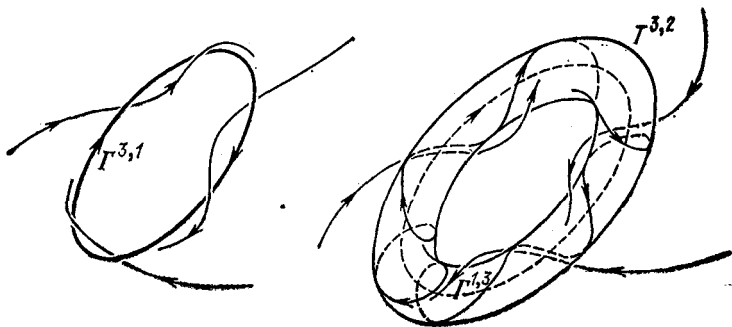


Рис. 7.13

$\Gamma^{p+1, q+1}$ , а замкнутой инвариантной одномерной кривой  $\Gamma^{p+1, q}$  — инвариантная двумерная тороидальная поверхность  $T^{p+2, q+1}$ . Поэтому, в частности, первая из бифуркаций (7.33) интерпретируется как мягкий переход устойчивого периодического движения в сложные устойчивые многопериодические колебания, соответствующие движениям фазовой точки по двумерному тору  $T^{n, 2}$  (рис. 7.13).

На этом закончим описание бифуркаций периодических движений, которые могут быть изучены с помощью прямого сведения к изучению точечного отображения секущей. В добавление к сказанному отметим, что для всех описанных выше бифуркаций имеются аналитические условия их осуществления. С ними можно ознакомиться по работам [1, 5, 37, 12].

Теперь рассмотрим оставшиеся возможности для изменения периодического движения  $\Gamma$ , т. е. те, при которых

нарушается существование гладкого взаимно однозначного отображения секущей. Для таких изменений есть следующие возможности; замкнутая кривая  $\Gamma$  стягивается в точку, на ней появляется состояние равновесия, она уходит в бесконечность \*). Замкнутая кривая может стянуться только к особой точке — состоянию равновесия — и поэтому этот случай уже был изучен при рассмотрении бифуркаций состояний равновесия. Он соответствует переходу через бифуркационную поверхность  $N_0$ . Второй случай новый, хотя он тоже связан с бифуркацией состояния равновесия, но не был замечен, поскольку раньше рассмотрение относилось только к окрестности состояния равновесия и не выходило за ее пределы. Третий случай оставим без внимания ввиду очевидности связанных с ним изменений. Перейдем к рассмотрению второго случая. В этом случае при бифуркационном значении параметра имеется состояние равновесия  $O$  и фазовая кривая  $\Gamma$ , выходящая и вновь входящая в него. Пусть это состояние равновесия простое, типа  $O^{p,q}$ . Так как фазовая кривая  $\Gamma$  выходит из  $O^{p,q}$ , то она лежит на инвариантном многообразии  $S_q^-$ , а так как она в него еще и входит, то она принадлежит еще и многообразию  $S_p^+$ . Отсюда следует, что многообразия  $S_p^+$  и  $S_q^-$  пересекаются по кривой  $\Gamma$ . Соответствующая картинка представлена на рис. 7.14. Как нетрудно понять, пересечение поверхностей  $S_p^+$  и  $S_q^-$  не является общим случаем и при общих сколь угодно малых изменениях параметров динамической системы должно исчезнуть. Это означает, что в пространстве параметров этому случаю вообще не отвечают области, а, как можно обнаружить, в общем случае только некоторые поверхности на единицу меньшей размерности. Таким образом, исследование этой бифуркации периодического движения свелось к следующему вопросу: когда фазовая кривая, идущая из простого седлового движения в него же, может превратиться в периодическое движение?

Исследование этого вопроса также может быть сведено

---

\*) В том, что этими случаями исчерпываются все возможности, можно убедить путем следующего рассуждения. Пусть не имеет место ни один из них, тогда при бифуркационном значении параметра кривая  $\Gamma$  — не точка, расположена в ограниченной области, в ее достаточно малой окрестности нет особых точек и поэтому для нее существует секущая  $S$  и точечное отображение  $T$  не только при бифуркационном значении параметра, но и в его малой окрестности. Чего не должно быть.

но к изучению некоторых точечных отображений. Для этого можно поступить следующим образом. На участках фазовой кривой  $\Gamma$ , выходящих и входящих в состояние равновесия  $O^{p,q}$ , вблизи состояния равновесия выберем

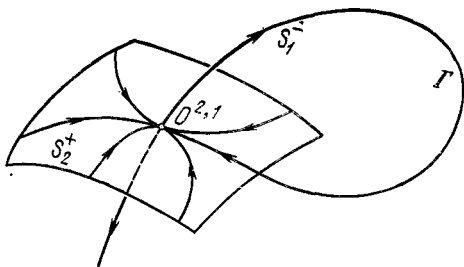


Рис. 7.14

точки  $M$  и  $N$ . Через эти точки проведем, например, ортогонально к  $\Gamma$  секущие  $S$  и  $Q$  (рис. 7.15). Фазовые траектории, близкие к части кривой  $\Gamma$ , заключенной между точками  $M$  и  $N$ , порождают точечное отображение секущей  $S$  в  $Q$ , которое назовем  $L$ . Кроме того, фазовые траектории окрестности состояния

равновесия порождают некоторое отображение секущей  $Q$  в  $S$ . Это последнее отображение обозначим через  $T$ . Ясно, что вопрос о переходе двоякоасимптотической кривой  $\Gamma$  при изменении параметров в периодическое движение сводится к обнаружению появления неподвижных точек у произведения отображений  $TL$  или  $LT$ . Такое исследование содержится в работах [61, 62, 39] и позволило обнаружить общие случаи и указать аналитические условия, при которых у этих отображений появляется единственная неподвижная точка, соответствующая возникающему из двоякоасимптотической кривой периодическому движению.

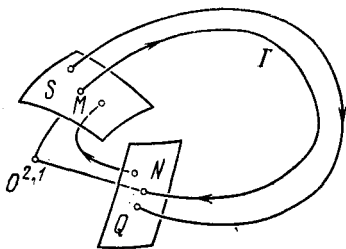


Рис. 7.15

Отметим еще, что эти исследования точечного отображения  $TL$  обнаружили не только случаи превращения фазовой траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия, в периодическое движение, но и более слож-

ные бифуркации, изучение которых примыкает к рассмотрению гомоклинических структур, о чем будет довольно подробно в дальнейшем рассказано.

Выше предполагалось, что состояние равновесия, появляющееся на периодическом движении, простое. Рассмотрим теперь случай, когда это состояние равновесия сложное. Придерживаясь нашего принципа общности, оно должно быть таким, чтобы этой возможности в пространстве параметров отвечала бифуркационная поверхность размерности на единицу меньше, чем размерность пространства параметров, т. е. бифуркационная поверхность, отвечающая бифуркации общего типа. Из этого следует, что сложная особая точка должна быть простейшей и ей должна отвечать в пространстве параметров некоторая поверхность. В сколь угодно малой близости от нее эта сложная точка должна превратиться в простую или исчезнуть. Общие случаи превращения простых точек в сложные нам известны. Эти превращения происходят на поверхностях  $N_\omega$  и  $N_0$ . Поверхность  $N_\omega$  не подходит, так как наличие у соответствующего ее точкам сложного состояния равновесия двоякоасимптотической траектории может быть лишь при выполнении некоторых дополнительных условий, поскольку для этого требуется пересечение интегральных многообразий  $S_p^+$  и  $S_q^-$ , таких же, как и в ранее рассмотренном случае. На поверхности  $N_0$  происходит слияние состояний равновесия  $O^{p,q}$  и  $O^{p+1,q-1}$ . Этот случай нас устроит, если наличие двоякоасимптотической фазовой кривой возможно в общем случае. Рассмотрим этот вопрос. Через точку  $O^{p,q}$  проходят интегральные многообразия  $S_p^+$  и  $S_q^-$  и через точку  $O^{p+1,q-1}$  — интегральные многообразия  $S_{p+1}^+$  и  $S_{q-1}^-$ . Пересечение многообразий  $S_q^-$  и  $S_{p+1}^+$  является общим. В силу того, что на поверхности  $N_0$  состояния равновесия  $O^{p,q}$  и  $O^{p+1,q-1}$  сливаются, до момента этого слияния поверхности  $S_q^-$  и  $S_{p+1}^+$  в окрестности этих точек в общем случае пересекаются по некоторой двоякоасимптотической фазовой траектории, идущей из точки  $O^{p,q}$  в точку  $O^{p+1,q-1}$ . Однако, кроме этого в общем случае обязательного пересечения, поверхности  $S_q^-$  и  $S_{p+1}^+$  в общем случае могут пересекаться и по некоторым другим двоякоасимптотическим кривым  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ . В двумерном случае такая кривая может быть только одна (рис. 7.16), однако уже для трехмерных систем это не так (рис. 7.17). При дальнейшем

изменении параметров, соответственно рассматриваемой бифуркации, состояния равновесия  $O^{p,q}$  и  $O^{p+1,q-1}$  после слияния исчезнут и оставят после себя ряд замкнутых траекторий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ , т. е. двоякоасимптотические фазовые траектории перейдут после исчезновения сложной особой точки в некоторые периодические движения.

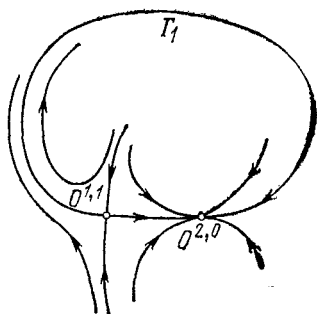


Рис. 7.16

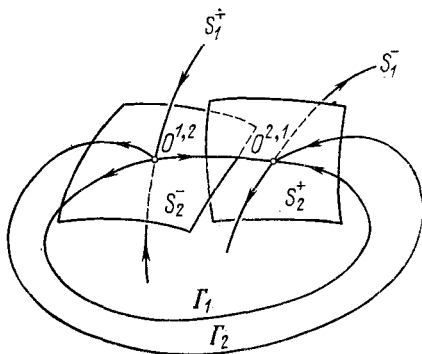


Рис. 7.17

Обоснование и исследование обстоятельств такого перехода может быть получено путем рассмотрения некоторых точечных отображений. Соответствующие этим точечным отображениям секущие показаны на рис. 7.18 для двумерного и трехмерного случаев.

Описанная бифуркация может быть изображена в виде символической схемы

$$O^{p,q} + O^{p+1,q-1} \rightarrow \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i^{p+1,q}. \quad (7.34)$$

Как и всегда, особый интерес представляет случай бифуркаций с участием устойчивых состояний равновесия и периодических движений. В этом случае  $p = n - 1$ . Далее, как нетрудно обнаружить, «пересечение» интегральных многообразий  $S_1^-$  и  $S_n^+$  происходит в общем случае по одной кривой и еще, возможно, одной, но не более. Это простое обстоятельство пояснено на рис. 7.19.

Таким образом, с участием устойчивых состояний равновесия или периодических движений возможна только одна (если не различать бифуркаций, отличающихся направлением изменения параметров) бифуркация



рассматриваемого типа, а именно

$$O^{n,0} + O^{n-1,1} + S_n^+ \cap S_1^- \rightarrow \Gamma^{n,1}. \quad (7.35)$$

В этой схеме  $S_n^+ \cap S_1^-$  представляет собою двоякоасимптотические фазовые кривые, идущие из точки  $O^{n-1,1}$  в

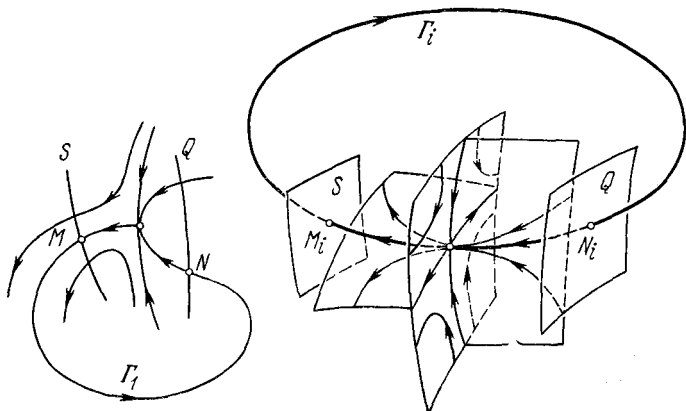


Рис. 7.18

точку  $O^{n,0}$ . Отметим, что при возникновении устойчивого периодического движения  $\Gamma^{n,1}$  согласно схеме (7.35),

слева направо в область его притяжения переходит многообразие фазовых траекторий  $S_n^+$  состояния равновесия  $O^{n,0}$ .

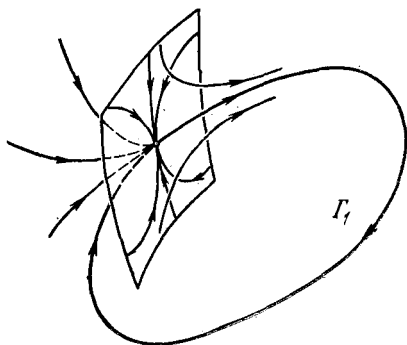


Рис. 7.19

Выше была изложена созданная к настоящему времени локальная теория состояний равновесия и периодических движений, а также попутно и отчасти неподвижных

точек преобразования. При этом полностью рассмотрены все основные типы равновесий и периодических движений и их основные бифуркации. Это рассмотрение носит в некотором смысле законченный и завершённый характер. Точнее, можно думать, что рассмотрение более сложных слу-

чаев не даст ничего принципиально нового для общего понимания и общего качественного изучения динамических систем. Это естественно в предположении, что речь идет об изучении классов динамических систем, в которых только этим бифуркациям соответствуют в пространстве параметров разделяющие его бифуркационные поверхности. Вместе с тем эта надежда уже ни в коей мере не оправдывается для специальных классов динамических систем и в первую очередь для консервативных гамильтоновых систем, где понятие общности совсем другое. Консервативные системы требуют своего, во многом специфического исследования. Эта специфичность проявляется не всегда, многие вопросы и, в частности те, которым в значительной мере будет посвящен дальнейший текст, в полной мере относятся и к консервативному случаю.

Заметим, что основное содержание методов малого параметра [34] и асимптотических методов [20] может трактоваться как исследование специфических бифуркаций и возмущений. Так, теория периодических движений Пуанкаре решает вопрос о рождении периодических движений от семейств периодических движений, теория систем с быстровращающимися фазами — вопрос о рождении интегральных тороидальных многообразий от многопараметрических семейств тороидальных многообразий, теория дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных исследует сингулярные возмущения решений дифференциальных уравнений и т. д.

Заметим еще, что выше были рассмотрены основные бифуркации состояний равновесия и периодических движений достаточно гладких систем дифференциальных уравнений. На практике довольно часто приходится сталкиваться с дифференциальными уравнениями лишь кусочно-гладкими. Появление поверхностей разрыва правых частей дифференциальных уравнений влечет возможность появления так называемых скользящих движений и других особенностей, требующих дополнительного изучения [41].

## § 2. Динамические системы с простейшими установившимися движениями

Выше были описаны локальная структура и локальные бифуркации состояний равновесия и периодических движений. Наибольший непосредственный интерес среди них представляют устойчивые состояния равновесия и устой-

чивые периодические движения. Только они могут быть установившимися движениями динамической системы, ее состояниями равновесия и периодическими движениями. Каждое устойчивое состояние равновесия и устойчивое периодическое движение имеет свою область притяжения. Возможен случай, когда эти области притяжения почти целиком заполняют все фазовое пространство. Под словами «почти целиком» имеется в виду, что вне этих областей могут быть лишь точки, не образующие областей, с общей нулевой мерой, например отдельные точки, линии или поверхности размерности, меньшей, чем размерность пространства. Для двумерных систем именно такова структура фазового пространства в общем случае. Для многомерных систем это не так. Однако было бы естественным выделить из них подкласс динамических систем с такой структурой — класс динамических систем, установившимися движениями которого могут быть только устойчивые состояния равновесия и устойчивые периодические движения и почти все остальные движения являются асимптотическими по отношению к одному из них. Оговорка «почти» не имеет прямого смысла, поскольку в такой динамической системе нет реализуемых движений, отличных от устойчивых состояний равновесия и периодических движений и асимптотически приближающихся к ним. Она имеет чисто математический смысл, который, однако, имеет совсем другое, очень важное отношение к реальному поведению динамической системы. Эти исключительные и нереализуемые движения отделяют друг от друга движения, приближающиеся к различным установившимся движениям. В этом и состоит их значение для исследования динамических систем описанного класса.

Поясним сказанное простыми примерами. В простейшем случае имеется одно установившееся движение, устойчивое состояние равновесия или периодическое движение, а все остальные движения к нему приближаются. Тогда говорят о глобальной устойчивости этого установившегося движения.

В последнее время в рамках так называемой абсолютной устойчивости получены практически важные достаточные критерии глобальной устойчивости состояния равновесия. В динамической системе с глобально устойчивым состоянием равновесия все фазовые точки без исключения к нему приближаются. В случае глобально ус-

тойчивого периодического движения это не совсем так. Поясняющие примеры приведены на рис. 7.20. На первом из них исключение составляет фазовая кривая, уходящая в бесконечность, на втором — седловая особая точка и две асимптотические к ней фазовые кривые. Подчеркнем, что эта особенность определяется топологией фазового пространства. Так, уже в цилиндрическом трехмерном фазовом

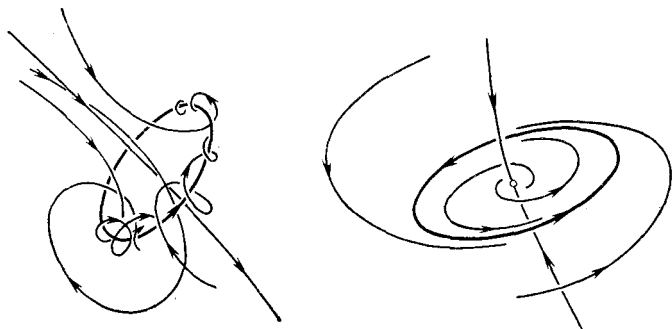


Рис. 7.20

пространстве возможно глобально устойчивое периодическое движение, к которому асимптотически приближаются все без исключения фазовые траектории.

В более сложном случае разных установившихся движений несколько. Соответствующие примеры представлены на рис. 7.21 и 7.22. На рис. 7.21 имеется два установившихся движения:  $O^{2,0}$  и  $\Gamma^{2,1}$ . Их области притяжения отделены друг от друга неустойчивым периодическим движением  $\Gamma^{1,2}$ . На рис. 7.22 установившимися движениями являются устойчивые состояния равновесия  $O_1^{3,0}$  и  $O_2^{3,0}$ , отделенные друг от друга сепаратрисной поверхностью  $S_2^+$  седлового состояния равновесия  $O^{2,1}$ .

Однако возможны и значительно более сложные случаи, когда разделяющая области притяжения граница имеет очень сложный характер. Схема одного из таких случаев представлена на рис. 7.23. На нем  $\Gamma_1^{3,1}$  и  $\Gamma_2^{3,1}$  — устойчивые периодические движения. Почти все фазовые траектории идут к одному из них и образуют две области притяжения. Разделяющими эти области притяжения являются сепаратрисные поверхности  $S_2^+$  и  $S_2^-$  седлового периодического движения  $\Gamma^{2,2}$ . Поведение этих сепаратрисных по-

верхностей необычайно сложно и не нашло отражения на схематическом рис. 7.23. Чтобы составить о нем некоторое представление, пересечем седловое периодическое дви-

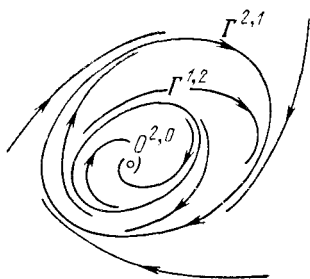


Рис. 7.21

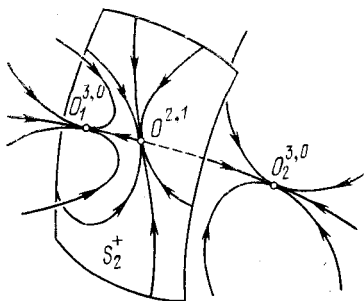


Рис. 7.22

жение  $\Gamma^{2,2}$  секущей поверхностью  $S$  и рассмотрим точечное отображение  $T$ , порождаемое на этой секущей  $S$  фазовыми траекториями. Точке пересечения  $\Gamma^{2,2}$  с секущей

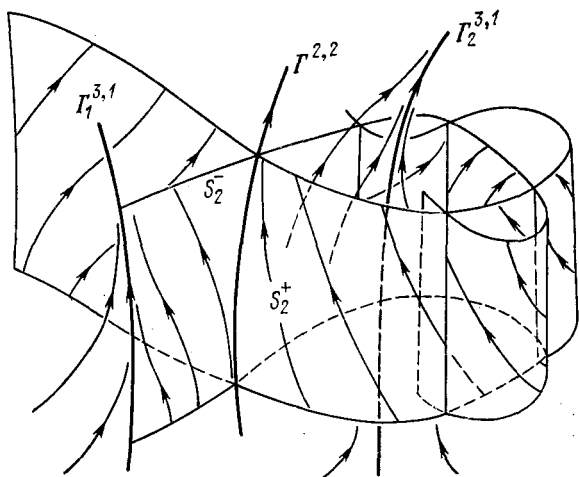


Рис. 7.23

поверхностью  $S$  отвечает неподвижная точка  $O^{1,1}$  отображения  $T$ . Сепаратрисные интегральные поверхности  $S_2^+$  и  $S_2^-$  пересекаются с секущей  $S$  по сепаратрисным инва-

риантным кривым  $S_1^+$  и  $S_1^-$  седловой неподвижной точки  $O_1^{1,1}$  отображения  $T$ . В интересующем нас случае инвариантные поверхности  $S_2^+$  и  $S_2^-$  седлового периодического движения пересекаются. Этому соответствует пересечение кривых  $S_1^+$  и  $S_1^-$ . Наличие этого пересечения влечет очень сложное переплетение сепаратрисных инвариантных кривых  $S_1^+$  и  $S_1^-$ , изображенное на рис. 7.24. Возможность подобной картинки и связанное с ней сложное поведение фазовых траекторий обнаружил А. Пуанкаре [47].

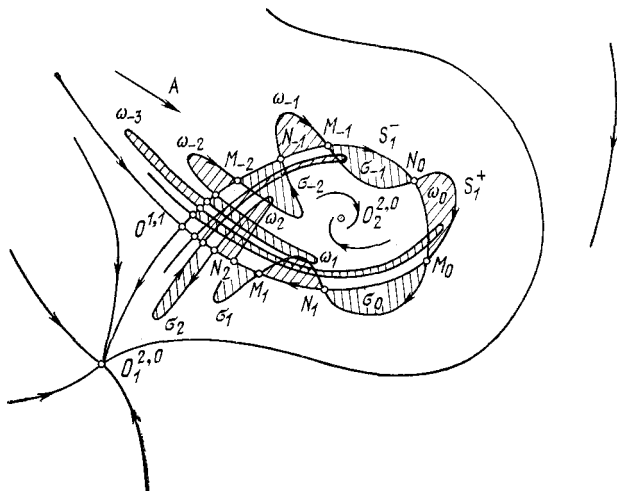


Рис. 7.24

Точки пересечения сепаратрисных кривых  $S_1^+$  и  $S_1^-$  были названы им гомоклиническими. На рис. 7.24 точка  $M_0$  пересечения кривых  $S_1$  и  $S_1^+$  — это гомоклиническая точка. Из наличия одной такой точки  $M_0$  следует существование бесконечного числа точек пересечения

$$M_i = T^i M_0 \quad (i = \dots, -1, 0, 1, \dots),$$

а также наличие еще хотя бы одной серии точек пересечения  $N_i = T^i N_0$  ( $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ).

Кривые  $S_1^+$  и  $S_1^-$  сложным образом разбивают плоскость на части, образуя некоторую мозаику из областей

$$\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots \text{ и } \dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots,$$

а также их пересечений. На рис. 7.24 эти области заштрихованы в разных направлениях. Из рис. 7.24 видно, что при преобразовании  $T$  эти области переходят друг в друга так, что

$$T\sigma_j = \sigma_{j+1}, \quad T\omega_s = \omega_{s+1}.$$

В силу этого, поток фазовых точек (обозначенный на рис. 7.24 стрелкой  $A$ ) разделяется на идущий вокруг петли  $O^{1,1}M_0O^{1,1}$  и идущий внутрь нее. Часть потока, попавшая внутрь петли, в свою очередь разделяется на поток, идущий к неподвижной точке  $O^{2,0}$ , соответствующей устойчивому периодическому движению  $\Gamma_1^{3,1}$ , и выходящий из петли. Потоки, выходящие из петли и обходящие ее, идут к неподвижной точке  $O_1^{2,0}$ , соответствующей периодическому движению  $\Gamma_1^{3,1}$ .

Способ разделения потоков, особенно внутри петли, как видно, необычайно сложный и тонкий, в соответствии со сложностью разделяющей границы. Вместе с тем, несмотря на эту сложность, общая структура фазового пространства проста и сводится к разбиению его на две области притяжения: область притяжения периодического движения

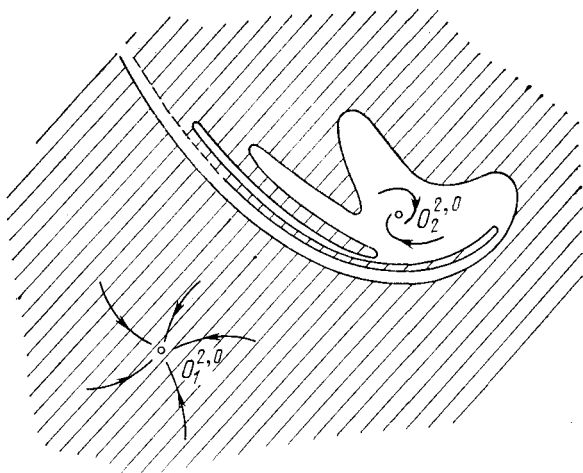


Рис. 7.25

$\Gamma_1^{3,1}$  и область притяжения периодического движения  $\Gamma_2^{3,1}$ . Эти области притяжения довольно сложного вида. До некоторой степени подробности они показаны на рис. 7.25. При этом для различения одна из них заштрихована.

Согласно приведенным примерам, динамические системы с простейшими установившимися движениями могут иметь простую структуру разбиения фазового пространства на области притяжения, а могут иметь области притяжения очень сложного вида. В приведенном примере сложность области притяжения обусловлена наличием пересечений интегральных многообразий периодического движения и появлением гомоклинического движения. Оказывается, что это обстоятельство имеет общий характер. Как будет видно из дальнейшего, наличие гомоклинической кривой влечет за собой очень сложную структуру фазового пространства и, в частности, наличие бесконечно множества седловых периодических движений. Поэтому можно думать, что у динамических систем с конечным числом состояний равновесия и периодических движений эти сложности не будут иметь места. Оказывается, что это так и есть. Тем самым среди систем с простейшими установившимися движениями выделяется подкласс систем с очень простой структурой фазового пространства: динамические системы с конечным числом состояний равновесия и периодических движений и всеми остальными движениями, асимптотически приближающиеся к ним, как при возрастании, так и убывании времени. Этот класс систем был выделен Смейлом [50—52] и получил название систем Морса — Смейла [27]. Важность и распространенность таких систем позволяют рассмотреть их несколько подробнее. Кроме сформулированных условий предполагается, что все состояния равновесия и периодические движения — общего типа и что их интегральные многообразия пересекаются только общим образом. Фазовое пространство будем предполагать компактным.

Пусть  $O_1^{n,0}, \dots, \Gamma_i^{n,1}$  — устойчивые состояния равновесия и периодические движения,  $O_1^{0,n}, \dots, \Gamma_m^{1,n}$  — неустойчивые и  $O_1^{p,q}, \dots, \Gamma_k^{p,q}$  — седловые. Окружим каждое из них малыми окрестностями с кусочно-гладкими граничными поверхностями, составленными либо из поверхностей без контакта, либо из кусков интегральных поверхностей. Возможные виды таких поверхностей в трехмерном случае изображены на рис. 7.26, а, б, в. Обозначим границы этих окрестностей для устойчивых и неустойчивых состояний равновесия и периодических движений соответственно через  $\sigma_1^+, \dots, \sigma_l^+$  и  $\sigma_1^-, \dots, \sigma_m^-$ . У седлового состояния равновесия типа  $O_i^{1, n-1}$  или  $O_i^{n-1, 1}$



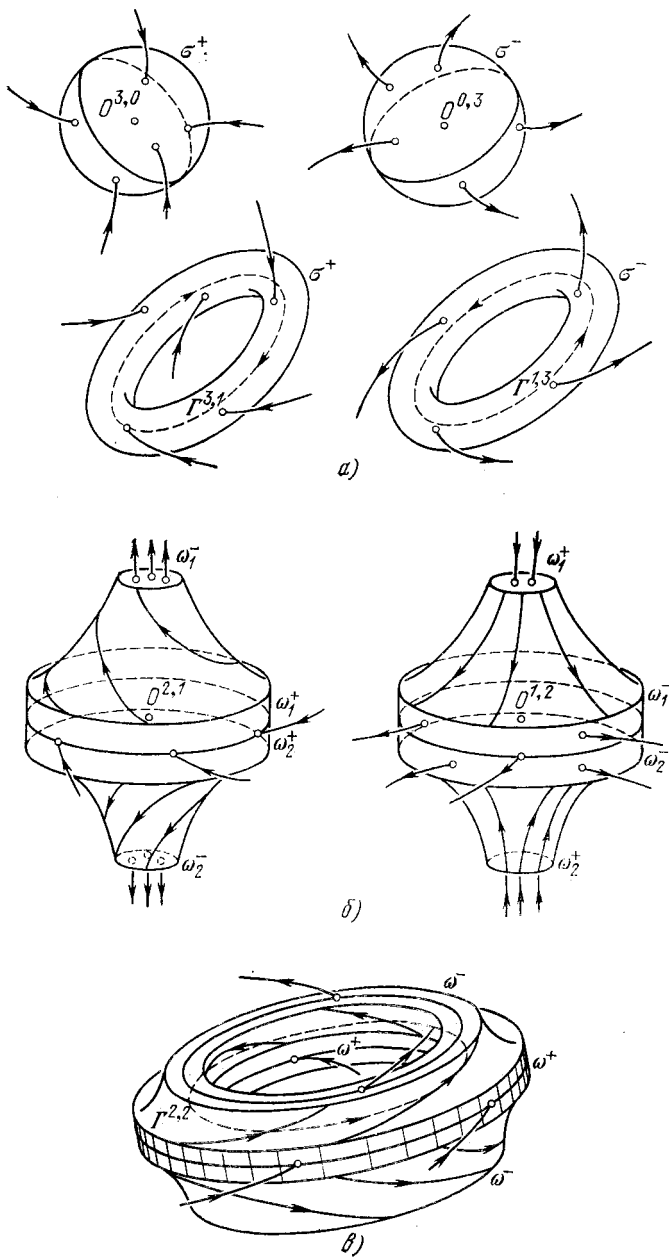


Рис. 7.26

имеются четыре граничные гладкие поверхности без контакта:  $\omega_{i1}^+$ ,  $\omega_{i2}^+$ ,  $\omega_{i1}^-$  и  $\omega_{i2}^-$ . В трехмерном случае для состояния равновесия типов  $O^{1,2}$  и  $O^{2,1}$  они изображены на том же рис. 7.26. Заметим, что для состояния равновесия  $O_i^{1, n-1}$  поверхности  $\omega_{i1}^-$  и  $\omega_{i2}^-$  состоят из двух частей гладкой поверхности без контакта, разделенной на две части сепаратрисной интегральной поверхностью  $S_{n-1}^-$  состояния равновесия  $O_i^{1, n-1}$ . Аналогично в случае равновесия  $O_i^{n-1, 1}$  гладкую поверхность без контакта составляют поверхности  $\omega_{i1}^+$  и  $\omega_{i2}^+$ . Их разделяет сепаратрисная поверхность  $S_{n-1}^+$  состояния равновесия  $O_i^{n-1, 1}$ . В случае седлового состояния равновесия типа  $O_i^{p_i, q_i}$  ( $p_i, q_i \neq 1$ ) таких гладких поверхностей без контакта только две:  $\omega_i^+$  и  $\omega_i^-$ .

Аналогичные обозначения  $\omega_{i1}^+$ ,  $\omega_{i2}^+$ ,  $\omega_{i1}^-$  и  $\omega_{i2}^-$  для гладких кусков поверхностей без контакта введем для седловых периодических движений типов  $\Gamma_i^{2, n-1}$  и  $\Gamma_i^{n-1, 2}$ . Как и для состояния равновесия,  $\omega_{i1}^-$  и  $\omega_{i2}^+$  и соответственно  $\omega_{i1}^+$  и  $\omega_{i2}^-$  составляют гладкие поверхности без контакта, разделяемые сепаратрисными поверхностями  $S_{n-1}^-$  и  $S_{n-1}^+$  периодических движений  $\Gamma_i^{2, n-1}$  и соответственно  $\Gamma_i^{n-1, 2}$ . Трехмерный и двумерный случаи представляют при этом некоторое исключение, и для седлового периодического движения таких гладких кусков поверхности  $\omega$  восемь (рис. 7.26), что, впрочем, для дальнейшего несущественно. Для седлового периодического движения  $\Gamma_i^{p_i, q_i}$  ( $p_i \neq 2, n - 1$ ) таких гладких поверхностей без контакта будет только две:  $\omega_i^+$  и  $\omega_i^-$ .

У рассматриваемой нами системы всякая фазовая точка может находиться вне выделенных нами окрестностей не дольше некоторого конечного времени  $\tau$ . Поэтому фазовые траектории, лежащие вне выделенных малых окрестностей, порождают на их граничных поверхностях некоторые точечные отображения. При этом каждая поверхность  $\sigma_i^-$ ,  $\omega_i^-$ ,  $\omega_{i1}^-$  или  $\omega_{i2}^-$  отображается в какие-то другие поверхности  $\sigma_j^+$ ,  $\omega_j^+$ ,  $\omega_{j1}^+$  или  $\omega_{j2}^+$ . Отображение, преобразующее, например, точки поверхности  $\sigma_j^-$ , в  $\omega_{j1}^+$ , будем обозначать через  $T$  ( $\sigma_j^- \rightarrow \omega_{j1}^+$ ). Таких различных отображений будет конечное число, причем каждое из этих отображений кусочно-гладкое. Это последнее утверждение

следует из существования верхней границы  $\tau$  длительности движения фазовой точки от одной поверхности до другой и из компактности гладких кусков поверхностей без контакта, ограничивающих выделенные нами окрестности состояний равновесия и периодических движений.

Мы рассмотрели фазовые траектории, расположенные вне выделенных окрестностей, и обнаружили, что их поведение описывается конечным числом гладких точечных отображений. Рассмотрим теперь фазовые траектории, расположенные внутри этих выделенных окрестностей. В окрестностях устойчивых состояний равновесия или периодических движений все фазовые траектории асимптотически приближаются к соответствующему состоянию равновесия или периодическому движению. Внутри окрестностей неустойчивых состояний равновесия или периодических движений все фазовые траектории выходят из этих окрестностей. В окрестностях седловых состояний равновесия или периодических движений все траектории, кроме траекторий, принадлежащих интегральным многообразиям, проходящим через состояние равновесия или периодическое движение, при убывании времени пересекают поверхность  $\omega_i^-$  ( $\omega_{i1}^-$ ,  $\omega_{i2}^-$ ), а при возрастании времени пересекают поверхность  $\omega_i^+$  ( $\omega_{i1}^+$ ,  $\omega_{i2}^+$ ). Тем самым внутри окрестности седлового состояния равновесия или периодического движения фазовые траектории порождают точечные отображения, преобразующие  $\omega_i^+$  ( $\omega_{i1}^+$ ,  $\omega_{i2}^+$ ) в  $\omega_i^-$  ( $\omega_{i1}^-$ ,  $\omega_{i2}^-$ ). Исключения составляют при этом лишь граничные точки  $\omega_{i1}^+$  и  $\omega_{i2}^+$ , принадлежащие инвариантной поверхности  $S_{p_i}^+$ . Таких различных отображений конечное число. Отображение, преобразующее, например,  $\omega_{i1}^+$  в  $\omega_i^-$ , обозначим через  $T$  ( $\omega_{i1}^+ \rightarrow \omega_i^-$ ).

Рассмотрим теперь произвольную фазовую траекторию, и пусть

$$\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots \quad (7.36)$$

— последовательные точки пересечения ее с поверхностями без контакта  $\sigma$  и  $\omega$ . Любые две последовательные точки этой последовательности связаны между собой одним из отображений  $T$ . В силу того, что любая фазовая траектория при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически приближается к одному из состояний равновесия или периодическому движению, последовательность точек

(7.36) — конечная, вида

$$x_{-s}, x_{-s+1}, \dots, x_{r-1}, x_r. \quad (7.37)$$

При этом точка  $x_{-s}$  принадлежит либо одной из поверхностей  $\sigma_i^-$ , либо одному из интегральных многообразий  $S_q^-$ . Аналогично точка  $x_r$  принадлежит либо одной из поверхностей  $\sigma_i^+$ , либо одному из интегральных многообразий  $S_p^+$ . Оказывается, что при достаточно малых окрестностях, выделяющих состояния равновесия и периодические движения, ни одна фазовая траектория не пересекает одну и ту же поверхность  $\omega$  дважды. Поэтому в любой последовательности (7.37) общее число точек  $s + r + 1$  не более некоторого конечного  $N$ . Это означает, что всевозможным фазовым траекториям рассматриваемой динамической системы соответствует конечное число различных конечных последовательностей точечных отображений  $T (\sigma^- \rightarrow \omega^+)$ ,  $T (\omega^+ \rightarrow \omega^-)$  и  $T (\omega^- \rightarrow \sigma^+)$ . Все эти последовательности могут быть в принципе найдены следующим образом. Точки каждой из поверхностей  $\sigma_i^-$  преобразуются в какие-то поверхности  $\sigma_j^+$  и  $\omega_k^+$ . В свою очередь каждая из поверхностей  $\omega_k^-$  преобразуется в какие-то области  $\bar{\omega}_k^+ \cap \sigma_s^+$  и  $\bar{\omega}_k^- \cap \omega_l^+$  на поверхностях  $\sigma_s^+$  и  $\omega_l^+$ . Эти области опять преобразуются в какие-то области на поверхностях  $\sigma$  и  $\omega$  и т. д., но не более чем  $N$  раз. Описанные последовательные преобразования можно изобразить в виде некоторого графа.

Если отвлечься от движений, асимптотически приближающихся к седловым состояниям равновесия и периодическим движениям, то точки каждой из поверхностей  $\sigma_i^-$  после конечного числа преобразований (на более  $N$ ) перейдут в точки каких-то поверхностей  $\sigma_j^+$ . Эти потоки фазовых траекторий от неустойчивых состояний равновесия и периодических движений к устойчивым разделяются в соответствии с описанной схемой и представляющим ее графом сепаратрисными интегральными многообразиями седловых состояний равновесия и периодических движений типов  $O_{1,n-1}$ ,  $O_{n-1,1}$ ,  $\Gamma_{2,n-1}$  и  $\Gamma_{n-1,2}$ .

Таким образом, мы пришли к описанию структуры фазового пространства рассматриваемого типа динамических систем с помощью конечного числа последовательностей точечных отображений и отвечающего им графа. Это описание дает общее представление о структуре фазо-

вого пространства таких динамических систем и возможных ее бифуркациях, а также указывает некоторый путь фактического исследования.

Вернемся к доказательству утверждения, на котором основаны изложенные выше общие соображения. Прежде всего введем некоторые определения. Совокупность состояний равновесия и периодических движений и их интегральных многообразий назовем скелетом динамической системы. Замкнутый контур, составленный из фазовых траекторий, конец каждой из которых соединен с началом

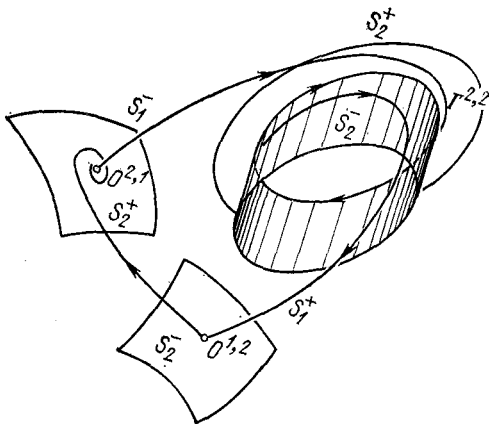


Рис. 7.27

следующей, назовем циклом. На рис. 7.27 приведен пример цикла, составленного из трех фазовых траекторий.

**Теорема 7.1 [40].** Динамическая система с простейшими установившимися движениями, имеющая конечное число простых состояний равновесия и периодических движений и пересечения интегральных многообразий только общего типа, не имеет циклов.

Рассмотрим произвольный цикл, составленный из фазовых траекторий  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ , проходящих при возрастании времени в порядке их написания. Тогда фазовая траектория  $\gamma_i$  является пересечением интегральных многообразий  $S_{q_{i-1}}^-$  и  $S_{p_i}^+$  размерностей  $q_{i-1}$  и  $p_i$ .

В силу предполагаемой общности пересечений интегральных многообразий

$$q_{i-1} + p_i \geq n + 1,$$

где  $n$  — размерность фазового пространства. Суммируя все такие неравенства, найдем, что

$$\sum_{i=1}^s (q_i + p_i) \geq sn + s. \quad (7.38)$$

С другой стороны, если фазовая траектория  $\gamma_i$  при возрастании времени является асимптотической к состоянию равновесия, то  $q_i + p_i = n$ , а если к периодическому движению, то  $q_i + p_i = n + 1$  и поэтому

$$\sum_{i=1}^s (q_i + p_i) = sn + s - \kappa, \quad (7.39)$$

где  $\kappa$  — число состояний равновесия, участвующих в цикле. Сравнивая (7.38) с (7.39), приходим к выводу, что цикл возможен только при  $\kappa = 0$ , т. е. он может быть составлен только из фазовых траекторий, асимптотических к седловым периодическим движениям. Однако, как будет показано в дальнейшем, динамическая система с циклом такого вида имеет бесконечное число периодических движений и движений, отличных от асимптотических, к состояниям равновесия и периодическим движениям. Тем самым теорема доказана.

Теперь перейдем к доказательству требуемого утверждения об отсутствии фазовых траекторий, дважды пересекающих достаточно малую окрестность седлового состояния равновесия или периодического движения. Так как это утверждение лежит в основе сводимости исследования рассматриваемых динамических систем к рассмотрению конечного числа последовательностей точечных отображений, то сформулируем это утверждение в виде следующей теоремы.

**Теорема 7.2.** Исследование фазовых траекторий динамической системы, о которой шла речь в теореме 7.1, сводится к рассмотрению кусочно-гладкого точечного отображения поверхностей без контакта  $\sigma_i^-$  неустойчивых состояний равновесия и периодических движений в поверхности без контакта  $\sigma_j^+$  устойчивых состояний равновесия и периодических движений (рис. 7.28).

Пусть  $\delta_1^r, \delta_2^r, \dots, \delta_k^r$  — окрестности седловых состояний равновесия и периодических движений описанного вида, убывающие с ростом номера  $r$ . Если требуемое утверждение не выполняется, то существует последователь-

ность фазовых траекторий  $\gamma^1, \gamma^2, \dots$  такая, что каждая траектория  $\gamma^r$  пересекает дважды по крайней мере одну из окрестностей  $\delta_1^r, \delta_2^r, \dots, \delta_k^r$ . Поэтому существует последовательность вложенных друг в друга окрестностей  $\delta_i^{r_1}, \delta_i^{r_2}, \dots$ , и последовательность фазовых траекторий  $\gamma^{r_1}, \gamma^{r_2}, \dots$  таких, что фазовая траектория  $\gamma^{r_j}$  дважды пересекает окрестность  $\delta_i^{r_j}$ , а следовательно, и границу окрестности  $\delta_i^{r_j}$ , выходя из точки  $x^{r_j}$  и приходя в точку

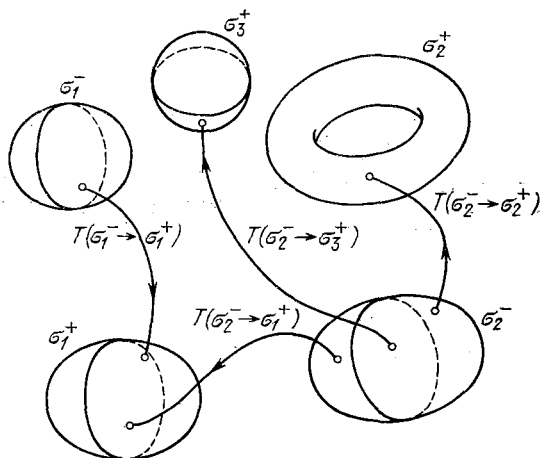


Рис. 7.28

$x^{r_j}$ . Из этой последовательности фазовых траекторий можно выделить в свою очередь подпоследовательность, для которой точки  $x^{r_j}$  и  $\bar{x}^{r_j}$  имеют предельные  $x^*$  и  $\bar{x}^*$ . Эти предельные точки должны лежать соответственно на интегральных многообразиях  $S^+$  и  $S^-$  состояния равновесия или периодического движения, окруженного окрестностью  $\delta_i^{r_1}$ . Фазовая траектория, выходящая из точки  $x^*$ , не может идти в устойчивое состояние равновесия или периодическое движение, так как это имело бы место и для близких траекторий и поэтому они не могли бы проходить в сколь угодно близости к точке  $\bar{x}^*$ . Поэтому фазовая траектория, выходящая из точки  $x^*$ , идет в какое-то седловое состояние равновесия или периодическое движение, окруженное окрестностью  $\delta_s^{r_1}$ . Фазовые траектории рассматриваемой

подпоследовательности пересекают ее границу в точках  $y^{rj}$  и  $\bar{y}^{rj}$ . Для некоторой подпоследовательности фазовых траекторий эти точки имеют предельные  $y^*$  и  $\bar{y}^*$ . Точки  $y^*$  и  $\bar{y}^*$  лежат на интегральных многообразиях  $S^+$  и соответственно  $S^-$  состояния равновесия или периодического движения, лежащих внутри окрестности  $\delta_s^{r1}$ . Фазовая траектория, выходящая из точки  $\bar{y}^*$ , опять не может идти ни в одно устойчивое состояние равновесия или периодическое движение. Продолжая это рассуждение и учитывая, что седловых состояний равновесия и периодических движений конечное число, приходим к существованию замкнутого контура, составленного из фазовых траекторий интегральных многообразий седловых равновесий и периодических движений, т. е. цикла. Так как цикла быть не может, то приходим к противоречию, доказывающему требуемое утверждение.

Выше был выделен класс динамических систем, характеризующийся тем, что (почти все) его фазовое пространство разбивается на некоторое конечное число областей притяжения устойчивых состояний равновесия и периодических движений. При этом роль седловых состояний равновесия и периодических движений и их инвариантных многообразий состояла лишь в том, что они формировали разделяющую границу этих областей. Однако роль седловых периодических движений в структуре фазового пространства может быть и более существенной. Как оказывается, они могут принять участие в формировании установившихся движений, которые будут иметь уже существенно более сложную природу, чем состояния равновесия и периодические движения. Для того чтобы перейти к изучению и описанию этих более сложных установившихся движений, необходимо ознакомиться с некоторыми сведениями из теории точечных отображений и лишь после изложения этих сведений продолжить рассмотрение структуры фазового пространства многомерной динамической системы.

### § 3. Вспомогательные сведения о точечных отображениях

Как говорилось ранее, метод точечных отображений позволяет свести исследование динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, к рассмо-



трению порождаемых ими точечных отображений. Кроме того, исследование точечных отображений представляет и самостоятельный интерес, поскольку с их помощью описываются динамические системы с дискретным описанием изменения во времени.

В настоящем параграфе проводится геометрически наглядное рассмотрение точечных отображений. Рассматривается преобразование прямой в прямую, окружности в окружность, излагается метод неподвижной точки и метод вспомогательных отображений, приводится значительное число примеров точечных отображений, представляющих интерес для качественного исследования дифференциальных уравнений и связанных с ними колебательных явлений.

**1. Преобразование прямой в прямую.** Преобразование прямой в прямую можно задать формулой

$$\bar{x} = f(x), \quad (7.40)$$

определяющей точку  $\bar{x}$ , в которую преобразуется точка  $x$ . Зависимость (7.40) можно изобразить графически. Если к графику функции  $f(x)$  добавить еще биссектрису  $\bar{x} = x$ ,

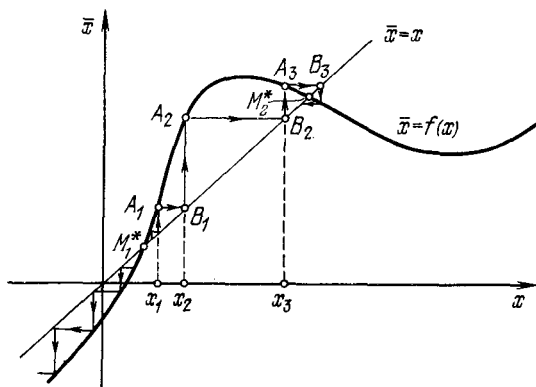


Рис. 7.29

то можно прийти к очень наглядному способу построения последовательных отображений, названному диаграммой Кёнигса—Ламерея [1] и состоящему в построении изображенной на рис. 7.29 ломаной  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, \dots$ , абсциссы точек  $A_1, A_2, \dots$  которой представляют собой последовательные преобразования  $x_1 = x, x_2 = f(x_1)$ ,

$x_3 = f(x_2), \dots$ . Точки пересечения графика на рис. 7.29 с биссектрисой определяют неподвижные точки преобразования, т. е. точки, преобразующиеся в себя. Такими точками на рис. 7.29 являются точки  $M_1^*$  и  $M_2^*$ . При этом точка  $M_1^*$  является неустойчивой, а точка  $M_2^*$  — устойчивой, поскольку точки, близкие к точке  $M_1^*$ , преобразуются согласно диаграмме рис. 7.29, отдаляясь от точки  $M_1^*$ , а точки, близкие к  $M_2^*$ , — напротив, приближаясь к ней.

Замкнутой ломаной  $A_1, B_1, A_2, \dots, A_{m+1} \equiv A_1$  соответствует цикл  $m$ -кратных неподвижных точек. При  $m = 1$  замкнутая ломаная  $A_1, B_1, A_2 \equiv A_1$  превращается в точку пересечения графика с биссектрисой и соответствует однократной неподвижной точке. На рис. 7.30 изображена замкнутая ломаная с  $m = 2$ . Она соответствует двум двукратным неподвижным точкам  $x_1^*$  и  $x_2^*$  таким, что  $f(x_1^*) = x_2^*, f(x_2^*) = x_1^*$ . Цикл неподвижных точек  $x_1^*$  и  $x_2^*$  устойчивый, поскольку ломаные линии, близкие

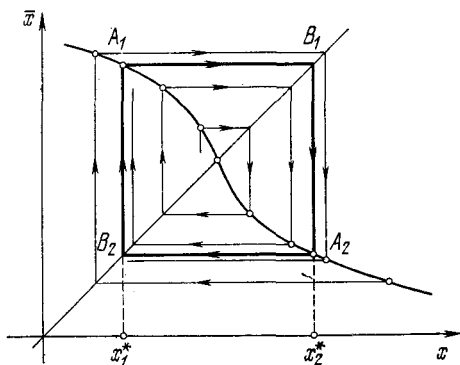


Рис. 7.30

к соответствующей этому циклу замкнутой ломаной, к ней приближаются. При произвольном  $m$  замкнутой ломаной  $A_1, B_1, \dots, A_{m+1} \equiv A_1$  отвечает  $m$  кратных различных неподвижных точек  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ , связанных соотношениями

$$f(x_1^*) = x_2^*, f(x_2^*) = x_3^*, \dots, f(x_m^*) = x_1^*. \quad (7.41)$$

Непосредственно ясно, что  $m$ -кратная неподвижная точка отображения  $T$  является однократной неподвижной

точкой  $m$ -й степени отображения  $T$ , т. е. отображения  $T^m$ . Обратное не совсем верно, поскольку неподвижными точками отображения  $T^m$  могут быть не только  $m$ -кратные неподвижные точки, но и однократные, и точки, кратность которых является делителем числа  $m$ .

Как известно, условие устойчивости однократной неподвижной точки  $x^*$  состоит в выполнении неравенства  $|f'(x^*)| < 1$ , а неустойчивости — неравенства  $|f'(x^*)| > 1$ . Для  $m$ -кратной неподвижной точки условия устойчивости и неустойчивости соответственно имеют вид

$$|f'(x_1^*) \dots f'(x_m^*)| < 1 \quad \text{и} \quad |f'(x_1^*) \dots f'(x_m^*)| > 1. \quad (7.42)$$

Как известно, устойчивым (неустойчивым) неподвижным точкам отображения, простым и кратным, соответствуют устойчивые (неустойчивые) периодические установившиеся движения соответствующей динамической системы. Поэтому изучение точечного отображения предполагает, в первую очередь, отыскание и исследование устойчивости его неподвижных точек. Затем непосредственный интерес представляют области притяжения неподвижных точек. В некоторых случаях на этом исследовании и заканчивается, поскольку вся прямая разбивается на некоторое число областей притяжения различных устойчивых неподвижных точек. Именно так обстоит дело для взаимно однозначного отображения.

Взаимная однозначность означает, что каждому значению  $x$ , согласно (7.40), отвечает единственное значение  $\bar{x}$  и что ни при каких различных  $x$  и  $y$  не может иметь места равенство  $f(x) = f(y)$ . Из этого следует, что функция  $f(x)$  монотонно меняется с монотонным изменением  $x$  и что, следовательно, для всех  $x$  либо  $f'(x) \geq 0$ , либо  $f'(x) \leq 0$ .

При изменении  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$   $f(x)$  изменяется монотонно, меняясь в пределах от  $f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  до  $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . При этом возможны следующие случаи: а)  $f(-\infty) = -\infty$  ( $+\infty$ ) и  $f(+\infty) = +\infty$  ( $-\infty$ ), и тогда отображение (7.40) преобразует прямую в прямую; б) одно из значений  $f(-\infty)$  или  $f(+\infty)$  конечно, и тогда точечное отображение (7.40) преобразует прямую в полупрямую; в) оба значения  $f(-\infty)$  и  $f(+\infty)$

конечные, и тогда отображение (7.40) преобразует прямую в конечный отрезок.

На рис. 7.31 представлен график взаимно однозначного точечного отображения, заключенный между горизонтальными асимптотами  $\bar{x} = f(-\infty)$  и  $\bar{x} = f(+\infty)$ . При этом любая точка  $x$  прямой преобразуется внутрь отрезка

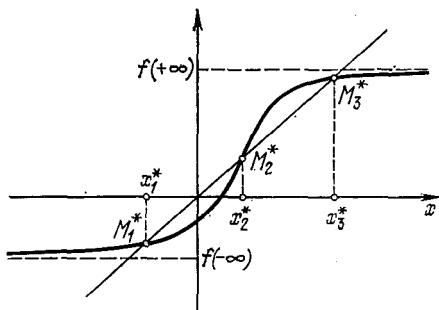


Рис. 7.31

( $f(-\infty), f(+\infty)$ ), на котором имеются три неподвижные точки:  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  и  $x_3^*$ . Неподвижные точки  $x_1^*$  и  $x_3^*$  — устойчивые, а неподвижная точка  $x_2^*$  — неустойчивая. Всякая точка полупрямой  $(-\infty, x_2^*)$  при последовательных применениях отображения асимптотически приближается к точке  $x_1^*$ , а всякая точка полупрямой  $(x_2^*, +\infty)$  — к точке  $x_3^*$ . Таким образом, вся прямая разбивается неустойчивой неподвижной точкой на две области притяжения,  $\Pi(x_1^*)$  и  $\Pi(x_3^*)$ , устойчивых неподвижных точек  $x_1^*$  и  $x_3^*$ .

Нетрудно убедиться, что разбиение всей прямой на какое-то число областей притяжения устойчивых неподвижных точек имеет место для общего взаимно однозначного отображения с  $f'(x) \geq 0$ . Действительно, пусть  $\dots < x_1^* < x_2^* < x_3^* < \dots$  — точки пересечения графика точечного отображения с биссектрисой. При этом устойчивые и неустойчивые точки, очевидно, чередуются. Для каждой устойчивой неподвижной точки  $x_i^*$  отрезок  $(x_{i-1}^*, x_{i+1}^*)$  будет ее областью притяжения. Совокупность интервалов  $(x_{j-1}^*, x_{j+1}^*)$  с  $j = i, i \pm 2, \dots$  образует требуемое разбиение.

Особые случаи, при которых график может касаться биссектрисы, представляют интерес, поскольку соответствуют бифуркациям точечного отображения. Эти особые случаи можно рассматривать, как возникшие в результате непрерывного изменения точечного отображения и его графика, при котором две или несколько неподвижных

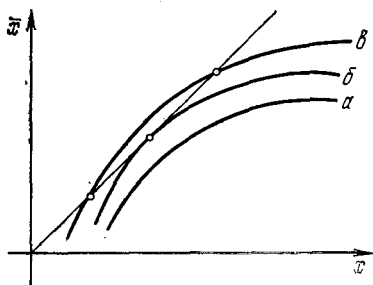


Рис. 7.32

точек сливаются. На рис. 7.32 представлены три последовательные фазы графика при непрерывном его изменении, в результате которого происходит либо возникновение двух новых неподвижных точек, либо, наоборот, две неподвижные точки сливаются и исчезают. Первый случай соответствует непрерывному переходу от *a* к *в* через границу *б*, а второй, на-

оборот, — переходу от *в* через *б* к *a*.

Рассмотрим теперь взаимно однозначное точечное отображение  $T$ , для которого  $f'(x) \leq 0$ . В этом случае график точечного отображения пересекается с биссектрисой в одной и только в одной точке  $x^*$ , которая может быть устойчивой или неустойчивой. Для дальнейшего изучения отображения  $T$  полезно заметить, что отображение  $T^2$  является взаимно однозначным отображением уже рассмотренного типа. Действительно, отображение  $T^2$  записывается в виде

$$\bar{x} = f(f(x)) = F(x)$$

и

$$F'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{f(x)} \left. \frac{df}{dx} \right|_x \geq 0.$$

Неподвижной точке  $x_1^* \neq x$  отображения  $T^2$  соответствует цикл двукратных неподвижных точек  $x_1^*$  и  $x_2^* = f(x_1^*) \neq x_1^*$  отображения  $T$ .

Этих сведений достаточно для того, чтобы прийти к выводу о том, что в рассматриваемом случае вся прямая разбивается на области притяжения двукратных неподвижных точек и, возможно, одну область притяжения однократной неподвижной точки, если неподвижная точка  $x^*$  устойчивая.

Пример точечного отображения, соответствующий рассматриваемому случаю, приведен на рис. 7.33.

На рис. 7.34 и 7.35 изображены фазы двух различных типов бифуркаций взаимно однозначного отображения, для которого  $f'(x) \leq 0$ . На рис. 7.34 изображена бифуркация, при которой происходит рождение или исчезновение двух циклов из двукратных неподвижных точек. Рис. 7.35 изображает бифуркацию смены устойчивости однократной неподвижной точки, при которой одновременно происходит рождение или исчезновение цикла двукратных неподвижных точек.

Перейдем теперь к рассмотрению значительно более сложного однозначного, но не взаимно однозначного точечного отображения  $T$  прямой в прямую. Все сказанное ранее о неподвижных точках отображения остается в силе. Новое состоит в возможности возникновения очень сложных структур. Причину их появления можно понять, рассматривая обратное отображение  $T^{-1}$ . Именно, допустим, что обратное многозначное отображение  $T^{-1}$  расщепляется на ряд непрерывных однозначных отображений  $T_i^{-1}$ , записываемых в виде  $x = g_i(\bar{x})$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), и пусть однозначные отображения с  $i = 1, 2, \dots, p$  преобразуют некоторый отрезок  $[a, b]$  в себя. Рассмотрим произведение отображений

$$T_{i_m}^{-1} T_{i_{m-1}}^{-1} \dots T_{i_2}^{-1} T_{i_1}^{-1}, \quad (7.43)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_m$  — любые числа от 1 до  $p$ . Это отображение определено на отрезке  $[a, b]$  и преобразует его в себя, поэтому оно имеет на этом отрезке по крайней мере одну неподвижную точку  $x_{i_1 i_2 \dots i_m}^*$ . Неподвижная точка произведения отображений является неподвижной точкой  $T^{-m}$ , а следовательно, и  $T^m$ . Неподвижной точке  $T^m$  соответствует либо простая неподвижная точка отображения  $T$ , либо кратная неподвижная точка, кратность которой является делителем  $m$ . Первый случай может иметь место, только когда  $i_1 = i_2 = \dots = i_m$ . Неподвижные точки различных отображений (7.43) обязательно разные. В качестве примера рассмотрим отображение  $T$  с графиком, представленным на рис. 7.36. Точечное отображение, обратное отображению  $T$ , многозначное. Участок  $C_0 C_1$  графика определяет взаимно однозначную зависимость

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f_1(x), & x &\in (-\infty, x_1), \\ x &= g_1(\bar{x}), & x &\in (-\infty, x_1), \end{aligned}$$

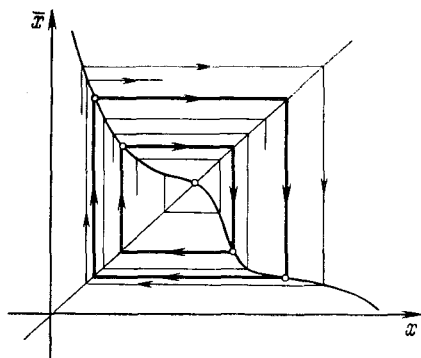


Рис. 7.33

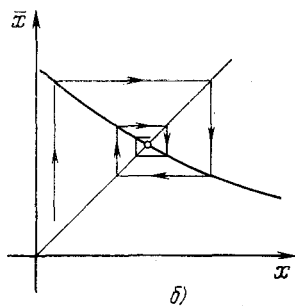
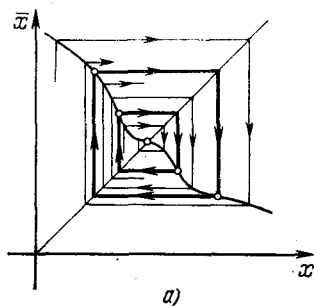


Рис. 7.34

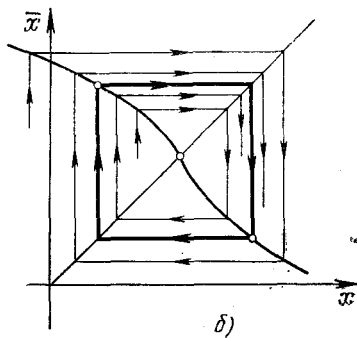
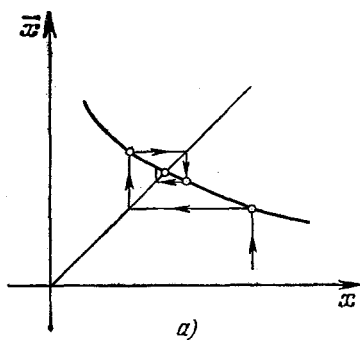


Рис. 7.35

где  $(x_1, \bar{x}_1)$  — координаты точки максимума  $C_1$ . Участки  $C_1C_2$  и  $C_2C_3$  определяют взаимно однозначные зависимости  $\bar{x} = f_2(x)$ ,  $x = g_2(\bar{x})$ ,  $x \in (x_1, x_2)$ ,  $\bar{x} \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  и соответственно  $\bar{x} = f_3(x)$ ,  $x = g_3(\bar{x})$ ,  $x \in (x_2, +\infty)$ ,  $\bar{x} \in (\bar{x}_2, +\infty)$ , где  $(x_2, \bar{x}_2)$  — координаты точки минимума  $C_2$ . В соответствии с этим

$$T^{-1}\bar{x} = \begin{cases} g_1(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \in (-\infty, \bar{x}_1), \\ g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), g_3(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \\ g_3(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \in (\bar{x}_2, +\infty), \end{cases}$$

где каждая из функций  $g_1(\bar{x})$ ,  $g_2(\bar{x})$  и  $g_3(\bar{x})$  в своих областях определения непрерывна.

Обозначим через  $T_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) отображение, определяемое зависимостью  $x = g_i(\bar{x})$ . Пусть, как это имеет место на рис. 7.36,  $\bar{x}_1 > x_2$ , тогда отображения  $T_1^{-1}$  и  $T_2^{-1}$  отрезок  $[0, \bar{x}_1]$  преобразуют в отрезок  $(0, x_1)$  и, соответственно, в отрезок  $(x_1, x_2)$ , которые лежат внутри отрезка  $[0, \bar{x}_1]$ . Согласно сказанному ранее, отсюда следует, что любое из отображений вида  $T_{i_m} T_{i_{m-1}} \dots T_{i_1}$ , где каждое из  $i_s$  равно либо 1, либо 2, имеет неподвижную точку  $x_{i_1, i_2, \dots, i_m}^*$ .

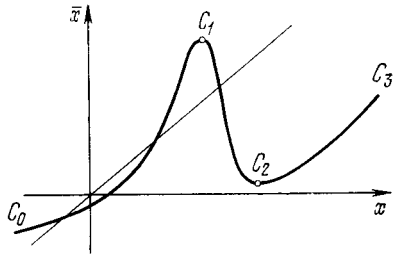


Рис. 7.36

В качестве следующего примера приведем отображение отрезка  $[0, 1]$  на себя с графиком, изображенным на рис. 7.37, а. Обратное ему отображение  $T^{-1}$  двузначно, так что любому  $\bar{x}$  соответствуют два различных значения  $x$ :  $x_1 = g_1(\bar{x})$  и  $x_2 = g_2(\bar{x})$ . Каждое из отображений  $T_1^{-1}$  и  $T_2^{-1}$  преобразует отрезок  $[0, 1]$  в себя. В силу этого, как и в предыдущем примере, отображение  $T$  имеет бесчисленное множество всевозможных кратных неподвижных точек.

Конкретизируем вид этого точечного отображения. Пусть его уравнение записывается в виде

$$\bar{x} = 1 - 4 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (7.44)$$



Тогда обратные отображения легко находятся и имеют вид

$$x = \frac{1}{2} \pm (1 - \bar{x})^{1/2}.$$

Отображение (7.44) преобразует отрезок  $[0, 1]$  на себя, имеет бесконечное число различных кратных неподвижных точек, однако, как можно обнаружить, все эти неподвижные точки неустойчивы. Действительно, согласно (7.44)  $d\bar{x}/dx = -8(x - 1/2)$  и поэтому  $|d\bar{x}/dx| \leq 1$  при  $|x - 1/2| \leq 1/8$  и  $|d\bar{x}/dx| > 1$  при  $|x - 1/2| > 1/8$ . Цикл  $m$ -кратных неподвижных точек  $x^1, x^2, \dots, x^m$  устойчив или неустойчив в зависимости от того, меньше или больше единицы произведение

$$\left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^1} \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^2} \cdots \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^m}.$$

Покажем, что эта величина всегда больше единицы. Если все сомножители этого произведения более единицы, то утверждение очевидно. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда по крайней мере один из сомножителей (можно

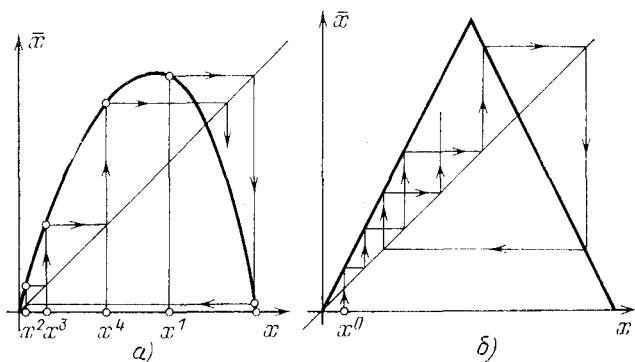


Рис. 7.37

считать, что первый) меньше единицы. Если  $|d\bar{x}/dx| \leq 1$ , то  $|x - 1/2| \leq 1/8$ . Поэтому  $|\xi| = \left| x^1 - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{8}$ . Рассмотрим последовательность (рис. 7.37, а)  $x^1, x^2, x^3, \dots$  и пусть в этой последовательности  $0 < x^2, \dots, x^s < 3/8$ , а  $x^{s+1} \geq 3/8$ . Тогда  $4\xi^2 4^{s-1} > 3/8$  и  $\left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^1} \cdots \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^s} > 8\xi^3 8^{s-2}$ . Используя первое из неравенств, из второго

находим, что

$$\prod_{i=1}^s \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^i} > \left( \frac{3}{2} \right)^{s-3/2} > 1.$$

Таким образом, за каждым множителем, меньшим единицы, следует некоторое число множителей, больших единицы, и при этом их общее произведение больше единицы. Это доказывает неустойчивость всех неподвижных точек. Однако из этого вытекает и более общее утверждение о локальной неустойчивости любой последовательности точек

$$x^1, x^2 = Tx^1, x^3 = Tx^2, \dots$$

Из изложенного следует, что поведение последовательностей точечного отображения (7.44) весьма сложно и разнообразно. Описать его, опираясь на какие-то отдельные траектории, нельзя, поскольку все эти последовательности неустойчивы. Однако для всей совокупности последовательностей возможно статистическое описание. Проиллюстрируем эту возможность для графика точечного отображения, изображенного на рис. 7.37, б. Для того чтобы естественно прийти к статистическому описанию, допустим, что начальная точка не задана точно, а задано некоторое распределение вероятностей ее положения с помощью плотности вероятности  $\varphi(x)$ . Чем точнее задание начального значения  $x$ , тем острее плотность распределения вероятностей. Плотности вероятности  $\varphi(x)$  в виде  $\delta$ -функции соответствует точное задание начального значения.

Распределение плотности вероятности начальной точки  $x^0$  порождает вполне определенное распределение вероятностей следующей точки  $x^1$ . Распределение вероятностей точки  $x^1$  в свою очередь определяет распределение вероятностей точки  $x^2$  и т. д. Плотности вероятностей  $\varphi(x)$  и  $\bar{\varphi}(\bar{x})$  предыдущей  $x$  и последующей  $\bar{x}$  точек, как нетрудно обнаружить, связаны соотношением

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \sum_i \varphi(g_i(x)) |g'_i(x)|, \quad (7.45)$$

где суммирование происходит по всем точкам  $g_i(\bar{x})$ , которые отображением  $T$  преобразуются в точку  $x$ .

В рассматриваемом случае

$$g_1(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{2}, \quad g_2(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{2} + 1,$$

и поэтому это соотношение записывается в виде

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right].$$

Пользуясь этим соотношением, по начальной плотности вероятности можно шаг за шагом найти плотность вероятности после первого преобразования, затем после второго, третьего и т. д. Оказывается, что вне зависимости от начальной функции  $\varphi(x)$  функция плотности вероятности на  $n$ -м шаге  $\varphi_n(x)$  стремится при неограниченном возрастании  $n$  к единице. Таким образом, после достаточно большого числа преобразований все значения  $x$  становятся равновероятными, точнее, вероятность нахождения точки  $x$  в любом интервале зависит только от его длины.

Рассмотрим более детально отображение с диаграммой на рис. 7.37, б. Это отображение отрезок  $[0, 1]$  преобразует в себя. Обратное отображение двузначно и распадается на два непрерывных однозначных отображения  $T_1^{-1}$  и  $T_2^{-1}$ . Отображения, обратные  $T_1^{-1}$  и  $T_2^{-1}$ , представляют собою сужения  $T_1$  и  $T_2$  отображения  $T$  на отрезок  $[0, 1/2]$  и соответственно  $[1/2, 1]$ . Возьмем любую точку  $x^0$  и рассмотрим ее последовательные преобразования, различая случаи, когда применяется преобразование  $T_1$  и когда  $T_2$ . Именно, пусть

$$x^1 = T_{i_0}x^0, \quad x^2 = T_{i_1}x^1, \quad x^3 = T_{i_2}x^2, \quad \dots, \quad (7.46)$$

где

$$i_k = \begin{cases} 1, & \text{если } x^k \in [0, 1/2], \\ 2, & \text{если } x^k \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Тем самым любой точке  $x^0 \in [0, 1]$  поставлена в соответствие бесконечная последовательность из единиц и двоек

$$i_0, i_1, i_2, i_3, \dots \quad (7.47)$$

Так, например, точке  $x^0$ , согласно рис. 7.37, б соответствует последовательность 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, ... Это соответствие однозначно. Оказывается, что оно и взаимно однозначно. Более того, оказывается, что для любой последовательности (7.47) из единиц и двоек можно найти точку  $x^0$ , которой она соответствует. Доказательство этих, на первый взгляд весьма удивительных утверждений, может быть получено сравнительно просто и опирается на довольно общие утверждения, значительно выходящие за

рамки рассматриваемого примера. Эти общие утверждения составляют основу так называемого символического описания точечного отображения и символической динамики [35], о которой применительно к рассматриваемому примеру пойдет речь.

Очень кратко это символическое описание состоит в следующем. Каждая точка  $x^0 \in [0, 1]$  взаимно однозначно описывается символической последовательностью  $i_0, i_1, i_2, \dots$ , составленной из двух символов 1 и 2. Тем самым множество точек отрезка  $[0, 1]$  можно рассматривать как множество всевозможных символических последовательностей (7.47). Пусть точке  $x^0$  отвечает символическая последовательность  $i_0, i_1, i_2, \dots$ , тогда точке  $x^1 = Tx^0$ , как очевидно, отвечает последовательность  $i_1, i_2, i_3, \dots$ . То есть в множестве символических последовательностей точечное отображение  $T$  представляется как весьма простая операция отбрасывания первого символа.

Перейдем к доказательству сделанных утверждений. Надлежит доказать, что любой последовательности (7.47) отвечает некоторая точка  $x^0$  и что такая точка единственная. Если бы такая точка существовала, то ее последовательные преобразования были бы связаны соотношениями (7.46), которые перепишем в виде

$$x^0 = T_{i_0}^{-1}x^1, x^1 = T_{i_1}^{-1}x^2, x^2 = T_{i_2}^{-1}x^3, \dots$$

На самом деле ни одна из точек  $x^i$  нам неизвестна, нам известно лишь, что все они лежат на отрезке  $[0, 1]$ . Но оказывается этого уже достаточно, чтобы их найти. Действительно, из того, что точка  $x^n \in [0, 1]$ , следует, что точка  $x^{n-1}$  принадлежит некоторому отрезку  $[\alpha_1, \beta_1]$ , лежащему внутри него и имеющему в два раза меньшую длину. Аналогично, из того, что  $x^{n-1} \in [\alpha_1, \beta_1]$ , следует, что  $x^{n-2} \in [\alpha_2, \beta_2]$ , длина которого также в два раза меньше длины предшествующего отрезка  $[\alpha_1, \beta_1]$ , и т. д. Таким образом,  $x^0$  принадлежит некоторому отрезку  $[\alpha_n, \beta_n]$  длины  $2^{-n}$ . При этом из того, что точка  $x^0 \in [\alpha_n, \beta_n]$ , следует, что ей отвечает некоторая последовательность,  $n$  первых символов которой совпадают с  $n$  первыми символами последовательности (7.47). Если бы мы начали не с точки  $x^n$ , а с еще более далекой точки  $x^r$  ( $r > n$ ), то аналогично пришли бы к тому, что точка  $x^0 \in [\alpha_r, \beta_r] \subset [\alpha_n, \beta_n]$ , где длина сегмента  $[\alpha_r, \beta_r]$  равна  $2^{-r}$ . Это рассуждение можно продолжить. Таким образом,

требуемая точка  $x^0$  принадлежит вложенным друг в друга сегментам неограниченно уменьшающейся длины. Как известно, существует одна и только одна точка, удовлетворяющая этому требованию. Это и доказывает сделанное утверждение.

Простым примером конкретной системы, исследование движений которой приводится к отображению только что рассмотренного вида, является осциллятор с отрицательным трением и демпфирующими его колебания ударами.

При  $x \neq 0$  или  $x = 0$ , но  $\dot{x} < a$ , движения осциллятора описываются уравнением

$$\ddot{x} - 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

а при  $x = 0$  и  $\dot{x} \geq a > 0$  происходит удар, при котором координата  $x$  не меняется, а скорость  $\dot{x}$  испытывает скачок, так что послеударная скорость  $\dot{x}_+$  и доударная  $\dot{x}_-$  связаны соотношением

$$\dot{x}_+ = \dot{x}_- - p \quad (p > 0).$$

Из этих уравнений следует, что последовательные значения  $y$  и  $\bar{y}$  скорости  $\dot{x}$  после пересечения фазовой точкой  $(x, \dot{x})$  луча  $x = 0$ ,  $\dot{x} > 0$  связаны соотношением

$$\bar{y} = \begin{cases} qy & \text{при } qy < a, \\ qy - p & \text{при } qy \geq a, \end{cases}$$

где  $q = \exp \frac{2\pi\delta}{\Omega}$ ,  $\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2$ .

Эти соотношения между  $y$  и  $\bar{y}$  можно трактовать как точечное отображение прямой в себя. На рис. 7.38 его графики изображены при  $a > \frac{p}{q-1}$  и при  $a < \frac{p}{q-1}$ . В первом случае последовательные преобразования любой точки  $y \neq 0$  неограниченно возрастают. Во втором случае в зависимости от начального значения  $y$  имеет место либо возрастание последовательных преобразований, либо все последовательные преобразования, несмотря на неустойчивость ( $d\bar{y}/dy > 1$ ), ограничены и носят стохастический характер, в общем случае всюду плотно заполняя интервал  $(a-p)q < y < aq - p$ .

**2. Отображение окружности в окружность.** Отображение окружности на окружность может рассматриваться как частный случай отображения прямой в прямую.

Поэтому все сказанное ранее об отображении прямой в прямую применимо и к отображению окружности в окружность. Однако этот частный случай обладает особенностями, заслуживающими дополнительного изучения. Впервые отображение окружности на себя изучал А. Пуанкаре [47] в связи с качественным исследованием фазовых траекторий на двумерном торе. Это исследование было

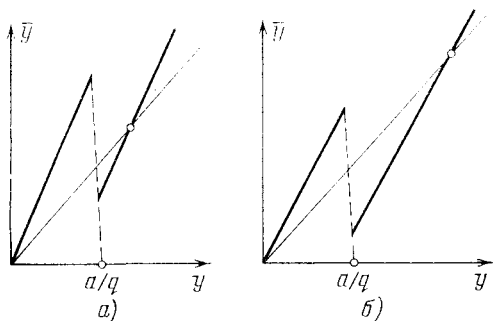


Рис. 7.38

продолжено А. Донжуа и др. В работе [33] А. Г. Майера были найдены условия грубости и выяснен вид грубого отображения окружности на себя, а также установлена непрерывная зависимость числа вращения Пуанкаре от параметра. Подчеркнем, что речь идет о гладком взаимно однозначном отображении окружности на окружность, которое можно записать в виде

$$\bar{\vartheta} = \Theta(\vartheta), \quad (7.48)$$

где  $\Theta(\vartheta)$  — гладкая и в силу взаимной однозначности монотонно возрастающая функция угловой переменной  $\vartheta$ .

Важнейшей характеристикой такого точечного отображения является его число вращения  $\mu$ . В случае, когда преобразование окружности на себя представляет собою вращение на угол  $\alpha$ , число вращения  $\mu$  равно  $\alpha/(2\pi)$ . В общем случае число вращения определяется как предел

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{2\pi n}, \quad (7.49)$$

где  $\alpha_n$  — угол, на который поворачивается точка  $\vartheta$  окружности при ее  $n$  последовательных преобразованиях. Угол  $\alpha_n$  зависит от выбора точки  $\vartheta$ , однако значение пре-

дела от выбора начальной точки  $\vartheta$  не зависит. Он существует при любом  $\vartheta$  и при любом  $\vartheta$  один и тот же. Существование предела вытекает из монотонности преобразования (7.48).

Из существования предела и его независимости от начальной точки  $\vartheta$  вытекает, что при иррациональном  $\mu$  отображение не имеет неподвижных точек, в том числе и кратных. Напротив, при рациональном  $\mu = p/q$ , где

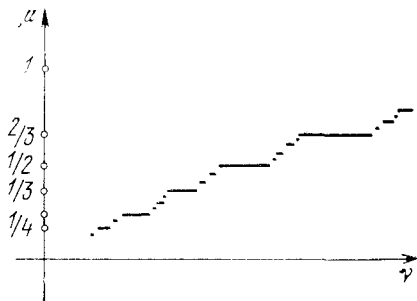


Рис. 7.39

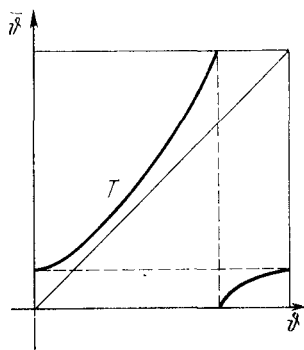


Рис. 7.40

$p$  и  $q$  — взаимно простые целые числа, отображение имеет неподвижные точки кратности  $q$  и только такой кратности.

Дальнейшим важным фактом является непрерывная зависимость числа вращения  $\mu$  от параметров, от которых само отображение зависит непрерывно.

Интересно еще отметить, что в общем случае при  $\mu = p/q$  отображение имеет четное число простых (грубых) циклов по  $q$  неподвижных точек кратности  $q$ . Такая структура точечного отображения сохраняется при малых возмущениях параметров, от которых точечное отображение и его производная зависят непрерывно. Поэтому зависимость числа вращения от таких параметров такова, что каждое рациональное значение  $\mu$  сохраняется неизменным в некоторых областях их изменения. На рис. 7.39 изображен примерный график зависимости числа вращения от параметра, который обозначим буквой  $\nu$ , с соблюдением этого требования.

В заключение рассмотрим диаграммы взаимно однозначных точечных отображений окружности на себя. Пусть число вращения  $\mu \neq 0$ . Тогда точечное отображение не имеет простых неподвижных точек и его график

имеет вид, представленный на рис. 7.40. На следующем рис. 7.41 приведены диаграммы для степеней этого отображения, т. е. для отображений  $T^2$  и  $T^3$  в случае, когда  $\mu \neq 1/2, 1/3, 2/3$  и, следовательно, когда ни одна из этих степеней отображения  $T$  не имеет неподвижных точек.

На рис. 7.42 приведена диаграмма отображения  $T$  в случае, когда  $\mu = 1/3$ . Здесь имеется два цикла, каждый из которых состоит из трех трехкратных неподвижных точек. Один цикл из устойчивых неподвижных точек и другой — неустойчивых.

**3. Критерии существования неподвижной точки многомерного точечного отображения.** Уже на примере точечного отображения прямой в прямую можно было видеть,

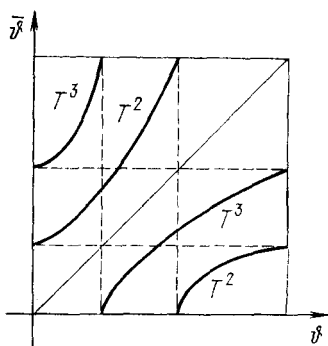


Рис. 7.41

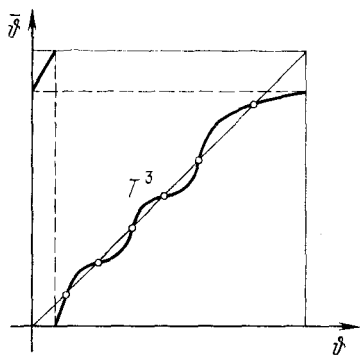


Рис. 7.42

насколько сложным может быть поведение его последовательных преобразований. С увеличением размерности, естественно, трудности исследования и возможная сложность поведения значительно возрастают. Однако все же разница между одномерными отображениями и многомерными не столь разительна, как между двумерными и многомерными дифференциальными уравнениями. Некоторое объяснение этому можно видеть в том, что рассмотрение двумерной системы дифференциальных уравнений при сведении к точечному отображению прямой в прямую всегда приводит к взаимно однозначным отображениям, структура которых очень проста. В то время как исследование многомерных дифференциальных уравнений может свестись к изучению как многомерных точечных отображений, так и не взаимно однозначных одномерных точечных отображений.



Один из важнейших вопросов, которые возникают при исследовании точечного отображения, — это вопрос о его неподвижных точках, их существовании, числе и устойчивости. Один из наиболее общих критериев существования неподвижной точки основывается на широко известной теореме Брауэра. Эта теорема утверждает, что любое непрерывное отображение  $T$ , преобразующее многомерный шар или любую гомеоморфную шару область  $G$  в себя, имеет в  $G$  по крайней мере одну неподвижную точку  $x^*$ . Под гомеоморфностью области  $G$  шару имеется в виду, что она является некоторым взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением шара

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1.$$

Требования непрерывности отображения  $T$  и гомеоморфности области  $G$  шару существенны, т. е. нарушение любого из них может привести к отсутствию неподвижной точки.

Поясним сказанное на примере отображения  $T$  отрезка  $[a, b]$  в себя. Так как отображение  $T$  преобразует отрезок  $[a, b]$  в себя, то точки  $Ta$  и  $Tb$  необходимо принадлежат этому отрезку. Если  $Ta = a$  или  $Tb = b$ , то точка  $a$

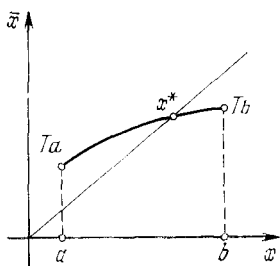


Рис. 7.43

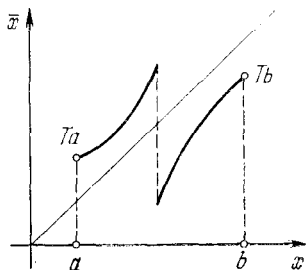


Рис. 7.44

или  $b$  являются неподвижными. Если же  $Ta > a$  и  $Tb < b$ , то диаграмма точечного отображения имеет вид, показанный на рис. 7.43. Из нее, в силу непрерывности графика отображения  $T$ , следует, что он обязательно пересекается с биссектрисой. Заметим, что в случае разрывного точечного отображения такой точки пересечения и отвечающей ей неподвижной точки могло бы и не быть (рис. 7.44).

На рис. 7.45 изображена двумерная область  $G$ , гомеоморфная двумерному шару, которая преобразуется непрерывным отображением  $T$  в область  $\bar{G}$ . При этом, согласно теореме, хотя бы одна точка  $x^*$  этой области  $\bar{G}$  преобразуется в себя. Напротив, при непрерывном преобразовании кольцеобразной области  $G$ , изображенной на рис. 7.46,

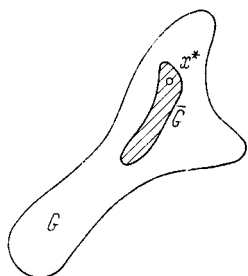


Рис. 7.45

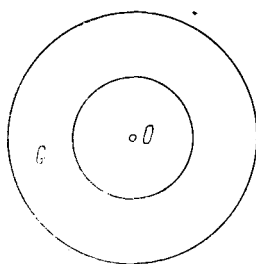


Рис. 7.46

неподвижной точки может и не быть. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно представить себе, что отображение  $T$  состоит в повороте вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$  ( $0 < \varphi < 2\pi$ ).

Отображение кольца в кольцо представляет значительный интерес и довольно часто встречается при исследовании конкретных динамических систем. Изучение ограниченной проблемы трех тел привело А. Пуанкаре к рассмотрению сохраняющего площадь отображения кольца на себя. Он обнаружил, что если при отображении внешний и внутренний контуры вращаются в разных направлениях, то имеется неподвижная точка. Это утверждение получило наименование последней геометрической теоремы А. Пуанкаре [43]. Ее доказательство было позднее найдено Дж. Биркгофом [19].

Может показаться, что если кольцо  $G$  преобразуется строго внутрь себя, так что область  $G$  переходит в  $\bar{G}$ , то внутри кольца существует замкнутый контур  $\gamma$ , преобразующийся в себя (рис. 7.47). В действительности это не всегда так. Однако можно указать довольно общие условия, при которых это имеет место \*). При выполнении этих условий все точки кольца в результате повторения преобразования асимптотически приближаются к кривой

\*) Эти условия можно получить из общих теорем существования устойчивого инвариантного многообразия [41].

$\gamma$ . Кривая  $\gamma$  преобразуется сама в себя, так что на ней возникает некоторое преобразование окружности в окружность. При невыполнении этого условия отображение кольца в кольцо может иметь весьма сложный вид. Соответствующие примеры будут даны в дальнейшем. Отметим только, что такая сложная структура возникает, например, в случае, когда область  $G$  после некоторого числа преобразований переходит в область  $\bar{G}$  и при этом некоторая часть кольца  $\sigma$  преобразуется в область  $\bar{\sigma}$ , как это изображено на рис. 7.48.

Вернемся к теореме Брауэра. При выполнении ее условий в области  $G$  имеется неподвижная точка. Так как отображение  $T$  преобразует область  $G$  в себя, то можно

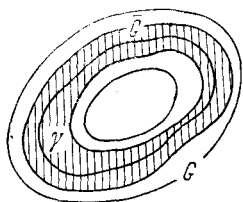


Рис. 7.47

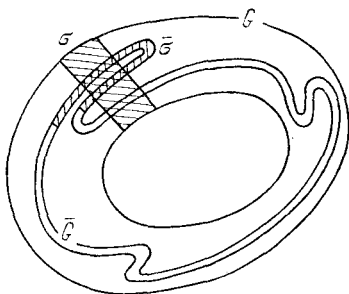


Рис. 7.48

было бы думать, что точечное отображение  $T$  имеет в  $G$  не только неподвижную точку, но и устойчивую неподвижную точку. Однако это не так. В случае отображения отрезка в отрезок это может быть не так лишь при взаимной однозначности отображения. При взаимной однозначности отображение  $T$  отрезка в себя всегда имеет устойчивую неподвижную точку.

Для отображения круга в круг пример, опровергающий это утверждение о существовании устойчивой неподвижной точки, достаточно сложен.

Таким образом, теорема Брауэра, формулируя достаточные условия существования неподвижной точки, ничего не говорит ни об их числе, ни об устойчивости.

Следующий очень важный и общий критерий существования неподвижной точки широко известен как принцип сжимающих отображений С. Банаха. Этот критерий позволяет установить не только существование неподвижной точки, но и ее единственность. По существу он

дает достаточные условия существования единственной глобально устойчивой неподвижной точки.

Точечное отображение называется сжимающим, если оно при преобразовании уменьшает расстояние между любой парой точек, т. е. если для любой пары точек  $M$  и  $N$  и их образов  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  выполняется неравенство

$$\rho(\bar{M}, \bar{N}) < \rho(M, N). \quad (7.50)$$

Основное утверждение принципа сжимающих отображений применительно к конечной области  $G$  многомерного евклидова пространства состоит в том, что если сжимающее отображение  $T$  преобразует эту область  $G$  в себя, то в ней имеется единственная неподвижная точка  $x^*$  и вся область  $G$  при неограниченном повторении отображения  $T$  стягивается к ней. Из этого утверждения следует, что последовательные преобразования любой точки  $x \in G$

$$x, Tx, T^2x, \dots$$

сходятся в неподвижной точке  $x^*$ . В случае, если условие сжимаемости может быть усилено, так что для любой пары точек  $x$  и  $y$  области  $G$

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) < q\rho(x, y)$$

с некоторым  $q < 1$ , то сходимость последовательности точек к неподвижной точке  $x^*$  не медленнее, чем геометрической прогрессии с знаменателем  $q$ .

**4. Метод вспомогательных отображений.** Описанные выше критерии существования неподвижной точки и особенно критерий, основанный на принципе сжимающих отображений, в тех случаях, когда его удастся применить, дает значительные, а иногда и исчерпывающие сведения о поведении изучаемой системы. В качестве примера можно привести произвольную механическую систему с взаимными и собственными комбинированными трениями без падающих участков характеристик трения. К такой системе возможно применение принципа сжимающих отображений, позволяющее установить глобальную устойчивость многообразия состояний равновесия или периодических движений при воздействии на такую систему внешней периодической силы. Применение принципа сжимающих отображений позволяет установить существование и единственность вынужденных колебаний в системе с так называемым конструкционным демпфи-

рованием. Соответствующие примеры могут быть продолжены, но все же они не очень многочисленны, поскольку далеко не всегда имеется сжимаемость. В настоящем разделе излагается метод вспомогательных отображений, позволяющий расширить применение критерия о существовании и единственности неподвижной точки на несжимающие отображения. Ради геометрической наглядности это изложение, как и относящиеся к нему примеры, будет ограничено двумерными точечными отображениями.

Пусть в некоторой области  $G$  плоскости  $(u, v)$  определено однозначное точечное отображение  $T$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = T(u, v). \quad (7.51)$$

Вспомогательным к отображению  $T$  называется отображение  $\tilde{T}$ , преобразующее точку  $(u, \bar{v})$  в точку  $(\bar{u}, v)$ , если отображение  $T$  точку  $(u, v)$  преобразует в точку  $(\bar{u}, \bar{v})$ .

Областью определения  $\tilde{G}$  вспомогательного отображения  $\tilde{T}$  является множество, пробегаемое точкой  $(u, \bar{v})$ , когда точка  $(u, v)$  пробегает область

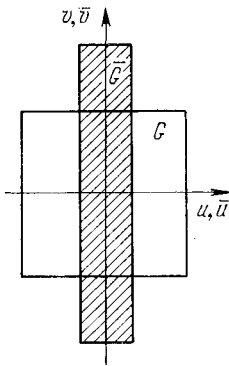


Рис. 7.49

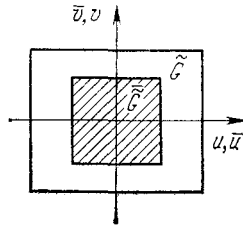


Рис. 7.50

$G$ . При этом под  $\bar{v}$  понимается вторая компонента точки  $(\bar{u}, \bar{v})$ , в которую отображение  $T$  преобразует точку  $(u, v)$ .

Вспомогательное отображение в своей области определения  $\tilde{G}$  может быть однозначным или многозначным. Причем многозначность вспомогательного отображения возможна и при взаимной однозначности отображения  $T$ . Приведем несколько простых примеров.

Отображение  $T$  определено в квадрате  $G$  ( $|u| \leq 1$ ,  $|v| \leq 1$ ) и имеет вид

$$\bar{u} = \lambda u, \quad \bar{v} = \nu^{-1} v \quad (0 < \lambda < 1, \quad 0 < \nu < 1). \quad (7.52)$$

Вспомогательное отображение  $\bar{T}$  запишется в виде

$$\bar{u} = \lambda u, \quad v = v\bar{v}. \quad (7.53)$$

Его областью определения  $\bar{G}$  будет прямоугольник  $|u| \leq 1$ ,  $|\bar{v}| \leq v^{-1}$ . Вспомогательное отображение однозначно. Исходное отображение — седловое несжимающее, преобразующее квадрат  $G$  в прямоугольник, вытянутый по  $v$  и сжатый по  $u$  (рис. 7.49). Вспомогательное отображение — сжимающее, преобразующее прямоугольник  $G$  в лежащий в  $\bar{G}$  меньший прямоугольник  $\bar{G}$  ( $|\bar{u}| \leq \lambda$ ,  $|v| \leq v$ ) (рис. 7.50).

В качестве второго примера возьмем взаимно однозначное отображение  $T$  вида

$$\bar{u} = \lambda v, \quad \bar{v} = -a + cu + bv^2, \quad (7.54)$$

где все коэффициенты  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$  положительные. Вспомогательным к нему будет двузначное отображение  $\bar{T}$  вида

$$\bar{u} = \lambda \left( \frac{\bar{v} + a - cu}{b} \right)^{1/2}, \quad v = \left( \frac{\bar{v} + a - cu}{b} \right)^{1/2}. \quad (7.55)$$

Оно получается разрешением уравнений (7.54) относительно  $\bar{u}$  и  $v$ . Области определения отображения  $T$  в виде квадрата  $G$  ( $|u| \leq 1$ ,  $|v| \leq 1$ ) соответствует область определения  $\bar{G}$  вспомогательного отображения  $\bar{T}$  вида, изображенного на рис. 7.51. Прямоугольник  $|u| \leq 1$ ,  $|\bar{v}| \leq \lambda$  двузначное вспомогательное отображение  $\bar{T}$  преобразует в два отрезка  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$ , изображенные на рис. 7.52, что соответствует вырожденности отображения (7.55). Отметим, что исходное отображение квадрат  $G$  ( $|u| \leq 1$ ,  $|v| \leq 1$ ) преобразует в подковообразную область  $\bar{G}$  (рис. 7.53). При этом отрезок координатной линии  $fg$  ( $u = \text{const}$ ) преобразуется в дугу  $\bar{f}\bar{g}$  параболы.

Если точечное отображение  $T$  задано следующим образом:

$$\bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = g(u, v), \quad (7.56)$$

то для получения вспомогательного отображения  $\bar{T}$  в явном виде надлежит второе из уравнений (7.56) разрешить относительно  $v$  и записать его в виде  $v = \bar{g}(u, \bar{v})$ , после чего соотношения (7.56) примут форму

$$\bar{u} = f(u, \bar{g}(u, \bar{v})), \quad v = \bar{g}(u, \bar{v}),$$

соответствующую искомой явной записи вспомогательного отображения  $\tilde{T}$ .

Разрешение второго из уравнений (7.56) относительно  $v$  можно геометрически представить себе как отыскание точек пересечения кривой  $F_u$ , заданной параметрическим уравнением  $\bar{v} = g(u, v)$ , в котором  $v$  — меняющаяся

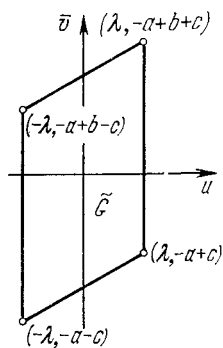


Рис. 7.51

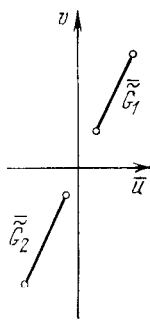


Рис. 7.52

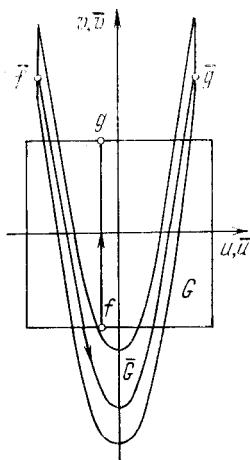


Рис. 7.53

переменная, а  $u$  — фиксированный параметр, с прямой  $L_{\bar{v}}$  ( $\bar{v} = \text{const}$ ). Значения параметра  $v$  в точках пересечения кривой  $F_u$  с прямой  $L_{\bar{v}}$  определяют требуемое значение  $v$  как функцию  $u$  и  $\bar{v}$ .

Множество значений  $u$  и  $\bar{v}$ , при которых кривая  $F_u$  и прямая  $L_{\bar{v}}$  пересекаются, определяет область определения вспомогательного отображения  $\tilde{T}$ .

Если кривая  $F_u$  и прямая  $L_{\bar{v}}$  пересекаются при всех значениях  $u$  и  $\bar{v}$  не более чем в одной точке, то вспомогательное отображение  $\tilde{T}$  однозначное. Напротив, возможность нескольких пересечений говорит о многозначности вспомогательного отображения. При наличии нескольких точек пересечения кривой  $F_u$  и прямой  $L_{\bar{v}}$  они разделяются точками максимума и минимума кривой  $F_u$ . Преобразование  $T$  прямую  $u = \text{const}$  отображает в кривую  $F_u$ . Точкам максимума и минимума кривой  $F_u$  на этой прямой  $u = \text{const}$  соответствуют точки  $(u, v)$ , в которых

$$g'_v(u, v) = 0. \quad (7.57)$$

Пусть кривые, определяемые этим уравнением, разбивают область определения  $G$  отображения  $T$  на части  $G_1, G_2, \dots, G_m$ . Обозначим через  $T_s$  сужение отображения  $T$  на область  $G_s$ , в соответствии с чем запишем отображение  $T$  в виде

$$T(u, v) = T_s(u, v), \text{ если } (u, v) \in G_s. \quad (7.58)$$

Каждое из отображений  $T_s$ , согласно предыдущему, имеет однозначное вспомогательное отображение  $\bar{T}_s$ . Это означает, что многозначное вспомогательное отображение  $\bar{T}$  распадается на несколько однозначных вспомогательных отображений  $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m$ .

Поясним сказанное на примере отображения  $T$ , преобразующего прямоугольник  $G$  в область  $\bar{G}$ , как это показано на рис. 7.54. Соответствующие друг другу точки границ областей  $G$  и  $\bar{G}$  обозначим буквами  $a, b, c, \dots$  и  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$  соответственно. При этом координатные линии  $u = \text{const}$  преобразуются в изображенные на этом рисунке кривые  $F_u$ . Минимумы кривых  $F_u$  лежат на линии  $\bar{k}\bar{l}$ , являющейся образом кривой  $kl$ , разбивающей область  $G$  на две части  $G_1$  ( $ablk$ ) и  $G_2$  ( $clkd$ ). В соответствии с этим вспомогательное отображение  $\bar{T}$  двузначно и распадается на два однозначных отображения  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$ . При этом  $\bar{T}_1$  ( $\bar{T}_2$ ) — однозначное вспомогательное отображение для сужения  $T_1$  ( $T_2$ ) отображения  $T$ , преобразующего область  $G_1$  ( $G_2$ ) в область  $\bar{G}_1$  ( $\bar{G}_2$  ( $\bar{a}\bar{b}\bar{l}\bar{k}$ ) ( $\bar{G}_2$  ( $\bar{c}\bar{l}\bar{k}\bar{d}$ )). Прямоугольник  $G$  заведомо лежит внутри областей определения вспомогательных отображений  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$ . Вспомогательные отображения  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  преобразуют область  $G$  в лежащие в ней области  $G'_1$  и  $G'_2$  (рис. 7.55). Действительно, часть координатной линии  $u = \text{const}$ , лежащая в области  $G_i$ , преобразуется в часть кривой  $F_u$ , лежащую в  $\bar{G}_i$ . Для вспомогательного отображения  $\bar{T}_i$  это соответствует преобразованию линии  $u = \text{const}$  ( $\bar{v}$  меняется) в кривую, пробегаемую точкой  $(\bar{u}, v)$ , которая все время расположена внутри области  $G_i$ .

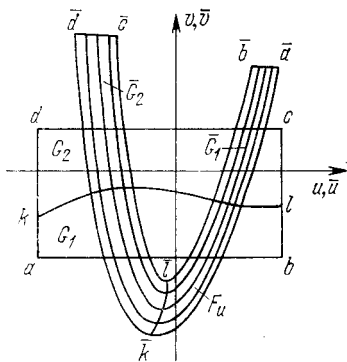


Рис. 7.54



Заметим, что изменения отображения  $T$ , приводящие к изменениям области  $\bar{G}$  и кривых  $F_u$  вне области  $G$ , не окажут влияния на вид вспомогательных отображений  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  в области  $G$ . Поэтому, в частности, эти вспомогательные отображения будут такими же и для отображений, преобразующих область  $G$  в область  $\bar{G}$ , изображенных на рис. 7.56. При изменениях вида области  $\bar{G}$ , в которую отображение  $T$  преобразует область  $G$ , изображенных

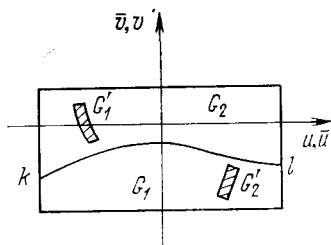


Рис. 7.55

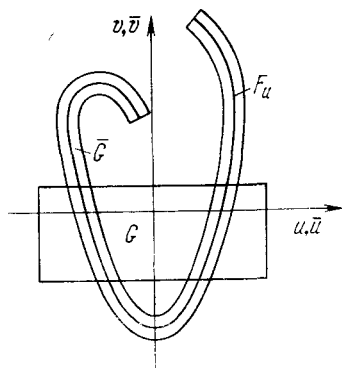


Рис. 7.56

на рис. 7.57, а, б, вспомогательное отображение  $\bar{T}$  в области  $G$  будет уже более чем двузначным. Однако по-прежнему среди однозначных отображений, на которые оно распадается, будут отображения  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$ , которые преобразуют область  $G$  в расположенные в ней области  $G_1'$  и  $G_2'$  и которые зависят только от той части отображения  $T$ , которая преобразует область  $G$  в нее же.

В приводимых выше примерах отображений  $T$  и вспомогательных к ним отображений  $\bar{T}$  отображение  $T$  не имеет областей, которые бы оно преобразовывало в себя, в то время как для вспомогательного отображения  $\bar{T}$  такие области имеются. Поэтому вспомогательное отображение допускает применение к нему описанных выше общих признаков существования неподвижной точки. Полезность этого применения в том, что неподвижные точки отображений  $T$  и  $\bar{T}$  одни и те же. Действительно, из того, что  $T(u^*, v^*) = (u^*, v^*)$ , следует, что  $\bar{T}(u^*, v^*) = (u^*, v^*)$  и обратно.

Применение принципа сжимающих отображений, помимо требования преобразования некоторой области  $G$  в себя, содержит еще и требование сжимаемости. Поэтому

рассмотрим вопрос о сжимаемости вспомогательного отображения  $\tilde{T}$ . В качестве расстояния между двумя точками  $M(u_1, v_1)$  и  $N(u_2, v_2)$  можно принять

$$\rho(M, N) = |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| = |\delta u| + |\delta v|, \quad (7.59)$$

и тогда условие сжимаемости вспомогательного отображения  $\tilde{T}$ , преобразующего точку  $(u, \bar{v})$  в точку  $(\bar{u}, v)$ , запишется при некотором  $q < 1$  в виде

$$|\delta \bar{u}| + |\delta v| < q (|\delta u| + |\delta \bar{v}|). \quad (7.60)$$

Это условие сжимаемости соответствует тому, что отображение  $T$  — сжимающее вдоль оси  $u$  и, напротив, растя-

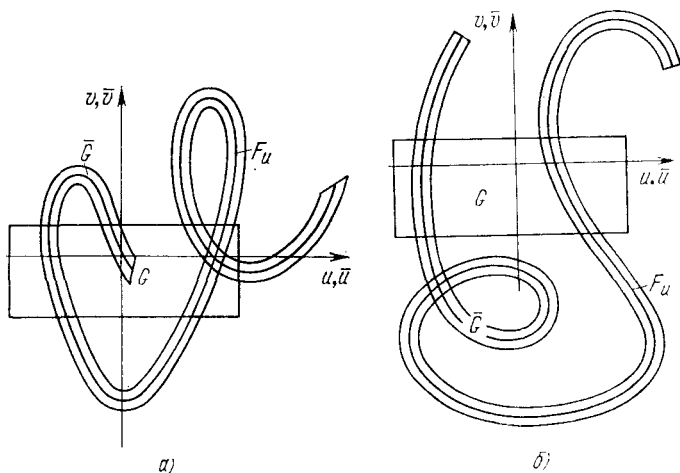


Рис. 7.57

гивающее вдоль оси  $v$ . При этом вектор  $(\delta u, \delta v)$  преобразуется в вектор  $(\delta \bar{u}, \delta \bar{v})$ , как показано на рис. 7.58.

Точечное отображение, сжимающее по одним направлениям и растягивающее по другим, называется седловым. Простейшим примером седлового точечного отображения  $T$  может служить отображение вида

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (\lambda + f(u, v)) u + \bar{u}_0, \\ \bar{v} &= (v^{-1} + g(u, v)) v + \bar{v}_0, \end{aligned} \quad (7.61)$$

где  $|\lambda| < 1$ ,  $|v| < 1$ , а  $f(u, v)$  и  $g(u, v)$  — гладкие функции, обращающиеся в нуль при  $u = v = 0$ . Варьируя

соотношения (7.61), найдем, что

$$\begin{aligned}\delta\bar{u} &= \lambda\delta u + u\left(\frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\delta v\right) + f\delta u, \\ \delta\bar{v} &= v^{-1}\delta v + v\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \bar{g}}{\partial v}\delta v\right) + g\delta v,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}|\delta\bar{u}| &< (|\lambda| + |u|\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| + |f|)|\delta u| + |u|\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right||\delta v|, \\ |\delta\bar{v}| &< |v|\left(1 + \frac{1}{|v|}|v|\left|\frac{\partial \bar{g}}{\partial v}\right| + \frac{1}{|v|}|g|\right)^{-1} \times \\ &\quad \times (|\delta\bar{v}| + |v|\left|\frac{\partial \bar{g}}{\partial u}\right||\delta u|),\end{aligned}$$

и поэтому

$$|\delta\bar{u}| + |\delta\bar{v}| < q(|\delta u| + |\delta\bar{v}|),$$

где

$$\begin{aligned}q &= \max_{u,v} \left\{ \max_{u,v} \left[ |\lambda| + |u|\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |f| + |v|\left(1 + \frac{|v|}{|v|} + \frac{1}{|v|}|g|^{-1}\right)|v|\left|\frac{\partial \bar{g}}{\partial u}\right| \right], \right. \\ &\quad \left. \max_{u,v} \left[ |u|\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| + |v|\left(1 + \frac{|v|}{|v|}\left|\frac{\partial \bar{g}}{\partial v}\right| + \frac{1}{|v|}|g|\right)^{-1} \right] \right\}.\end{aligned}\tag{7.62}$$

Из приведенной оценки для  $q$  видно, что вблизи точки  $u = v = 0$   $q < 1$  (при  $u = v = 0$   $q = \max(|\lambda|, |v|) < 1$ ).

Поэтому отображение  $\bar{T}$ , вспомогательное к седловому отображению  $T$ , в окрестности точки  $u = \bar{v} = 0$  сжимающее. На рис. 7.59 даны наглядные изображения седлового отображения  $T$  и соответствующего ему сжимающего вспомогательного отображения  $\bar{T}$ .

Теперь мы можем сформулировать утверждение, которое оказывается полезным при исследовании точечных отображений,

возникающих во многих конкретных случаях.

**Теорема 7.3.** Пусть точечное отображение  $T$  имеет многозначное вспомогательное отображение  $\bar{T}$ , и пусть  $T_{11}, T_{21}, \dots, T_{m1}$  — некоторые из составляющих его од-

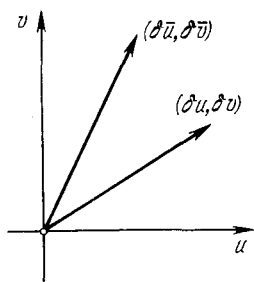


Рис. 7.58

нозначных отображений, которые определены в области  $G$ , преобразуют ее в себя и являются в ней сжимающими, тогда любому набору целых положительных чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , не больших  $m$ , соответствует своя единственная  $n$ -кратная седловая неподвижная точка отображения  $T$ .

Подчеркнем, что разным наборам целых чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$  отвечают различные неподвижные точки. Цикл  $n$ -кратных неподвижных точек отображения  $T$  составляют

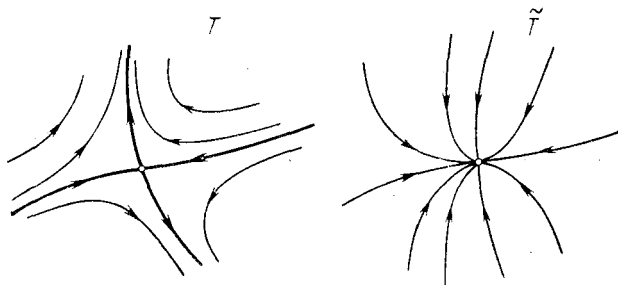


Рис. 7.59

точки, отвечающие  $n$  циклическим перестановкам чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$ .

Из этой теоремы следует, что удовлетворяющее ее условиям точечное отображение  $T$  обладает весьма сложной структурой и что появление этой сложной структуры связано с многозначностью вспомогательного отображения  $\tilde{T}$  и его свойством преобразования некоторой области  $G$  в себя. Свойство сжимаемости, как оказывается, не является столь существенным. Оно лишь обеспечивает взаимную однозначность соответствия неподвижных точек и числовых последовательностей  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , а также их седловой характер.

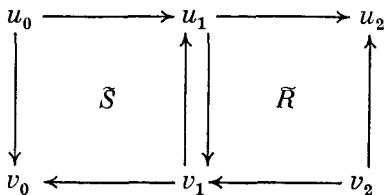
Доказательство теоремы по существу полностью подготовлено предшествующим изложением. Осталось только показать, что отображение

$$T_{i_n} T_{i_{n-1}} \dots T_{i_2} T_{i_1} \quad (7.63)$$

допускает определенное в  $G$  сжимающее вспомогательное отображение, преобразующее  $G$  в себя. Доказательство этого утверждения можно провести методом индукции, для чего достаточно убедиться, что если отображения  $R$  и  $S$  имеют определенные в  $G$  сжимающие и преобразую-

щие  $G$  в себя вспомогательные отображения  $\tilde{R}$  и  $\tilde{S}$ , то таким же свойством обладает и отображение  $RS$ .

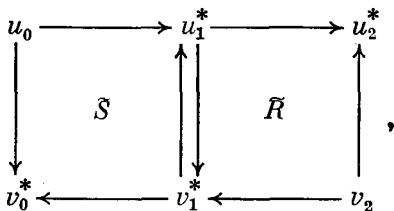
Докажем сначала, что отображение  $\tilde{R}\tilde{S}$  определено в области  $G$  и преобразует ее в себя. Для этого рассмотрим схему



и начнем пересчитывать входящие в нее переменные в соответствии со стрелками по формулам

$$(\bar{u}_1, \bar{v}_0) = \tilde{S}(u_0, v_1), \quad (\bar{u}_2, \bar{v}_1) = \tilde{R}(u_1, v_2).$$

Для возможности такого пересчета нужно, чтобы точки  $(u_0, v_1)$  и  $(u_1, v_2)$  принадлежали области  $G$ . Нетрудно видеть, что после пересчета новая схема также будет удовлетворять этому требованию. Каждое из применяемых при этом преобразований  $\tilde{S}$  и  $\tilde{R}$  — сжимающее, поэтому очевидно, что при неограниченном применении описанной процедуры пересчета рассматриваемая схема будет сходиться к некоторой предельной схеме



элементы которой удовлетворяют соотношению

$$(u_2^*, v_0^*) = \tilde{R}\tilde{S}(u_0, v_2),$$

и точка  $(u_2^*, v_0^*) \in G$ .

Тем самым существование в  $G$  вспомогательного отображения  $\tilde{R}\tilde{S}$  доказано, доказано и то, что область  $G$  преобразуется в себя. Осталось установить сжимаемость отображения  $\tilde{R}\tilde{S}$ . В силу сжимаемости каждого из вспо-

могательных отображений  $\tilde{S}$  и  $\tilde{R}$ , имеем неравенства

$$|\delta u_1^*| + |\delta v_0^*| < q (|\delta u_0| + |\delta v_1^*|),$$

$$|\delta u_2^*| + |\delta v_1^*| < q (|\delta u_1^*| + |\delta v_2|),$$

из которых непосредственно следует условие сжимаемости

$$|\delta u_2^*| + |\delta v_0^*| < q (|\delta u_0| + |\delta v_2|)$$

для вспомогательного отображения  $\widetilde{RS}$ , что и требовалось.

В качестве примера, к которому может быть применена сформулированная и доказанная теорема, можно взять отображение рис. 7.54. Отображение, соответствующее этому рис. 7.54, получило название подковы Смейла [27]. Смейл [52] обратил внимание на наличие у такого отображения бесконечного множества различных седловых неподвижных точек, а также на то, что эти неподвижные точки сохраняются при произвольных малых

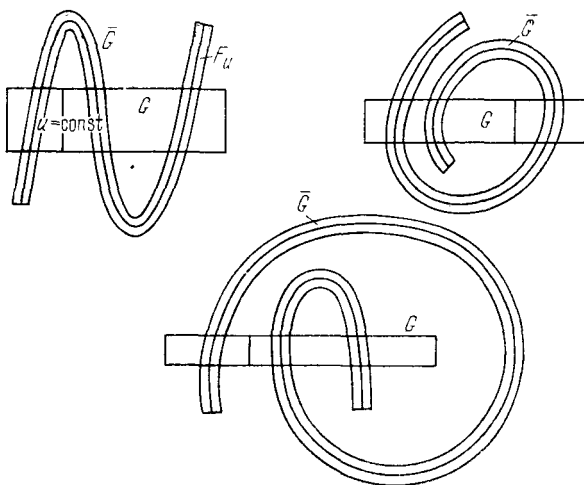


Рис. 7.60

вместе с производными возмущениях точечного отображения. Этот факт в свете существовавших в то время представлений о грубых динамических системах был неожиданным и послужил толчком к ряду работ других математиков [27].

Подкова Смейла является простейшим примером такого рода, аналогичные ей примеры точечных отображений представлены на рис. 7.60 и могут быть легко

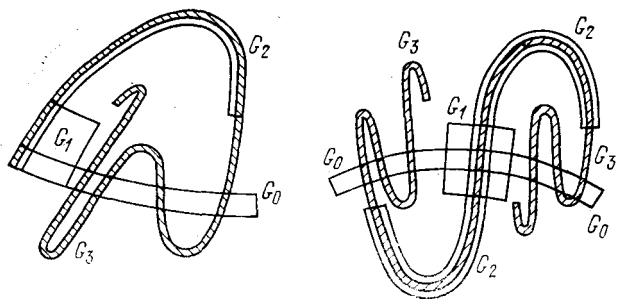


Рис. 7.61

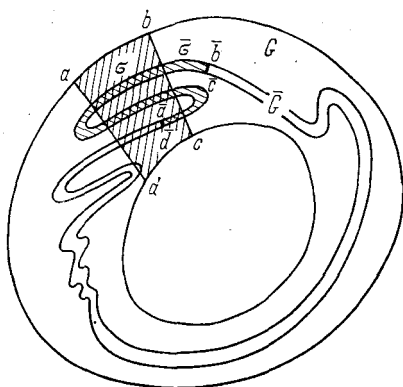


Рис. 7.62

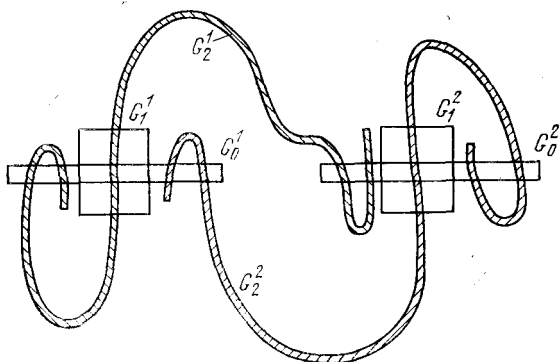


Рис. 7.63

продолжены. На рис. 7.61 — 7.63 изображены преобразования, также допускающие применение теоремы 7.3 и естественно порождаемые фазовыми траекториями дифференциальных уравнений третьего порядка. На рис. 7.61 области  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  представляют последовательные преобразования области  $G_0$ . Такого рода отображение возникает при пересечении сепаратрис седловой неподвижной точки и будет рассмотрено в следующем параграфе. На рис. 7.62 изображено отображение кольца в кольцо. При этом области  $G$  и  $\sigma$  преобразуются соответственно в  $\bar{G}$  и  $\bar{\sigma}$ . Наличие изображенного на рис. 7.62 пересечения областей  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$  говорит о многозначности вспомогательного отображения, наличии бесконечного числа различных седловых кратных неподвижных точек и о сложной структуре точечного отображения. Рис. 7.63 изображает последовательные преобразования  $G_1^1$ ,  $G_2^1$  и  $G_1^2$ ,  $G_2^2$  областей  $G_1^0$  и  $G_2^0$ . Такого вида отображение порождается так называемой гомоклинической структурой, которая будет рассмотрена в следующем параграфе.

В заключение заметим, что хотя изложение ради наглядности относилось к двумерным отображениям, все сказанное легко переносится на многомерные отображения, а формулировка и доказательство основной теоремы остаются прежними [41].

#### § 4. Гомоклинические структуры

Вернемся к рассмотрению многомерных динамических систем, описываемых гладкими дифференциальными уравнениями. Ранее были рассмотрены малые окрестности состояний равновесия и периодических движений. Естественным дальнейшим шагом является рассмотрение малых окрестностей нескольких фазовых траекторий, составляющих нечто целое. Одним из таких комплексов, рассмотрение которого приводит к нетривиальным результатам, является гомоклиническая структура [40].

Под гомоклинической структурой понимается некоторое множество седловых периодических движений  $\Gamma_i^{p,q}$  одного и того же типа и двоякоасимптотических к ним движений  $\gamma_{ij}^k$ . Фазовая траектория  $\gamma_{ij}^k$  двоякоасимптотическая в том смысле, что при  $t \rightarrow -\infty$  она асимптотически приближается к периодическому движению  $\Gamma_i^{p,q}$ , а при  $t \rightarrow +\infty$  — к  $\Gamma_j^{p,q}$ . Гомоклиническая структура опре-



деляется множеством  $\mathfrak{M}$  входящих в нее троек  $(i, j, k)$ . Принадлежность тройки целых чисел  $(i, j, k)$  множеству  $\mathfrak{M}$  означает, что в гомоклиническую структуру входят периодические движения  $\Gamma_i^{p,q}$  и  $\Gamma_j^k$ , а также двоякоасимптотическое к ним движение  $\gamma_{ij}^k$ .

Множество троек  $\mathfrak{M}$  может быть представлено графом с направленными ребрами. Для этого каждому седловому движению  $\Gamma_i^{p,q}$  сопоставим вершину  $M_i$  графа, а каждому двоякоасимптотическому движению  $\gamma_{ij}^k$  — направленное ребро  $m_{ij}^k$ , соединяющее вершину  $M_i$  с вершиной  $M_j$ . На рис. 7.64 изображен граф, отвечающий множеству  $\mathfrak{M}$ ,

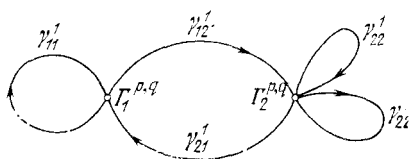


Рис. 7.64

состоящему из троек  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$  и  $(2, 2, 2)$ . На этом рисунке ради простоты вершины и направленные ребра обозначены так же, как и соответствующие им фазовые траектории.

Непосредственно ясно, что граф гомоклинической структуры можно предполагать связным и что наибольший интерес представляют гомоклинические структуры, графы которых содержат замкнутые контуры.

Гомоклинические структуры возможны в динамических системах, описываемых дифференциальными уравнениями, с размерностью, не меньшей трех. Двумерные системы гомоклинических структур иметь не могут. Однако двумерные точечные отображения такие структуры допускают. Для динамической системы, описываемой точечным отображением, под гомоклинической структурой естественно понимать некоторое множество седловых неподвижных точек и двоякоасимптотических к ним фазовых траекторий (последовательностей преобразующихся друг в друга точек). Простейшая гомоклиническая структура для точечного отображения возникает при пересечении сепаратрисных инвариантных многообразий — седловой неподвижной точки двумерного точечного отображения. Возникающая при этом сложная картинка взаимопересечений сепаратрисных кривых уже описывалась.

Рассмотрим, как преобразуется в случае пересечения сепаратрисных кривых  $S^+$  и  $S_1^-$  седловой неподвижной

точки  $O^{1,1}$  изображенная на рис. 7.65 область  $G_0$ . В окрестности седловой точки происходит сжатие по оси  $u$ , касательной к сепаратрисной инвариантной кривой  $S_1^+$ , и растяжение вдоль оси  $v$ , касательной к кривой  $S_1^-$ . Поэтому область  $G_0$  перейдет в область  $G_1$ . Затем она преобразуется в область  $G_2$ , область  $G_2$  — в  $G_3$  и т. д. При этом приходим к первой картинке рис. 7.61. Согласно этой картинке, область  $G_0$

испытывает сжатие вдоль оси  $u$ , растяжение вдоль оси  $v$  и преобразуется в область  $G_3$ , многократно пересекающую область  $G_0$ . Пусть отображение, преобразующее  $G_0$  в  $G_3$ , есть  $T^m$  и область  $G_3$  пересекает область  $G_0$   $n$  раз. Тогда вспомогательное отображение  $T^m$  распадается на  $n$  однозначных отображений  $T_1^m, \dots, T_n^m$ , каждое из которых преобразует область  $G_0$  в себя. Отсюда следует, согласно теореме 7.3, что отображение  $T$  имеет бесчисленное множество различных

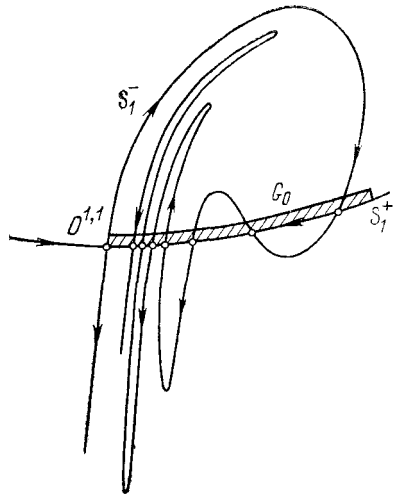


Рис. 7.65

кратных неподвижных точек, отвечающих всевозможным различным произведениям вспомогательных отображений  $T_1^m, \dots, T_n^m$ . Это говорит об очень сложной структуре точечного отображения  $T$  в окрестности рассматриваемой гомоклинической структуры.

После этих предварительных пояснений перейдем к общему изучению движений, находящихся в малой окрестности  $\delta$  произвольной гомоклинической структуры. Для этого прибегнем к методу точечных отображений, для чего каждую замкнутую фазовую траекторию  $\Gamma_i^{p,q}$  в некоторой ее точке  $O_i$  пересечем секущей  $S_i$ . Фазовые траектории, близкие к  $\Gamma_i^{p,q}$ , порождают на секущей  $S_i$  точечное отображение  $T_i$ . В окрестности  $\delta_i$  точки  $O_i$  на секущей  $S_i$  в подходящем образом выбранной системе локальных координат  $(u^i, v^i)$  отображение  $T_i$  можно

записать в виде

$$\bar{u}^i = [A_i + f_i(u^i, v^i)] u^i, \quad \bar{v}^i = [B_i + g_i(u^i, v^i)] v^i, \quad (7.64)$$

где  $u^i$  и  $v^i$  —  $(p - 1)$ - и соответственно  $(q - 1)$ -мерные векторы,  $A_i$  и  $B_i$  — матрицы с собственными значениями, лежащими внутри и соответственно вне единичного круга,  $f_i$  и  $g_i$  — гладкие функции, обращающиеся в нуль в точке  $O_i$  ( $u^i = 0, v^i = 0$ ). При этом локальные переменные выбраны так, чтобы на пересечениях интегральных многообразий  $S_q^-$  и  $S_p^+$  размерностей  $p$  и  $q$  седлового периодического движения  $\Gamma_i^{p,q}$  и секущей  $S_i$  имело место  $u^i = 0$  и соответственно  $v^i = 0$ .

Точечное отображение  $T_i$  при  $v^i = 0$  имеет точку  $O_i$  своей устойчивой неподвижной точкой. Отсюда следует, что матрица  $A_i$  имеет все собственные значения внутри единичного круга. Аналогично убеждаемся, что матрица  $B_i$  имеет все собственные значения вне единичного круга. Далее из равенств  $u^i = 0$  и  $v^i = 0$  должно следовать  $\bar{u}^i = 0$  и  $\bar{v}^i = 0$ , что и обосновывает вид (7.64) отображения  $T_i$ .

Формулы точечного отображения  $T_i$  можно записать в виде

$$\bar{u}^i = [A_i + \tilde{f}_i(u^i, \bar{v}^i)] u^i, \quad \bar{v}^i = [B_i^{-1} + \tilde{g}_i(u^i, \bar{v}^i)] \bar{v}^i, \quad (7.65)$$

определяющем отображение  $\tilde{T}_i$ , вспомогательное к отображению  $T_i$ . Вспомогательное отображение  $\tilde{T}_i$  определено в некоторой области  $D_{\tilde{T}_i}$ , заданной неравенствами

$$\|u^i\| \leq \varepsilon, \quad \|\bar{v}^i\| \leq \varepsilon \quad (7.66)$$

с достаточно малым  $\varepsilon > 0$ , преобразует ее в себя и является в ней сжимающим.

Если эти утверждения не покажутся очевидными, то за разъяснениями можно обратиться к рассмотренному ранее в п. 4 § 3 примеру и к теореме 3.10 книги [41]. Как следует из рассмотрений предыдущего параграфа, в этой области  $D_{\tilde{T}_i}$  определены все отображения  $\tilde{T}_i^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); они преобразуют ее в себя и являются в ней сжимающими. При этом коэффициент сжатия оказывается у отображения  $\tilde{T}_i^n$  не большим, чем  $q^n$ , где  $q < 1$  (теорема 3.12 [41]).

Двойкоасимптотическая кривая  $\gamma_{ij}^k$  при  $t \rightarrow -\infty$  асимптотически приближается к замкнутой фазовой кри

вой  $\Gamma_i^{p, q}$  и поэтому пересекает секущую поверхность  $S_i$  в бесконечной последовательности точек, лежащих на инвариантном многообразии  $u^i = 0$  точечного отображения  $T_i$  и стремящихся к точке  $O_i$ . Аналогично, при  $t \rightarrow +\infty$  она пересекает секущую  $S_j$  в бесконечной серии точек, стремящихся к точке  $O_j$ , для которых координаты  $v^j = 0$ . В каждой из этих последовательностей выберем по одной точке  $M_{ij}^k (u^i = 0, v^i = v_{ij}^k)$  и  $N_{ij}^k (u^j = u_{ij}^k, v^j = 0)$  в достаточной близости соответственно от точек  $O_i (u^i = 0, v^i = 0)$  и  $O_j (u^j = 0, v^j = 0)$ .

Обозначим через  $\tilde{\gamma}_{ij}^k$  отрезок фазовой траектории  $\gamma_{ij}^k$ , соединяющий точки  $M_{ij}^k$  и  $N_{ij}^k$ . Фазовые траектории, близкие к  $\gamma_{ij}^k$ , определяют некоторое гладкое точечное отображение  $L_{ij}^k$  секущей  $S_i$  в секущую  $S_j$  вида

$$u^j = u_{ij}^k + h(u^i, v^i - v_{ij}^k), \quad v^j = r(u^i, v^i - v_{ij}^k). \quad (7.67)$$

Это отображение  $L_{ij}^k$  инвариантно многообразию  $u^i = 0$ , лежащее на секущей  $S_i$ , преобразует в многообразие, лежащее на секущей  $S_j$  и имеющее уравнения

$$u^j = u_{ij}^k + h(0, v^i - v_{ij}^k), \quad v^j = r(0, v^i - v_{ij}^k). \quad (7.68)$$

Преобразованное многообразие, как и исходное, имеет размерность  $q - 1$ . Многообразие  $v^j = 0$  имеет размерность  $p - 1$ . Поэтому в общем случае пересечение преобразованного многообразия (7.68) и многообразия  $v^j = 0$  происходит в отдельных точках и без касаний. Общность пересечений этих многообразий на секущей  $S_j$  означает общность пересечения многообразий  $S_q^-$  и  $S_p^+$  седловых периодических движений  $\Gamma_i^{p, q}$  и соответственно  $\Gamma_j^{p, q}$ , которую будем предполагать.

Касательные векторы  $\delta u^i = 0$ ,  $\delta v^i \neq 0$  преобразуются в векторы

$$\delta u^j = \frac{\partial h}{\partial v^i} \delta v^i, \quad \delta v^j = \frac{\partial r}{\partial v^i} \delta v^i,$$

среди которых не должно быть, в силу сделанного предположения об отсутствии касания, вектора  $\delta u^j \neq 0$ ,  $\delta v^j = 0$ . Это будет иметь место лишь тогда, когда матрица  $\partial r / \partial v^i$  невырожденная. Невырожденность в точке

$u^i = 0, v^i = v_{ij}^k$  этой матрицы позволяет разрешить второе из уравнений (7.68) относительно  $v^i$  и записать отображение  $L_{ij}^k$  в виде

$$u^j = u_{ij}^k + \tilde{h}(u^i, v^j), \quad v^i = v_{ij}^k + \tilde{r}(u^i, v^j), \quad (7.69)$$

соответствующем вспомогательному отображению  $L_{ij}^k$ . Это вспомогательное отображение  $L_{ij}^k$  определено в некоторой

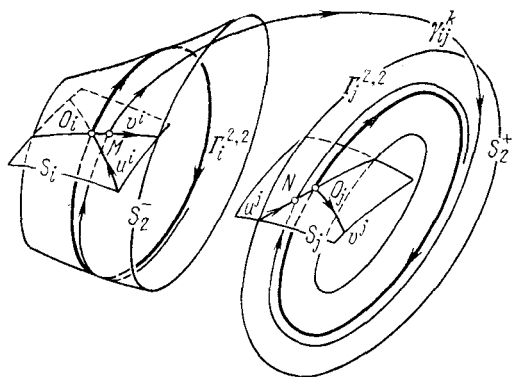


Рис. 7.66

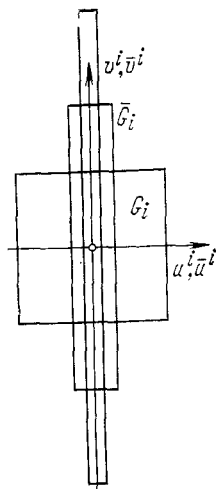


Рис. 7.67

достаточно малой окрестности  $D_{L_{ij}^k}$  точки  $u^i = 0, v^j = 0$ , которую можно определить неравенствами

$$\|u^i\| \leq \delta, \quad \|v^j\| \leq \delta, \quad (7.70)$$

является в ней гладким и имеет константу Липшица, не большую некоторого конечного  $K$ .

Проиллюстрируем все сказанное об отображениях  $T_i$  и  $L_{ij}^k$  и вспомогательных к ним на примере трехмерной динамической системы.

На рис. 7.66 изображены седловые периодические движения  $\Gamma_i^{2,2}$  и  $\Gamma_j^{2,2}$  и двоякоасимптотическое к ним движение  $\gamma_{ij}^k$ , инвариантные поверхности  $S_i^-$  и  $S_i^+$ , которые пересекаются по кривой  $\gamma_{ij}^k$ , а также секущие плоскости  $S_i$  и  $S_j$ , пересекающие  $\Gamma_i^{2,2}$  и  $\Gamma_j^{2,2}$  соответственно в точках

$O_i$  и  $O_j$ . На секущих указаны координатные линии  $u^i$  и  $v^i$ , а также точки  $M_{ij}^k$  и  $N_{ij}^k$ , у которых, чтобы не загромождать рисунок, индексы опущены.

Отображение  $T_i$  седлового типа, точка  $O_i$  является его неподвижной точкой. Область  $G_i$  ( $|u^i| \leq \varepsilon$ ,  $|v^i| \leq \varepsilon$ ) оно преобразует в область  $\bar{G}_i$ . Вид этих областей показан на рис. 7.67. Согласно ранее сказанному, отсюда следует существование однозначного вспомогательного отображения  $\bar{T}_i$ , преобразующего область  $D_{\bar{T}_i}$  ( $|u^i| \leq \varepsilon$ ,  $|\bar{v}^i| \leq \varepsilon$ ) в область  $\bar{D}_{\bar{T}_i}$ , лежащую строго внутри  $G_i$  (рис. 7.68).

Отображение  $\bar{T}_i^n$ , вспомогательное к  $T_i^n$ , преобразует область  $G_i$  в область, стягивающуюся к точке  $u^i = 0$ ,  $\bar{v}^i = 0$  при возрастании  $n$  (рис. 7.68). Этот факт геометрически подтверждается тем, что отображение  $T_i^n$  с ростом  $n$  все более вытягивается при преобразовании области  $G_i$ , превращая ее во все более и более тонкую полосу (см. рис. 7.67).

Рассмотрим теперь отображение  $L_{ij}^k$ . Отображение  $L_{ij}^k$  преобразует точку  $M_{ij}^k$  области  $G_i$  на секущей  $S_i$  в точку

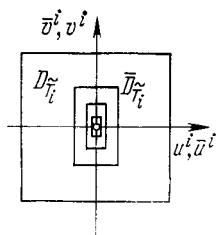


Рис. 7.68

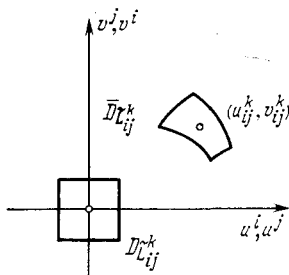


Рис. 7.69

$N_{ij}^k$  области  $G_j$  на секущей  $S_j$ . При этом кривая  $S_1^-$  переходит в кривую  $\bar{S}_1^-$ , пересекающую в точке  $N_{ij}^k$  кривую  $S_1^+$ .

Вспомогательное отображение  $L_{ij}^k$  в этих условиях определено и однозначно в малой окрестности  $D_{L_{ij}^k}$  ( $|u^i| \leq \delta$ ,  $|v^j| \leq \delta$ ) точки  $u^i = 0$ ,  $v^j = 0$  и преобразует ее в окрестность  $\bar{D}_{L_{ij}^k}$  точки  $u^j = u_{ij}^k$ ,  $v^i = v_{ij}^k$  (рис. 7.69).

Вернемся к общему рассмотрению. В дальнейшем

точки  $M_{ij}^k$  и  $N_{ij}^k$  и величина  $\delta$  предполагаются выбранными так, чтобы окрестности  $D_{\bar{L}_{ij}^k}$  ( $k = 1, 2, \dots, k_{ij}$ ) вспомогательными отображениями  $L_{ij}^k$  преобразовывались в непересекающиеся между собой области, расположенные внутри области

$$D_{ij} ( |u^i| \leq \varepsilon, \quad |v^j| \leq \varepsilon ). \quad (7.71)$$

Этого всегда можно достигнуть за счет выбора точек  $M_{ij}^k$  и  $N_{ij}^k$  в достаточной близости от точек  $O_i$  и  $O_j$  и за счет достаточной малости  $\delta$ .

Уточним теперь определение окрестности рассматриваемой гомоклинической структуры. Эта окрестность, назовем ее  $\delta$ , составлена из окрестностей  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$  седловых замкнутых фазовых траекторий  $\Gamma_1^{p,q}, \dots, \Gamma_m^{p,q}$  и окрестностей  $\delta_{ij}$  отрезков  $\bar{\gamma}_{ij}^k$  двоякоасимптотических фазовых траекторий  $\gamma_{ij}^k$ . Окрестность  $\delta_i$  определим как совокупность отрезков фазовых траекторий, начинающихся и кончающихся на секущей поверхности  $S_i$  в точках  $(u^i, v^i)$  и  $(\bar{u}^i, \bar{v}^i)$ , удовлетворяющих условиям

$$\|u^i\| \leq \varepsilon, \quad \|\bar{v}^i\| \leq \varepsilon \quad (7.72)$$

и не имеющих с  $S_i$  других пересечений.

Окрестность  $\delta_{ij}^k$  также определим как совокупность отрезков фазовых траекторий, начинающихся на секущей  $S_i$ , кончающихся на  $S_j$  и таких, что координаты начала  $(u^i, v^i)$  и конца  $(u^j, v^j)$  связаны отображением  $L_{ij}^k$ , причем  $\|u^i\| \leq \delta, \quad \|v^j\| \leq \delta$ . При неограниченном уменьшении  $\varepsilon$  и  $\delta$  окрестности  $\delta$  и  $\delta_{ij}^k$  стягиваются к фазовым кривым  $\Gamma_i^{p,q}$  и  $\gamma_{ij}^k$ .

Возьмем теперь произвольную фазовую траекторию, целиком лежащую в окрестности  $\delta$  рассматриваемой гомоклинической структуры. Эта фазовая траектория как при возрастании, так и убывании времени вновь и вновь пересекает секущие поверхности  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , причем каждые две последовательные точки пересечения связаны между собой одним из преобразований  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) или  $L_{ij}^k$  ( $(i, j, k) \in \mathfrak{M}$ ). Тем самым каждой фазовой траектории, лежащей целиком в окрестности  $\delta$ , соответствует некоторая бесконечная в обе стороны последовательность отображений, составленная из отобра-

жений  $T_i$  и  $L_{ij}^k$ . Целью дальнейшего изложения является изучение этого соответствия. Для этого представим бесконечную в обе стороны последовательность точек и связывающих их отображений в виде схемы

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & u^{ij-1} & \rightarrow & \bar{u}^{ij-1} & \rightarrow & u^{ij} \rightarrow \bar{u}^{ij} \rightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \left| \left| \tilde{T}_{ij-1}^{n_j} \right| \right| & & \left| \left| L_{ij-1, i_j}^{k_{j-1}} \right| \right| & & \left| \left| \tilde{T}_{ij}^{n_j} \right| \right| \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \leftarrow & v^{ij-1} & \leftarrow & \bar{v}^{ij-1} & \leftarrow & v^{ij} \leftarrow \bar{v}^{ij} \leftarrow \dots \end{array} \quad (7.73)$$

В силу сделанного определения окрестности  $\delta$  гомоклинической структуры, в этой схеме точки  $(u^{ij}, \bar{v}^{ij})$  и  $(\bar{u}^{j-1}, v^{ij})$  ( $j = \dots -1, 0, 1, \dots$ ) принадлежат областям определения вспомогательных отображений  $\tilde{T}_{ij}^{n_j}$  и  $L_{ij-1, i_j}^{k_{j-1}}$ , т. е.

$$(u^{ij}, \bar{v}^{ij}) \in D_{\tilde{T}_{ij}^{n_j}}, \quad (\bar{u}^{j-1}, v^{ij}) \in D_{L_{ij-1, i_j}^{k_{j-1}}} \quad (7.74)$$

и имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (\bar{u}^{ij}, v^{ij}) &= \tilde{T}_{ij}^{n_j}(u^{ij}, \bar{v}^{ij}), \\ (u^{ij}, \bar{v}^{j-1}) &= L_{ij-1, i_j}^{k_{j-1}}(\bar{u}^{j-1}, v^{ij}). \end{aligned} \quad (7.75)$$

Имеет место и обратное, т. е. если в схеме вида (7.73) выполнены условия (7.74) и соотношения (7.75), то ей отвечает фазовая траектория, целиком расположенная в окрестности  $\delta$  и пересекающаяся с секущими поверхностями  $S_1, S_2, \dots, S_m$  последовательно при возрастании времени в точках

$$\dots (u^{ij-1}, v^{ij-1}), (\bar{u}^{j-1}, \bar{v}^{j-1}), (u^{ij}, v^{ij}), \dots \quad (7.76)$$

Таким образом, вопрос об изучении движений, целиком расположенных в окрестности  $\delta$  гомоклинической структуры, свелся к изучению последовательностей точечных отображений.

Точечные отображения этой последовательности имеют вспомогательные отображения, причем отображения  $\tilde{T}_i^n$  — сжимающие с коэффициентом сжатия, не большим  $q^n$  ( $q < 1$ ), а отображения  $L_{ij}^k$  имеют константу Липшица, не большую  $K$ . Ради полной определенности примем, что под сжимаемостью отображения  $\tilde{T}_i^n$  с коэффициентом сжатия,



не большим  $q^n$ , имеется в виду выполнение для него неравенства

$$\| \delta u^j \| + \| \delta v^i \| < q^n ( \| \delta u^i \| + \| \delta \bar{v}^j \| ), \quad (7.77)$$

а под ограниченностью константы Липшица для отображения  $\tilde{L}_{ij}^h$  — выполнение неравенства

$$\| \delta u^j \| + \| \delta v^i \| < K ( \| \delta u^i \| + \| \delta v^j \| ). \quad (7.78)$$

Пусть  $n^*$  — число, определяемое из условий

$$\varepsilon q^{n^*} < \delta, \quad 2Kq^{n^*} < 1. \quad (7.79)$$

Назовем допустимой всякую последовательность точечных отображений вида

$$\dots T_{i_{j-1}}, \dots T_{i_{j-1}}, L_{i_{j-1}, i_j}^{h_{j-1}}, T_{i_j}, \dots T_{i_j}, L_{i_j, i_{j+1}}^{h_j}, \dots, \quad (7.80)$$

у которой все тройки  $(i_j, i_{j+1}, k_j) \in \mathfrak{M}$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 7.4.** Для всякой допустимой последовательности (7.80), в которой все отображения  $T_{ij}$  повторяются не менее чем  $n^*$  раз, в окрестности  $\delta$  гомоклинической структуры имеется одна и только одна фазовая траектория, отвечающая этой последовательности точечных отображений.

Доказательство этой теоремы полностью подготовлено предшествующим. Осталось его завершить. Для этого достаточно сопоставить допустимой последовательности (7.80) схему вида (7.73) и выбрать в ней точки  $(u^{ij}, v^{ij})$  и  $(\bar{u}^{ij}, \bar{v}^{ij})$  произвольным образом, лишь бы удовлетворялись условия (7.74). Если теперь к этой схеме применить все преобразования  $\tilde{L}_{i_j, i_{j+1}}^{h_j}$ , а затем все отображения  $T_{i_j}^n$ , то придем в силу первого из неравенств (7.79) к схеме, опять удовлетворяющей тем же условиям (7.74). Кроме того, в силу второго из условий, эта схема подвергалась сжимающему преобразованию.

Повторяя описанный процесс неограниченное число раз, придем к предельной схеме, удовлетворяющей не только условиям (7.74), но и соотношениям (7.75), что и требовалось.

Заметим, что если второе из условий (7.79) отбросить, то сжимаемость схем при их пересчете описанным образом не будет гарантироваться, но схема после преобразования снова будет удовлетворять условиям (7.74). Этого

достаточно для доказательства существования требуемой фазовой траектории. Однако утверждать, что она единственная, уже нельзя.

Доказанная теорема дает полное описание всех движений, целиком находящихся в достаточно малой окрестности гомоклинической структуры. Совокупность этих движений достаточно сложна. При достаточной малости окрестности  $\delta$  гомоклинической структуры все эти движения седлового типа. Среди них бесчисленное множество периодических движений, отвечающих всевозможным периодическим последовательностям вида (7.80), асимптотических к этим периодическим, устойчивых по Пуассону неперiodических. Несмотря на необычайную сложность этого множества движений, оно не изменяет своей структуры при малых гладких возмущениях правых частей дифференциальных уравнений, поскольку его описание с помощью последовательностей точечных отображений (7.80) при этом не меняется. Пока не происходит бифуркаций самой гомоклинической структуры, не происходит бифуркаций с движениями, находящимися в достаточно малой окрестности гомоклинической структуры.

Доказательство седлового характера движений, находящихся в достаточно малой окрестности  $\delta$ , непосредственно следует из того, что вспомогательное отображение

$$\overline{T_i^{n_i} L_{ij}^k T_j^{n_j}} \quad (7.81)$$

при достаточно больших  $n_i$  и  $n_j$  является сжимающим, и того, что при уменьшении окрестности  $\delta$  числа повторений отображений  $T_{ij}$  в последовательности (7.80) равномерно неограниченно возрастают.

Заметим, что последовательность отображений (7.80) можно считать составленной из отображений вида

$$T_i^{n_i} L_{ij}^k T_j^{n_j} \quad ((i, j, k) \in \mathfrak{M}), \quad (7.82)$$

что эти отображения при достаточной малости окрестности  $\delta$  удовлетворяют условиям теоремы 7.3 и поэтому, согласно этой теореме, любое произведение таких отображений

$$T_{i_1}^{n_1} L_{i_1, i_2}^{k_1} T_{i_2}^{n_2} L_{i_2, i_3}^{k_2} \dots T_{i_s}^{n_s} \quad (7.83)$$

имеет в области  $D_{\tilde{T}_{i_s}}$  единственную седловую неподвижную точку. Это утверждение в основном исчерпывает содержание теоремы 7.4.

## § 5. Синхронизация и стохастичность

Содержание настоящего параграфа не является традиционным для теории колебаний. В теории колебаний случайные колебания рассматривались лишь как результат случайных воздействий на колебательную систему. Возможность самогенерирования динамической системой случайных колебаний, несмотря на очевидную реальность стохастических волн и турбулентных колебаний, оставались вне рассмотрения. Отчасти это связано с тем, что основными установившимися движениями, исследуемыми в теории колебаний, были простейшие типы движений — состояния равновесия, периодические движения и в значительно меньшей мере квазипериодические. Более сложные движения представлялись не поддающимися изучению и имеющими весьма отдаленное отношение к движениям реальных систем. Нелинейное колебательное мышление, воспитанное в основном на фазовой плоскости, не допускало такой возможности и считало стохастичность уделом систем с очень большим числом степеней свободы, настолько большим, что все запутывается, становится неясным и стохастичным. Возникновение стохастичности в механике и физике также обычно связывалось с большим числом степеней свободы, с большим числом возможных колебаний или волн.

Все это не совсем так, стохастичность может возникнуть и в динамических системах с небольшим числом степеней свободы. Достаточно, чтобы фазовое пространство было более чем двумерное. Соответствующие примеры были известны давно. Казались они чем-то исключительным, плодом тонких математических измышлений. Однако это совсем не так, и стохастические движения столь же рядовое явление в системах с более чем одной степенью свободы, как и состояния равновесия и периодические движения.

Ниже будут описаны возможные общие механизмы возникновения стохастичности. Обычно в одной и той же системе в зависимости от значений ее параметров может быть, а может и не быть стохастизация. При каких-то значениях параметров ее нет и система имеет простейший установившийся режим — состояние равновесия или периодическое движение — при других значениях параметров имеют место стохастические колебания. При непрерывном переходе от первых значений параметров ко

вторым происходят сложные изменения установившегося процесса. Эти изменения могут происходить постепенно или скачком. В первом случае возникновение стохастичности естественно назвать мягким, во втором — жестким — в полной аналогии с мягким и жестким возникновением автоколебаний при потере устойчивости равновесного состояния.

Поясним, что понимается под общим механизмом возникновения стохастичности. Лучше всего это сделать на привычном примере автоколебаний.

В чем механизм автоколебаний или механизм возникновения автоколебаний? В случае мягкого возникновения он состоит в появлении неустойчивости равновесного состояния, приводящего к нарастающим колебаниям, и в одновременном ограничении этого нарастания. Как компромисс между возникшей неустойчивостью и подавлением больших колебаний и возникает устойчивый периодический режим — автоколебание. Это не единственный



Рис. 7.70

механизм, но это очень часто встречающийся общий механизм. В некоторых случаях можно указать конкретные физические причины и силовые взаимодействия, порождающие неустойчивость и ограничивающие нарастание колебаний. Особенно наглядно это обнаруживается у систем, близких к консервативным. Однако вне зависимости от природы и характера этих сил в фазовом пространстве при мягком возникновении автоколебаний происходят изменения, показанные последовательно на рис. 7.70, соответствующие одной из описанных ранее общих бифуркаций состояния равновесия. Вот эти рисунки и описываемая ими бифуркация и составляют содержание слов — общий механизм мягкого возникновения авто-

колебаний. Подчеркнем общий механизм с точки зрения теории колебаний, изучающей динамические закономерности разной природы, отвлекаясь от конкретного их содержания.

**1. Синхронизация, десинхронизация и многопериодическая стохастичность.** Перейдем к описанию первого возможного механизма возникновения стохастичности, который можно представлять себе одновременно как все уменьшающийся синхронизм в колебаниях отдельных парциальных степеней свободы или частей системы, как все большую хаотизацию движений парциальных частей системы. Этот процесс можно представить себе как продолжение изменений, представленных на рис. 7.70 и 7.71, состоящее в том, что возникшее периодическое движение  $\Gamma_1$  теряет устойчивость и от него отделяется двумерное устойчивое интегральное многообразие  $\Gamma_2$ , состоящее из двоякопериодических движений. При этом предполагается, что число

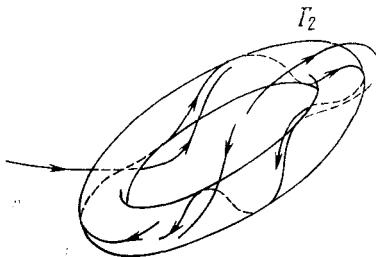


Рис. 7.71

вращения Пуанкаре на родившемся торе либо иррационально, либо рационально, но с достаточно большим числителем или знаменателем. Затем, в свою очередь, это тороидальное интегральное многообразие  $\Gamma_2$  теряет устойчивость и от него рождается трехмерное устойчивое тороидальное многообразие, составленное из тройкопериодических движений и т. д., вплоть до появления устойчивого тороидального многообразия  $\Gamma_m$ , составленного из  $m$ -периодических движений. При  $m$ -периодическом движении закон изменения каждой из фазовых переменных может быть записан в виде

$$x = \psi(\omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_m t + \varphi_m), \quad (7.84)$$

где  $\psi(u_1, u_2, \dots, u_m)$  — периодическая с периодом  $2\pi$  функция каждой из переменных  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Процесс, описываемый уравнением (7.84), не является случайным. Это либо квазипериодический процесс, либо процесс с очень большим периодом, вообще говоря, возрастающим с ростом числа  $m$ . Он обладает свойством приближительной повторяемости через достаточно большие времена  $T(\varepsilon)$

( $\epsilon$  — точность повторения). Лишь на промежутках времени, меньших  $T(\epsilon)$ , он похож на случайный процесс. При длительном наблюдении «случайность» такого процесса могла бы быть разоблачена путем обнаружения его квазипериодичности, однако этому мешает своеобразное накопление малых флуктуаций, которые неизбежны в каждой реальной системе. Время  $T(\epsilon)$  вообще много больше отдельных периодов  $2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_m$  и с ростом числа  $m$  экспоненциально возрастает, поэтому даже очень малые в масштабе этих периодов флуктуации фаз  $\Delta\varphi_1, \dots, \Delta\varphi_m$  могут привести к существенному накоплению фазовых сдвигов за время  $T(\epsilon)$ , достаточных для разрушения повторяемости и стохастизации. В качестве некоторой модели описанного явления стохастизации и связи его с десинхронизацией можно взять систему большого числа слабо взаимодействующих гармонических осцилляторов, описываемую дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.85)$$

которая после введения новых переменных  $\rho_i$  и  $\varphi_i$  и замены

$$x_i = \rho_i \sin \varphi_i$$

приводится к виду системы с быстровращающимися фазами

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \omega_i + \mu \Phi_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \rho_1, \dots, \rho_n, \mu), \\ \dot{\rho}_i &= \mu R_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \rho_1, \dots, \rho_n, \mu). \end{aligned} \quad (7.86)$$

В такой системе возможны многопериодические движения, образующие устойчивые тороидальные многообразия. Полным синхронизмом движений всех парциальных осцилляторов естественно считать либо равновесие системы, либо ее периодическое движение. При периодическом движении все парциальные осцилляторы колеблются с общей частотой и с вполне определенными фиксированными разностями фаз. Периодическое движение можно рассматривать как тороидальное многообразие размерности единицы. С увеличением размерности тороидального многообразия в колебаниях отдельных осцилляторов все меньше и меньше согласованности и, наконец, при максимальной размерности, равной  $n$ , между ними нет никаких связей. Вместе с уменьшением степени синхронизма все увеличивается стохастичность колебаний

системы. Размерность возникающего тороидального многообразия зависит от соотношений между частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Наличие между частотами простых резонансных соотношений приводит, вообще говоря, к снижению размерности тороидального многообразия вплоть до возникновения синхронных колебаний. При этом под простым резонансным соотношением понимается, что при некоторых, сравнительно небольших целых числах  $k_1, k_2, \dots, k_n$  имеет место равенство

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n = 0.$$

Чем больше таких простых независимых резонансных соотношений, тем ниже размерность возможного устойчивого тороидального многообразия и больше степень синхронности колебаний парциальных осцилляторов. Напротив, отсутствие таких простых резонансных соотношений способствует возникновению многочастотных колебаний, для которых учет флуктуаций путем добавления к правым частям уравнений (7.86) малых случайных воздействий  $\xi_i$  и  $\eta_i$  приводит к стохастическим дрейфам фаз  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , пропорциональным дисперсиям случайных воздействий  $\xi_i$  и растущим с временем  $t$  как  $\sqrt{t}$ .

Описанный механизм «стохастичности» по существу совпадает с известным общим описанием Л. Д. Ландау возникновения турбулентности течения жидкости через появление большого числа неустойчивых волновых мод [28]. Если к этому добавить, что становящиеся неустойчивыми моды колебаний низкочастотные, а механизмы их органичения вызваны диссипацией энергии на высокочастотных модах, то придем к принятой сейчас картине слабой турбулентности. В применении к модели, описываемой уравнениями (7.85), это означает, что состояние равновесия  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$  усеченной системы

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m, 0, \dots, \\ \dots, 0, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

соответствующей низкочастотной части спектра возможных частот колебаний (предполагается, что уравнения (7.85) записаны в порядке возрастания частот, так что  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ ), многочастотно неустойчиво и, напротив, усеченная система

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \\ x_{m+1}, \dots, x_n, \mu) \quad (i = m + 1, \dots, n), \end{aligned}$$

соответствующая высоким частотам, диссипативна и имеет глобально устойчивое состояние равновесия.

В процессе взаимодействия неустойчивой и диссипативной частей системы происходит перенос энергии от низкочастотных мод колебаний к высокочастотным и устанавливается некоторый спектр колебаний — некоторое распределение амплитуд колебаний парциальных осцилляторов с частотами, близкими к  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Это распределение амплитуд может быть найдено, если известны усредненные взаимодействия между парциальными осцилляторами (модами колебаний) системы.

Выше были изложены общие соображения «теории квазипериодической стохастичности». Существенную роль при этом играют малые флуктуации и своеобразный механизм их накопления \*), своеобразный «усилитель стохастичности». В описанном плане явление стохастизации было противоположным синхронизации. Возникновение синхронизмов приводит к подавлению стохастичности, напротив, развитие стохастичности означает все меньшую степень синхронности колебаний отдельных частей системы.

Существующая к настоящему времени теория позволяет уточнить эти общие соображения применительно к системам с так называемыми быстровращающимися фазами [23]. В предположении уже имеющейся хаотичности фаз, исследование возникающих стохастических распределений колебаний возможно с помощью так называемого кинетического уравнения [26, 49]. Соответствующие исследования привели к созданию физической теории так называемой слабой турбулентности [26].

**2. Притягивающие гомоклинические структуры и стохастические колебания.** Перейдем теперь к описанию возможных общих механизмов самогенерирования стохастичности динамической системой. Они связаны с появлением в фазовом пространстве динамической системы гомоклинических структур, которое, так же как и возникновение автоколебаний и многопериодических колебаний, вызвано возникновением в системе неустойчивости [24, 25, 42].

Как уже говорилось, под гомоклинической структурой понимается содержащая циклы совокупность нескольких седловых периодических движений и двоякоасимптотических к ним движений. Гомоклиническая структура в своей

---

\*) Подобное накопление имеет место также в некоторых системах автоматического регулирования [32].



окрестности содержит очень сложную совокупность движений, которая, как было показано, допускает полное описание с помощью последовательностей символов.

Седловые движения гомоклинической структуры могут быть сжимающего или расширяющего типов в зависимости от того, происходит ли уменьшение или увеличение фазового объема в их окрестности. Седловое периодическое движение сжимающее, если сумма его характеристических показателей отрицательна, и расширяющее, если эта сумма положительна.

Движения гамильтоновых систем принадлежат к граничному случаю, так как для них, согласно теореме Лиувилля, имеет место сохранение фазового объема.

Назовем гомоклиническую структуру поглощающей или устойчивой, если из некоторой ее окрестности фазовые траектории при возрастании времени не могут выходить и все близкие к ней фазовые траектории в нее входят.

Приведем примеры динамических систем с притягивающими гомоклиническими структурами.

Возьмем неавтономную систему второго порядка вида

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} + \mu H \frac{\partial H}{\partial q} + \nu f(q, p, t), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} + \mu H \frac{\partial H}{\partial p} + \nu g(q, p, t), \end{aligned} \quad (7.87)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  — малые параметры,  $H(p, q)$  — функция Гамильтона невозмущенной системы,  $f(q, p, t)$  и  $g(q, p, t)$  — периодические периода  $2\pi$  функции времени  $t$ . При  $\mu = \nu = 0$  эта система допускает интеграл энергии

$$H(q, p) = h \quad (7.88)$$

и имеет очень простую структуру разбиения фазовой плоскости: особые точки — только центры и седла, все

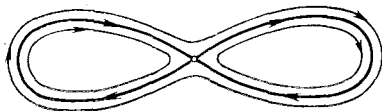


Рис. 7.72

траектории, кроме сепаратрис седел, либо замкнутые, либо уходящие в бесконечность.

Допустим, что значению  $h = 0$  соответствуют сепаратрисы седла, имеющие вид восьмерки, изображенной на рис. 7.72; тогда близкие к этой восьмерке фазовые траек-

тории ведут себя, как показано на том же рис. 7.72. При  $\nu = 0$  и  $\mu < 0$  сепаратрисные кривые останутся фазовыми траекториями, так как на них  $H = 0$ , а близкие к ним траектории будут асимптотически к ним приближаться. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из того, что в силу уравнений (7.87) при  $\nu = 0$  и  $\mu < 0$

$$\frac{d}{dt}(H^2) = \frac{1}{2} \lambda H^2 \left( \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)^2 \right) < 0.$$

Для изучения движений системы (7.87) при  $\mu$  и  $\nu$ , отличных от нуля, прибегнем к рассмотрению порождаемого ее

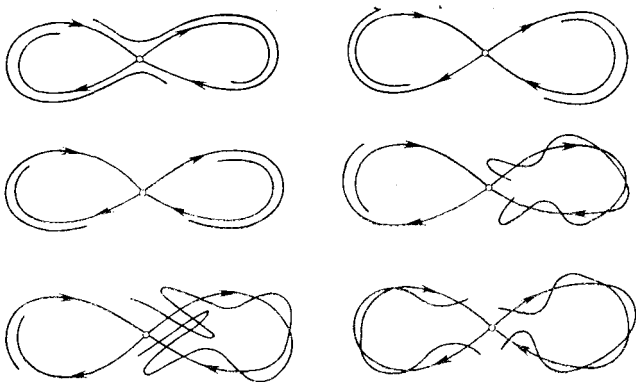


Рис. 7.73

фазовыми траекториями точечного отображения  $T_{2\pi}$  плоскости  $t = 0$  в плоскость  $t = 2\pi$ . При  $\nu = 0$  фазовые траектории системы (7.87) являются инвариантными кривыми точечного отображения  $T_{2\pi}$ . В частности, седловой особой точке соответствует седловая неподвижная точка отображения  $T_{2\pi}$ . Ее сепаратрисные кривые, образующие восьмерку, являются инвариантными кривыми этой седловой неподвижной точки.

При  $\nu = 0$  инвариантные кривые седловой точки идут из седла в седло. При  $\nu \neq 0$  в отношении их поведения возможен один из шести представленных на рис. 7.73 случаев. Нетрудно видеть, что каждый из изображенных на рис. 7.73 вариантов поведения инвариантных кривых можно реализовать с помощью подбора соответствующих функций  $f$  и  $g$  и что при этом можно предполагать сколь

удобную малость добавков  $\nu f$  и  $\nu g$ . При пересечении инвариантных кривых возникает гомоклиническая структура, состоящая из седлового периодического движения, отвечающего седловой неподвижной точке, и нескольких двоякоасимптотических к нему движений, соответствующих точкам пересечения инвариантных кривых. При достаточно малых добавках  $\nu f$  и  $\nu g$  эта гомоклиническая структура поглощающая, поскольку при  $\nu = 0$  все фазовые траектории асимптотически приближаются к образуемой инвариантными кривыми восьмерке (рис. 7.74). Напомним, что  $\mu$  предполагается отрицательным. Окрестность, в которую все близкие траектории входят, на

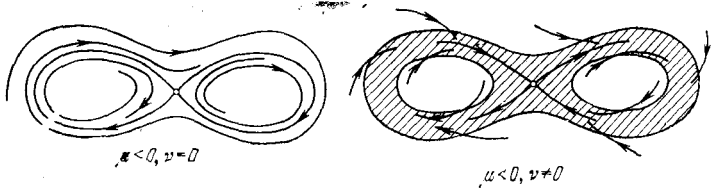


Рис. 7.74

рис. 7.74 отмечена штриховкой. Структура этой окрестности очень сложна. В малой окрестности гомоклинической структуры все движения седловые и имеют полное описание с помощью последовательностей символов. Однако малая окрестность гомоклинической структуры является лишь частью окрестности, заштрихованной на рис. 7.74.

Полное описание структуры этой более широкой поглощающей окрестности пока неизвестно. Результаты ее численного исследования приведены в работе [11] и более кратко описаны в книге [41]. Сейчас же приведем примеры гомоклинических притягивающих структур, для которых удастся указать приемлемое статистическое описание движений в этой окрестности. Это описание может служить прототипом для приводимых выше примеров и для более сложных случаев. Примеры, о которых пойдет речь, строятся с помощью точечных отображений  $T_i$  вида

$$\bar{u}_i = \lambda u_i, \quad \bar{v}_i = \nu^{-1} v_i \quad (0 < \lambda < \nu < 1) \quad (7.89)$$

и отображений  $L_{ij}^{sk}$  вида

$$\bar{u}_j = \varphi(v_i), \quad \bar{v}_j = (\nu^m - \lambda^m) \varphi(v_i) + \lambda \chi(v_i) u_i, \quad (7.90)$$

где  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\chi$  — гладкие, а  $\varphi$  и  $\chi$  — еще и монотонные вместе с первыми производными функции своих аргументов, удовлетворяющие для  $v \leq v_i \leq 1$  условиям

$$\begin{aligned} |\varphi(v_i)| &\leq 1, & |\psi(v_i)| &\leq 1, & |\chi(v_i)| &\leq 1, \\ \varphi(v) &= v\varphi(1), & \psi'(v) &= \psi'(1), & & (7.91) \\ \varphi(1) &= \lambda\varphi(v) = \lambda, & \varphi'(v) &= \lambda v\varphi'(1), & & \\ \chi(v) &= v\lambda\chi(1), & \chi'(v) &= \lambda\chi(1). & & \text{II} \end{aligned}$$

Отображение  $T_i$  область  $G_i$ , определяемую неравенствами

$$|u_i| \leq 1, \quad |v_i| \leq v, \quad |u_i|^{-\ln v} |v_i|^{-\ln \lambda} \leq v^{-m \ln \lambda}, \quad (7.92)$$

где  $m$  — целое положительное число, преобразует в область  $\bar{G}_i$ , для которой

$$|u_i| \leq \lambda, \quad |v_i| \leq 1, \quad |u_i|^{-\ln v} |v_i|^{-\ln \lambda} \leq v^{-m \ln \lambda}. \quad (7.93)$$

Области  $G_i$  и  $\bar{G}_i$  изображены на рис. 7.75, где они заштрихованы в разных направлениях:  $G_i$  — горизонтальными,

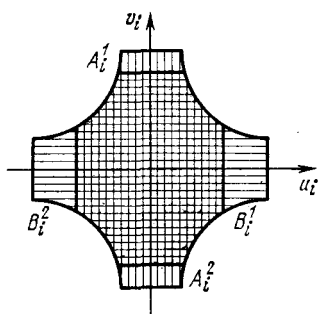


Рис. 7.75

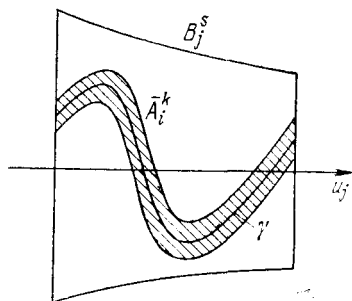


Рис. 7.76

а  $\bar{G}_i$  — вертикальными линиями. Точка  $O$  ( $u_i = v_i = 0$ ) — седловая неподвижная точка. Прямые  $u_i = 0$  и  $v_i = 0$  преобразуются в себя.

Введем, как показано на рис. 7.75, односвязные области  $A_i^1$ ,  $A_i^2$ ,  $B_i^1$  и  $B_i^2$ . Каждая точка  $(u_i, v_i) \in B_i^k$  ( $k = 1, 2$ ,  $v_i \neq 0$ ) после некоторого числа преобразований  $T_i$  переходит в некоторую точку либо области  $A_i^1$ , если  $v_i > 0$ , либо области  $A_i^2$ , если  $v_i < 0$ . Число необходимых для

этого преобразований  $T_i$  может быть любым, не меньшим  $m$ . При уменьшении  $|v_i|$  это число неограниченно возрастает.

Отображение  $L_{ij}^{sk}$  преобразует область  $A_i^k$  в область  $B_j^s$ . При этом образ  $\bar{A}_i^k$  области  $A_i^k$  лежит внутри области  $B_j^s$ , причем образ отрезка  $u_i = 0$  в области  $A_i^k$  преобразуется в кривую  $\gamma$ , пересекающую ось  $v_i = 0$  (рис. 7.76). Искомое отображение  $T$  строится теперь следующим образом:

$$T(u, v) = \begin{cases} T_i(u, v), & \text{если } (u, v) \in G_i, \\ L_{i,j,(i,k)}^{k,s(i,k)}(u, v), & \text{если } (u, v) \in A_i^k, \end{cases} \quad (7.94)$$

где  $j(i, k)$  и  $s(i, k)$  — некоторые целочисленные функции своих аргументов и при этом  $1 \leq i \leq n$ ,  $k = 1, 2$ ;  $1 \leq j \leq n$ ,  $s = 1, 2$ . Это отображение  $T$  определено в области  $G$ :

$$G = \bigcup_{i=1}^n (G_i \cup \bar{G}_i) \quad (7.95)$$

и преобразует ее в себя. В силу гладкости функций  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\chi$  и условий (7.91)  $T$  — гладкое отображение.

Пусть  $n = 1$ ,  $j(1, 1) = 1$ ,  $j(1, 2) = 1$ ,  $s(1, 1) = 1$  и  $s(1, 2) = 2$ . Соответствующее этому случаю отображение схематически изображено на рис. 7.77. Оно может быть

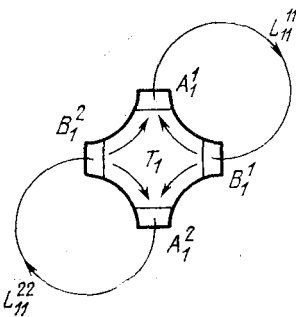


Рис. 7.77

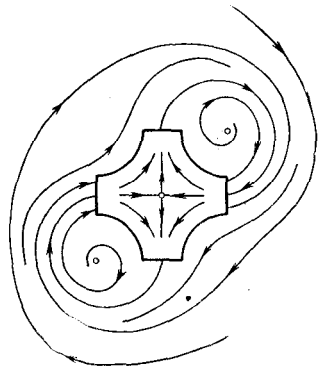


Рис. 7.78

гладко расширено на всю плоскость, как, опять же схематически, показано на рис. 7.78. При таком расширении все точки плоскости после того или иного числа преобразо-

ваний  $T$  переходят внутрь области  $G$  и там остаются. В области  $G$  отображение  $T$  имеет седловую неподвижную точку, инвариантные кривые которой пересекаются, образуя гомоклиническую структуру.

При  $n = 2$  приведены два случая. Первый, когда выполняются равенства

$$j(1, 1) = 2, \quad j(1, 2) = 2, \quad j(2, 1) = 1, \quad j(2, 2) = 1, \\ s(1, 1) = 2, \quad s(1, 2) = 1, \quad s(2, 1) = 2, \quad s(2, 2) = 1,$$

изображен на рис. 7.79 и второй, для которого

$$j(1, 1) = 2, \quad j(1, 2) = 1, \quad j(2, 1) = 2, \quad j(2, 2) = 1, \\ s(1, 1) = 2, \quad s(1, 2) = 2, \quad s(2, 1) = 1, \quad s(2, 2) = 1,$$

показан на рис. 7.80.

Эти случаи соответствуют притягивающим гомоклиническим структурам, состоящим из двух седловых неподвижных точек с различным образом пересекающимися

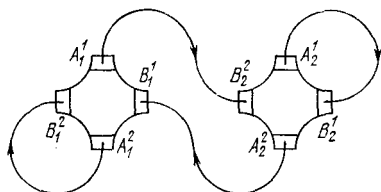


Рис. 7.79

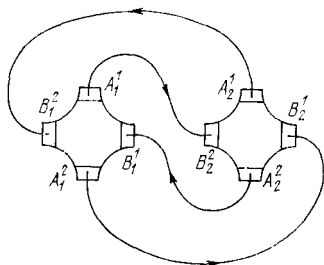


Рис. 7.80

инвариантными кривыми. Соответствующие им отображения  $T$ , так же как и в предыдущем случае, могут быть гладко распространены на всю плоскость.

Некоторые другие возможные виды отображения  $T$  представлены на рис. 7.81, *a, б*.

Пусть  $(u_0, v_0)$  — произвольная точка области  $G$ . Рассмотрим ее последовательные отображения

$$(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots \quad (7.96)$$

Согласно (7.94), последовательность отображений  $T$  представляет собою некоторую последовательность из отображений  $T_i$  и  $L_{ij}^{ks}$ . При этом после каждого из отображений  $L_{ij}^{ks}$  следует не менее чем  $m$  отображений  $T_j$ .

Пусть ради простоты  $m$  — четное число, равное  $2m'$ . Тогда эта последовательность отображений может быть представлена как последовательность, составленная из

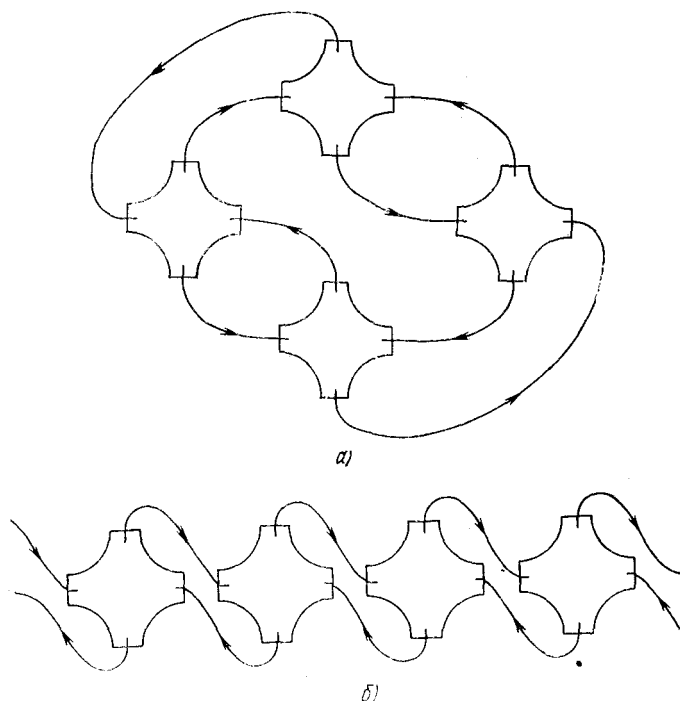


Рис. 7.81

отображений  $T_i^{m'} L_{ij}^{ks} T_j^{m'}$  и  $T_l$ . Отображения  $T_l$  седловые, а отображения  $T_i^{m'} L_{ij}^{ks} T_j^{m'}$  седловые при выполнении условия

$$2\nu^m K < 1, \quad (7.97)$$

где  $K$  — константа Липшица для вспомогательного отображения  $L_{ij}^{ks}$ . Таким образом, если все отображения  $L_{ij}^{ks}$  имеют константу Липшица, меньшую чем  $\frac{1}{2} \nu^{-m}$ , то все траектории отображения  $T$  будут седловыми.

Условие (7.97) можно выполнить, если в отображениях  $L_{ij}^{ks}$  в качестве функции  $\psi(v)$  взять кусочно-гладкую

функцию такую, что график функции  $\psi(\xi)$ , где  $\xi = \frac{1-\nu}{1-\nu}$ , имеет вид, изображенный на рис. 7.82.

Отсутствие у отображения  $T$  устойчивых по Ляпунову траекторий, их седловой характер, приводит к тому, что движение фазовых точек носит блуждающий стохастический характер. Под этим, в частности, имеется в виду стохастический характер блуждания точек последовательности (7.96) по областям  $A_i^k$  и  $B_j^s$  или, что то же, следования друг за другом отображений  $T_i$  и  $L_{ij}^{ks}$ .

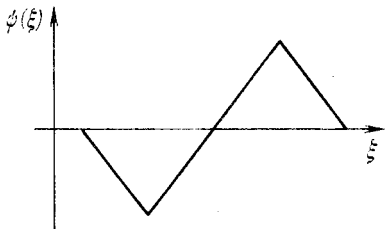


Рис. 7.82

Для гладкого отображения  $T$  условие (7.97) не выполняется. В связи с этим у отображения  $T$  возможны устойчивые установившиеся движения. В некоторых случаях это так и есть, но, по-видимому, возможны и случаи, когда таких движений нет. Во всяком случае, если они и есть, то их области притяжения необычайно малы и их не удастся обнаружить путем численного счета на ЭВМ.

Как уже говорилось, в некоторых случаях точки последовательности (7.96) стохастически блуждают по областям  $A_i^k$  и  $B_j^s$ . Наглядно эти блуждания можно геометрически описать следующим образом. Примем, что число  $m$  достаточно велико, а числа  $\lambda$  и  $\nu$  не слишком близки к единице.

Возьмем любую из областей  $B_j^k$ , преобразованиями  $T$ ; она превращается в тонкую полоску. По мере удлинения этой полоски и попадания ее концов в области  $A_j^1$  и  $A_j^2$  эти концы «отрезаются» и попадают в какие-то области  $B_{j_1}^{k_1}$  и  $B_{j_2}^{k_2}$ . Попав в эти области, каждый из этих кусков снова вытягивается одним из отображений  $T_i$  в тонкую полоску, которая в свою очередь нарезается с концов на куски, поступающие в какие-то области  $B_j^k$  и т. д. Схематически сказанное представлено на рис. 7.83. Блуждание фазовой точки, порождаемое описанным процессом растяжения, нарезания и распределения «направо-налево», весьма напоминает движение горошины по доске Гальтона, приводимое в учебниках как классический пример стохастического процесса.



3. Численные эксперименты на ЭВМ по изучению притягивающих гомоклинических структур. Статистические закономерности описанных выше блужданий могут быть получены путем численного эксперимента. При этом выяснилось, что с достаточным приближением эти блуждания могут быть описаны марковским процессом. Приведем

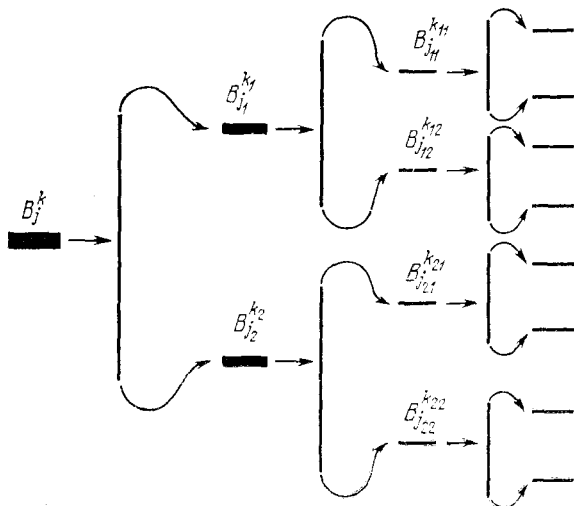


Рис. 7.83

некоторые данные численного эксперимента на ЭВМ с притягивающей гомоклинической структурой, изображенной на рис. 7.77, и с  $m = 3$ ,  $\lambda = 0,8$  и  $\nu = 0,9$ . Блуждание точки при преобразованиях  $T$  записывалось в виде последовательности нулей и единиц. При этом 0 и 1 соответствовали переходам, изображенные на рис. 7.84. Были получены четыре серии по 3240 нулей и единиц в каждой. Ниже в таблице приведены частоты каждого из символов 0 и 1 по каждой из серий. Затем частоты следования символов 0 и 1 после 0 и 1 и, наконец, частоты следования сим-

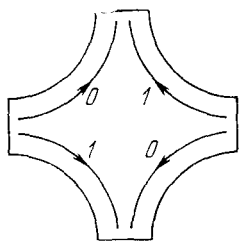


Рис. 7.84

волов 0 и 1 после всевозможных попарных сочетаний 00, 01, 10 и 11. Из этой таблицы видно, что приемлемым является уже описание с помощью марковской цепи с двумя состоя-

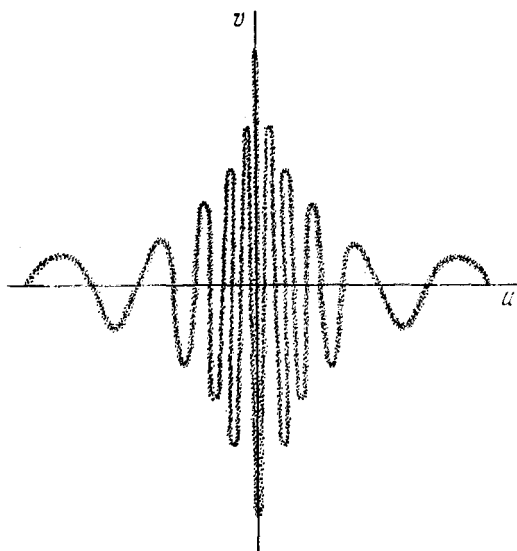


Рис. 7.85

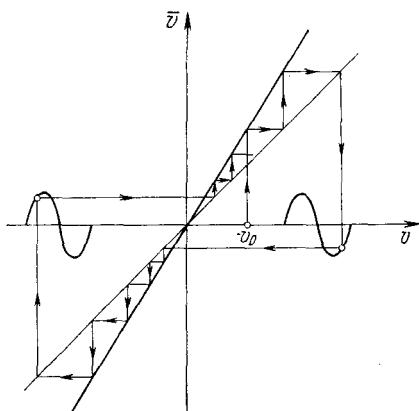


Рис. 7.86

ниями, 0 и 1. Исследование частот следования символов было продолжено и оставило этот вывод без изменений.

На рис. 7.85 изображена область точек, образованная последовательными преобразованиями отображения  $T$ . Как видно из этого рисунка и уравнений точечного отображения  $T$ , оно аппроксимируется отображением прямой

Т а б л и ц а частот следования символов

Символы переходов	Серия испытаний			
	1	2	3	4
0	0,512	0,532	0,524	0,520
1	0,488	0,468	0,476	0,480
0 → 0	0,530	0,564	0,556	0,560
0 → 1	0,470	0,435	0,444	0,439
1 → 0	0,493	0,495	0,489	0,477
1 → 1	0,507	0,505	0,512	0,523
00 → 0	0,526	0,556	0,544	0,538
00 → 1	0,474	0,444	0,456	0,462
01 → 0	0,487	0,499	0,489	0,492
01 → 1	0,513	0,501	0,511	0,508
10 → 0	0,534	0,575	0,572	0,591
10 → 1	0,466	0,425	0,428	0,409
11 → 0	0,500	0,493	0,488	0,462
11 → 1	0,500	0,507	0,512	0,538

в прямую, причем тем лучше, чем больше  $m$  и меньше  $v^m$ . Это точечное отображение прямой в прямую вида

$$\bar{v} = \begin{cases} v^{-1}v & \text{при } |v| \leq v, \\ v^m \psi(v) & \text{при } v < v \leq 1, \\ -v^m \psi^m(-v) & \text{при } -1 \leq v \leq -v. \end{cases} \quad (7.98)$$

При

$$\psi(v) = \sin 2\pi \frac{v-v}{1-v}$$

соответствующая ему диаграмма изображена на рис. 7.86. Точечное отображение (7.98) численно исследовалось. Основная цель исследования состояла в выяснении его установившихся движений и, в частности, их числа. Применяемый способ исследования состоит в следующем.

Пусть в ограниченной области  $G$  задано некоторое точечное отображение  $T$ . Разобьем область  $G$  на области  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ . Пусть  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n$  — преобразования областей  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  и  $P$  — матрица, элемент  $p_{ij}$  которой равен нулю, если пересечение областей  $\bar{\sigma}_i$  и  $\sigma_j$  пусто, и равен единице в противном случае. Матрице  $P$  можно сопоставить граф с  $n$  вершинами  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и направленными ребрами, идущими из вершины  $M_i$  в  $M_j$ , если  $p_{ij} = 1$ .

Две вершины  $M_s$  и  $M_k$  назовем сообщающимися, если из вершины  $M_k$ , двигаясь по ребрам графа в указываемом на них направлении, можно попасть в вершину  $M_s$ , а из вершины  $M_s$  — в вершину  $M_k$ .

Назовем конечным классом множество вершин графа, каждые две вершины которого сообщающиеся и из вершин которого нельзя попасть ни в одну вершину, не принадлежащую этому множеству вершин.

Справедливы следующие утверждения. Число различных установившихся движений не менее числа различных конечных классов графа матрицы  $P$ . Это утверждение следует из того, что области  $G_1, \dots, G_m$ , составленные из областей  $\sigma_i$ , отвечающих различным конечным классам, отображением  $T$  преобразуются в себя и вся область  $G$  после достаточного числа преобразований  $T$  — в объединение областей  $G_1, G_2, \dots, G_m$ , т. е.

$$TG_i \subset G_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (7.99)$$

и существует такое целое число  $p$ , что

$$T^p G \subset \bigcup_{j=1}^m G_j. \quad (7.100)$$

Далее для любых двух различных установившихся движений можно указать настолько малое  $d > 0$ , что при диаметре областей  $\sigma_i$ , не большем  $d$ , они будут принадлежать различным областям  $G_j$ . Это утверждение следует из того, что из принадлежности двух различных установившихся движений одному и тому же множеству  $G_j$  следует, что расстояние между ними менее  $d$ .

На основе изложенного проводилось численное исследование точечного отображения (7.98) при значениях  $\nu$ , равных 0,7, 0,8 и 0,9 и  $m$ , равных 6, 10, 16 и 24. Отрезок  $[-1, +1]$ , на котором определено точечное отображение (7.98), разбивался на  $0,5 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4$  равных частей. Во всех

перечисленных случаях было обнаружено, что все вершины графа образуют единственный концевой класс сообщающихся состояний.

Интересно сопоставить результаты этого численного эксперимента с аналогичным исследованием точечного отображения

$$\bar{x} = \lambda \left( 1 - 4 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \right)$$

отрезка  $[0, \lambda]$  в себя (рис. 7.87).

При  $\lambda = 1$  было обнаружено, что все отрезки составляют единственный класс сообщающихся состояний. При  $\lambda = 0,95$  остался один концевой класс сообщающихся состояний,

однако в него вошла лишь некоторая небольшая часть отрезков, на которые был разбит отрезок  $[0; 0,95]$ . При  $\lambda = 0,9$  появилось уже два концевых класса: один, состоящий из двух отрезков, и второй — из очень большого числа отрезков. Все остальные отрезки вошли в области притяжения либо первого, либо второго концевой класса. При  $\lambda = 0,8$  было обнаружено два концевых класса, каждый из которых включал небольшие числа

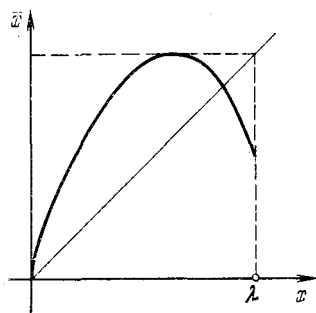


Рис. 7.87

отрезков, а все остальные отрезки попали в области их притяжения.

Отметим, что результат численного исследования при  $\lambda = 1$  согласуется с проведенным ранее аналитическим исследованием этого точечного отображения.

Описанный выше способ численного изучения применялся и к двумерному точечному отображению  $T$  в случаях, изображенных на рис. 7.77, 7.79 и 7.80. При этом были обнаружены случаи с одним-единственным концевым классом, включающим очень большое число областей  $\sigma_i$ .

Заканчивая описание численных экспериментов притягивающих гомоклипических структур, рассмотрим еще движения, принадлежащие областям  $G_1, G_2, \dots, G_m$ , соответствующим различным концевым классам сообщающихся состояний.

Пусть  $G_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} \sigma_i$  и пусть  $P_1$  — матрица пересечений

областей  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_1}$  и их преобразований  $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{n_1}$ . Напомним, что матрица  $P_1$  состоит из элементов  $p_{ij}$ , равных нулю или единице в зависимости от того, пусто или непусто пересечение областей  $\bar{\sigma}_i$  и  $\sigma_j$ .

Пусть  $x_0$  — произвольная точка области  $G_1$  и

$$\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots \quad (7.101)$$

— проходящая через нее фазовая траектория, т. е. последовательные ее преобразования с помощью отображения  $T$ .

Вид матрицы  $P_1$  накладывает определенные ограничения на точечную последовательность (7.101). Именно, если точка  $x_s \in \sigma_i$ , то точка  $x_{s+1}$  может принадлежать области  $\sigma_j$ , лишь если  $p_{ij} = 1$ .

Выполнение этих условий обязательно для фазовой траектории области  $G_1$ . Вместе с тем выполнение их еще не означает, что такая фазовая траектория на самом деле существует. Для того чтобы такие фазовые траектории существовали, необходимо выполнение каких-то дополнительных условий. Метод вспомогательных отображений позволяет указать некоторые такие достаточные условия.

Пусть отображение  $T(u_j, v_j) = T(u_i, v_i)$  допускает вспомогательное отображение  $\tilde{T}$ , преобразующее область  $\tilde{\sigma}_i$  ( $\|u_i\| \leq \delta_i, \|v_j\| \leq \varepsilon_j$ ) в область  $\tilde{\sigma}_j$  ( $\|u_j\| \leq \delta_j, \|v_i\| \leq \varepsilon_i$ .) Пусть это требование выполняется для какого-то числа пар пересекающихся областей, и пусть  $\tilde{P}_1$  — матрица  $P_1$ , у которой оставлены равными единице только те элементы  $p_{ij}$ , для которых соответствующая пара пересекающихся областей  $\bar{\sigma}_i$  и  $\sigma_j$  удовлетворяет этому предположению. Тогда для любой последовательности областей

$$\dots, \sigma_{i_{-1}}, \sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots \quad (7.102)$$

такой, что элементы  $p_{i_s i_{s+1}}$  матрицы  $\tilde{P}_1$  равны единице для всех  $s$ , существует фазовая траектория (7.101) такая, что  $x_k \in \sigma_{i_k}$  для всех  $k$ . Это утверждение допускает применение к рассматриваемым ранее примерам.

Вернемся к общему рассмотрению притягивающих гомоклинических структур и порождаемых ими стохастических движений.

Приводимые выше примеры притягивающих структур были получены либо путем малых возмущений консервативных систем, либо путем специальным образом строящихся точечных отображений,

Очень хорошим примером конкретной системы, в которой реализуется притягивающая гомоклиническая структура, представляющаяся в виде одной из схем рис. 7.79, являются получившие широкую известность уравнения Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

возникшие как весьма упрощенное трехмодовое описание конвективного течения жидкости между двумя горизонтальными разно нагретыми плоскостями. К частному случаю уравнений Лоренца с  $b = 1$  можно прийти, рассматривая циркуляцию жидкости в круговой вертикально поставленной трубке, подогреваемой снизу.

Интересующая нас гомоклиническая структура возникает, например, при  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 24,06$ . Рассматривать ее удобно с помощью секущей плоскости  $z = r - 1$ . При этих значениях параметров точечное отображение на секущей имеет две седловые неподвижные точки  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , через которые

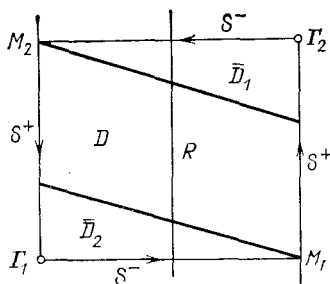


Рис. 7.88

проходят инвариантные кривые  $S^+$  и  $S^-$  (рис. 7.88).

Важнейшей особенностью этого точечного отображения на секущей является наличие линии разрыва  $R$ , по разные стороны которой определены гладкие точечные отображения  $T_1$  и  $T_2$ . Точечное отображение  $T_1$  преобразует линию  $R$  в точку  $M_1$ , а точечное отображение  $T_2$  — ее же в точку  $M_2$ , так что вся четырехугольная область  $D$ , ограниченная кривыми  $S^+$  и  $S^-$ , преобразуется в две клиновидные области  $\bar{D}_1$  и  $\bar{D}_2$ . Области  $\bar{D}_1$  и  $\bar{D}_2$  лежат внутри области  $D$ . Затем при повторном преобразовании каждая из них преобразуется в две области  $\bar{D}_{11}$ ,  $\bar{D}_{12}$  и  $\bar{D}_{21}$ ,  $\bar{D}_{22}$  соответственно и т. д. При каждом преобразовании какая-то часть области, лежащей вне области  $D$ , преобразуется внутрь нее. Таким образом, перед нами притягивающая гомоклиническая структура, предельное множество которой лежит внутри области  $D$  и при этом отображение внутри области  $D$  седловое.

Такое притягивающее и одновременно локально неустойчивое инвариантное множество получило наименование странного аттрактора — странного притягивающего множества.

Целью дальнейшего является обнаружение естественности возникновения притягивающих гомоклинических структур у многомерных динамических систем, обычности их как установившихся движений. Этой цели может служить рассмотрение малых неавтономных возмущений двумерной динамической системы. Вопрос имеет самостоятельный интерес, поскольку речь идет о простейшей модели взаимодействия динамических систем.

**4. Неавтономные системы, близкие к автономным.** Как известно, качественная картина разбиения фазовой плоскости грубой автономной системы второго порядка

$$\dot{x} = X(x, y, \lambda), \quad (7.103)$$

$$\dot{y} = Y(x, y, \lambda)$$

полностью определяется ее состояниями равновесия, периодическими движениями и сепаратрисными кривыми седловых состояний равновесия. Перейдем от автономной системы (7.103) к возмущенной неавтономной системе

$$\dot{x} = X(x, y, \lambda) + \mu f(x, y, t, \mu),$$

$$\dot{y} = Y(x, y, \lambda) + \mu g(x, y, t, \mu).$$

$$(7.104)$$

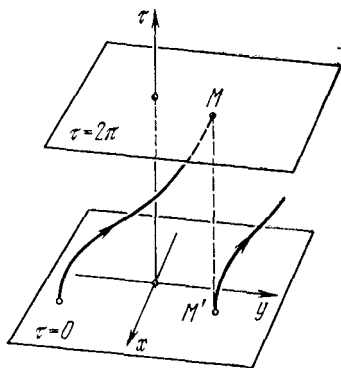


Рис. 7.89

Ее фазовое пространство трехмерно и состоит из переменных  $x$ ,  $y$  и  $t$ . В силу предполагаемой периодичности по  $t$  с периодом  $2\pi$  это трехмерное фазовое пространство по переменной  $t$  представляет собой слой ширины  $2\pi$  с отождествленными точками граничных плоскостей. В изображенном на рис. 7.89 фазовом пространстве фазовыми переменными являются  $x$ ,  $y$  и  $\tau = t - [t/(2\pi)]$ , где  $[t/(2\pi)]$  означает целую часть числа  $t/(2\pi)$ . Там же изображена одна из фазовых кривых; при этом ее точки  $M$  и  $M'$  отождествлены. При  $\mu = 0$  уравнения (7.104) становятся автономными. Ясно, что и их решения также можно изображать в пространстве переменных  $x$ ,  $y$ ,  $\tau$ . При этом состояния равновесия и периодические движения изобразятся



соответственно отрезком  $O$  и цилиндрической двумерной поверхностью с отождествленными точками, т. е. замкнутой «кривой»  $O$  и тороидальной двумерной поверхностью  $\Gamma$ , показанными на рис. 7.90, *a*. На рис. 7.90, *б* показано изображение в пространстве переменных  $x$ ,  $y$  и  $t$  седлового периодического движения и его сепаратрисных кривых, которые теперь изображаются двумерными поверхностями  $S_2^-$  и  $S_2^+$ .

Поведение остальных кривых, изображающих решения автономного уравнения (7.103), определяется перечисленными элементами  $O$ ,  $\Gamma$ ,  $S_2^+$  и  $S_2^-$ . Именно, всякая кривая

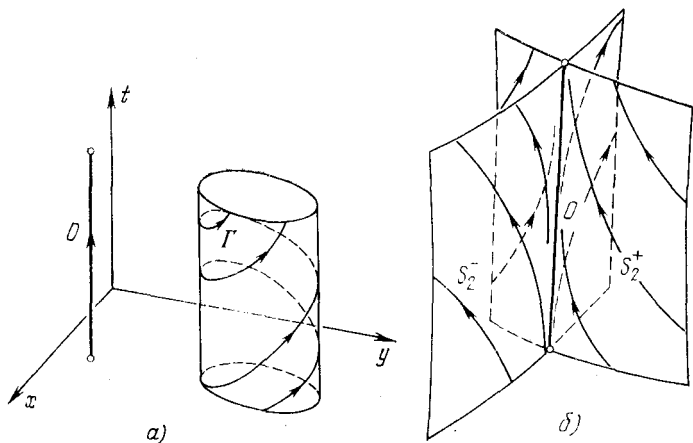


Рис. 7.90

при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  отходит от одного из неустойчивых элементов  $O$  или  $\Gamma$  и подходит к одному из устойчивых элементов  $O$  или  $\Gamma$ . Это позволяет все возможные движения изобразить схемой, где верхние кружочки означают неустойчивые состояния равновесия и периодические движения, нижние — устойчивые. Каждый переход от верхнего кружочка к нижнему изображает соответствующие движения. Разветвления в этих переходах соответствуют разделению потоков кривых какими-то сепаратрисными поверхностями седловых состояний равновесия. Так, структуре разбиения, изображенной на рис. 7.91, соответствует схема рис. 7.92.

До сих пор  $\mu$  равнялось нулю и соответствующая автономная система была грубой. Пусть теперь  $\mu$  немного изме

нилось. Что при этом произойдет со всей описанной картиной поведения фазовых траекторий? Оказывается, ничего [15]. Точнее, отрезки прямых, изображающие состояния равновесия, немного сместятся и изогнутся, торы, изображающие периодические движения, превратятся в близкие к ним интегральные тороидальные многообразия. Асимптотическое поведение всех остальных

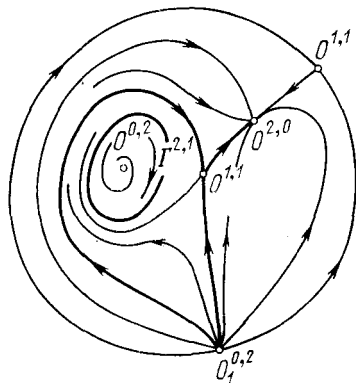


Рис. 7.91

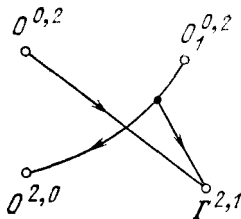


Рис. 7.92

фазовых траекторий, изображаемое соответствующей схемой (как на рис. 7.92), останется прежним. Вместе с тем поведение фазовых траекторий на интегральной поверхности, вообще говоря, претерпит существенные изменения; при этом изменится и характер приближения фазовых траекторий к устойчивым интегральным поверхностям. Пренебрегая этими изменениями, можно считать, что при малых  $\mu$  и при  $\mu = 0$  разбиения фазового пространства на траектории качественно одинаковы.

**5. Синхронизмы разных порядков.** Перейдем к вопросу о том, какова структура движений на торе  $\Gamma$ , соответствующем асимптотически устойчивому (в линейном приближении) периодическому движению автономной системы. После соответствующей замены переменных уравнения движения автономной системы (7.103) в окрестности периодического движения  $\Gamma$  могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega + r\Phi(\varphi, r), \\ \dot{r} &= -\alpha r + \beta(\varphi, r)r^2. \end{aligned} \quad (7.105)$$

Здесь  $2\pi/\omega$  — период периодического движения  $\Gamma$  и  $\alpha > 0$ . Геометрический смысл переменных  $\varphi$  и  $r$  указан на рис. 7.93. В этих же переменных неавтономные уравнения (7.104)

в окрестности  $\Gamma$  запишутся в виде

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega + r\Phi(\varphi, r) + \mu f(\varphi, r, \tau, \mu), \\ \dot{r} &= -\alpha r + \beta(\varphi, r)r^2 + \mu g(\varphi, r, \tau, \mu).\end{aligned}\quad (7.106)$$

При достаточно малых  $\mu$  у этих уравнений сохраняется существование гладкой, непрерывно зависящей от  $\mu$  тороидальной интегральной поверхности. Ее уравнения имеют вид

$$r = \mu R(\varphi, \tau, \mu). \quad (7.107)$$

Подставляя (7.107) в (7.106), найдем уравнение фазовых траекторий на интегральной тороидальной поверхности (7.107):

$$\dot{\varphi} = \omega + \mu\Phi_1(\varphi, \tau, \mu). \quad (7.108)$$

Уравнение (7.108) определяет точечное отображение  $T_{2\pi}$  окружности  $r = 0$  в себя:

$$\bar{\varphi} = \varphi + 2\pi\omega + \mu F(\varphi, \mu), \quad (7.109)$$

где  $F(\varphi, \mu)$  — периодическая, периода  $2\pi$ , функция  $\varphi$ . Такое отображение окружности в себя в грубом случае исследовалось А. Г. Майером [33]. Отображение  $T_{2\pi}^q$  будет такого же вида, как и (7.109), с той лишь разницей, что  $2\pi\omega$  заменится на  $2\pi\omega q$ . Поэтому в случае резонанса, когда  $\omega = p/q$ , отображение  $T_{2\pi}^q$  примет вид (7.109), но без члена с  $\omega$ . Преобразование (7.109) с  $\omega = 0$  может быть легко изучено, как это видно из диаграммы, изображенной на рис. 7.94. При этом нужно иметь в виду, что если  $\varphi^*$  — неподвижная точка отображения  $T_{2\pi}^q$ , то и точки

$$T_{2\pi}^q \varphi^* = \varphi^* + 2\pi\omega k + \mu(\dots) \quad (k = 1, 2, \dots, q-1)$$

также будут неподвижными точками. Поэтому точечное отображение  $T_{2\pi}^q$  имеет какое-то четное число  $2m$  групп неподвижных точек по  $q$  точек в каждой. Эти точки в общем случае поочередно устойчивые и неустойчивые. Для исходного преобразования (7.109) это означает наличие некоторого четного числа циклов устойчивых и неустойчивых неподвижных точек кратности  $q$ . В соответствии

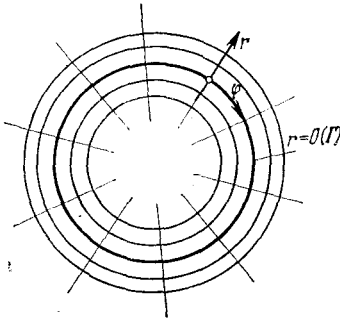


Рис. 7.93

с выясненным  $q$ -я итерация точечного отображения (7.109) окружности в себя при  $p = 1$ ,  $q = 3$  и  $m = 1$  имеет вид, показанный на рис. 7.95. Маленькие кружки соответствуют устойчивым трехкратным неподвижным точкам отображения (7.109), точки, отмеченные крестиками, неустойчивым трехкратным неподвижным точкам.

В фазовом пространстве  $x$ ,  $y$ ,  $\tau$  цикла устойчивых  $q$ -кратных неподвижных точек соответствует устойчивое периодическое движение периода  $2\pi q$  (рис. 7.96), успеваю-

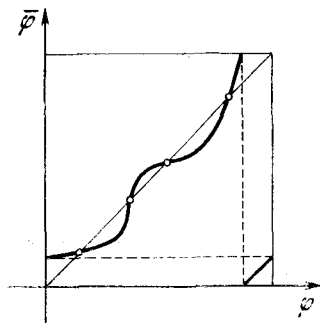


Рис. 7.94

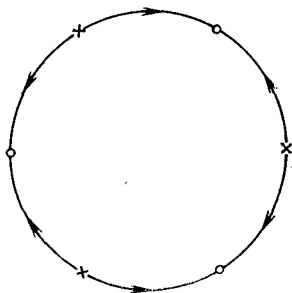


Рис. 7.95

щее за это время  $p$  раз обернуться по переменной  $\varphi$ . Напомним, что у соответствующего периодического движения автономной системы происходит один оборот по  $\varphi$  за время, равное  $2\pi q/p$ , и что  $2\pi$  — период внешнего воздействия.

Таким образом, согласно изложенному, при достаточно малом  $\mu$  возникает синхронизация автоколебательного движения и внешнего воздействия, эта синхронизация порядка  $p/q$ , когда в периоде возникшего периодического движения укладывается  $p$  периодов автоколебания автономной системы и  $q$  периодов внешней силы. Сказанное справедливо только при достаточно малых  $\mu$ , вообще говоря, тем меньших, чем больше  $q$ . Поэтому для синхронизмов высокого порядка (большое  $q$ ) сказанное может оказаться справедливым лишь при очень маленьких  $\mu$ . Что же будет при некотором одном и том же малом  $\mu$ , но для разных  $\omega$ ? Этот вопрос сводится к исследованию зависимости от параметра так называемого числа вращения Пуанкаре  $\gamma$ . При естественном предположении общего случая число

вращения  $\gamma$  зависит от  $\omega$ , как показано на рис. 7.97. Эта зависимость непрерывная и кусочно-постоянная. Каждому отрезку постоянства числа вращения  $\gamma$  соответствует синхронизм порядка  $p/q$  с некоторой областью захвата ( $\underline{\omega}$ ,  $\bar{\omega}$ ) по частоте  $\omega$  собственных колебаний автономной системы.

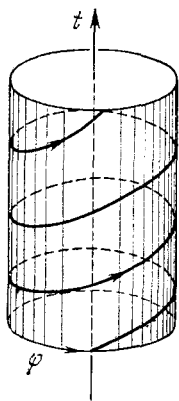


Рис. 7.96

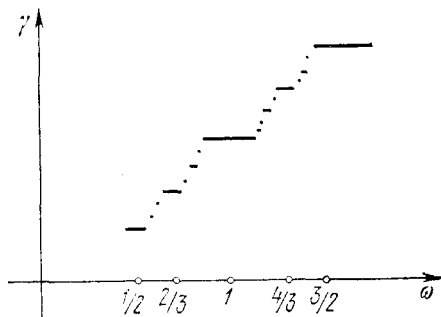


Рис. 7.97

Если бы фиксировать частоту  $\omega$  и менять частоту  $\omega_0$  внешнего воздействия, которая была до этого равна единице, то характер зависимости числа вращения Пуанкаре  $\gamma$  от  $\omega_0$  будет такой же, как и от  $\omega$ .

6. Стохастический синхронизм [42]. Рассмотрим теперь систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega + \mu \left\{ \frac{\partial H}{\partial r} + \nu H \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right\} + \mu^2 f(\varphi, r, \tau, \mu), \\ \dot{r} &= \mu \left\{ -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \nu H \frac{\partial H}{\partial r} \right\} + \mu^2 g(\varphi, r, \tau, \mu), \end{aligned} \quad (7.110)$$

где  $\omega = p/q$  и функция  $H = H(\varphi, r)$  периодическая, периода  $2\pi/q$ , по  $\varphi$ . После перехода к новой переменной  $\psi = \varphi - \omega t$  уравнения (7.110) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \mu \left\{ \frac{\partial H}{\partial r} + \nu H \frac{\partial H}{\partial \psi} \right\} + \mu^2 f(\psi, r, \tau, \mu), \\ \dot{r} &= \mu \left\{ -\frac{\partial H}{\partial \psi} + \nu H \frac{\partial H}{\partial r} \right\} + \mu^2 g(\psi, r, \tau, \mu), \end{aligned} \quad (7.111)$$

где  $H = H(\psi + \omega t, r)$ . Для исследования этих уравнений рассмотрим точечное отображение  $T_{2\pi}$  плоскости  $\tau = 0$

в себя, порождаемое его фазовыми траекториями. Это точечное отображение можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \psi + \mu\Phi_1(\psi, r) + \mu^2\Phi_2(\psi, r, \tau, \mu), \\ \bar{r} &= r + \mu R_1(\psi, r) + \mu^2 R_2(\psi, r, \tau, \mu),\end{aligned}\quad (7.112)$$

причем после отбрасывания членов с  $\mu^2$  оно является точечным отображением  $T_{2\pi}$  для автономных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \mu \left\{ \frac{\partial H}{\partial r} + \nu H \frac{\partial H}{\partial \psi} \right\}, \\ \dot{r} &= \mu \left\{ -\frac{\partial H}{\partial \psi} + \nu H \frac{\partial H}{\partial r} \right\}.\end{aligned}\quad (7.113)$$

Конкретизируем вид функций  $H$ . Пусть

$$H(\psi, r) = r^2 + \lambda \sin q\psi - \lambda \quad (\lambda > 0), \quad (7.114)$$

тогда при  $\nu = 0$  разбиение фазовой плоскости на траектории имеет вид, показанный на рис. 7.98.

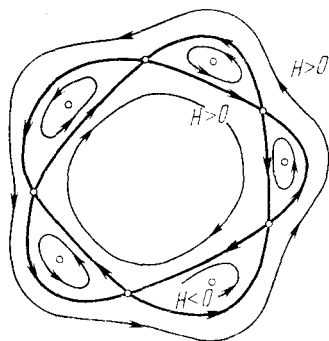


Рис. 7.98

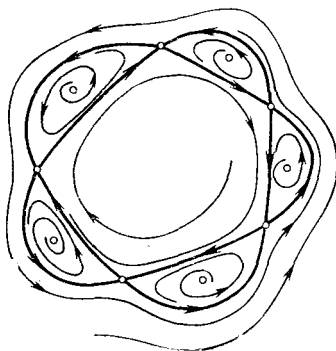


Рис. 7.99

Изображенные на рис. 7.98 фазовые траектории описываются уравнением

$$H(\psi, r) = r^2 + \lambda \sin q\psi - \lambda = \text{const.} \quad (7.115)$$

На сепаратрисах седел  $H = 0$ . В каждой из областей, на которые сепаратрисы разбивают плоскость, знаки  $H$  указаны на рис. 7.98.

Влияние добавочного члена в уравнении (7.113) с параметром  $\nu$  можно интерпретировать как поворот поля в положительном направлении при  $\nu H > 0$  и отрицательном при  $\nu H < 0$ . В соответствии с этим при  $\nu > 0$  фазовые

траектории имеют вид, представленный на рис. 7.99. Тем самым установлен характер точечного отображения (7.112) с точностью до членов порядка  $\mu^2$ . Сепаратрисные кривые на рис. 7.99 являются инвариантными кривыми седловых неподвижных точек отображения (7.113). За счет добавков порядка  $\mu^2$  они уже не будут идти из седла в седло. В одном

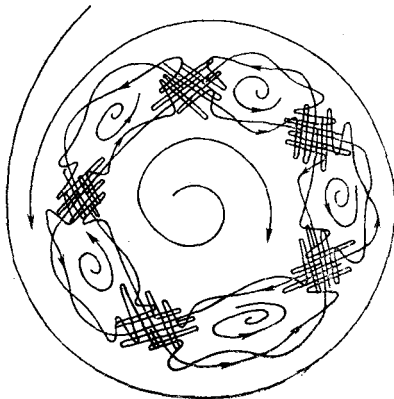


Рис. 7.100

из общих случаев они будут пересекаться, образуя некоторую гомоклиническую структуру\*), изображенную на рис. 7.100.

Направления движения последовательных положений фазовой точки через интервалы времени  $2\pi$  в этой окрестности показаны на рис. 7.101, а. Вблизи седловых точек возможно случайное разветвление движения, в этом, собственно, и состоит в основном случайный характер ее движения

(рис. 7.101, б). При каждом проходе вблизи седловой точки фазовая точка имеет два варианта движения. Одно обозначим  $\alpha$ , другое  $\beta$ . Тогда каждое движение в этой окрестности изобразится некоторой последовательностью символов вида

$$\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha\dots \quad (7.116)$$

Статистическое описание этой случайной последовательности можно получить, вводя вероятности появления символов  $\alpha$  и  $\beta$  после некоторого числа тех или иных символов, причем это описание будет тем более точным, чем больше число учитываемых предшествующих символов. При

\*) Отметим, что это пересечение сепаратрис не может быть обнаружено асимптотическими методами ни в каком приближении, так как, согласно [41], приближение асимптотического метода состоит в замене исследования точечного отображения  $T_{2\pi}$  рассмотрением отображения сдвига некоторой автономной системы. Отсюда следует и то, что ширина коридоров рис. 7.101, а при  $\mu \rightarrow 0$  менее любой степени  $\mu$ .

наиболее грубом описании вводятся вероятности  $p(\alpha)$  и  $p(\beta)$ ; следующее, несколько более полное описание основывается на вероятностях

$$p(\alpha/\alpha), p(\alpha/\beta), p(\beta/\alpha) \text{ и } p(\beta/\beta), \text{ и т. д.}$$

В первом случае перед нами процесс независимых испытаний, во втором — марковский процесс с двумя состояниями.

Вернемся к исходным уравнениям (7.110) для (7.114). При  $\lambda = 0$  они принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega + 2\mu r + \mu^2 \bar{f}(\varphi, r, \tau, \mu), \\ \dot{r} &= -2\mu\nu r^3 + \mu^2 \bar{g}(\varphi, r, \tau, \mu), \end{aligned} \quad (7.117)$$

и соответствующее автономное уравнение имеет негрубый устойчивый ( $\mu\nu > 0$ ) предельный цикл  $r = 0$ . При неавтономном периодическом его возмущении и  $\lambda > 0$  возможно возникновение в его окрестности устойчивого установившегося движения, для которого переменная  $\varphi = \omega t + \psi$ , где изменение фазы  $\psi$  является случайным и может быть с той или иной степенью точности описано статистически. Это устойчивое установившееся движение является грубым образованием, структура которого не меняется от любых, достаточно малых гладких автономных и неавтономных периодических возмущений.

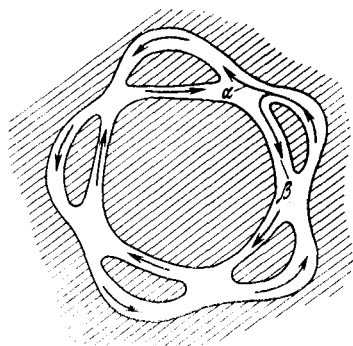
Выбранный выше специальный способ возмущений показывает возможность перехода от тороидального интегрального многообразия с каким-то синхронизмом на нем к движению, названному стохастическим синхронизмом. Этот переход в пространстве параметров можно осуществлять и другими способами.

Рассмотрим в качественном плане, какие при этом могут происходить изменения.

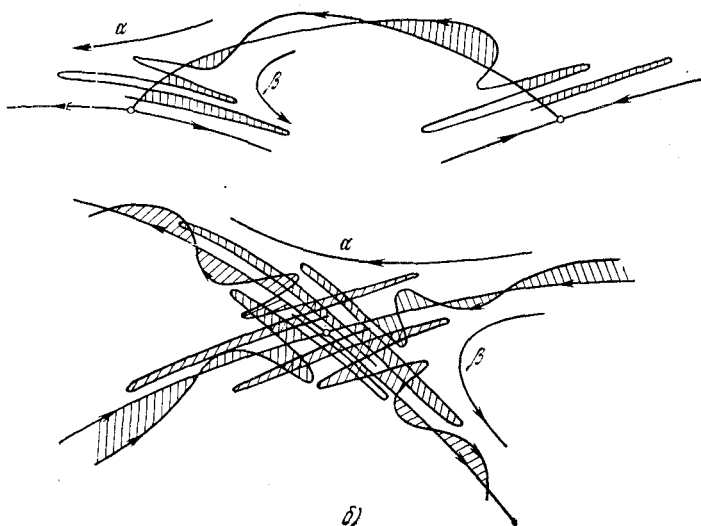
**7. Бифуркации синхронизмов.** Выбранный выше специальный путь был удобен тем, что он позволил увидеть структуру возникающего нового установившегося движения, но поскольку множество стохастических синхронизмов образует в пространстве параметров область, то переход от обычного синхронизма к стохастическому возможен и общим образом.

Итак, речь идет о том, каким образом осуществляется общий переход от картинке рис. 7.102, где изображен обычный синхронизм, к картинке рис. 7.100 с изображением стохастического синхронизма.





a)



б)

Рис. 7.101

Сделаем несколько общих замечаний, касающихся преобразования плоскости в плоскость. На рис. 7.102 и 7.100 показано поведение последовательных преобразований точек плоскости в плоскость при обычном и стохастическом синхронизмах. Эти картинки похожи на изображение разбиения фазовой плоскости на траектории.

Однако на них кривые изображают не траектории движения фазовых точек. Траекторией движения точки для точечного отображения плоскости в плоскость является последовательность точек, в которой каждая следующая точка получается преобразованием предыдущей. Это инвариантные кривые точечного отображения, т. е. кривые, которые при преобразовании переходят в себя. Поэтому, если

на такой кривой лежит какая-нибудь точка последовательности, то на ней лежат и все ее точки, причем они расположены на ней с сохранением порядка. Порядок следования точек последовательности определяет некоторое направление на инвариантной кривой, которое на рис. 7.102 и 7.100 отмечено стрелками. Рис. 7.102 с изображением инвариантных кривых при обычном синхронизме можно было бы рассматривать и как разбиение фазовой плоскости системы некоторых дифференциальных уравнений. При этом неподвижные точки трактовались бы как состояния равновесия—седловые и узловые. Напротив, на рис. 7.100 имеются существенные отличия от того, что может быть на фазовой плоскости. Это отличие состоит в наличии пересечений инвариантных кривых, чего с фазовыми траекториями быть не может. Это отличие состоит еще и в том, как ведет себя сепаратрисная инвариантная кривая: она проходит вблизи себя туда и обратно, имеет сколь угодно крутые повороты. Вместе с тем сама себя она не пересекает, она пересекается с другой сепаратрисной инвариантной кривой.

Таким образом, разбиение плоскости инвариантными кривыми точечного отображения дает наглядное о нем

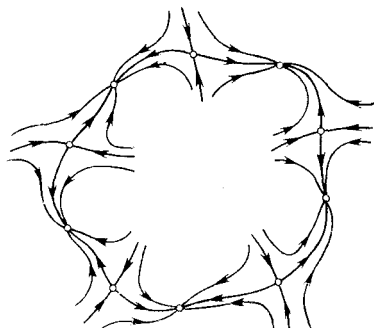


Рис. 7.102

представление и может быть полезным для его исследования. Во многом оно похоже на разбиение фазовой плоскости на траектории. Однако имеются и существенные отличия.

Сформулируем основные свойства разбиения плоскости на инвариантные кривые. Прежде всего заметим, что задание фазовой точки в случае, когда ее движение задается дифференциальными уравнениями, однозначно определяет проходящую через нее фазовую кривую. Такого положения для инвариантных кривых нет. Задание точки  $M_0$  определяет лишь последовательность точек

$$\dots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \dots,$$

через которую эта инвариантная кривая должна проходить. Через эту последовательность точек проходит бесчисленное множество различных инвариантных кривых. Соединим две точки, именно  $M_0$  и  $M_1$ , любой кривой  $\gamma$ . Преобразования  $T^i\gamma$  ( $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) образуют инвариантную кривую. Какую же инвариантную кривую выбрать? Естественно выбрать ту, которая наиболее удобна для изображения точечного отображения и полезна для его исследования. Исходя из этих соображений, будем выбирать инвариантные кривые, стремясь к тому, чтобы они не самопересекались. Заметим, что из самопересечения инвариантной кривой  $\gamma$  в точке  $M$  следует наличие бесконечной последовательности точек самопересечения  $T^i M$  ( $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) по одной на каждом «такте» инвариантной кривой. Тактом инвариантной кривой назван любой ее отрезок, заключенный между точками  $x$  и  $Tx$ . Аналогично из взаимного пересечения двух инвариантных кривых в одной точке следует наличие бесчисленного числа их взаимопересечений по одной на каждом такте каждой из инвариантных кривых. Далее, из наличия этих бесконечных последовательностей точек пересечения может следовать наличие еще других пересечений и т. д.

Для неподвижных точек достаточно гладкого в их окрестности точечного отображения справедливы следующие утверждения. В окрестности неустойчивой (устойчивой) узловой неподвижной точки существует заполняющее ее множество несамопересекающихся гладких выходящих (входящих) из нее инвариантных кривых. Такое же утверждение имеет место и для неподвижной точки типа фокуса, с той лишь разницей, что гладкость кривых не будет равномерной. Эти инвариантные кривые по своему

виду такие же, как фазовые траектории в окрестности узлового состояния равновесия и фокуса. В окрестности седловой неподвижной точки имеются четыре гладкие инвариантные кривые — две входящие и две выходящие. Окрестность седловой особой точки также может быть заполнена семейством гладких инвариантных кривых, однако

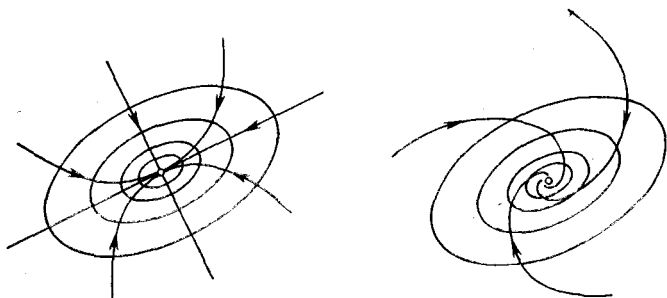


Рис. 7.103

лишь четыре из них оканчиваются или начинаются в неподвижной точке. Все это также находится в полной аналогии с фазовыми траекториями в окрестности седлового состояния равновесия. Заметим еще, что окрестности узловой неподвижной точки и фокуса можно заполнить гладкими замкнутыми преобразующимися друг в друга кривыми (рис. 7.103), а окрестность седловой неподвижной точки — семействами переходящих друг в друга гладких кривых, включающих в себя инвариантные сепаратрисные кривые (рис. 7.104).

Сказанное позволяет указать инвариантные кривые точечного отображения, которые не могут самопересекаться, — это продолжения инвариантных кривых неподвижных узловой точки и фокуса, а также сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки.

Перейдем теперь к вопросу о взаимных пересечениях этих инвариантных кривых. Инвариантные кривые, полученные продолжением локальных инвариантных кривых неподвижных точек, стремящихся либо в сторону возрастания времени, либо в сторону его убывания к одной и той же неподвижной точке, не взаимнопересекаются. Таким образом, могут пересекаться только инвариантные кривые, имеющие различное асимптотическое поведение, как при возрастании времени, так и при его убывании.

Из этого факта следует, что динамическая система, определяемая точечным отображением плоскости в плоскость с простейшими установившимися движениями и некротными неподвижными точками, может быть описана дифференциальными уравнениями второго порядка тогда

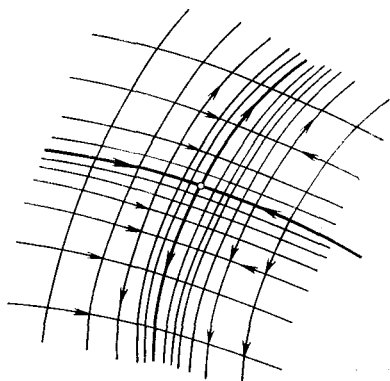


Рис. 7.104

и только тогда, когда ее сепаратрисные кривые седловых неподвижных точек не взаимопересекаются. Заметим, что требованию некротности можно всегда удовлетворить, заменяя отображение некоторой его степенью. На рис. 7.105 приведены точечные отображения с простейшими установившимися движениями. У одного из них сепаратрисные инвариантные кривые седловых неподвижных точек не пере-

секаются, и оно может быть описано дифференциальными уравнениями второго порядка, причем без периоди-

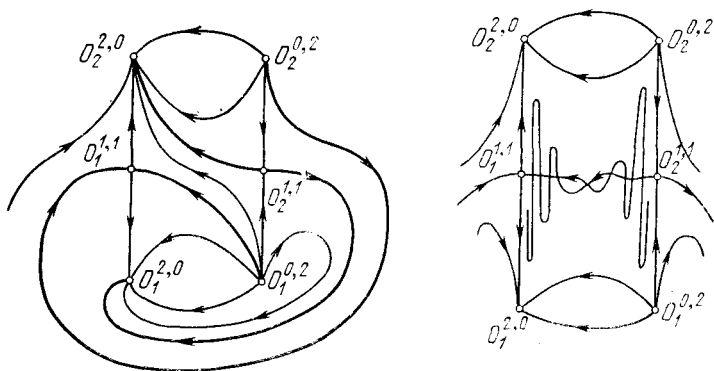


Рис. 7.105

ческих движений. У второго такие пересечения имеются, и оно уже не может быть описано дифференциальными уравнениями второго порядка.

Это утверждение, очевидно, обобщается на точечные отображения любой размерности. При этом требование отсутствия взаимных пересечений сепаратрисных инвариантных кривых заменяется требованием непересекаемости всех инвариантных кривых седловых неподвижных точек.

Напомним, что от точечного отображения требуется, чтобы любая его точка при ее преобразовании как в сторону убывания, так и возрастания времени стремилась к одной из конечного числа некратных неподвижных точек.

К сказанному следует сделать одно важное добавление. Выше были сформулированы условия, при которых точечное отображение можно представить как отображение сдвига некоторого дифференциального уравнения. Однако при этом даже для сколь угодно гладкого отображения  $T$  нельзя гарантировать гладкости соответствующих дифференциальных уравнений. Объясняется это тем, что гладкие инвариантные кривые, выходящие из неустойчивых или седловых неподвижных точек, остаются гладкими при их продолжении, но эта гладкость, вообще говоря, неравномерная.

Поэтому приближение гладких инвариантных кривых к устойчивым неподвижным точкам может иметь особенности, не свойственные фазовым кривым состояний равновесия гладких дифференциальных уравнений. Рассмотрим

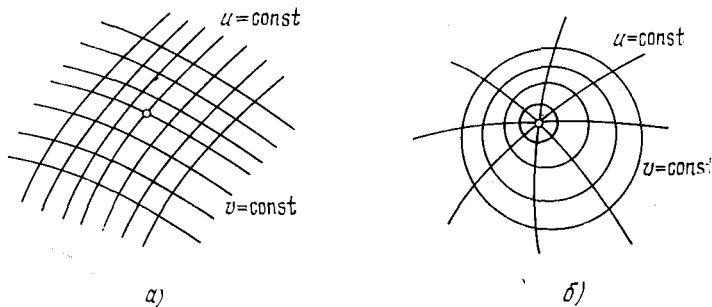


Рис. 7.106

этот вопрос несколько подробнее. Введем в окрестностях неподвижных точек приспособленные к ним локальные системы координат видов, показанных на рис. 7.106, а для узлов и седел и на рис. 7.106, б для фокусов. Координатные линии этих систем координат гладкие и перехо-

дят при преобразовании друг в друга, поэтому точечные отображения в них приобретают вид  $\bar{u} = \lambda u$ ,  $\bar{v} = \nu v$  ( $|\lambda| \neq 1$ ,  $|\nu| \neq 1$ ) для узлов и седел и вид  $\bar{u} = u + \alpha$ ,  $\bar{v} = \nu v$  для фокусов.

Если из одной неподвижной точки  $O_1$  идет инвариантная кривая  $\gamma$  в другую неподвижную точку  $O_2$ , то существуют в окрестностях точек  $O_1$  и  $O_2$  точки  $M_1$  и  $M_2$ , преобразующиеся друг в друга после некоторого числа  $m$  повторений отображения  $T$ . Пусть  $\varepsilon$  — окрестность точки  $M_1$ , частью границы которой являются переходящие друг в друга при отображении  $T$  координатные линии.

Рассмотрим отображение части  $\tilde{\gamma}$  кривой  $\gamma$ , лежащей в окрестности  $\varepsilon$ , в окрестность точки  $M_2$ .

Пусть точка  $O_2$  узловая и пусть для определенности  $1 > \lambda > \nu$ . Отрезок кривой  $\tilde{\gamma}$  отобразится в некоторый гладкий отрезок кривой  $\bar{\tilde{\gamma}}$  с уравнением  $v = \varphi(u)$  (рис. 7.107). При последующем  $m$ -кратном применении

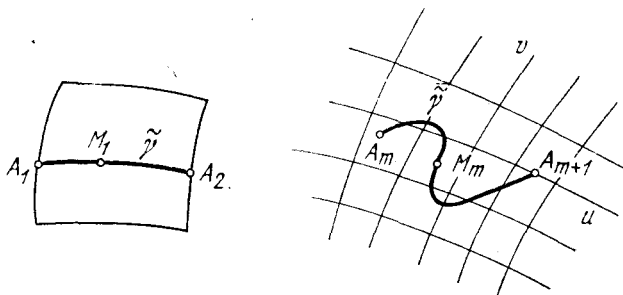


Рис. 7.107

преобразования  $T$  отрезок кривой  $\tilde{\gamma}$  перейдет в отрезок кривой с уравнением  $v = \nu^m \varphi(\lambda^{-m} u)$ . При возрастании  $m$  в зависимости от того, однозначна функция  $\varphi$  или многозначна, возможны два разных случая. В первом случае последовательные отображения отрезка  $\tilde{\gamma}$  составляют гладкую кривую, входящую в точку  $O_2$ , касающуюся оси  $v = 0$  (рис. 7.108). Напротив, во втором случае получающаяся кривая не имеет предельной касательной. Она имеет вид, показанный на рис. 7.109. При этом вспомогательное отображение  $T^m$  многозначное. В первом случае, напротив, это отображение однозначное.

В случае, когда неподвижная точка  $O_2$  — фокус, также приходим к двум различным случаям в зависимости

от однозначности или многозначности вспомогательного отображения  $\tilde{T}^m$ . Таким образом, если при преобразовании  $T^m$  из локальной системы координат одной неподвижной точки в локальную систему координат другой или той

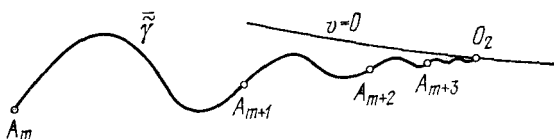


Рис. 7.108

же самой неподвижной точки вспомогательное отображение  $\tilde{T}^m$  многозначное, то у инвариантной кривой появляются особенности, заведомо не свойственные фазовым

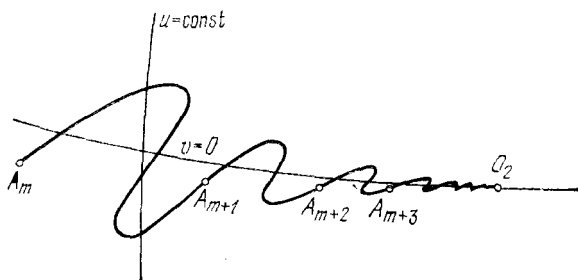


Рис. 7.109

кривым достаточно гладких дифференциальных уравнений.

Вернемся к вопросу о переходе обычного синхронизма в стохастический при общем непрерывном изменении параметров. Прежде всего заметим, что для обоих синхронизмов существенной характеристикой является число вращения  $\omega$ .

Рассмотрим отдельно изменения, которые могут происходить при фиксированном  $\omega$  и при изменении  $\omega$ .

Пусть  $\omega$  не меняется и не происходит бифуркаций слияния неподвижных точек. Тогда возможные изменения будут состоять только в изменениях неподвижных точек и расположениях сепаратрисных кривых. При этом седловые точки должны оставаться седловыми. А узлы могут переходить в фокусы и обратно. Фокус может сменить устойчивость, и при этом от него отделится либо обычный,



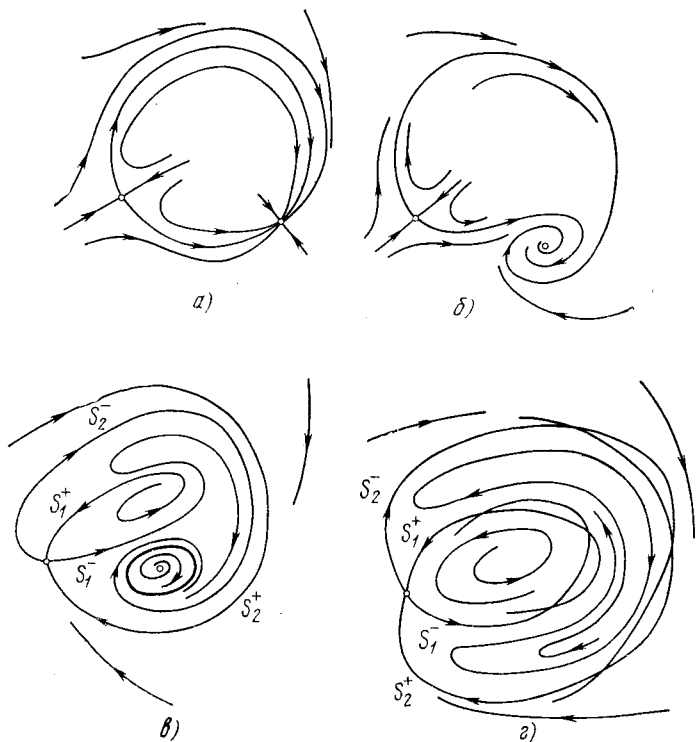


Рис. 7.110



Рис. 7.111

либо стохастический синхронизм. При смене взаимного расположения сепаратрис может произойти возникновение стохастического синхронизма. Эта бифуркация в суженном виде будет в дальнейшем рассмотрена отдельно. Сейчас же ограничимся ее изображением на рис. 7.110.

На рис. 7.110 изображены последовательные стадии перехода через общие бифуркации от обычного синхронизма к стохастическому. При переходе от рис. *а* к *б* происходит смена узла на фокус. Затем (рис. 7.110, *в*) фокус меняет устойчивость, и от него рождается устойчивый предельный цикл. Одновременно происходит сближение сепаратрис седла  $S_1^+$  и  $S_1^-$  и соответственно  $S_2^+$  и  $S_2^-$ . После этого (рис. 7.110, *г*) сепаратрисы пересекаются, причем вместе с пересечением сепаратрис  $S_2^+$  и  $S_2^-$  происходит исчезновение устойчивого предельного цикла.

Помимо этих изменений, у обычного синхронизма возможно нарушение гладкости тороидальной интегральной поверхности. У соответствующего точечного отображения при этом нарушается гладкость вхождения сепаратрисных инвариантных кривых седел в узлы. Причина такого изменения была описана выше. Соответствующее изменение синхронизма видно из рис. 7.111.

Рассмотрим теперь бифуркации, происходящие при изменении  $\omega$ . О сложном характере зависимости  $\omega$  от параметров говорилось выше. Каждому рациональному значению  $\omega$  соответствует некоторая область значений параметров. При переходе от одного рационального значения  $\omega$  к другому происходит бесчисленное множество бифуркаций. Границы области постоянного рационального значения  $\omega$  определяются слияниями седел и узлов синхронизма. При слиянии седла с узлом возникает сложная неподвижная точка типа седло-узел. Фрагмент изменений, происходящих со стохастическим синхронизмом при слиянии седел и узлов и образовании сложных седлоузловых точек, представлены на рис. 7.112.

Для простого синхронизма соответствующие фрагменты разбиения плоскости на инвариантные кривые изображены на рис. 7.113 и 7.114. Рис. 7.113 соответствует случаю, когда слияние седел и узлов происходит у обычного синхронизма с гладким тороидальным интегральным многообразием, а рис. 7.114 — с негладким.

При дальнейшем изменении параметров после бифуркации слияния седел с узлами происходит быстрая смена различных качественных картинок разбиения. После

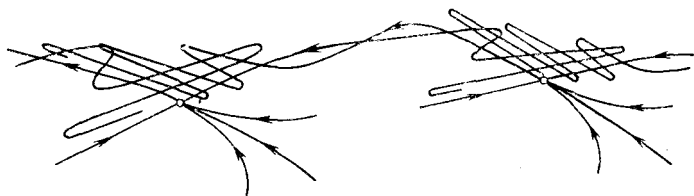


Рис. 7.112

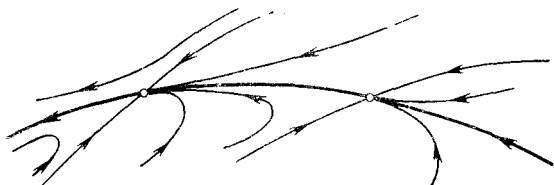


Рис. 7.113

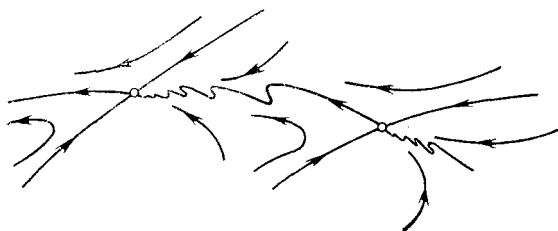


Рис. 7.114



Рис. 7.115

этого быстрого мельтешения снова на более или менее длительном интервале изменения параметров может установиться устойчивый синхронизм. Характер этой смены достаточно сложен. Для простого синхронизма он определяется зависимостью числа вращения Пуанкаре от параметров. Каждому рациональному значению числа вращения соответствует некоторый интервал по параметру существования устойчивого синхронизма. Между любыми такими интервалами существует бесчисленное множество других, причем между каждой парой этих других в свою очередь такое же бесчисленное множество. Сказанное в какой-то мере отображается рис. 7.115, где интервалам  $\alpha_{p/q}$  на оси параметра  $\mu$  отвечают области существования устойчивого синхронизма с числом вращения  $\gamma = p/q$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа.

Между каждой парой интервалов  $\alpha_{p_1/q_1}$  и  $\alpha_{p_2/q_2}$  имеется бесчисленное множество интервалов  $\alpha_{p/q}$ , для которых  $p/q$  заключено между  $p_1/q_1$  и  $p_2/q_2$ .

Можно думать, что характер бифуркаций стохастического синхронизма при изменении параметров такой же. Вернемся к рис. 7.112, 7.113 и 7.114. Рис. 7.113 соответствует обычному синхронизму, расположенному на гладкой тороидальной поверхности в момент его бифуркаций. При непрерывном изменении параметров существование этой гладкой инвариантной поверхности может нарушиться либо благодаря потере ею устойчивости, либо благодаря разрушению гладкости. Эти бифуркации непосредственно не связаны с теми изменениями, которые рассматриваются, и поэтому, если они не имеют места, то смена синхронизмов происходит, как было описано выше, на сохраняющ-

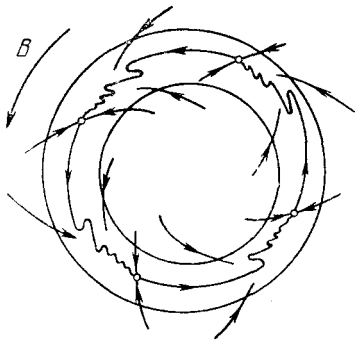


Рис. 7.116

щем свою устойчивость и гладкость в двумерном торе. Стохастический синхронизм в момент бифуркации, изображенной на рис. 7.112, порождает в кольце точечное отображение вида, изображенного на рис. 7.48, и поэтому не может перейти в обычный синхронизм. Это же относится к отображению кольца, частично показанному на рис. 7.114.

Именно, если к отображению кольца в себя добавить малое вращение кольца, как это показано стрелкой  $B$  на рис. 7.116, то придем к точечному отображению вида рис. 7.48. Это отображение будет удовлетворять требуемому существованию области  $\sigma$ , указанным образом пересекающейся со своим отображением  $\bar{\sigma}$ . Поэтому дальнейшее изменение рис. 7.114 не может сохранить обычный синхронизм и приводит к его стохастизации.

Как следует из всего сказанного, общий переход от обычного синхронизма к стохастическому может происходить двумя способами. По первому способу переход происходит в результате изменения хода сепаратрисных кривых седловых неподвижных точек и происходит через их касание (см. рис. 7.110). По второму — в результате нарушения гладкости тороидального интегрального многообразия синхронизма и последующего слияния седел и узлов (рис. 7.111 и 7.114).

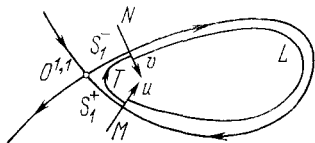


Рис. 7.117

### 8. Бифуркация от сепаратрисы седла.

Перейдем к рассмотрению малого неавтономного возмущения автономной системы, описываемой уравнениями (7.103), с сепаратрисой, идущей из седла в него же. Предварительно опишем бифуркацию, возникающую при малом автономном возмущении, изученную в работах А. А. Андропова и Е. А. Леонтович [5].

На рис. 7.117 изображено седло  $O^{1,1}$  с сепаратрисой, идущей из седла в седло. Эта картинка имеет место при  $\lambda = 0$ . Нас интересует, что будет при непрерывном изменении  $\lambda$ . Для выяснения этого вопроса пересечем ортогонально сепаратрису вблизи от седла  $O^{1,1}$  двумя отрезками  $M$  и  $N$  и введем на них координаты  $u$  и  $v$  так, чтобы в точках пересечения с сепаратрисами, выходящими из седловой точки  $O^{1,1}$   $u$  и соответственно  $v$  равнялись нулю. Положительные направления отсчета выберем внутрь петли сепаратрисы, как показано на рис. 7.117. При малом изменении параметра  $\lambda$  сепаратриса уже не будет идти из седла в седло. Примем, что при  $\lambda > 0$  и соответственно  $\lambda < 0$  имеют место поведения сепаратрисы, показанные на рис. 7.118.

Фазовые траектории, близкие к седлу и сепаратрисам, порождают точечные отображения  $T$  и  $L$  отрезка  $M$  в  $N$

и отрезка  $N$  в  $M$  соответственно. На рис. 7.119 изображены диаграммы точечных отображений  $T$  и  $L$  при  $\lambda = 0$ . Поведение графика отображения  $T$  в точке  $u = 0$  зависит от седловой величины  $\sigma$ , равной  $\sigma = \exp(\alpha + \beta)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — характеристические корни седлового равновесия  $O^{1,1}$ .

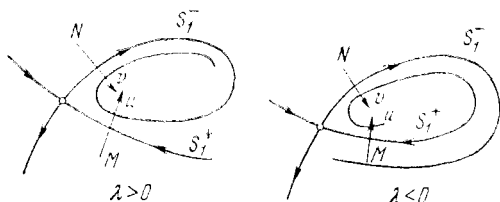


Рис. 7.118

При  $\sigma > 1$  и соответственно  $\sigma < 1$  график отображения  $T$  касается координатной оси  $v$  или  $u$ . График отображения  $L$  в общем случае имеет в точке  $v = 0$  производную, отличную от 0 и  $\infty$ . При малом изменении  $\lambda$  диаграмма рис. 7.119 изменится, как показано на рис. 7.120.

Как видно из этих рисунков, в случае  $\sigma < 1$  при возрастании параметра  $\lambda$  от  $\lambda = 0$  происходит рождение устойчивого периодического движения  $\Gamma$ , в соответствии с чем при  $\lambda > 0$  фазовые траектории располагаются так, как это показано на рис. 7.121.

При  $\sigma > 1$  при обратном изменении  $\lambda$  рождается неустойчивый предельный цикл.

Теперь рассмотрим, что произойдет при неавтономном возмущении сепаратрисы, идущей из седла в седло, что соответствует переходу от системы (7.103) к системе (7.104). В этом случае следует заменить рассмотрение фазовых траекторий дифференциальных уравнений рассмотрением инвариантных кривых точечного отображения плоскости  $\tau = 0$  в себя и рассматривать картинки на рис. 7.117 и 7.118 как изображения поведения последовательных итераций этого точечного отображения при  $\mu = 0$ .

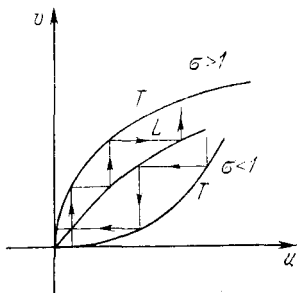


Рис. 7.119

Подлежащее изучению точечное отображение  $T_{2\pi}$  порождается фазовыми траекториями дифференциальных

уравнений (7.104). Поэтому точечное отображение  $T_{2\pi}$  зависит от параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , причем при  $\mu = 0$  оно порождается фазовыми траекториями автономной системы, которая при  $\lambda = 0$  имеет идущую из седла  $O^{1,1}$  в него же сепаратрису  $S_1^- \equiv S_1^+$ .

При гладкой зависимости правых частей уравнений (7.104) от параметров  $\lambda$  и  $\mu$  и переменных  $x$  и  $y$  точечное

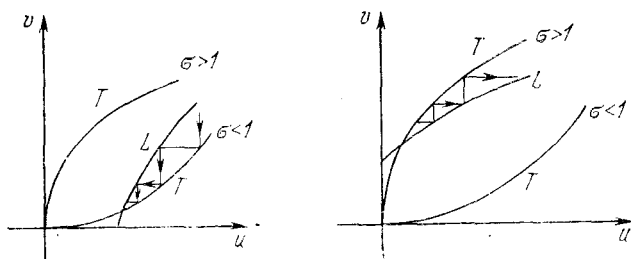


Рис. 7.120

отображение  $T_{2\pi}$  и сепаратрисные кривые  $S_1^+$  и  $S_1^-$  также гладко зависят от параметров  $\lambda$  и  $\mu$  и сами кривые  $S_1^+$  и  $S_1^-$  являются гладкими.

Пусть  $\mu = \lambda = 0$  и  $m$  — отрезок прямой, ортогонально пересекающий сепаратрису  $S_1^+$  в некоторой точке  $M$ , близкой к седловой точке  $O^{1,1}$ . Отображение  $T_{2\pi}$  преобразует отрезок  $m$  в некоторый отрезок кривой  $\bar{m}$ , а точку  $M$  —

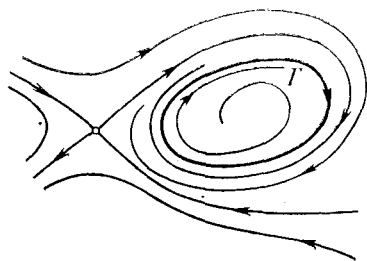


Рис. 7.121

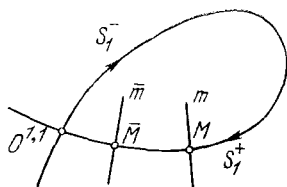


Рис. 7.122

в некоторую точку  $\bar{M}$  (рис. 7.122). Точки  $M$  и  $\bar{M}$  будем рассматривать как точки сепаратрисы  $S_1^+$  и как точки совпадающей с ней сепаратрисы  $S_1^-$ . При изменении параметров  $\lambda$  и  $\mu$  первые от седла  $O^{1,1}$  точки  $M^+$  и  $M^-$  пересечения сепаратрис  $S_1^+$  и  $S_1^-$  с отрезком  $m$  уже не будут совпадать.

Также не будут совпадать и первые от седла точки пересечения  $\bar{M}^+$  и  $\bar{M}^-$  сепаратрис  $S_1^+$  и  $S_1^-$  с отрезком  $\bar{m}$ . При этом очевидно, что  $\bar{M}^+ = T_{2\pi}M^+$  и  $\bar{M}^- = T_{2\pi}M^-$ . Точки  $M^+$ ,  $\bar{M}^-$ ,  $M^+$  и  $\bar{M}^+$ , как и отрезки  $\bar{S}_1^+$  и  $\bar{S}_1^-$  заключенных между ними сепаратрис  $S_1^+$  и  $S_1^-$ , зависят от параметров  $\mu$  и  $\lambda$  гладко. Для любой точки  $P$ , близкой к отрезку  $\bar{S}_1^+$  ( $\bar{S}_1^-$ ) и лежащей между  $m$  и  $\bar{m}$ , можно ввести понятие расстояния до этого отрезка

$$\rho(P, \bar{S}^+) = \min_{Q \in \bar{S}^+} \rho(P, Q). \quad (7.118)$$

Примем, что это расстояние положительно или отрицательно в зависимости от того, по какую сторону от сепаратрисы  $S_1^+$  ( $S_1^-$ ) лежит точка  $P$ . Введем величины  $\rho^+$  и  $\rho^-$  согласно формулам

$$\rho^+ = \max_{P \in \bar{S}^-} \rho(P, \bar{S}^+), \quad \rho^- = \min_{P \in \bar{S}^-} \rho(P, \bar{S}^+). \quad (7.119)$$

Величины  $\rho^+$  и  $\rho^-$  определяют взаимное расположение сепаратрис  $S_1^-$  и  $S_1^+$ . Именно, при  $\rho^+ = \rho^- = 0$  сепаратрисы  $S_1^-$  и  $S_1^+$  совпадают. При  $\rho^+ \geq \rho^- > 0$  они расположены,

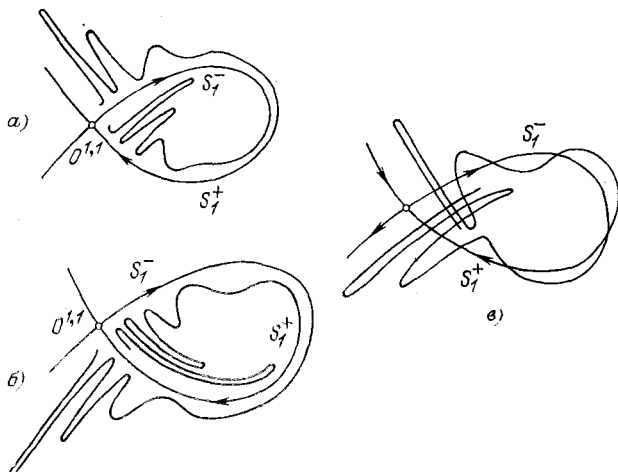


Рис. 7.123

как на рис. 7.123, а и 7.118 с  $\lambda > 0$ , при  $\rho^- \leq \rho^+ < 0$  — как на рис. 7.123, б и 7.117 с  $\lambda < 0$ , при  $\rho^+ > 0 > \rho^-$  — как на рис. 7.123, в.



Перейдем к некоторым выводам, которые можно сделать из гладкой зависимости  $\rho^+$  и  $\rho^-$  от параметров  $\lambda$  и  $\mu$ . В силу предположений: при  $\mu = 0$  и  $\lambda > 0$   $\rho^+ \geq \rho^- > 0$  и при  $\mu = 0$  и  $\lambda < 0$   $\rho^- \leq \rho^+ < 0$ . Поэтому через точку  $\mu = \lambda = 0$  проходят две кривые  $\rho^+ = 0$  и  $\rho^- = 0$  со взаимным расположением друг относительно друга, показанным на рис. 7.124. Кривые  $\rho^- = 0$  и  $\rho^+ = 0$  разбивают окрестность точки  $\lambda = \mu = 0$  на три области:

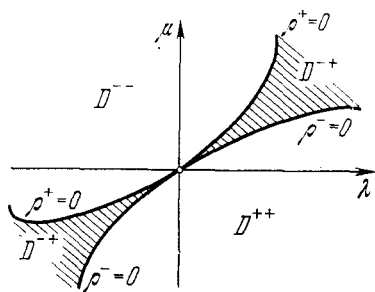


Рис. 7.124

$D^{++}$ ,  $D^{+-}$  и  $D^{--}$  в зависимости от знаков величин  $\rho^-$  и  $\rho^+$ . В области  $D^{++}$  имеет место случай рис. 7.123, а, в области  $D^{+-}$  — рис. 7.123, в и в области  $D^{--}$  — рис. 7.123, б. Из рис. 7.124 следует, что область  $D^{+-}$ , в которой происходит пересечение сепаратрис (на рис. 7.124 она заштрихована), ограни-

чена касающимися кривыми  $\rho^- = 0$  и  $\rho^+ = 0$ .

Выше была рассмотрена зависимость поведения сепаратрисных кривых  $S_1^+$  и  $S_1^-$  седловой неподвижной точки точечного отображения  $T_{2\pi}$  от параметров.

Перейдем к дальнейшему исследованию точечного отображения  $T_{2\pi}$ . При  $\mu = 0$  в окрестности петли сепаратрис  $S_1^+ \equiv S_1^-$  оно было изучено. При этом изучение свелось к рассмотрению преобразования прямой в прямую. В области  $D^{+-}$  между кривыми  $\rho^- = 0$  и  $\rho^+ = 0$  (рис. 7.124) сепаратрисные кривые пересекаются, образуя гомоклиническую структуру. Отображение  $T_{2\pi}$  в этом случае рассматривалось ранее в § 4. На кривых  $\rho^- = 0$  и  $\rho^+ = 0$  имеет место касание сепаратрисных кривых.

Рассмотрим отображение  $T_{2\pi}$  в случаях таких касаний и к ним близких. Случай касания изображен на рис. 7.125. Для исследования точечного отображения  $T_{2\pi}$  в случае, близком к изображенному на рис. 7.125, прибегнем к методу вспомогательных отображений. Сепаратрисные кривые вблизи седловой неподвижной точки  $O$  примем за оси координат  $u$  и  $v$ . Точки  $M$  и  $N$  выбираем достаточно близко к точке  $O$  (рис. 7.125). Точка  $M$  преобразуется в точку  $N$  некоторой степенью отображения  $T_{2\pi}$ . Обозначим это отоб-

ражение через  $L$ . Для точек  $M$  и  $N$ , изображенных на рис. 7.125, — это  $T_{2\pi}^5$ . В соответствии с поведением сепаратрис окрестность точки  $M$ , изображенная на рис. 7.126, преобразуется в подковообразную область  $\bar{\delta}(M)$ , показанную на том же рисунке. При  $n \geq n^*$  отображение  $T^n$  тонкую полосу  $\varepsilon$  вдоль оси  $u$ , изображенную на рис. 7.127, преобразует в полосу  $\bar{\varepsilon}_n$ , расположенную вдоль оси  $v$ . Найдем в соответствии с этим вспомогательные отображения  $\tilde{L}$  и  $\tilde{T}$ .

Вспомогательное отображение  $\tilde{L}$  двузначно, и область  $\tau$ , показанную на рис. 7.128, преобразует в некоторую окрестность  $\bar{\tau}$  точки с координатами  $(u_0, v_0)$ , если точки  $M$  и  $N$  имеют координаты  $(0, v_0)$  и  $(u_0, 0)$  соответственно. Вспомогательное отображение  $\tilde{T}^n$  преобразует область  $G$  в область  $\bar{G}_n$ , примыкающую к началу координат. При этом окрестность  $\bar{\tau}$  преобразуется в зависимости от числа  $n$  в области  $v_n$  (рис. 7.129). В зависимости от величины  $\sigma$  последовательности этих областей  $v_n$  для возрастающих целых чисел  $n \geq n^*$  уменьшаются и асимптотически приближаются к началу координат по-разному, как это показано на рис. 7.130.

Рассмотрим теперь произвольную последовательность точек

$$\dots (u_{-1}, v_{-1}), (\bar{u}_{-1}, \bar{v}_{-1}), (u_0, v_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0), \dots, \quad (7.120)$$

связанных соотношениями

$$\begin{aligned} (\bar{u}_i, \bar{v}_i) &= T^{n_i}(u_i, v_i) \quad (n \geq n^*), \\ (u_{i+1}, v_{i+1}) &= L(u_i, v_i), \end{aligned} \quad (7.121)$$

и такую, что

$$(u_i, v_i) \in \varepsilon, (\bar{u}_i, \bar{v}_i) \in \delta(M). \quad (7.122)$$

Сказанное можно записать в виде схемы

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow u_{i-1} \rightarrow \bar{u}_{i-1} \rightarrow u_i \rightarrow \bar{u}_i \rightarrow \dots \\ \tilde{L} \uparrow \mid \tilde{T}^{n_{i-1}} \uparrow \mid \tilde{L} \uparrow \mid \tilde{T}^{n_i} \uparrow \mid \tilde{L} \\ \dots \leftarrow v_{i-1} \leftarrow \bar{v}_{i-1} \leftarrow v_i \leftarrow \bar{v}_i \leftarrow \dots, \end{aligned} \quad (7.123)$$

в которой стрелки указывают связи, определяемые вспомогательными отображениями  $\tilde{L}$  и  $\tilde{T}^{n_i}$  и условиями

$$(u_{i-1}, \bar{v}_{i-1}) \in G, (\bar{u}_{i-1}, v_{i-1}) \in \tau. \quad (7.124)$$

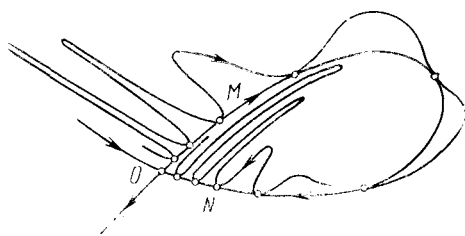


Рис. 7.125

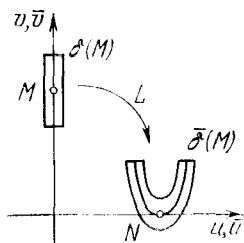


Рис. 7.126

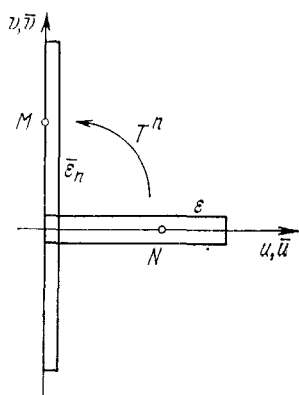


Рис. 7.127

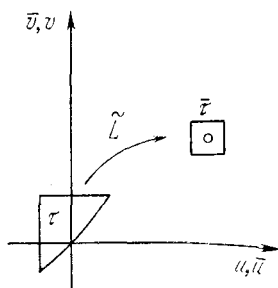


Рис. 7.128

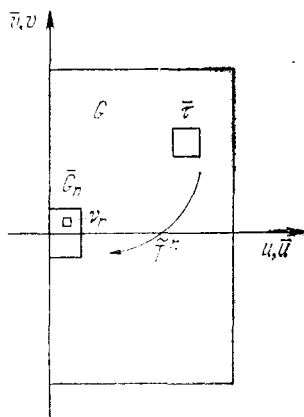


Рис. 7.129

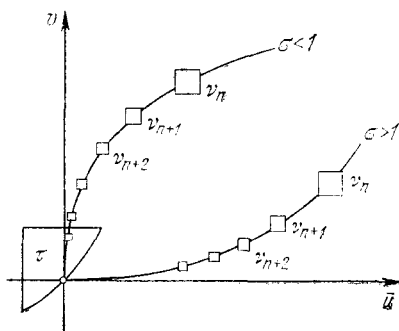


Рис. 7.130

Выполнение этих требований заведомо невозможно, если хотя бы для одного  $i$

$$v_{n_i} \notin \tau. \quad (7.125)$$

Этот случай имеет место, как следует из рис. 7.128 и 7.130, при  $\sigma > 1$ . Поэтому в этом случае последовательностей (7.120) не существует. Этот вывод естественно предполагает, что полоска  $\varepsilon$  достаточно тонкая. Напротив, при  $\sigma < 1$  такие последовательности заведомо существуют, поскольку существуют схемы (7.123) без соблюдения требуемых их стрелками связей, но удовлетворяющие условиям (7.124) и продолжающие удовлетворять этим условиям при применении в них последовательно всех преобразований  $\tilde{L}$  и затем  $\tilde{T}^{n_i}$ .

Таким образом, при  $\sigma < 1$  имеется бесчисленное множество последовательностей вида (7.120) при сколь угодно тонкости полосы  $\varepsilon$ .

Изложенные выше соображения позволяют получить более полные результаты. С ними можно ознакомиться по работам [21, 22].

Подведем некоторый итог. Ради определенности пусть для рассматриваемого нами седлового равновесия при  $\mu = 0$  и  $\lambda = 0$  седловая величина  $\sigma < 1$ . Тогда при возрастании  $\lambda$  вдоль оси  $\mu = 0$  появится устойчивый предельный цикл с некоторой областью притяжения. Исходя из точки  $\lambda > 0$ ,  $\mu = 0$ , будем увеличивать  $\mu$ . При этом предельный цикл превратится сначала в устойчивый обычный синхронизм. Затем он трансформируется в стохастический синхронизм. При этом область притяжения предельного цикла последовательно будет переходить в область притяжения обычного и стохастического синхронизмов и затем по пересечению границы  $\rho^- = 0$  в область притяжения какого-то нового установившегося движения. Структура разбиения плоскости параметров  $\lambda$ ,  $\mu$  в окрестности точки  $\lambda = \mu = 0$  очень сложная. Достаточно заметить, что при монотонном изменении  $\lambda$  в сторону возрастания вдоль оси  $\mu = 0$  число вращения  $\gamma$  монотонно убывает от значения \*)  $\gamma = \infty$ . Сказанное основывается на предположении об общем характере бифуркаций и полученных ранее сведениях о точечном отображении  $T_{2\pi}$ , согласно которым между кривыми  $\rho^- = 0$  и  $\rho^+ = 0$  имеет место слож-

\*) Имеется в виду, что при  $\mu = 0$  и  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda > 0$ )  $\gamma \rightarrow \infty$ .

ная структура, связанная с наличием гомоклинических точек и тем, что к кривой  $\rho^- = 0$  снизу прилегает область, в которой точечное отображение  $T_{2\pi}$  допускает притягивающую кольцеобразную область с бесчисленным множеством разнообразных седловых многократных неподвижных точек.

Проведенное рассмотрение малых неавтономных периодических возмущений автономной системы второго порядка обнаружило естественность появления с переходом от двумерных к многомерным динамическим системам притягивающих гомоклинических структур и, в частности, стохастических синхронизмов.

Таким образом, основное отличие многомерных динамических систем от двумерных состоит в появлении у них нового типа установившихся движений, движений очень сложных, неустойчивых по Ляпунову и имеющих стохастический характер. Можно, не вдаваясь в тонкую структуру этих движений, говорить об их возникновении, переходе друг в друга и в другие более простые установившиеся движения так же, как об этом говорилось ранее. При этом их области притяжения трансформируются непрерывно при мягких переходах и скачком при жестких. Сложным установившимся движениям можно дать при достаточно грубом подходе приближенные стохастические описания в виде некоторых марковских процессов.

## § 6. Заключение

Выше были изложены общие сведения о многомерных динамических системах. Эти сведения неполные и в ряде мест отрывочные. Объясняется это не только краткостью изложения очень сложного вопроса, но и тем, что разработка теории многомерных систем продолжается и далека от завершения. Это прежде всего относится к исследованию хаотических и стохастических колебаний, т. е. того, что является принципиально новым у многомерных динамических систем по сравнению с хорошо изученными и привычными одномерными и двумерными системами.

Открытие хаотических и стохастических движений произошло сравнительно недавно, но уже существенно обогатило наши общие представления о динамических системах и описываемых ими эволюционных процессах. Велико влияние этого открытия и на наши общие глу-

бинные представления о детерминированном и случайном. Еще совсем недавно случайное было отделено высоким забором от детерминированного, а случайные колебания детерминированных динамических систем рассматривались и изучались только в плане внешних случайных возмущений. Сейчас после открытия хаотических и стохастических движений детерминированных динамических систем нельзя отрицать, что не только случайное может порождать закономерное практически детерминированное поведение, но и детерминированное поведение может приводить к случайности. Ранее такая возможность признавалась в молекулярной физике и объяснялась непостижимо большим числом частиц. Как оказалось, это не так — случайность возможна и в системах малой размерности (большей двух) и даже в системе с одной частицей.

Открытие стохастических и хаотических движений указало выход из тупика в теории турбулентности жидкости, газов и плазмы, привело к обнаружению стохастических и хаотических колебаний в самых разнообразных механических, физических, химических и биологических системах.

Все это сделало открытие хаотических и стохастических колебаний детерминированных динамических систем одной из научных сенсаций нашего времени. Но вместе с тем выяснилось, насколько сложна и многогранна проблема изучения многомерных динамических систем, насколько мало надежд на прежние аналитические методы их исследования. Стало ясно, что не обойтись без численных методов и современных вычислительных машин, без целенаправленных и продуманных математических экспериментов. Для того чтобы проводить такие численные расчеты и математические эксперименты, необходимо знать, что может быть и что с чем связано и как связано. Именно эти необходимые общие сведения дает качественная теория дифференциальных уравнений и возникший и развитый в связи с ней метод точечных отображений.

Каковы же основные общие выводы этой теории? Пожалуй, первый и самый важный вывод — это наличие двух различных тенденций в эволюции динамической системы, которые можно охарактеризовать как порядок и регулярность, с одной стороны, и хаос и стохастичность, — с другой. Порядок и регулярность имеют своим адек-

ватным образом устойчивые состояния равновесия и устойчивые периодические движения. Возникновение порядка и регулярности имеет в своей основе устойчивость. Устойчивость делает необходимым приход всякого ограниченного движения к состоянию равновесия или периодическому движению. У систем с размерностью меньшей трех устойчивость — единственная возможность. Наличие отдельных изолированных неустойчивых движений можно не принимать во внимание. Их роль заключается лишь в разделении устойчивых движений, стремящихся к различным устойчивым состояниям равновесия и устойчивым периодическим движениям. Такая же ситуация может иметь место в многомерных системах. Выше (§ 2 этой главы) такие многомерные системы названы динамическими системами с простейшими установившимися движениями. Но в многомерных системах размерности большей двух неустойчивость может проявиться не только в плане разделяющих движений, но и в плане порождения хаотических и стохастических движений, в виде притягивающих гомоклинических структур.

Такие образования из неустойчивых движений, в целом образующих притягивающее множество, получили название странных аттракторов — странных притягивающих множеств. Странных тем, что они состоят из неустойчивых экспоненциально разбегающихся фазовых траекторий, но вместе с тем в целом образуют притягивающее множество, к которому асимптотически приближаются все соседние фазовые траектории. Движения в странном аттракторе носят стохастический, случайный характер. Они непредсказуемы и случайны потому, что малейшее неконтролируемое возмущение начальных условий или постоянно действующие возмущения приводят к конечным расхождениям с невозмущенным движением. В силу этого странный аттрактор можно назвать стохастическим аттрактором. Стохастический аттрактор — притягивающее множество, и поэтому в его окрестности происходит сжатие фазового объема. Это необходимое условие.

Притягивающая гомоклиническая структура может породить не только стохастический аттрактор, но и своеобразное сочетание неустойчивых движений с устойчивыми движениями, имеющими очень тонкие области притяжения. При этом движения в притягивающей гомоклинической структуре тоже непредсказуемы и слу-

чайны, но эта случайность другого рода: она вызывается пусть и очень малыми, но все же большими некоторого порога возмущениями. Эти непредсказуемость и случайность происходят за счет выходов из узкой области притяжения под влиянием неконтролируемых возмущений. При этом стохастические свойства возникающего движения определяются случайными возмущениями. Отметим, что в предыдущем случае стохастического аттрактора они определялись только самой динамической системой, а случайные малые возмущения могли лишь незначительно их изменить. В силу этих различий установившиеся движения притягивающей гомоклинической структуры, содержащей устойчивые движения с тонкими областями притяжения, можно назвать хаотическим аттрактором. Заметим, что достаточным условием тонкости областей притяжения устойчивых периодических движений является достаточно большая длина соответствующих им фазовых траекторий. А свойство притяжения хаотическим аттрактором обусловлено не столько устойчивыми периодическими движениями, сколько множеством седловых неустойчивых движений притягивающей гомоклинической структуры и сжатием вблизи них фазового объема.

Таким образом, притягивающие гомоклинические структуры могут породить как стохастические, так и хаотические аттракторы. Пример стохастического аттрактора может дать система, описанная на с. 284, и система Лоренца (с. 334). Хаотический аттрактор имеет место у квадратичного точечного отображения прямой в прямую вида  $\bar{x} = ax(1 - x)$  (при  $a = 4$  оно было рассмотрено на с. 279—281), а также в неавтономных нелинейных системах второго порядка, например, вида

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + (\nu + \mu \sin t) \sin \varphi = 0$$

и других.

Различение хаотических и стохастических колебаний при нахождении их с помощью ЭВМ весьма затруднительно, так как и в том и в другом случае получается сложная, спутанная в клубок фазовая траектория.

Следующим важным моментом в изучении многомерных динамических систем являются закономерности зависимости фазовых траекторий и фазового портрета от параметров или, короче, — теория бифуркаций. Теория бифуркаций простейших установившихся движений —



состояний равновесия и периодических движений — носит законченный характер. Во всяком случае, все основные бифуркации состояний равновесия и периодических движений изучены. Они были изложены выше (§ 1 этой главы). В отношении стохастических и хаотических аттракторов этого сказать нельзя. Многое известно, но многое и неизвестно. Кроме того, все настолько сложно, что с прежней полнотой едва ли может быть изучено. Так что, по-видимому, от этой полноты изучения придется отказаться.

Прежде всего интересно, как возникают хаотические и стохастические аттракторы, как они могут меняться и исчезать. В общих чертах возникновение хаотического и стохастического аттракторов является проявлением неустойчивости и притягивающей гомоклинической структуры. При этом какие-то существовавшие ранее устойчивые состояния равновесия и устойчивые периодические движения должны потерять свою устойчивость или исчезнуть. Однако возможно и жесткое возникновение хаотических и стохастических колебаний. Именно такую возможность демонстрирует рис. 7.38. Здесь появление стохастического аттрактора не сопровождается потерями устойчивости: все движения и до этого были неустойчивые. Относительно хорошо изучено возникновение притягивающей гомоклинической структуры и стохастического аттрактора у уравнения Лоренца (с. 334), несколько хуже — хаотического аттрактора от петли сепаратрисы седловой неподвижной точки (п. 8 § 5 этой главы), хорошо изучен и очень прост широко известный механизм хаотизации и стохастизации движений в результате бесконечной серии бифуркаций удвоения периода устойчивого периодического движения. При каждой бифуркации этой серии устойчивое периодическое движение теряет устойчивость и одновременно рождает устойчивое периодическое движение удвоенного периода (см. с. 249—250), в результате чего период единственного устойчивого движения неограниченно возрастает, что приводит к хаотизации и стохастизации движений в его окрестности. Для последовательных значений  $\mu_s$  параметра, с изменением которого происходят бифуркации удвоения периода, имеет место закон Фейгенбаума

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\mu_{s+1} - \mu_s) (\mu_{s+2} - \mu_{s+1})^{-1} = 4,6692\dots$$

Некоторые другие примеры возникновения притягивающих гомоклинических структур и хаотических и стохастических аттракторов были описаны в § 5 этой главы. С более полными описаниями бифуркаций, приводящих к хаотическим и стохастическим движениям, можно познакомиться по литературе, приведенной в дополнительном списке. Наконец, необходимо отметить, что в настоящее время интенсивно разрабатываются количественные характеристики стохастических и хаотических движений. Об одной из таких характеристик — предельной плотности вероятностей — говорилось (с. 280—283). С остальными можно познакомиться по источникам, содержащимся в дополнительном списке литературы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К главам 1 и 2

1. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1972.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.

### К главе 3

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
2. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1966.
3. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1967.
4. Вольтер В. В., Сальников И. Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов.— М.: Химия, 1972.
5. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН.— 1970.— Т. 20, вып. 1.
6. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1972.
7. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.

### К главе 4

1. Андронов А. А., Майер А. Г. О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования // Автоматика и телемеханика.— 1947.— Т. 8, № 5.
2. Андронов А. А., Майер А. Г. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования // Автоматика и телемеханика.— 1953.— Т. 14, № 5.
3. Баутин Н. Н. Динамические модели свободных часовых ходов // Сб. Памяти А. А. Андропова.— М.: Изд. АН СССР, 1955.
4. Неймарк Ю. И. О периодических режимах и устойчивости релейных систем // Автоматика и телемеханика.— 1953.— Т. 14, № 5.
5. Киняпин С. Д. Об устойчивости состояния равновесия двухкаскадной релейной системы // Изв. вузов. Радиофизика.— 1960.— Т. 3, № 3.

6. Неймарк Ю. И. Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания // Инж. сб.— 1953.— Т. 16.
7. Леонов Н. Н. Динамика одноканальных экстремальных систем пропорционального и релейно-пропорционального типов с информационными объектами // Изв. вузов. Радиофизика.— 1967.— Т. 10, № 11.
8. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
9. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1972.
10. Фуфаев Н. А. Теория вибрационного звена, работающего на принципе электромагнитного прерывателя // Тр. II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Т. 1.— М.: Изд. АН СССР, 1955.

### К главе 5

1. Айзерман М. А., Смирнова И. М. О применении метода малого параметра для исследования периодических режимов в системах автоматического регулирования // Сб. Памяти А. А. Андропова.— М.: Изд. АН СССР, 1955.
2. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования.— М.: Физматгиз, 1958.
3. Андронов А. А. Собрание трудов.— М.: Изд. АН СССР, 1956.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1958.
6. Булгаков Б. В. Колебания.— Гостехиздат, 1954.
7. Булгаков Б. В. О применении метода Ван-дер-Поля к псевдолинейным системам со многими степенями свободы // ПММ.— 1942.— Т. 6, вып. 6.
8. Бутенин Н. В. Об одной задаче Кельвина, относящейся к теории часов // ЖЭТФ.— 1940.— Т. 10, вып. 11.
9. Бутенин Н. В. Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами // ПММ.— 1942.— Т. 6, вып. 5.
10. Бутенин Н. В. К теории вынужденных колебаний в нелинейной механической системе с двумя степенями свободы // ПММ.— 1949.— Т. 13, вып. 4.
11. Бутенин Н. В. К теории «резонанса» в механической автоколебательной системе с двумя степенями свободы // ПММ.— 1950.— Т. 14, вып. 1.
12. Бутенин Н. В. К теории принудительной синхронизации // Сб. Памяти А. А. Андропова.— М.: Изд. АН СССР, 1955.
13. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний.— М.: Судпромгиз, 1962.
14. Бутенин Н. В. Теория колебаний.— М.: Высшая школа, 1963.
15. Ван-дер-Поля. Нелинейная теория электрических колебаний.— М.: Связьиздат, 1935.
16. Власов Н. П. Автоколебательная схема с однофазным асинхронным мотором // ЖТЭ.— 1935.— Т. 5, вып. 4.

17. Delchambre M. Sur le couplage de deux, oscillateurs non linéaires forcés du type Van der Pol // Académie royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, 5-ème, sér. 57.— 1971.— № 5. (Русский перевод // Сб. Механика, № 2.— М.: Мир, 1973.)
18. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики.— М.: ОНТИ, 1934.
19. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.— Киев: Изд. АН УССР, 1937.
20. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.: ОНТИ, 1935.
21. Майер А. Г. К теории вынужденных колебаний в сложном генераторе // Ученые записки ГГУ.— 1937.— Вып. 6.
22. Малышев В. А. О воздействии малого гармонического сигнала на узкополосные автоколебательные системы с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов СССР. Радиотехника.— 1961.— Т. 4, вып. 5.
23. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов.— М.: Изд. АН СССР, 1948—1952.
24. Меркин Д. Р. Гироскопические системы.— М.: Наука, 1974.
25. Митропольский Ю. И. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1966.
26. Минакова И. И., Степанова Н. В. Синхронизация отражательного клистрона // Радиотехника и электроника.— 1956.— Т. 1, № 6.
27. Палекси Н. Д. Собрание трудов.— М.: Изд. АН СССР, 1948.
28. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М.: Наука, 1969.
29. Серебрякова Н. Н. Динамическая модель часов, совершающие вынужденные колебания // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.— 1964.— № 6.
30. Стрелков С. П. Маятник Фроуда // ЖТФ.— 1933.— Т. 3, вып. 4.

## К главе 6

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
2. Бутенин Н. В. Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // ПММ.— 1948.— Т. 12, вып. 1.
3. Васильева А. Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры // Матем. сб.— 1952.— Т. 31, вып. 3.
4. Градштейн И. С. Нелинейные дифференциальные уравнения с малыми множителями при некоторых производных // ДАН СССР.— 1949.— Т. 66, вып. 6.
5. Градштейн И. С. Дифференциальные уравнения, в которые множителями входят различные степени малого параметра // ДАН СССР.— 1952.— Т. 82, вып. 1.
6. Железцов Н. А., Родыгин А. В. К теории симметричного мультивибратора // ДАН СССР.— 1951.— Т. 81, вып. 4.

7. Железцов Н. А. К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Радиофизика.— 1958.— Т. 1, вып. 1.
8. Железцов Н. А. Самомодуляция автоколебаний лампового генератора с автоматическим смещением в цепи катода // ЖТФ.— 1948.— Т. 13, вып. 3.
9. Кайдановский Н. Л., Хайкин С. Э. Механические релаксационные колебания // ЖТФ.— 1933.— Т. 3, вып. 3.
10. Кайдановский Н. Л. Природа механических автоколебаний, возникающих при сухом трении // ЖТФ.— 1949.— Т. 19, вып. 9.
11. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // ДАН СССР.— 1955.— Т. 102, вып. 8.
12. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Математика.— 1957.— Т. 21, вып. 7.
13. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб.— 1952.— Т. 31, вып. 3.

#### К главе 7

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
2. Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний // Сб. Первая Всесоюзная конференция по колебаниям. Т. 1.— М.: ГТТИ. 1933.
3. Андронов А. А., Горелик Г. С. Радиофизика и общая динамика машин // Изв. вузов. Радиофизика.— 1958.— Т. 1, № 1.
4. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка.— М.: Наука, 1966.
5. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1967.
6. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. мат. ин-та им. Стеклова. Т. 90.— М.: 1967.
7. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН.— 1963.— Т. 18, вып. 6.
8. Arnold V., Avez A. Problèmes ergodiques de la mécanique, Gauthier.— Paris: Villars, 1966.
9. Баталова З. С. О движениях ротора под влиянием внешней гармонической силы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1967.— № 1.
10. Баталова З. С. О приближенном исследовании точечного преобразования прямой в прямую // Изв. вузов. Радиофизика.— 1965.— Т. 8, № 5.
11. Баталова З. С., Неймарк Ю. И. Об одной динамической системе с гомоклинической структурой // Межвузовский сб. Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика. Вып. 1.— Горький, 1973.

12. Барсу́к Л. О., Бело́слудцев Н. М., Нейма́рк Ю. И., Салга́нская Н. М. Устойчи́вость неподви́жной точки преобраще́ния в критиче́ском случае́ и некото́рые особе́е бифурка́ции // Изв. вузов. Радиофизика.— 1968.— Т. 11, № 11.
13. Бело́стина Л. Н., Бело́х В. И. О неавтоно́мной фа́зовой систе́ме уравне́ний с малы́м пара́метром, содер́жащей инвариант́ные то́ры и гру́бые го́моклиниче́ские кривы́е // Изв. вузов. Радиофизика.— 1972.— Т. 15, № 7.
14. Бело́стина Л. Н. Об изуче́нии фа́зового про́странства систе́м синхрониза́ции // Сб. Фа́зовая синхрониза́ция.— М.: Связь, 1975.
15. Бело́стина Л. Н. Малы́е перио́диче́ские возму́щения гру́бой автоно́мной систе́мы // ДАН СССР.— 1963.— Т. 148, № 2.
16. Беспа́лова Л. В., Ме́трикин В. С. Дина́мика ви́броударного уплотне́ния с уче́том массы́ гру́нта // Ме́жвузовский сб.: Теория́ колеба́ний, прикла́дная ма́тематика и ки́бернетика. Вып. 1.— Горький, 1973.
17. Беспа́лова Л. В., Ме́трикин В. С. Ви́бронагру́жение сва́й под дей́ствием ви́нтовых колеба́ний // Ме́жвузовский сб. Теория́ колеба́ний, прикла́дная ма́тематика и ки́бернетика. Вып. 1.— Горький, 1973.
18. J. Bernisson, Lin Hsu, C. Mira. Quelques exemples de solutions stochastiques du 2-eme ordre // Colloque international, Transformations ponctuelles et leurs applications.— Toulon-France, 1973.
19. Би́ркго́ф Дж. Д. Дина́миче́ские систе́мы.— М.: Гостехиздат, 1941.
20. Бого́любов Н. Н., Ми́тропольский Ю. А. А́симпто́тиче́ские мето́ды в тео́рии нели́нейных колеба́ний.— М.: Физматгиз, 1958.
21. Га́врилов Н. К., Ши́льников А. П. О тре́хмерных дина́миче́ских систе́мах с негру́бой го́моклиниче́ской кривой, I, II // Мат. сб.— 1972.— Т. 88, вып. 4; 1973.— Т. 90, вып. 1.
22. Гру́здев В. П., Нейма́рк Ю. И. Симво́лическое опи́сание дви́жений в окрестно́сти негру́бой го́моклиниче́ской структу́ры // Укр. мат. ж.— 1975.— Т. 27, вып. 6.
23. Гу́ртовник А. С., Нейма́рк Ю. И. О синхрониза́ции дина́миче́ских систе́м // ПММ.— 1974.— Т. 38, № 5.
24. За́славский Г. М., Чи́рков Б. В. Стохастиче́ская неу́стойчи́вость нели́нейных колеба́ний // УФН.— 1971.— Т. 105, вып. 1.
25. За́славский Г. М. Статисти́ческая необрати́мость в нели́нейных систе́мах.— М.: Наука, 1970.
26. Ка́домцев Б. Б., Ка́нторович В. М. Тео́рия турбуле́нтности в гидро́дина́мике и пла́зме // Изв. вузов. Радиофизика.— 1974.— Т. 17, № 4.
27. Ку́шниренко А. Г., Ка́ток А. В., Але́ксеев В. М. Гладкие дина́миче́ские систе́мы // Де́вятая ле́тняя ма́тематиче́ская шко́ла.— Киев: Инсти́тут ма́тематики АН УССР, 1972.
28. Ла́ндау Л. Д., Ли́вшиц Е. М. Меха́ника спло́шных сре́д.— М.: Гостехиздат, 1956.

29. Lattes S. Sur les equations fonctionelles qui diffinissent une courbe ou une surfau invariant par une transformation // Annal. di Math. pura et applicata. Milano.— 1907.— Т. 13, ser. 3.
30. Леонтович-Андропова Е. А., Шильников Л. П. Современное состояние теории бифуркаций динамических систем // Тр. V международной конференции по нелинейным колебаниям. Качественные методы. Т. 2.— Киев, 1970.
31. Леонов Н. Н. О точечном преобразовании прямой в прямую // Изв. вузов. Радиофизика.— 1959.— Т. 12, № 6; К теории разрывного преобразования прямой в прямую // Изв. вузов. Радиофизика.— 1960.— Т. 13, № 5.
32. Леонов Н. Н., Неймарк Ю. И. Об установившихся режимах работы одного класса систем управления // Автоматика и телемеханика.— 1974.— № 5.
33. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки ГГУ. Вып. 12.— Горький, 1939.
34. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1949.
35. Morse E., Hedlund G. A. Symbolic dynamics, I, II // Amer. Jour. Math.— 1938.— V. 60; 1940.— V. 62.
36. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний // Механика в СССР за 50 лет.— М.: Наука, 1968.
37. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, части 1, 2, 3 // Изв. вузов. Радиофизика.— 1958.— Т. 1, № 1, № 2, № 5—6.
38. Неймарк Ю. И. Некоторые методы изучения динамических систем // Тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике. Т. 2.— М.: Наука, 1965.
39. Неймарк Ю. И., Шильников Л. П. Об одном случае рождения периодических движений // ДАН СССР.— 1965.— Т. 160, № 6.
40. Неймарк Ю. И. Об одном классе динамических систем // Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям.— Т. 2.— Киев: Изд. АН УССР, 1971.
41. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1972.
42. Неймарк Ю. И. Стохастичность в динамических системах // Межвузовский сб. Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика.— Горький, 1973; Синхронизация и стохастичность // Сб. Фазовая синхронизация.— М.: Связь, 1975; Стохастические движения динамических систем // Межвузовский сб. Динамика систем, № 4.— Горький, 1974; О возникновении стохастичности в динамических системах // Изв. вузов. Радиофизика.— 1974.— Т. 17, № 4.
43. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1949.
44. Петровский А. Г. О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки // Мат. сб.— 1934.— Т. 41, вып. 1.
45. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний.— М.: Наука, 1964.



46. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Классики естествознания.— М.: Гостехиздат, 1947.
47. Poincaré H. Les methodes nouvelles de la mecaniques celestre, I, II, III.— Paris, 1892, 1893, 1899.
48. Пулькин С. П. Об итерациях функций одного независимого переменного // Изв. АН СССР. Математика.— 1942.— Т. 8, № 6.
49. Рабинович И. М. Автоколебания распределенных систем // Изв. вузов. Радиофизика.— 1974.— Т. 17, № 4.
50. Smale S. On dynamical systems Symposium Internal on ordinary differential equations.— La Univers. Nac. di Mexico, 1961. A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points.  
Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Качественные методы. Т. 2.— Киев, 1963.
51. Smale S. Morse inequalities for dynamical system // Bulletin of the Amer. Math. Soc.— 1960.— Т. 66, № 1.
52. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН.— 1970.— Т. 25, вып. 1.
53. Синай Я. Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // ДАН СССР.— 1963.— Т. 153.
54. Синай Я. Г. Марковские разбиения и  $Y$ -диффеоморфизмы // Функциональный анализ.— 1968.— Т. 2, № 1.
55. Синай Я. Г. Построение марковских разбиений // Функциональный анализ.— 1968.— Т. 2, № 3.
56. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем.— М.: Мир, 1973.
57. Труженникова В. М. Условия рождения периодического движения из состояния равновесия // Изв. вузов. Радиофизика.— 1962.— Т. 5, № 2.
58. Хаяси Т. Нелинейные колебания физических систем.— М.; Л.: Наука, 1963.
59. Хопф Э. Эргодическая теория // УМН.— 1949.— Т. 4, вып. 1.
60. Шарковский А. Н. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую // Укр. мат. ж.— 1964.— Т. 16, № 1.
61. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Мат. сб.— 1963.— Т. 61, вып. 4.
62. Шильников Л. П. О рождении периодических движений из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же // ДАН СССР.— 1966.— Т. 170, № 1.

## СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы.— М.: Наука, 1979.
2. Странные аттракторы.— М.: Мир, 1980.
3. Лиختенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.
4. Синергетика / Под редакцией акад. Б. Б. Кадомцева.— М.: Мир, 1984.

5. З а с л а в с к и й Г. М. Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
6. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности/ Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба.— М.: Мир, 1984.
7. Р а б и н о в и ч М. И., Т р у б е ц к о в Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.
8. С о н е ч к и н Д. М. Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы.— Л.: Гидрометеопиздат, 1984.
9. Н е й м а р к Ю. И., К о г а н Н. Я., С а в е л ь е в В. П. Динамические модели теории управления.— М.: Наука, 1985.
10. Н е й м а р к Ю. И., Л а н д а П. С. Стохастические и хаотические колебания.— М.: Наука, 1987.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Айзерман М. А. 116, 366  
Алексеев В. М. 263, 301, 369  
Андронов А. А. 9, 40, 44, 45, 59, 66, 95, 101, 116, 120, 131, 139, 206, 215, 219, 221, 228, 229, 251, 272, 356, 366, 368  
Аносков Д. В. 368  
Арнольд В. И. 251, 334, 368
- Банах С. (Banach S.) 290  
Барсуков Л. О. 251, 368  
Баутин Н. Н. 51, 66, 365, 368  
Белослудцев Н. М. 251, 368  
Белых В. П. 368  
Белюстина Л. Н. 237, 368, 369  
Берниссон Дж. (Bernisson J.) 369  
Беспалова Л. В. 237, 369  
Биркгоф Дж. Д. (Birkhoff D.) 66, 289, 369  
Боголюбов Н. Н. 116, 257, 366, 367, 369  
Булгаков Б. В. 116, 149, 183, 366  
Бутенин П. В. 131, 145, 149, 150, 162, 168, 183, 192, 211, 366, 367
- Ван-дер-Поль 116, 119, 131, 366  
Васильева А. Б. 215, 367  
Витт А. А. 9, 40, 44, 45, 59, 67, 88, 95, 101, 116, 131, 139, 206, 215, 219, 221, 228, 229, 251, 272, 366, 368  
Власов Н. П. 164, 165, 366  
Вольтер В. В. 51, 368  
Вышнеградский И. А. 66
- Гаврилов Н. К. 363, 369  
Гордон И. И. 40, 44, 228, 229, 356, 363, 365, 368  
Горелик Г. С. 228, 368  
Градштейн И. С. 215, 218, 367  
Груздев В. П. 363, 369  
Гуртовник А. С. 319, 369
- Дельшамбр М. (Delchambre M.) 187, 366  
Донжуа А. 285
- Железцов Н. А. 215, 218, 367
- Заславский Г. М. 319, 369, 371
- Кадомцев Б. Б. 319, 369  
Кайдановский Н. Л. 207, 219, 368  
Канторович В. М. 319, 369  
Каток А. В. 263, 301, 369  
Киняпин С. Д. 67, 365  
Коган П. Я. 371  
Крылов Н. М. 116, 367  
Кушниренко А. Г., 263, 301, 369
- Ланда П. С. 371  
Ландау Л. Д. 318, 369  
Леонов Н. Н. 67, 90, 319, 366, 370  
Леонтович Е. А. 40, 44, 51, 228, 229, 356, 365, 368  
Леонтович-Андропова Е. А. 369  
Либерман М. 371  
Лившиц Е. М. 318, 369  
Лихтенберг А. 371  
Ляпунов А. М. 122, 367

- Майер А. Г. 40, 44, 66, 173, 285, 338, 365, 367, 370  
 Малкин И. Г. 257, 370  
 Малышев В. А. 367  
 Манделъштам Л. И. 116, 131, 367  
 Меркин Д. Р. 116, 367  
 Метрикин В. С. 237, 369  
 Минакова И. И. 131, 367  
 Митропольский Ю. И. 116, 257, 366, 367, 369  
 Мищенко Е. Ф. 215, 219, 368  
 Морзе Е. (Morse E.) 263, 283, 370  
  
 Неймарк Ю. И. 8, 27, 32, 44, 67, 68, 80, 82, 84, 228, 231, 239, 251, 253, 257, 268, 303, 319, 322, 340, 363, 365, 368, 369—371  
 Немыцкий В. В. 287, 289, 370  
  
 Папалекси Н. Д. 116, 131, 367  
 Петровский А. Г. 232  
 Плисе В. А. 370  
 Понтрягин Л. С. 215, 219, 368  
 Пуанкаре А. (Poincare H.) 66, 228, 261, 285, 370  
 Пулькин С. П. 370  
  
 Рабинович М. И. 319, 370, 371  
 Родыгин А. В. 215, 219, 367  
 Рубаник В. П. 367  
  
 Савельев В. П. 371  
 Салганская Н. М. 251, 368  
 Сальников И. Е. 51, 368  
 Серебрякова Н. Н. 131, 367  
 Синай Я. Г. 371  
 Смейл С. (Smale S.) 44, 263, 301, 371  
 Смирнова И. М. 116, 366  
 Сонечкин Д. М. 371  
 Степанова Н. В. 131, 367  
 Стрелков С. П. 124, 367  
  
 Тихонов А. Н. 215, 218, 368  
 Тондл А. 237, 371  
 Трубецков Д. И. 371  
 Труженикова В. М. 371  
  
 Фуфаев Н. А. 106, 112, 366  
  
 Хайкин С. Э. 9, 40, 44, 45, 59, 67, 88, 95, 101, 116, 131, 139, 206, 207, 215, 219, 221, 228, 229, 251, 272, 366, 368  
 Хаяси Т. 237, 371  
 Хедлунд Г. (Hedlund G.) 263, 283, 370  
 Хопф Э. 371  
  
 Чирков Б. В. 319, 369  
  
 Шарковский А. И. 371  
 Шильников А. П. 253, 363, 369, 370

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 45, 66, 128, 220  
—, жесткий режим 128  
—, механизм возникновения 315  
—, мягкое возбуждение 127  
— периодические разрывные 220  
— связанных маятников 150  
Автоколебательные системы 10, 45, 130  
— —, принудительная синхронизация 130  
Автономная динамическая система 65, 85  
— — — второго порядка 69  
— — — консервативная 27  
— — — с двумя степенями свободы 145, 162  
— — — с одной степенью свободы 40, 117
- Бендиксона критерий 46, 58  
Бифуркационный параметр 21, 31, 42, 176, 241  
Бифуркация 49, 228, 241, 246, 353  
— от сепаратрисы седла 356  
— периодических движений 247, 251  
— синхронизмов 343  
— состояния равновесия 252, 305  
— специфическая 257  
— точечного отображения 276  
Брауэра теорема 290
- Ван-дер-Поля уравнения 119  
Вырожденная система 205, 216 222
- Гипотеза скачка 205, 210  
Гироскопические члены (силы) 115  
Грубость динамических систем 43, 301  
— — — второго порядка 43, 48
- Диаграмма Кёнигса — Ламерея 272  
— Ламерея 70, 111, 113,  
Динамическая система 8  
— — второго порядка неавтономная 320  
— — —, фазовое пространство 40  
— — квазилинейная 65, 115  
— — — автономная с двумя степенями свободы 162  
— —, классификация математических моделей 9  
— — линейная 65  
— — многомерная 228, 230, 303  
— — неавтономная с двумя степенями свободы 168  
— — — с гироскопическими силами 183  
— — нелинейная 10  
— — первого порядка 19  
— — —, фазовый портрет 20  
— — с полной диссипацией энергии 35  
— — сильно нелинейная 66  
— —, фазовое пространство 12, 85  
— —, фазовый портрет 12  
Дюлака критерий 47

- Запаздывания механизм 137
- Кёнигса — Ламерея диаграмма 272  
 — теорема 71, 73
- Консервативные системы второго порядка 27
- Критерий Бендиксона 46, 58  
 — Дюлака 47
- Ламерея диаграмма 70, 111, 113
- Марковский процесс 328, 364  
 — — с двумя состояниями 343
- Метод кривой контактов 139  
 — точечных отображений 66, 69, 74, 76, 78, 271, 274, 305  
 — — —, применение 88, 90, 95, 101, 109  
 — — —, эффективность 239
- Механизм запаздывания 137
- Морса — Смейла системы 263
- Невырожденная система 210
- Особая траектория 13, 41  
 Особые точки 12—15
- Поверхность без контакта 73  
 — секущая 73, 84
- Подкова Смейла 301
- Предельный цикл 12, 44, 45, 49, 76, 132, 139, 220  
 — —, задача отыскания 72  
 — — неустойчивый 46, 128, 357  
 — —, условие устойчивости 45, 70, 73  
 — — устойчивый 45, 49, 71
- Пуанкаре — Дюлака теорема 139, 140  
 — теория периодических движений 257
- Синхронизация принудительная автоколебательных систем 130
- Смейла подкова 301
- Теорема Брауэра 290  
 — Кёнигса 71, 73  
 — Пуанкаре — Дюлака 139, 140
- Теория периодических движений Пуанкаре 257
- Точечное отображение 231  
 — — вспомогательное 292, 296, 305  
 — — кольца в кольцо 289, 355  
 — — окружности в окружность 284  
 — — отрезка полупрямой 72  
 — — плоскости в плоскость 74, 78, 321, 345  
 — — прямой в прямую 272, 330  
 — — сдвига 84, 87, 98, 239  
 — — седловое 297  
 — — сжимающее 291, 296  
 — —, символическое описание 283  
 — —, способ получения 73
- Точка изображающая 12, 41
- Траектория особая 12, 41  
 — фазовая 12, 20, 28, 36, 60, 67, 80, 211, 214, 216, 228  
 — — в трехмерном пространстве 73  
 — — замкнутая 44, 238
- Уравнения Ван-дер-Поля 119
- Условие скачка 210
- Устойчивость движения 13  
 — орбитная 13, 15, 17, 68, 74  
 — по Ляпунову 13, 15, 17  
 — состояния равновесия 13, 21
- Фазовая плоскость 41, 45, 49, 69, 121, 124, 198, 206, 214  
 — — вырожденной системы 206

- Фазовая плоскость, топологическая структура разбиения 40
- траектория 12, 20, 28, 36, 60, 67, 80, 211, 214, 216, 228
  - — в трехмерном пространстве 73
  - — замкнутая 44, 238
- Фазовое пространство 9, 12, 17, 29, 60, 68, 103, 112, 228
- — двумерное 40, 69, 232
  - — многомерное 67, 79, 84, 230, 263
  - — одномерное 19, 27
- Фазовое пространство  $n$ -мерное 82
- — расширенное 85
  - — трехмерное 68, 73, 84, 232
- Фазовый портрет 12, 45
- — динамической системы первого порядка 22
- Функция последования 69
- Ячейка односвязная 41
- , связность 41

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию . . . . .	5
Предисловие к первому изданию . . . . .	6
<b>Глава 1. Математические модели колебательных систем</b>	<b>7</b>
§ 1. Понятие динамической системы . . . . .	8
§ 2. Классификация динамических систем . . . . .	9
§ 3. Автоколебательные системы. Типовые нелинейности . . . . .	10
§ 4. Фазовый портрет динамической системы. Понятие устойчивости движения . . . . .	12
<b>Глава 2. Исследование простейших колебательных систем</b>	<b>19</b>
§ 1. Системы первого порядка . . . . .	19
§ 2. Консервативные системы второго порядка . . . . .	27
§ 3. Системы с полной диссипацией энергии . . . . .	35
<b>Глава 3. Системы второго порядка и их исследование методами качественной теории дифференциальных уравнений</b>	<b>40</b>
§ 1. Фазовая плоскость и качественная картина разбивания фазовой плоскости на траектории . . . . .	40
§ 2. Свойство грубости динамической системы . . . . .	43
§ 3. Автоколебательные системы . . . . .	45
§ 4. Бифуркации динамических систем второго порядка . . . . .	48
§ 5. Примеры исследования конкретных систем методами качественной теории . . . . .	51
<b>Глава 4. Простейшие кусочно-линейные системы (системы с переменной структурой) и их исследование методом точечных отображений</b>	<b>65</b>
§ 1. Сведение рассмотрения поведения фазовых траекторий к точечному отображению прямой в прямую и плоскости в плоскость . . . . .	68
§ 2. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Скользящие движения . . . . .	78
§ 3. Точечное отображение сдвига $T_\tau$ и его применение к изучению вынужденных и параметрических колебаний динамической системы . . . . .	84
§ 4. Примеры исследования динамики систем при помощи метода точечных отображений . . . . .	88



Глава 5. Квазилинейные динамические системы . . .	115
§ 1. Автономные динамические системы с одной степенью свободы . . . . .	117
§ 2. Неавтономные квазилинейные динамические системы с одной степенью свободы . . . . .	129
§ 3. Автономные динамические системы с двумя степенями свободы . . . . .	145
§ 4. Автономные системы с гироскопическими силами	162
§ 5. Неавтономные динамические системы с двумя степенями свободы . . . . .	168
§ 6. Неавтономные динамические системы с гироскопическими силами . . . . .	183
 Глава 6. Разрывные колебания и дифференциальные уравнения с малыми параметрами при (старших) производных	204
§ 1. Рассмотрение вырожденных систем с помощью гипотезы скачка . . . . .	204
§ 2. Уточнение математической модели. Быстрые и медленные движения . . . . .	215
 Глава 7. Введение в качественную теорию и теорию нелинейных колебаний многомерных динамических систем	228
§ 1. Локальное изучение состояний равновесия и периодических движений . . . . .	232
§ 2. Динамические системы с простейшими установившимися движениями . . . . .	257
§ 3. Вспомогательные сведения о точечных отображениях . . . . .	271
1. Преобразование прямой в прямую (272). 2. Отображение окружности в окружность (284). 3. Критерии существования неподвижной точки многомерного точечного отображения (287). 4. Метод вспомогательных отображений (291).	
§ 4. Гомоклинические структуры . . . . .	303
§ 5. Синхронизация и стохастичность . . . . .	314
1. Синхронизация, десинхронизация и многопериодическая стохастичность (316). 2. Притягивающие гомоклинические структуры и стохастические колебания (319).	
3. Численные эксперименты на ЭВМ по изучению притягивающих гомоклинических структур (328). 4. Неавтономные системы, близкие к автономным (335). 5. Синхронизмы разных порядков (337). 6. Стохастический синхронизм (340). 7. Бифуркации синхронизмов (343).	
8. Бифуркация от сепаратрисы седла (356).	
§ 6. Заключение . . . . .	364
Список литературы . . . . .	370
Список дополнительной литературы . . . . .	377
Именной указатель . . . . .	378
Предметный указатель . . . . .	380