

СОЛИТОНЫ

Коллективная монография по одному из интереснейших разделов современной математической физики — методу обратной задачи рассеяния и его приложению к интегрированию нелинейных уравнений в частных производных. Среди авторов — известные ученые из Англии, Италии, СССР, США, Японии.

Для математиков и физиков разных специальностей.

Содержание

| | |
|---|------------|
| Предисловие | 5 |
| 1. Солитон и его история. Р. Буллаф, Ф. Кодри. Перевод С. В. Манакова, С. В. Чудова | 11 |
| 1.1. Открытие Расселом "большой уединенной волны" | 11 |
| 1.2. Определение солитона: N-солитонные решения нелинейных эволюционных уравнений | 15 |
| 1.3. Преобразование Бэклунда и сохранение плотности | 24 |
| 1.4. Другие физические задачи и открытие метода обратной задачи рассеяния | 36 |
| 1.5. Представление нелинейных эволюционных уравнений с помощью пар операторов | 41 |
| 1.6. Открытие других N-солитонных решений. Схема задачи рассеяния 2X2 АКНС-Захарова-Шабата и ее геометрия | 45 |
| 1.7. Дальнейшее развитие метода обратной задачи рассеяния | 60 |
| Литература | 69 |
| 2. Аспекты солитонной физики. Дж. Лэм (мл.), Д. Маклафлин. Перевод Б. А. Дубровина | 78 |
| 2.1. Исторические замечания | 78 |
| 2.2. Модель нелинейной системы | 81 |
| 2.3. Обратная задача рассеяния и интегралы движения | 99 |
| Приложение А. Формальный вывод уравнений Марченко | 115 |
| Литература | 120 |
| 3. Двойное уравнение sine-Gordon: система, имеющая физические приложения. Р. Буллаф, Ф. Кодри, Г. Гиббс. Перевод Б. А. Дубровина | 122 |
| 3.1. Физические основания | 122 |
| 3.2. Теория вырожденной СИП | 128 |
| 3.3. Спиновые волны в жидком ^3He | 139 |
| 3.4. Теория возмущений для двойного СГ-уравнения | 150 |
| Примечание при корректуре | 159 |
| Литература | 160 |
| 4. Нелинейная решетка (цепочка Тоды). М. Тода. Перевод Б. А. Дубровина, П. Б. Медведева | 163 |
| 4.1. Нелинейные решетки | 163 |
| 4.2. Экспоненциальное взаимодействие | 165 |

| | |
|---|------------|
| 4.3. Матричный формализм | 169 |
| 4.4. Непрерывный предел | 172 |
| 4.5. Преобразования Бэклунда | 172 |
| 4.6. Заключительные замечания | 173 |
| Литература | 174 |
| 5. Прямые методы в теории солитонов. Р. Хирота. Перевод П. Б. Медведева | 175 |
| 5.1. Предварительные замечания | 175 |
| 5.2. Свойства D-оператора | 178 |
| 5.3. Решения билинейных дифференциальных уравнений | 180 |
| 5.4. N-солитонные решения уравнений типа КдФ | 182 |
| 5.5. Билинейный вид преобразований Бэклунда | 184 |
| Литература | 192 |
| 6. Обратное преобразование рассеяния. Л. Ньюэлл. Перевод И. М. Кричевера | 193 |
| 6.1. Общие замечания | 193 |
| 6.2. Обобщенная задача Захарова - Шабата на собственные значения | 202 |
| 6.3. Эволюция данных рассеяния | 206 |
| 6.4. Квадраты собственных функции и Фурье-разложения | 210 |
| 6.5. Эволюционные уравнения класса I | 214 |
| 6.6. Гамильтонова структура уравнений класса I | 217 |
| 6.7. Системы с двумя дисперсионными соотношениями | 221 |
| 6.8. Распространение когерентного импульса | 223 |
| 6.9. Движущиеся собственные значения | 227 |
| 6.10. Уравнение sine-Gordon | 231 |
| 6.11. Уравнение Шрёдингера | 234 |
| 6.12. Сингулярная теория возмущения | 239 |
| 6.13. Заключение | 256 |
| Приложение А. Соотношения ортогональности | 262 |
| Приложение В. Доказательство инвариантности формы (6.146) | 263 |
| Приложение С. Соотношения ортогональности и сохранение дваформ, связанных с уравнением Шрёдингера | 264 |
| Литература | 267 |
| 7. Метод обратной задачи рассеяния. В. Е. Захаров. Перевод С. В. Манакова | 270 |
| 7.1. Введение | 270 |
| 7.2. Метод отыскания "L - A" пар | 271 |
| 7.3. Элементарные многомерные обобщения | 276 |
| 7.4. Одевание "L - A" пар | 279 |
| 7.5. Проблема редукции и физическая интерпретация примеров | 284 |
| 7.6. Двумерная неустойчивость солитонов [7.25] | 290 |
| 7.7. Точные решения уравнений нелинейной оптики [7.26] | 293 |
| 7.8. Триада L, A, B | 296 |
| 7.9. Сохранение спектра операторных пучков | 300 |

| | |
|--|------------|
| 7.10. "Одевание" операторных пучков [7.31] | 305 |
| Литература | 309 |
| 8. Обобщенная матричная форма метода обратной задачи рассеяния. | 310 |
| М. Вадати. Перевод И. М. Кричевера | |
| 8.1. Исторические замечания | 310 |
| 8.2. Обратная задача рассеяния | 311 |
| 8.3. Метод обратной задачи рассеяния и интегрируемые уравнения | 315 |
| 8.4. Обобщение на решеточные задачи | 318 |
| 8.5. Заключительные замечания | 321 |
| Литература | 322 |
| 9. Нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые обратным | 323 |
| спектральным преобразованием, ассоциированным с | |
| матричным уравнением Шрёдингера. Ф. Калоджеро, А, | |
| Дегаспирес. Перевод И. М. Кричевера | |
| 9.1. Прямая и обратная задачи для матричного уравнения Шрёдингера; | 323 |
| обозначения | |
| 9.2. Обобщенные соотношения Вронского; основные формулы | 326 |
| 9.3. Нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые обратным | 327 |
| спектральным преобразованием; солитоны | |
| 9.4. Уравнение бумерона и другие интегрируемые нелинейные уравнения, | 334 |
| связанные с ним; бумероны | |
| 9.5. Преобразования Бэклунда | 342 |
| 9.6. Нелинейная суперпозиция | 344 |
| 9.7. Законы сохранения | 345 |
| 9.8. Обобщенная резольвентная формула | 346 |
| 9.9. Нелинейные операторные тождества | 347 |
| Литература | 347 |
| 10. Метод решения периодической задачи для уравнения КдФ и его | 348 |
| обобщений. С. П. Новиков. Перевод Б. А. Дубровина | |
| 10.1. Одномерные системы, допускающие представление Лакса; их | 348 |
| стационарные решения | |
| 10.2. Конечноразмерные линейные операторы | 350 |
| 10.3. Гамильтонов формализм стационарной и нестационарной задач для | 355 |
| уравнения КдФ | |
| 10.4. Функция Ахиезера и ее приложения | 357 |
| Литература | 362 |
| 11. Гамильтонова интерпретация метода обратного преобразования | 363 |
| рассеяния. Л. Д. Фаддеев. Перевод И. М. Кричевера | |
| 11.1. Гамильтонова формулировка | 363 |
| 11.2. Полная "Интегрируемость нелинейного уравнения Шрёдингера | 367 |
| 11.3. Приложения к задаче квантования | 375 |
| Литература | 379 |
| 12. Квантовые солитоны в статистической физике. А. Лютер. Перевод | 380 |
| С. В. Манакова. С. В. Чудова | |

| | |
|---|-----|
| 12.1. Предварительные замечания | 380 |
| 12.2. Квантование и квантовые солитоны | 382 |
| 12.3. Уравнения непрерывного поля | 386 |
| 12.4. Спектр собственных значений | 396 |
| Литература | 398 |
| Дальнейшие заметки о Джоне Скотте Расселле и ранней истории его уединенной волны. Перевод С. В. Чудова | 400 |
| Опубликованные научные работы Расселла | 403 |

Это самое прекрасное и необычайное явление; день, когда я впервые увидел его, был лучшим днем моей жизни. Никому никогда не посчастливилось наблюдать его раньше, или, во всяком случае, понять, что оно значит. Теперь оно известно как уединенная волна трансляции. Никто прежде и вообразить не мог, что уединенная волна возможна. Когда я описал ее сэру Джону Гершелю, он сказал: «Это просто вырезанная половина обычной волны». Но это не так, поскольку обычные волны идут отчасти выше, а отчасти ниже поверхности воды; кроме того, ее форма совсем иная. Это не половина волны, а, несомненно, вся волна целиком, с тем отличием, что волна как целое не находится попеременно то ниже, то выше поверхности, а всегда выше ее. Этого вполне достаточно, чтобы такой холм воды не стоял на месте, а двигался.

Джон Скотт Расселл

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вплоть до начала минувшего десятилетия число точно решаемых физически важных задач было очень невелико. Классический или квантовый осциллятор, линеаризованная многочастичная задача, квантованный атом водорода, ньютоново решение задачи об орбитах планет, решение Онзагерам двумерной задачи Изинга — это перечисление является почти исчерпывающим. Ныне ситуация стала совершенно иной. Имеется множество точно решаемых нелинейных систем, важных с точки зрения физики, причем их число постоянно возрастает. Среди недавних примеров — ограниченное решение эйнштейновских уравнений теории поля (см. [1.207]—[1.209]), точное, по-видимому, решение квантованного уравнения sine-Gordon (СГ-уравнение) $u_{xx} - u_{tt} = \sin u$, которое можно связать с моделями Изинга¹⁾, и решение уравнений движения свободного твердого тела в g измерениях²⁾.

В настоящей книге рассматриваются подобные задачи, но ее главной темой являются солитоны. Эти математические объекты суть точные аналитические решения нелинейных волновых или эволюционных уравнений, вроде СГ-уравнения или уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ) $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$. Открытие Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой в 1967 г. того факта, что для уравнения КдФ существует аналитический метод решения задачи Коши, и сделанное впоследствии открытие, показавшее, что аналогичные методы применимы также к СГ-уравнению и другим нелинейным уравнениям, вызвали революцию в нелинейной физике, изменившую наши взгляды и подход ко многим нелинейным задачам. Нет никаких признаков, что эта революция идет на убыль, а то, что ею уже достигнуто, имеет, по-видимому, непреходящую ценность.

¹⁾ См. гл. 12. В [12.17] показано, что это решение действительно точное

²⁾ Это решение указано в [1.187] и описано в [1.119].

Для непосвященного читателя стоит упомянуть, что, например, приложения СГ-уравнения сейчас охватывают столь различные области, как дислокации в кристаллах, джозефсоновские контакты, спиновые возбуждения в жидком ^3He ниже 2.6 мК (см. гл. 3), наносекундные и более короткие резонансные оптические импульсы (см. гл. 1 и 2), волны зарядовой плотности в одномерных органических проводниках вроде TTF—TCNQ¹⁾ и модели теории поля²⁾. Впервые уравнение КдФ появилось еще в 1895 г. в теории гравитационных волн на мелкой воде, но теперь оно встречается в теории решеток, физике плазмы и магнитогидродинамике. Перечень физических приложений этих и связанных с ними нелинейных уравнений в настоящее время чрезвычайно обширен (см., например, [1.22], [1.23]), и вряд ли можно сомневаться в их физической значимости.

Настоящая книга, посвященная солитонам, была задумана в 1975 г., когда д-р Х. Лоч из издательства Шпрингер высказал убеждение, что сборник статей, освещающих состояние дел в этой возбуждающей интерес области прикладной математики, был бы весьма полезным вкладом в выпускаемую издательством серию «Вопросы современной физики». Это убеждение основывалось отчасти на несомненных возможностях приложений теории солитонов во все новых физических областях, а отчасти на уже ставшей очевидной потребности во всестороннем описании математических методов, необходимых каждому работающему в этой области. В то время (1975 г.) число исследовательских групп, активно разрабатывающих теорию солитонов, было, как мы тогда полагали, очень невелико, и эти группы были четко определенными. Всем нам, работающим в данной области, была очевидна ее важность. Тогда еще существовала возможность в каждом из таких районов мира, как США, Европа, СССР и Япония, выделить две или три группы исследователей, которыми совсем недавно были получены интересные новые результаты по интегрируемым нелинейным эволюционным уравнениям.

По этой причине мы, будущие редакторы этой книги, с удовольствием приняли предложение д-ра Лоча, и нам сразу стало ясно, что поставленной перед нами задаче наилучшим образом отвечал бы сборник работ, написанных ведущими представителями каждой из национальных школ. Конечно, даже тогда не было возможности включить в книгу работы всех крупных исследователей солитонов, и мы старались найти таких

¹⁾ См. [3.21]. Другое прекрасное приложение СГ-уравнения к физике твердого тела связано с одномерным ферромагнетиком CsNiF_3 [J. Phys. C 11, L29 (1978)]. Эксперименты и дополнительные сведения о теории можно найти в работе Кжемса и Стейнера [Phys. Rev. Lett. 31, 1137 (1978)] и обширной литературе, появившейся в 1979 г.

²⁾ См. литературу, цитируемую в разд. 1.2.

ученых, каждый из которых мог бы представлять также и работы нескольких непосредственно с ним связанных коллег. В Японии выбор, естественно, пал на Тоду, Хироту и Вадати — хотя даже в 1975 г. было ясно, что эти выдающиеся исследователи уже тогда могли представлять многих других, интерес которых к солитонам они же и стимулировали. То же самое, и, возможно, еще в большей степени, относится к Л. Д. Фаддееву, В. Е. Захарову и С. П. Новикову из СССР, поскольку языковой барьер не позволил нам в полной мере ознакомиться с достижениями специалистов этой страны в исследовании солитонов. Мы, однако, вполне оценили исключительные достижения этих трех ученых и были очень обрадованы их согласию представить свои работы для настоящего сборника.

Что касается США, то в то время мы не набрались храбрости обратиться к Мартину Крускалу, а принстонская группа, хотя ее работа по уравнению КдФ столь много значила для предмета в целом, по-видимому, распалась. Однако было очевидно, что по крайней мере три школы — из Потсдама, из Института им. Куранта и из университета штата Аризона — должны быть представлены. В качестве старшего партнера группы, разработавшей известную схему АКНС обратной задачи рассеяния, А. Ньюэлл обрадовал нас, согласившись поместить в сборнике свою работу. Питер Лакс и его коллеги из Института им. Куранта благожелательно отнеслись к идее написать статью, но, к нашему сожалению, обстоятельства не позволили им сделать это. Однако Лэм и Маклафлин смогли представить аризонско-висконсинскую школу, что было нам особенно приятно.

Оставался нерешенным вопрос о работах европейских ученых; нам казалось, что, кроме Манчестера, больше нигде в Европе ничего существенного не происходит. Это, однако, было иллюзией: в январе 1976 г. на конференции в Аризоне мы неожиданно узнали об исследованиях Калоджеро, и стало ясно, что он должен быть среди авторов этой книги. Затем летом того же года нам стала известна замечательная последовательность преобразований, использованная Люгером для нахождения спектра квантованного СГ-уравнения. Представлялось необходимым, чтобы в эту книгу, выходящую в серии «Вопросы современной физики», были включены материалы по этой работе, возвещающей важные достижения в статистической механике, физике твердого тела, физике частиц и в изучении связей между этими дисциплинами. Фактически летом 1976 г. стало понятно, что отдельные статьи по физике плазмы и физике частиц столь же необходимы, как и статьи по отмеченным ранее вопросам, и что для чисто математических проблем тоже требуются новые статьи. Именно тогда нам открылась ужасающая истина: эта

книга по солитонам грозит стать неограниченной по объему, и процесс ее написания, видимо, никогда не завершится!

Тем временем обстоятельства приняли такой оборот, что редакторы неожиданно оказались загруженными административными и прочими обязанностями и не могли уделять должного внимания подготовке этой книги. Все или почти все авторы выполнили свою задачу образцово, в срок представив статьи в пригодном для печати виде. Поэтому редакторы с некоторым смущением обнаружили, что они затягивают подготовку книги к печати. Такая задержка подрывает то доверие к оригинальности и творческому уровню работ, какого они заслуживают — ведь многие из них были написаны в 1976 г. Мы хотим воспользоваться случаем и принести глубокие извинения авторам этих статей за то, что мы заставили их так долго ждать публикации, а также за то, что из-за этой задержки нам пришлось просить их внести в свои тексты изменения и дополнения для учета всего нового, что появилось за это время.

Тем не менее в качестве некоторого оправдания укажем на объем работы, с которой нам пришлось столкнуться. В 1975 г. были заложены основы классической теории солитонов; метод обратной задачи рассеяния для решения уравнения КдФ, найденный Крускалом и соавторами в 1967 г., был применен В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом к нелинейному уравнению Шрёдингера; Вадати и Тода обобщили явные решения уравнения КдФ; Вадати удалось решить модифицированное уравнение КдФ $u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$, а Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сегур (АКНС) обобщили 2×2 схему задачи рассеяния Захарова и Шабата. В 1975 г. появились результаты для уравнения КдФ с периодическими граничными условиями, полученные группой из Института им. Куранта, тогда как первая работа С. П. Новикова по этой задаче была опубликована на русском языке несколько ранее. Кроме того, появилось несколько плодотворных физических приложений теории солитонов; возможно, наиболее заметные из них относятся к нелинейной оптике и были осуществлены Лэмом и манчестерской группой. К этому времени обзорная работа Скотта, Чу и Маклафлина [1.4] была доступна примерно в течение двух лет — срок как раз достаточный, чтобы изменить точку зрения всего мирового сообщества физиков.

Специалисты по физике частиц искали фактически свой собственный путь к представлениям о солитонах; в этой связи следует, в частности, отметить работу Дашена, Хаслахаера и Невё [11.23, 11.24], хотя они более чем существенно опирались на результаты представителя «классической» солитонной школы¹⁾

¹⁾ Практически используемое определение «классического» солитона см. в гл. 1.

Л. Д. Фаддеева. Современные представления о солитонах в физике частиц наиболее заметно совпадают с «классическими», являющимися основным предметом настоящей книги, лишь в случае уравнения *sine-Gordon* и связанных с ним систем, вроде нелинейных σ -моделей. Это, однако, нисколько не противоречит тому факту, что классическая теория солитонов оказала за последние четыре года глубокое воздействие на физику частиц, хотя многие достижения последней в свою очередь повлияли на классическую теорию солитонов.

Немало физических приложений солитонов было осуществлено в 1975 г. — в частности, в физике твердого тела, где необходимо отметить работы по волнам зарядовой плотности в нелинейных проводниках, и в статистической механике, примером чего может служить работа Лютера. В физике плазмы, в солитоноподобных теориях ленгмюровской турбулентности (см. [1.193]) и в других областях нелинейной физики концепция уединенной волны также сыграла определенную роль. Достижений чисто математического характера, связанных с солитонной теорией, тоже было немало за эти годы. Полная интегрируемость бесконечномерных систем с солитонными решениями была осознана после замечательной работы Захарова и Фаддеева по уравнению КдФ, появившейся в 1971 г., но приложения алгебраической геометрии для отыскания солитонных решений (см. разд. 1.5), обнаружение связи между многообразиями Якоби и интегрируемыми динамическими системами (см. разд. 1.7), формулировка преобразований Бэклунда с помощью расслоений джетов и применение теории дифференциальных форм Картана к «структурам продолжения» Уолквиста и Эстабрука (см. разд. 1.3 и 1.7) — все это появилось значительно позже. Вследствие столь бурного развития теории солитонов книгу можно было бы закончить до 1975 г. (в той форме, в какой мы задумали ее в 1976 г.); однако позже этого срока осуществление подобного замысла стало почти невыполнимой задачей.

Чтобы все же справиться с ней, мы сделали следующее. Во-первых, сузили круг вопросов, рассматриваемых в тематических главах подробно, и ограничились представленный в них материал (кроме двух исключений) классическими солитонами, методами обратной задачи рассеяния для их отыскания и связанными с ними гамильтоновыми структурами. Во-вторых, к главам, тематика которых в 1976 г. была передним краем текущих исследований, мы запросили у их авторов добавления, доводящие изложение соответствующих вопросов до состояния на апрель 1979 г.¹⁾ В третьих, мы написали большую вводную статью, вошедшую в настоящую книгу в качестве первой главы. В ней мы попытались охватить (по крайней мере с помощью ссылок на

¹⁾ Статьи советских участников сборника остались на уровне 1976 г. — *Прим. ред.*

соответствующую литературу) весь современный диапазон исследований солитонов.

Получившаяся в результате книга не является элементарной; отчасти этот факт отражает природу самого предмета, но, кроме того, он отражает наше убеждение в том, что сейчас назрела необходимость создать первый достаточно полный справочник по солитонам и методам обратной задачи для тех, кто или уже работает с нелинейными задачами, или хочет это делать. Для таких читателей наиболее существенно понимание современных возможностей аналитической теории солитонов. Тем не менее мы попытались в длинной вводной главе осуществить постепенный переход от элементарных физико-математических идей (которые, как мы надеемся, станут еще интереснее, будучи сопровождаемы историческими заметками) к весьма сложному математическому аппарату, применяемому в настоящее время для изучения интегрируемых систем.

Мы сознаем, что книга получилась объемистой; однако стоит подумать о том, что осталось за ее пределами, и становится ясно, что уже сейчас необходим второй том. Мы, учитывая предыдущий опыт, ничего в этой связи не обещаем: теория солитонов уже оказалась в ситуации Тристама Шэнди¹⁾. Мы надеемся тем не менее, что вошедшие в книгу материалы помогут исследователю найти новую область математики, или физики, или какой-нибудь другой науки, имеющую отношение к солитонам, или такую, где инстантоны (см. разд. 1.7) либо другие новые решения приведут к совершенно новым воззрениям. Мы надеемся также, что новичок сможет, прочтя эту книгу, понять, что же представляет собой теория солитонов; ему придется для этого основательно потрудиться, но мы убеждены, что его усилия будут достойно вознаграждены.

Мы признательны нашим коллегам, внесшим вклад в настоящую книгу и проявившим при этом мастерство, глубокие знания и долготерпение. Мы благодарны издательству Шпрингер за быстроту и точность, с которыми оно выпустило книгу, как только ее рукопись была получена. Мы благодарны г-же Памеле Квили за перепечатку рукописи, а также нескольким нашим коллегам, выполнившим перевод статей, написанных на русском языке. Наконец, мы признательны д-ру Х. Лочу из издательства Шпрингер, проявившему при неоднократных отсрочках представления рукописи чудеса терпения.

Манчестер,
май, 1980 г.

*Робин Буллаф
Филипп Кодри*

¹⁾ Тристаму Шэнди потребовалось два года, чтобы описать первые два дня своей жизни. Закончит ли он когда-нибудь свою биографию? Ответ на этот вопрос можно найти в гл. 5 книги Бертрانا Расселла «Mysticism and Logic».

СОЛИТОН И ЕГО ИСТОРИЯ

Р. Буллаф, Ф. Кодри

Настоящая глава представляет собой обзор истории солитона начиная с 1834 г. — даты первого описанного в литературе наблюдения «большой уединенной волны» Дж. С. Расселлом. Солитоны рассматриваются здесь как средства для изучения математических свойств обширного класса интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений; он включает, помимо прочего, уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), уравнение \sin -Gordon и нелинейное уравнение Шрёдингера. С этой целью вводятся уединенные волны, солитоны, преобразования Бäckлунда, сохраняющиеся величины и интегрируемые эволюционные уравнения как полностью интегрируемые гамильтоновы системы; на основе этих понятий в последующих главах более подробно обсуждаются конкретные вопросы теории. Описывается дифференциальная геометрия одного широкого класса нелинейных эволюционных уравнений. Устанавливаются некоторые связи с нелинейными теориями поля и с интегрируемыми многочастичными задачами. Краткая биография Джона Скотта Расселла, составляющая большую часть разд. 1.1, продолжена в виде приложения, помещенного в конце книги.

1.1. Открытие Расселлом «большой уединенной волны»

Методу обратной задачи рассеяния для решения нелинейных эволюционных уравнений вида $u_t = K[u]$, где $K[u]$ некоторый нелинейный функционал от $u(x, t)$, уже около двенадцати лет¹⁾. Своим открытием метод обязан Крускалу и др. [1.1] (1967 г.), которые показали, как решать уравнение КдФ

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \quad (1.1)$$

этим методом и, в частности, как найти все его солитонные решения. Понятие солитона было введено в статье Забуски и Крускала [1.2] в 1965 г.; там же были описаны основные его свойства. Если текущая научная активность является правильной мерой значения этих двух открытий, то они представляют собой наиболее значительный прогресс как в теории нелинейных волн после работ Римана (1826—1866) и Коши

¹⁾ Статья написана в 1979 г. — *Прим. перев.*

(1789—1857) о характеристиках, так и в теории уравнений в частных производных после работы Фурье (1758—1830) по линейным уравнениям. Более того, возможности, представленные нам методом обратной задачи для получения точных аналитических решений теперь уже значительного числа физически интересных нелинейных уравнений, вызвали революцию в самом подходе к нелинейной физике. Одним из следствий является то, что теперь тщательно исследуются нелинейные задачи в тех областях, где совсем недавно только линейные теории были способны выдавать приемлемые результаты. В первой главе мы описываем те шаги в истории солитонов, которые представляются нам важными либо для математической стороны предмета, либо для приложения этой математики к физически интересным проблемам.

Привлекательной чертой теории солитонов является тесная связь физики и математики. Сама теория, безусловно, развилась из наблюдения физического явления, в основе которого, как нам теперь известно, лежит односолитонное решение уравнения КдФ. Это наблюдение сделал в августе 1834 г. Джон Скотт Расселл; его отчет о нем уже неоднократно цитировался [1.4]. Мы здесь снова его приводим, потому что он показывает, какое завораживающее впечатление солитон сразу произвел на Расселла. Сделанное им яркое описание отчасти объясняет интерес, который тот же самый объект вызвал среди физиков и математиков примерно через 140 лет.

Расселл (1808—1882) был лучшим образцом предпринимателя викторианской эпохи. Развитый не по годам, он посещал лекции во всех трех шотландских университетах: Сент-Эндрюс, Эдинбургском и университете г. Глазго, пока не окончил последний в возрасте шестнадцати лет [1.5]. Работая в Отделении естественной истории в Эдинбурге в 1832—1833 г., он получил задание изучить пропускную способность канала Юнион, который начинается у Эдинбурга, соединяется с каналом Форз—Клайд и тем самым соединяет оба побережья Шотландии, что могло бы способствовать более экономичному использованию пароходов. Вероятно, именно в процессе этих исследований он доложил о следующем наблюдении [1.3]:

«Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась; вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т. е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, несколько не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом, и, когда я на-

гнал его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышен^юя длиной около тридцати футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые довелось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я назвал волной трансляции; теперь это название общепринято.

С тех пор я обнаружил, что такие волны играют важную роль почти во всех случаях, когда жидкость оказывает сопротивление движению, и пришел к убеждению, что к тому же типу относятся огромные движущиеся повышения уровня моря, которые с регулярностью обращения небесного тела входят в наши реки и катятся вдоль наших побережий.

Для подробного изучения этого явления с целью точно установить его природу и управляющие им законы я придумал другие, более удобные способы его вызывать, чем только что описанный, и применил разнообразные методы наблюдения. Описание этих методов, надеюсь, поможет мне передать истинное представление о природе этой волны.

Происхождение волны первого рода...»

Как показывают последние строки приведенной цитаты, Расселл затем классифицировал волновые движения жидкости и проводил эксперименты с водой, чтобы их наблюдать. Он различал четыре рода таких движений, I, II, III и IV, и два типа волн, уединенные и групповые; к групповым волнам он относил колебательные волны на воде и волновые группы (род II), а также капиллярные волны (род III). Его волна трансляции относилась к роду I и была уединенной; впоследствии Расселл назвал ее «большая уединенная волна». Волна рода II, которую он называл корпускулярной, была уединенной, и по причинам, отмеченным ниже, фактически была звуковой волной¹⁾.

Идея уединенной волны во всяком случае дошла до наших дней, и теперь так называют всякий (обычно колоколообразный) плоский волновой импульс, перемещающийся в одном направлении в пространстве и сохраняющий при этом свою форму (это волна с постоянным профилем, или постоянного типа [1.6]). Любая колоколообразная функция $u(x - Vt)$ есть уединенная волна, бегущая вдоль оси x со скоростью V . Решение типа уединенной волны для уравнения КдФ вида (1.1) дается формулой

$$u = -2\eta^2 \operatorname{sech}^2 [\eta(x - 4\eta^2 t)] \quad (1.2)$$

и распространяется со скоростью $4\eta^2$. Оно отрицательно лишь в силу выбора знака для u , подразумеваемого формой

¹⁾ См. приложение.

уравнения (1.1). Легко видеть, что масштабное преобразование $u \rightarrow -u/6$ дает другую форму уравнений КдФ, а именно

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.3)$$

с решением типа уединенной волны

$$u = 12\eta^2 \operatorname{sech}^2 [\eta(x - 4\eta^2 t)] = \quad (1.4)$$

$$= 3\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\alpha}{2}(x - \alpha^2 t) \right], \quad (1.5)$$

где $\alpha \equiv 2\eta$. Отметим, как связаны скорости ($4\eta^2$ или α^2) с амплитудами ($12\eta^2$ или $3\alpha^2$). Очевидно, что импульсы с большей амплитудой движутся быстрее. Такая связь встречается только среди нелинейных систем¹⁾.

Уравнение КдФ описывает любую слабо нелинейную, слабо диспергирующую систему плоских волн. Для уединенной волны нелинейность uu_x точно уравновешивает дисперсию u_{xxx} . В теории гравитационных волн на мелкой воде это уравнение естественно возникает [1.7] в виде

$$u_t + \frac{3}{2} \frac{c_s}{h} uu_\xi = \frac{1}{2} c_s h^2 \left(\frac{\gamma}{\rho g h^2} - \frac{1}{3} \right) u_{\xi\xi\xi}. \quad (1.6)$$

Независимая переменная ξ — это $x - c_s t$, а скорость звука (линеаризованная скорость) есть $c_s = \sqrt{gh}$; здесь h — глубина в отсутствие возмущения, γ — поверхностное натяжение воды, а ρ — ее плотность; решение типа уединенной волны всюду положительно при $\gamma/(\rho g h^2) < 1/3$ и всюду отрицательно при $\gamma/(\rho g h^2) > 1/3$. При $\gamma/(\rho g h^2) \approx 1/3$ для предотвращения несостоятельности теории необходимо учитывать производную более высокого порядка $u_{\xi\xi\xi\xi}$.

Уравнение (1.6) описывает волны в достаточно широких каналах с неизменным поперечным сечением, и именно его положительное решение Расселл наблюдал в 1834 г. Эти факты ему не были известны, но он эмпирически нашел [1.3] с помощью серии хорошо поставленных опытов, упомянутых в приведенной выше цитате, важное соотношение между скоростью c решения (1.6) типа уединенной волны и его максимальной высотой над уровнем свободной поверхности:

$$c^2 = g(h + k). \quad (1.7)$$

Эта формула противоречит данным Эйри, который теоретически получил совершенно другой результат [1.3, 1.8]. В самом деле, если положить γ тождественно равным нулю, то скорость c ре-

¹⁾ Уравнения КдФ (1.1) и (1.3) инвариантны относительно масштабного преобразования $u(x, t) \rightarrow \eta^2 u(\eta x, \eta^3 t)$. Поскольку $12 \operatorname{sech}^2(x - 4t)$ есть решение уравнения (1.3), то формула (1.4) дает однопараметрическое семейство решений этого уравнения.

шения типа уединенной волны уравнения (1.6) определится соотношением $c = c_s(1 + k/2h)$. Результат $c = c_s(1 + k/h)^{1/2} = \sqrt{g(h+k)^{1/2}}$ справедлив лишь для решений типа уединенной волны уравнений Буссинеска [1.9]

$$u_{tt} = c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u + \frac{3}{2} \frac{u^2}{h} + \frac{h^2}{3} u_{xx} \right). \quad (1.8)$$

Оно допускает решения типа уединенной волны вида $u = k \operatorname{sech}^2[(3k/h^2)^{1/2}(x \pm ct)]$, движущиеся в положительном или отрицательном направлении оси x . Уравнение Буссинеска превращается в уравнение КдФ с одним направлением распространения заменой $\xi = x - gt$ и $\tau = et$ и отбрасыванием членов порядка $O(\varepsilon^2)$.

Расселл впоследствии основал на своей формуле (1.7) некоторые примечательные и, возможно, чрезмерно далеко идущие гипотезы. Интересующийся читатель может прочесть о них и дальнейшей профессиональной карьере самого Расселла в приложении. Уединенная волна привлекла внимание Буссинеска, Рэлея и других и активно обсуждалась, пока не появилась работа Кортевега и де Фриза [1.7], написанная в 1895 г. По-прежнему волнующая борьба мнений и идей, сопровождавшая уединенную волну в то время, описана в приложении (см. также [1.10—1.20]). Здесь достаточно сказать, что расселлова «уединенная волна» была весьма удачно придумана и создала фундамент, на котором можно основать современную теорию солитонов. Само понятие солитона вводится в разд. 1.2.

1.2. Определение солитона: N -солитонные решения нелинейных эволюционных уравнений

Последующая история солитонов есть на самом деле история трех нелинейных эволюционных уравнений, а именно уравнений КдФ (1.1), (1.3) или (1.6), нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2u|u|^2 = 0 \quad (1.9)$$

и уравнения sine-Gordon (СГ-уравнения)

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u. \quad (1.10)$$

Последнее принимает форму

$$u_{xt} = \sin u \quad (1.11a)$$

в переменных светового конуса $(x+t)/2 \rightarrow x$, $(x-t)/2 \rightarrow t$. Оно становится эволюционным уравнением

$$u_t = \int_{-\infty}^x \sin [u(x', t)] dx' \quad (1.11b)$$

при наложении граничных условий $u(x, t) \rightarrow u_0 \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $u_x, u_{xx} \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$, подразумеваемых для (1.11а); в любом случае оно является эволюционным уравнением по отношению к u_x , что и принимается обычно при решении этого уравнения. СГ-уравнение впервые появилось в физике в теории дислокаций [1.21]. Оно описывает распространение вращений, условных или настоящих, в различных физических системах [1.22, 1.23], например распространение флюксонов в джозефсоновских контактах [1.23—1.25] и распространение резонансных ультракоротких оптических импульсов [1.23, 1.24, 1.26, 1.27]. Некоторые приложения описаны Лэмом и Маклафлином в гл. 2, а также нами в гл. 3.

Нелинейное уравнение Шрёдингера выделяется среди этих трех уравнений тем, что в нем $u(x, t)$ является комплексной, а не вещественной величиной. Оно управляет эволюцией любой слабо нелинейной, сильно диспергирующей квазимонохроматической волны и, в частности, описывает эволюцию волны на глубокой воде [1.28]. КдФ описывает слабонелинейный режим со слабой дисперсией на мелкой воде, тогда как четвертое уравнение, уравнение простой волны

$$u_t + uu_x = 0, \quad (1.12)$$

управляет сильно нелинейными недиспергирующими волнами. Как мы увидим, это уравнение также сыграло роль в развитии предмета, однако в отличие от КдФ, НУШ и СГ оно не имеет солитонных решений. Скажем вкратце, что мы понимаем под последними, поскольку они являются предметом всей этой книги.

Уединенная волна (1.5) уравнения КдФ (1.3) есть единственное решение вида $u(x - Vt)$, удовлетворяющее граничным условиям $u \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Забуски и Крускал [1.2] имели дело с периодическими граничными условиями. Тем не менее они сделали замечательное наблюдение, установив, что произвольное начальное возмущение $u(x, 0)$ превращается при $t \rightarrow \infty$ в набор уединенных волн, каждая из которых имеет форму (1.5), асимптотически хорошо разделенных и движущихся с различными скоростями. Такое поведение в действительности было известно Расселлу [1.3]. Забуски и Крускал выдвинули на первый план другое свойство солитонов, а именно то, что два импульса формы (1.5) при $x = -\infty$, $t \rightarrow -\infty$ могут столкнуться в области конечных x , но выходят из столкновения с неизменными формами и скоростями. Имеется некоторый сдвиг их положений в выражениях (1.5) при $t \rightarrow \infty$ (фазовый сдвиг). Этот сдвиг обычно мал, но не всегда [1.29]. Мы примем поэтому в качестве рабочего определения солитона следующее. *Солитон — это уединенная волна, сохраняющая свою форму и скорость после столкновения с другой такой уединенной волной.*

Эти требования к уединенной волне являются весьма жесткими. Возьмем, например, «уравнение φ^4 », получившее свое название от плотности гамильтониана $H = \varphi_t^2/2 + \varphi_x^2/2 \pm (\varphi^2/2 - \varphi^4/4)$. Энергия ограничена снизу в случае знака минус. В таком виде это уравнение используется как модель в теории поля [1.30, 1.31]. Уравнения движения в терминах зависимой переменной $u \equiv \varphi$ суть

$$u_{xx} - u_t = \pm (u - u^3). \quad (1.13)$$

Они имеют решение в виде уединенной волны

$$u = \pm \operatorname{sech} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (1.14)$$

(знак «+» в (1.13)) или решения типа «кинк» («антикинк»)

$$u = \pm \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (1.15)$$

(знак «-» в (1.13)). Ни решения (1.14), удовлетворяющие условиям $u \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$, ни кинки, удовлетворяющие $u \rightarrow \pm 1$, $x \rightarrow -\infty$ и $u \rightarrow \mp 1$, $x \rightarrow \infty$, не обладают требуемыми простыми столкновительными свойствами солитона. Эти решения могут неупруго сталкиваться, сцепляясь или уничтожая друг друга [1.32]; кроме того, в процессе столкновения они всегда испускают некоторое осциллирующее возмущение, или «излучение» [1.32]. С другой стороны, уединенные волны или кинки довольно большого числа двумерных уравнений имеют солитонные столкновительные свойства. Среди них — уравнения КдФ, НУШ, СГ.

Заметим, что солитон (1.5) с параметром $\alpha = \alpha_2 > \alpha_1$ будет обгонять второй солитон с параметром α_1 . Ясно, что он пройдет через второй солитон, так что асимптотически солитоны поменяются местами. Точно так же набор N солитонов уравнения КдФ с параметрами $\alpha_N > \alpha_{N-1} > \dots > \alpha_1$, упорядоченные в последовательность $N, N-1, \dots, 1$, при $t \rightarrow -\infty$ станут упорядоченными естественным образом $1, 2, \dots, N$ при $t \rightarrow \infty$. Такая интерпретация, однако, субъективна, поскольку можно считать, что солитоны, сохраняя порядок, просто обмениваются энергией, импульсом (и амплитудой) в процессе столкновения. Такое частицеподобное поведение и объясняет происхождение термина «солитон» [1.2].

Вторая интерпретация может быть сохранена, хоть и не в таком простом виде, и в случае столкновения решений типа бризера и кинка СГ-уравнения. Аналитическая форма этих двух решений дается формулами (1.29) и (1.23) соответственно. Само решение типа бризер плюс кинк содержит три параметра a_i и может быть найдено из (1.22). Первое впечатление состоит в том что бризер проходит через кинк, приобретая лишь

фазовый сдвиг. Основное, однако, в этих двух различных, но одинаково разумных интерпретациях состоит в том, что, во-первых, столкновения являются упругими, так что никакого дополнительного возмущения вроде «излучения» в процессе столкновения не возникает, и, во-вторых, решения могут быть найдены аналитически для всех времен с помощью, например, метода обратной задачи.

В качестве примера мы дадим N -солитонное решение уравнения КдФ (1.3). Граничные условия суть $u \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$, и солитонное решение имеет вид

$$u = 12(\ln F)_{xx}, \quad F = \det F_{nm},$$

$$F_{nm} = \delta_{nm} \frac{2(\alpha_n \alpha_m)^{1/2}}{\alpha_n + \alpha_m} f_n, \quad (1.16)$$

$$f_n = \exp[\alpha_n(x - x_n) + \alpha_n^3 t],$$

где α_n и x_n — вещественные параметры. Насколько нам известно, решение в такой форме было впервые дано Хиротой [1.33], который использовал прямой метод (см. гл. 5), а не метод обратной задачи. Хирота работал с уравнением (1.1), и его решение получается из (1.16) масштабным преобразованием.

В частном случае $N = 2$

$$F = 1 + f_1 + f_2 + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\right)^2 f_1 f_2. \quad (1.17)$$

Из (1.16) можно найти, что при $f_1 \approx 1$, $f_2 \ll 1$

$$u = \frac{12\alpha_1^2 f_1}{(1 + f_1^2)} = 3\alpha_1^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\alpha_1}{2} (x - x_1 - \alpha_1^2 t) \right], \quad (1.18)$$

тогда как при $f_1 \approx 1$, $f_2 \gg 1$

$$u = 12\alpha_1^2 \bar{f}_1 / (1 + \bar{f}_1^2), \quad \bar{f}_1 = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\right)^2 f_1$$

и

$$u = 3\alpha_1^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\alpha_1}{2} (x - \bar{x}_1 - \alpha_1^2 t) \right],$$

где

$$\bar{x}_1 = x_1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right). \quad (1.19)$$

Таким образом, при $f_1 \approx 1$ u имеет вид уединенной волны (1.5), если f_2 очень мало или очень велико; в последнем случае, однако, u испытывает сдвиг аргумента (фазовый сдвиг) $\ln[(\alpha_2 + \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1)]^2$ по отношению к первому случаю.

Положим $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ и $x_2 \ll x_1 < 0$. Тогда при $t = 0$ больший солитон с параметром α_2 расположен существенно левее меньшего, имеющего параметр α_1 . В самом деле, для $x = x_1 + \alpha_1^2 t$ при $t \approx 0$ получим $f_1 = 1$ и $f_2 \ll 1$, в то время как для

$x = \bar{x}_1 + \alpha_1^2 t$ при $t \rightarrow \infty$ $f_1 = 1$, $f_1 \approx 1$, $f_2 \gg 1$. Можно видеть, что при возрастании t от нуля больший солитон проходит через меньший, вызывая сдвиг аргумента $\ln[(\alpha_2 + \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1)]^2$. Аналогично для $x = \bar{x}_2 + \alpha_2^2 t$ при $t \approx 0$, $f_2 \approx 1$, $f_1 \gg 1$, тогда как для $x = x_2 + \alpha_2^2 t$, $t \rightarrow \infty$ $f_2 = 1$, $f_1 \ll 1$, и можно видеть, что больший солитон, проходящий через меньший, получает сдвиг аргумента $-\ln[(\alpha_2 + \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1)]^2$. Анализируя аналогичным образом N -солитонное решение, можно найти, что i -й солитон приобретает сдвиг аргумента

$$\delta_i = \sum_{j \neq i} \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \operatorname{sgn}[i - j] \ln \left(\frac{\alpha_i + \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \right)^2. \quad (1.20)$$

Таким образом, сдвиг δ_i есть сумма сдвигов при парных столкновениях, тогда как $\sum_{i=1}^N \delta_i = 0$, и полный фазовый сдвиг сохраняется. Отсутствие многочастичных эффектов связано [1.34] с наличием высших интегралов движения у уравнения КдФ. Эти интегралы описаны в разд. 1.4. Асимптотическое поведение решений КдФ рассматривалось Гарднером и др. [1.1], а также Гиббоном и Эйббеком [1.35]. Использованное здесь рассуждение заимствовано нами в основном из работы Уизема [1.36].

Итак, три весьма различных на вид уравнения — КдФ (1.3), НУШ (1.9) и СГ (1.10) или (1.11) — имеют N -солитонные решения, в то время как уравнение φ^4 таковых не имеет. Уравнение простых волн (1.12) их также не имеет, поскольку оно вообще не имеет решений типа уединенной волны; это уравнение, однако, имеет бесконечный набор интегралов движения в инволюции [1.37]. Значение последних для солитонных решений будет рассмотрено в разд. 1.4.

Прежде чем идти дальше, сделаем замечание о методе обратной задачи рассеяния для решения нелинейных эволюционных уравнений $u_t = K[u]$, поскольку мы думаем, что это будет полезно читателю. Указанный метод и его история описаны в разд. 1.4—1.6. Для тех, кто не слыхал об этом методе раньше, скажем, что его основная идея состоит в следующем: поскольку никакого прямого способа построения $u(x, t)$ по начальным данным обычно нет, можно попытаться связать с данным уравнением некоторую задачу рассеяния с рассеивающим потенциалом $u(x, t)$. Например, для уравнения КдФ задачей рассеяния является задача на собственные значения для оператора Шрёдингера $[-\partial^2/\partial x^2 + u(x, t)]\psi = \pm k^2\psi$. Начальное условие $u(x, 0)$ отображается с помощью задачи рассеяния на так называемые «данные рассеяния». Далее оказывается, что эволюция этих данных может быть найдена из нелинейного эволюционного уравнения. Последним шагом является вычис-

ление потенциала $u(x, t)$ по данным рассеяния в момент времени $t = 0$. Это может быть сделано с помощью линейных методов так называемой «обратной» задачи. Итак, $u(x, t)$ найдено! Уравнения КдФ, НУШ, СГ — все они могут быть решены этим методом. Однако простейшая задача рассеяния для СГ-уравнения и НУШ — это не задача на собственные значения для оператора Шрёдингера.

Симметрия задачи рассеяния оказывает влияние на форму солитонного решения. Например, односолитонное решение НУШ (1.9), найденное Захаровым и Шабатом с помощью задачи рассеяния 2×2 [1.35], имеет вид

$$u = \frac{2\eta \exp[-4i(\xi^2 - \eta^2)t - 2i\xi x + i\delta]}{\operatorname{ch}[2\eta(t - t_0) + 8\eta\xi t]}, \quad (1.21)$$

где ξ , η , δ и x_0 — свободные параметры. Это решение представляет собой «солитон огибающей», в котором огибающая, имеющая форму гиперболического секанса, модулирует монохроматическую «несущую волну» числителя. В этом солитоне связь между скоростью и амплитудой, характерная для солитонов КдФ, полностью отсутствует. Метод обратной задачи дает тому ясное объяснение [1.38]. Солитоны описываются связанными состояниями задачи рассеяния; в случае НУШ задача рассеяния допускает комплексные собственные значения ζ , $\zeta = \xi + i\eta$ ($\eta > 0$), причем ξ и η оказываются параметрами в (1.21). В противоположность этому собственные значения уравнения Шрёдингера лежат исключительно на мнимой оси $\zeta = i\eta$ ($\eta > 0$). Итак, параметр η определяет амплитуду, а ξ — скорость солитона НУШ (1.21); параметр η определяет как скорость, так и амплитуду солитонного решения (1.2) уравнения КдФ.

В случае СГ-уравнения появляются некоторые новые особенности. N -солитонное решение этого уравнения имеет вид [1.39]

$$\begin{aligned} \cos u(x, t) &= 1 - 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \cdot \ln F, \\ F &= \det M_{ij}, \\ M_{ij} &= 2(a_i + a_j)^{-1} \cdot \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j)\right], \\ \theta_j &= \gamma_j(x - V_j t - x_j), \\ a_j^2 &= (1 - V_j)(1 + V_j)^{-1}, \quad \gamma_j^2 = (1 - V_j^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где a_j и γ_j имеют один и тот же знак и где a_j и x_j — свободные параметры. Прежде всего заметим, что односолитонное решение является «кинком»

$$u = 4 \operatorname{arctg} \exp\left[\pm \frac{x - x_1 - V_1 t}{(1 - V_1^2)^{1/2}}\right]. \quad (1.23)$$

Если в (1.23) взят положительный знак, то кинк удовлетворяет граничным условиям $u \rightarrow 0$, $x \rightarrow -\infty$; $u \rightarrow 2\pi$, $x \rightarrow +\infty$ (2 π -кинк). Имеется также соответствующий антикинк (знак «-»), имеющий асимптотики $u \rightarrow 2\pi$, $x \rightarrow -\infty$; $u \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$ (-2 π антикинк). В противоположность кинкам и антикинкам (1.15) уравнения ϕ^4 , кинки и антикинки СГ-уравнения сталкиваются между собой или друг с другом как солитоны. Заметим, что в обоих случаях величина

$$u_x = \pm \frac{2}{(1-V_1^2)^{1/2}} \operatorname{sech} \left[\frac{x-x_1-V_1 t}{(1-V_1^2)^{1/2}} \right] \quad (1.24)$$

имеет характер уединенной волны колоколообразной формы, т. е. u_x является настоящим солитоном. Граничные условия для СГ-уравнения есть поэтому $u \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$, $u_x, u_{xx} \rightarrow 0$, когда $|x| \rightarrow \infty$, как мы и предполагали для уравнения (1.11).

Двухсолитонное решение представляет собой 4 π -кинк:

$$\begin{aligned} u &= 4 \operatorname{arctg} \frac{\sin [(\theta_1 + \theta_2)/2]}{(a_{12})^{1/2} \operatorname{ch} [(\theta_1 + \theta_2)/2]}, \\ a_{12} &= (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2)^{-2}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Асимптотически [1.39]

$$u(x, t) \equiv 4\pi \operatorname{arctg} \exp(\theta_1 + \delta_1^\pm) + 4 \operatorname{arctg} \exp(\theta_2 + \delta_2^\pm)$$

при $t = \pm \infty$, где

$$\delta_1^\pm = -\delta_2^\pm = \frac{1}{2} \ln a_{12}. \quad (1.26)$$

В N -солитонном столкновении (2 $N\pi$ -кинк)

$$\delta_i^\pm = \pm \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \ln a_{ji} \mp \sum_{j=i+1}^N \ln a_{ij} = \pm \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \operatorname{sgn}(i-j) \ln a_{ij}, \quad (1.27a)$$

$$\sum_{j=1}^N (\delta_i^+ - \delta_i^-) = 0. \quad (1.27b)$$

Заметим далее, что выбирая в качестве свободных параметров комплексно-сопряженные пары

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2^* = a_R + ia_I = ae^{i\mu}, \\ x_1 &= x_2^* = x_R + ix_I, \end{aligned} \quad (1.28)$$

мы получаем «дышащие» солитоны — бризеры

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} r \sin \theta_I \operatorname{sech} \theta_R, \quad (1.29a)$$

где

$$\theta_R = \frac{\cos \mu}{(1 - V^2)^{1/2}} (x - Vt) - \frac{1}{2} a_R x_R, \quad \theta_I = \frac{\sin \mu}{(1 - V^2)^{1/2}} (t - Vx) - \frac{1}{2} a_I x_I, \\ r = a_R a_I^{-1} = \operatorname{ctg} \mu, \quad V = (1 - a^2)(1 + a^2)^{-1}. \quad (1.29b)$$

В нелинейной оптике это решение называется «0л-импульсом», поскольку в нем u меняется от нуля до нуля при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$. Точно так же кинк именуется 2π -импульсом. Такая терминология связана с тем, что наблюдаемой величиной является электрическое поле $\varepsilon \sim (u_t + u_x)$ (в действительности наблюдается интенсивность ε^2). В теории, описанной в гл. 2, импульс имеет «площадь» 2π , если он представляет собой 2π -кинк; площадь равна нулю, или 0π , если импульс является бризером (1.28).

В произвольной системе отсчета энергия бризера легко вычисляется и равна [1.39]

$$16\gamma_R [r^2(1 + r^2)^{-1}]^{1/2} = 16\gamma_R \cos \mu, \quad (1.30)$$

где $\gamma_R^2 = (1 - V^2)^{-1}$. Бризер поэтому имеет массу покоя $16 \cos \mu$. Соответствующая энергия 2π -кинка (1.23) равна $8\gamma_1$, а для 4π -кинка (1.25) она есть $8\gamma_1 + 8\gamma_2$. Масса кинка поэтому равна 8. Заметим, что бризер осциллирует с частотой $(1 - V^2)^{-1/2} \sin \mu$. В системе отсчета $V = 0$, $a = 1$ $u(x, t)$ представляет собой стоячую волну

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{ctg} \mu \sin \left[(\sin \mu) \left(t - \frac{1}{2} x_I \right) \right] \operatorname{sech} \left[(\cos \mu) x - \frac{1}{2} x_R \right] \right\}, \quad (1.31)$$

осциллирующую с внутренней частотой $\sin \mu$. Ей соответствует та внутренняя степень свободы, которая при квантовании СГ-уравнения дает нетривиальный дискретный спектр [1.40, 1.42]. Колеман [1.43] дал простое объяснение этому спектру. Другой подход к квантованию СГ-уравнения, идущий от связанных с ним задач статической физики, изложен в гл. 12.

Как уже отмечалось, бризеры, кинки и антикинки ведут себя как солитоны при столкновениях. СГ-уравнение может быть решено с помощью обратной задачи для системы двух уравнений первого порядка [1.44, 1.45]. Уравнения КдФ и НУШ также решаются этим способом [1.38, 1.44]. У уравнений, разрешимых посредством 2×2 схемы обратной задачи рассеяния, предложенной Захаровым и Шабатом [1.38], а также Абловицем, Каупом, Ньюэллом и Сегуром (АКНС) [1.44, 1.45], не может

быть более сложных солитонов, чем sech (или sech^2 для уравнения КдФ), кинки и бризеры.

Заметим, что два солитона уравнения КдФ или два кинка СГ-уравнения должны двигаться с различными скоростями (взгляните на выражения (1.16) и, скажем, (1.25)); поэтому любое возмущение, содержащее их, должно распасться. С другой стороны, любое число солитонов НУШ могут двигаться с одной и той же скоростью, и любое число бризеров СГ-уравнения также может иметь одинаковую скорость, которая притом может совпадать со скоростью одиночного кинка или антикинка. Это происходит потому, что скорости бризеров СГ-уравнения определяются из его задачи рассеяния модулями пар комплексных собственных значений $(\xi, -\xi^*)$; аналогично (сравните с (1.9)) скорость солитона НУШ определяется $\text{Re}\{\xi\}$. Конечно, может существовать любое число различных комплексных собственных значений ξ с заданными $|\xi|$ или $\text{Re}\{\xi\}$.

Читателю, желающему подробнее узнать о том, как можно быстро выявить в общих чертах поведение солитонов, взглянув на связанные с ними задачи рассеяния, мы рекомендуем прочитать гл. 6 и 9, например. Мы также рекомендуем ознакомиться с формулами (1.100) и (1.101) настоящей главы и со следующими за ними рассуждениями. Однако и теперь уже ясно, что у уравнения КдФ не может быть никаких решений типа бризеров: собственные значения связанных состояний для этого уравнения лежат на мнимой оси, $\xi = i\eta$ ($\eta > 0$), и они не могут встречаться парами. Заметим также, что для задач рассеяния более общего вида солитонные решения могут быть более сложными. Захаров и Манаков [1.46], а также Кауп [1.47] решили задачу о взаимодействии трех волн

$$\begin{aligned} u_{1,t} + v_1 v_{1,x} &= iqu_2 u_3^*, \\ u_{2,t} + v_2 u_{2,x} &= iqu_1 u_3, \\ u_{3,t} + v_3 u_{3,x} &= iqu_1 u_2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

(мы приводим здесь только случай затухания [1.22, 1.46, 1.47]) с различной степенью полноты в 1973 и в 1976 гг. Решение методом обратной задачи требует применения схемы 3×3 . Система (1.32) недиспергирующая, но она обладает солитонными решениями. Здесь все три u_i суть комплексные волновые пакеты, q — константа взаимодействия, а v_i суть вещественные постоянные скорости. Число солитонов в процессе рассеяния не сохраняется [1.46, 1.47]. В гл. 7 Захаров обсуждает решение задачи N -волнового взаимодействия, проявляющее еще более необычное поведение, а в гл. 9 Калоджеро и Дегасперис описывают «бумероны» и «траппоны», являющиеся простыми солитонами с причудливыми траекториями.

Мы сделали эти разнообразные замечания с целью познакомить читателя с некоторыми элементарными представлениями, связанными с понятием солитона. В оставшейся части главы мы изложим историю вопроса с тем, чтобы ввести некоторые значительно более глубокие математические и физические идеи.

1.3. Преобразование Бэклунда и сохранение плотности

Работа Расселла послужила отправной точкой для статей Буссинеска [1.9], Рэлея [1.16] и Кортвега и де Фриза [1.7]. Она основывалась на физических соображениях и не привела к сколь-нибудь существенным математическим результатам, пока не появились работы Забуски и Крускала [1.2] и Гарднера с соавторами [1.1]. С другой стороны, СГ-уравнение впервые возникло в математическом контексте, а именно в дифференциальной геометрии при изучении псевдосферических поверхностей — поверхностей с постоянной отрицательной кривизной [1.27]. В недавней статье Лунда [1.48] эти более ранние исследования продолжены и проиллюстрированы примерами; мы вернемся к ней в разд. 1.6. Там же будут указаны более новые исследования геометрии солитонов.

Отметим, однако, что еще до появления (приблизительно в 1883 г.) СГ-уравнения Лиувилль [1.49] привел в 1853 г. общее решение связанного с ним нелинейного уравнения Клейна — Гордона

$$u_{xt} = \exp(mt), \quad (1.33)$$

где m — параметр. Мы недавно [1.50] применили преобразование Бэклунда для получения из общего решения $u = f(x) + g(t)$ уравнения $u_{xt} = 0$ найденного Лиувиллем общего решения уравнения (1.33)

$$\exp(mt) = \exp[m(f - g)] \left[k \int^x \exp(mf) dx' + \frac{1}{2} k^{-1} m \int^t \exp(-mg) dt \right]^{-2}, \quad (1.34)$$

где k — параметр. Здесь удобно ввести преобразование Бэклунда (ПБ). Такое преобразование, позволяющее получить решение (1.34) уравнения (1.33), имеет вид [1.50]

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x + \frac{2k}{m} \exp\left[\frac{1}{2} m(u + u')\right], \\ u'_t &= -u_t - k^{-1} \exp\left[\frac{1}{2} m(u - u')\right]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Это преобразование, связывающее решение u одного уравнения с решением u' второго уравнения, — типичный пример

ПБ. Заметим, что из условия интегрируемости $u'_{xt} = u'_{tx}$ можно получить как $u_{xt} = \exp(mt)$, так и $u'_{xt} = 0$; следовательно, это и будут те два уравнения, которые связаны ПБ. Из (1.35) при $u' = f(x) + g(t)$ легко получаем

$$d \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} m(u - f + g) \right] \right\} = k \exp(mf) dx + \frac{m}{2k} \exp(-mg) dt. \quad (1.36)$$

Отсюда сразу следует (1.34).

Уравнение Луивилля (1.33) и СГ-уравнение (1.11a) в конусных переменных суть частные случаи обобщенного уравнения Клейна — Гордона

$$u_{xt} = F(u). \quad (1.37)$$

Однако солитонных решений уравнения (1.33) не существует, поскольку ни $u = 0$, ни $u = \text{const}$ не являются его решениями¹⁾. Нелинейные уравнения Клейна — Гордона вроде (1.37) могут допускать как преобразования Бэклунда (ПБ), так и автопреобразования Бэклунда (АПБ). В первом случае преобразование связывает решения двух различных уравнений, во втором — решения одного и того же уравнения. Уравнение (1.37) допускает АПБ тогда и только тогда, когда $\tilde{F}(u) + \alpha^2 F(u) = 0$ для некоторого α (включая случай $\alpha = 0$) [1.50, 1.54], где \tilde{F} обозначает вторую производную. Частный случай этой ситуации, а именно АПБ с произвольным вещественным параметром k вида

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x + 2k \sin \frac{u + u'}{2}, \\ u'_t &= -u_t - 2k^{-1} \frac{u - u'}{2}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

связывающее два решения u и u' СГ-уравнения в конусных переменных (1.11a), был известен Бэклунду еще до 1883 г. [1.55]. В этом примере из условия интегрируемости $u'_{xt} = u'_{tx}$ одновременно следует $u_{xt} = \sin u$ и $u'_{xt} = \sin u'$. То, что аналогичное АПБ существует также для уравнения КдФ, было осознано много позднее [1.51, 1.56]. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} u'_x &= -u_x - k + (u' - u)^2 \\ u'_t &= -u_t + 4[k^2 + ku_x - k(u' - u)^2 + u_x^2 + u_x(u' - u)^2 + u_{xx}(u' - u)]. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Условие интегрируемости $u'_{xt} = u'_{tx}$ в этом случае есть

$$(u' - u)(u_{xxx} + u_t - 6u_x^2) = 0. \quad (1.40)$$

¹⁾ Отсюда, кстати, понятно происхождение названия «sine-Gordon», применяемого для уравнений (1.10) или (1.11). Точнее, Рубинштейн [1.52] приписывает авторство этого наименования Крускалу; Колеман [1.43] утверждает иное, и сам Крускал в этом «не вполне уверен» [1.53]. Как бы то ни было, именно это название общепринято!

Тождественное преобразование $u' = u$ тривиально. Вторая пара скобок дает уравнение КдФ (1.1) (с коэффициентом 12, а не 6) после дифференцирования по x и замены $u_x \rightarrow u$. Функция u' удовлетворяет уравнению

$$u'_{xxx} + u'_t - 6u'_x = 0, \quad (1.41)$$

так что рассматриваемое преобразование есть АПБ.

Существует тесная связь между АПБ, солитонами и методом обратной задачи рассеяния, хотя пример уравнения Лиувилля (которое также допускает АПБ [1.50, 1.54]) показывает, что из одного не следует с необходимостью другое. В период с 1900 по 1920 г. многие авторы рассматривали преобразования Бэклунда, умножая сведения о них [1.57]. В частности, Кларин [1.57], по-видимому, открыл «принцип суперпозиции» для АПБ (1.34). описываемый Лэмом и Маклаfliном в гл. 2, хотя Эйзенхарт [1.57] цитирует Бьянки, считая последнего первооткрывателем указанного принципа. Форсайт [1.57] предлагает нахождение АПБ (1.34) для уравнения $u_{xt} = \sin u$ в качестве нерешенной задачи (!) и ссылается на Бьянки и Дарбу как на впервые поставивших ее. Несомненно, Уолквист и Эстабрук [1.56] первыми обнаружили принцип суперпозиции («теореме о перестановочности») для уравнений (1.39). Чень [1.58] показал, как связать существование АПБ со схемой 2×2 для обратной задачи рассеяния, предложенной АКНС [1.44].

Тот факт, что ПБ может быть линеаризующим преобразованием, впервые отмечен в работах Хопфа [1.59] и Коула [1.60] в 1950 г. Эти авторы независимо линеаризовали уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (\nu > 0). \quad (1.42)$$

Преобразование Бэклунда

$$\begin{aligned} u'_x &= -(2\nu)^{-1} uu', \\ u'_t &= -(4\nu)^{-1} (2\nu u_x - u^2) u' \end{aligned} \quad (1.43)$$

не является АПБ: оно отображает решение u уравнения (1.42) в решение u' уравнения теплопроводности $u'_t - \nu u'_{xx} = 0$. Преобразование $u = -2\nu(\ln u')_x$ есть преобразование Хопфа — Коула: оно линеаризует уравнение Бюргерса, сводя его к уравнению теплопроводности, что позволяет точно решить исходное уравнение.

Преобразование Бэклунда

$$\begin{aligned} u'_x &= -2u - (u')^2, \\ u'_t &= 8u^2 + 4u(u')^2 + 2u_{xx} - 4u_x u', \end{aligned} \quad (1.44)$$

нашли Уолквист и Эстабрук [1.61] в 1975 г. Оно связывает уравнение

$$u_{xxx} + u_t + 12uu_x = 0 \quad (1.45)$$

с модифицированным уравнением КдФ

$$u_{xxx} + u_t - 6u^2u_x = 0, \quad (1.46)$$

решение которого есть u' .

Преобразование, связывающее u'_x , u и u' в (1.44), — это преобразование Миуры [1.62]. Оно оказалось основополагающим для открытия метода обратной задачи рассеяния, как будет показано ниже.

Существуют также наборы «сохраняющихся плотностей», связанные с нелинейными эволюционными уравнениями, имеющими солитонные решения; они также являются фундаментальными и сыграли важнейшую роль в истории вопроса. Эти плотности часто бывают «полиномиальными сохраняющимися плотностями» (п. с. пл.), т. е. полиномами от u , u_x , u_{xx} , ... и т. д. Например, плотность $u_x^2/2$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{2} u_x^2\right)_x + \left[-\int^u F(u') du'\right]_x = 0, \quad (1.47)$$

если u удовлетворяет (1.37). Отсюда и из того, что $u \rightarrow 0$ при

$|x| \rightarrow \infty$, следует, что $\int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2/2) dx$ является интегралом движе-

ния. Существование «закона сохранения» вроде (1.47), стало быть, определяет $u_x^2/2$ как локально сохраняющуюся (полиномиальную) плотность, которая сохраняется глобально при подходящих граничных условиях. Уравнение (1.37) может не иметь солитонных решений для произвольной $F(u)$; однако во всех случаях, когда они существуют (а на самом деле для всех известных авторам примеров, связанных с солитонами, за единственным исключением — уравнений распространения неоднородно расширяющихся оптических импульсов [1.63, 1.64], см. также разд. 1.4 и гл. 2 и 6), локально сохраняющиеся величины также глобально сохраняются.

Представляется, однако, что для существования солитонов необходимо бесконечное множество сохраняющихся плотностей. Как мы увидим, уравнения с солитонными решениями оказываются примерами *бесконечномерных* полностью интегрируемых гамильтоновых систем. Конечномерная полностью интегрируемая гамильтонова система с $2n$ степенями свободы обладает интегралами движения, находящимися «в инволюции». Необходимое условие полной интегрируемости бесконечномерной гамильтоновой системы состоит в наличии бесконечного числа

интегралов движения. Достаточные условия — это наличие в точности нужного числа («правильной» бесконечности) таких интегралов, находящихся в инволюции. Инволюция означает, что скобки Пуассона этих интегралов равны нулю. Мы вкратце вернемся к этому моменту в разд. 1.5. Подробности читатель может найти в гл. 2, 6 и 11, например.

Сохраняющиеся величины для уравнения КдФ сыграли ключевую роль в открытии метода обратной задачи рассеяния [1.1]. Их значение для истории вопроса мы опишем в разд. 1.4.

В отношении уравнений Клейна — Гордона (1.37) Крускал лег через пять [1.65] сделал полезное замечание, что (1.37) всегда обладает одной *полиномиальной* сохраняющейся плотностью $u_x^2/2$ (полином от u_x), но необходимое и достаточное условие существования второй полиномиальной плотности, содержащей u_{xx} , — это выполнение соотношения $F(u) + \alpha^2 F(u) = 0$ для некоторого α . Тогда оказывается [1.65], что имеется бесконечное число полиномиальных сохраняющихся плотностей (п. с. пл.). Крускал [1.65] также использовал ПБ

$$\begin{aligned} u'_x &= k^{-1} \sin(u' - u), \\ u'_t &= u_t + k \sin u', \end{aligned} \quad (1.48)$$

которое отображает решение u уравнения $u_{xt} = \sin u$ в решение u' уравнения

$$u'_{xt} = [1 - k^2 (u'_x)^2]^{1/2} \sin u', \quad (1.49)$$

чтобы получить бесконечное число п. с. пл. для уравнения sine-Gordon. О происхождении этого ПБ нам известно лишь, что оно появилось в работе Крускала и было также найдено нами независимо, хотя и позднее [1.50]. Покажем теперь, как бесконечное множество п. с. пл. для СГ-уравнения можно получить с помощью этого ПБ [1.50, 1.65, 1.66].

Запишем

$$u' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(u) k^n$$

и получим из (1.48), что

$$u' = u + k u_x + k^2 u_{xx} + k^3 \left(u_{xxx} + \frac{1}{3!} u_x^3 \right) + k^4 (u_{xxxx} + u_x^2 u_{xx}) + \dots \quad (1.50)$$

Закон сохранения для (1.49) имеет вид

$$[(1 - k^2 (u'_x)^2)^{1/2}]_t - k^2 (\cos u')_x = 0. \quad (1.51)$$

Подставив (1.50) в (1.51), получим, опуская постоянные слагаемые и множители, выражение (1.52) для сохраняющихся

в (1.51) плотностей:

$$\begin{aligned}
 & u_x^2 + k(2u_x u_{xx}) + k^2 \left(u_{xx}^2 + 2u_x u_{xxx} + \frac{1}{4} u_x^4 \right) + \\
 & + k^3 (2u_x u_{xxxx} + 2u_{xx} u_{xxx} + 2u_x^3 u_{xx}) + \\
 & + k^4 \left(u_{xxx}^2 + 2u_{xx} u_{xxxx} + 2u_x u_{xxxxx} + \frac{1}{8} u_x^6 + \right. \\
 & \left. + 3u_{xxx} u_x^3 + \frac{13}{2} u_x^2 u_{xx}^2 \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Поскольку k произвольно, величины u_x^2 , $u_{xx}^2 + 2u_x u_{xxx} + \frac{1}{4} u_x^4$, ... сохраняются каждая по отдельности. Полные дифференциалы $2u_x u_{xx}$, ..., появляющиеся при нечетных степенях k , сохраняются тривиально, поскольку их можно связать не с плотностью T , а с потоком X для любого закона сохранения

$$T_t + X_x = 0 \tag{1.53}$$

вида (1.47). Отбрасывая некоторые полные дифференциалы, можно получить из (1.52), что нетривиальный набор сохраняющихся плотностей для СГ-уравнения, следовательно, можно записать [1.66] в виде

$$\begin{aligned}
 T^2 &= \frac{1}{2} u_x^2, & T^4 &= \frac{1}{2} u_{xx}^2 - \frac{1}{8} u_x^4, & T^6 &= \frac{1}{2} u_{xxx}^2 - \frac{5}{4} u_{xx}^2 u_x^2 + \frac{1}{16} u_x^6, \\
 T^8 &= \frac{1}{2} u_{xxxx}^2 - \frac{7}{4} u_{xxx}^2 u_x^2 + \frac{7}{8} u_{xx}^4 + \frac{35}{16} u_{xx}^2 u_x^4 + \frac{5}{128} u_x^8, \\
 T^{10} &= \dots
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Заметим, что плотности суть полиномы от u_x , u_{xx} и т. д., т. е. п. с. пл., и что каждый член $\prod_j u_j^{a_j}$ в T^r (где u_j — это j -я частная производная) имеет один и тот же ранг r , определяемый формулой $r = \sum_j j a_j$. Оказывается [1.66], что существует бесконечный набр таких нетривиальных полиномов (здесь r — любое четное целое число). Соответствующий бесконечный набор полиномиальных сохраняющихся плотностей для уравнения КдФ, первый из обнаруженных наборов этого рода [1.67], порождается ПБ (1.44) вместо (1.47).

Полиномиальный характер сохраняющихся плотностей (1.54) и сохраняющихся плотностей для уравнения КдФ (1.67) связан с задачами рассеяния, позволяющими решить эти уравнения. Набор (1.54) — это частный случай более общего набора, выводимого из задачи рассеяния 2×2 АКНС [1.42, 1.68]. Сохраняющиеся плотности СГ-уравнения (1.10) в лоренц-ковариантной форме не являются полиномами [1.66]. Заметим во всяком случае, что по крайней мере половина сохраняющихся

плотностей СГ-уравнения в конусных переменных — это не полиномы, так как в (1.51) поток $k^2 \cos u'$, согласно (1.50), можно записать в виде

$$k^2 \cos u' = k^2 \cos u \left[1 - \frac{1}{2} k^2 u_x^2 - k^3 u_x u_{xx} - k^4 u_x \left(u_{xxx} + \frac{3}{3} u_x^3 \right) + \dots \right] \\ - k^2 \sin u \left(k u_x + k^2 u_{xx} + k^3 u_{xxx} + k^4 \left[u_{xxxx} + \right. \right. \\ \left. \left. + u_x^2 u_{xx} - 3 u_x \left(u_{xxx} + \frac{1}{3!} u_x^3 \right) \right] \right) + \dots \quad (1.55)$$

Тогда

$$X^2 = -(1 - \cos u), \quad X^3 = -u_x \sin u, \\ X^4 = -\left(\frac{1}{2} u_x^2 \cos u + u_{xx} \sin u \right), \\ X^5 = -(u_x u_{xx} \cos u + u_{xxx} \sin u), \quad X^6 = -\left[u_x \left(u_{xxxx} + \frac{3}{4!} u_x^3 \right) \cos u + \right. \\ \left. + \left(u_{xxxx} + u_x^2 u_{xx} - u_x u_{xxx} - \frac{1}{2} u_x^4 \right) \sin u \right], \dots \quad (1.56)$$

и

$$X^m = f_m \cos u + g_m \sin u, \quad (1.57)$$

где f_m и g_m — полиномы степени $m - 2$ от u_x , u_{xx} и т. д. Плотности T^m и потоки X^m тогда удовлетворяют закону сохранения, аналогичному (1.53), для каждого m , если отбросить в (1.53) полные дифференциалы.

Поскольку СГ-уравнение (1.10а) в конусных переменных инвариантно к замене x на t и наоборот, то

$$\frac{\partial}{\partial t} (\cos u - 1) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u_t^2 \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{2} u_t^2 \cos u \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u_{tt}^2 - \frac{1}{8} u_t^4 \right) = 0 \quad (1.58)$$

и, вообще говоря, каждый поток X^{2n} дает сохраняющуюся плотность в результате замены $\partial/\partial x$ на $\partial/\partial t$ повсюду в этом выражении. Следовательно, существует второй бесконечный набор сохраняющихся плотностей T^{2n}

$$T^2 = \cos u - 1, \\ T^{2n} = f_{2n} \cos u + g_{2n} \sin u, \quad n \geq 2, \quad (1.59)$$

где f_{2n} и g_{2n} суть полиномы по u_t , u_{tt} и т. д. ранга (по t) $2n - 2$. Легко показать [1.42, 1.69] (см. также гл. 11), что плотность T^2 в (1.59) служит плотностью гамильтониана для СГ-уравнения

(1.11a) в конусных переменных. Представляется, однако, что константы движения $\int_{-\infty}^{+\infty} T^{2n} dx$ для $n \geq 2$ не находятся в инволюции.

К счастью, существует третий бесконечный набор сохраняющихся плотностей, находящихся в инволюции. Их существование связано с дисперсионным соотношением $\omega = k^{-1}$ и его полюсом в точке $k = 0$. Как это происходит, описано Ньюэллом в гл. 6. Подробности для СГ-уравнения приводятся также, например, в [1.42], [1.69], где показано, что после подходящего масштабного преобразования набор (1.53) представляет плотности импульса, а третий бесконечный набор — плотности энергии для бесконечного ряда обобщенных СГ-уравнений, каждое из которых разрешимо методом обратной задачи рассеяния и является полностью интегрируемой бесконечномерной гамильтоновой системой. Этот бесконечный ряд аналогичен бесконечному набору уравнений КдФ, впервые обнаруженному Лаксом [1.70] в 1968 г. Последний набор уравнений КдФ описан более точно в разд. 1.4. Фаддеев рассматривает плотности импульса и энергии для СГ-уравнения в гл. 11. Индивидуальные сохраняющиеся плотности, дающие находящиеся в инволюции константы движения, вычислены в конце разд. 1.6 (формулы (1.153)).

Уравнения, составляющие бесконечный набор полностью интегрируемых СГ-уравнений, легко описываются через данные рассеяния [1.69]. За исключением самого СГ-уравнения, уравнения движения сложны и, по-видимому, включают нелокальные операторы¹⁾. СГ-уравнение оказывается единственным уравнением, инвариантным к инфинитезимальному преобразованию

¹⁾ Плотность гамильтониана для следующего члена бесконечной последовательности СГ-уравнений, вычисленная методами работ [1.42] и [1.69], дается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & -\frac{1}{2} u_x \exp \left[- \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{x'} \sin u dx'' \right) \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) dx' \right] \times \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^x \left[-\frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{x'} \sin u dx'' \right) \sec^2 \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{x'} \sin u dx'' \right)^2 \sec^4 \frac{u}{2} \right] \times \right. \\ & \left. \times \exp \left[\int_{-\infty}^{x'} \left(\int_{-\infty}^{x''} \sin u dx''' \right) \frac{\partial}{\partial x''} \left(-\operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) dx'' \right] dx' \right\} \end{aligned}$$

\mathcal{H}_2 на самом деле тривиальна, и \mathcal{H}_3 является следующей нетривиальной плотностью. Известно [1.42, 1.69], что интегрируемые СГ-уравнения имеют односолитонные решения $4\alpha \operatorname{arctg} \exp [kx + 2\Omega(ik/2)t]$, где $\Omega(\zeta) = -(i/2)\omega(-2\zeta)$, а $\omega(k)$ есть линеаризованное дисперсионное соотношение рассматриваемого

$x \rightarrow (1 - \varepsilon)x$, $t \rightarrow (1 + \varepsilon)t$ и конечным масштабным преобразованием $x \rightarrow a^{-1}x$, $t \rightarrow at$. Отсюда легко видеть, что это единственное лоренц-ковариантное в лабораторных координатах уравнение. Из теоремы, утверждающей, что нелинейное уравнение Клейна — Гордона (1.37) имеет п. с. пл. $(1/2)u_x$ ранга 2, но имеет вторую сохраняющуюся плотность ранга 4, включающую u_{xx} , тогда и только тогда, когда $F(u) + \alpha^2 F(u) = 0$ [1.65, 1.66] (и, стало быть, бесконечный набор таких плотностей [1.66]), следует, что $F(u) = Ae^{\alpha u} + Be^{-\alpha u}$. Из требований, чтобы u и $F(u)$ были вещественными, а $u = \delta = \text{const}$ было решением уравнения (1.37), следует, что это уравнение будет иметь вторую полиномиальную плотность ранга 4 тогда и только тогда, когда

$$F(u) = A \operatorname{sh}(u - \delta) \quad (1.60a)$$

или

$$F(u) = B \sin(u - \delta); \quad (1.60b)$$

в обоих случаях существует бесконечное семейство сохраняющихся плотностей.

Уравнение sh-Gordon $u_{xt} = \operatorname{sh}(u - \delta)$ не имеет ограниченного решения типа уединенной волны или решения с постоянным профилем, определенного на всей оси x (его решение есть $u = 4 \operatorname{arctg} \theta$, $\theta = kx + k^{-1}t$, определенное при $\theta \leq \theta_0 < 0$). Оно связано с СГ-уравнением преобразованием $u - \delta \rightarrow i(u - \delta)$, откуда $u_{xt} = \sin u$. Обратившись к разд. 1.4 и последующему обсуждению метода обратной задачи рассеяния АКНС (соотношения (1.100) и (1.101)), легко увидеть, что в обратной задаче рассеяния (1.100) матрица L эрмитова и, следовательно, нет связанных состояний. Поэтому нет и многосолитонных решений уравнения sh-Gordon. Для простых волн (1.12) ситуация аналогична.

Один из следующих отсюда результатов состоит в том, что существование бесконечного набора сохраняющихся плотно-

уравнения. Для самого СГ-уравнения $\omega(k) = k^{-1} = 2\Omega(ik/2)$. Для следующего члена $\omega(k) \sim k^{-3}$ [1.69]. Поэтому линеаризованное уравнение есть

$$u_{xxx} = Au \quad (A = \text{const}), \text{ или } u_{xt} = A \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{x'} u(x'', t) dx'' dx'. \text{ В [1.42] мы по-}$$

лагали (см. примечание 5 этой работы), что уравнение движения, выведенное из сохраняющейся плотности $-(u_t^2/2) \cos u$ в (1.58), а именно $(u_t^2/2) \sin u - u_{tt} \cos u$, является следующим членом последовательности интегрируемых СГ-уравнений. Однако это уравнение не имеет решений вида $4 \operatorname{arctg} \exp[kx + 2\Omega(ik/2)t]$, а его дисперсионное соотношение есть $\omega = k$. Это замечание к тому же исправляет ложное впечатление, создаваемое упоминаемой ниже работой [1.195], будто сохраняющаяся плотность $u_t^2/2 \cos u$ дает следующее интегрируемое СГ-уравнение. См. также конец разд. 1.6, где снова рассматриваются интегрируемые СГ-уравнения.

стей недостаточно для наличия многосолитонных решений. Уравнение sh-Gordon — лишь один из примеров, показывающих это; уравнение простой волны (1.12) — другой пример (третий — это *линейное* уравнение Клейна — Гордона [1.71]). Однако самый важный результат — то, что мы показали следующий факт: СГ-уравнение является единственным нелинейным уравнением Клейна — Гордона, обладающим двумя последовательными п. с. пл. рангов 2 и 4, решением в виде неизменного профиля с конечной энергией и солитонными решениями. Кулиш [1.72] также вывел, что СГ-уравнение является единственным уравнением, имеющим решения с конечной энергией, вторую сохраняющуюся плотность и, следовательно, бесконечно много таких плотностей. Тот факт, что это уравнение единственно для одного поля с бесконечным количеством сохраняющихся плотностей, делает очевидным следующее: S — матрица *квантованного* СГ-уравнения полностью определена [1.71]. Стало быть, СГ-уравнение — весьма особенное и замечательное уравнение. Лютер в гл. 12 также указывает, исходя из иных соображений, на особый характер квантованного СГ-уравнения.

Уравнение sh-Gordon $u_{xt} = \text{sh } u$ превращается в СГ-уравнение заменой $u \rightarrow iu$. Исследуем вкратце, что произойдет при вращении независимых переменных x, t в комплексной плоскости. Конкретнее рассмотрим СГ-уравнение (1.11a) с заменой $x \rightarrow (x + iy)/2, t \rightarrow (x - iy)/2$. Очевидно, что мы получим

$$u_{xx} + u_{yy} = \sin u \quad (1.51)$$

с решениями u в двумерном евклидовом пространстве. Это уравнение представляет интерес для статистической механики в связи с двумерными вихревыми моделями [1.73, 1.74]. Для него известно АПБ (сравните с (1.37))

$$\begin{aligned} u'_x &= -iu_y + k \sin \frac{1}{2}(u' + u) + k^{-1} \sin \frac{1}{2}(u' - u) \\ -iu'_y &= u_x + k \sin \frac{1}{2}(u' + u) - k^{-1} \sin \frac{1}{2}(u' - u). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Условия интегрируемости $u'_{xy} = u'_{yx}$ и $u_{xy} = u_{yx}$ дают

$$u'_{xx} + u'_{yy} - \sin u' = u_{xx} + u_{yy} - \sin u = 0. \quad (1.63)$$

При $u = 0$ решение уравнения (1.62) — это «кинк»

$$u' = 4 \operatorname{arctg} \exp[(x - Vy)/(1 + V^2)^{1/2}]. \quad (1.64)$$

Выбирая на каждом шаге $|k| = 1$, можно построить вещественные многокинковые решения повторным использованием этого АПБ, хотя не все промежуточные шаги дадут вещественные решения. Двухкинковое решение имеет вид

$$u(x, y) = 4 \operatorname{arctg} r \operatorname{ch} \theta_r \operatorname{sech} \theta_R \quad (1.65a)$$

где $r = \operatorname{ctg} \mu$, а

$$\theta_R = \frac{\cos \mu}{(1 + V^2)^{1/2}} (x - Vy), \quad \theta_I = \frac{\sin \mu}{(1 + V^2)\Gamma_i} (y + Vx). \quad (1.65b)$$

Насколько нам известно, уравнение (1.61) пока что не исследовалось существенно более глубоко¹⁾. В принципе другие решения вроде (1.65a) можно найти методами, аналогичными выведенным ниже из (1.66a).

В разд. 1.3 мы отмечали связь между нелинейными эволюционными уравнениями с солитонными решениями, бесконечными наборами сохраняющихся плотностей и гамильтоновыми системами. Мы вернемся к этой связи в разд. 1.4, и она довольно подробно рассматривается в последующих главах. Была также показана связь между ПБ и бесконечными наборами сохраняющихся плотностей. Позже тесная связь между ПБ, нелинейными эволюционными уравнениями и солитонами была проиллюстрирована новыми примерами в работах Уолквиста и Эстабрука по структурам продолжения [1.61], [1.75] и [1.76]. Пиранни с сотрудниками [1.77] недавно (1978) дали формулировку ПБ в терминах расслоений джетов, которая обеспечивает разумное истолкование этих результатов. Для дальнейшего изучения важных математических достижений в этой области рекомендуем читателю обратиться к соответствующей литературе. С помощью другого подхода Калоджеро [1.78] смог прояснить связь между ПБ и методом обратной задачи рассеяния путем расширения приложений этого метода (объединяющая идея состоит в том, что и эволюционные уравнения, и их ПБ могут иметь простую структуру, будучи выраженными через данные рассеяния, несмотря на их сложность в x -пространстве). Эта работа описана в гл. 9. Следует упомянуть также новые работы по ПБ [1.79], [1.80]; еще одна работа, связанная с ПБ и структурами продолжения, отмечена в разд. 1.5. Хирота рассматривает ПБ со своей собственной и нестандартной точки зрения в гл. 5.

¹⁾ Маккарти [1.125] перечисляет очевидные преобразования Бэклунда:

$$\left. \begin{aligned} u'_x + u_y &= \sin u' \operatorname{ch} u \\ u'_y - u_x &= \cos u' \operatorname{sh} u \end{aligned} \right\} \text{ между } \left\{ \begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \\ u'_{xx} + u'_{yy} &= \sin u' \cos u' \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} u'_x + u_y &= \operatorname{ch} u' \cos u \\ u'_y + u_x &= \operatorname{sh} u' \sin u \end{aligned} \right\} \text{ между } \left\{ \begin{aligned} u'_{xx} + u'_{yy} &= \sin u' \cos u' \\ u'_{xx} + u'_{yy} &= \operatorname{sh} u' \operatorname{ch} u' \end{aligned} \right.$$

и

$$\left. \begin{aligned} u'_x + u_y &= \sin u' e^u \\ u'_y - u_x &= \cos u' e^u \end{aligned} \right\} \text{ между } \left\{ \begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= e^{2u} \\ u'_{xx} + u'_{yy} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Завершая разд. 1.3, сделаем несколько дополнительных исторических замечаний относительно СГ-уравнения (1.11a) и отметим некоторые из его недавних приложений в теории поля. Лоренцева ковариантность СГ-уравнения (1.10) означает инвариантность СГ-уравнения (1.11a) относительно преобразования Ли; при замене переменных более общего вида

$$\xi = at + a^{-1}x, \quad \eta = at - a^{-1}x$$

оно лоренц-ковариантно. Если положить

$$u = 4 \operatorname{arctg} [F(\xi)/G(\eta)], \quad (1.66a)$$

то

$$\begin{aligned} (F')^2 &= -kF^4 + mF^2 + n, \\ (G')^2 &= kG^4 + (m-1)G^2 - n, \end{aligned} \quad (1.66b)$$

где k, m, n — произвольные константы, а штрих означает дифференцирование по аргументу (для решений уравнения (1.61) $(G')^2$ меняет знак). Здесь содержится некоторый намек на идею прямых методов отыскания N -солитонных решений СГ-уравнения, разработанных Хиротой [1.81] и Кодри с соавт. [1.82] в 1972—1973 гг. Они снова упоминаются в разд. 1.5. Различные псевдосферические поверхности, соответствующие решениям уравнения (1.64) (называемые поверхностями Эннепера с постоянной кривизной), были перечислены и описаны Штойрвальдом [1.83] в 1936 и включают 2π -кинк, 4π -кинк и бризер. Это было отмечено в работе Лэма [1.27], к которой мы отсылаем читателя за многими другими полезными историческими комментариями¹⁾.

Скирме [1.84, 1.85] независимо открыл эти три решения СГ-уравнения при построении первой интегрируемой модели теории поля в 1959—1962 гг. Изучение фазовых сдвигов показывает, что кинки (а также антикинки) взаимно отталкиваются, тогда как между кинком и антикинком наблюдается взаимное притяжение. Скирме приписал «топологический заряд» $+1$ и -1 кинку и антикинку соответственно. Как мы объяснили, кинк (антикинк) интерполирует между 0 и 2π (между 2π и 0 соответственно). Заряды суть «прыжки» $u(\infty, t) - u(-\infty, t)$, нормированные на 2π ; они являются константами движения, стабилизированными граничными условиями. Эти свойства характерны для топологических квантовых чисел [1.43]. Следовательно,

¹⁾ Псевдосферические поверхности — это поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной. Ранним примером (с кривизной $-a^{-2}$) служит поверхность вращения Бельтрами, получаемая вращением трактрисы $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln [(a + \sqrt{a^2 - x^2})/x]$ вокруг оси y . Среди решений нелинейных эволюционных уравнений не только решения СГ-уравнения дают поверхности с постоянной отрицательной кривизной. Мы покажем в конце разд. 1.7, что по крайней мере решения КдФ, модифицированного КдФ, НУШ и, на самом деле, всех систем АКНС обладают этим свойством.

бризер не обладает зарядом: он сам является своей античастицей, и поэтому ему был сопоставлен мезон. Насколько нам известно, Скирме фактически «угадал» решения в виде 4 π -кинка и бризера, подгоняя аналитические выражения к численным результатам.

Бурная деятельность в области создания сопоставимых моделей теории поля началась лишь в 1974 г. [1.39—1.41, 1.43, 1.86, 1.87]. Один из замечательных ее результатов — это связь между квантованным СГ-уравнением и массивной моделью Тирринга, обнаруженная Колменом [1.43, 1.88] в 1975 г. Она описана Лютером в гл. 12. Связи между сохраняющимися плотностями квантованного СГ-уравнения и массивной моделью Тирринга нашли Берг с соавт. [1.89], а также Кулиш и Ниссимов [1.90, 1.91]. В последних работах показано, что квантование приводит лишь к небольшим изменениям классических законов сохранения. Михайлов [1.92] установил, что классическая массивная модель Тирринга разрешима методом обратной задачи рассеяния и обладает бесконечным набором законов сохранения. Классические результаты для СГ-уравнения, конечно, те же, что и в формулах (1.54), (1.59). Еще один важный результат — то, что из существования бесконечного набора сохраняющихся плотностей для некоторого нелинейного эволюционного уравнения следует разложимость его S -матрицы [1.72, 1.93—1.95].

Вследствие этого S -матрицы для квантованного СГ-уравнения и для массивной модели Тирринга были вычислены точно [1.71, 1.93, 1.95]; они неизбежно совпадают. Ныне вычислены S -матрицы также для других моделей теории поля [1.95, 1.96] с размерностью $1 + 1$.

1.4. Другие физические задачи и открытие метода обратной задачи рассеяния

В течение 1960—1967 гг. ряд физических задач повлиял на развитие теории солитонов. Маккол и Хан [1.26, 1.97] изложили теорию самоиндуцированной прозрачности (СИП) и привели экспериментальные результаты, ее подтверждающие. Для огибающей электрического поля, проходящего через среду двухуровневых атомов, они нашли аналитическое решение в виде импульса, имеющего форму гиперболического секанса; первоначально такое решение они обнаружили численными методами. Они также открыли распадение оптического импульса на последовательность sech -импульсов и поняли, что последние связаны с 2π -кинками СГ-уравнения. Однако N -кинковое решение (1.22) СГ-уравнения было обнаружено лишь в 1972—1973 гг. [1.81, 1.82, 1.98]. Теорию СИП рассматривают Лэм и Маклафлин в гл. 2. Ранняя работа по СИП принадлежит Ареччи и Бонифацио [1.99].

В 1964 г. Чиао и др. [1.100] получили НУШ при изучении оптической самофокусировки и расщепления оптических пучков.

Они нашли решение (1.21) этого уравнения (в виде гиперболического секанса) для поперечного амплитудного профиля одиночной филаменты. Для нейтрального диэлектрика можно привести следующие простые рассуждения [1.22, 1.23]. Скалярный атомный диполь $P(x, t)$, индуцированный скалярным полем $E(x, t)$, для изотропных атомов имеет вид

$$P(x, t) = \alpha E(x, t) + \alpha_{NL} E(x, t)^3 + \dots, \quad (1.67)$$

где α и α_{NL} суть линейная и нелинейная поляризуемости. Уравнение Максвелла, конечно, линейное и имеет вид

$$\nabla^2 E - c^{-2} \partial^2 E / \partial t^2 = 4\pi n c^{-2} \partial^2 P / \partial t^2, \quad (1.68)$$

где n есть сглаженная плотность атомных чисел. Ища решение в виде комплексной огибающей, модулирующей несущую волну для E , а именно в виде

$$E(x, t) = \varepsilon(x, y, z, t) \exp[i(\omega t - kz)] + \dots \quad (1.69)$$

и налагая линейное дисперсионное соотношение $\omega^2 = c^2 k^2 - 4\pi n \omega^2 \alpha$, находим

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \omega^2 c^{-2} 12\pi n \alpha_{NL} |\varepsilon|^2 \varepsilon + 2ic^{-2} [\omega \varepsilon_z (1 + 4\pi n \alpha) - c^2 k \varepsilon_z] = 0. \quad (1.70)$$

В частности, для стационарных решений после масштабного преобразования получим

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + 2|\varepsilon|^2 \varepsilon - i\varepsilon_z = 0. \quad (1.71)$$

Это двумерное НУШ с пространственными переменными (x, y) и «временем» z . Очевидно, что это уравнение неустойчиво [1.101] — решения в двух пространственных измерениях растут до бесконечности за конечное время — но для одного пространственного измерения (x) оно сводится к (1.9). Чиао и др. пришли к этому уравнению с помощью нелинейной зависимости диэлектрической постоянной от интенсивности. Лэм и Маклафлин (гл. 2) получили его в другой задаче нелинейной оптики. Гинзбург и Питаевский [1.102], Питаевский [1.103] и Гросс [1.104] нашли (стационарное) уравнение Гросса — Питаевского [1.105]

$$a + b|u|^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u = 0 \quad (1.72)$$

при изучении сверхпроводимости. Бенджамин и Фейр [1.106] обнаружили неустойчивость волн на глубокой воде, несущую их имена; эта неустойчивость порождается группированием синусоидальных волн в волновые пакеты с солитонными огибающими, управляемыми НУШ. Бенни и Ньюэлл [1.107] изучали

НУШ именно в этой связи. Появилось обобщение НУШ, имеющее вид

$$u_{xx} + 2[1 - \exp(-|u|^2)]u + iu_t = 0, \quad (1.73)$$

которое применялось в теории кавитонов в плазме, для описания фотонных пузырьков и взаимодействия радиации с плазмой [1.22, 1.23]. Связь этого уравнения с уравнениями ленгмюровской турбулентности, выведенными Захаровым [1.108], установлена в [1.64].

НУШ было решено Захаровым и Шабатом [1.38] в 1971 г. и впоследствии [1.109] в 1973 г. с помощью первой версии 2×2 -схемы обратной задачи рассеяния. Эти великолепные работы замечательны количеством содержащихся в них аналитических результатов и новых методов; не последний из них — вывод в [1.38] бесконечного набора сохраняющихся плотностей для НУШ методом, применимым ко всем АКНС системам [1.44, 1.45] с задачей рассеяния 2×2 [1.42, 1.69]. Принципиальная важность этой работы, однако, состояла в демонстрации того, что метод обратной задачи рассеяния [1.1], предназначенный для решения уравнения КдФ, пригоден не только для этого уравнения. Нам кажется, что в качестве введения в метод обратной задачи рассеяния было бы полезно описать открытие этого метода для уравнения КдФ, следуя изложению Крускала [1.110], и сейчас мы это сделаем.

В 1955—1965 гг. Крускал интересовался повторяемостью, наблюдаемой в одномерных ангармонических решетках — задачей Ферми — Пасты — Улама (ФПУ) [1.12]. Это привело Забуски и Крускала [1.2] к исследованию уравнения, полученного для кубической нелинейности в континуальном пределе,

$$y_{tt} = y_{xx}(1 + \epsilon y_x), \quad (1.74)$$

где параметр ϵ , задающий величину нелинейности, порядка $1/10$. Ища римановы инварианты линейной задачи $y_{tt} = y_{xx}$, а именно

$$u = \frac{1}{2}(y_x + y_t) = O(1), \quad v = \frac{1}{2}(y_x - y_t) = O(\epsilon),$$

они свели (1.74) к простой волне

$$u_\tau + uu_x = 0 \quad (\tau \equiv 4\epsilon(t - x)). \quad (1.75)$$

Характеристики этого уравнения суть $dx/d\tau = u = \text{const}$. Их пересечение означает наличие ударных волн у уравнения. Его можно проинтегрировать преобразованием годографа, получив решение $u = u(x - ut)$, включающее ударную волну (скорость u велика там, где возмущение u велико). При возврате к дискретной решеточной модели была введена дисперсия. В результате получилось

$$y_{tt} = y_{xx}(1 + \epsilon y_x) + \frac{\Delta x^2}{12} y_{xxxx}, \quad (1.76)$$

где Δx есть постоянная решетки, и отсюда

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0; \quad (1.77)$$

здесь $\delta^2 \equiv \Delta x^2/12\varepsilon$. При $\Delta x \sim 1/64$ и $\varepsilon \sim 1/10$ получим $\delta \approx 0.022$.

Численное решение уравнения (1.77) показало [1.2], что при периодических граничных условиях из синусоидальных начальных данных развивается сглаженный прыжок, величина которого достигает амплитуды ударной волны, отвечающей выбранному малому δ^2 . Затем профиль разбивается на пики, столкновительные свойства которых побудили Забуски и Крускала [1.2] назвать их солитонами. Чтобы охарактеризовать поведение решения при переходе через прыжок, Крускал и соавторы искали законы сохранения. Уравнение (1.77) уже записано в консервативной форме, причем сохраняющейся плотностью служит $T^1 = u$. Однако $T^2 = u^2$ и $T^3 = 2u^3 - u_x^2$ также являются сохраняющимися плотностями. Миура и др. [1.67] нашли 10 полиномиальных сохраняющихся плотностей для уравнения КдФ в форме (1.3) и доказали существование бесконечного числа нетривиальных T^r . Каждый член Πu_j^r в T^r (где u_j — снова j -я производная) имеет в этом случае ранг $r = \sum_j (1 + j/2) a_j$; $T^{10} = u^{10}/10 - 36u^7u_x^2 \dots + 419904u_8^2/12155$ имеет ранг 10 и содержит 32 члена [1.67].

ФПУ рассмотрели также решетку с ангармоничностью не третьей, а четвертой степени. При этом получается $y_{tt} = y_{xx}(1 + \varepsilon y_x^2)$ и, следовательно, модифицированное уравнение КдФ

$$v_t + v^2 v_x + v_{xxx} = 0. \quad (1.78)$$

У него также есть законы сохранения. Миура [1.62] нашел преобразование $u = v^2 + \sqrt{-6} v_x$, связывающее их. Множитель $\sqrt{-6}$ не создает трудностей: преобразование Миуры [1.62] $u = v^2 + v_x$ — это ПБ (1.44), нормированное так, чтобы связать КдФ и модифицированное КдФ, записанные соответственно следующим образом:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.79a)$$

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0. \quad (1.79b)$$

Преобразование Риккати $v = \partial(\ln \psi)/\partial x$ линеаризует $v^2 + v_x$ и $u = \psi_{xx}/\psi$. Преобразование Галилея

$$x' = x - Vt, \quad t' \rightarrow t, \quad u \rightarrow u + V$$

оставляет уравнение $u_t - uu_x + u_{xxx} = 0$ без изменений. Следовательно, в результате получим $u \rightarrow u + \lambda = \psi_{xx}/\psi$ и задачу на собственные значения для уравнений Шрёдингера

$$-\psi_{xx} + u\psi = -\lambda\psi. \quad (1.80)$$

Далее, подставляя $u = \psi_{xx}/\psi - \lambda$ в уравнение КдФ (1.79а), получим [1.1]:

а) $\lambda_t = 0$ для связанных состояний ($\lambda > 0$), даже если u зависит от t ;

$$b) \quad \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u - \lambda)\psi_x = C\psi + D\psi \int \frac{dx}{\psi^2}, \quad (1.81)$$

причем [1.1] D обращается в нуль для $\lambda > 0$, тогда как C можно обратить в нуль с помощью нормировки собственных функций связанных состояний. Поскольку $u \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то собственная функция ψ_n , отвечающая $\lambda_n > 0$, принимает вид

$$\psi_n \sim c_n(t) \exp(-k_n x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (1.82)$$

($k_n = \lambda_n^{1/2}$), и из (1.81) $c_n(t) = c_n(0) \exp 4k_n^3 t$.

При $\lambda = -k^2 < 0$ решение уравнения (1.80) для больших $|x|$ есть линейная комбинация членов вида $\exp \pm ikx$. Если

$$\psi \sim \exp(-ikx) + b \exp(ikx) \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.83a)$$

$$\psi \sim a \exp(-ikx) \quad x \rightarrow -\infty, \quad (1.83b)$$

то $a(k, t)$ есть коэффициент прохождения, $b(k, t)$ — коэффициент отражения, причем $|a^2| + |b^2| = 1$. Так как спектр при $\lambda < 0$ непрерывен, то λ можно выбрать так, чтобы $\lambda_t = 0$ также и в этом случае. Подстановка (1.83 а, б) в (1.80) дает $D = 0$, $C = 4ik^3$ и два уравнения, из которых легко получить

$$\begin{aligned} a(k, t) &= a(k, 0) \\ b(k, t) &= b(k, 0) \exp(8ik^3 t). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Ключевой момент состоит в том, что данные рассеяния a, b, c_n и λ_n позволяют реконструировать значение u для любого времени t . Пусть $K(x, y)$ при $y \geq x$ есть решение уравнения Гельфанда — Левитана [1.111, 1.112]

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^\infty K(x, z) B(y + z) dz = 0, \quad (1.85a)$$

где

$$B(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(k) \exp(jk\xi) dk + \sum_n c_n^2 \exp(k_n \xi). \quad (1.85b)$$

Тогда

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x). \quad (1.85c)$$

Процедура решения уравнения КдФ (1.79а), т. е. уравнения КдФ (1.1), тем самым состоит в следующем:

- 1) отобразить начальные данные $u(x, 0)$ в данные рассеяния $S = \{b(k, 0), c_n(0) \text{ и } \lambda_n (n = 1, \dots, N)\}$;

- II) вычислить временную эволюцию данных рассеяния, как указано выше;
- III) решить уравнение Гельфанда — Левитана (1.85a) и вычислить $u(x, t)$ ($t > 0$).

В частности, при отсутствии отражения $b(k, 0) = 0$, и решение становится N -солитонным, соответствующим формулам (1.16) (хотя и в другом масштабе). Это замечательное открытие послужило отправной точкой всей теории солитонов, за единственным исключением прямых методов, которые разработали Хирота [1.33, 1.81] (см. также гл. 5) и в меньшей степени Кодри [1.82]. Точная связь этих методов с методом обратной задачи рассеяния пока не установлена, хотя, конечно, ищутся одни и те же N -солитонные решения.

Здесь уместно объяснить некоторые термины. Процедуру (I) иногда называют прямым преобразованием рассеяния или прямым спектральным преобразованием. Процедуру (III) называют обратным преобразованием рассеяния или обратным спектральным преобразованием. Вся процедура в целом называется методом обратной задачи рассеяния или методом обратного спектрального преобразования. Мы в основном пользуемся выражением «метод обратной задачи рассеяния» или «метод обратной задачи». Он рассматривается с различных точек зрения по крайней мере в пяти главах настоящей книги. Мы надеемся, что вызванное этим обстоятельством пересечение тематики будет скорее помогать читателю, чем раздражать его. Разд. 1.4 задуман как введение в метод, который более подробно изложен А. Ньюэллом в гл. 6 и (в несколько иной трактовке) В. Е. Захаровым в гл. 7.

1.5. Представление нелинейных эволюционных уравнений с помощью пар операторов

Работа Лакса [1.70] вызвала существенное развитие метода обратной задачи и способствовала лучшему пониманию его математической природы. Пусть даны сравнительно простые дифференциальные операторы $u \rightarrow \mathcal{L}_u \equiv (-\partial^2/\partial x^2 + u)$, $\hat{\mathcal{B}}_u \equiv \partial^{2n+1}/\partial x^{2n+1} +$ члены низшего порядка ($\hat{\mathcal{B}}_u$ кососимметричен, $\hat{\mathcal{B}}_u^+ = -\hat{\mathcal{B}}_u$), такие что существует однопараметрическое семейство унитарных операторов \hat{U} , удовлетворяющих уравнению $\hat{U}_t = \hat{B}\hat{U}$, причем \mathcal{L}_u унитарно эквивалентен относительно \hat{U} , т. е. $\hat{U}^{-1}(t)\hat{\mathcal{L}}_u(t)\hat{U}(t)$ не зависит от t ; тогда, как отмечает Лакс, выполняется следующее.

I) Все собственные значения λ_u оператора $\hat{\mathcal{L}}_u$ являются интегралами движения, т. е. $\lambda_u, t = 0$ (доказательство тривиально: $\hat{\mathcal{L}}_u(0) = \hat{U}^{-1}(t)\hat{\mathcal{L}}_u\hat{U}(t)$, $\hat{\mathcal{L}}_u(0)\psi(0) = \lambda_u\psi(0)$. Тогда $\mathcal{L}_u(t)\psi(t) =$

$= \lambda_u(t)$, где $\psi(t) = U(t)\psi(0)$, т. е. $U(t)$ есть эволюционный оператор).

$$\text{II) } \partial/\partial t \hat{U}^{-1}(t) \hat{L}_u(t) \hat{U}(t) = 0 \text{ означает, что}$$

$$-\hat{U}^{-1} \hat{U}_t \hat{U}^{-1} \hat{L}_u \hat{U} + \hat{U}^{-1} \hat{L}_{u,t} \hat{U} + \hat{U}^{-1} \hat{L}_u \hat{U}_t = 0.$$

Тогда если $\hat{U}_t = \hat{B}\hat{U}$, то $-\hat{U}^{-1} \hat{B} \hat{L}_u \hat{U} + \hat{U}^{-1} \hat{L}_{u,t} \hat{U} + \hat{U}^{-1} \hat{L}_u \hat{B} \hat{U} = 0$, и

$$\hat{L}_{u,t} = [\hat{B}, \hat{L}_u]. \quad (1.86a)$$

III) Так как $L_{u,t} = u_t$, то операторное уравнение (1.86a) есть эволюционное уравнение $u_t = K[u]$, в котором $K[u]$ — это функционал от u .

Лакс [1.70] доказал, что начальные данные $u(x, 0)$ однозначно определяют решения упомянутых выше нелинейных эволюционных уравнений. Испробовав в качестве кососимметрического оператора $\hat{B} = \partial^3 + b\partial + \partial b$ (где $\partial \equiv \partial/\partial x$), Лакс также обнаружил, что при $b = -(3/4)u$ (мы используем иные масштабы, чем Лакс) (1.86a) дает уравнение КдФ. В дальнейшем метод был обобщен с целью получить бесконечную иерархию уравнений типа КдФ со степенями 3 (само КдФ), 5, 7 и т. д. Захаров и Фаддеев [1.113], а также Лакс [1.114] впоследствии указали на существование симплектической структуры, порождающей эту иерархию, которая, как теперь известно, свойственна всем «интегрируемым системам» вроде КдФ, НУШ и СГ-уравнений. Представление нелинейных эволюционных уравнений в виде «пары Лакса»

$$\hat{L}_t = [B, \hat{L}] \quad (1.86b)$$

остается самым мощным методом получения аналитических решений таких уравнений. Заметим, что подобное представление гарантирует постоянство спектра собственных значений, так как если B кососимметричен, то решение операторного уравнения $U_t = \hat{B}\hat{U}$ унитарно, и рассуждения п. II, приводящие к (1.86a), можно провести в обратную сторону. Тогда L унитарно инвариантен относительно U , и его собственные значения являются интегралами движения в силу (I).

Примечательно, что введенные Лаксом операторы B для иерархии уравнений КдФ можно найти, определив квадратный корень \hat{R} оператора $-\hat{L}_u$ выражениями $\hat{R}^2 \equiv -\hat{L}_u$ и $\hat{R} = \partial + c_0 + c_1\partial^{-1} + c_2\partial^{-2} + \dots$. Тогда $-\hat{L}_u = \partial^2 - u$ и $\hat{R}^2 = -\hat{L}_u$ есть $\partial^3 + 2c_0\partial + (c_{0,x} + c_0^2 + 2c_1) + (c_{1,x} + 2c_2 + 2c_0c_1)\partial^{-1} + \dots$, так что $c_0 = 0$, $c_1 = -u/2$, $c_2 = u_x/4$. Очевидно, что главная часть \hat{R} (т. е. без отрицательных степеней ∂) — это просто ∂ , и уравнение $[\hat{R}, L_u] = \hat{L}_{u,t}$ превращается в

$$u_x = u_t. \quad (1.87)$$

Однако главная часть $\hat{R}^{3/2} = (-\hat{L}_u)R$ есть

$$\partial^3 - \partial u - \frac{1}{2} u \partial + \frac{1}{4} u_x = \partial^3 - \frac{3}{4} \partial u - \frac{3}{4} u \partial; \quad (1.88)$$

это оператор Лакса для уравнения КдФ. Другие дробные степени суть $\hat{R}^{5/2}$, $\hat{R}^{7/2}$ и т. д.; они порождают лаксову иерархию уравнений КдФ. Очевидно, что эта иерархия неединственна [1.115]¹⁾; структуры продолжения [1.116] отчасти объясняют этот факт. Похоже, что здесь важно следующее обстоятельство: если степень оператора L равна 2, то он является скалярным оператором Шрёдингера L_u и порождает поэтому лаксову иерархию уравнений КдФ. Но если L имеет степень 3, что предполагается в работе по структурам продолжения, то порождается иная иерархия уравнений. Эта интересная проблема требует дальнейшего изучения. Она ставит любопытные вопросы, касающиеся иерархий других интегрируемых систем.

Гельфанд и Дикий [1.117] и другие авторы, которых упоминает Манин [1.118], обосновали применение оператора (1.88). Они показали, как получить N -солитонные решения уравнения КдФ на вещественной оси $-\infty < x < \infty$, сведя задачу методами алгебраической геометрии к системе линейных алгебраических уравнений.

Аналогичные, хотя, по-видимому, более трудоемкие методы ввели Матвеев и Итс [1.119, 1.120] и Дубровин и Новиков с сотрудниками [1.119, 1.120], чтобы решить уравнение КдФ с периодическими граничными условиями. Современная версия этого метода описана С. П. Новиковым в гл. 10²⁾. Лакс [1.114] привел в 1974 г. плотное множество решений уравнения КдФ с периодическими граничными условиями, что стимулировало работу [1.121].

Вслед за работой Лакса [1.70] еще две замечательные статьи создали большую часть того, что теперь называется теорией солитонов. Это работы Захарова и Шабата [1.38], в которой решено НУШ, и Захарова и Фаддеева [1.113], где выявлена симплектическая структура уравнения КдФ. Авторы последней работы показали, что КдФ — это первый ставший известным пример бесконечномерной полностью интегрируемой гамильтоновой системы, и отметили, что для него существует бесконечно

много первых интегралов $I_n[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(u, u_x, \dots) dx$ (здесь

P — это сохраняющиеся плотности, обозначенные в разд. 1.4 как

¹⁾ См. также [1.172]. Представляют интерес, кроме того, и приведенные там ПБ.

²⁾ См. примечание на с. 9. — *Прим. ред.*

T^n). Они использовали гамильтонову форму записи уравнения КдФ

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial I_3[u]}{\partial u(x)}, \quad (1.89)$$

которая в работе Лакса [1.70] приведена как принадлежащая Гарднеру. Захаров и Фаддеев показали, что бесконечная совокупность констант I_n образует в точности нужное для полной интегрируемости количество сохраняющихся величин, построив симплектическую форму

$$\Omega(\delta_1 u, \delta_2 u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x dy [\delta_1 u(x) \delta_2 u(y) - \delta_1 u(y) \delta_2 u(x)] \quad (1.90)$$

и доказав ее инвариантность относительно преобразования к данным рассеяния (вариации $\delta_1 u$ и $\delta_2 u$ должны быть выражены через соответствующие вариации данных рассеяния); тем самым они показали, что обратное и прямое преобразования рассеяния суть канонические преобразования к переменным типа действия — угол (и наоборот), построили гамильтониан, выраженный через такие переменные, доказали, что этот гамильтониан зависит только от переменных действия, причем последние являются интегралами движения, и непосредственно проинтегрировали уравнения движения в указанных переменных.

Это великолепное исследование является источником большинства результатов, изложенных в настоящей книге. В частности, изучение солитонных уравнений как полностью интегрируемых гамильтоновых систем служит предметом гл. 11, написанной Л. Д. Фаддеевым, и большей части гл. 6 (Ньюэлл), а в гл. 2 Лэм и Маклафлин снова вводят каноническую структуру гамильтониана для нелинейных эволюционных уравнений с солитонными решениями, причем делают это способом, полезным в качестве введения в последующие главы. Поэтому нет нужды далее развивать здесь эту красивую тему.

Мы, однако, отметим важную в историческом плане работу Гарднера [1.122] (1971 г.), которая содержит результаты, связанные с выражениями (1.89) и (1.90). Гарднер определил скобки Пуассона для двух функционалов от u , скажем, K_1 и K_2 , формулой

$$\{K_1, K_2\} = \int \frac{\delta K_1}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta K_2}{\delta u} \right) dx. \quad (1.91)$$

Он доказал, что интегралы $I_n[u]$, связанные с плотностями T^n , находятся в инволюции, т. е. $\{I_n, I_m\} = 0$. Мы проследим в другом месте [1.123], как эти идеи соотносятся с теоремой Фробениуса об интегрируемости, с теорией внешних дифференциальных форм Картана и со структурами продолжения Уолквиста и Эстабрука [1.61, 1.75, 1.76].

Существует естественное обобщение задач рассеяния 2×2 , введенных Захаровым и Шабатом [1.38, 1.109] в 1971 и 1973 гг. для решения НУШ; оно было найдено АКНС [1.44, 1.45] в 1973 г. Этот шаг был осуществлен лишь после появления работ Захарова и Шабата, однако нам неизвестно, в какой степени последние повлияли на АКНС.

1.6. Открытие других N -солитонных решений: схема задачи рассеяния 2×2 АКНС — Захарова — Шабата и ее геометрия

В 1971 г. Хирота [1.33], впервые применив свой прямой метод, нашел N -солитонное решение уравнения КдФ. В 1972 г. Вадати и Тода [1.124] использовали описанный Гарднером и др. [1.1] обратный метод для получения N -солитонных решений КдФ в явном виде. Затем Вадати [1.125] решил модифицированное уравнение КдФ (1.78) с помощью схемы задачи рассеяния 2×2 . В это время Дж. Лэм размышлял над возможностью связи между КдФ и СГ-уравнениями — идеей, которую он сообщил нам в Манчестере. В 1972 г. он применил законы сохранения СГ-уравнения для описания распада импульса [1.126]. В 1973 г. [1.127, 1.128] он доложил о решении уравнений СИП методом обратной задачи рассеяния (см. гл. 2).

В Манчестере мы также изучали ультракороткие оптические импульсы и ранее [1.129] отметили столкновительные свойства решений уравнений Максвелла — Блоха (МБ), имеющих форму гиперболического секанса (типа уединенной волны). Здесь мы пользуемся обозначениями СИП и МБ, введенными для соответствующих уравнений в работе [1.130]. Лэм и Маклафлин в гл. 2 называют уравнения СИП уравнениями Максвелла Блоха. Теперь известно [1.131], что уравнения МБ в том виде, в котором они были определены в [1.130], не являются интегрируемой системой и не имеют *точных* солитонных решений в смысле разд. 1.2.

В 1972 г. Гиббон и Эйлбек [1.132] предположили, что существует N -солитонное решение уравнений СИП для острорезонансного случая. Эти уравнения эквивалентны СГ-уравнению и связаны с редуцированными уравнениями Максвелла — Блоха (РМБ) [1.64, 1.133]. Уравнения РМБ имеют вид

$$\begin{aligned} E_x + E_t &= \alpha s, \\ r_t &= -\mu s, \\ s_t &= \mu r + E_u, \\ u_t &= -E s; \end{aligned} \tag{1.92}$$

они были решены Кодри и др. [1.82] с помощью подстановки типа Хопфа — Коула

$$E = 2g/f, \quad r = 2h/f, \quad E^2 = \frac{4\partial^2}{\partial t^2} \ln f, \quad (1.93)$$

которая непосредственно дает

$$g^2 = ff_{tt} - f_t^2. \quad (1.94)$$

При этом уравнения РМБ дают еще два однородных уравнения для f , g и h . Теперь решение можно получить [1.82], предположив, что оно имеет вид

$$\begin{aligned} f &= \det M_{ij}, \\ M_{ij} &= \frac{2}{E_i + E_j} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} (\Theta_i + \Theta_j) \right], \\ \Theta_j &= \omega_j t - k_j x + \delta_j. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Сходство с решением (1.22) СГ-уравнения в лоренц-ковариантной форме очевидно. Отметим, что по крайней мере для $\mu = 0$ уравнения (1.92) решаются подстановкой $u = \cos \varphi$, $s = -\sin \varphi$, где $\varphi_t = E$, $r = 0$, дающей

$$\varphi_{xt} + \varphi_{tt} = -\alpha \sin \varphi. \quad (1.96)$$

Отсюда получаем СГ-уравнение (1.10) заменой $\xi = \sqrt{\alpha}(t - 2x)$, $\eta = \sqrt{\alpha}t$, $\xi \rightarrow x$, $\eta \rightarrow t$. Поэтому решение (1.95) с необходимостью содержит решение СГ-уравнения (1.10).

Краткое сообщение о решении (1.95) появилось в начале 1973 г., а затем было опубликовано гораздо более подробное изложение [1.82]. Хирота [1.81] независимо опубликовал свое решение СГ-уравнения, также найденное прямыми методами, в конце 1972 г. АКНС опубликовали свое решение СГ-уравнения методом обратной задачи рассеяния в 1973 г. [1.98] и впоследствии в том же году дали обобщение [1.44, 1.45] схемы обратной задачи рассеяния Захарова и Шабата [1.38, 1.109]. Уравнения РМБ (1.92) были решены этим методом в конце 1973 г. [1.133]. Применение уравнений РМБ в теории СИП описано, например, в [1.130]. Более подробно их приложения и каноническая структура рассматриваются в [1.64].

Наиболее естественным путем можно было бы, как теперь стало понятно, прийти к предложенной АКНС схеме обратной задачи рассеяния для СГ-уравнения, отправляясь от АПБ (1.38). Пусть $\Gamma = \operatorname{tg}[(u + u')/4]$. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma_{,x} &= \frac{1}{2} u_x (1 + \Gamma^2) + k\Gamma, \\ \Gamma_{,t} &= k^{-1} \Gamma \cos u - (2k)^{-1} (1 - \Gamma^2) \sin u. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Преобразование Риккати $\Gamma = v_2 v_1^{-1}$ дает

$$\begin{pmatrix} v_{1,x} \\ v_{2,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}u_x \\ +\frac{1}{2}u_x & +\frac{1}{2}k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (1.98)$$

$$\begin{pmatrix} v_{1,t} \\ v_{2,t} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2k} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (1.99)$$

Именно такое сочетание задачи рассеяния и задачи Коши использовали АКНС для решения СГ-уравнения (1.11а) обратным методом (если k в этих формулах рассматривать как собственное значение $k \equiv 2i\xi$). Затем АКНС обобщили свой метод [1.39, 1.40], распространив его на уравнения рассеяния и эволюционные уравнения вида

$$\hat{L}v = \zeta v, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} i\partial/\partial x & -iq \\ ir & -\partial/\partial x \end{pmatrix}, \quad (1.100)$$

$$\hat{A}v = v_t, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \quad (1.101)$$

где A, B, C, q и r выбираются так, чтобы при $\zeta_t = 0$ выражение $\hat{L}_t = [\hat{A}, \hat{L}]$ было требуемой парой эволюционных уравнений $q_t = K_1[q, r]$, $r_t = K_2[q, r]$ (в которых $K_i[q, r]$ есть функционал от двух потенциалов q, r). Уравнения (1.101) и (1.100) сводятся к (1.99) и (1.98), если $k = 2i\xi$, $r = -q = -u_x/2$ и $A = (i/4\xi)\cos u$, $B = C = (i/4\xi)\sin u$. При симметрии $r = -q$ собственные значения связанных состояний неэрмитова оператора (1.100) лежат на мнимой оси $\zeta = i\eta$ ($\eta > 0$) или располагаются парами ($\zeta, -\zeta^*$) в верхней половине плоскости ζ . В случае СГ-уравнения они связаны с 2π -кинками и бризерами соответственно. (Заметим, что, как мы и предчувствовали, в случае $q = r^*$, например, для уравнения $u_{xt} = \text{sh } u$, оператор \hat{L} эрмитов и возможны лишь вещественные собственные значения. Тогда нет ни связанных состояний, ни солитонов, ни бризеров. Уравнение sh-Gordon обладает АПБ [1.50, 1.54], но у него нет солитонных решений даже несмотря на то, что $u = 0$ есть решение.)

Мы не будем обсуждать обобщение АКНС как таковое более подробно, поскольку Ньюэлл в гл. 6 излагает соответствующую теорию в целом. Стоит отметить, однако, что хотя операторы \hat{A} и \hat{L} удовлетворяют уравнению лаксовой пары типа (1.86b), но \hat{L} здесь, как мы видели, в общем случае неэрмитов, тогда как \hat{A} не обязательно кососимметричен, не является дифференциальным оператором и зависит от собственного значения ζ . Таким

образом, если I) $[\hat{A}, L] = L_t$, II) $Lv = \xi v$, III) $\xi_t = 0$, то $L(Av - v_t) = \xi(Av - v_t)$ и $Av - v_t$ является собственной функцией, отвечающей ξ , т. е. $\hat{A}v - v_t = \lambda(\xi)v$, или $\lambda(\xi) = 0$. Легко убедиться, что ξ^{-1} в \hat{A} действует как интегральный оператор, вычислив $[L, \hat{A}]$ из (1.98) и (1.99). Получится ¹⁾

$$\begin{aligned} [\hat{L}, \hat{A}] &= -\frac{\sin u}{2\xi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \frac{1}{2}u_x \\ \frac{1}{2}u_x & -\partial/\partial x \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i \sin u}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}u_{xt} \\ \frac{1}{2}u_{xt} & 0 \end{pmatrix} = \hat{L}_t. \end{aligned} \quad (1.102)$$

С другой стороны, из (I), (II) и уравнения $\hat{A}v = v_t$ следует $\xi_t = 0$, и эта деформация является изоспектральной.

Тахтаджян и Фаддеев [1.134] нашли в 1974 г. схему обратной задачи рассеяния в виде настоящей лаксовой пары для СГ-уравнения (1.10). Используемая ими пара операторов — это дифференциальные матричные операторы размера 4×4 . Их сингулярный характер вызывает некоторые трудности [1.135]. Связь между данной схемой обратного метода и схемой (1.98), (1.99) установил Полмайер (см. с. 320 книги [1.141]). Для СГ-уравнения, содержащего массу m и имеющего вид

$$u_{xx} - u_{tt} = m^2 \sin u, \quad (1.103)$$

Тахтаджян и Фаддеев [1.134] получили замечательное выражение для гамильтониана. Через безразмерную константу взаимодействия γ_0 оно записывается так:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^L (64m^2\gamma_0^{-2} + p_i^2)^{1/2} + \sum_{j=1}^M (256m^2\gamma_0^{-2} \sin^2 \theta_j + \hat{p}_j^2)^{1/2} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) [m^2 + p^2(\xi)]^{1/2} d\xi. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Этот прекрасный результат повторно выведен Фаддеевым в гл. 11. При его получении используется тот факт, что обратные

¹⁾ АКСН использовали условие интегрируемости $v_{xt} = v_{tx}$, чтобы вывести (в покомпонентном представлении) выражение $[\hat{A}, \hat{L}]v = \hat{L}_t v$ (1). Очевидно, что лаксова форма $\hat{L}_t = [\hat{A}, \hat{L}]$ (2) следует из него, если (1) справедливо при всех v и форма (2) не зависит от ξ . Рассуждения при выводе формулы (1.102), по-видимому, ставят вопрос о собственном векторе v , отвечающем значению $\xi = 0$. С другой стороны, если \hat{A} есть полином от ξ , то ξ действует как дифференциальный оператор, и то же самое справедливо для \hat{A} .

(и прямые) преобразования рассеяния являются каноническими. Мы впоследствии нашли аналогичное выражение для СГ-уравнения (1.11а) в конусных переменных и получили (1.105) из него [1.42], используя каноническую структуру, выведенную из задачи рассеяния 2×2 (1.98). В гл. 11 Фаддеев проводит соответствующие вычисления для СГ-уравнения (1.11а).

Заметим, что гамильтониан (1.104) опять же записан в переменных типа действие — угол. Его полуклассическое квантование нетрудно осуществить [1.41, 1.42], поскольку координаты, канонически сопряженные импульсам p_i и \hat{p}_i , можно найти с помощью симплектической формы, как указал Л. Д. Фаддеев. Полученный результат в точности совпадает с тем, который Дашен, Хасслахер и Невё (ДХН) [1.40] получили методами ВКБ, с учетом перенормировки константы взаимодействия γ_0 . В частности, дискретный спектр бризера принимает вид

$$M_n = \frac{16m}{\gamma_0} \sin \frac{n\gamma_0}{16}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.105)$$

где N есть наибольшее целое число, не превышающее $8\pi\gamma_0^{-1}$. Корепин и Фаддеев [1.41] исследовали поправки первого порядка к γ_0 и обнаружили, что они согласуются с найденными ДХН [1.40]. Важный результат (1.105) также согласуется с собственными значениями связанных состояний S -матрицы квантованного СГ-уравнения [1.71, 1.95].

Заметим, что каждая «частица», солитон, бризер или мода ξ (независимо от того, квантованы они или нет) вносит в (1.104) такой же вклад, какой внесла бы свободная релятивистская частица подходящей массы: эти массы равны $8m\gamma_0^{-1}$ для кинка, $16m\gamma_0^{-1} \sin \theta$ для бризера и m для каждой моды ξ . Они согласуются с вычисленными ранее (см. формулу (1.30) и относящиеся к ней рассуждения), но теперь зависят от константы взаимодействия γ_0 и от массы поля m (константа взаимодействия γ_0 не имеет отношения к лоренцевым множителям γ_1, γ_2 и т. д.). Можно выразить гамильтониан ковариантного СГ-уравнения в виде (1.104) с помощью линеаризованного дисперсионного соотношения $\omega^2 = m^2 + k^2$ уравнения (1.103). Сходным образом гамильтониан модифицированного уравнения КдФ (1.78) определяется законом движения, в котором энергия кубически зависит от импульса [1.42]; это представляется менее физически осмысленным, чем (1.104). Неясно, всегда ли можно найти такие переменные, чтобы солитоны и бризеры удовлетворяли соотношению между энергией и импульсом, характерному для линеаризованного уравнения; уравнения РМБ, по-видимому, являются примером случая, когда это невозможно [1.64].

Ли [1.136] недавно подчеркнул роль, которую играет константа взаимодействия γ_0 в нелинейных теориях поля. Рассмот-

рим плотность лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} v_t^2 - \frac{1}{2} v_x^2 - \frac{m^2}{\beta^2} \mathcal{V}(\beta^2 v^2). \quad (1.106)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

I) Так как мы предполагаем, что

$$\frac{m^2}{\beta^2} \mathcal{V}(\beta^2 v^2) = \frac{1}{2} m^2 v^2 + O(\beta^2 v^4) + O(\beta^4 v^6) + \dots \quad (1.107)$$

и так как только решения, зависящие от аргумента $(x - Vt)$, являются гармоническими волнами в линейной теории, то никаких уединенных волн нельзя построить из этих диспергирующих линеаризованных волн, и решения уравнений движения (1.106) типа уединенной волны будут сингулярными по β .

II) Эта сингулярность имеет характер простого полюса. Действительно, пусть $\gamma_0 \equiv \beta^2$ и $\beta v \equiv u$. Тогда

$$\mathcal{L} = \gamma_0^{-1} \left[\frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - m^2 \mathcal{V}(u^2) \right], \quad (1.108)$$

и γ_0 не входит в уравнения движения для u (вычислите лагранжевы уравнения движения).

III) Поскольку квантовомеханическое действие есть \hbar^{-1} , умноженное на классическое действие, то γ_0 играет роль \hbar в любой квантованной теории. Энергия покоя $E_{\text{класс}}$ для уединенной волны пропорциональна γ_0^{-1} ,

$$E_{\text{квант}} = E_{\text{класс}} + O(\gamma_0^0) + O(\gamma_0^1) + \dots \quad (1.109)$$

IV) Здесь γ_0 играет роль \hbar , так как канонический импульс в силу (1.106) есть $\pi(x, t) \equiv \delta \mathcal{L} / \delta u_t = \gamma_0^{-1} u_t$, скобки Пуассона имеют вид

$$\{u(x, t), \pi(y, t)\} = \delta(x - y), \quad (1.110a)$$

а каноническое квантование осуществляется посредством коммутатора

$$[u(x, t), u_t(y, t)] = i\gamma_0 \delta(x - y). \quad (1.110b)$$

Заметим, что из I) и II) следует, что уединенные волны невозможно получить посредством теории возмущений (относительно линейной теории). Результаты Ли так же приложимы к четырехмерному пространству Минковского (размерностью $3 + 1$), как и к пространству с $1 + 1$ измерениями, и не ограничены солитонами, определенными в разд. 1.1. В пространстве с размерностью $1 + 1$ масса уединенной волны M есть просто (согласно (1.108))

$$M = \frac{m}{\gamma_0} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{2V(u^2)} du, \quad (1.111)$$

где u_1 и u_2 — последовательные нули функции $V(u^2)$. Для 2π -кинка СГ-уравнения $V(u^2) = (1 - \cos u)$, и $M = 8\pi\gamma_0^{-1}$ в соответствии с (1.104).

Результат (1.104), имеющий форму гамильтониана свободной частицы, позволяет рассматривать СГ-уравнения в качестве модельной системы как в классической статистической механике, так и в квантовой теории поля. Заметим, однако, что конкретный вид (1.104) зависит от начальных данных: число кинков L , бризеров M и занятость состояний импульса $P(\xi)$ должны быть вычислены по начальным данным $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$ для СГ-уравнения (1.10). $P(\xi)$ входит прежде всего как канонический импульс, связанный с модой, обозначенной посредством величины ξ , и именно так нам приходится его трактовать (см. [1.221]). При этом моды, обозначенные посредством ξ , не описываются теорией квантованного уравнения sine-Gordon. Их роль, очевидно, берут на себя бризеры. Мы рекомендуем читателю ознакомиться со статьями в [1.137], где описаны некоторые приложения теории солитонов в физике твердого тела. Там помещено исследование Бишопа по статистической механике СГ-уравнения. В гл. 12 Лютер устанавливает связи известной в статистической механике XYZ-модели со спином $1/2$ [1.138] с массивной моделью Латтинджера, а также (пользуясь своей моделью рассеяния в обратном направлении [1.139]) с массивной моделью Тирринга (МТ) и с квантованным СГ-уравнением. Эти связи позволили ему вычислить собственные значения бризера (1.105) «точно».

Замечательно, что вычисление S -матрицы (которое предполагает (I) бесконечное число законов сохранения и, следовательно, разложимость S -матрицы в произведение двухчастичных S -матриц, (II) перекрестную симметрию, (III) унитарность, (IV) определенное аналитическое поведение) дает собственные значения (1.105) связанных состояний. Уравнение движения для СГ-уравнения не используется [1.71, 1.95]. Результат, по-видимому, основан на предположении, что существование двух полиномиальных сохраняющихся плотностей T^2 и T^4 для нелинейного уравнения Клейна — Гордона (1.37) означает, что оно является уравнением sine-Gordon (sh-Gordon), как отмечалось в разд. 1.3 (рядом с формулой (1.60)). Однако рассуждения проводятся в рамках массивной модели Тирринга [1.95], причем налагаются следующие условия: существование области взаимодействия, для которой нет связанных состояний (свойство МТ \equiv СГ-модели), $U(1)$ симметрия двухчастичной S -матрицы и условие минимальности (отсутствие излишних полюсов и нулей в физическом листе для амплитуд прохождения). Не доказано также, что полученная в результате единственно возможная S -матрица есть S -матрица МТ \equiv СГ-модели.

Рассуждения, с помощью которых из АПБ вида (1.38) были получены задача рассеяния вида (1.100) и задача Коши вида (1.101), Полмайер [1.86] обобщил на классические нелинейные σ -модели в пространстве с размерностью $1 + 1$. Это лоренц-ковариантные уравнения

$$q_{tt} - q_{xx} - \lambda q = 0 \quad (1.12a)$$

с ограничением

$$q^2 = 1. \quad (1.12b)$$

Ограничение определяет множитель Лагранжа $\lambda(x, t) = -(\mathbf{q}_t^2 - \mathbf{q}_x^2)$. Мы предполагаем, что $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ состоит из n скалярных полей. Эти n уравнений с ограничением (1.12b) инвариантны относительно группы O_n . Полмайер построил АПБ для (1.112) и вывел из него бесконечный набор сохраняющихся плотностей (заметим, что в разд. 1.2 мы использовали для нахождения сохраняющихся плотностей ПБ, а не АПБ; однако Вадати [1.140] показал, как для этой цели можно применить АПБ). В случае $n \leq 6$ Полмайер нашел линейную задачу на собственные значения, соответствующую (1.100), и изоспектральную эволюцию, соответствующую (1.101). Полмайер осуществил линеаризацию системы (1.112) при произвольном n с помощью алгебр Клиффорда и найденной Левиным линеаризации матричных уравнений Риккати. Уравнения (1.112) в конусных координатах инвариантны относительно локальных масштабных преобразований [1.86, 1.141, с. 339–335] и не имеют солитонных решений. Однако при нарушении масштабной инвариантности такие решения могут появиться. В частности, при $n = 3$ (O_3 -инвариантная модель) эта система включает уравнение sine-Gordon, имеющее солитонные решения с конечной энергией (кинки).

В конусных переменных $\xi = (t + x)/2$, $\eta = (t - x)/2$ рассматриваемое уравнение при $n = 3$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \eta \partial \xi} + \left(\frac{\partial q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial q}{\partial \xi} \right) \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3). \quad (1.113)$$

Сохранение энергии и импульса означает, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} q_n^2 = \frac{\partial}{\partial \eta} q_\xi^2 = 0, \quad (1.114)$$

и масштабную инвариантность можно нарушить, деформировав обе конусные переменные таким образом, чтобы q_n^2 и q_ξ^2 отвечали условию нормировки

$$q_n^2 = q_\xi^2 = 1. \quad (1.115)$$

Введем теперь локальную систему координат \mathbf{q} , \mathbf{q}_ξ , \mathbf{q}_η так, чтобы \mathbf{q} было ортогонально \mathbf{q}_ξ и \mathbf{q}_η , но \mathbf{q}_ξ и \mathbf{q}_η образовывали от-

личный от прямого угла:

$$\mathbf{q}_\eta \cdot \mathbf{q}_\xi = \cos u. \quad (1.116)$$

Из уравнения (1.113), условия нормировки (1.115) и определения (1.116) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = -\sin u \quad (1.117)$$

(знак минус получился вследствие выбора $\eta = (t - x)/2$ вместо $(x - t)/2$).

Полмайер [1.86, 1.141, с. 339—355] линеаризовал систему (1.112) (т. е. нашел спектральные преобразования) для случаев $n \leq 6$ и при $n = 4$, нарушив масштабную инвариантность согласно (1.115), получил уравнения движения в двух полях α, β

$$\begin{aligned} \alpha_{\xi\eta} + \sin \alpha + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha/2}{\sin \alpha} \beta_\xi \beta_\eta &= 0, \\ \beta_{\xi\eta} &= \frac{\beta_\xi \alpha_\eta + \alpha_\xi \beta_\eta}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Они сводятся к СГ-уравнению (1.117) при $\beta \equiv 0$. Полмайер [1.86] заметил, что уравнения (1.118) суть условия погружения двумерной поверхности в трехмерную сферу, в свою очередь погруженную в четырехмерное евклидово пространство. Лунд [1.48] независимо получил те же самые уравнения движения, исходя из именно этой точки зрения.

Поскольку его рассуждения создают геометрическую основу спектральных преобразований в рассмотренном им случае, мы здесь еще немного коснемся этого вопроса. Наши краткие замечания следуют обзору Лунда [1.142], и там читатель может найти подробности.

Рассмотрим задачу о погружении n -мерной поверхности V_n в $(n + 1)$ -мерное евклидово пространство E :

$$\begin{aligned} E &= x^i \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1), \\ V_n &= y^\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.119)$$

На V_n задана метрика $ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu$. Погружение является изометрическим (сохраняет тензорные произведения), если V_n можно так определить формулой

$$x^i = x^i(y^1, \dots, y^n), \quad (1.120)$$

что $g_{\mu\nu} = (\partial x^i / \partial y^\mu) (\partial x^i / \partial y^\nu)$. Векторы X_μ , лежащие в пространстве, касательном к V_n , и нормаль к поверхности, X_{n+1} , определяют базис в E , $X_\mu \equiv \partial x / \partial y^\mu$, X_{n+1} . Выражение векторов $\partial X_\mu / \partial y^\nu$, $\partial X_{n+1} / \partial y^\nu$ через этот базис образует линейную систему

уравнений Гаусса — Вайнгартена [1.143]. Условия интегрируемости $\partial^2 X / \partial y^\sigma \partial y^\nu = \partial^2 X / \partial y^\nu \partial y^\sigma$ (для всех пар y^σ, y^ν) приводят к нелинейной системе уравнений Гаусса — Кодацци [1.144].

Для двумерной поверхности с некоторой конкретной метрикой, погружаемой в трехмерное евклидово пространство, Лунд [1.48, 1.142] нашел уравнения Гаусса — Кодацци, эквивалентные (1.118)¹⁾ и имеющие вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\operatorname{ctg}^2 \theta \lambda_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\operatorname{ctg}^2 \theta \lambda_\xi) &= 0, \\ \theta_{\xi\eta} - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \lambda_\xi \lambda_\eta &= 0 \end{aligned} \quad (1.121)$$

(из сравнения с (1.118) очевидно, что $\theta = \alpha/2$, $\lambda = 2\beta$ и $\eta = (x - t)/2$). Соответствующая система Гаусса — Вайнгартена есть

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{1,\beta} \\ v_{2,\eta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i\xi + ip & q \\ -q^* & i\xi - ip \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_{1,\eta} \\ v_{2,\eta} \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} r & s \\ s & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (1.122)$$

здесь $p = [(\cos 2\theta)/2 \sin^2 \theta] \lambda_\xi$, $q = -\theta_\xi + i \operatorname{ctg} \theta \lambda_\xi$, $r = (1/4\xi) \times \times \cos 2\theta - (\sin^2 \theta)^{-1} \lambda_\eta$, $s = (1/4\xi) \sin 2\theta$. Собственное значение было введено с учетом инвариантности (1.121) относительно преобразования Ли (что эквивалентно инвариантности Лоренца — сравните введение этого собственного значения с собственным значением λ , введенным в (1.80) посредством инвариантности Галилея). Условия (1.121) достаточны и *необходимы* для интегрируемости (1.122). Задача рассеяния и временная эволюция (1.122), однако, те же, что и в обобщенной схеме АКНС (1.100), (1.101). Насколько нам известно, результаты, сходные с результатами Лунда и Полмайера, получил также Тахтаджян [1.144].

Рассуждения Лунда [1.142] создают хорошее геометрическое обоснование схемы обратной задачи рассеяния для СГ-уравнений (1.10) или (1.11) и ее обобщения на случай двух полей θ, λ , т. е. схемы (1.121). Они показывают, как СГ-уравнения возникают в первую очередь в дифференциальной геометрии [1.42]; мы уже отмечали это в разд. 1.2. Лэм [1.145] и Лакшманан [1.146] различными путями геометрически обосновали метод обратной задачи рассеяния, а недавно (1979) Сасаки [1.147] показал, что *все* системы АКНС представляют поверхности с постоянной отрицательной кривизной. Его доказательство кратко и элегантно, и поэтому мы приводим его здесь.

¹⁾ Необходимо еще одно условие. См. объяснение в «Замечании при корректуре», помещенном в конце книги.

Уравнения рассеяния и временной эволюции АКНС ((1.100) и (1.101)) эквивалентны полностью интегрируемой системе Пфаффа, которую можно выразить в виде

$$dv - \Omega v = 0, \quad \text{Tr} \{\Omega\} = 0 \quad (1.123)$$

где Ω есть 2×2 -матрица 1-форм. Условием интегрируемости служит

$$0 = d^2v = d\Omega v - \Omega \wedge dv = (d\Omega - \Omega \wedge \Omega) v, \quad (1.124)$$

так что нелинейные эволюционные уравнения $\hat{L}_{,t} = [\hat{A}, \hat{L}]$ эквивалентны обращению в нуль 2-форм

$$\Theta = d\Omega - \Omega \wedge \Omega, \quad \text{т. е.} \quad \Theta = 0. \quad (1.125)$$

Для дифференциальных n -форм мы используем символ внешнего произведения « \wedge ». Превосходная книга для справок по теории дифференциальных форм — это [1.148].

Легко видеть, что Ω определена неоднозначно. Эта форма инвариантна относительно «калибровочного преобразования»

$$\begin{aligned} v &\rightarrow v' = Bv, \\ \Omega &\rightarrow \Omega' = dBB^{-1} + B\Omega B^{-1}, \\ \Theta &\rightarrow \Theta' = B\Theta B^{-1}, \end{aligned} \quad (1.126)$$

где B — произвольная 2×2 -матрица, определитель которой равен единице.

Сравним (1.125) с результатом, выводимым для псевдосферических поверхностей. Для них можно ввести (в трехмерном пространстве) локальный ортонормированный базис на касательной плоскости в любой точке P поверхности. Этот базис натянут на два вектора, скажем, e_1 и e_2 , и их всегда можно выбрать так, чтобы

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}. \quad (1.127)$$

«Структурные уравнения» суть (см. Фландерс [1.148])

$$dP = \sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2, \quad (1.128a)$$

$$de_1 = \omega e_2, \quad (1.128b)$$

$$de_2 = -\omega e_1, \quad (1.128c)$$

причем σ^1 и σ^2 — это 1-формы, ω есть связывающая 1-форма. Первое уравнение (1.128a) утверждает, что P лежит на поверхности; два оставшихся уравнения следуют из (1.127).

Условие интегрируемости в этом случае есть $d^2P = 0$, и из него следует

$$d\sigma^1 = \omega\sigma^2, \quad (1.129)$$

$$d\sigma^2 = -\omega\sigma^1, \quad (1.129)$$

Гауссова кривизна K определяется [1.128] уравнением

$$d\omega = -K\sigma^1\sigma^2. \quad (1.130)$$

Для K , в точности равного -1 , выбор

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sigma^2 & \frac{1}{2}(\omega + \sigma^1) \\ \frac{1}{2}(-\omega + \sigma^1) & \frac{1}{2}\sigma^2 \end{pmatrix}$$

(например) удовлетворяет (1.125) точно.

Теперь понятно, что каждая система АКНС может быть представлена как поверхность с постоянной отрицательной кривизной относительно некоторой метрики¹⁾. Эта метрика задается условием

$$ds^2 = (\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2. \quad (1.131)$$

Известно [1.149], что поверхности постоянной кривизны обладают максимальным числом изометрий (отображений псевдосферических поверхностей в себя, сохраняющих расстояние (т. е. тензорные произведения)). Для 2-поверхностей с постоянной отрицательной кривизной группы изометрий суть $SL(2, R)$ и $SU(1, 1)$. Это объясняет, например, появление алгебр Ли этих групп в структурах продолжения систем АКНС [1.150].

С этой точки зрения АПБ есть калибровочное преобразование (1.126), переводящее одну псевдосферическую поверхность в другую, и для него можно получить общую форму, пригодную для всех систем АКНС. Сохраняющиеся плотности, которые мы сейчас выведем в явном виде, суть в точности сохраняющиеся плотности системы АКНС, получаемые разложением относительно бесконечно удаленной точки в плоскости ζ [1.69], но их набор может быть еще более полным. Чтобы проиллюстрировать эти идеи, мы получим сохраняющиеся плотности для СГ-уравнения и покажем, как их дополнить в этом случае.

Из $\Theta = 0$ всегда можно определить две полностью интегрируемые системы Пфаффа

$$0 = \gamma_1 \equiv d\Gamma_1 - \omega_3 - 2\Gamma_1\omega_1 - \Gamma_1^2\omega_2, \quad (1.132a)$$

$$0 = \gamma_2 \equiv d\Gamma_3 - \omega_2 - 2\Gamma_2\omega_1 + \Gamma_1^2\omega_2, \quad (1.132b)$$

где
$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & -\omega_1 \end{pmatrix}, \quad (1.132c)$$

а Γ_i суть две неизвестные функции. Из уравнения $\Theta = 0$ (1.125) получим

$$\begin{aligned} d\gamma_1 &= 2\gamma_1(\omega_1 + \Gamma_1\omega_2), \\ d\gamma_2 &= -2\gamma_2(\omega_1 - \Gamma_2\omega_3), \end{aligned} \quad (1.133a)$$

¹⁾ См. примечание на с. 54.

а из условий замкнутости $d^2\gamma_1 = d^2\gamma_2 = 0$ следует, что 1-формы

$$\delta_1 \equiv \omega_1 + \Gamma_1 \omega_2 \quad (1.133b)$$

$$\delta_2 \equiv \omega_1 - \Gamma_2 \omega_3 \quad (1.133c)$$

замкнуты, т. е.

$$d\delta_1 = d\delta_2 = 0. \quad (1.134)$$

Эти выражения являются законами сохранения, но поскольку каждое из них зависит от ξ , то каждое представляет бесконечный набор нетривиальных законов сохранения.

Из (1.98, 1.99) видно, что для СГ-уравнения нужно выбрать

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2} k dx - \frac{1}{2k} \cos u dt, \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} u_x dx - \frac{1}{2k} \sin u dt, \\ \omega_3 &= -\frac{1}{2} u_x dx - \frac{1}{2k} \sin u dt, \end{aligned} \quad (1.135)$$

где k есть вещественный параметр. Отсюда легко получить, например, что система Пфаффа (1.132b) в точности эквивалентна (1.97). (Система (1.132a) соответствует выбору $\Gamma_1 = v_1/v_2$.) Хотя сохраняющиеся плотности (1.54) сравнительно просто получить этим способом, удобно найти путь, который к тому же выделяет набор (1.59). Чтобы это сделать (как указал нам Сасаки), можно выбрать для Ω следующее выражение:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{4} (u_x dx - u_t dt) & \frac{1}{2} \eta e^{iu} dx + \frac{1}{2\eta} e^{iu/2} dt \\ \frac{1}{2} \eta e^{iu/2} dx + \frac{1}{2} e^{-iu/2\eta} dt & -\frac{i}{4} (u_x dx - u_t dt) \end{array} \right). \quad (1.136)$$

Его нужно отождествить с выражением

$$\Omega = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} \omega & \frac{1}{2} (\sigma^1 - i\sigma^2) \\ \frac{1}{2} (\sigma^1 + i\sigma^2) & -\frac{i}{2} \omega \end{array} \right), \quad (1.137)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \cos \frac{u}{2} (dx + dt), \\ \sigma^2 &= \sin \frac{u}{2} (dx - dt), \\ \omega &= \frac{1}{2} (u_x dx - u_t dt), \end{aligned} \quad (1.138)$$

после чего провести масштабное преобразование $x \rightarrow \eta x$, $t \rightarrow \eta^{-1} t$. В результате метрика задается выражением

$$ds^2 = \eta^2 (dx)^2 + 2 \cos u dx dt + \eta^{-2} (dt)^2, \quad (1.139)$$

что совпадает с метрикой для случая (1.135) (при $\eta \equiv k$).

Теперь оказывается, что сохраняющиеся плотности суть комплексно-сопряженные величины $\delta_1^* = \delta_2$, и нам нужно рассмотреть лишь одну из них. Уравнение Риккати есть

$$0 = d\Gamma - \omega_3 + 2\Gamma\omega_1 + \Gamma^2\omega_2, \quad (1.140)$$

так что

$$\Gamma_t - \frac{1}{2\eta} e^{-iu/2} - \frac{i}{2} u_t + \frac{1}{2\eta} e^{iu/2} = 0, \quad (1.141a)$$

$$\Gamma_x - \frac{1}{2} \eta e^{iu/2} + \frac{1}{2} u_x \Gamma + \frac{1}{2} \eta e^{-iu/2} \Gamma^2 = 0. \quad (1.141b)$$

Эти уравнения инвариантны относительно преобразований

$$t \leftrightarrow x, \quad u \leftrightarrow -u, \quad \eta \leftrightarrow \eta^{-1}. \quad (1.142)$$

Их можно решить любым из двух разложений:

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k} \gamma_k \quad (1.143a)$$

для (1.141b) или

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \tilde{\gamma}_k \quad (1.143b)$$

для (1.141a). В силу симметрии, если $\gamma_k = f_k(u, u_x, \dots)$, то $\tilde{\gamma}_k = f_k(u, u_t, \dots)$. Простейшая рекурсивная формула получится, если взять

$$\gamma_0 = -e^{iu/2}, \quad \gamma_1 = -ie^{iu/2} u_x \quad (1.144)$$

и определить ξ_k следующим образом:

$$\xi_k = e^{-iu/2} \gamma_k. \quad (1.145)$$

Тогда из (1.141b) получим

$$\xi_k = (\xi_{k-1})_x + \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{k-2} \xi_{k-l} \xi_l \quad (k \geq 3),$$

$$\xi_0 = -1, \quad \xi_1 = -iu_x, \quad \xi_2 = M \equiv \frac{1}{2} u_x^2 - iu_{xx}. \quad (1.146)$$

Далее

$$\delta = \omega_1 + \Gamma\omega_2 = \omega_1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k} e^{iu/2} \xi_k \right) \omega_2,$$

$$\delta = -\frac{1}{2} \eta^1 dx - \frac{1}{4} \eta^0 du + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{k+1} dx + e^{iu} \xi_{k-1} dt) \eta^{-k},$$

и $\text{Re} \{ \xi_{k+1} \}$ суть вещественные сохраняющиеся плотности. Отсюда $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = -iu_x$, $\xi_2 = M$, $\xi_3 = M_x$, $\xi_4 = M_{xx} + \frac{1}{2} M^2$, $\xi_5 = M_{xxx} + (M^2)_x, \dots$

Сравнение с (1.54) показывает, что после отбрасывания полных производных

$$\operatorname{Re} \{\xi_2\} = T^2, \quad \operatorname{Re} \{\xi_2\} = -T^4, \dots \quad (1.147)$$

Заметим, что этим способом порождаются в точности «канонические» формы T^2 и T^4 и что дополнительные полные производные получаются в явном виде как таковые.

Трансцендентные сохраняющиеся плотности (1.59) теперь выводятся из (1.143а), (1.141а) и определения

$$\tilde{\xi}_k = \tilde{\gamma}_k e^{-iu^2}. \quad (1.148)$$

В силу (1.42)

$$\tilde{\xi}_k = \xi_k(u \rightarrow -u, u_x \rightarrow -u_t, \dots), \quad (1.149)$$

и сравнение с (1.46) показывает, что плотности (1.59) имеют вид $\operatorname{Re} \{\exp(-iu) \tilde{\xi}_{k-1}\}$.

Можно также перейти к разложениям (1.143) и применить (1.143b) к (1.141b). Важные комплексные плотности появятся в такой последовательности:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2 &= e^{-iu}, \quad \mathcal{F}^3 = ie^{-iu} \int_{-\infty}^x \sin u \, dx', \\ \mathcal{F}^4 &= -ie^{-iu} \int_{-\infty}^x e^{-iu} \int_{-\infty}^{x'} \sin u \, dx'' \, dx', \\ \mathcal{F}^5 &= ie^{-iu} \int_{-\infty}^x e^{-iu} \int_{-\infty}^{x'} e^{-iu} \int_{-\infty}^{x''} \sin u \, dx''' \, dx'' \, dx' + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-iu} \int_{-\infty}^x e^{-iu} \left(\int_{-\infty}^x \sin u \, dx'' \right)^2 dx, \\ \mathcal{F}^6 &= \dots \end{aligned} \quad (1.150)$$

Для СГ-уравнения легко проверить, что

$$\mathcal{F}_{,t}^2 - (\mathcal{F}^2 e^{iu})_x = 0,$$

$$\mathcal{F}_{,t}^3 - (\mathcal{F}^5 e^{iu})_x = 0; \quad (1.151)$$

получим

$$\mathcal{F}_{,t}^n - (\mathcal{F}^{n+2} e^{iu})_x = 0, \quad (1.152)$$

так что потоки суть $\mathcal{F}^{n+2} e^{iu}$.

Соответствующие плотности имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{\mathcal{F}^2\} &= \cos u, \quad \operatorname{Re} \{\mathcal{F}^4\} = -\sin u \int_{-\infty}^x \cos u \int_{-\infty}^{x'} \sin u \, dx'' \, dx' - \\ &\quad - \cos u \int_{-\infty}^x \sin u \int_{-\infty}^{x'} \sin u \, dx'' \, dx', \quad \operatorname{Re} \{\mathcal{F}^6\} = \dots \end{aligned} \quad (1.153)$$

Они являются нелокальными и рассматриваемые как плотности гамильтонианов несомненно дают уравнения движения с решениями типа кинков и правильные линеаризованные дисперсионные соотношения (см. [1.42], [1.69] и примечание на стр. 31). Осложнение вызывается требованием финитности проинтегрированных плотностей гамильтониана, т. е. самих гамильтонианов. Эти и другие подробности читатель может найти в пятой и шестой работах из перечисленных в списке источников [1.147]. Некоторые другие геометрические результаты, относящиеся к системам АКНС, также упомянуты там и в других включенных в этот список работах. Заметим, что для СГ-уравнения $\mathcal{F}^4 = -[u_{tt} \sin u + (u_t^2 \cos u)/2]$ это выражение превращается в $(u_t^2 \cos u)/2$ после прибавления полной производной по t . Очевидно, что для СГ-уравнения последовательность (1.153) вновь порождает (1.59), как это и должно быть.

1.7. Дальнейшее развитие метода обратной задачи рассеяния

Удобно завершить настоящее описание истории солитонов как раз 1973 г., когда появилась схема обратной задачи рассеяния Захарова — Шабата — АКНС. Это не значит, конечно, что с ее созданием развитие метода закончилось. В самом деле, мы уже упоминали по конкретным поводам успехи этой теории, достигнутые вплоть до 1979 г., — в конце разд. 1.6, например. Но в отношении методов обратной задачи рассеяния каждая из последующих статей настоящего сборника развивает теорию солитонов начиная с момента, приблизительно соответствующего уровню знаний, достигнутому в 1973 г. Этот уровень знаний был хорошо описан в обзоре [1.4].

Теперь видно, что появление статьи Скотта и др. [1.4] отмечает как бы водораздел в истории вопроса: в период 1965—1973 гг. был открыт солитон, найдены физические приложения уравнения КдФ, модифицированного уравнения КдФ, НУШ, СГ-уравнения и изобретены методы решения этих уравнений; начиная с 1973 г. чрезвычайно расширился круг математических структур солитонных систем и соответственно их физических приложений. В настоящем разделе мы просто приводим ряд наиболее важных результатов, полученных начиная с 1973 г., не пытаясь отметить все достижения в рассматриваемой области ввиду невозможности сделать это. Некоторые из таких достижений описаны в других главах; мы надеемся, что приведенных ссылок достаточно, чтобы читатель мог самостоятельно найти остальное в специальной литературе.

Нам кажется, что начиная с середины 1973 г. важными были следующие этапы: открытие Уолквистом и Эстабруком АПБ

для уравнения КдФ [1.56], доложенное в декабре 1973 г.; решение Захаровым и Манаковым задачи о трехволновом взаимодействии [1.46] (август 1973 г.) и решение Каупа [1.47] (1974 г.); результат (1.104) для СГ-уравнения, полученный Тахтаджяном и Фаддеевым [1.134] в 1974 г.; решения цепочки Тоды (Флашка [1.152], Манаков [1.153]); Тода описывает историю своей цепочки и ее решения в гл. 4); замечательные работы Новикова, Матвеева и их сотрудников [1.119, 1.120] по периодической задаче для уравнения КдФ и первая статья Новикова, опубликованная в 1974 г. (эти исследования продолжены в гл. 10); статья Флашки и Ньюэлла [1.154] по канонической структуре «интегрируемых» нелинейных эволюционных уравнений, появившаяся в 1975 г. (ныне дополненная, см. гл. 6); решение Лаксом [1.114] уравнения КдФ при периодических граничных условиях в 1975 г.; обобщение Вадати [1.155] задачи рассеяния на матрицы большего размера в 1974 г., более подробно описанное в гл. 8; использование Калоджеро метода обобщенных вронскианов в 1975 г. [1.78, 1.156] и осуществленное им распространение теории рассеяния на многие «временноподобные» независимые переменные (отмеченное Ньюэллом в гл. 6); и наконец, распространение теории рассеяния на матрицы большего размера, которое выполнили Калоджеро и Дегасперис в 1976 г., приведшее к решениям типа бумерона [1.157] и описанное в гл. 9.

В 1974 г. появилась также замечательная статья Захарова и Шабата [1.158] по методу обратной задачи. Идеи этой работы послужили основой всесторонней и творческой статьи, написанной Захаровым и вошедшей в настоящую книгу в качестве гл. 7. Она начинается с изучения представления нелинейных дифференциальных уравнений с помощью коммутаторов пар дифференциальных операторов. Такого рода представление описано в разд. 1.4 (лаксовы пары).

В 1975 и 1976 гг. появились работы [1.61] и [1.75] Уолквиста и Эстабрука по структурам продолжения. Поскольку в настоящее время эта тема активно разрабатывается, в данной книге она не представлена, и мы рекомендуем читателю ознакомиться с ней по статьям [1.76], [1.150], [1.159]—[1.169], а также по работе Пирани и др [1.77], процитированной в разд. 1.3. С нашей точки зрения, геометрические методы разд. 1.6 составляют хорошую основу для вывода структур продолжения и позволяют увидеть их значение, скажем, для законов сохранения и преобразований Бэклунда. Сасаки [1.147, третья и четвертая работы в этом списке] именно этим способом выводит структуры продолжения для схемы АКНС обратной задачи рассеяния из ее представления посредством «калибровочного поля» (1.123) и находит аналогичные структуры для схем задачи рассеяния более общего вида.

Весьма отличный от обсуждавшихся выше класс задач связан с открытием Мозера, и о нем стоит рассказать несколько подробнее. Это открытие основано на результате, полученном Мозером в 1975 г. Он показал [1.164], как можно использовать идею лаксовой пары матричных операторов (в духе новаторских работ Флашки [1.152] и Манакова [1.153]) для решения одномерной многочастичной задачи с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_j \dot{y}_j^2 + g \sum_j \sum_{i < k} (x_j - x_k)^{-2}, \quad g > 0 \quad (1.154)$$

(здесь y есть импульс, $\partial H / \partial y_i = \dot{x}_i$, $\dot{y}_j = -\partial H / \partial x_j$; $1 \leq j \leq N$). Уравнения движения имеют вид лаксовой пары (1.86b), где L и B суть $N \times N$ -матрицы, определяемые формулами

$$L_{jk} = \delta_{jk} v_j + i \sqrt{g} (1 - \delta_{jk}) (x_j - x_k)^{-1},$$

$$B_{jk} = -i \sqrt{g} v_{jk} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N (x_j - x_l)^{-2} + i \sqrt{g} (1 - \delta_{jk}) (x_j - x_k)^{-2}, \quad (1.155)$$

причем L эрмитова, а B кососимметрична. Легко проверить, что поскольку $(L^+)_t = (L_t)^+$, то в любом случае существует другое представление в виде лаксовой пары, а именно

$$\hat{L}_t = \left[\frac{1}{2} (\hat{B} - \hat{B}^+), \hat{L} \right], \quad (1.156)$$

в котором матрица $(\hat{B} - \hat{B}^+)/2$ безусловно кососимметрична. В точности как для (1.86b), отсюда следует, что собственные значения L суть интегралы движения (которые также находятся в инволюции). Этим свойством обладают и симметричные функции I_n ,

$$\det [L_{ik} - \lambda \delta_{ik}] = \lambda^N + \sum_{n=1}^N \lambda^{N-n} I_n, \quad (1.157a)$$

и функции

$$F_n \equiv \text{Tr} (\hat{L}^n / n). \quad (1.157b)$$

Рассматриваемая система — это полностью интегрируемая гамильтонова система с $2N$ степенями свободы.

Квантовомеханическая задача (1.154) была решена Калоджеро в 1971 г. [1.165]. Он предположил, что классическая задача также разрешима, и впоследствии показал [1.166] (см. также [1.72]), что для разрешимых классических задач с парными потенциалами $V(x_j - x_k)$, представимых посредством лаксовой пары с анзацем, обобщающим (1.155), $V(x)$ должна быть эллиптической функцией Вейерштрасса $\mathcal{P}(x)$; частными случаями этой функции являются x^{-2} , $\text{sh}^{-2} x$ и $\text{sin}^{-2} x$. Открытие Мозера заключалось в том, что он установил замечательную

связь между классической многочастичной задачей (1.154) и рациональными решениями уравнения КдФ, удовлетворяющими условию $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$; об этой связи мы до сих пор не упоминали.

Солитонное решение (1.2) уравнения КдФ имеет двойные полюсы в комплексной x -плоскости; Крускал [1.65] первым исследовал движение этих полюсов. Такой характер особенностей побуждает искать рациональные решения уравнения КдФ в виде

$$u(x, t) = 2 \sum_{j=1}^N [x - x_j(t)]^{-2} r_j(t). \quad (1.158)$$

Прямая подстановка (1.158) в уравнение КдФ, взятое в виде

$$u_t - 3uu_x + \frac{1}{2}u_{xxx} = 0, \quad (1.159)$$

показывает, что анзац (1.158) является рациональным решением этого уравнения, если $r_i(t) = 1$ и

$$\dot{x}_j = 6 \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-2}, \quad (1.160a)$$

$$\sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-3} = 0; \quad 1 \leq j \leq N. \quad (1.160b)$$

Рассуждения облегчаются использованием теоремы сложения для эллиптических функций вида $\varphi(x) = x^{-2}$

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi'(y) + \varphi'(x)\varphi(y) &= \varphi(x-y)[\varphi'(y) + \varphi'(x)] - \varphi'(x-y) \times \\ &\times [\varphi(y) - \varphi(x)]. \end{aligned} \quad (1.161)$$

Замечателен тот факт, что система уравнений с ограничениями (1.160) для эволюции координат x_j (уравнения движения (1.160a) ограничены многообразием, удовлетворяющим уравнениям (1.160b)) является также системой уравнений для гамильтонова потока с ограничением, связанного с (1.154), а именно если F_7 определено выражением (1.157b), то $F_2 \equiv H$ дается формулой (1.154), тогда как поток с гамильтонианом F_3 , ограниченный условием $\text{grad } F_2 = 0$, дает при $g = 6$ в точности систему (1.160), так как

$$F_3 \equiv \frac{1}{3} \sum y_i^3 + g \sum_{i \neq j} y_i (x_i - x_j)^{-2}. \quad (1.162)$$

Поскольку величины F_n находятся в инволюции, то потоки с этими гамильтонианами попарно коммутируют; тогда если условие $\text{grad } F_k = 0$ выполняется для какого-либо k в какой-нибудь момент t , то это ограничение будет сохраняться в процессе движения (поток, отвечающий F_n и ограниченный условием $\text{grad } F_k = 0$, является инвариантным потоком [1.167]).

Осталось показать, что система (1.160) имеет решение; это будет так, если, во-первых, x_j лежат в комплексной x -плоскости и, во-вторых, $N = n(n+1)/2$ для некоторого $n = 1, 2, \dots$. Например, если $N=1$, то $u = 2(x-c)^{-1}$; если $N=3$, то корни x_i уравнения (1.160а) пропорциональны кубическим корням из единицы [1.168], и $u(x, t) = 6x^2(x^3 - 2t + c)^{-1}$. Заметим, что, как показано в [1.168], u является решением (1.158) (где $r_j = 1$) тогда и только тогда, когда $u(x, t) = 2\partial^2 \ln P(x, t)/dx^2$,

где $P(x, t) = \prod_{j=1}^N [x - x_j(t)]$ и x_j удовлетворяет (1.157а). Эта формула отражает N -солитонную формулу для вещественной оси (см. (1.16), (1.22)), а также выражение решений уравнения КдФ с периодическими граничными условиями посредством θ -функции, выведенное С. П. Новиковым в гл. 10; В. Б. Матвеев установил ее связь с N -солитонной формулой Хироты в лекциях [1.119].

Аналогичная связь между разрешимой многочастичной задачей и интегрируемым эволюционным уравнением была найдена для рациональных решений (1.160а) уравнения Буссинеска [1.167]: многочастичная задача — это по-прежнему (1.154), но теперь ограниченный поток отвечает гамильтониану F_2 с ограничением $\text{grad}(F_3 - F_1) = 0$ [1.167]. Уравнение КдФ (1.159) также допускает выражаемые через эллиптическую функцию решения вида

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N \mathcal{P} \{ 2^{-1/2} [x - x_j(t)] \} \quad (1.163)$$

тогда и только тогда, когда [1.169]

$$\dot{x}_j = 3 \sum_{k \neq j} \mathcal{P} [2^{-1/2} (x_j - x_k)], \quad (1.164a)$$

$$\sum_{k \neq j} \mathcal{P}' [2^{-1/2} (x_j - x_k)] = 0. \quad (1.164b)$$

Соответствующая многочастичная задача — это

$$H' = \frac{1}{2} \sum y_j^2 + 6 \sum_{i \neq j} \mathcal{P}(x_i - x_j) \quad (1.165)$$

с инвариантами $J'_2 \equiv H'$, J'_3, \dots . Поток есть поток с гамильтонианом J'_3 и ограничением $\text{grad} J'_2 = 0$. Подобным образом потоки уравнений КдФ высших порядков лагранжевой иерархии суть, по-видимому, J'_n -потоки с ограничением $\text{grad} J'_2 = 0$. Уравнения КдФ высших порядков имеют рациональные решения (1.158), отвечающие ограниченному J_n -потокам гамильтониана (1.154) [1.169].

На фундаментальную важность (1.154) для рациональных решений указывает также и то, что уравнение Бюргерса $u_t - 2cuu_x - cu_{xx} = 0$ (сравните с (1.42) и замените $u \rightarrow -(1/2)v$, $t \rightarrow c^{-2}vt$) имеет рациональные решения

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N [x - x_j(t)]^{-1} r_j(t) \quad (1.166)$$

тогда и только тогда, когда [1.169] $r_j(t) = 1$ и

$$\dot{x}_j = -2c \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-1}, \quad 1 < j < N. \quad (1.167)$$

Из этой системы уравнений следует [1.169], что

$$\ddot{x}_j = -8c^2 \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-3}; \quad (1.168)$$

последнее выражение при $c = 1/2$ представляет собой неограниченный ($J_2 \equiv H$) поток для (1.154). Поскольку (см. (1.43)) уравнение Бюргерса интегрируемо преобразованием Хопфа — Коула, это, вероятно, объясняет полную интегрируемость (1.154). Тем не менее уравнение Бюргерса не имеет солитонных решений, не является гамильтоновым и не обладает бесконечным набором сохраняющихся величин в инволюции. Для него существуют представления в виде пары Лакса (в котором, однако, $\hat{L} \neq \hat{L}^+$ и $\hat{B} \neq \hat{B}^+$) и бесконечная иерархия уравнений [1.169] (а также структура продолжения [1.150]); этого, по-видимому, достаточно для его эквивалентности (1.167).

Любой ограниченный поток (1.164) есть поток гамильтонова

$$H = \frac{1}{2} \sum y_k^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} \mathcal{P}^2(x_i - x_j) \quad (1.169)$$

[1.169], но это не умаляет фундаментального характера (1.165) и (1.154). Недавно Чен и др. [1.170] действительно нашли солитонные решения безусловно интегрируемого уравнения Бенджамина — Оно [1.171] с помощью изучения движения полюсов (1.154) (в этом случае солитоны являются рациональными решениями). Представляется вероятным, что подобные связи между рациональными решениями и многочастичными задачами можно установить для всех интегрируемых уравнений. Например, частные результаты для таких уравнений, как модифицированные уравнения КдФ и Кадомцева — Петвиашвили ((1.72) и (1.172)), приводятся в [1.169], для альтернативных уравнений КдФ [1.115, 1.169] — в [1.169] и [1.170], а для цепочки Тоды в [1.173], однако в настоящее время нам не известны другие частные результаты такого рода. К тому же мы не вполне понимаем, каким образом конкретная N -частичная задача (1.154) связана с большинством полученных до сих пор

результатов. Мы рекомендуем читателю статью Калоджеро [1.166], представляющую собой обзор множества связанных с этой темой результатов. Дальнейший анализ, касающийся уравнений КдФ и Буссинеска, содержится в работе [1.167], а интересный альтернативный анализ в статье [1.169]. Теоремы сложения вроде (1.161) связаны с абелевыми (якобиевыми) многообразиями; рекомендуем читателю исследования по якобиевым многообразиям на эту тему, описанные в [1.167] и затем в [1.174] и [1.175].

Резкое расширение прикладных возможностей теории солитонов произошло также и в совсем другом направлении. Оно было вызвано разработкой, начиная с 1976 г., теорий сингулярного возмущения для таких неинтегрируемых уравнений, которые в некотором смысле «близки» к интегрируемым системам. Здесь стоит упомянуть новаторские работы Каупа и Ньюэлла [1.176—1.178], а также приложения теории сингулярных возмущений к «двойному СГ-уравнению»

$$u_{xx} - u_{tt} = \pm \left(\sin u + \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} u \right) \quad (1.170)$$

[1.179], [1.180] и [1.181] (физические приложения уравнения (1.170) описаны нами в гл. 3). Мы также рекомендуем ознакомиться с теориями возмущений Скотта и Маклафлина [1.25, 1.182], Карпмана [1.183] и с недавней работой Ньюэлла [1.184]. Ньюэлл посвятил часть гл. 6 своему варианту теории сингулярных возмущений.

К недавним точным результатам по интегрируемым системам относятся: решение уравнений одномерного гейзенберговского ферромагнетика в континуальном приближении

$$\frac{\partial s}{\partial t} = s \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (1.171)$$

(где $s(x, t)$ есть плотность непрерывно распределенного спина), которое нашли Тахтаджян [1.185] и Лакшманан [1.186]; решение уравнений твердого тела (Манаков [1.187]); уже упомянутые решения многочастичных задач [1.166—1.170] и некоторые обобщения [1.18b]. Рекомендуем читателю также ряд трудов конференций [1.137, 1.189—1.194]; в них можно найти новейшие темы, связанные с теорией солитонов, математические результаты и ознакомиться с современным диапазоном физических приложений. В качестве простого очерка этих приложений, круг которых ныне чрезвычайно широк, мы также рекомендуем работы [1.22] и [1.23].

Мы пока почти ничего не сказали о солитонах в случае более одного пространственного измерения (двумерные евклидовы пространства, рассмотренные в разд. 1.3, имеют лишь

одно пространственное измерение; второе измерение — это, конечно, время). Ограничения теоремы Хобарта — Деррика [1.195—1.197] для решений обобщенного уравнения Клейна — Гордона в случае более чем одного пространственного измерения широко известны [1.22, 1.43]. Этот случай (многомерные пространства) рассматривается, например, также в работах [1.101], [1.158], [1.161], [1.198] и [1.199]; особо отметим в этой связи гл. 7 настоящей книги. Следует упомянуть осуществленное Ф. Калоджеро обобщение схемы АКНС на случай большего числа «временеподобных» пространственных измерений (см. гл. 6, 9 и работу [1.69]). Приводились конкретные примеры солитонов типа плоской волны в случае более одного пространственного измерения (см., например, [1.29], [1.199]—[1.201]); в частности, уравнения Кадомцева — Петвиашвили

$$3\beta^2 u_{yy} + (u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x = 0 \quad (1.172)$$

($\beta^2 = \pm 1$) имеют многосолитонные плосковолновые решения [1.29, 1.118, 1.158]. Недавно Манаков и др. [1.202] обнаружили (найдя подходящий предельный случай плосковолнового многосолитонного решения) несингулярные строго локализованные решения уравнения (1.172) в случае $\beta^2 = -1$. Решения локализованы, но сингулярны при $\beta^2 = +1$. В обоих случаях они являются рациональными функциями, но их связь с рациональными решениями, ассоциированными с многочастичными задачами, не установлена. Неясно также, являются ли они особым случаем или чем-то более общим. Уравнения Кадомцева — Петвиашвили были решены методами алгебраической геометрии [1.118]. Атья [1.203] нашел (или, по крайней мере в принципе, может найти) сопоставимыми алгебро-геометрическими методами все решения типа «инстантонов» для классической самодуальной неабелевой калибровочной теории; эти решения относятся к четырехмерному евклидову пространству. На наш взгляд, связь между инстантонами и солитонами не вполне доказана. Тем не менее Белавин и Захаров [1.204] уже показали, как найти инстантонные решения обобщенным методом обратной задачи рассеяния. Этот метод применим к любому числу измерений¹⁾.

Это последнее достижение в теории солитонов и метода обратной задачи рассеяния является по существу новейшим фундаментальным результатом, который мы можем привести в настоящей статье. В помощь тем читателям, которых более интересуют приложения теории солитонов к определенным раз-

¹⁾ Маккарти [1.214, 1.215] нашел ПБ для случая 2^n измерений ($n \geq 1$); в частности, сообщил о самодуальных калибровочных полях SU_2 , рассмотренных Янгом [1.216], и о N -солитонном решении для них.

делам физики, мы завершим главу перечислением литературных источников по соответствующим разделам. Солитонам в физике плазмы посвящена гл. 2, работы [1.22], [1.189], [1.193] и работы, ссылки на которые там содержатся; лазерной физике — гл. 2, 3, статьи в книге [1.137] и цитируемая в них литература; физике твердого тела — гл. 12 и статьи в [1.137]; физике частиц — работы [1.43], [1.71], [1.86]—[1.91], [1.93], [1.195], [1.206]. Руководством по квантовую уравнения sinh-Gordon и может служить гл. 11. Массивная модель Тирринга и кватованное СГ-уравнение описаны в гл. 12, а сведения о приложениях солитонов в статистической механике можно найти в гл. 12 и в книге [1.137]. Необходимо упомянуть о появлении приложений солитонной теории к космологическим проблемам. Было найдено преобразование Бэклунда для уравнения Эрнста общей теории относительности $(\text{Re}\{E\})\nabla^2 E = (\nabla E)^2$, описывающего стационарные вакуумные поля с осевой симметрией [1.207]; установлено, что это уравнение обладает бесконечным числом потенциалов [1.208]. О его солитоноподобных решениях сообщили Белинский и Захаров [1.209].

Для тех, кто интересуется скорее солитоноподобными объектами, чем конкретными интегрируемыми системами, а также для интересующихся вычислительными работами мы упомянем обзорную статью [1.210]. Там описаны некоторые результаты для неинтегрируемых систем в трехмерном пространстве со сферической симметрией (так называемые пульсоны [1.210]). О дальнейших численных результатах по пульсонам сообщили Эйлбек [1.211] и Кристиансен [1.212] (который также предложил преобразование Бэклунда для уравнения в трех пространственных измерениях; это АПБ независимо нашел Лейббрандт [1.213]). С другой стороны, Калоджеро и Дегасперис [1.217] недавно сообщили о точном интегрировании уравнения КдФ с цилиндрической симметрией.

На этом мы закончим наш обзор истории солитонов и метода обратной задачи рассеяния, а также взаимодействия физики и математики, которому эта история обязана своим происхождением. Во всех последующих главах приводятся дополнительные сведения о связях между теорией солитонов и физическими задачами. Но их главная цель, как нам кажется, состоит в том, чтобы сделать легко доступными наиболее общеупотребительные математические приемы, разработанные к настоящему моменту и предназначенные для решения нелинейных эволюционных уравнений. Многие из этих уравнений имеют непосредственный физический смысл, и совокупность знаний, которую они представляют, несомненно будет играть такую же важную роль в нелинейной физике будущего, какую обычные линейные «уравнения математической физики» играли в физике в течение последних 150 лет.

Благодарности

Авторы признательны д-ру Дэвиду Кэмбеллу за критическое прочтение рукописи и профессору Франческо Калоджеро за чтение и замечания по отдельным ее частям. Большая часть настоящей статьи была написана в Центре физических исследований в г. Аспен в августе 1978 г., а остальное в Копенгагене. Один из нас (Р. К. Буллаф) благодарит Центр в г. Аспен и NORDITA, Копенгаген, за гостеприимство, сделавшее возможным написание этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. — *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095 (1967).
- 1.2. Zabusky N., Kruskal M. D. — *Phys. Rev. Lett.* 15, 240 (1965).
- 1.3. Russell J. S. Report on Waves. — *British Association Reports* (1844).
- 1.4. Scott A. C., Chu F. Y. F., McLaughlin D. W. — *Proc. IEEE* 61, 1443 (1973).
- 1.5. Emmerson G. S. John Scott Russel. A Great Victorian Engineer and Naval Architect (John Murray: London, 1977); *Encyclopedia Britannica*, 9th edn., p. 66.
- 1.6. Sir Horace Lamb. *Hydrodynamics* 6th ed. (Cambridge University Press, 1952), pp. 417—420, 423—429. Об уединенной волне см. с. 423—426. Цитата из работы Расселла о возбуждении ветром волн на поверхности воды помещена на с. 630—631.
- 1.7. Korteweg D. J., de Vries G. On the change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. — *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Series* 5, 39, No. 241, June 1895, pp. 422—443 [*Phil. Mag.* 39, 422 (1895)].
- 1.8. Airy. Tides and Waves. — *Encycl. Metrop.* (1845) (ссылка взята из [1.7.]).
- 1.9. de Boussinesq J. Theorie de l'intumescence liquide appelee on de solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. — *Comptes Rendus* 72, 755—759 (1871); *J. Math. Pures et Appliquees* 2, 55 (1872).
- 1.10. Forbes J. D. *Travels through the Alps*, new ed. revised and annotated by W. A. B. Coolidge (Adam and Charles Black, London, 1900).
- 1.11. Tyndall J. *The Glaciers of the Alps* (John Murray, London, 1860).
- 1.12. Fermi E., Pasta J. R., Ulam S. M. — *Studies of Nonlinear Problems*, Vol. 1, Los Alamos Rpt. LA-1940 (May 1955); *Collected Works of E. Fermi*, Vol. 2 (Univ. of Chicago Press, 1965), pp. 978—988.
- 1.13. Jackson E. A. Nonlinearity and Irreversibility in Lattice Dynamics. — *Rocky Mountain J. Math.* 8, 127 (1978).
- 1.14. Russell J. S. — *The Modern System of Naval Architecture* (London, 1865). Конечно, имеются и более ранние работы, например, J. W. Griffiths. *A treatise on Marine and Naval Architecture* (new ed., London, 1857).
- 1.15. Russell J. S. *The Wave of Translation in the Oceans of Water, Air and Ether* (Trubner: London, 1895). Это издание называют новым. Мы ссылались на более раннее издание как на «Trubner London, 1878», но это может быть неточным. Предисловие к изданию 1895 г. скорее указывает, что этот материал ранее в виде книги не публиковался.
- 1.16. Lord Rayleigh (J. W. Strutt). *On Waves*, *Philos. Mag.* 1, 257 (1976).
- 1.17. Stokes C. G. *On the theory of Oscillating Waves*, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, Vol. VIII (1847).

- 1.18. St. Venant. — *Comptes Rendus*, Vol. CI (1885) (ссылка взята из [1.7]).
- 1.19. McCowan J. On the solitary wave, *Philos. Mag.* 32, 45 (1891).
- 1.20. Bazin. *Mém des Savants étrangers*, том XIX (ссылка взята из [1.19]).
- 1.21. Френкель Я., Конторова Т. «О теории пластической деформации и двойникования». — *Физический журнал I* (1939), с. 137.
- 1.22. Bullough R. K. Solitons. — *Phys. Bull.*, February 1978, pp. 78—82.
- 1.23. Bullough R. K. Solitons. В кн.: *Interaction of Radiation and Condensed Matter*, Vol. 1, IAEA—SMR—20/51 (International Atomic Energy Agency, Vienna 1977), pp. 381—469.
- 1.24. Barone A., Eposito F., Magee C. J., Scott A. C. Theory and Applications of the sine-Gordon Equation. — *Riv. Nuovo Cimento* 1, 227—267 (1971).
- 1.25. McLaughlin D. W., Scott A. C. — *Appl. Phys. Lett.* 30, 457 (1969).
- 1.26. McCall S. L., Hahn E. L. — *Phys. Rev.* 183, 457 (1969).
- 1.27. Lamb G. L. — *Rev. Mod. Phys.* 43, 99 (1871).
- 1.28. Yuen H. C., Lake B. M. — *Phys. Fluids* 18, 956 (1975).
- 1.29. Gibbon J. D., Freeman N. C., Johnson R. S. — *Phys. Rev. Lett.* 65A, 380 (1978); см. также Anker D., Freeman N. C. — *Proc. Roy. Soc. (London)* A360, 529 (1978); Miles J. — *J. Fluid Mech.* 79, 171 (1977).
- 1.30. Goldstone J., Jackiw R. — *Phys. Rev. D* 11, 1486 (1975).
- 1.31. Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A. — *Phys. Rev. D* 10 (1974).
- 1.32. Aubry S. — *J. Chem. Phys.* 24, 291 (1976).
Гетманов Б. С. — Письма в ЖЭТФ 24, 291 (1976). Результаты численных исследований сообщили нам М. Абловиц и М. Крускал; замечания сделали А. Бишоп, Дж. Эйлбек и Дж. Гиббон.
- 1.33. Hirota R. — *Phys. Rev. Lett.* 27, 1192 (1971).
- 1.34. Кулиш П. П. Доложено на *Simposium on Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Inverse Spectral Transform* (Accademia dei Lincei, Rome, June, 1977). Статья *Factorisation of Scattering Characteristics and Integrals of Motion*, опубликованная в книге *Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform*, ed. by F. Calogero (Pitman, London 1978), pp. 252—257, печатная версия указанного доклада, этого материала не содержит.
- 1.35. Gibbon J. D., Eilbeck J. C. — *J. Phys. A — Proc. Phys. Soc. Lond.* 5, L132 (1972).
- 1.36. Whitham G. B. — *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974), Chap. 17. [Имеется перевод: Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. — М.: Мир, 1977.]
- 1.37. Bullough R. K., Dodd R. K. *Solutions in Mathematics: Brief History*. — В кн.: *Solitons and Condensed Matter Physics*, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider, Springer Series in Solid State Sciences, B Vol. 8 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978); *Solitons in Physics: Basic Concepts; Solitons in Mathematics*. — В кн. *Structural Stability in Physics*, ed. by W. Güttinger, H. Eikemeier, Springer Series in Synergetics, Vol. 4 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979), pp. 219—232 and 233—253.
- 1.38. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ 61, 118 (1972).
- 1.39. Caudrey P. J., Eilbeck J. C., Gibbon J. D. — *Nuovo Cimento* 25, 497 (1975).
- 1.40. Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A. — *Phys. Rev. D* 11, 3424 (1975).
- 1.41. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. — ТМФ 25, 147 (1975).
- 1.42. Bullough R. K., Dodd R. K. *Synergetics. A Workshop*. — *Proc. Intl. Workshop on Synergetics at Schloss Elmau, Bavaria, May 1977*, Springer Series in Synergetics, Vol. 2, ed. by H. Haken (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977), pp. 92—119. См. также [1.37].
- 1.43. Coleman S. *Classical Lumps and their Quantum Descendants*. — *Lectures at the 1975 Intern. School of Subnuclear Physics «Ettore Majorana»* (1975).
- 1.44. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — *Phys. Rev. Lett.* 31, 125 (1973).

- 1.45. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — *Stud. Appl. Math.* 53, 249 (1974).
- 1.46. Захаров В. Е., Манаков С. В. — *Письма в ЖЭТФ* 18, 413 (1973).
- 1.47. Kaup D. J. — *Studies in Appl. Math.* 55, 9 (1976); *Rocky Mountain J. Math.* 8 (1, 2), 283 (1978).
- 1.48. Lund F. — *Phys. Rev. ett.* 38, 1175 (1977).
- 1.49. Liouville J. Sur l'equation aux differences partielles $d^2 \log \lambda / dudv \pm \lambda / 2a^2 = 0$. — *J. Math. Pures et Appliquees (Paris)* 18 (1) 71—72 (1853).
- 1.50. Dodd R. K., Bullough R. K. — *Proc. Roy. Soc. (London)* A351 499 (1976).
- 1.51. Lamb G. L. Bäcklund Transformations. — *Lectures Notes in Mathematics*, Vol. 515, ed. by R. M. Miura (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976), pp. 69—79.
- 1.52. Rubinstein J. — *J. Math. Phys.* 11, 258 (1970).
- 1.53. Kruskal M. D., частное сообщение.
- 1.54. McLaughlin D. W., Scott A. C. — *J. Math. Phys.* 14, 1817 (1973).
- 1.55. Bäcklund A. V. Einiges über Curven und Flächentransformationen. — *Lund Universitetes Arsskrift* 10 (1875); *Om Ytor med konstant negativ Krökning*. — *Lund Universitetes Arsskrift* 19 (1883).
- 1.56. Wahlquist H. D., Estabrook F. B. — *Phys. Rev. Lett.* 31, 1386 (1973).
- 1.57. Clarin M. J. — *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 3^e ser. Suppl. 19, S1—S63; *Sur quelques equations aux derivees partielles du second ordre*. — *Ann. Toulouse 2*, Ser. 5, 437—458.
- Forsyth A. R. — *Theory of Differential Equations*, Vol. 6, ch. 21 (Dover, New York, 1959).
- Eisenhart P. P. — *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, ch. 8 (Dover, New York, 1960).
- Goursat E. — *Ann. de Toulouse* 3^e Ser. 10, 65 (1918).
- Seger A., Donth H., Kochendoerfer A. — *Z. Physik* 134, 173 (1953).
- 1.58. Chem H. — *Phys. Rev. Lett.* 33, 925 (1974).
- 1.59. Hopf E. The partial differential equation. — *Comm. Pure Appl. Math.* 3, 201—230 (1950).
- 1.60. Cole J. D. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics. — *Q. Appl. Math.* 9, 225—236 (1950).
- 1.61. Wahlquist H. D., Estabrook F. B. — *J. Math. Phys.* 16, 1 (1975).
- 1.62. Miura R. M. — *J. Math. Phys.* 9, 1202 (1968).
- 1.63. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. — *J. Math. Phys.* 15, 1852 (1974).
- 1.64. Bullough R. K., Kitchenside P. W., Jack P. M., Saunders R. Solutions in laser physics. — *Phys. Scr.* 20, 364 (1979).
- 1.65. Kruskal M. D. The Korteweg de Vries equation and related evolution equations. — *Lect. appl. Maths.* 15, ed. by A. C. Newell (AMS:Providence, Rhode Island, 1974), pp. 61—83.
- 1.66. Dodd R. K., Bullough R. K. — *Proc. Roy. Soc. (London)* A352, 481 (1977).
- 1.67. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. — *J. Math. Phys.* 9, 1204 (1968).
- 1.68. Satsuma J. — *Prog. Theor. Phys.* 52, 1396L (1974).
- 1.69. Dodd R. K., Bullough R. K. The Generalised Marchenko Equation and the Canonical Structure of the AKNS—ZS Inverse Method. — *Phys. Scr.* 20, 514 (1979).
- 1.70. Lax P. D. — *Comm. Pure Appl. Math.* 21, 467 (1968).
- 1.71. См., например, Schröder V. — *Lectures at the Soliton Workshop*, Università di Salerno, Italy, July, 1977.
- 1.72. Кулиш П. П. — *ТМФ* 26, 198 (1976).
- 1.73. José J. V., Kadanoff L. P., Kirkpatrick S., Nelson D. R. — *Phys. Rev.* B16, 1217 (1977).
- Nelson D. R., Kosterlitz J. M. — *Phys. Rev. Lett.*, 39, 1201 (1977).

- Nelson D. R. — Phys. Reports 49, 255 (1979). Эти авторы изучали кулоновский газ и его связи с X , Y -моделью. Аналогичные методы позволяют связать эту модель с СГ-уравнением в евклидовом пространстве.
- 1.74. Kosterlitz J. M., Thouless D. J. — J. Phys. C6, 1181 (1973). Связь между вихревой моделью этих авторов и квантовой теорией поля, имеющая отношение к работе Лютера, описанной в гл. 11, устанавливается в статье Luther A., Scalapino D. J. — Phys. Rev. B16, 1153 (1977).
 - 1.75. Estabrook F. B., Wahlquist H. D. — J. Math. Phys. 17, 1292 (1976).
 - 1.76. Estabrook F. B., Wahlquist H. D. Prolongation Structures, Connection Theory and Bäcklund Transformations. — Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform, ed. by F. Calogero (Pitman, London, 1978), pp. 64—83.
 - 1.77. Pirani F. A. E., Robinson D. C., Shadwick W. F. Local jet bundle formulation of Bäcklund transformations (1978). См. также Herman R. Geometric Theory of Nonlinear Diffferential Equations. — Bäcklund Transformations and Solutions Parts A and B, Math. Sci. Press (53 Jordan Road, Brookline, MA 02146, USA).
 - 1.78. Calogero F. — Lett. al Nuovo Cimento 14, 537 (1975).
Calogero F., Degasperis A. — Lett. al Nuovo Cimento 16, 181 (1976).
 - 1.79. Dodd R. K., Bullough R. K. — Phys. Lett. 62A, 70 (1977).
 - 1.80. Dodd R. K. — J. Phys. A: Math. Gen. 11, 81 (1978).
 - 1.81. Hirota R. — J. Phys. Soc. Jpn. 33, 1459 (1972).
 - 1.82. Caudrey P. J., Gibbon J. D., Eilbeck J. C., Bullough R. K. — Phys. Rev. Lett. 30, 237 (1973).
Caudrey P. J., Eilbeck J. C., Gibbon J. D. — J. Inst. Maths. Applies. 14, 375 (1974).
 - 1.83. Steurwald R. — Abh. Bayer. Akad. Wiss. (München) 40, 1 (1936).
 - 1.84. Skyrme T. H. R. — Proc. Roy. Soc. (London) A 247, 260 (1958).
 - 1.85. Skyrme T. H. R. — Proc. Roy. Soc. (London) A 262, 237 (1961).
 - 1.86. Pohlmeyer K. — Commun. Math. Phys. 46, 207 (1976).
 - 1.87. Jackiw R. — Rev. Mod. Phys. 49, 681 (1977).
 - 1.88. Coleman S. — Phys. Rev. D11, 2088 (1975).
 - 1.89. Berg B., Karowski M., Thun H. J. — Phys. Lett. 64B, 286 (1976).
 - 1.90. Кулиш П. П., Ниссимов Е. Р. — Письма в ЖЭТФ 24 (4), 247—250 (1976).
 - 1.91. Nissimov E. R. — Bulg. J. Phys. IV 2, 113 (1977).
 - 1.92. Михайлов А. В. — Письма в ЖЭТФ 23 (1976).
 - 1.93. Замолодчиков А. Б. — Письма в ЖЭТФ 25 (1977); Comm. Math. Phys. 55, 183 (1977); см. также препринт ИТЭФ 12 (1977).
Замолодчиков А. Б., Замолодчиков А. Л. — Письма в ЖЭТФ 26 (1977).
 - 1.94. Iagolnitzer D. — Phys. Rev. D 18, 1275 (1978).
 - 1.95. Karowski M., Thun H. J., Truong T. T., Weisz P. H. — Phys. Lett. 67B, 321 (1977).
Karowski M., Thun N. J. — Nuclear Phys. B 130, 295—308 (1977).
Karowski M. — J. Phys. Rpts. 49, 229 (1979).
 - 1.96. Shankar R., Witten E. — Phys. Rev. D 17, 2134 (1978); The S -matrix of the kinks of the $(\psi\psi)^2$ Model. — Preprint (1977).
Berg B., Karowski M., Weisz P. Construction of Green Functions from an Exact S -matrix (Preprint FUB-HEP June, 1978).
 - 1.97. McCall S. L., Hahn E. L. — Phys. Rev. Lett. 18, 908 (1977).
 - 1.98. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — Phys. Rev. Lett. 30, 1262 (1973).
 - 1.99. Arecchi F. T., Bonifacio R. — IEEE QE-1, 169 (1965).
 - 1.100. Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H. — Phys. Rev. Lett. 13, 479 (1964);
Kelley P. L. — Phys. Rev. Lett. 15, 1005 (1965).
 - 1.101. Cornille H. — J. Math. Phys. 20, 199 (1979). Замечания о неустойчивости содержатся в книге Newell A. C. — Bifurcation and Nonlinear Focussing, Proc. Pattern Formation by Dynamic Systems and Pattern Re-

- cognition, ed. by H. Haken, Springer Series in Synergetics, Vol. 5 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979).
- 1.102. Гинзбург В. Л., Пятаевский Л. П. — ЖЭТФ 34, 1240 (1958).
- 1.103. Пятаевский Л. П. — ЖЭТФ 35, 408 (1958).
- 1.104. Gross E. P. — Ann. Phys. 4, 57 (1958).
- 1.105. Yourgrau W., Mandelstam S. Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory, 3rd ed., ed. by L. Mittag, M. J. Stephen, W. Yourgrau (Pitman, London, 1968) Sect. 13, p. 158.
- 1.106. Benjamin T. B., Feir J. E. — J. Fluid Mech. 27, 417 (1966).
- 1.107. Benney D. J., Newell A. C. — J. Math. Phys. 46, 133 (1967).
- 1.108. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ 62, 1745 (1972).
- 1.109. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ 64, 1627 (1973).
- 1.110. Kruskal M. D. The birth of the soliton, paper presented to the Symposium on Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Inverse Spectral Transform, Accademia dei Lincei, Rome, June, 1977. Опубликовано в кн.: Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform, ed. by F. Calogero (Pitman, London, 1978), pp. 1–8. Lecture to the NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Problems in Physics and Mathematics, Istanbul, August, 1977, ed. by A. O. Barut (D. Reidel, Dordrecht, Hollaand, 1978).
- 1.111. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. — Изв. АН СССР, сер. Матем. 15, 309 (1951). Обобщение на случай $-\infty < x < \infty$ получено Марченко. См. также K. Chadan and P. C. Sabatier. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. — Texts and Monographs in Physics (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977).
- 1.112. Kay I. — Courant Institute of Mathematical Sciences New York University, Report No. EM-74, 1955.
- 1.113. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. — Функц. анализ и его прилож. 5, 18 (1971).
- 1.114. Lax P. D. — Commun. Pure Appl. Math. 28, 141 (1975).
- 1.115. Scaudrey P. J., Dodd R. K., Gibbon J. D. — Proc. Roy. Soc. (London) A 351, 407 (1976).
- 1.116. Dodd R. K., Gibbon J. D. — Proc. Roy. Soc. (London) A 358, 287 (1977).
- 1.117. Гельфанд И. М., Дикий Л. — УМН 30, 67 (1975); Функц. анализ и его прилож. 10, 18 (1976).
- 1.118. Манин Ю. И. — Итоги науки и техники 11, 5 (1978).
- 1.119. Матвеев В. Б. — УМН, Вып. 6, 201–203 (1975).
Итс А. П., Матвеев В. Б. — Функц. анализ и его прилож. 9, 65 (1976); ТМФ 23: 1, 56–67 (1975). Полный список литературы см. в работе Дубровина, Матвеева и Новикова (УМН, вып. 1, 55–136 (1976)) и Матвеева: Abelian functions and solitons. — Lectures at the University of Wroclaw, Preprint No. 373, Inst. Theoretical Physics, University of Wroclaw, Wroclaw, Poland, June, 1976.
- 1.120. Новиков С. П. — Функц. анализ и его прилож. 8: 3, 54 (1974).
Дубровин Б. А., Новиков С. П. — ЖЭТФ 67, 2131 (1974).
Новиков С. П., Дубровин Б. А., Кричевер И. М. — ДАН СССР 229: 1 (1976). См. также литературу к гл. 10.
- 1.121. McKean H. P., van Moerbeke P. — Inventiones Math. 30, 217–274 (1975).
- 1.122. Gardner C. S. — J. Math. Phys. 12, 1548 (1971).
- 1.123. Dodd R. K., Bullough R. K. Integrability of Nonlinear Evolution Equations: Prolongation and Solitons.
- 1.124. Wadati M., Toda M. — J. Phys. Soc. Jpn. 32, 1403 (1972).
- 1.125. Wadati M. — J. Phys. Soc. Jpn. 32, 1681 (1972).
- 1.126. Schnack D. D., Lamb G. L., Jr. — Proceedings of Third Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics (Plenum Press, New York, 1973), p. 23.
- 1.127. Lamb G. L., Jr. — Phys. Rev. Lett. 31, 196 (1973).
- 1.128. Lamb G. L., Jr. — Phys. Rev. A9, 422 (1974).

- 1.129. Bullough R. K., Ahmad F. — Phys. Rev. Lett. 27, 330 (1971).
 Eilbeck J. C., Bullough R. K. — J. Phys. A: Math. Gen. 5, 820 (1972).
- 1.130. Eilbeck J. C., Caudrey P. J., Gibbon J. D., Bullough R. K. — J. Phys. A: Math. Gen. 6, 1337 (1973).
- 1.131. Caudrey P. J., Eilbeck J. C. — Phys. Lett. 62A, 65 (1977).
- 1.132. Gibbon J. D., Eilbeck J. C. — J. Phys. A: Proc. Phys. Soc. Lond. 5, L122 (1972).
- 1.133. Gibbon J. D., Caudrey P. J., Bullough R. K., Eilbeck J. C. — Lett. Nuovo Cimento 8, 775 (1973).
- 1.134. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. — ТМФ 21, 160 (1974).
- 1.135. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. — ДАН СССР 219, 1334 (1974).
- 1.136. Lee T. D. Nontopological Solitons and Applications to Hadrons. — Phys. Scr. 20, 440 (1979).
- 1.137. Symposium on Nonlinear (soliton) structure and dynamics in condensed matter, Oxford, June, 1978, Proceedings, in Solitons and Condensed Matter Physics, Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, 1978).
- 1.138. Baxter R. J. — Phys. Rev. Lett. 26, 832 (1971).
- 1.139. Luther A., Emery V. J. — Phys. Rev. Lett. 33, 589 (1974).
- 1.140. Wadati M., Sanuki H., Konno K. — Prog. Theor. Phys. 53, 419—436 (1975).
- 1.141. Pohlmeyer K. Interactions via Quadratic Constraints. — New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, ed. by M. Levy, P. Mitter (Plenum Press, New York, 1977).
- 1.142. Lund F. — Proc. NATO Advanced Study Institute on «Nonlinear Problems in Physics and Mathematics», Istanbul, August 1977, ed. by A. O. Barut (D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978).
- 1.143. Bianchi L. — Lezioni di Geometria Diferenzial (Spoerri, Pisa, 1896).
- 1.144. Результаты, которые доложил П. П. Кулиш на Symposium on Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Inverse Spectral Transform, Accademia dei Lincei, Rome, June, 1977. Опубликованная статья Factorisation of scattering characteristics and integrals of motion in Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform, ed. by F. Calogero (Pitman, London, 1978), pp. 252—257, этого материала не охватывает.
- 1.145. Lamb G. L., Jr. — J. Math. Phys. 18, 1654 (1977).
- 1.146. Lakshmanan M. — Phys. Lett. 64A, 353 (1978).
- 1.147. Sasaki R. — Phys. Lett. 71A, 390 (1979) Nucl. Phys. B154, 343 (1979); Phys. Lett. 73A, 77 (1979); Geometric approach to soliton equations, Niels Bohr Institute preprint NBI-HE-79-31.
 Sasaki R., Bullough R. K. Geometric theory of local and nonlocal conservation laws for the sine-Gordon equation. — Niels Bohr Institute preprint NBI-HE-79-32.
 Sasaki R., Bullough R. K. Geometry of the AKNS-ZS inverse scattering scheme. — Proc. Intl. Meeting «Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems», Lecce, Italy, June 20—23, 1979. A Springer Lecture Notes in Physics Volume, M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani (eds.) (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980).
 См. также Crampin M., McCarthy P. J. — Lett. Math. Phys. 2, 303 (1978) и цитируемую там работу № 2.
 Crampin M., Pirani F. A. E., Robinson D. C. — Lett. Math. Phys. 2, 15 (1977).
- Herman R., [1.77] и последующие тома Interdisciplinary Mathematics.
- 1.148. Flanders H. — Differential Forms (Academic Press, New York, 1963).
- 1.149. Weinberg S. — Gravitation and Cosmology (Wiley, New York, 1972).
- 1.150. Dodd R. K., Gibbon J. D. — Proc. Roy. Soc. (London) A359, 411 (1978).
- 1.151. McLaughlin D. W. — J. Math. Phys. 16, 96 (1975).
- 1.152. Flaschka H. — Phys. Rev. B9, 1924 (1974); Prog. Theor. Phys. 51, 703 (1974).

- 1.153. Манаков С. В. — ЖЭТФ 67, 543 (1974).
- 1.154. Flaschka H., Newell A. C. Integrable systems of nonlinear evolution equations. — *Dynamical Systems, Theory and Applications, Lecture Notes in Physics*, Vol. 38, ed. by J. Moser (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975).
- 1.155. Wadati M., Kamijo T. — *Progr. Theor. Phys.* 52, 397 (1974).
- 1.156. Calogero F. — *Let. Nuovo Cimento* 14, 443 (1975).
- 1.157. Calogero F., Degasperis A. — *Let. Nuovo Cimento* 16, 425—433 (1976).
- 1.158. Захаров В. Е., Шафар А. Б. — *Функц. анализ и его прилож.* 8, 43 (1974).
- 1.159. Morris H. C. — *Int. J. Theor. Phys.* 16, 227 (1977).
- 1.160. Morris H. C. — *J. Math. Phys.* 18, 530; 18, 533 (1977).
- 1.161. Morris H. C. — *J. Math. Phys.* 17, 1870 (1976); 18, 285 (1977).
- 1.162. Dodd R. K. Prolongation Structure Techniques for the New Hierarchy of Korteweg — de Vries Equations. — *Proc. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Problems in Physics and Mathematics*, Istanbul, August, 1977, ed. by A. O. Barut (D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978).
- 1.163. Coronas J. — *J. Math. Phys.* 18, 163 (1977); 19, 2431 (1978).
- Corones J., Markovski B. L., Rizov V. A. — *J. Math. Phys.* 18, 2207 (1977).
- 1.164. Moser J. — *Adv. Math.* 16, 197 (1975).
- 1.165. Calogero F. — *J. Math. Phys.* 12, 419 (1971).
- 1.166. Calogero F. Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related solvable many body problems. — *Proc. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Problems in Physics and Mathematics*, Istanbul, August, 1977, ed. by A. O. Barut (D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978).
- 1.167. Airault H., McKean H. P., Moser J. — *Commun. uPre Appl. Math.* 30, 95 (1977).
- 1.168. Airault H. Poles of Nonlinear Evolution Equations and Integrable Dynamical Systems. — *Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform*, ed. by F. Calogero (Pitman, London, 1978), pp. 244—251.
- 1.169. Chodnovsky D., Chodnovsky G. — *Nuovo Cimento* 40B, 339 (1977).
- 1.170. Chen H. H., Lee Y. C., Pereira N. R. Algebraic internal wave solitons and the integrable Calogero-Moser-Sutherland-N-body problem. Preprint (1978).
- 1.171. Benjamin T. B. — *J. Fluid Mech* 85, 241 (1966); 29, 559 (1967); Ono H. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 39, 1082 (1975); Joseph R. I. — *J. Math. Phys.* 18, 2251 (1977).
- 1.172. Satsuma J., Kaup D. J. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 43, 692 (1977).
- 1.173. Gibbon J. D. Poles of the Toda lattice. — *Solitons and Condensed Matter Physics*, Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 44—47.
- 1.174. McKean H. P. — *Lecture Notes at Calgary* (1978).
- 1.175. Trubowitz E. — *Commun. Pure Appl. Math.* 30, 321 (1977).
- 1.176. Kaup D. J. — *SIAM J. Appl. Math.* 31, 121 (1976).
- 1.177. Kaup D. J., Newell A. C. — *Proc. Roy. Soc. (London)* A361, 413 (1978).
- 1.178. Newell A. C. Soliton Perturbations and Nonlinear Focussing. — В кн.: *Solitons and Condensed Matter Physics*, Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 52—67.
- 1.179. Newell A. C. — *J. Math. Phys.* 18, 922 (1977).
- 1.180. Mason A. L. Perturbation Theory for the Double sine-Gordon Equation. — *Proc. NATO Advanced Study Institute, Nonlinear Equations in Physics and Mathematics*, Istanbul, August 1977, ed. by A. O. Barut (D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978).
- 1.181. Kitschenside P. W., Mason A. L., Bullough R. K., Caudrey P. J. Perturbation Theory of the Double sine-Gordon Equation. — В кн.: *Solitons and*

- Condensed Matter Physics, Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 48—51.
- 1.182. McLaughlin D. W., Scott A. C. Soliton Perturbation Theory. — Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform, ed. by F. Calogero (Pitman, London, 1978), pp. 225—243; Phys. Rev. A 18, 1632 (1978).
 - 1.183. Karpman V. I. Soliton Perturbation in the Presence of Perturbation. — Phys. Scr. 20, 462 (1979).
 - 1.184. Newell A. C. Near integrable systems, nonlinear tunnelling and solitons in slowly changing media. — Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform, ed. by F. Calogero (Pitman, London, 1978), pp. 127—179.
 - 1.185. Takhtadjan L. A. — Phys. Lett. 64A, 235 (1977).
 - 1.186. Lakshmanan M. — Phys. Lett. 61A, 53 (1977).
 - 1.187. Manakov S. V. Reported at the Warsaw (Jadwisin) Meeting, September, 1977.
 - 1.188. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. — Inventiones Math. 37, 93 (1976).
 - 1.189. Proceedings of the Conference on Solitons and Nonlinear Waves (University of Arizona, Tucson, January, 1976) ed. by H. Flaschka, McLaughlin D. W. Published in Rocky Mount. J. Math. 8, Nos. 1 and 2, Winter and Spring (1978).
 - 1.190. Mura R. (ed). Bäcklund Transformations. — Lecture Notes in Mathematics, Vol. 515 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976).
 - 1.191. Calogero F. (ed.). — Proc. Symp. Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Inverse Spectral Transform, Academia dei Lincei, Rome, 1977 (Pitman, London, 1978).
 - 1.192. Barut A. O. (ed.). — Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Equations in Physics and Mathematics, Istanbul, August 1977 (D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978).
 - 1.193. Chalmers Symp. on «Solitons and their Applications in Science and Technology», Göteborg, June 1978. Articles published in Phys. Scr. 20 (1979).
 - 1.194. Lonngren K., Scott A. (eds.). Solitons in Action (Academic Press, New York, 1979).
 - 1.195. Bullough R. K. — Solitons in Physics. — В кн.: [1.192], pp. 99—141.
 - 1.196. Hobart R. — Proc. Phys. Soc. (London) 82, 201 (1963).
 - 1.197. Derrick G. H. — J. Math. Phys. 5, 1252 (1964).
Derrick G. H., Wan Kay-Kong. — J. Math. Phys. 9, 232 (1968).
 - 1.198. Ablowitz M. J., Haberman R. — Phys. Rev. Lett. 35, 1185 (1975); J. Math. Phys. 16, 2301 (1975).
 - 1.199. Cornille H. — J. Phys. A11, 1509 (1978).
 - 1.200. Hirota R. — J. Phys. Soc. Jpn. 33, 1459 (1972).
Gibbon J. D., Zambotti G. — Nuovo Ciment 28B, 1 (1975).
 - 1.201. Gibbon J. D., Freeman N. C., Davey A. — J. Phys. A: Math. Gen. 11, L93 (1978).
 - 1.202. Manakov S. V., Zakharov V. E., Bordag L. A., Its A. R., Matveev V. B. — Phys. Lett. 63A, 205 (1977).
 - 1.203. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S. — Phys. Lett. 59B, 85 (1975).
Atiyah M. F., Ward R. S. — Comm. Math. Phys., 55, 117 (1977).
Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I. — Phys. Lett. 65A, 185 (1978).
Corrigan E., Fairlie D. B., Yates R. G., Goddard P. — Comm. Math. Phys. 58, 233 (1978).
 - 1.204. Белавин А. А., Захаров В. Е. — Письма в ЖЭТФ 25, 603 (1977).
 - 1.205. Kaup D. J. — Phys. Rev. A16, 704 (1977).
 - 1.206. Goddard P., Nuyts J., Olive D. Gauge Theories and Magnetic Charge. — CERN Preprint (1978) (Ref. TH. 2255-CERN).
 - 1.207. Harrison B. K. — Phys. Rev. Lett. 41, 1197 (1978).

- 1.208. Kinnersley W., Chitre D. M. — *J. Math. Phys.*, 18, 1539 (1977).
- 1.209. Белинский В. А., Захаров В. Е. Цитирована в [1.207] под № 15.
- 1.210. Makhanov V. G. — *Phys. Rep.* 35C, 1 (1978).
- 1.211. Eilbeck J. C. *Numerical Studies of Solitons.* — В кн.: *Solitons and Condensed Matter Physics, Springer Series in Solid State Sciences*, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 28—43.
- 1.212. Christiansen P. L., Olsen O. H. — *Phys. Scr.* 20, 531 (1979).
- 1.213. Leibbrandt H. — *Phys. Rev. Lett.* 41, 435 (1978).
- 1.214. McCarthy P. J. — *Lett. Math. Phys.* 2, 493 (1978).
- 1.215. McCarthy P. J. — *Lett. Math. Phys.* 2, 167 (1977).
- 1.216. Yang C. N. — *Phys. Rev. Lett.* 36, 1377 (1977).
- 1.217. Calogero F., Degasperis A. Novel class of nonlinear evolution equations solvable by spectral transforms technique, including the so called cylindrical KdV equation. — В кн.: *Solitons and Condensed Matter Physics, Springer Series in Solid State Sciences*, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978) pp. 68—70.
- 1.218. Faddeev L. D., Korepin V. E. — *Phys. Rep.* 42C, 1 (1978).
Недавно появились еще две работы по солитонам в статистической механике:
- 1.219. Currie J. F., Sarker S., Bishop A. R., Trullinger S. E. — *Phys. Rev.* A20, 2213 (1979).
- 1.220. Bishop A. R., Currie J. F., Trullinger S. E. — *Adv. in Phys.*
- 1.221. Burchnall J. L., Chaundy T. W. — *Proc. Lond. Math. Soc.* 21, 420 (1922), *Proc. Roy. Soc. (Lond.)* 118, 557 (1928) and a note by H. F. Baker, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, 118, 584 (1928).
Позвидному, Бэйкер первым осознал важность θ -функций в этой связи.¹⁾ Мамфорд (1978) обнаружил, что эти ранние работы имеют отношение к значительно более поздним исследованиям по теории солитонов, которая развивалась независимо. Дальнейшие обобщения описаны в работе
- 1.222. Chudnovsky D. V. Riemann monodromy problem, isomonodromy deformation equations, and completely integrable systems. — *Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Problems*, Proc. NATO Advanced Study Institute, Cargese, Corsica, June 24 — July 8, 1979, ed. by D. Bessis and C. Bardos (Reidel, Dordrecht, Holland).
- 1.223. Bullough R. K. Solitons: Inverse Scattering Theory and Its Applications. — *Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Problems*, Proc. NATO Adv. Study Inst., Cargese, Corsica, June 24 — July 8, 1979, ed. by D. Bessis, C. Bardos (Reidel, Dordrecht, Holland, 1980).
В связи с работами [1.207], [1.208], [1.209] и эйнштейновскими уравнениями поля упомянем также:
- 1.224. Maison D. — *Phys. Rev. Lett.* 41, 521 (1978), где выводится пара Лакса для уравнения Эрнста, и доклад В. К. Harrison. *Study Group on Solitons, Partial Differential Equations, and Spectral Methods*, ICTP, Trieste (July, 1979).
В связи с НУШ с отрицательным самодействием (и, более общо, с преобразованием Бэклунда) укажем работу
- 1.225. Герчиков В. С., Кулиш П. П. — *ТМФ* 39, 69 (1979).
Применение теории соолитонов в метеорологии описано в работах:
- 1.226. Gibbon J. D., James I. N., Moroz I. M. — *Phys. Scripta* 20, 402 (1979).
- 1.227. Каур D. J. The Estabrook—Wahlquist method with examples of application. — *Physica D*.

¹⁾ За много лет до этого были выполнены знаменитые работы по интегрируемым случаям классической механики — Клебша, Вебера, Ковалевской, Стеклова, Чаплыгина и др. с интенсивным использованием θ -функций. — *Прим. ред.*

2. АСПЕКТЫ СОЛИТОННОЙ ФИЗИКИ

Дж. Лэм (мл.), Д. Маклафлин

Солитоны — это нелинейные образования, возникающие в результате равновесия между нелинейностью и дисперсией. В этой статье мы проиллюстрируем на ряде примеров некоторые связи между физическими нелинейными системами и солитонами в этих системах. Можно показать, что в некоторых случаях взаимодействие электрического поля с совокупностью двухуровневых атомов порождает солитоны самоиндуцированной прозрачности и солитоны для нелинейного уравнения Шрёдингера. Обсуждается один случай взаимодействия электромагнитных волн с плазмой, приводящего к солитонам для уравнения Кортевега — де Фриза. Взаимодействие системы двухуровневых атомов с электрическим полем используется для того, чтобы ввести и обосновать метод обратной задачи рассеяния. В заключение обсуждаются связи между этим методом, высшими законами сохранения и гамильтоновой механикой.

2.1. Исторические замечания

Проведенные к настоящему времени исследования солитонов можно разделить на три части. Существует множество обзоров по каждому из этих трех периодов; здесь мы укажем основные работы, в которых подробно рассматриваются относящиеся к ним проблемы.

Начало первого периода солитонных исследований принадлежит к прошлому столетию; эти исследования достаточно полно отражены в трудах Расселла [2.1] и Кортевега и де Фриза [2.2]. Современное изложение результатов этих работ сделано Миурой [2.3]. Гидродинамический солитон, открытый Расселлом, — это уединенная волна на воде, движущаяся с постоянной скоростью. Она представляет собой результат равновесия двух конкурирующих эффектов. С одной стороны, свойственная уравнениям гидродинамики нелинейность приводит к возрастанию крутизны фронта волны и к ее опрокидыванию. С другой стороны, линейное описание (пригодное для малых амплитуд возмущений) приводит к диспергирующим волнам. Дисперсия является причиной того, что локализованные возмущения начинают расплзаться. Интуитивно ясно, что для амплитуд, характеризуемых слабой нелинейностью, конкуренция этих двух эффектов —

возрастания крутизны фронта и расползания возмущений — должна привести к равновесию, в результате которого возникнет уединенная волна. Так оно и происходит, и возникающее устойчивое образование и есть солитон. Описанное равновесие было рассмотрено Кадомцевым и Карпманом [2.4]. Аналогичное взаимодействие двух конкурирующих эффектов будет рассмотрено с количественной точки зрения в разд. 2.2.2, где будут детально изучаться ион-акустические волны в физике плазмы.

Солитоны обладают не только способностью распространяться в неизменном виде, но и еще более удивительной особенностью поведения. При взаимодействиях они проходят друг через друга почти как при упругом рассеянии [2.5]; такое взаимодействие солитонов было отмечено Расселлом [2.1]. В отличие от «обычных» уединенных волн детали такого нелинейного взаимодействия вряд ли допускают простую интуитивную физическую интерпретацию.

Еще в этот первый период истории солитонов были разработаны (в основном Бэклундом [2.6]—[2.8]) некоторые преобразования нелинейных уравнений в частных производных. Эти преобразования сыграли определенную роль в последующем объединении различных аналитических методов, используемых для решения уравнений, допускающих солитоны.

Для второго периода, начавшегося в 1940-х годах с исследования Ферми, Пастой и Уламом (ФПУ) [2.9] одной задачи динамики решеточных моделей, уже характерно развитие разнообразных аналитических и численных методов. Работа ФПУ представляет собой одну из первых успешных попыток использовать то, что созданные вычислительные машины для изучения проблемы, которая несколько превышала аналитические возможности того времени. Роль вычислительных машин в течение этого второго периода истории солитонов трудно переоценить. В самом деле, при численном моделировании ряда физических процессов неизменно обнаруживались солитонные явления. Эти исследования широко обсуждались в литературе о солитонах (см., например, [2.10]—[2.12]).

Дальнейшие успехи в изучении солитонов сопровождались проводившимися параллельно экспериментальными и теоретическими исследованиями по распространению когерентных световых импульсов в двухуровневой среде (Маккол и Хан [2.13]). И опять же именно изучение результатов численного счета позволило обнаружить возникновение устойчивых импульсов, а также распадение одного импульса на несколько более малых. Солитонные явления в описанных задачах получили название самоиндуцированной прозрачности (СИП) [2.14]. В это же время было обнаружено [2.15], что уравнения простой модели распространения оптических импульсов поддаются исследованию при помощи техники преобразования Бэклунда [2.17]. Тем

самым были найдены аналитические выражения, описывающие выделение чисто N -солитонных мод [2.18]. Одновременно при помощи метода обратной задачи рассеяния были получены формулы для многосолитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза. Этот метод позволил получить полное решение задачи Коши для указанного уравнения [2.19]. В 1971 г. Захаров и Шабат [2.20] обобщили описанную Лаксом [2.21] формулировку обратного метода задачи рассеяния и тем самым заложили основу для последующих исследований целого ряда уравнений, проявляющих солитонное поведение [2.22—2.24].

Метод обратной задачи рассеяния преобразует нелинейные уравнения теории солитонов в линейные интегральные уравнения. Некоторые современные исследования непосредственно посвящены получению асимптотических решений этих интегральных уравнений [2.25—2.28]. Другой чрезвычайно интересный круг задач — распространение метода обратной задачи рассеяния на нелинейные уравнения с периодическими граничными условиями [2.29—2.31]¹⁾. Полное решение периодической задачи явилось бы завершением одного из важнейших исследований второго периода истории солитонов.

Третий период начался совсем недавно. Он связан с появлением обобщений на случай более чем одной пространственной переменной, а также с приложением солитонных уравнений к таким областям науки, как нелинейные задачи физики твердого тела и квантовой теории поля [2.32, 2.33]. Эти исследования быстро развиваются в настоящее время, и было бы преждевременно давать им здесь оценку. В следующих разделах мы будем иметь дело только с некоторыми аспектами второго периода развития теории солитонов; при этом мы будем обсуждать лишь немногие из его характерных особенностей.

Среди многочисленных работ, на которые мы выше ссылались, есть немало исследований общих свойств солитонов в нелинейных волновых уравнениях с дисперсией. Другие ссылки можно найти в [2.8]. Не повторяя обсуждения этих общих свойств в настоящей статье, мы проиллюстрируем на примерах некоторые связи между физическими нелинейными системами и теми солитонами, которые в них возникают. Мы рассмотрим несколько конкретных систем, линейных в отсутствие взаимодействия. В разд. 2.2.1 рассматриваются некоторые примеры взаимодействия электрического поля с совокупностью двухуровневых атомов. Будет показано, что в различных случаях это взаимодействие порождает солитоны самоиндуцированной прозрачности и солитоны нелинейного уравнения Шрёдингера. В разд. 2.2.2 разобран один случай взаимодействия электромаг-

¹⁾ См. также статью С. П. Новикова в настоящем сборнике. — *Прим. перев.*

нитных волн с плазмой, при котором возникают солитоны для уравнения Кортевега — де Фриза. В разд. 2.3 взаимодействие системы двухуровневых атомов с электрическим полем используется для того, чтобы ввести и обосновать метод обратной задачи рассеяния. В конце статьи обсуждаются связи между этим методом и «высшими законами сохранения»; последние, будучи сохраняющимися величинами, сыграли важную роль на начальной стадии развития теории уравнения Кортевега — де Фриза и уравнения самоиндуцированной прозрачности.

2.2. Модель нелинейной системы

Уравновешивание дисперсии и слабой нелинейности является общим физическим процессом, возникающим в самых разнообразных физических приложениях [2.5]. Физические ситуации, приводящие к такому равновесию, можно разбить на несколько категорий, каждая из которых может быть неформально охарактеризована весьма общими физическими принципами [2.10, 2.34]. Тем самым для описания динамики разнообразных физических систем достаточно относительно короткого списка уравнений. Хотя формулировки, определяющие эти категории, могут показаться весьма неточными, они охватывают большинство нелинейных диспергирующих консервативных систем, обсуждаемых в современной литературе.

Чтобы проиллюстрировать типичные категории, мы рассмотрим консервативную диспергирующую слабо нелинейную волну, состоящую из быстрых осцилляций с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Эти медленные модуляции могут описываться одним из вариантов *нелинейного уравнения Шрёдингера*, если выполняются следующие условия: I) частота несущих осцилляций очень велика, II) в системе нет резонансных эффектов, и III) нелинейность становится существенной на пространственных и временных интервалах, больших по сравнению с длиной волны и периодом осцилляций. При наличии резонансных эффектов модель делается более сложной; например, если резонанс происходит между несущими осцилляциями и средой, в которой распространяется волна, в уравнениях нужно учитывать также свойства этой среды. Часто микроскопическая среда описывается квантовомеханически, при помощи такой формы совместных уравнений *Максвелла — Шрёдингера*, как уравнения Максвелла — Блоха. Наконец, при наличии более чем одной несущей волны следует использовать подходящее *N-волновое обобщение* [2.35, 2.36].

Совсем иная группа моделей, резко отличная от предыдущей, основана на законах сохранения механики жидкости. В этом случае слабая нелинейность, уравновешиваемая дисперсией, приводит к *уравнению Кортевега — де Фриза*.

Для того чтобы проиллюстрировать, как возникают описанные выше различные категории, мы разберем несколько весьма специфических моделей нелинейных систем и используем приближения, сводящие «точные системы» к одной из этих категорий. Такая процедура сведения даст нам конкретное представление о типах аппроксимации, характерных для различных классов. В разд. 2.2.1 мы опишем взаимодействие электрического поля с двухуровневой средой и разберем два случая: один — вблизи резонанса, другой — вдали от резонанса. В качестве примера из механики жидкости мы рассмотрим специальный случай взаимодействия электрического поля с ионами плазмы.

2.2.1. Взаимодействие электромагнитного поля с двухуровневой средой

Общая конструкция

Рассмотрим быстро осциллирующую электромагнитную волну, распространяющуюся в некоторой среде. Очень простой идеализированной моделью, описывающей такое распространение, является взаимодействие классического электрического поля с совокупностью квантовых осцилляторов. Динамика каждого осциллятора описывается уравнением Шрёдингера, которое для двухуровневого атома принимает вид [2.37—2.39]

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & -\mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \\ -\mathbf{q} \cdot \mathbf{E} & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

$\hbar = h/2\pi$ (нормированная постоянная Планка). Здесь α и β — амплитуды вероятностей соответственно верхнего и нижнего состояний. Эти два состояния отличаются на энергию $\hbar\omega$. Каждый осциллятор взаимодействует с электромагнитной волной \mathbf{E} как диполь, и параметр \mathbf{q} представляет собой дипольный матричный элемент.

Поле \mathbf{E} направлено вдоль оси z и представляет собой почти плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x . Оно удовлетворяет уравнению Максвелла вида

$$(\partial_{tt} - c^2\partial_{xx}) \mathbf{E} = -4\pi\partial_{tt}\mathcal{P}. \quad (2.2)$$

Здесь \mathcal{P} обозначает макроскопическую поляризацию, индуцированную в среде действием поля \mathbf{E} на двухуровневые осцилляторы.

Рассмотрим осциллятор, расположенный вблизи плоскости $x = X$, взаимодействующий с полем $\mathbf{E}(X, t)$ в соответствии с (2.1). Это взаимодействие поляризует осциллятор, создавая

микроскопическую поляризацию $\mathbf{P} \equiv \mathbf{q}(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)$. Макроскопическая поляризация \mathcal{P} выражается через \mathbf{P} так:

$$\mathcal{P}(x, t) = n_0 \langle \mathbf{P}(x, t) \rangle, \quad \mathbf{P} = \mathbf{q}(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta). \quad (2.3)$$

Здесь n_0 — плотность резонирующей атомной системы, а $\langle \cdot \rangle$ — операция усреднения, которую следует рассматривать как отображение, преобразующее микроскопические диполи возле точки x в макроскопическую поляризацию в этой точке. Точное определение операции $\langle \cdot \rangle$ зависит от рассматриваемой физической ситуации. Ниже в этом разделе мы разберем три варианта усреднения $\langle \cdot \rangle$.

Уравнения (2.1) и (2.2) вместе с определением (2.3) образуют замкнутую систему относительно неизвестных $(\alpha, \beta, \mathbf{E})$. Первым делом нам надо вычислить модуляцию амплитуды и фазы для «почти плоской волны» \mathbf{E} , возникающую из-за ее взаимодействия с двухуровневой средой.

Поскольку именно поляризация $\mathbf{P} = \mathbf{q}(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)$ влияет на \mathbf{E} -поле, удобно перейти к новым переменным, явно содержащим комбинацию $(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)$:

$$\begin{aligned} T &\equiv \alpha\alpha^* + \beta\beta^*, & N &\equiv \alpha\alpha^* - \beta\beta^*, \\ P_+ &\equiv \alpha\beta^* + \alpha^*\beta, & P_- &\equiv i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В этих переменных исходная система принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t T &= 0, \\ \partial_t N &= -\frac{2}{\hbar}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E})P_-, \\ \partial_t P_+ &= -\omega P_-, \\ \partial_t P_- &= \omega P_+ + \frac{2}{\hbar}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E})P_-, \\ (\partial_{tt} P_- - c^2 \partial_{xx}) \mathbf{E} &= 4\pi n_0 \langle \omega^2 P_+ \mathbf{q} + \omega(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E})N \mathbf{q} \rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

откуда вытекает

$$\partial_{tt} P_+ = -\omega^2 P_+ - \frac{2\omega}{\hbar}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E})N.$$

Эта «точная» нелинейная система достаточно богата для того, чтобы моделировать многие физические ситуации; она называется *нелинейной системой Максвелла — Блоха*.

Сначала мы рассмотрим случай, когда поле \mathbf{E} и среда находятся почти в резонансе. Другими словами, несущая частота ω_c поля \mathbf{E} выбирается близкой к частоте осциллятора ω . Далее, мы предположим, что эта частота весьма велика, так что в уравнениях Максвелла достаточно удерживать только резонансный член $\omega^2 P_+$, и можно пренебречь другим членом $\omega(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E})N/\hbar$.

Теперь мы должны выбрать оператор $\langle \cdot \rangle$ перехода от микро- к макровеличинам. Физически каждый квантовый осциллятор не может быть точно приведен в резонансное положение,

поскольку центр масс каждого осциллятора находится в движении. Это движение приводит к доплеровскому сдвигу частоты в лабораторной системе отсчета; из-за этого распределение частот совокупности осцилляторов можно считать непрерывным. Мы предположим, что это распределение частот имеет пик на несущей частоте ω_c , и мы будем его моделировать функцией плотности вероятности $g(\Delta\omega)$, $\omega = \omega_c + \Delta\omega$. Через эту плотность g «микро-в-макро» оператор $\langle \cdot \rangle$ выражается так:

$$\langle f \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta\omega) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega). \quad (2.6)$$

С учетом такого определения $\langle \cdot \rangle$ и выбора несущей частоты ω_c , близкой к резонансной, мы будем искать приближенное решение уравнений Максвелла — Блоха (2.5). Отметим, во-первых, что в отсутствие индуцированной поляризации среда, по сути дела, является вакуумом, в котором несущая частота ω_c и волновое число k_c связаны соотношением $\omega_c = ck_c$. В этой модели дисперсия появляется из-за взаимодействия, порождающего индуцированную поляризацию. Предположим, что поляризация мала (это выполняется в большинстве приложений). Такое предположение позволяет искать решения уравнений Максвелла — Блоха в виде

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar}{q} E(x, t) \cos[k_c x - \omega_c t + \varphi(x, t)], \\ N &= N(t; x, \Delta\omega), \\ P_+ &= Q(t; x, \Delta\omega) \cos[k_c x - \omega_c t + \varphi(x, t)] + \\ &+ P(t; x, \Delta\omega) \sin[k_c x - \omega_c t + \varphi(x, t)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\omega_c = ck_c$, и амплитуды (E, N, P, Q) и фаза φ медленно меняются на масштабах $\omega_c t$ и $k_c x$. Уравнения, описывающие медленные модуляции, можно вывести, подставляя (2.7) в систему Максвелла — Блоха и пренебрегая всеми вторыми производными огибающих, равно как и высшими гармониками. В результате из уравнений Максвелла — Блоха в указанном приближении (для медленно меняющихся огибающей и фазы) получится следующая нелинейная система:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} &= c\alpha' \langle P(\Delta\omega, x, t) \rangle, \\ E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= c\alpha' \langle Q(\Delta\omega, x, t) \rangle, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= EN + \left(\Delta\omega + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \right) Q, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -EP, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= - \left(\Delta\omega + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \right) P. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\alpha' = 2\pi n_0 \omega_c q^2 / \hbar c$, где n_0 — плотность системы резонирующих атомов. В следующем разделе мы обсудим физическую информацию, содержащуюся в этих уравнениях.

Случай 1. Самоиндуцированная прозрачность

Как было отмечено во введении, одно из первых наблюдений солитонного поведения было сделано при изучении распространения когерентных оптических импульсов [2.13, 2.15]. Такое резонансное взаимодействие между светом и веществом приводит к новым эффектам распространения, как теперь известно, характерным для солитонов. Может быть, наиболее наглядным из этих эффектов является самоиндуцированная прозрачность. В этом эффекте на переднем фронте импульса атомы переворачиваются, в то время как задний фронт возвращает их в исходное положение посредством стимулированного излучения. Такой процесс осуществим, если он протекает в течение промежутка времени, малого по сравнению с временем фазовой памяти системы резонирующих атомов (т. е. импульсы ультракороткие), а также если импульсы имеют интенсивность, достаточную для переворачивания атомов. Если условия процесса выполнены, то устанавливается профиль в виде уединенного импульса, распространяющегося без затухания со скоростью, на три порядка меньшей, чем фазовая скорость света в среде (это ограничение сверху). Импульсы, интенсивность которых ниже пороговой, требуемой для этого процесса, попросту затухают обычным образом. В рамках теоретической модели, используемой для описания этого эффекта, показывается, что вышеупомянутое устойчивое распространение имеет место после того, как профиль электрического поля примет солитонную форму.

Уравнения (2.8) дают теоретическую основу для анализа самоиндуцированной прозрачности. Удовлетворительного соответствия с многочисленными экспериментальными результатами можно достичь, рассматривая эти уравнения без учета фазового сдвига ϕ . В этом случае решение типа уединенной волны легко находится [2.13]:

$$E = \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sech} [(t - x/v)/\tau_p], \quad (2.9)$$

где константа τ_p связана с полушириной импульса, а скорость v определяется равенством

$$\frac{1}{v} \equiv \frac{1}{c} + \alpha' \frac{2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{1 + (\tau_p \Delta\omega)^2} d(\Delta\omega). \quad (2.10)$$

Как отмечалось выше, еще в первых экспериментах было установлено, что эта скорость импульса v может быть на два-три

порядка меньше, чем фазовая скорость. Численные значения, из которых следует этот экспериментальный результат [2.40—2.42], таковы: $\omega_c \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $n_0 \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $q \sim 6 \cdot 10^{-18}$, $\tau_p \sim 7 \cdot 10^{-9} \text{ с}$. Тогда $\alpha'c \sim 2 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-2}$, и из (2.10) получаем, что

$$\frac{c}{v} \sim 3000. \quad (2.11)$$

Следовательно, в этом эксперименте скорость импульса на самом деле на три порядка меньше, чем фазовая скорость c .

Непосредственное интегрирование немедленно дает, что «площадь» под профилем импульса вида (2.9) равна 2π , т. е.

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, t) dt = 2\pi. \quad (2.12)$$

Вследствие этого такой импульс называют обычно 2π -импульсом. Уравнение (2.9) для 2π -импульса есть простейший пример оптического солитона. В результате численного счета оказывается, что импульс с начальной площадью между π и 3π в результате временной эволюции превращается в солитонный 2π -импульс. Импульсы, меньшие π , затухают до нулевой площади (что было бы естественно ожидать для распространения импульса в «ослабителе»). С другой стороны, оказывается, что импульсы, большие 3π (но меньшие, чем 5π), распадаются в два 2π -импульса. Относительная высота этих двух импульсов зависит от формы начального импульса. Импульсы с начальной площадью между 5π и 7π распадаются на три импульса и т. д. Такое распадение импульсов является характерной чертой солитонного поведения.

Для рассматриваемой проблемы некоторые аспекты распада импульсов удачно систематизируются при помощи так называемой теоремы площадей. Уравнение, описывающее площадь $\theta(x)$, легко получается интегрированием (2.8) по времени. Получим

$$\frac{d\theta}{dx} = \pm \frac{\alpha}{2} \sin \theta, \quad (2.13)$$

где

$$\alpha = 2\pi g(0)\alpha', \quad (2.14)$$

и верхний знак ставится, если в начальный момент атомы возбуждены (усилитель), а нижний — если они в начальный момент находятся на нижнем уровне (ослабитель). Константа α' определена под формулой (2.8).

Уравнение (2.13) известно как теорема площадей [2.13, 2.14, 2.38]. Оно играет ключевую роль для понимания некоторых эффектов, встречающихся при распространении ультракоротких импульсов. Во-первых, физический смысл α можно понять из

линеаризованного уравнения (2.13), где $\sin \theta$ заменяется на θ . Видно, что тогда поле усиливается или затухает на характерной длине α^{-1} .

Далее, рассмотрим точное решение уравнения (2.13) с начальным условием $\theta = \theta_0$ при $x = x_0$,

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \exp \left[\pm \frac{\alpha}{2} (x - x_0) \right]. \quad (2.15)$$

Его поведение схематически изображено на рис. 2.1. Поскольку в (2.13) есть две возможности выбора знака, то в действительности имеется два различных уравнения. Соответствующие два

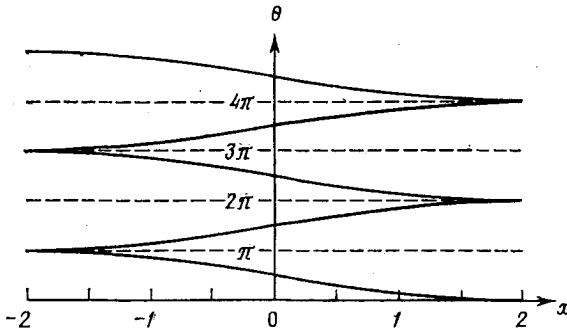


Рис. 2.1. Теорема площадей: график функции (2.15).

решения на рис. 2.1 получаются, если смотреть справа налево для знака плюс (усилитель) и слева направо для знака минус (ослабитель). Отсюда легко видеть, что бесконечно малая площадь увеличится до π в усилителе, в то время как любая площадь, меньшая π , затухнет до нуля в ослабителе. Второй результат допускает не только хорошо известное затухание импульсов при распространении в ослабителе, но также эволюцию импульса в ненулевой 0π -импульс, т. е. в такой импульс, для которого полная площадь под огибающей равна нулю, но площадь под импульсом ($\sim E^2$) ненулевая. (Это возможно, если положительная часть огибающей равна по площади отрицательной части. Физически области положительности и отрицательности огибающей отличаются просто сдвигом фазы несущей волны на 180° .) В ослабителе импульс с начальной площадью между π и 3π превращается в устойчивый 2π -импульс самоиндуцированной прозрачности. С другой стороны, 2π -импульсы неустойчивы в усилителе и превращаются или в π -, или в 3π -импульсы. Подчеркнем, что рис. 2.1, иллюстрирующий теорему площадей, относится только к общей площади импульса и не дает детальной информации о его точных размерах. Например, теорема площадей не предсказывает возможный распад импульса на несколько импульсов с той же общей площадью,

Аналитические выражения для всевозможных $2N\pi$ -импульсов могут быть выведены различными методами. Эти выражения для 4π - и π -импульсов впервые были получены при помощи техники, развитой Баргманом для построения безотражательных потенциалов в квантовой теории рассеяния. Поскольку баргмановские потенциалы представляют собой класс простейших решений интегральных уравнений обратной задачи рассеяния, эти результаты, конечно, можно получить также методом указанной задачи. Различные его приложения были развиты с тех пор для нужд рассматриваемой проблемы [2.18, 2.43]. Мы обсудим метод обратной задачи в разд. 2.3.

Случай II. Уравнение sine-Gordon (резонанс без расширения)

Хотя система (2.8) хорошо описывает распространение когерентных оптических импульсов в среде с неоднородным уширением, существенная нелинейность процесса распространения может крайне просто быть продемонстрирована, если пренебречь доплеровским сдвигом и изменением фазы (т. е. если положить $g(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)$ и $\varphi = 0$). В этом пределе мы получим

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = P, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = EN, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = -EP, \quad (2.18)$$

где $\tau = t - x/c$, и $\xi = \alpha'x$.

Эти уравнения имеют первый интеграл $P^2 + N^2 = 1$; константа интегрирования выбирается исходя из начальных условий $N(-\xi, -\infty) = \pm 1$. Как и в уравнении (2.13), верхний знак относится к усилителю, нижний — к ослабителю. В терминах параметрического представления

$$P = \pm \sin \sigma, \quad (2.19)$$

$$N = \pm \cos \sigma$$

получаем, что

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi \partial \tau} = \pm \sin \sigma. \quad (2.21)$$

Итак, в предельном случае отсутствия эффекта Доплера систему уравнений Максвелла — Блоха можно свести к единственному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных, известному как уравнение sine-Gordon. Это уравнение возникло давно в дифференциально-геометрических

исследованиях; известны многие его частные решения. Перед тем как их обсуждать, разберем решение типа простой волны. Хотя это решение не несет информации об эффектах, возникающих из-за взаимодействия солитонов, при экспериментальном изучении распространения когерентных импульсов в первую очередь требует внимания именно оно. Решение, зависящее только от комбинации $(a\tau - \xi/a)$, находится из соотношения

$$\sigma'' = \sin \sigma, \quad (2.22)$$

где штрих обозначает дифференцирование по $a\tau - \xi/a$, и в уравнении (2.21) берется только нижний знак. (Уединенная волна устойчива только в ослабителе.) Хотя можно рассматривать разные решения уравнения (2.22), наиболее важным в задаче распространения импульсов является односолитонное решение

$$\sigma = 4 \operatorname{arctg} \exp(a\tau - \xi/a). \quad (2.23)$$

Поскольку $E = \sigma_\tau$, то

$$E(\xi, \tau) = 2a \operatorname{sech}(a\tau - \xi/a). \quad (2.24)$$

Аргумент функции sech можно записать в виде $a(t - x/v)$, где

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} - \frac{\alpha'}{a^2}, \quad (2.25)$$

что согласуется с соотношением (2.10) в предельном случае отсутствия неоднородного расширения. Отметим здесь, что площадь под этим импульсом имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau E(\xi, \tau) = 2\pi, \quad (2.26)$$

так что в этой модели решение (2.24) снова есть 2π -импульс. (Эквивалентно, θ меняется на угол 2π , когда импульс проходит данную точку в пространстве.)

Профиль типа гиперболического секанса характерен для распространения солитонов. Однако метод, которым он был здесь получен, не позволяет проанализировать более специфические особенности распространения солитонов. Характерные черты такого распространения проявляются при взаимодействии таких импульсов при прохождении их друг через друга.

Для рассмотрения взаимодействия импульсов требуются более сложные методы получения решений уравнения sine-Gordon (2.21). Много внимания было уделено в последние годы построению таких решений. Здесь мы рассмотрим только старейший метод, основанный на преобразованиях Бэклунда. Уравнение (2.21) возникло в классической дифференциальной геометрии [2.44]; этот метод получения его частных решений был найден в конце прошлого столетия.

Преобразование Бэклунда может быть интерпретировано как отображение, переводящее одно решение данного уравнения (здесь — уравнения sine-Gordon) в другое его же решение. Преобразование задается уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2} \right) = -a \sin \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_0}{2} \right), \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_0}{2} \right) = \frac{1}{a} \sin \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2} \right). \quad (2.28)$$

Эти уравнения можно вывести, как показано в [2.46], используя технику Клерэна [2.45].

Легко показать, что и σ_0 , и σ_1 удовлетворяют уравнению sine-Gordon. Следовательно, по данному решению можно получить новое решение σ_1 . Преобразование можно повторить и получить решение σ_2 из σ_1 и т. д. Метод Бэклунда особенно полезен именно из-за того, что он дает явные выражения для бесконечной последовательности многосолитонных решений.

Первый шаг в этом процессе образования решений известен как теорема перестановочности, записываемая в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\sigma_3 - \sigma_0}{4} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4}. \quad (2.29)$$

Здесь σ_1 и σ_2 — частные решения, порожденные из σ_0 при помощи соотношений (2.27), (2.28), где a_1 и a_2 — соответствующие константы преобразований. Новое решение есть σ_3 . Например, если в качестве σ_0 взять нулевое решение, σ_1 и σ_2 — односолитонные решения вида (2.23), то (2.29) дает

$$\sigma_3 = 4 \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{v_1 - v_2}{2}}{\operatorname{ch} \frac{v_1 + v_2}{2}} \right], \quad (2.30)$$

где

$$v_i = a_i \tau - \xi / a_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.31)$$

Соответствующее электрическое поле может быть записано в виде

$$E = A \frac{a_1 \operatorname{sech} X - a_2 \operatorname{sech} Y}{1 - B (\operatorname{th} X \operatorname{th} Y - \operatorname{sech} X \operatorname{sech} Y)}, \quad (2.32)$$

где

$$A = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad (2.33a)$$

$$B = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad (2.33b)$$

$$X = a_1 (t - x/v_1), \quad (2.33c)$$

$$Y = a_2 (t - x/v_2). \quad (2.33d)$$

Техника преобразования Бэклунда использовалась для описания взаимодействия трех импульсов [2.18], а также шести импульсов [2.47].

Система, далекая от резонансной (нелинейное уравнение Шрёдингера)

После рассмотрения электрического поля вблизи резонанса с двухуровневыми осцилляторами, мы перейдем к случаю, где поле и осцилляторы далеки от резонанса. Типичной физической ситуацией является среда, состоящая из совокупности длинных тонких сигарообразных молекул. Первоначально эти молекулы ориентированы случайно из-за «теплового возбуждения». Если каждая молекула способна поляризоваться, то интенсивное высокочастотное электрическое поле будет 1) индуцировать поляризацию каждой молекулы и 2) ориентировать образующиеся микроскопические диполи. Хотя тепловое возбуждение препятствует такому процессу ориентации, в целом результатом описанного процесса будет все же индуцированная микроскопическая поляризация среды. Такие «эффекты Керра» [2.40—2.42, 2.48] для огибающей поля приводят к самофокусировке, автомодуляции и т. д.

Совокупность двухуровневых осцилляторов можно взять в качестве грубой модели такой среды, если каждому осциллятору помимо его координаты x приписывается единичный вектор \hat{p} (описывающий ориентацию этой «сигарообразной молекулы»). Далее, мы предположим, что для осциллятора, ориентированного в \hat{p} -направлении, индуцированный микроскопический дипольный момент в точности ориентирован в том же направлении. При сделанных предположениях система Максвелла — Блоха (2.5) по-прежнему описывает динамику $N(t; x, \hat{p})$, $P_{\pm}(t; x, \hat{p})$ и $E(x, t)$.

В нескольких ближайших абзацах мы получим аппроксимацию системы Максвелла — Блоха, пригодную для большинства физических ситуаций. В этой схеме аппроксимации первым шагом является вычисление нерезонансного отклика двухуровневой «молекулы» на быстроосциллирующее электрическое поле. В результате этого отклика индуцируются микроскопические диполи, и следующим шагом является определение подходящего оператора $\langle \cdot \rangle$; переводящего эти индуцированные диполи в макроскопическую поляризацию. Наконец, мы вычисляем модуляцию амплитуды электрического поля, возникающую из-за индуцированной поляризации. В этих вычислениях мы не будем стараться проследить за всеми константами; вместо этого на каждом шаге мы будем включать их в некоторую константу G .

Прежде всего предположим, что при усреднении любая компонента микроскопических диполей, перпендикулярная приложенному полю, дает нуль. Другими словами, мы предположим, что индуцированная *макроскопическая* поляризация направлена одинаково с приложенным полем, так что \mathbf{E} , первоначально направленное в z -направлении, сохраняет свое направление и в дальнейшем. Далее, для простоты мы положим $N = -1$ и приведем систему Максвелла — Блоха к более простому виду

$$\partial_{tt} P_+ = -\omega^2 P_+ + \frac{2\omega q}{\hbar} (\cos \theta) E, \quad (2.34a)$$

$$(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) E = G \langle q\omega^2 (\cos \theta) P_+ - \omega q^2 (\cos^2 \theta) E \rangle, \quad (2.34b)$$

где $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}z$, $q = |\mathbf{q}|$, и $\cos \theta = \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$. Система (2.34) эквивалентна совокупности классических гармонических осцилляторов, взаимодействующих с электрическим полем, т. е. модели, являющейся основой теории дисперсии Лоренца. (Более тщательный учет величины N лишь изменил бы значение коэффициента при нелинейности. Вспомним, что в случае самоиндуцированной прозрачности наличие резонанса требовало от нас весьма тщательного учета динамики среды. Здесь, поскольку система далека от резонанса, точная модель среды гораздо менее важна. Для качественных оценок достаточно линейных осцилляторов.)

Рассмотрим поле E вида

$$E = E_c \cos(k_c x - \bar{\omega}_c t) + E_s \sin(k_c x - \bar{\omega}_c t), \quad (2.35)$$

где амплитуды (E_c и E_s) являются медленно меняющимися функциями (в масштабах несущей частоты $k_c x$ и $\bar{\omega}_c t$). Здесь $\bar{\omega}_c = \bar{\omega}(k_c)$ — закон дисперсии полной линеаризованной системы, который будет вычислен ниже. Чтобы подсчитать индуцированную поляризацию P_+ , нужно подставить медленно меняющиеся амплитуды E_c и E_s в (2.34), считая их постоянными; поскольку поле E не находится в резонансе со средой, будем иметь

$$P_+ \simeq \frac{2\omega q \cos \theta}{\hbar (\omega^2 - \bar{\omega}_c^2)} E. \quad (2.36)$$

Подставляя это приближение в (2.34b), получаем уравнение для E

$$(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) E = G \langle (\cos^2 \theta) E \rangle. \quad (2.37)$$

Далее, мы уточним выбор микро-в-макро оператора $\langle \cdot \rangle$, являющегося в этой модели причиной возникновения нелинейности. Вспомним, что совокупность диполей, индуцированных электрическим полем, должна быть ориентирована так же, как и поле. Тепловое возбуждение препятствует этому процессу ориентации. Мы предположим, что установилось тепловое рав-

новесие, и используем технику Густафсона и др. [2.49] для того, чтобы вычислить среднюю поляризацию. Энергия u одного из таких индуцированных диполей в \bar{E} -поле имеет вид

$$u = -\mathbf{P}_+ \cdot \mathbf{E} = G \cos^2 \theta E^2.$$

Если рассмотреть случай, где процесс ориентации происходит медленно (по сравнению с масштабом $\bar{\omega}_c t$), то можно усреднить по периоду быстрых осцилляций

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' u(x, t') = \frac{1}{2} G \cos^2 \theta (E_c^2 + E_s^2).$$

Используя \bar{u} , определим оператор $\langle \cdot \rangle$ при помощи функции распределения Больцмана

$$\langle f(\cdot) \rangle = \frac{\int_{-1}^1 f(\theta) \exp[-\bar{u}(\theta)] d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 \exp[-\bar{u}(\theta)] d(\cos \theta)}. \quad (2.38)$$

Так определенный оператор $\langle \cdot \rangle$ приводит к макроскопическому полевому уравнению

$$(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) \mathbf{E} = G \langle \cos^2(\cdot) \rangle \mathbf{E}, \quad (2.39)$$

где

$$\langle \cos^2(\cdot) \rangle = \frac{\int_{-1}^1 \cos^2 \theta \exp\left[-\frac{G}{2} \cos^2 \theta (E_c^2 + E_s^2)\right] d(\cos \theta)}{\int_{-1}^1 \exp\left[-\frac{G}{2} \cos^2 \theta (E_c^2 + E_s^2)\right] d(\cos \theta)}.$$

При не слишком больших амплитудах поля можно разложить эти экспоненты и записать $\langle \cos^2(\cdot) \rangle$ в виде

$$\langle \cos^2(\cdot) \rangle \simeq \frac{1}{3} + G(E_c^2 + E_s^2).$$

Осталось найти дисперсионное соотношение и получить уравнение для модуляции огибающих E_c и E_s . В комплексной записи полевое уравнение (2.39) принимает вид

$$[(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) + G_1 - G_2(F F^*)] F = 0, \quad (2.40)$$

где $F = F \exp[i(k_c x - \bar{\omega}_c t)]$, и $F = (E_s + iE_c)$. Из (2.40) медленно получаем, что дисперсионное соотношение с учетом нелинейной поправки имеет вид

$$\bar{\omega}^2(k) = c^2 k^2 + G_1(k) - [G_2(k)] F F^*. \quad (2.41)$$

Последним шагом в схеме аппроксимации является сведение уравнения (2.40) к уравнению, описывающему модуляцию по F . Для такого сведения мы предположим, что нелинейность слабая. Если бы ее не было вовсе ($G_2 = 0$), то линейное поле $F = F \exp[i(k_c x - \bar{\omega}_c t)]$ можно было бы разложить в интеграл Фурье,

$$F(x, t) = F(x, t) e^{i[k_c x - \bar{\omega}_c t]} = \int dk e^{i[kx - \bar{\omega}(k)t]} \tilde{F}(k),$$

или, по-другому, делая замену переменных интегрирования $k \mapsto \kappa = k - k_c$,

$$F(x, t) = \int d\kappa \exp\{i[\kappa x - [\bar{\omega}(k_c + \kappa) - \bar{\omega}_c]t]\} \tilde{F}(k_c + \kappa).$$

Поскольку амплитуда $F(x, t)$ является медленно меняющейся функцией от x и t , то $\tilde{F}(k_c + \kappa)$ имеет резкий максимум вблизи значения $\kappa = 0$,

$$F(x, t) \simeq \int d\kappa \exp\left\{i\left[\kappa x - \left(\bar{\omega}'_c \kappa + \frac{\bar{\omega}''_c}{2} \kappa^2 + \dots\right)t\right]\right\} \tilde{F}(k_c + \kappa).$$

Из этой формулы ясно, что огибающая F должна удовлетворять уравнению

$$\left[i(\partial_t + \bar{\omega}'_c \partial_x) + \frac{\bar{\omega}''_c}{2} \partial_{xx} + \dots \right] F = 0. \quad (2.42)$$

Уравнение (2.42) в действительности является общим результатом [2.4]. *В отсутствие резонанса модуляция амплитуды любой линейной диспергирующей волны, состоящей из быстро осциллирующих колебаний с медленно меняющейся огибающей, удовлетворяет линейному уравнению Шрёдингера.* Поскольку наша система слабо нелинейна, нелинейные поправки к дисперсионному соотношению (2.41) дают

$$i(\partial_t + \bar{\omega}'_c \partial_x) F + \frac{\bar{\omega}''_c}{2} \partial_{xx} F + G(FF^*) F = 0. \quad (2.43)$$

Следует подчеркнуть, что область применимости нелинейного уравнения Шрёдингера гораздо шире рассмотренной сейчас модели. Оно применимо к любой слабо нелинейной волне, удовлетворяющей условиям, суммированным в предыдущем абзаце. В силу своей общности оно возникает в различных физических ситуациях, таких, как распространение оптических импульсов [2.50], волн на воде [2.51] и волн в плазме [2.52]. Оно актуально и в технических приложениях, так как моделирует эффекты самофокусировки лазерных импульсов [2.50].

Чтобы получить некоторое представление о солитонах нелинейного уравнения Шрёдингера, рассмотрим его решение типа

простой волны вида

$$F(x, t) = f(x - vt) \exp[i(Kx - \Omega t)].$$

Подставляя это выражение в нелинейное уравнение Шрёдингера (2.43), получаем

$$f'' = - \frac{\partial}{\partial f} \left[\frac{G}{2\bar{\omega}_c''} f^4 + \frac{(\Omega - K\bar{\omega}_c' - K^2\bar{\omega}_c''/2)}{\bar{\omega}_c''} f^2 \right] \quad (2.44)$$

при условии, что скорость импульса v удовлетворяет соотношению

$$v = \bar{\omega}_c' + K\bar{\omega}_c''. \quad (2.45)$$

Если $(G/\bar{\omega}_c'') > 0$, решение уравнения (2.44) имеет вид

$$F = F_s \operatorname{sech} \left(\frac{t - x/v}{\tau} \right) \exp[i(Kx - \Omega t)],$$

где v дается выражением (2.45), $\Omega = K\bar{\omega}_c' + K^2\bar{\omega}_c''/2 - GF_s^2/2$, и $F_s^2 = -\bar{\omega}_c''/Gv^2\tau^2$. В этом случае огибающая поля имеет форму секанса гиперболического с амплитудой F_s и полушириной τ . Такой импульс представляет собой сгусток поля, распространяющийся с постоянной скоростью v , причем его несущая частота и длина волны сдвинуты на Ω и K соответственно.

С другой стороны, если $(G/\bar{\omega}_c'') < 0$, амплитуда F принимает вид

$$F = F_s \operatorname{th} \left(\frac{t - x/v}{\tau} \right) \exp[i(Kx - \Omega t)],$$

где v дается выражением (2.45), $\Omega = K\bar{\omega}_c' + K^2\bar{\omega}_c''/2 - GF_s^2/2$, и $F_s^2 = -\bar{\omega}_c''/Gv^2\tau^2$. В этом случае поле выталкивается из рассматриваемой области, и образуется темное пятно полуширины τ , распространяющееся с постоянной скоростью v [2.53].

В обоих случаях $(G/\bar{\omega}_c'' > 0$ и $G/\bar{\omega}_c'' < 0)$ это уравнение имеет также и многосолитонные решения. Оба случая решаются методом обратной задачи рассеяния [2.23, 2.54].

Нелинейное уравнение Шрёдингера очень важно, и трудно ограничиться лишь несколькими замечаниями о нем. Мы хотим только указать, что это уравнение может возникнуть в системах с парным взаимодействием, приводящим как к дисперсии, так и к нелинейности. В следующем разделе мы рассмотрим один пример из многих типов нелинейных систем — электрическое поле, взаимодействующее с ионной жидкостью.

2.2.2. Солитоны в физике плазмы

Солитоны встречаются в целом ряде областей физики плазмы. Большая часть из них — это магнитно-гидродинамические волны [2.55—2.58], а также ион-акустические волны [2.55,

2.59—2.61]. Как и в наиболее известном примере волн на мелкой воде, изучавшемся первоначально Кортвегом и де Фризом, солитоны в плазменной физике возникают из-за баланса между эффектами возрастания крутизны волн, связанными с нелинейностью, и расползанием возмущений из-за дисперсии.

Из-за недостатка места только ион-акустические [2.59] волны будут подробно разбираться в настоящей работе. В рассматриваемой ситуации ионы испытывают низкочастотные осцилляции вблизи ионной плазменной частоты. Электроны следуют за движением ионов и обеспечивают приблизительную нейтральность заряда. Уравнения здесь имеют следующий вид [2.62]:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot n_i \mathbf{v}_i = 0 \quad (\text{сохранение ионов}), \quad (2.46)$$

где n_i и \mathbf{v}_i — ионная плотность и средняя скорость соответственно;

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -n_e e - \nabla p_e \quad (\text{сохранение электронного импульса}); \quad (2.47)$$

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = n_i Z \mathbf{E} - \nabla p_i \quad (\text{сохранение ионного импульса}), \quad (2.48)$$

где Ze — заряд иона, m_i и m_e — ионная и электронная массы соответственно, p_i и p_e — давления и \mathbf{E} — электрическое поле, возникающее из-за отсутствия точной нейтральности заряда, т. е.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e (Zn_i - n_e). \quad (2.49)$$

В этих выражениях мы пренебрегаем столкновениями; мы также считаем, что в рассматриваемом случае ионная температура много меньше электронной (т. е. $T_i = 0$), и пренебрегаем давлением p_i . Ток определяется выражением

$$\mathbf{j} = e (Zn_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e); \quad (2.50)$$

если пренебречь членами вида $(m_e/m_i)(n_i Z^2/n_e)$ (малыми по сравнению с единицей), то получим

$$\frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{E} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e. \quad (2.51)$$

Ограничимся рассмотрением ситуации, где токи в плазме отсутствуют, т. е. $\mathbf{j} = 0$. Кроме того, для давления электронов используем обычное изотермическое уравнение состояния $p_e = n_e k T_e$.

Рассмотрим пространственно одномерную задачу и введем безразмерные переменные

$$x' = x/L, \quad t' = t/T, \quad v' = vT/L, \quad E' = eLE/kT_e, \quad n'_i = n_i/n_0,$$

где n_0 — средняя плотность ионов, $L^2 = kT_e/4\pi n_0 e^2$ и $T^{-2} = 4\pi n_0 e^2 Z/m$. Уравнения (2.46), (2.48), (2.51) и (2.49) примут соответственно вид

$$\frac{\partial n'_i}{\partial t'} + \frac{\partial n'_i v'_i}{\partial x'} = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t'} + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x'} = E', \quad (2.53)$$

$$E' + \frac{1}{n'_e} \frac{\partial n'_e}{\partial x'} = 0, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial x'} = Z n'_i - n'_e. \quad (2.55)$$

Линеаризация этих уравнений вблизи $n'_i = n'_e = 1$ и $v'_i = E' = 0$ вместе с предположением, что все величины зависят только от $kx' - \omega t'$, приводит к дисперсионному соотношению (Z полагается равным 1)

$$V^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = 1 - \omega^2. \quad (2.56)$$

Если, с другой стороны, предположить, что суммарная нейтральность заряда имеет место при условии $Z n'_i = n'_e$, то отсюда вытекает отсутствие дисперсии $V = \omega/k = 1$. В то же время суммарная нейтральность заряда в полных нелинейных уравнениях (2.52)–(2.55) приводила бы к уравнению (2.52) плюс уравнение

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x'} = -\frac{1}{n'_i} \frac{\partial n'_i}{\partial x'}. \quad (2.57)$$

Известно, что система (2.52), (2.57) приводит к нарастающему увеличению крутизны вплоть до образования ударных волн. Так что именно отсутствие полной зарядовой нейтральности определяет наличие дисперсии и, предупреждая образование ударных волн, приводит к неизменности профиля волны во времени.

Для слабой дисперсии соотношение (2.56) дает

$$k = \omega + \frac{1}{2} \omega^3 \quad (2.58)$$

и $kx' - \omega t' = (x' - t') + \frac{1}{2} \omega^3 x'$. Полагая

$$\xi = \omega(x' - t'), \quad \eta = \omega^3 x', \quad (2.59)$$

приводим уравнения (2.52) — (2.55) к виду ($n'_i = n$, $v'_i = u$)

$$-\frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{\partial(nu)}{\partial \xi} + \omega^2 \frac{\partial nu}{\partial \eta} = 0, \quad (2.60)$$

$$-\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \omega u \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \omega^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = E, \quad (2.61)$$

$$\frac{\omega \partial n'_e}{\partial \xi} + \omega^3 \frac{\partial n'_e}{\partial \eta} = -n'_e E, \quad (2.62)$$

$$\omega \frac{\partial E}{\partial \xi} + \omega^3 \frac{\partial E}{\partial \eta} = n - n'_e. \quad (2.63)$$

Рассмотрим теперь возмущенные решения этих уравнений. Легко видеть, что разложения искомым величин должны иметь следующий вид:

$$n = 1 + \omega^2 n^{(1)} + \omega^4 n^{(2)} + \dots, \quad (2.64)$$

$$u = \omega^2 u^{(1)} + \omega^4 u^{(2)} + \dots, \quad (2.65)$$

$$n_e = 1 + \omega^2 n_e^{(1)} + \omega^4 n_e^{(2)} + \dots, \quad (2.66)$$

$$E = \omega^3 E^{(1)} + \omega^5 E^{(2)} + \dots. \quad (2.67)$$

Подстановка этих разложений в уравнения (2.60) — (2.63) приводит к уравнениям первого приближения

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial \xi} = -E^{(1)}, \quad n^{(1)} = n_e^{(1)}. \quad (2.68)$$

В следующем приближении получим

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} n^{(1)} u^{(1)} + u^{(2)} - \frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} - u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = -E^{(2)}, \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial n_e^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial \eta} = -n_e^{(1)} E^{(1)} - E^{(2)}, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial E^{(1)}}{\partial \xi} = n^{(2)} - n_e^{(2)}. \quad (2.72)$$

Эти уравнения сводятся к уравнению Кортевега — де Фриза для $u^{(1)}$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0. \quad (2.73)$$

В соответствии с соотношениями (2.68) аналогичные уравнения имеют место для $n^{(1)}$ и $n_e^{(1)}$.

Простейшее решение — уединенная волна, являющаяся солитоном для уравнения КдФ, $u^{(1)} = f(x' - u_0 t') = g(u_0 \xi - a\eta)$,

где $a = (u_0 - 1)/\omega^2$; в этом случае уравнение (2.73) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-ag' + u_0gg' + \frac{1}{2}u_0^3g''' = 0, \quad (2.74)$$

интегрирование которого дает

$$g = \frac{3a}{u_0} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{a}{2u_0^3}} (u_0\xi - a\eta) \right]. \quad (2.75)$$

Для плотности ρ это дает

$$\rho = n_0\omega^2n^{(1)} = \delta n \operatorname{sech}^2[(x - vt)/D], \quad (2.76)$$

где

$$v = u_0 \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}, \quad (2.77)$$

$$u_0 = 1 + \frac{1}{3} \frac{\delta n}{n_0}, \quad (2.78)$$

$$D^2 = k_D^2 \left(\frac{2u_0^3}{u_0 - 1} \right) = K_D^2 \frac{6n_0}{\delta n}. \quad (2.79)$$

Видно, что ширина солитона ($\sim D$) уменьшается с увеличением амплитуды δn . Кроме того, скорость v уединенной волны растет с увеличением δn . Эти результаты были экспериментально проверены. Для значений $n_0 \sim 10^9 - 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 3 \text{ эВ}$ и $T_i < 0,2 \text{ эВ}$ Икези [2.63] получил подтверждение соотношения между скоростью импульса и его шириной. В этих экспериментах $\delta n/n_0 \approx 0,2$. Наблюдалось также распадение импульса, и число импульсов находится в соответствии с теоретическими предсказаниями, полученными из решения задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза.

2.3. Обратная задача рассеяния и интегралы движения

Большая часть этой книги посвящена приложению метода обратной задачи рассеяния к нелинейным системам. Здесь мы вводим и обосновываем его применение в физике самоиндуцированной прозрачности. Беглое знакомство с остальной частью этой книги показывает, что возможности спектрального метода гораздо шире, чем данное его приложение в оптике; тем не менее мы верим, что многие характерные черты метода будут казаться менее таинственными, будучи описанными в физическом контексте.

2.3.1. Физическое введение в метод обратной задачи рассеяния

Прямая задача самоиндуцированной прозрачности — найти решение $[E(t, x), A(t, x; \xi), B(t, x; \xi)]$ системы

$$\partial_x E = -\langle 2AB^* \rangle; \quad i\partial_t \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\xi & iE \\ -iE^* & -2\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (2.80a, b)$$

со следующими граничными условиями:

$$E(t, x)|_{x=0} = E_0(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \pm \infty; \quad (2.81a)$$

$$\begin{pmatrix} A(t, x; \xi) \\ B(t, x; \xi) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\xi t} \end{pmatrix} \quad \text{при } t \rightarrow -\infty. \quad (2.81b)$$

Здесь $\langle f(\cdot) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(\xi) d\xi$. Уравнения (2.80) являются комплексной записью системы (2.8). E обозначает медленно меняющуюся комплексную огибающую электрического поля. Напомним, что это поле приведено в резонанс со средой, которая описывается как совокупность двухуровневых квантовых осцилляторов. A и B обозначают медленно меняющиеся амплитуды соответственно верхнего и нижнего квантовых уровней. Они определяют поляризацию λ и число инверсий N по формулам

$$\begin{aligned} \lambda(t, x; \xi) &= -2A(t, x; \xi)B^*(t, x; \xi), \\ N(t, x; \xi) &= |A(t, x; \xi)|^2 - |B(t, x; \xi)|^2. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Параметр ξ есть мера различия между несущей частотой и собственной частотой осциллятора. При точном резонансе $\xi = 0$. Отметим, что такая аппроксимация двухуровневой динамики (A, B) может быть получена из точного двухуровневого описания (α, β) системой (2.1) при помощи схемы аппроксимации, аналогичной той, что была использована в разд. 2.2.1 для вывода блоховских уравнений (2.5)—(2.8). Такое сведение детально обсуждается в [2.64].

Из начальных условий видно, что поле E имеет заданное значение при $x = 0$, в то время как в «отдаленном прошлом» все квантовые осцилляторы находятся на нижнем энергетическом уровне. Такая совокупность осцилляторов описывает среду, ослабляющую поле. (Как уже обсуждалось в разд. 2.2.1, в усиливающей среде большая часть осцилляторов первоначально находится в верхнем состоянии, что позволяет полю извлекать энергию из среды и усиливаться.)

Временно фиксируем координату $x = x_0 > 0$ и рассмотрим огибающую электрического поля E в точке x_0 как функцию времени t . Поле E является локализованным импульсом; следовательно, для больших отрицательных времен поле пренебрежимо

мало в точке x_0 , поскольку импульс еще не дошел до нее. Для таких отрицательных времен двухуровневые осцилляторы вблизи x_0 остаются в нижнем состоянии, а их поляризация нулевой. При увеличении времени поле E достигает точки x_0 и в силу взаимодействия (2.80b) возбуждает верхние уровни квантовых осцилляторов вблизи x_0 . Потом при больших положительных временах поле в точке x_0 вновь делается нулевым, поскольку локальный импульс E уже миновал, и квантовые осцилляторы вблизи x_0 остаются в состоянии, являющемся смесью двух уровней¹⁾

$$\begin{pmatrix} A(t, x_0; \zeta) \\ B(t, x_0; \zeta) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\bar{b}(\zeta; x_0) e^{-i\zeta t} \\ \bar{a}(\zeta; x_0) e^{i\zeta t} \end{pmatrix} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (2.83)$$

Здесь коэффициенты (\bar{a} и \bar{b}) определяются видом импульса E ; однако поскольку величина $|A|^2 + |B|^2$ является константой по t (сохранение вероятности), она должна быть равной своему начальному значению 1, что налагает на коэффициенты \bar{a} и \bar{b} ограничение

$$|\bar{a}(\zeta; x_0)|^2 + |\bar{b}(\zeta; x_0)|^2 = 1. \quad (2.84)$$

Отметим, что после прохождения импульса через точку x_0 поляризация $\lambda = 2i\bar{b}a^* \exp(-2i\zeta t)$ осциллирует по t ; среда «звонит». Этот «звон» является возбужденным состоянием среды. Поскольку энергия всей системы (поле плюс среда) сохраняется, то приращение энергии среды должно происходить из-за потери энергии полем. В самом деле, закон сохранения

$$\partial_t \langle N(t, x) \rangle + \frac{1}{2} \partial_x |E(t, x)|^2 = 0,$$

немедленно вытекающий из (2.80), (2.82), дает такой баланс. Здесь $|E(t, x)|^2$ представляет собой плотность энергии поля, тогда как число инверсий N — это приращение энергии среды сверх энергии основного состояния.

В последнем абзаце мы описали типичную ситуацию; однако можно представить себе такие специальные импульсы, которые, проходя через точку x_0 , возвращают среду в точности в основное состояние. Для таких специальных импульсов $b(\zeta; x_0) = 0$ для всех (вещественных) значений «параметра расстройки» ζ . Из соотношения (2.84) следует, что $|a(\zeta; x_0)| = 1$ для таких импульсов и что единственное долговременное изменение среды (в точке x_0) — это фазовый сдвиг в нижнем состоянии. Среда не становится «звонящей», и энергия не переходит от поля к среде. Если это происходит для всех положений x_0 , то среда окажется прозрачной для такого специального класса импульсов,

¹⁾ Такие обозначения, не вполне естественные здесь, выбраны для соответствия с [2.22], [2.24], [2.25], [2.43], [2.65].

и резонанс приведет к прозрачности среды. Такая замечательная ситуация действительно встречается и приводит к *sech*-импульсам, обсуждавшимся в разд. 2.2.1; более того, как мы увидим, эти специальные импульсы могут быть найдены без привлечения посторонних методов. В конечном счете сама нелинейная система разлагает поле на две составляющие, одна из которых отдает энергию среде и оставляет «звенеть» осцилляторы, тогда как другая составляющая сама по себе приобретает специальную солитонную форму, приводящую к распространению без искажений. Такая ситуация на самом деле является типичной; легче всего это увидеть, решая нелинейную систему (2.80) при помощи метода обратной задачи.

Метод обратной задачи идет гораздо дальше наблюдений двух последних абзацев в использовании динамики двухуровневых осцилляторов. Идея состоит в том, чтобы рассматривать среду в точке $x = x_0$ в момент времени t (отсчет времени ведется от прохождения импульса через точку x_0) как измерительный прибор, определяющий поле E в точке x_0 для всех времен t . Ясно, что импульс E определяет коэффициенты рассеяния \bar{a} и \bar{b} , но может ли измерение реакции среды на импульс (т. е. измерение $\bar{a}(\xi; x_0)$ и $\bar{b}(\xi; x_0)$, коэффициентов рассеяния в точке x_0 при всех значениях «параметра расстройки» ξ) определить импульс E ? Оказывается, что некоторая информация в точке x , известная как данные рассеяния $\Sigma(x)$, определяет $E(t, x)$ для всех t . Более того, $\Sigma(x)$ можно вычислить явно по $\Sigma(x_0)$, данным рассеяния в точке x_0 . Итак, измерение $\Sigma(x_0)$ определяет $E(t, x)$ для всех x и t . Перейдем теперь к подробностям.

Прежде всего мы перепишем уравнения двухуровневой динамики как задачу на собственные значения,

$$\left[i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_t - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & E(t, x_0) \\ E^*(t, x_0) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

где x_0 фиксированно, и E считается известной функцией от t (как, например, при $x_0 = 0$). Хотя эта задача на собственные значения и не является самосопряженной, известны ее спектральные свойства. Ее спектр состоит из непрерывного спектра на всей вещественной оси ξ , а также из конечного числа связанных состояний в верхней полуплоскости, $\text{Im}\{\zeta\} \geq 0$. «Потенциал» E определяет следующие спектральные данные Σ :

$\Sigma = \{R(\zeta)$ (для всех вещественных ζ);

$$\zeta_j \text{ и } \bar{c}_j \text{ [для всех } j \in \{1, 2, \dots, N\} \}.$$

Здесь $R(\zeta) \equiv \bar{b}(\zeta)/[\bar{a}(\zeta)]^*$, N обозначает число связанных состояний. (Если E имеет компактный носитель по t , то $\bar{c}_j = d \{ \bar{b}(\zeta)/[\bar{a}(\zeta)]^* \} / d\zeta |_{\zeta=\zeta_j}$)

Важнейшая черта метода обратной задачи — понимание того, что отображение $E \rightarrow \Sigma$ обратимо; другими словами, данные Σ однозначно определяют E для любого момента времени. Такая обратимость позволяет ввести общеизвестную сейчас диаграмму метода обратной задачи рассеяния (рис. 2.2). На этой диаграмме непосредственное интегрирование изображается стрелкой под номером (4), в то время как интегрирование методом обратной задачи рассеяния изображается путями (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3). Путь (1) отображает заданное поле $E(t, x = 0)$ в данные рассеяния $\Sigma(x = 0)$. Этот шаг аналогичен прямой задаче

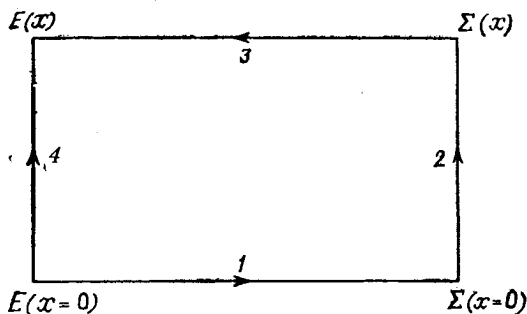


Рис. 2.2. Схема метода обратной задачи рассеяния.

рассеяния квантовой механики (и столь же труден). Вдоль пути (2) зависимость E от x , даваемая уравнением (2.80а), используется для нахождения зависимости от x спектральных данных Σ . Одно из чудес метода обратной задачи — тривиальность зависимости Σ от x , так что $\Sigma(x)$ может быть найдена явно. Этот шаг (2) со всеми подробностями обсуждается, в частности, в других статьях настоящей книги. Здесь мы лишь приведем окончательный результат, полученный в [2.43], для системы уравнений самониндуцированной прозрачности:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(x) &= \left\{ R(\zeta, x) = R(\zeta, x=0) \exp \left[-\frac{i}{2} x \int_{\Gamma_u} \frac{g(\zeta') d\zeta'}{\zeta - \zeta'} \right]; \right. \\ &\quad \zeta_j(x) = \zeta_j(x=0); \\ &\quad \left. \bar{c}_j(x) = \bar{c}_j(x=0) \exp \left(-\frac{i}{2} x \int_{\Gamma_u} \frac{g(\zeta') d\zeta'}{\zeta_j - \zeta'} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Здесь Γ_u — контур в ζ -плоскости, идущий вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$ и обходящий снизу точку $\zeta' = \zeta$. Отметим особо, что собственные значения $\{\zeta_j\}$ не зависят от x , а зависимость от x величин R и \bar{c}_j весьма просто выражается через функцию распределения $g(\cdot)$.

На последнем шаге (3) нужно восстановить $E(\cdot, x)$ по $\Sigma(x)$, что вполне аналогично «обратной задаче рассеяния» квантовой механики. В приложении мы приведем вывод метода обратной задачи, являющейся, на наш взгляд, более коротким, ясным и понятным, чем обычно встречающиеся в литературе. Здесь мы приведем лишь окончательные формулы.

Во-первых, по данным рассеяния Σ строится ядро $\hat{R}(t+y)$,

$$\hat{R}(t+y) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi) \exp[-i\xi(t+y)] d\xi - i \sum_{l=1}^N \bar{c}_l \exp[-i\xi_l(t+y)], \quad (2.86)$$

где мы указываем зависимость от x . По заданному ядру $\hat{R}(t+y)$ ищется решение

$$K = \begin{pmatrix} K_{22}^* & K_{12} \\ -K_{12}^* & K_{22} \end{pmatrix}$$

интегрального уравнения Марченко

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}(t+y) \\ 0 \end{pmatrix} + K(t, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^t K(t, y') \begin{pmatrix} \hat{R}(y'+y) \\ 0 \end{pmatrix} dy', \quad t > y. \quad (2.87)$$

Наконец, величина $E(t, \cdot)$ вычисляется по формуле

$$E(t, \cdot) = 4K_{12}(t, t). \quad (2.88)$$

Последние три формулы, вместе с зависимостью данных рассеяния от x , даваемой формулами (2.85), завершают описание шагов (2) и (3). В следующем разделе мы используем эти формулы для анализа эволюции поля E от его начального профиля до превращения в бегущую волну.

2.3.2. Физическая информация, даваемая методом обратной задачи

Если распределение $g(\cdot)$ известно, данные рассеяния $\Sigma(x=0)$ определяют $\Sigma(x)$ согласно формулам (2.85). Этот факт приводит нас к идее рассматривать среду при $x=0$ как прибор, измеряющий $\Sigma(x=0)$. По этим результатам измерения мы можем построить $E(t, x)$, используя (2.85) и уравнение Марченко.

Рассмотрим сначала импульс специальной формы, возвращающий после его прохождения все осцилляторы в измерительном приборе при $x = 0$ в исходное положение. Для такого специального импульса $R(\xi, x = 0)$ равно нулю для всех вещественных ξ , и ядро $\tilde{R}(t + y, x = 0)$ сводится к конечной сумме по дискретному спектру. Если все сводится к конечной сумме при $x = 0$, то в силу (2.85) \tilde{R} будет конечной суммой и при любых x . В этом случае уравнение Марченко сводится к конечномерной линейной алгебраической системе [2.5, 2.11, 2.66], решения которой дают N -солитонные формулы. (Здесь N обозначает количество собственных значений и размер алгебраической системы.) Эти N -солитонные решения являются импульсами, не претерпевающими искажений.

Односолитонная волна получается, если имеется ровно одно собственное значение, $\xi_1 = \xi + i\eta$. В этом случае форма волны дается (см. [2.67], [2.68]) равенством

$$E(x, t) = 4\eta \exp[-i(\varphi_0 + \omega_1 x - 2\xi t)] \operatorname{sech}[\theta_0 + \omega_2 x - 2\eta t]. \quad (2.89)$$

Здесь $\omega_1 + i\omega_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_1 - \xi')^{-1} g(\xi') d\xi'$, а константы θ_0 и φ_0

связаны с нормировочной константой $\bar{c}_1 = -2i\eta \exp(-\theta_0) \cdot \exp(i\varphi_0)$. Это — комплексный импульс, амплитуда которого $4\eta \operatorname{sech}(\cdot)$; он распространяется со скоростью $2\eta/\omega_2$, а его фазовая скорость равна $2\xi/\omega_1$. Подчеркнем, что мнимая часть собственного значения ξ_1 определяет максимум амплитуды E и с точностью до ω_2 скорость огибающей, в то время как вещественная часть ξ_1 (с точностью до множителя ω_1) определяет фазовую скорость. В литературе это решение известно под разными названиями — солитон, кинк, 2π -импульс; оно аналогично 2π -импульсу разд. 2.2.1 за исключением того, что фаза φ здесь не обязана быть равной нулю. Нелишне отметить, что линейная зависимость этого фазового члена от пространственных и временных переменных подтверждает сделанные в работах [2.13], [2.14], [2.38] предположения, а также экспериментальные результаты [2.40] — [2.42].

Если имеется более одного собственного значения, возникают многосолитонные решения. Интересен частный случай, где два солитона имеют одинаковую скорость огибающей. Такой импульс имеет нулевую площадь и известен в литературе под различными именами — «0 π -импульс», «дублет», «бризер». Его можно рассматривать как двухсолитонное связанное состояние, или как локализованную волну с внутренней степенью свободы. Его характерные черты лучше всего могут быть описаны в упрощенной ситуации, где нет доплеровского расползания. В этом случае $g(\xi) = \delta(\xi)$, и, как мы видели, динамика сводится к уравнению sine-Gordon (2.21). Импульс вещественный, а соб-

ственные значения или лежат на мнимой оси и представляют солитоны, или встречаются сопряженными парами ($\xi, -\xi^*$) и представляют «бризеры». Эти бризеры перемещаются с постоянной скоростью без затухания и возникают при взаимодействии, вызывающем только сдвиг фазы — в точности как соли-

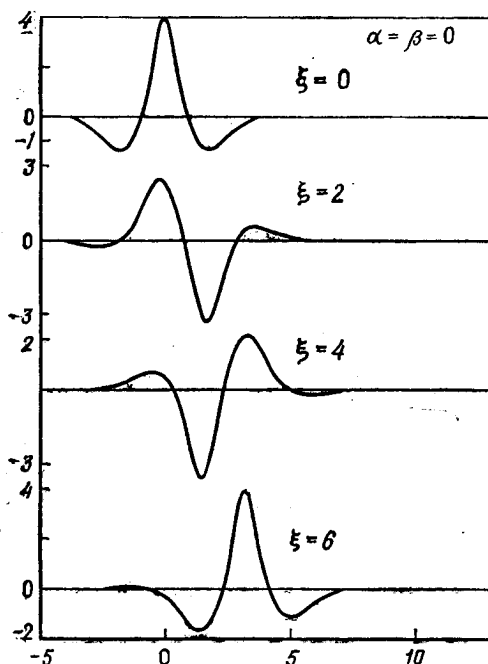


Рис. 2.3. График решения типа бризера.

тоны. Вдобавок они пульсируют, как это видно из аналитической формулы (см. [2.18])

$$E(t, x) = 8\eta \operatorname{sech} \theta \frac{\sin \varphi + (\eta/\xi) \operatorname{th} \theta \cos \varphi}{1 + (\eta/\xi)^2 \operatorname{sech}^2 \theta \cos^2 \varphi},$$

где

$$\varphi \equiv \varphi_0 + \omega_1 x - 2\xi t,$$

$$\theta \equiv \theta_0 + \omega_2 x - 2\eta t.$$

Типичный график изображен на рис. 2.3. Такой бризер имеет 4 степени свободы: величина $\operatorname{Re}\{\zeta_1\} = -\operatorname{Re}\{\zeta_2\} = \xi$, определяющая фазовую скорость, связана с эффектом пульсации; $\operatorname{Im}\{\zeta_1\} = \operatorname{Im}\{\zeta_2\} = \eta$ определяет амплитуду; комплексное число \bar{c}_1 определяет положение импульса. Из формул разд. 2.3.3 можно вывести, что энергия бризера немного меньше, чем энергия двухсолитонного состояния; поэтому о бризере часто говорят как

о связанном двухсолитонном состоянии. Эффект пульсации может рассматриваться как проявление наличия внутренней степени свободы. Такая точка зрения превалирует среди изучающих квантованное уравнение sine-Gordon в качестве модели нелинейной теории поля, поскольку лишние степени свободы являются возможным источником спектра масс (см. [2.32], [2.33], [2.67]).

В общем случае осцилляторы, входящие в наш измерительный прибор при $x=0$, после прохождения импульса не все вернутся в основное состояние, но останутся «звенеть» в некотором смешанном состоянии. В этом общем случае структура решения может все же быть получена при помощи уравнений Марченко. Хотя $R(\xi, x)$ и не равно нулю, в ядре R все же доминируют дискретные составляющие, поскольку дискретная сумма экспоненциальна при больших x , в то время как вклад от непрерывного спектра много меньше. (Для большинства функций распределения g этот вклад экспоненциально мал в большинстве областей пространства. В худшем случае он убывает степенным образом.) Таким образом, для больших x общий импульс E распадается в сумму солитонов и бризеров, упорядоченных по скорости, а также затухающего вклада от непрерывного спектра, единственное реальное значение которого состоит в том, чтобы обеспечить причинность [2.43]. Но гораздо более важной характерной чертой поля E в ослабителе является наличие дискретных составляющих. (В усиливающей среде непрерывные составляющие более существенны. В этом случае могут оказаться полезными различные асимптотические вычисления [2.25, 2.27, 2.28], использующие метод стационарной фазы.)

2.3.3. Гамильтоново описание и интегралы движения

Системы, допускающие солитоны, обладают бесконечным семейством законов сохранения. Эти сохраняющиеся величины могут быть использованы [2.68] для предсказания прямо по начальным данным скорости солитонов, возникающих в итоге из этих начальных данных. Такое применение законов сохранения было весьма полезно для интерпретации первых численных результатов в квантовой оптике самоиндуцированной прозрачности. Позднее было показано, что бесконечное семейство законов сохранения является проявлением полной интегрируемости нелинейной системы [2.69—2.71]. В этом последнем разделе мы обсудим связи между физической информацией, полученной из законов сохранения в первых исследованиях, и математически точной формулировкой, использующей обратную задачу рассеяния для демонстрации полной интегрируемости уравнений движения.

Напомним некоторые свойства вполне интегрируемых конечномерных гамильтоновых систем. Пусть S_{2n} обозначает $2n$ -мерное фазовое пространство; рассмотрим гамильтонову систему на S_{2n} , порожденную гамильтонианом $H: S_{2n} \rightarrow R$,

$$\frac{d}{dt}z = T\nabla_z H, \quad (2.90)$$

где $Z = (Q, P) \in S_{2n}$, матрица $T \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, и I обозначает единичную $n \times n$ -матрицу. Интеграл движения E для этой гамильтоновой системы есть вещественная функция на фазовом пространстве, $E: S_{2n} \rightarrow R$, постоянная вдоль интегральных кривых системы (2.90), т. е. если $z(t)$ обозначает решение системы (2.90), то $E(z(t))$ не зависит от времени t . Гамильтонова система в S_{2n} называется *вполне интегрируемой*, если она обладает n интегралами движения $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, которые образуют независимое семейство, причем любые два члена этого семейства находятся в инволюции¹⁾ [2.72, 2.73].

Вполне интегрируемые системы обладают многими замечательными свойствами [2.73, 2.74]. Интегральные кривые лежат на поверхностях $\{E_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots, n\}$, которые в том случае, когда они компактны, являются (топологически) n -мерными торами (n -мерными поверхностями в фазовом пространстве S_{2n}). С этими торами непосредственно связана координатная система (θ, J) , получающаяся из координат (Q, P) каноническим преобразованием [2.73]. Действительно, поверхности $J = \text{const}$, т. е. $\{J_1 = C_1, J_2 = C_2, \dots, J_n = C_n\}$ для констант $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ в точности определяют эти торы. *Переменные действия* (J) нумеруют торы, в то время как *угловые переменные* (θ) задают положение фазовой точки на этих торах.

Поскольку гамильтонов поток (2.90) оставляет эти торы неизменными, переменные действия J должны быть интегралами движения для этой гамильтоновой системы. Аналитически это выражается в том, что гамильтониан H , выраженный через переменные (θ, J) , зависит только от J и не зависит от θ . Поскольку отображение $(Q, P) \rightarrow (\theta, J)$ каноническое, уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\theta} H \\ \nabla_J H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Вещественные функции $\{E_1, \dots, E_n\}$ на фазовом пространстве образуют *независимое семейство*, если градиенты этих функций линейно независимы. Говорят, что две функции E и F находятся в инволюции, если их скобки Пуассона равны нулю,

$$\{E, F\}_J = (\nabla_z E, T\nabla_z F) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial E}{\partial Q_k} \frac{\partial F}{\partial P_k} - \frac{\partial E}{\partial P_k} \frac{\partial F}{\partial Q_k} \right] = 0.$$

Заметьте, в частности, что $J = 0$ и что $\omega = \nabla_J H$ есть функция только от J ; следовательно, θ_k растет линейно по t с коэффициентом ω_k . Более того, поскольку переменные θ являются угловыми переменными на торе, величины $\{\omega_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ представляют собой частоты. Таким образом, показано, что движение в фазовом пространстве квазипериодично по t с базисными частотами $\omega = \nabla_J H$. Квазипериодичность довольно регулярна; например, начальные состояния «почти повторяются» с течением времени — повторяемость типа той, что была обнаружена в первоначальных численных экспериментах ФПУ [2.9]. Ограниченность объема главы не позволяет нам здесь обсудить связь с этими экспериментами; такое обсуждение можно найти в [2.75].

Поскольку переменные действия различают торы, на которых лежат траектории, и стало быть задают их радиусы, эти переменные связаны с амплитудами колебаний. Кроме того, они определяют частоты колебаний посредством формулы $\omega = \nabla_J H$. Таким образом, они несут наиболее важную информацию о динамике системы. Наоборот, начальные значения угловых переменных, задающие положение точки на торе, несут гораздо менее важную информацию. В действительности переменные действия измеряют площадь, охватываемую базисными циклами тора, которая дается формулой

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{k\text{-й цикл}} P \cdot dQ.$$

В сущности именно из-за такого определения переменные действия не только являются интегралами движения для гамильтоновой системы (2.90), но также проявляют замечательную устойчивость по отношению к адиабатическим (медленным) возмущениям динамической системы. В самом деле, они остаются почти постоянными при указанных возмущениях с гораздо большей точностью, чем другие интегралы движения, например энергия [2.72, 2.76]. Это свойство устойчивости позволяет брать переменные действия в качестве основы многих вычислений теории возмущений в механике.

Переменные действие — угол, описывающие осцилляторы с одной степенью свободы и линейные системы взаимодействующих гармонических осцилляторов, хорошо известны [2.76, 2.77]. В [2.78], [2.79] мы пытались рассмотреть переменные действие — угол для систем с солитонами по аналогии с этими привычными системами.

После того как мы перечислили основные свойства вполне интегрируемых гамильтоновых систем, вернемся к уравнению sine-Gordon, которое, как мы видели, возникает как предел уравнений самоиндуцированной прозрачности в отсутствие

неоднородного расширения. Поэтому эту систему можно использовать как простую модель, чтобы проиллюстрировать пользу высших законов сохранения в квантовой оптике [2.18, 2.80]. Наша цель здесь — объяснить эти первоначальные вычисления с точки зрения полной интегрируемости.

Уравнение sine-Gordon для электрического поля E имеет вид¹⁾

$$\frac{d}{d\tau} E = \sin \int_{-\infty}^z E(z', \tau) dz'.$$

Это уравнение определяет бесконечномерную гамильтонову систему²⁾

$$\frac{d}{d\tau} E = \nabla \frac{\delta H}{\delta E} \quad (2.91)$$

с гамильтонианом H вида

$$H(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \cos \left[\int_{-\infty}^z E(z') dz' - 1 \right] \right\} dz.$$

(Здесь поле E должно удовлетворять граничному условию $\int_{-\infty}^{\infty} E(z') dz' = 2n\pi$ для целого n .) Так же как и в общем случае

самоиндуцированной прозрачности, уравнение sine-Gordon может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния при помощи, по сути дела, той же самой линейной задачи на собственные значения и тех же самых данных рассеяния.

Гамильтонова система (2.91) обладает бесконечным набором интегралов движения. В самом деле, вычисление эволюции по τ данных рассеяния показывает, что величина, обратная коэффициенту прохождения, $a(\xi)$, постоянна по τ при всех значениях ξ . В действительности эта совокупность интегралов не является независимой, поскольку $a(\xi)$ при $\text{Im} \xi > 0$ определяется значением $|a(\xi)|$ на вещественной оси вместе с нулями

¹⁾ Мы заменили обозначения координат $x \rightarrow \tau$, $t \rightarrow z$ для удобства изложения.

²⁾ Обратите внимание, что антисимметрическая матрица T заменяется на антисимметрический оператор $\nabla = \partial/\partial z$, а скобки Пуассона, порожденные T , заменяются на скобки, порожденные ∇ :

$$\{F, G\}_{\nabla} = \left(\frac{\delta F}{\delta E}, \nabla \frac{\delta G}{\delta E} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta E} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta G}{\delta E} - \frac{\delta G}{\delta E} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta F}{\delta E} \right) dz.$$

функции $a(\xi)$ в верхней полуплоскости ξ посредством формулы (см. [2.24])

$$\ln a(\xi) = \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi - \bar{\xi}_j} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(\xi')|^{-2}}{\xi - \xi'} d\xi', \quad \text{Im } \xi > 0. \quad (2.92)$$

Однако совокупность

$$\{\xi_j (j = 1, 2, \dots, N)$$

$$\text{и } \ln |a(\xi)|^{-2} \text{ (для всех вещественных } \xi)\} \quad (2.93)$$

является бесконечным набором независимых интегралов движения. Более того, вычисление показывает, что эти величины находятся в инволюции по отношению к скобкам Пуассона $\{, \}_V$.

Существование такого бесконечного семейства наводит на мысль о полной интегрируемости системы¹⁾. В бесконечномерном случае наличие бесконечного числа интегралов движения необходимо, но не достаточно для полной интегрируемости, поскольку в этом случае трудно усмотреть, что интегралов действительно хватает; тем не менее уравнение sine-Gordon является вполне интегрируемым [2.24, 2.81, 2.82]. Чтобы доказать это, нужно использовать ξ_j и $\ln |a(\xi)|^{-2}$ для определения переменных действия, явно вычислить угловые переменные для каждой переменной действия и проверить, что преобразование от E к этим координатам действие — угол является каноническим отображением (взаимооднозначным, обратимым и сохраняющим скобки Пуассона). Другими словами, нужно построить координатную систему, эквивалентную E , для которой половина степеней свободы является интегралами движения гамильтоновой системы (2.91).

Физическая информация, содержащаяся в интегралах движения семейства (2.93), представляется совершенно ясной. Собственные значения ξ_j задают амплитуды и скорости импульсов, распространяющихся без искажений. Функция $\ln |a(\xi)|^{-2}$ нелинейным образом ассоциируется с амплитудой «звнящей» составляющей поля. Чтобы убедиться в этом, заметим, что сохранение вероятности (2.84) можно переписать в виде $|a(\xi)|^2 = 1 - |R(\xi)|^2$; таким образом, $\ln |a(\xi)|^{-2}$ определяет величину коэффициента отражения $|R|^2$, которая в свою очередь связана с амплитудой «звнящей» компоненты E , и эта связь делается непосредственной для слабых импульсов E . В самом деле, для слабых импульсов $R(\xi)$ сводится к фурье-образу величины E [2.25, 2.26, 2.65, 2.78].

¹⁾ Именно эта идея привела Гарднера, равно как и Захарова и Фаддеева, к построению гамильтонова формализма для уравнения КдФ. [Частные сообщения.]

Хотя физическая информация, содержащаяся в инвариантах движения семейства (2.93), совершенно ясна, эти интегралы выражаются на языке спектральной теории. Для сопоставления с ранними работами по «высшим законам сохранения» было бы желательным выразить явно эти константы через E . К сожалению, явные выражения переменных действия через E для этой совокупности неизвестны; однако весьма явные формулы можно получить для другой совокупности инвариантов движения, связанной с первой.

Ясно, что семейство инвариантов (2.93) определяет интеграл движения $\ln a(\xi)$ посредством формулы (2.92). В свою очередь разложения $\ln a(\xi)$ возле $\xi = 0$ и возле $\xi = \infty$ дают асимптотические представления

$$\ln a(\xi) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} \xi^{2k-1} \quad \text{вблизи } \xi \simeq 0,$$

$$\ln a(\xi) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k-1} (1/\xi)^{2k-1} \quad \text{вблизи } \xi \simeq \infty,$$

где коэффициенты разложения имеют вид

$$D_k \equiv \sum_{j=1}^N \frac{1}{k} [(\xi_j^*)^{-k} - (\xi_j)^{-k}] + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\ln |a(\xi)|^2}{\xi^{k+1}},$$

$$C_k \equiv \sum_{j=1}^N \frac{1}{k} [(\xi_j^*)^k - (\xi_j)^k] + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} d\xi \ln (|a(\xi)|^{-2}) \xi^{k-1}, \quad k = 1, 3, \dots \quad (2.94)$$

Совокупности $\{C_k, k = 1, 3, \dots\}$ и $\{D_k, k = 1, 3, \dots\}$ образуют бесконечные семейства интегралов движения, определяемые переменными действия (2.93). Для такой системы обратимость пока не доказана. Другими словами, неизвестно, определяют ли семейства $\{C_k\}$ или $\{D_k\}$ переменные действия и тем самым эквивалентны ли они переменным действия. Было бы интересно установить такую эквивалентность, поскольку именно эти семейства $\{C_k\}$ и $\{D_k\}$ (а не переменные действия) явно выражаются через поле E , содержат привычные интегралы (такие, как энергия) и были первоначально использованы для извлечения информации из «высших интегралов движения». С другой стороны, суммарная информация, извлекаемая из семейства $\{C_k\}$ и $\{D_k\}$, не известна точно, хотя и ясно, что переменные действия составляют половину (причем наиболее существенную) информации, необходимой для того, чтобы явно проинтегрировать уравнение. Формулы (2.94) для интегралов $\{C_k\}$ и $\{D_k\}$ показывают, что эта проблема эквивалентности может быть переформулирована как проблема моментов [2.24, 2.78]. Определяют ли моменты функции $\ln |a(\xi)|$ функцию $\ln a(\xi)$?

Для более простой системы — цепочки Тоды — мы показали в [2.78], что семейство, аналогичное $\{C_k\}$, определяет переменные действия. Однако это доказательство основывается на представлении $\ln a(\zeta)$ сходящимися степенными, а не асимптотическими рядами, и обобщить его на случай уравнения sine-Gordon не представляется возможным.

Теперь укажем, как семейство $\{D_k\}$ выражается через поле E . Это семейство $\{D_k\}$ определяется $\ln a(\zeta)$ вблизи $\zeta \simeq 0$. Используя технику типа той, что применяется в низкоэнергетической ядерной физике для вычисления «длин рассеяния» [2.24, 2.81, 2.82], выводим тождество

$$\frac{d}{d\zeta} \ln a(\zeta) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\varphi_1(z, \zeta) \psi_2(z, \zeta) + \varphi_2(z, \zeta) \psi_1(z, \zeta)}{a(\zeta)} \right] - 1 \right\} dz. \quad (2.95)$$

Здесь φ и ψ являются решениями задачи на собственные значения (2.80), удовлетворяющими граничным условиям

$$\varphi(z, \zeta) \underset{z \rightarrow -\infty}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta z} \quad \text{и} \quad \psi(z, \zeta) \underset{z \rightarrow +\infty}{\simeq} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta z}.$$

При $\zeta = 0$ можно найти φ и ψ в явном виде:

$$\varphi(z, \tau) = \begin{pmatrix} \cos \int_{-\infty}^z \frac{E(z', \tau)}{2} dz' \\ -\sin \int_{-\infty}^z \frac{E(z', \tau)}{2} dz' \end{pmatrix},$$

$$\psi(z, \tau) = (-1)^n \begin{pmatrix} \sin \int_{-\infty}^z \frac{E(z', \tau)}{2} dz' \\ \cos \int_{-\infty}^z \frac{E(z', \tau)}{2} dz' \end{pmatrix},$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} E(z', \tau) dz' = 2n\pi$. Подстановка этих выражений в (2.95) дает

$$\frac{d}{d\zeta} \ln a(\zeta) \Big|_{\zeta=0} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos \int_{-\infty}^z E(z', \tau) dz' - 1 \right] dz$$

и показывает, что $D_1 = -iH$, где H есть гамильтониан. Аналогичные, но более сложные вычисления дают выражения для D_k через поле E .

Выражение через E семейства $\{C_k\}$ получается из поведения $\ln a(\xi)$ при больших ξ . Используемая здесь техника аналогична методу ВКБ в квантовой механике. Определим, следуя [2.20],

$$F(z, \xi) \equiv \ln [\varphi_1(z, \xi) e^{i\xi z}].$$

Заметим, что $\lim_{z \rightarrow +\infty} F(y, \xi) = \ln a(\xi)$. Преобразование задачи на собственные значения (2.80) приводит к уравнению для F :

$$(2i\xi) \frac{d}{dz} F = E^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 + E \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{E} \frac{d}{dz} F\right).$$

При больших ξ это дает асимптотическое разложение

$$\ln a(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k-1} (1/\xi)^{2k-1},$$

где $\{C_k\}$ выражаются через E . Первые два члена этого разложения суть

$$C_1 = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(z, \tau) dz, \tag{2.96}$$

$$C_3 = \frac{1}{(2i)^3} \int_{-\infty}^{\infty} (|E_z|^2 + |E|^4) dz,$$

и т. д. Эти формулы позволяют выразить интегралы $\{C_k\}$ через начальный профиль импульса $E(z, \tau = 0)$, а это как раз и есть плотности высших законов сохранения [2.18].

Это наблюдение увеличивает важность упоминавшейся выше проблемы эквивалентности. Можем ли мы использовать интегралы $\{C_k\}$, задаваемые начальными данными, для определения переменных действия и тем самым для получения содержащейся в них физической информации — амплитуд и скоростей солитонов, амплитуд и частот «звонящих» компонент?

В приложениях [2.83, 2.84] предполагается, что «звонящим» вкладом можно пренебречь и вдобавок что априори известно — скажем, из теоремы площадей — число солитонов, возникающих из рассматриваемых начальных данных. В этом случае константы $\{C_k\}$ используются для оценки скоростей возникающих

солитонов. Например, если известно, что возникают два солитона, то пара соотношений

$$C_1 = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} |E(z, \tau=0)|^2 dz \simeq [(\xi_1^* - \xi_1)] + [(\xi_2^* - \xi_2)],$$

$$3C_3 = \frac{-3}{(2i)^3} \int_{-\infty}^{\infty} [|E_z|^2 + |E|^4] dz \simeq [(\xi_1^*)^3 - (\xi_1)^3] + [(\xi_2^*)^3 - (\xi_2)^3]$$

может рассматриваться как два нелинейных алгебраических уравнения с двумя неизвестными (ξ_1 и ξ_2). Их решение дает выражения скоростей возникающих солитонов через начальный импульс E (см. [2.66]).

Этот метод использовался Березиным и Карпманом [2.68] и был ими вполне строго обоснован для уравнения Кортевега — де Фриза. При исследовании строгости этого метода в общем случае немедленно обнаруживается, что отбрасывание непрерывной «звенящей» составляющей может не давать хорошей аппроксимации. Хоть непрерывная компонента и затухает по τ , все же часто такое затухание происходит лишь алгебраически и локально по (z, τ) . Опыт показывает [2.18, 2.68], что отбрасывание непрерывной части тем точнее, чем более гладкими являются начальные данные. Начальные профили, имеющие скачкообразный разрыв поля или его производных невысокого порядка, приводят к заметному «звону», которым нельзя пренебречь. (Такое отбрасывание «звенящего» вклада для уравнений самоиндуцированной прозрачности много лучше, чем для уравнения sine-Gordon, поскольку для них непрерывная компонента затухает экспоненциально по τ для почти всех z . Следует отметить, что система уравнений самоиндуцированной прозрачности не приводит к выражению глобальных интегралов движения только через поле E . Однако локальные законы сохранения существуют и могут быть вычислены, как и выше. Снова опыт показывает, что для системы самоиндуцированной прозрачности при достаточно гладких начальных данных процедура вполне согласуется с численными результатами.) Мы полагаем, что рассмотрение этих вычислений с точки зрения динамики вполне интегрируемых гамильтоновых систем внесет ясность, делая очевидными используемые приближения.

Приложение А. Формальный вывод уравнений Марченко

В этом приложении мы дадим вывод уравнений Марченко, более прямой, чем тот, который обычно встречается в литературе. Различные фрагменты этого приложения содержатся

в [2.5], [2.8], [2.22], [2.23], [2.85]—[2.88]. Наш вывод непосредственно связан с важной работой [2.89] и может быть найден в [2.90].

Начнем с рассмотрения следующей «задачи рассеяния», записанной на спектральном языке:

$$\left[i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_t - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & E(t) \\ E^*(t) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1(t, \zeta) \\ \psi_2(t, \zeta) \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} \psi_1(t, \zeta) \\ \psi_2(t, \zeta) \end{pmatrix}, \quad (2A.1)$$

$$\begin{aligned} \psi(t, \zeta) &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ T(\zeta) \end{pmatrix} e^{i\zeta t} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \\ \psi(t, \zeta) &\simeq \begin{pmatrix} R(\zeta) e^{-i\zeta t} \\ e^{i\zeta t} \end{pmatrix} \quad \text{при } t \rightarrow -\infty; \end{aligned}$$

та же самая задача рассеяния на каузальном языке записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \partial_t - \partial_y & \frac{-E(t)}{2} \\ \frac{E^*(t)}{2} & \partial_t + \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(t, y) \\ \hat{\psi}_2(t, y) \end{pmatrix} = 0, \quad t < y, \quad (2A.2)$$

$$\hat{\psi}(t, y) = 0, \quad t > y,$$

$$\hat{\psi}(t, y) \simeq \begin{pmatrix} \hat{R}(t+y) \\ \delta(t-y) \end{pmatrix} \quad \text{при } t \rightarrow -\infty$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{T}(t-y) \end{pmatrix} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Разумеется, эти два представления эквивалентны, и связь между ними осуществляется преобразованием

$$\hat{\psi}(t, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_a} e^{-i\zeta y} \psi(t, \zeta) d\zeta,$$

где путь интегрирования Γ_a идет от $-\infty$ до ∞ , обходя сверху все полюсы функции $\psi(t, \zeta)$. Такой выбор пути интегрирования обеспечивает зануление каузального представления при $t > y$. (Полюсы функции ψ являются полюсами $T(\zeta)$, т. е. нулями величины $[\hat{a}(\zeta)]^* = [T(\zeta)]^{-1}$.) Предположим для простоты, что E зануляется вне конечного интервала по t . В этом случае асимптотические граничные условия означают просто «вне носителя E »; весьма полезно изобразить каузальное представление задачи рассеяния так, как на рис. 2.4.

Оказывается, что каузальное представление является наиболее удобным средством для вывода уравнений Марченко, являющихся основными уравнениями метода обратной задачи. С другой стороны, спектральное представление дает больше информации о структуре, поведении и свойствах решения этих уравнений и тем самым о поле E .

Вывод интегральных уравнений Марченко осуществляется за два шага. Во-первых, рассмотрим какое-нибудь решение Φ^F «свободной задачи» ((2A.2) при $E = 0$). Определим оператор преобразования R , который переводит любое такое свободное решение в решение Φ полной задачи ((2A.2) с $E \neq 0$), совпадающее с Φ^F при $t \rightarrow -\infty$:

$$\Phi(t, y) = \Phi^F(t, y) + \int_{-\infty}^t K(t, y') \Phi^F(y', y) dy'.$$

Требование, чтобы Φ было бы решением полной задачи при условии, что Φ^F — решение свободной, немедленно приводит к уравнениям для матрицы K

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_t K + \partial_{y'} K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} K = 0, \quad t > y' \tag{2A.3a}$$

$$K = 0, \quad t < y'$$

$$\lim_{y' \rightarrow -\infty} K(t, y') = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} K(t, t) - K(t, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E(t) \\ E^*(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2A.3b}$$

Обратно, задача (2A.3) с данными на характеристике, изображенная на рис. 2.5, однозначно определяет K . Более того, если ядро K известно, граничное условие (2A.3b) выражает поле E через значение K_{12} на диагонали:

$$E(t) = 4K_{12}(t, t). \tag{2A.4}$$

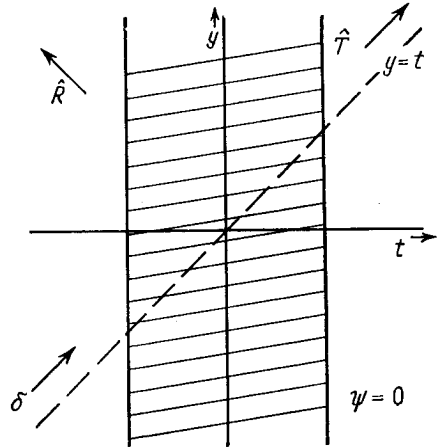


Рис. 2.4. Каузальное представление задачи рассеяния. Заштрихованная область соответствует носителю E . Поле Φ падает слева и имеет вид дельта-функции. Отраженная компонента обозначена через \hat{R} , проходящая через \hat{t} , в области $t > y$ поле Φ зануляется.

Таким образом, если мы найдем ядро K по спектральным данным, мы найдем импульс E .

Вторым шагом в выводе уравнений Марченко является получение интегральных уравнений для K с ядром, выражающимся через данные рассеяния Σ . Этот второй шаг начинается

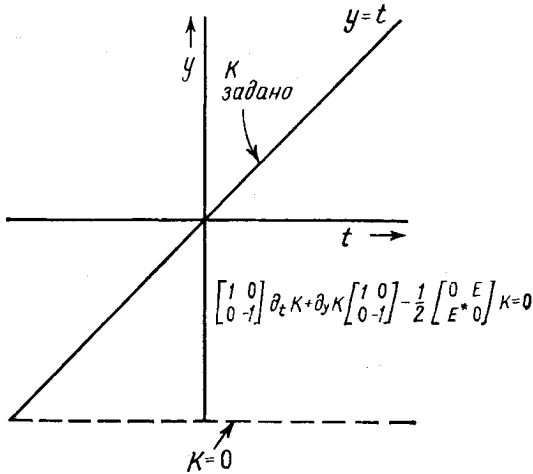


Рис. 2.5. Задача для K с данными на характеристике.

с того, что мы рассматриваем ядро K как известное и используем его для получения каузального представления задачи рассеяния. Здесь свободная волна имеет вид $\begin{pmatrix} \hat{R}(t+y) \\ \delta(t-y) \end{pmatrix}$, и полная волна $\hat{\psi}$ (совпадающая со свободной при $t \rightarrow -\infty$) имеет вид

$$\hat{\psi}(t, y) = \begin{pmatrix} \hat{R}(t+y) \\ \delta(t-y) \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^t K(t, y') \begin{pmatrix} \hat{R}(y'+y) \\ \delta(y'-y) \end{pmatrix} dy'.$$

Используя зануление $\hat{\psi}(t, y)$ при $t > y$, сведем эти уравнения к тождеству

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}(t+y) \\ 0 \end{pmatrix} + K(t, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^t K(t, y') \begin{pmatrix} \hat{R}(y'+y) \\ 0 \end{pmatrix} dy', \quad t > y. \quad (2A.5)$$

Это тождество можно рассматривать как интегральное уравнение (уравнение Марченко), решения которого определяют

ядро K по отраженной волне \hat{R}^1). Такой вывод уравнений Марченко, как нам кажется, является наиболее прямым, поскольку он минимизирует выкладки; тем не менее, чтобы найти K (и, следовательно, E), представляется необходимым использовать спектральное представление отраженной волны \hat{R} .

Поскольку $\psi_1(t, \zeta) \simeq R(\zeta) \exp(-i\zeta t)$ при $t \rightarrow -\infty$, его преобразование дает важное представление

$$\hat{R}(t+y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_a} R(\zeta) e^{-i\zeta(t+y)} d\zeta,$$

где контур Γ_a , как мы напомним читателю, выбирается лежащим выше всех полюсов величины $R(\zeta)$. Чтобы продеформировать контур Γ_a в вещественную ось, используем вычисление вычетов, что приводит к эквивалентному представлению

$$\hat{R}(t+y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) e^{-i\zeta(t+y)} d\zeta - i \sum_{j=1}^N e^{-i\zeta_j(t+y)} \left. \frac{d}{d\zeta} R(\zeta) \right|_{\zeta=\zeta_j}. \quad (2A.6)$$

Таким образом, данные рассеяния Σ определяют R и, следовательно, E при помощи уравнений Марченко.

Представление (2A.6) справедливо для всех значений x ; однако, комбинируя его с выражениями (2.85), дающими эволюцию по x , получаем выражение $\hat{R}(t+y, x)$ через $\Sigma(x=0)$:

$$\begin{aligned} \hat{R}(t+y, x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \exp \left\{ -i \left[\zeta(t+y) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{x}{2} \int_{\Gamma_u} \frac{g(\zeta')}{(\zeta - \zeta')} d\zeta' \right] \right\} R(x=0, \zeta) - i \sum_{j=1}^N \exp \left\{ -i \left[\zeta_j(t+y) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{x}{2} \int_{\Gamma_u} \frac{g(\zeta')}{(\zeta_j - \zeta')} d\zeta' \right] \right\} \bar{C}_j(x=0). \quad (2A.7) \end{aligned}$$

В заключение нам приятно поблагодарить проф. Флашку, прочитавшего предварительный вариант этой статьи и сделавшего много полезных замечаний.

¹⁾ Важно учесть, что K в уравнении (2A.5) имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} K_{22} & K_{12} \\ -K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{что вытекает из (2A.3).}$$

ЛИТЕРАТУРА

- 2.1. Russell J. S. — Proc. Roy. Soc. Edingburgh, 319 (1844).
- 2.2. Korteweg D. J., de Vries G. — Philos. Mag. 39, 422 (1895).
- 2.3. Miura R. — SIAM Rev.
- 2.4. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. — УФН 103, 193 (1971).
- 2.5. Scott A. C., Chu F., McLaughlin D. W. — Proc. IEEE 61, 1 1443 (1973).
- 2.6. Bäcklund A. V. — Math. Ann. 9, 297 (1876).
- 2.7. Bäcklund A. V. — Math. Ann. 19, 387 (1882).
- 2.8. Whitham G. B. — Linear and Nonlinear Waves (John Wiley, New York, 1974). [Имеется перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М. Мир, 1977.]
- 2.9. Fermi E., Pasta J. R., Ulam S. — In Collected Works of Enrico Fermi, Vol. II (Univ. of Chicago Press, Chicago Ill. 1965). [Имеется перевод: Ферми Э. Научные труды, ч. II. — М.: Наука, 1982.]
- 2.10. Newell A. C. — Proc. N. S. F. Conference on Solitons, Tucson, (1976).
- 2.11. Toda M. — Phys. Rep. 18C, 2 (1975).
- 2.12. Zabusky N. J., Kruskal M. D. — Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965).
- 2.13. McCall S. L., Hahn E. L. — Bull. Am. Phys. Soc. 10, 1189 (1965).
- 2.14. McCall S. L., Hahn E. L. — Phys. Rev. Lett. 18, 908 (1967).
- 2.15. Lamb G. L., Jr. — Phys. Lett. 25A, 181 (1967).
- 2.16. Arechi F. T., Bonifacio R. — IEEE J. QE-1, 169 (1965).
- 2.17. Seeger A., Donth H., Kochendörfer A. — A. Phys. 134, 173 (1953).
- 2.18. Lamb G. L., Jr. — Rev. Mod. Phys. 43, 99 (1971).
- 2.19. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. — Phys. Rev. Lett., 19, 1095 (1967).
- 2.20. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ 61, 118 (1971).
- 2.21. Lax P. D. — Comm. Pure Appl. Math. 21, 467 (1968).
- 2.22. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A., Segur H. — Stud. Appl. Math. 53, 249 (1974).
- 2.23. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — Функци. анализ 8 : 3, 43 (1974).
- 2.24. Flaschka H., Newell A. C. Integrable Systems of Nonlinear Evolution Equations. — In Dynamical Systems, Theory and Application, Lecture Notes in Physics, Vol. 38, ed. by J. Moser (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975).
- 2.25. Ablowitz M., Segur H. — Preprint, Clarkson College of Technology, Potsdam, N. Y. (1975).
- 2.26. Манаков С. В. — ЖЭТФ 65, 1392 (1973).
- 2.27. Манаков С. В. — ЖЭТФ 67, 543 (1974).
- 2.28. Ablowitz M. J., Newell A. C. — J. Math. Phys. 14, 1277 (1973).
- 2.29. Lax P. — Comm. Pure Appl. Math. 28, 141 (1975).
- 2.30. McKean H. P., van Moerbeke P. — Inventiones Math. 30, 217 (1975).
- 2.31. Новиков С. П. — Функци. анализ 8 : 3, 54 (1974).
- 2.32. Фаддеев Л. Д. — Препринт, 1975.
- 2.33. Rajaraman R. — Phys. Rep. 21, 227 (1975).
- 2.34. Segur H. — Rocky Mount. J. Math. 8, 15 (1978).
- 2.35. Kaup D. J. — Stud. Appl. Math. 55, 9 (1976).
- 2.36. Захаров В. Е., Манаков С. В. — ЖЭТФ 69, 1654 (1975).
- 2.37. Allen L., Eberly J. H. — Optical Resonance and Two Level Atoms (Wiley, New York, 1975).
- 2.38. McCall S. L., Hahn E. L. — Phys. Rev. 183, 457 (1969).
- 2.39. Sargent M. III, Scully M. O., Lamb W. E., Jr. — Laser Physics (Addison-Wesley, Reading, Mass. 1974).
- 2.40. Gibbs H. M., Slusher R. E. — Phys. Rev. Lett. 24, 683 (1970).
- 2.41. Gibbs H. M., Slusher R. E. — Phys. Rev. A5, 1634 (1972).
- 2.42. Gibbs H. M., Slusher R. E. — Phys. Rev. A6, 2326 (1972).
- 2.43. Ablowitz M., Kaup D., Newell A. — J. Math. Phys. 15, 1852 (1974).
- 2.44. Eisenhart L. P. — A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces (Dover, New York, 1960).

- 2.45. Clairin J. — *Annales de Toulouse* 2e ser. 5, 437 (1903).
- 2.46. Lamb G. L., Jr. — *J. Math. Phys.* 15, 2157 (1974).
- 2.47. Barnard T. W. — *Phys. Rev.* A7, 373 (1973).
- 2.48. Matulic L., Eberly J. H. — *Phys. Rev.* A6, 822 (1972).
- 2.49. Gustafson T. K., Kelley P. L., Chiao R. Y., Brewer R. G. — *Appl. Phys. Lett.* 12, 165 (1968).
- 2.50. Tappert F., частное сообщение.
- 2.51. Benney D. J., Newell A. C. — *J. Math. Phys.* 46, 133 (1967).
- 2.52. Morales G. J., Lee Y. C. — Preprint in U. C. L. A. (1975).
- 2.53. Hasegawa A., Tappert F. — *Appl. Phys. Lett.* 23, 142 (1973).
- 2.54. Захаров В. Е., Шабар А. Б. — *ЖЭТФ* 64, 1627 (1974).
- 2.55. Kakutani T., Kawahara T. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 29, 1068 (1970).
- 2.56. Kakutani T., Ono H., Taniuti T., Wei C. C. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 24, 1159 (1968).
- 2.57. Kever H., Morikawa G. K. — *Phys. Fluids* 12, 2090 (1969).
- 2.58. Gardner C. S., Morikawa G. K. — *Comm. Pure Appl. Math.* 18, 35 (1965).
- 2.59. Washimi H., Taniuti T. — *Phys. Rev. Lett.* 17, 996 (1966).
- 2.60. Ott E., Sudan R. L. — *Phys. Fluids* 12, 2388 (1969).
- 2.61. Jeffrey A., Kakutani T. K. — *SIAM Rev.* 14, 582 (1972).
- 2.62. Spitzer L., Jr. — *Physics of Fully Ionized Gases* (Interscience, N. Y., 1956).
- 2.63. Ikezi H. — *Phys. Fluids* 16, 1668 (1973).
- 2.64. McLaughlin D. W., Coronas J. — *Phys. Rev.* A10, 2051 (1974).
- 2.65. Ablowitz M., Kaup D., Newell A., Segur H. — *Phys. Rev. Lett.*, 31, 125 (1973).
- 2.66. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal R. M. D., Miura R. M. — *Comm. Pure Appl. Math.* 27, 97 (1974).
- 2.67. Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A. — *Phys. Rev.* D11, 3424 (1975).
- 2.68. Березин Я. А., Карпман В. И. — *ЖЭТФ* 51 (1967).
- 2.69. Gardner C. S. — *J. Math. Phys.* 12, 1548 (1971).
- 2.70. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. — *Функц. анализ* 5 : 4, 18 (1971).
- 2.71. Захаров В. Е., Манаков С. В. — *ТМФ* 19, 332 (1974).
- 2.72. Арнольд В. И. — *УМН* 18, № 5, с. 13; 18, № 6, с. 81 (1963).
- 2.73. Arnold V. I., Avez A. A. — *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin, New York, 1968).
- 2.74. Ford J. — In *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, Vol. 3, ed. by G. Cohen (North Holland, Amsterdam, 1975).
- 2.75. Захаров В. Е. — *ЖЭТФ* 65, 219 (1973).
- 2.76. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. — М.: Физматгиз, 1965.
- 2.77. Goldstein H. — *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 1957).
- 2.78. Flaschka H., McLaughlin D. W. — *Progr. Theor. Phys.* 55 (1976).
- 2.79. Flaschka H., McLaughlin D. W. — *Proc. N. S. F. Conference on Bäcklund Transformation*, held at Vanderbilt Univ. (1974).
- 2.80. Hopf F. A., Scully M. O. — *Phys. Rev.* 179, 399 (1969).
- 2.81. Тахтаджян Л. А. — *ЖЭТФ* 66, 476 (1974).
- 2.82. McLaughlin D. W. — *J. Math. Phys.* 16, 96 (1975).
- 2.83. Schnack D. D., Lamb G. L., Jr. — *Higher Conservation Laws and Coherent Pulse Propagation*. — In 3rd Rochester Conf. on Coherence and Quantum Optics (1972).
- 2.84. Deck R. T., Lamb G. L., Jr. — *Phys. Rev.* 12A, 1503 (1975).
- 2.85. Kay I. — *Comm. Pure Appl. Math.* 13, 371 (1960).
- 2.86. Sondhi M. M., Gopinath V. — *J. Acoust. Soc. Amer.* 49, 1867 (1970).
- 2.87. Balamis G. N. — *J. Math. Phys.* 13, 1001 (1972).
- 2.88. Faddeev L. D. — *J. Math. Phys.* 4, 72 (1963).
- 2.89. Шабар А. Б. — *Дифф. уравнения* 8, 164 (1972).
- 2.90. Scott A. C., Chu F., Reibel S. — Preprint, Math. Res. Center, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin (1976).

3. ДВОЙНОЕ УРАВНЕНИЕ SINE-GORDON: СИСТЕМА, ИМЕЮЩАЯ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Р. Буллаф, Ф. Кодри, Г. Гиббс

Мы рассматриваем две физические задачи — распространение ультракоротких оптических импульсов в резонансной пятикратно вырожденной среде, а также возникновение и распространение спиновых волн в анизотропных магнитных жидкостях ${}^3\text{He A}$ и ${}^3\text{He B}$ при температурах ниже температуры перехода в А-фазу при 2.6 мК. Оптические импульсы описываются «двойным» уравнением sine-Gordon, задача о ${}^3\text{He A}$ — обычным уравнением sine-Gordon, а ${}^3\text{He B}$ — двойным уравнением sine-Gordon с измененным знаком. Двойное уравнение sine-Gordon неинтегрируемо: мы исследуем эту систему аналитически и численно и делаем вывод о существовании «качающихся» 4π -импульсов в оптическом случае, что подтверждается экспериментами. Мы решаем задачу Коши для некоторых начальных данных и показываем, как эти решения можно использовать для описания возникновения спиновых волн в ${}^3\text{He A}$ и ${}^3\text{He B}$. Наконец, мы строим сингулярную теорию возмущений в терминах данных рассеяния для уравнения sine-Gordon, чтобы описать 4π -вобблеры¹⁾ и аналогичные им 0π -импульсы.

3.1. Физические основания

Цель настоящей главы — проиллюстрировать реальное поведение солитонов или солитоноподобных объектов в двух физических ситуациях. За исключением последнего раздела, от читателя требуется лишь сравнительно небольшая математическая подготовка. Мы надеемся, что по прочтении этой главы станет понятно, почему при изучении физических проблем возникают как «интегрируемые», так и «неинтегрируемые» системы, а сопоставление поведения одной интегрируемой системы, уравнения sine-Gordon²⁾, и тесно с ней связанной неинтегрируемой, двойного уравнения sine-Gordon, прояснит различие между этими системами. В главе будут кратко рассмотрены конкретные физические интересные начальные условия для каждой из них и будет проиллюстрировано, как метод обратной задачи рас-

¹⁾ От англ. wobble — качаться, шататься. — *Прим. перев.*

²⁾ Далее для краткости уравнение sine-Gordon будет называться СГ-уравнением. — *Прим. перев.*

сеяния можно использовать при решении задачи Коши для близких интегрируемых систем и при построении теории возмущений для соответствующих неинтегрируемых систем. Двойное уравнение sine-Gordon является новой системой. Она вводится здесь для того, чтобы обсудить возможные приложения теории солитонов в более широком классе ситуаций.

В этой главе мы будем иметь дело с двумя физическими задачами: с задачей из нелинейной оптики о распространении резонансных коротких световых импульсов в среде с вырожденными атомными переходами и с задачей о распространении спиновых волн¹⁾ при очень низких температурах в магнитных фазах ^3He . В первой задаче мы имеем дело с оптической самоиндуцированной прозрачностью (СИП) в вырожденной атомной среде [3.1, 3.2]. СИП в невырожденной среде уже описана Лэммом и Маклафлином в предыдущей главе. Задача о спиновых волнах в ^3He в этой книге больше не обсуждается; их теория в том виде, как она изложена, в основном развита нами [3.3—3.6]. Близкие работы Маки и Кумара [3.7], [3.8] появились параллельно с нашими (и чуть раньше их); предпринятый в работе [3.7] анализ повлиял на некоторые наши соображения. Как и в своей более поздней работе [3.9], Маки и Кумар детально обсуждают возможности эксперимента. Мы также обсудим этот вопрос в настоящей главе.

Для распространения оптических импульсов успешный эксперимент действительно был осуществлен [3.10]; этот эксперимент будет кратко описан в статье. В случае спиновых волн столь же надежного эксперимента пока выполнено не было²⁾; хотя вместе с Маки и Кумаром [3.8] мы и предлагаем варианты проведения такого эксперимента, мы вынуждены признать, что сделать это может оказаться очень трудно. Одна из причин заключается в том, что солитоноподобные спиновые волны возбуждений, которые мы будем описывать, по-видимому, должны генерироваться сразу во множестве там, где они вообще могут возникнуть; другая — в том, что в нашей теории волны считаются плоскими, и она может оказаться мало пригодной для описания реальной ситуации в ^3He , где «текстура» [3.9, 3.11], ассоциированная с трехмерной геометрией системы, играет важную роль. Наоборот, в случае СИП поперечная самофокусировка хотя и важна, однако не имеет решающего значения [3.12, 3.13]; плоская волновая теория пригодна для качественного

¹⁾ Мы используем термин «спиновые волны» для обозначения волн возбуждений магнитного спина; они могут быть распространяющимися или неподвижными (в последнем случае чаще говорят о «домённых стенках»). Мы всегда будем использовать этот термин в нелинейных ситуациях, тем самым обобщая понятие «спиновых волн», которые в рамках линейной теории должны быть гармоническими.

²⁾ Мы, однако, не имели возможности познакомиться с работами № 28 и № 29, цитируемыми в статье Маки [3.9].

описания, и возбуждения односолитонного типа могут сравнительно легко быть созданы и изучены в лаборатории.

Все же в этой главе в основном рассматривается одна физически осмысленная система нелинейных уравнений в частных производных, а не экспериментальные подходы к ее изучению. Эта система — двойное СГ-уравнение

$$u_{xx} - u_{tt} = \pm \left(\sin u + \frac{1}{2} \lambda \sin \frac{1}{2} u \right) \quad (3.1)$$

с граничными условиями $u \rightarrow c \pmod{4\pi}$, u_x, u_{xx}, u_{xxx} и т. д. $\rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Число c выбирается так, чтобы правая часть в этом пределе обращалась в нуль: последнее выполняется при $u = 0$ или 2π для знака «+» и $\lambda = 1$, а также при $u = \delta = 2\arccos(-1/4)$ или $4\pi - \delta$ для знака «-» и $\lambda = 1$. Для $\lambda = 0$ и знака «+» (3.1) является обычным СГ-уравнением с граничным условием $u \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$ при $|x| \rightarrow \infty$; для того же граничного условия $\lambda = 0$ и отрицательного знака уравнение (3.1) неустойчиво — см., например, замечание в [3.14] и в предыдущей главе. Аналогичный неустойчивый случай можно получить из (3.1) при $\lambda = 1$ (см. [3.2]). Устойчивое СГ-уравнение описывает распространение *строго резонансных* (т. е. не претерпевающих «неоднородного уширения») коротких оптических импульсов в невырожденном поглотителе (см., например, гл. 2 или гл. 6; см. также цитированную там литературу, особенно [3.1], или, например, [3.13]—[3.16]). Неустойчивый случай описывает распространение возбуждений в усилителе [3.1]. Как мы увидим, устойчивое СГ-уравнение описывает также распространение плоских спиновых волн в А-фазе ^3He при температуре ниже 2.6 мК. Первым из результатов мы обязаны Маки и Тсунето [3.7] (см. также [3.19]).

Ниже 2.6 мК ^3He в основном существует в виде двух жидких фаз, А и В [3.17]. Обе они являются анизотропными жидкостями [3.3—3.5, 3.7, 3.8, 3.18, 3.19]. Как мы увидим ниже, оказывается, что плоские спиновые волны в В-фазе описываются двойным СГ-уравнением (3.1) с $\lambda = 1$ и отрицательным знаком [3.3—3.6, 3.8, 3.9]. Кроме того, оказывается, что распространение острых резонансных пиков в вырожденной атомной среде с $Q(2)$ -симметрией переходов [3.1, 3.2, 3.14] описывается двойным СГ-уравнением (3.1) с $\lambda = 1$ и положительным знаком. В принципе все четыре случая для $\lambda = 1$, а именно знак «+» с $c = 0$ или 2π и знак «-» с $c = \delta$ или $c = 4\pi - \delta$ описывают резонансную СИП в $Q(2)$ -вырожденном поглотителе [3.2]; вырожденному усилителю соответствуют еще четыре случая [3.1]¹⁾.

¹⁾ Альтернативный термин—«ослабитель»—используется для поглотителя в [3.2]. Все поглотители (ослабители) являются устойчивыми в отсутствие спонтанного излучения. Мы обсуждали в другом месте (см. [3.20]) теорию

Двойное уравнение s - G является одним из серии кратных уравнений s - G , в принципе допускающих приложения (см. [3.4]): например, тройное уравнение sine-Gordon

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u + \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3} u + \frac{2}{3} \sin \frac{2}{3} u \quad (3.2)$$

описывает распространение строго резонансных пиков оптических импульсов сквозь невозбужденную поглощающую среду с $Q(3)$ -симметрией (см. [3.1], [3.14]); обобщение на случай $Q(J)$ -симметрии очевидно. Для этих симметрий правила отбора для оптических переходов имеют вид $\Delta J = 0$, $\Delta M_J = 0$; J — квантовое число углового момента. В экспериментах [3.10] J есть квантовое число $F = 2$ сверхтонкой структуры; кратность вырождения перехода равна $2F + 1 = 5$; теорема Вигнера — Экхарта показывает, что различные матричные элементы суть $\pm \rho$, $\pm \rho/2$, 0 для $\Delta M_F = 0$ и соответственно $M_F = \pm 2$, ± 1 , 0 ; различные величины $-\rho$, $\rho/2$, 0 ; важны только ρ и $\rho/2$. Уравнение (3.1) с положительным знаком и $\lambda = 1$ получается отсюда, как мы покажем ниже, после масштабного преобразования.

Уравнения типа двойного sine-Gordon связаны и с другими физическими задачами: например, они встречаются в квазиодномерной конденсатной теории волн плотности заряда (ВПЗ) для органических линейных проводников типа TTF-TCNQ (тетрафлуорваленттетрацианокинодиметан) [3.21]. Эти системы состоят из одномерных органических полимерных цепочек. Скользящие ВПЗ были введены Пайерлсом [3.22] и рассматривались в трансляционно инвариантном случае Фрелихом [3.23], но во встречающихся на практике цепочках соизмеримость нарушает трансляционную инвариантность [3.24], и ВПЗ переходит в периодический «пиннинг»-потенциал, имеющий в простейшем случае вид $\cos Mu$, где u — конденсированная фаза. Парное кулоновское взаимодействие приводит к возникновению второго потенциала, величина которого при низких температурах пропорциональна $\cos u$. В случае наличия доминирующей фазы потенциал $V(u) \sim \cos Mu + \lambda \cos u$ связывается с физически осмысленным лагранжианом с плотностью $\mathcal{L}[u] = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - V(u)$ [3.21]. Тогда уравнения движения после масштабного преобразования принимают вид

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u + \lambda \sin \frac{u}{M}. \quad (3.3)$$

вырожденной суперфлюоресценции (см. также ниже разд. 3.2), где, например, среда в неустойчивом усиливающем состоянии, ассоциированном с $c = 0$, распадается на устойчивые состояния $u = \delta$ или $4\pi - \delta$, частично через неустойчивое состояние $c = 2\pi$.

Поскольку $M = 2\nu^{-1}$, где ν — число электронов на атом (или на группу молекул), то $M = 4$ для $D(\text{TCNQ})_2$ (здесь D означает «донорскую» группу), $M = 3$ для $D_3(\text{TCNQ})_2$; для самого TTF-TCNQ $\nu = 0.58$, что можно приближенно заменить на $\nu = 1/2$ и $M = 4$. Легко увидеть на фазовой плоскости лоренц-ковариантного уравнения (3.3), рассматриваемого в сопутствующей системе, что это уравнение должно вести себя во многом как двойное уравнение sine-Gordon с положительным знаком¹⁾.

Один из видов двойного СГ-уравнения возник в теории «сшивания» поливинилиденфторида, $PV\text{F}_2$ [3.25]. Лютер [3.26] получил квантованное двойное СГ-уравнение как отображение восьмивершинной модели в поле; восьмивершинная модель важна в статистической механике и содержит как частный случай модель Изинга (в этом случае в электрическом поле). Представляется вероятным, что могут найтись и другие приложения уравнений типа двойного СГ-уравнения в статистической механике. Распространение флюксонов в джозефсоновских контактах большой площади (скажем, $1 \text{ мм} \times 1 \text{ мм}$) описывается СГ-уравнением (случай $\lambda = 0$) — см. гл. 2 или [3.14]; спиновые волны в А-фазе жидкого ^3He могут быть интерпретированы как следствие внутреннего эффекта Джозефсона [3.7, 3.14]. Соответствующий источнику член в уравнениях джозефсоновских контактов, как правило, периодический, однако (3.3) может иметь некоторое отношение к этой ситуации (см. [3.27]).

Все эти замечания указывают на то, что уравнение (3.1) представляет реальный физический интерес и непосредственно, в задачах оптики и спиновых волн, и косвенно, как уравнение, моделирующее поведение систем типа (3.3). Однако с математической точки зрения, за исключением случая $\lambda = 0$, эти системы не являются интегрируемыми и не имеют солитонных решений. На это указывают следующие два результата. Во-первых, нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$u_{xt} = F(u) \quad (3.4)$$

допускает преобразование Бэклунда, если и только если $F''(u) + \alpha^2 F(u) = 0$ для некоторого α (см. [3.28], [3.29]); во-вторых, оно имеет бесконечный набор полиномиальных законов сохранения (см. гл. 1), если и только если $F''(u) + \alpha^2 F(u) = 0$ [3.30]. То, что уравнение неинтегрируемо при любом выборе знака, полностью подтверждено численным счетом [3.4—3.6, 3.31, 3.32]; сейчас не вызывает сомнения, что пара уединенных волн (решений типа кинков) для уравнения (3.1) с отрицательным знаком и $\lambda = 1$ испускает излучение после столкновения

¹⁾ По поводу исследования двойного уравнения sine-Gordon в сопутствующей системе методами качественной теории см. [3.14].

[3.32, 3.33] (один такой пример показан на рис. 3.1)¹⁾. В гл. 1 мы приводили аргументы в пользу того, что такое поведение решений не позволяет решать эти уравнения каким-либо из вариантов метода обратной задачи рассеяния (см. также замечание при корректуре в конце этой главы).

Можно было бы сделать из этого вывод, что в этой книге не место для обсуждения уравнения (3.1). Однако уравнение с положительным знаком по меньшей мере близко (в некотором функциональном смысле) к вполне интегрируемому СГ-уравнению, получающемуся при $\lambda = 0$. Сингулярная теория возмущений вблизи СГ-уравнения уже успешно применялась для описания поведения двух простейших решений уравнения (3.1) (см. [3.32], [3.34] — [3.36]); мы вкратце изложим эту теорию в конце настоящей главы.

Ниже мы займемся задачами о вырожденной СИП в разд. 3.2 и о спиновых волнах в ^3He в разд. 3.3; затем в разд. 3.4 мы дадим набросок теории возмущений. Чтобы закончить разд. 3.1, стоит, вероятно, показать в связи с гл. 5, что прямой метод дает единенные волны для двойного СГ-уравнения, но не дает двухсолитонных решений.

Чтобы показать это, определим дифференциальный оператор (см. гл. 5)

$$D_x^m D_t^n (a \cdot b) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n [a(x, t) b(x', t')] \right\}_{\substack{x'=x \\ t'=t}}$$

Дальнейшие рассуждения таковы: положим

$$u = 4 \arctg(f/g),$$

тогда

$$\begin{aligned} u_x &= 4D_x(f \cdot g)/(f^2 + g^2), \\ u_{xt} &= 4[-(f^2 - g^2)D_x D_t(f \cdot g) + fgD_x D_t(f \cdot f - g \cdot g)] \times (f^2 + g^2)^{-2}, \\ \sin \frac{1}{2} u &= 2fg(f^2 + g^2)^{-1}; \quad \sin u = -4fg(f^2 - g^2)(f^2 + g^2)^{-2}. \end{aligned}$$

Возьмем уравнение (3.1) со знаком $+$: заменим $(x-t)/2 \rightarrow x$, $(x+t)/2 \rightarrow t$, так что

$$u_{xt} = \sin u + \frac{1}{2} \lambda \sin \frac{1}{2} u, \quad (3.5)$$

вместо λ поставим 4λ и возьмем $\lambda > 0$. Уравнение приобретет такую форму:

$$\begin{aligned} &-(f^2 - g^2)D_x D_t(f \cdot g) + fgD_x D_t(f \cdot f - g \cdot g) - \\ &\quad - \lambda fg(f^2 + g^2) + fg(f^2 - g^2) = 0. \end{aligned}$$

¹⁾ В работе [3.28], где обсуждалась интегрируемость двойного уравнения sine-Gordon, мы были склонны к противоположному выводу. Дальнейшие работы показали, что вопреки свидетельству рисунка 1 цитированной работы значительное излучение возникает в ряде ситуаций.

Естественно положить

$$D_x D_t (f \cdot g) = \mu f g,$$

$$D_x D_t (f \cdot f - g \cdot g) = (\mu - 1)(f^2 - g^2) + \lambda (f^2 + g^2).$$

Если мы положим

$$f = \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots,$$

$$g = 1 + \varepsilon^2 g^{(2)} + \varepsilon^4 g^{(4)} + \dots$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε , то получим $\mu = 1 + \lambda$ (при ε^0), и

$$f_{xt}^{(1)} = (1 + \lambda) f^{(1)}$$

(при ε^1). Тогда, если $f^{(1)} = e^\theta$, $\theta = \omega t - kx + \delta$, где $\omega k = -1 - \lambda$ (из $\omega, \lambda > 0$ следует тем самым, что $k < 0$), то

$$g^{(2)} = [-\lambda/4(1 + \lambda)],$$

а все остальные $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ можно выбрать обращающимися в нуль. Итак,

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left[-\sqrt{1 + \lambda^{-1}} / \operatorname{sh} \theta' \right],$$

$$\theta' = \theta + \ln \left[\frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{\lambda(1 + \lambda)^{-1}} \right] \quad (3.6)$$

является решением. При $x \rightarrow -\infty$, $u \rightarrow 0$; при $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 4\pi$. Это, следовательно, 4π -кинк постоянной формы. Однако для двухсолитонного решения мы должны были бы положить, естественно,

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}; \quad \theta_i = \omega_i t - k_i x + \delta_i \quad (i = 1, 2),$$

где $\omega_i k_i = -1 - \lambda$. Ряды здесь, вообще говоря, не обрываются, за исключением случая $\lambda = 0$ (СГ-уравнение).

3.2. Теория вырожденной СИП

Рассмотрим модель среды «двухуровневых атомов»: каждый уровень пятикратно вырожден, $F = 2$. Правила отбора имеют вид $\Delta F = 0$, $\Delta M_F = 0$, так что имеется 5 возможных переходов при одной и той же резонансной частоте, нумеруемых значениями $M_F = \pm 2, \pm 1, 0$. Имеется, стало быть, 5-псевдоспиновое описание каждого атома, где атомы верхнего уровня нумеруются спином вверх, а нижнего — спином вниз [3.14, 3.31]. Но, как мы отмечали в разд. 3.1, только два значения модулей матричных элементов существенны, p и $p/2$. Соответственно 5-псевдоспиновая задача может быть сведена к 2-псевдоспиновой задаче с этими матричными элементами [3.31]. Легко видеть (см. [3.1], [3.2], [3.14]), что для каждого из этих атом-

ных псевдоспинов имеются уравнения Блоха (односпиновые уравнения Блоха в теории невырожденной СИП выведены в гл. 2). Подобно тому как в невырожденном случае огибающая \mathcal{E} электрического поля определяет парное взаимодействие спинов различных атомов, здесь она задает также взаимодействие двух псевдоспинов каждого вырожденного атома, причем других взаимодействий нет (учитывается лишь поперечная составляющая поля). Эта огибающая \mathcal{E} электрического поля (масштаб времени $\leq 10^{-9}$ с) является модуляцией гармонической несущей частоты, находящейся в точном резонансе с частотой атомных оптических переходов. В работах [3.13], [3.16] мы обозначали эту частоту через ω_s (здесь мы этот символ использовать не будем); $\hbar\omega_s$, таким образом, есть интервал по энергии между двумя резонансными, но вырожденными атомными уровнями, если такая величина потребовалась бы ¹⁾.

В общие уравнения Блоха входят следующие величины: число атомных инверсий N , компонента огибающей атомного дипольного момента Q , находящаяся в фазе с огибающей электрического поля \mathcal{E} , и огибающая P дипольного момента со сдвигом фазы на $\pi/2$.

При точном резонансе в случае строго резонансных пиков величина Q является константой, которая должна быть нулем для начально невозбужденной среды (ср., например, [3.16]). Уравнения движения для вырожденного случая содержат, следовательно, только величины $P^{(i)}$, $N^{(i)}$, $i = 1, 2$. Эти уравнения имеют вид (см. [3.1], [3.2], [3.5], [3.13] — [3.16], ср. также гл. 2)

$$\begin{aligned} P_t^{(i)} &= -\kappa^{(i)} N^{(i)} \mathcal{E}; \\ N_t^{(i)} &= \kappa^{(i)} P^{(i)} \mathcal{E}; \quad \kappa^{(i)} = 1, \frac{1}{2}; \quad i = 1, 2 \\ c\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_t &= \alpha \left(P^{(1)} + \frac{1}{2} P^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

в подходящих единицах. В этих единицах (см. [3.13] — [3.16]) константа взаимодействия α имеет размерность квадрата частоты, а $\sqrt{\alpha}$ играет заметную роль в теории квантованного СГ-уравнения, основанной на (3.7) [3.4, 3.5, 3.13]. Беря подходящую линейную комбинацию векторов состояний атомов, получим, что и уравнения движения для схемы многоуровневых атомов могут быть представлены в виде (3.7); новым будет лишь то, что $i = 1, 2, \dots, N$, вместо $\kappa^{(i)}$ появятся простые рациональные дроби, а диполи $P^{(i)}$ войдут с весами $\omega^{(i)}$ в уравнения Максвелла для \mathcal{E} и $P^{(i)}$. Некоторые примеры указаны в [3.31]. Трехспиновая задача с весами обсуждается ниже перед уравнением (3.17).

¹⁾ $\hbar = h/2\pi$ (нормированная постоянная Планка).

Уравнения (3.7) сводятся к уравнению (3.1) (с положительным знаком и $\lambda = 1$) подстановкой $P^{(i)} = -\sin \kappa^{(i)} u$, $N^{(i)} = \cos \kappa^{(i)} u$, $\mathcal{E} = u_t$, откуда

$$u_{tt} + u_{xt} = \alpha \left(\sin u + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} u \right). \quad (3.8)$$

Далее, после замены переменных $\xi = \sqrt{\alpha}(2x - t)$, $\tau = \sqrt{\alpha}t$ получаем в точности

$$u_{\xi\xi} - u_{\tau\tau} = \sin u + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} u. \quad (3.9)$$

Это лоренц-ковариантное уравнение может быть решено для одного кинка при помощи перехода в сопутствующую систему. Траектории в фазовом пространстве u , u_ξ имеют вид

$$\frac{1}{2} u_\xi^2 + \cos u + \cos \frac{1}{2} u = C, \quad (3.10)$$

где C константа. Для $C = 2$ траектория соединяет неустойчивые особые точки $u_\xi = 0$, $u = 0$ и $u_\xi = 0$, $u = 4\pi$. Эта траектория описывает решение, соответствующее (3.6) в других координатах (мы перешли от лоренц-ковариантных координат к конусным в уравнении (3.5) для получения решения (3.6)).

Аналогичным образом можно решить уравнение (3.1) для всех случаев. Общее решение есть

$$\begin{aligned} u &= u_0 + 4 \operatorname{arctg} [\operatorname{ch} \delta_3 \exp(\theta - \delta_1) + \operatorname{sh} \delta_3] + \\ &\quad + 4 \operatorname{arctg} [\operatorname{ch} \delta_3 \exp(\theta - \delta_2) - \operatorname{sh} \delta_3], \\ \theta &= \omega(t - xv^{-1}) + \theta_0 = \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha v}} [(2v - 1)\tau - \xi] + \theta_0, \\ u_t &= \omega \frac{du}{d\theta}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь особенно интересны четыре частных случая¹⁾:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad u_0 &= 0, \quad \delta_1 = -\delta_2 = \ln(\sqrt{5} + 2) \equiv \Delta, \quad \delta_3 = 0, \\ u &= 4 \operatorname{arctg}(e^{\theta-\Delta}) + 4 \operatorname{arctg}(e^{\theta+\Delta}), \\ \mathcal{E} &= 2\omega \operatorname{sech}(\theta - \Delta) + 2\omega \operatorname{sech}(\theta + \Delta), \\ v &= \omega^2 \left(\omega^2 + \frac{5}{4} \alpha \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

— решение уравнения (3.1) для $\lambda = 1$ и знака «+» с граничными условиями (г. у.) $u \rightarrow 0 \pmod{4\pi}$, $|x| \rightarrow \infty$;

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad u_0 &= 2\pi, \quad \delta_1 = i\pi - \delta_2 = \ln(\sqrt{3} + 2) = \Delta', \quad \delta_3 = 0, \\ u &= 2\pi + 4 \operatorname{arctg}(e^{\theta-\Delta'}) - 4 \operatorname{arctg}(e^{\theta+\Delta'}), \\ \mathcal{E} &= 2\omega \operatorname{sech}(\theta - \Delta') - 2\omega \operatorname{sech}(\theta + \Delta'), \\ v &= \omega^2 [\omega^2 + 3/4\alpha]^{-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

¹⁾ В работах [3.4], [3.5] имеется ошибка: Δ в (I) и Δ' в (II) были взяты равными соответственно $\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$ и $\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

— решение уравнения (3.1) для $\lambda = 1$ и знака «+» с г. у. $u \rightarrow 2\pi \pmod{4\pi}$, $|x| \rightarrow \infty$ (в действительности $u \rightarrow 2\pi$ при $x \rightarrow \pm \infty$);

$$\text{III) } u_0 = \delta - 2\pi, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3},$$

$$u = 2\pi - \delta + 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{\sqrt{15}} e^\theta + \frac{1}{15} \right),$$

$$\mathcal{E} = \frac{2\sqrt{15}\omega}{4 \operatorname{ch} \theta + 1}, \quad v = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \frac{15}{16} \alpha} \quad (3.14)$$

— решение уравнения (3.1) для $\lambda = 1$ и знака «-» с г. у. $u \rightarrow +\delta$, $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 4\pi - \delta$, $x \rightarrow -\infty$;

$$\text{IV) } u_0 = 2\pi - \delta, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = -\infty, \quad \delta_3 = -\frac{1}{2} \ln(5/3),$$

$$u = \delta - 2\pi + 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{\sqrt{15}} e^\theta - \frac{1}{\sqrt{15}} \right),$$

$$\mathcal{E} = \frac{2\sqrt{15}\omega}{4 \operatorname{ch} \theta - 1}, \quad v = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \frac{15}{16} \alpha} \quad (3.15)$$

— решение уравнения (3.1) со знаком «-» при $\lambda = 1$ с г. у. $u \rightarrow -\delta$, $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow +\delta$, $x \rightarrow -\infty$.

Можно найти и другие решения, отвечающие различным граничным условиям: в частности, для $\lambda = 0$ получим $u = 4 \operatorname{arctg}(e^\theta)$, или $u = -\pi + 4 \operatorname{arctg}(e^\theta)$ с $v = \omega^2(\omega^2 \pm \alpha)^{-1}$ соответственно. Это решения типа кинков, соответствующие невырожденным поглотителю ($N \rightarrow -1$ при $|x| \rightarrow \infty$) и усилителю ($N \rightarrow +1$ при $|x| \rightarrow \infty$) соответственно. Видно, что в усилителе $v > 1$ (т. е. $v > c$), что обсуждалось, например, в [3.14]. Решения уравнения (3.1) для вырожденного усилителя также могут быть найдены: например, формулы (3.12) остаются в силе с тем отличием, что теперь $v = \omega^2[\omega^2 + 5\alpha/4]^{-1} > 1$.

Отметим, что решение (3.12) для u описывает кинк со скачком 4π : это то же решение (3.6), но записанное в других координатах и представленное теперь в виде суммы двух 2π -кинков для s-G (случай $\Delta = 0$), разделенных промежутком $2\Delta = 2 \ln \times (\sqrt{5} + 2)$. Аналогично (3.13) есть разность двух 2π -кинков для s-G, разделенных промежутком $2\Delta' = 2 \ln(\sqrt{3} + 2)$. Решения (3.14), (3.15) являются кинками со скачками $4\pi - \delta$ и 2δ соответственно и не могут быть представлены в виде комбинаций 2π -кинков для s-G.

Электрические поля в (3.12) и (3.13) являются суммой и разностью «сеш-импульсов». Последние в невырожденном поглотителе имеют «площадь» $\theta = 2\pi$. «Теорема площадей» для

резонансных оптических импульсов в невырожденной СИП изображена на рис. 2.1 в гл. 2; интересный анализ этой теоремы с точки зрения метода обратной задачи проделан Ньюэллом в гл. 6. Имеется соответствующая теорема площадей в вырожденном случае, хотя здесь и не работает метод обратной задачи: эта теорема площадей имеет вид

$$\theta_x = \pm \beta \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \theta \right), \quad (3.16a)$$

где, как и в невырожденном случае,

$$\theta(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x, t) dt. \quad (3.16b)$$

Важно учесть, что x, t — лабораторные координаты для СИП в том виде, как они появляются в уравнениях (3.7): заметьте, что переход после (3.8) к новым координатам ξ, τ необходим для получения ковариантной формы (3.9).

Для остро резонансной задачи $\beta \sim \delta(0)$, где $\delta(x)$ — это δ -функция [3.1], [3.14], [3.31]. Следовательно, единственными допустимыми площадями являются нули функции $\sin \theta + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \theta$, а именно $0, 2\pi, \delta$ и $4\pi - \delta \pmod{4\pi}$. Небольшое размышление позволяет установить, что эта теорема площадей соответствует поглотителю с г. у. $u \rightarrow 0 \pmod{4\pi}$, $|x| \rightarrow \infty$ и что площади δ и $4\pi - \delta$ достигаются в усилителе, описываемом формулами $P^{(i)} = \sin \kappa^{(i)} u$, $N^{(i)} = \cos \kappa^{(i)} u$ [ср. с выбором знаков для вывода уравнения (3.8)], и $u = 0$. Для этого усилителя справедливо решение (3.12) с $v > 1$, но он является неустойчивым к замене площади 4π на площадь $4\pi - \delta$. Теорема площадей имеется для всех типов г. у.; фундаментальные площади имеют вид $\theta = 0, 2\pi, 4\pi$; $\theta = 0, 2\pi, 4\pi$; $\theta = 0, 4\pi - 2\delta, 4\pi$; $\theta = 0, 2\delta, 4\pi$. Решения (3.12) — (3.15) суть распространяющиеся без искажения решения, отвечающие каждому из этих случаев.

В оптической задаче коллективные состояния оптической среды $u = 2\pi, \delta$ и $4\pi - \delta$ являются возбужденными и, как отмечалось в разд. 3.1, неустойчивы из-за спонтанного излучения. Хотя в инфракрасной области эти состояния могут длиться ~ 1 с [3.2, 3.37], экспериментально они не были получены. Состояние $u = 0$, если оно является абсолютным основным состоянием, не подвержено такой неустойчивости. Мы поэтому сконцентрируем свое внимание на решениях вида (3.12).

Очевидно, что оптический импульс (3.12) имеет два максимума; то же самое справедливо и для ассоциированной с ним энергии \mathcal{E}^2 . Аналитическая форма этого решения позволяет предположить, что другие приближенные решения уравнения (3.9) можно получить изменением Δ . Легко видеть, что эта

форма устойчива даже при больших изменениях Δ : нужно рассмотреть единственный 2π -импульс $\mathcal{E} = 2\omega \operatorname{sech} \theta$, входящий в 2-спиновую вырожденную среду. Такие импульсы поворачивают «тяжелый» спин (с матричным элементом ρ) на 2π , а «легкий» спин (с матричным элементом $1/2\rho$) на π . Они оставляют за собой, следовательно, шлейф возбуждений $u = 2\pi$ (легкий спин вверх — тяжелый вниз), теряют энергию (и амплитуду) и замедляются. Рассмотрим теперь второй 2π -sech-импульс, входящий в среду $u = 2\pi$, возбужденную первым 2π -импульсом. Этот второй импульс восстанавливает ориентацию «вниз» обоих атомных спинов, приобретает энергию, ускоряется и (как показывают результаты численного счета) проходит сквозь медленный 2π -sech-импульс, подобно s-G-солитонам. Впоследствии он теряет энергию, отдавая ее среде впереди себя, и замедляется, в то время как предыдущий медленный 2π -импульс, имея перед собой состояние $u = 2\pi$, приобретает энергию и ускоряется. На таких крупных масштабах мы будем называть движение «чехардой» оптических импульсов [3.2, 3.10]. Но любые два кинка типа (3.12) с $\Delta \neq \ln(2 + \sqrt{5})$ распадаются на осцилляции с конечной энергией связи: само решение (3.12) является связанным состоянием пары 2π -sech-импульсов, находящихся в положении равновесия. Отметим, что плотность гамильтониана для уравнения (3.8) имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} u_v^2 + \frac{1}{2} u_k^2 + V(u),$$

$$V(u) = \left(2 - \cos u - \cos \frac{1}{2} u \right). \quad (3.17)$$

$V(u)$ имеет глубокие минимумы при $u = 0$ и $u = 4\pi$ (где $V(u) = 0$) и более мелкий минимум при $u = 2\pi$ (где $V(u) = 2$). Вероятно, полезно рассмотреть возмущенное осциллирующее решение как кинк, вставленный между двумя глубокими минимумами и способный к осцилляциям, ассоциированным с более мелким минимумом [3.35]. Такой кинк обязательно устойчивый, поскольку он стабилизируется топологически из-за скачка в 4π ¹⁾.

Из проделанного анализа вытекает вывод, что и для малых, и для больших изменений Δ 4π -кинки (3.12) имеют внутренние осцилляции, которые могут быть приближенно интерпретированы как осцилляции связанной пары 2π -кинков для СГ-уравнения. Численное интегрирование уравнения (3.9) полностью подтверждает эти выводы [3.2, 3.4, 3.31]. На рис. 3.1 изображено поведение одного 4π -кинка с Δ , слегка отличным от

¹⁾ Введение в топологические солитоны для неспециалистов см. в [3.88]. Следует предостеречь читателя, что только s-G-солитоны, рассматриваемые там, являются солитонами в том смысле этого слова, как оно используется в настоящей книге.

$\ln(\sqrt{5} + 2)$. Мы построили график этого кинка (т. е. u), чтобы можно было увидеть наличие излучения у изгибов этого «воблера». А на рис. 3.2 мы изобразили электрическое поле \mathcal{E} и столкновение двух оптических 4π -импульсов, каждый из которых первоначально находился в равновесии ($\Delta = \ln(\sqrt{5} + 2)$).

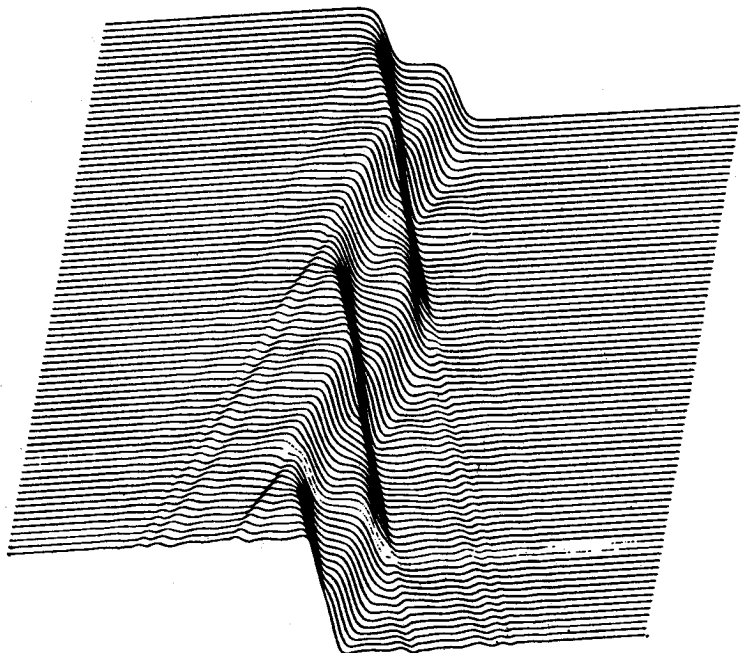


Рис. 3.1. Один «качающийся» 4π -кинк двойного уравнения sine-Gordon с положительным знаком (и $\lambda = 1$). Обратите внимание на излучение, особенно в местах встречи 2π -кинков.

Может показаться, что рис. 3.2 хорошо иллюстрирует основное свойство столкновения солитонов, описанное в гл. 1; однако рассмотрение подробностей обнаруживает, что после столкновения испускается некоторое излучение, и, с нашей теперешней точки зрения, это существенно¹⁾.

Осталось увидеть такое поведение в лаборатории. По счастью, среди переходов $D_1 2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$ в парах натрия (очень удобных для исследования по СИП [3.39]) есть переход $F = 2 \rightarrow F' = 2$ между сверхтонкими уровнями. Имеются дополнительные переходы: низший уровень $2S_{1/2}(F = 1)$ отстоит на

¹⁾ К сожалению, все численные результаты даже для интегрируемых систем типа ГГ-уравнения обнаруживают наличие излучения. Проблема в том, чтобы определить его значимость (см. [3.28]).

1772 МГц от $F = 2$, и этот интервал между уровнями хорошо высвечивается импульсом в 5 нс. Верхний уровень $2P_{1/2}(F' = 2)$ отстоит от состояния $F' = 1$ только на 192 МГц, и такой интервал находится на пределе разрешения импульсом в 5 нс. На первый взгляд при наличии разрешения задача имеет $Q(2)$ -симметрию, а в противном случае имеется трехуровневая атом-

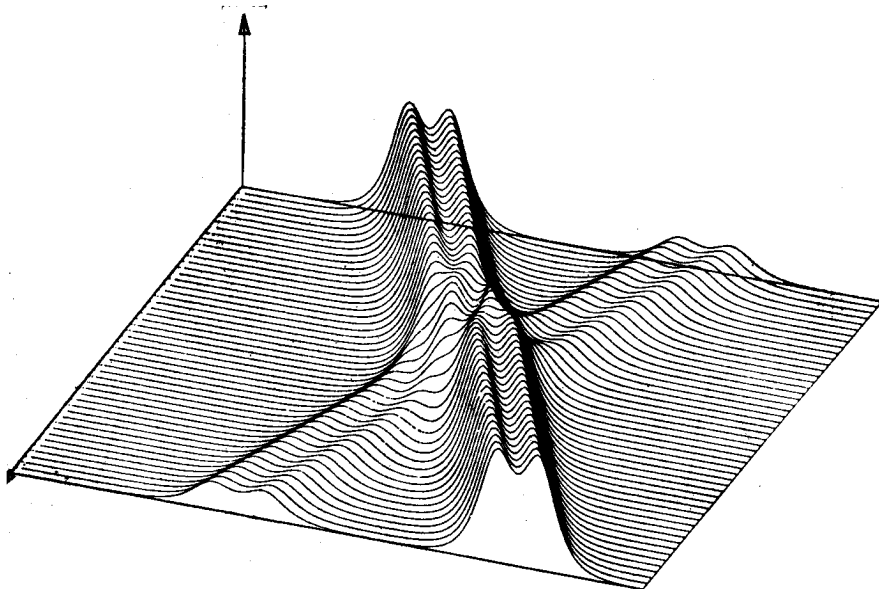


Рис. 3.2. Столкновение двух 4 π -кинков двойного уравнения sine-Gordon, каждый из которых перед столкновением находился в состоянии равновесия (без «качаний»). Изображено электрическое поле (производная u).

ная система с двойным нижним уровнем $F = 2$. Однако доплеровский эффект порядка 1700 МГц, возникающий из-за движения атомов, означает, что оба перехода $F = 2 \rightarrow F' = 2$ и $F = 2 \rightarrow F' = 1$ попадают в точный резонанс с двумя различными группами атомов. Таким образом, с одной стороны, оба перехода являются возбужденными, а с другой — каждому переходу можно приписать свой спин. В результате получаются переходы с тремя различными матричными элементами ρ , $\frac{1}{2}\rho$, $\sqrt{3/2}\rho$ и весами 3, 2 и 2. Уравнение движения вместо уравнения (3.9) является тройным СГ-уравнением

$$u_{\xi\xi} - u_{\tau\tau} = 3 \sin u + \sin \frac{1}{2}u + \sqrt{3} \sin \sqrt{3/2}u. \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) интересно тем, что его нелинейный член неперриодичен. Его нули расположены в 1.1π , 2.2π , 3.0π , 4.2π , ...

..., 7.8π , Его траектория на фазовой плоскости с началом в точке $u = 0$ показана на рис. 3.3. Следует обратить внимание на чередование высоких и низких минимумов в каждом втором нуле. Справедлива теорема площадей типа (3.16а), где в правой части теперь стоит $\pm \beta \left[3 \sin \theta + \sin \frac{1}{2} \theta + \sqrt{3} \sin \sqrt{3/2} \theta \right]$. Площади 4.2π и 7.8π , отвечающие глубоким минимумам на

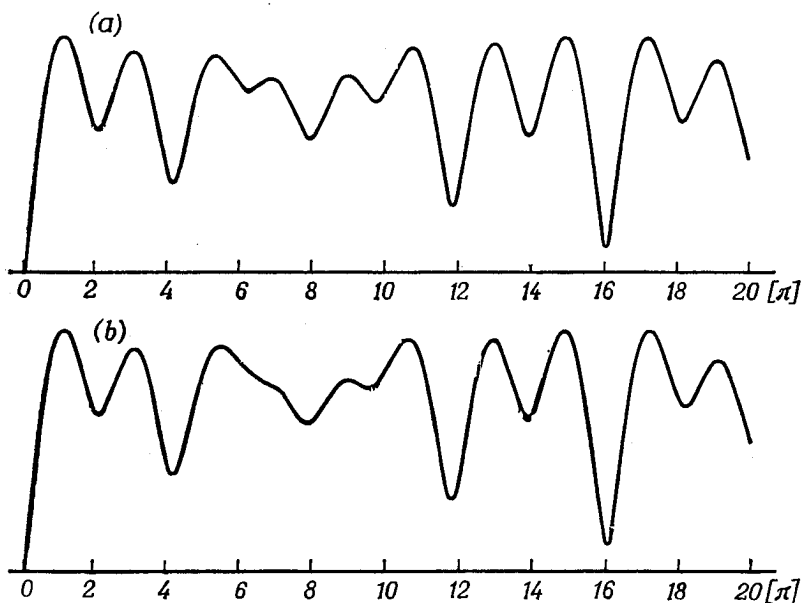


Рис. 3.3. (а) Траектория уравнения (3.18) на фазовой плоскости, выходящая из $u = 0$, отвечающая переходу $\text{Na D}_1 (F = 2 \rightarrow F' = 1, 2)$; (б) соответствующая траектория для перехода $\text{Na D}_1 (F = 1 \rightarrow F' = 1, 2)$.

рис. 3.3, не только устойчивы согласно теореме площадей, но и отдают меньше всего энергии на возбуждение атомов: результаты численного счета [3.31] показывают, например, что 6.2π -импульс отдает импульс площади 2π на границе среды и что остающийся импульс превращается в 4.2π -вобблер с двумя горбами. В эксперименте, описанном в [3.10], такой вобблер наблюдался.

Эксперимент состоял в том, что плосковолновой импульс¹⁾ с площадью примерно 4π , длительностью 5 нс, интенсивностью

¹⁾ Все импульсы имеют конечную поперечную апертуру, и в принципе возможны как самофокусировка всего луча, так и расщепление (см. [3.42]). Первое исключается выбором достаточно большого диаметра луча. Соответствие плосковолновой модели исключает и фокусировку, и расщепление. Для специалистов укажем, что импульсы длительностью примерно 5 нс были получены усилением выходного луча лазера непрерывного действия на красителе

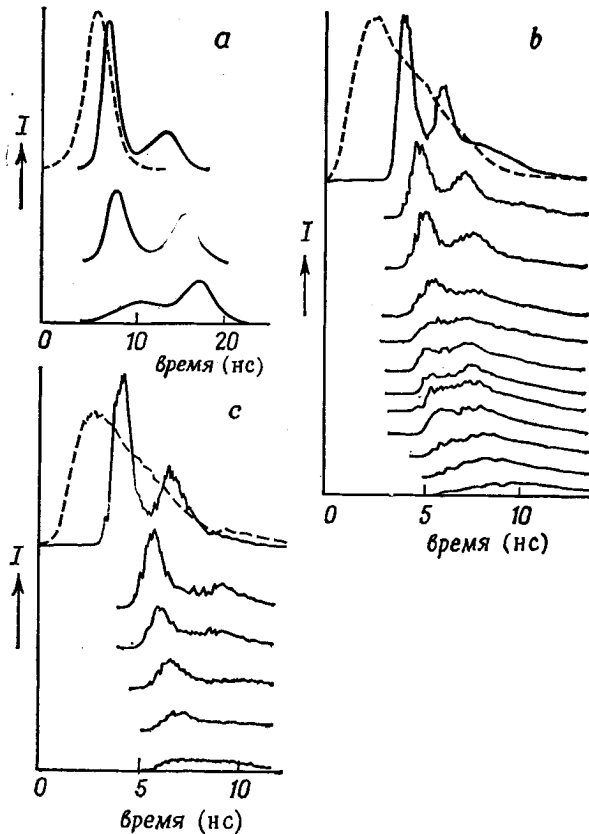


Рис. 3.4. *a* — *c*. «Качание» в случае самоиндуцированной прозрачности: *a* — численное моделирование для $Q(2)$ с затуханием; *b* — экспериментальные данные для вырожденного перехода $\text{Na } D_1 (F = 2 \rightarrow F' = 1, 2)$ в нулевом магнитном поле; *c* — экспериментальные данные для невырожденного перехода $\text{Na } D_1 (M_j = -1/2 \rightarrow M_j' = +1/2)$ в поле 5 кГаусс. Кривые с меньшим нулевым значением отвечают более высокому поглощению. Входной импульс изображен штриховой линией.

порядка нескольких $\text{Вт}/\text{см}^2$ в точке максимума, посылается в камеру длиной 1 см, заполненную парами натрия; наблюдение производится на выходе. Эффективная длина камеры

(типа 580 CW фирмы Spectra Physics) с помощью однопроходного усилителя на красителе с N_2 -накачкой. Выполнение условий однородной плоской волны действительно хорошо соблюдалось: входной луч имел несколько миллиметров в диаметре и обладал малой расходимостью, а результат на выходе из камеры увеличивался в четыре раза и падал на кремниевый лавинный фотодиод диаметром 280 мкм. Сигнал на выходе фотодиода регистрировался стробируемым осциллографом с разрешением не хуже 1 нс, стробируемым интегратором и записывающим устройством.

меняется при помощи изменения плотности паров натрия внутри нее. В результате на детектор подаются профили различной интенсивности. На рис. 3.4, *a* показаны расчетные значения последовательных профилей интенсивности для $Q(2)$ -систем, описываемых уравнением (3.9): данные взяты для сверхтонких D_1 -переходов $F = 2 \rightarrow F' = 2$ в Na; каждый профиль, однако, характеризуется определенной константой затухания. Значения этих констант таковы: $T_1 = 24$ нс, $T_2 = 48$ нс; они близки к значениям, типичным для трехуровневого атома Na¹⁾. Численное моделирование показывает, что для двугорбого вобблера передний максимум сначала уменьшается, в то время как задний максимум увеличивается — даже при учете затухания. На рис. 3.4, *b* изображена последовательность реально наблюдавшихся на выходе результатов. Механизм затухания (однородное расползание или спонтанное излучение) приглушает как передний, так и задний максимум, но не настолько, чтобы нарушить уменьшение переднего пика, ясно видное на рис. 3.4, *b*. Для сравнения на рис. 3.4, *c* эксперимент повторен с магнитным полем в 5 кГс. Это поле расщепляет сверхтонкую вырожденность, и система описывается СГ-уравнением. Входные 4π -импульсы теперь распадаются на 2π -импульсы с большей амплитудой (равно как и с большей скоростью) переднего импульса. Механизм затухания в основном заглушает более слабый задний импульс (по-видимому, это можно показать с помощью теории возмущений; эксперименты определенно подтверждают подобный вывод²⁾), и в рассматриваемой последовательности *задний* импульс оказывается уменьшающимся. Разумеется, наблюдение распада реальных импульсов окончательно решило бы этот вопрос, но четкий распад импульсов в невырожденной СИП был получен при других обстоятельствах — опять же в парах натрия [3.40].

Этот обнадеживающий результат, относящийся к нелинейной оптике, является одним из многих недавно полученных;

¹⁾ Фактически были взяты значения для переходов $2S_{1/2} F = 2 \rightarrow 2P_{1/2} F = 1, 2$, затухающих из-за спонтанного излучения. Времена релаксации слегка меняются от перехода к переходу, но все они близки к значениям $T_1 = 24$ нс, $T_2 = 48$ нс для сильных магнитных полей, используемым при численном моделировании. Можно сослаться на диссертацию Г. Саламо (Университет Сити, Нью-Йорк, 1974), где показаны отношения ветвления для каждого из подсостояний F, M_F . Дело в том, что каждое возбужденное подсостояние имеет время жизни 16 нс, но ответвление к нижнему состоянию ($\Delta M_F = 0$) отлично от ответвления ко всем другим состояниям ($\Delta M_F = \pm 1$). Так что, строго говоря, времена T_1 и T_2 иные. Мы полагаем, что влияние этих различий пренебрежимо мало.

²⁾ Например, если взять 5π -импульс, демонстрирующий хороший распад, и при этом увеличить поглощение (и, следовательно, потери), то можно увидеть, что второй импульс вымрет первым. То же самое можно увидеть со слабой фокусировкой, чтобы компенсировать потери, увеличивающие разделенные импульсов.

другие — это (а) наблюдение распада четкого импульса в невырожденных парах натрия (см. упоминавшуюся работу [3.40]); (б) наблюдение самофокусировки и некоторого расщепления луча для невырожденной СИП при конечном поперечном сечении падающего луча [3.12, 3.41, 3.42]; (в) наблюдение взаимодействия противоположно направленных оптических импульсов в натрии [3.13, 3.42] и (г) наблюдение «суперфлюоресцентного» излучения одиночного импульса [3.43] в парах цезия [3.44]. Распад (а) есть прекрасный пример распада солитонов; самофокусировка (б) могла быть предсказана (см. [3.13]), но уравнения невырожденной (и вырожденной) СИП, по-видимому, неустойчивы по отношению к самодефокусировке [3.13, 3.45]; наблюдение расщепления луча наводит на мысль о поперечном солитоноподобном распаде (см. разд. 1.4 и цитированные там статьи); взаимодействие (в) противоположно направленных оптических импульсов сопоставимо с тем фактом, что уравнения СИП (3.7) не инвариантны относительно замены $x \rightarrow -x$, и, по-видимому, эта система становится неинтегрируемой в случае, когда огибающие импульсы движутся в противоположных направлениях (по поводу подходящих уравнений для этого случая см., например, [3.13]); суперфлюоресценция одиночного импульса (г) связана с теорией СГ-уравнения с граничными и начальными условиями, весьма отличными от тех (а именно $u \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$, $u_x, u_{xx} \rightarrow 0$; $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$), для которых оно имеет солитонные решения. Соответствующая краевая задача такова: $u(0, t) = u_t(0, t) = 0$; $u(x, 0) = \varepsilon_0$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 < x < L$; $10^{-2} \leq \varepsilon_0 < 10^{-10}$, и используется неустойчивый вариант СГ-уравнения $u_{xt} = -\sin u$ [3.43].

3.3. Спиновые волны в жидком ${}^3\text{He}$

Экспериментальные результаты, описанные в разд. 3.2, показывают, как нелинейная оптика может влиять на теорию солитонов. Ее значение для развития предмета описано в разд. 1.3. Ядерный магнитный резонанс (ЯМР) использовался для изучения свойств магнитных жидкостей ${}^3\text{He}$ А и ${}^3\text{He}$ В. Движение ядерных спинов определяется уравнениями Блоха, описывающими нелинейные осцилляторы в пространственно-однородной ситуации. Именно этот аспект мы и разберем ниже.

В работе [3.3] мы ввели «адиабатическую» плотность гамильтониана \mathcal{H} , обобщающую предложенную Леггеттом [3.19] для описания необычных ЯМР-спектров, наблюдаемых в ${}^3\text{He}$ А и ${}^3\text{He}$ В. Плотность гамильтониана имеет вид

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \gamma^2 \chi^{-1} \sigma_w^2 - \gamma \sigma_w B_0 + \frac{1}{4} \gamma^{-2} \bar{c}^2 \nabla \theta \cdot \underline{\rho} \cdot \nabla \theta + H_D(\theta); \quad (3.19)$$

$\gamma = e/mrc$ — гиромагнитное отношение, χ — магнитная восприимчивость, \bar{c} — скорость ($\leq v_F \sim 10^3$ см/с) и $H_D(\theta)$ — дипольное взаимодействие; $\underline{\rho} = \text{diag}(2, 1, 2)$ для ${}^3\text{He B}$ и $\underline{\rho} = \text{diag}(2, 2, 1)$ для ${}^3\text{He A}$ из-за различия выделенных направлений y и z в этих двух фазах [3.3], а дробь «1/4» введена для того, чтобы \bar{c} в каждом из случаев была бы скоростью спиновой волны [3.3, 3.4]; σ_w — оператор спина в спиновом пространстве с координатами (u, v, w) , и по техническим причинам [3.3] (u, v, w) соответствует (z, x, y) ; B_0 — постоянное однородное магнитное поле, направленное вдоль оси y , являющейся также осью w ; $\mathcal{H}(x)$ нужно брать с коэффициентом $\rho_s \hbar$, где ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты. «Параметры порядка», определяющие состояния сверхтекучего ${}^3\text{He}$, весьма сложны, и для неспециалиста достаточно уяснить себе, что (3.19) есть обычная плотность гамильтониана, описывающая распространение спиновых волн в этих веществах.

Для уравнений движения введем частоту $\Omega_\chi \equiv 4\gamma^2\chi^{-1}$, продольную ЯМР частоту Ω_l и константу связи $\gamma_0 = \Omega_\chi\Omega_l^{-1}$ (по техническим причинам [3.3, 3.4] $\Omega_l = \Omega_{lA}$ для ${}^3\text{He A}$, но $\Omega_l = 4\Omega_{lB}/15$ для ${}^3\text{He B}$). Введем обычные коммутационные соотношения

$$[\sigma_w(x, t), \theta(x, t)] = i\delta(x - x'). \quad (3.20)$$

Уравнения Гейзенберга имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_t &= \gamma^2\chi^{-1}\sigma_w - \gamma B_0, \\ \sigma_{w,t} &= -\delta H_D/\delta\theta + \frac{1}{2}\chi\gamma^{-2}c^{-2}\nabla \cdot \underline{\rho} \cdot \nabla\theta, \end{aligned} \quad (3.21a)$$

и

$$\theta_{tt} = \frac{1}{2}c^{-2}\nabla \cdot \underline{\rho} \cdot \nabla\theta - \gamma^2\chi^{-1}\delta H_D/\delta\theta, \quad (3.21b)$$

где

$$[\theta, \theta_t] = i\gamma^2\chi^{-1}\delta(x - x'). \quad (3.21c)$$

Для А-фазы имеем [3.3, 3.7, 3.19]

$$H_D(\theta) = -\frac{3}{5}g_{DA}(T)\cos^2\theta + \text{const}, \quad (3.22a)$$

а для В-фазы [3.3, 3.8, 3.19]

$$H_D(\theta) = \frac{4}{5}g_{DB}(\cos\theta + \cos 2\theta) + \text{const}. \quad (3.22b)$$

В обоих случаях величина g_D зависит от температуры T , которая войдет и в Ω_l . Второе выражение (3.22b) представлено в виде, который свидетельствует о двухспиновом описании двойного уравнения sine-Gordon — отметим, однако, отличие в знаке от выражения (3.17).

Рассмотрим плоские волны, распространяющиеся вдоль направления B_0 (по оси y) и вращающиеся в плоскости (x, z) .

Это происходит из-за стремления спинов расположиться параллельно направлению так называемого орбитального вектора \hat{I} в А-фазе, а \hat{I} расположен перпендикулярно B_0 ; в В-фазе нет орбитального вектора, и B_0 определяет естественную ось вращения, параметризованного углом θ . Удобно переименовать ось y (направление B_0) через x .

Для А-фазы получим

$$\theta_{tt} - \bar{c}_A^2 \theta_{xx} = -\Omega_{IA}^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.23)$$

$[\Omega_{IA}^2 = \frac{6}{5} g_{DA}(t) \gamma^2 \chi^{-1}]$. Для В-фазы

$$\theta_{tt} - \bar{c}_B^2 \theta_{xx} = \frac{4}{15} \Omega_{IB}^2 (\sin \theta + 2 \sin 2\theta) \quad (3.24)$$

$[\Omega_{IB}^2 = 3g_{DB}(T) \gamma^2 \chi^{-1}]$. Положим $u = -2\theta$ (А-фаза) и $u = 2\theta$ (В-фаза). Заменяем t на $\Omega_I t$. Получаем операторные уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u \quad (3.25)$$

(А-фаза) и

$$u_{xx} - u_{tt} = -\left(\sin u + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} u\right) \quad (3.26)$$

(В-фаза) с коммутационным соотношением

$$[u, u_t] = i\gamma_0 \delta(x - x') \quad (3.27)$$

для обоих случаев.

«Матрица энергетической щели», определяющая θ [3.4], является c -числом, так что и θ есть c -число. Тем не менее спиновая волна элементарных возбуждений при температуре ниже 2.6 мК может быть проквантована. В этом случае уравнения (3.25), (3.26) должны решаться как операторные. Спектр уравнения (3.25) найден Лютером в гл. 12; он упоминался в гл. 1 в связи с выражением (1.104). Для квантового двойного уравнения sine-Gordon с любым знаком в (3.1) даже не найден спектр, хотя известно, что его S -матрица разложима [3.46]¹⁾.

¹⁾ Квантование спиновых волн могло бы привести к интересным следствиям. Нами вычислена величина $\gamma_0 \sim 10^5$ [3.4, 3.5]. В А-фазе для СГ-уравнения (и, возможно, в В-фазе для двойного уравнения sine-Gordon) столь большое значение величины γ_0 разрушает бризерный спектр. Этот результат следует из (1.105), поскольку количество квантовых бризеров $N < 1$ для больших значений γ_0 (наблюдаемое перенормированное значение γ_0 заменяет γ_0 в (1.105)). Несмотря на очень низкие температуры, при которых существуют эти элементарные спиновые возмущения, наш вывод тем не менее состоит в том, что спиновые волны не квантованы. Это согласуется с тем, что параметр порядка является c -числом [3.4, 3.5], с большим радиусом корреляций $\bar{c}\Omega_I^{-1}$, с обсуждающимся ниже эффектом «звона», который наблюдали Уитли [3.17], а также с соображением, которое мы обсудим ниже, что сам «звон» может в сильной степени зависеть от бризеров [3.48]. Отметим, что во всяком случае гамильтониан (3.19) должен быть умножен на ρ_s , плотность сверхтекучей компоненты на единицу длины (т. е. $\rho_s \Omega_I \bar{c}^{-1}$). В частности, если на это

Уравнение (3.26) для c -чисел имеет плотность гамильтониана

$$\mathcal{H}(x) = \gamma_0^{-1} \left[\frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} u_t^2 + 2 \left(\cos \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \right)^2 \right]. \quad (3.28)$$

Минимумы дипольного взаимодействия имеются при $u = \delta = 2\arccos(-1/4)$ и при $4\pi - \delta$. Имеются два решения-кинка постоянной формы, а именно (3.14), (3.15). Помня о лоренц-ковариантности уравнения (3.26) в переменных x, t , мы можем переписать эти решения в другом виде:

$$\begin{aligned} u &= 2\pi + 4 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \right), \\ u &= 4 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \right), \\ \theta &= \chi(x - Vt), \quad \chi = \sqrt{\frac{15}{16}} (1 - V^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Первое из решений является $(4\pi - 2\delta)$ -кинком, расположенным между минимумами δ и $4\pi - \delta$ дипольной энергии; второе — это 2δ -кинк, расположенный между $-\delta$ и $+\delta$.

Эти два кинка могут лишь отскочить друг от друга при столкновении: они не могут пройти один через другой подобно солитонам, поскольку $2\delta \neq 4\pi - 2\delta$. Графики производных этих кинков при соударениях (т. е. \mathcal{E} в (3.14), (3.15)) приведены, например, в [3.3], [3.4], [3.14], [3.31]. Аналогичные результаты для тройного уравнения sine-Gordon имеются в [3.14], [3.37].

Эти два кинка имеют энергии покоя и эффективные массы покоя, а именно $5.1097 \gamma_0^{-1}$ единиц для $4\pi - 2\delta$ и $11.3929 \gamma_0^{-1}$ единиц для 2δ . Когда сталкивается 2δ -пара кинк — антикинк, они могут проходить друг через друга, сохраняя г. у. $u \rightarrow -\delta$, $|x| \rightarrow \infty$, что приводит к образованию $-(4\pi - 2\delta)$ -пары антикинк — кинк. Численные расчеты [3.4, 3.5, 3.8, 3.33, 3.47] показывают, что именно так обстоит дело для любых взаимных скоростей v в системе центра масс. Во всех случаях имеется добавочное излучение, испускаемое после столкновения.

Когда сталкивается $(4\pi - 2\delta)$ -пара кинк — антикинк, появляются два осложнения: хотя г. у. $u \rightarrow \delta$, $|x| \rightarrow \infty$ согласуется и с $(4\pi - 2\delta)$ -парой кинк — антикинк, и с $(4\pi - 2\delta)$ -парой анти-

число умножить плотность гамильтониана (3.28), то получится интуитивно верный результат, поскольку γ_0 будет делиться на этот множитель. Неясно, однако (для нас), какое значение следует взять для $\rho_s \Omega_i \bar{c}^{-1}$ в одномерном случае. Также неясно, приведет ли этот коэффициент при плотности гамильтониана к самосогласованной одномерной теории.

По поводу нахождения спектра квантового СГ-уравнения см. гл. 12 этой книги, а также цитированную там литературу, работы [1.42, с. 114—117], [3.13] или более раннюю работу Фаддеева [1.41], а также [1.40]. См. также обзор Фаддеева и Корепина [1.218], недавнюю работу Фаддеева, цитированную в гл. 12, и [1.221].

кинк — кинк, имеется пороговое значение $V = 0.8938$, ниже которого энергия $(4\pi - 2\delta)$ -пары недостаточна для создания массы покоя 2δ -пары, и в этом случае $(4\pi - 2\delta)$ -пара неупруго соударяется, а из-за потерь на излучение реальная величина порога возрастает до $V = 0.925$ [3.4, 3.33]. Имеется также нижний порог порядка $V = 0.36$ [3.33, 3.48]. Здесь сближающиеся $(4\pi - 2\delta)$ -пары теряют мало энергии на излучение и образуют долгоживущее бризероподобное связанное состояние. На рис. 3.5 показаны кинк и антикинк, каждый с $V = 0$, превращающиеся в такое бризероподобное состояние под действием взаимного притяжения. На рис. 3.6 изображено поведение для $V = 0.36$.

Представляется возможным, что эти возникшие бризеры могут быть приведены в движение пространственно-однородным гармоническим продольным полем. Если заменить B_0 в (3.19) на $B_0 + B_1 \cos t$, то уравнение (3.26) примет вид

$$u_{xx} - u_{tt} = - \left(\sin u + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} u \right) - \gamma \omega \Omega_I^{-2} B_1 \sin(\omega \Omega_I^{-1} t). \quad (3.30)$$

В соответствующем А-фазе случае СГ-уравнения при наличии затухания, рассматривая уравнения как уравнения для s -чисел, Кауп и Ньюэлл [3.49] показали при помощи сингулярной теории возмущений, что бризеры СГ-уравнения синхронизированы по фазе на частоте ω в промежутке ниже ЯМР-частоты Ω_{IA} . В В-фазе ситуация не совсем такая, поскольку потенциал $V(u) = 2(\cos u/2 + 1/4)^2$ не симметричен в окрестности минимумов δ или $4\pi - \delta$; бризерный спектр здесь также неизвестен. Однако по-прежнему частота ω лежит ниже Ω_{IB} . В работе [3.48] мы отмечали, что для рассматриваемых там граничных условий (которые в лучшем случае могут лишь аппроксимировать физическую ситуацию, так что к выводу следует относиться соответственным образом) бризерные решения должны играть роль в ЯМР-эффекте. Конечно же, сопутствующие ЯМР частоты от «составных решений» дают о себе знать [3.9], но это, в сущности, статический эффект. В настоящее время у нас нет никаких данных, которые могли бы свидетельствовать о влиянии перемещения бризеров на ЯМР-эффект.

Спиновые волны в ${}^3\text{He}$ А и в ${}^3\text{He}$ В могут быть созданы при помощи магнитного удара. Предположим, что в формуле (3.19) B_0 снова является однородным при $t > 0$, а при $t < 0$ имеется добавочное неоднородное поле $\Delta B_0(x)$, которое выключается при $t = 0$ (такой метод был предложен также в [3.8]). В работе [3.48] мы показали приближенную эквивалентность этой задачи в А-фазе решению уравнения (3.25) (для s -чисел) со следующими условиями: $u \rightarrow 0$, $u_x \rightarrow 0$, $u_{xx} \rightarrow 0$ и т. д.; $|x| \rightarrow \infty$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 2\pi$ при $|x| < l$; $u_t(x, 0) = 0$ при $|x| > l$;

$$(3.31)$$

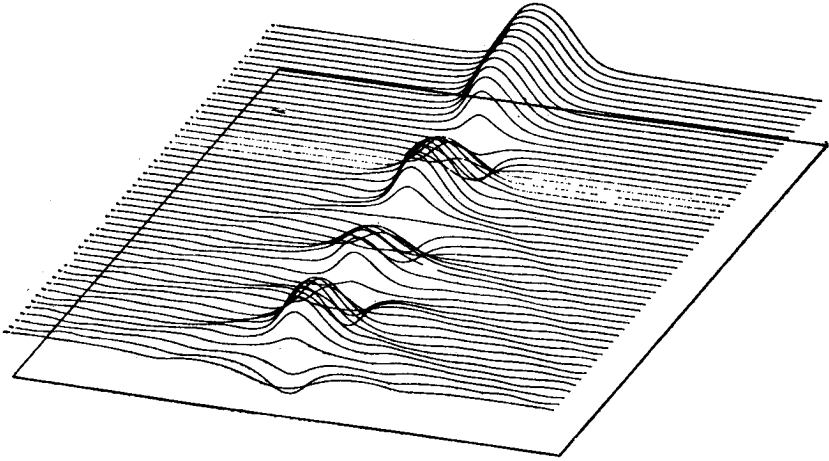


Рис. 3.5. Долгоживущее бризероподобное состояние уравнения (3.1) (с отрицательным знаком и $\lambda = 1$), образующееся при падении друг на друга $(4\pi - 2\delta)$ -кинка и антикинка ($V = 0$). Обратите внимание на слабое излучение, испускаемое при скоростях ± 1 ($\pm \bar{c}$). Время t направлено к наблюдателю; переменная x возрастает слева направо. Граничные условия имеют вид $u \rightarrow \delta = 2 \arccos(-1/4)$ при $|x| \rightarrow \infty$.

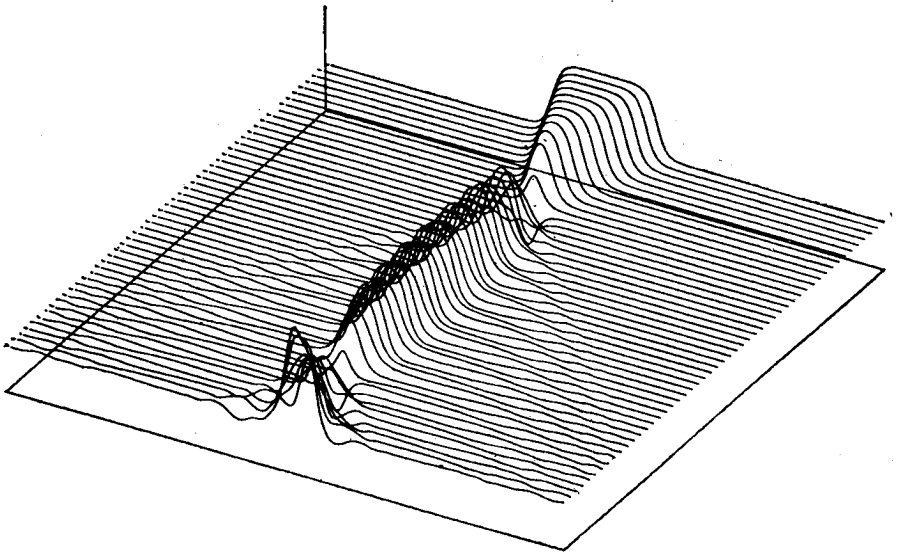


Рис. 3.6. Поведение $(4\pi - 2\delta)$ -пары кинк — антикинк двойного уравнения sine-Gordon вблизи порога ($V = 0.36$) для образования бризера. Обратите внимание на нерегулярность поведения и на возросшее по сравнению с рис. 3.5 излучение. (Время t направлено вперед).

(l — длина в безразмерных единицах, а τ — частота в аналогичных единицах). Кауп [3.50] частично решил такую задачу Коши, и мы отсылаем читателя к его статье по поводу деталей простого, но искусного применения метода обратной задачи. Маки и Кумар [3.8] развили другой метод, прямо применимый к задаче о спиновых волнах в He. Для наших целей существенно

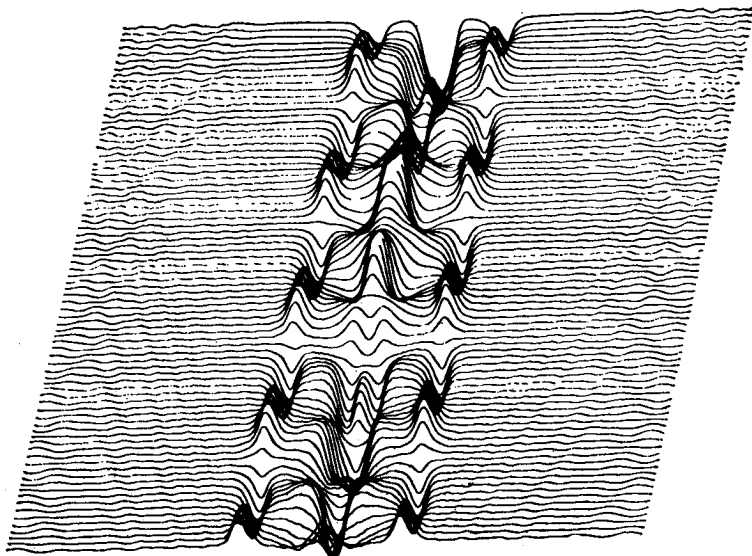


Рис. 3.7. Пять стоячих бризеров уравнения sine-Gordon, образующихся из начальных условий $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) \leq 2$, $|x| < 15$, $u_t(x, 0) = 0$, $|x| > 15$. Время отсчитывается от $t = 60\sqrt{2}$ и направлено в сторону от наблюдателя. Обратите внимание на имеющуюся у этих бризеров тенденцию к излучению.

отметить, что при $\tau < 1$ возникают стационарные бризеры, а не кинки: каждый стационарный бризер имеет вид (1.31). Проведенный Каупом анализ показал, что число таких бризеров равно целой части от $(l\tau/\pi) + 1/2$. В реальных единицах $l\tau = (L\lambda_A^{-1})(\gamma\Delta B_0\Omega_{IA})^{-1}$, где радиус корреляции $\lambda_A = 2\pi\Omega_{IA}^{-1}\bar{c}_A$. Поскольку длина образца $L \leq 1$ см, $\bar{c}_A \leq 3 \times 10^3$ см/с и вблизи критического значения $\Delta B_0 \sim \Delta B_{oc}$ (см. [3.47], а также ниже) $\gamma\Delta B_0 \sim \Omega_{IA} \sim 10^6$ рад/с, то $l\tau$ может быть больше ≥ 300 (для $\bar{c}_A \sim 10^2$ см/с, $l\tau \sim 3000$). На каждый бризер приходится по два собственных значения ассоциированной задачи рассеяния, так что количество собственных значений ≥ 600 (для $\bar{c}_A \sim 10^2$ см/с ≥ 6000). Здесь, однако, наиболее интересен теоретически случай узкой области магнитных возбуждений, где $L \ll 1$ см и $l\tau \ll 10$, хотя, конечно, его трудно реализовать эксперимен-

тально. На рис. 3.7 изображен случай $\tau < 1$ и 5 стационарных бризеров. Рисунок не охватывает начальный период возникновения этих бризеров (по поводу этого интересного периода см. некоторые рисунки в [3.47], а также рис. 3.8); время на рис. 3.7 начинается с момента $t = 60 \sqrt{2}$, и из рисунка видно, что даже по прошествии столь длительного промежутка времени стационарные бризеры являются устойчивыми решениями типа стоячих волн и не имеют тенденции перемещаться.

Ниже при помощи анализа поведения на фазовой плоскости в синхронной системе мы покажем, что значение $\tau = 1$, где $\gamma \Delta B_0 = \gamma \Delta B_{0c} \equiv \Omega_{IA}$, имеет «критический» характер: можно ожидать, что оно остается критическим также в пространственно неоднородной задаче, и именно так обстоит дело. При $\tau > 1$ пары кинк — антикинк начинают расходиться в противоположных направлениях. На языке данных рассеяния при $\tau > 1$ пары собственных значений ζ , $-\zeta^*$ выходят на мнимую ось и расщепляются на ней. Максимальное число пар кинк — антикинк, которые могут быть таким образом созданы, $\sim l\tau/\pi = \gamma \Delta B_0 L \bar{c}_A^{-1} \pi^{-1}$. Важно, что в то время как стоячие волны бризеров остаются в области $|x| < l$, кинки излучают налево ($x \rightarrow -\infty$), а антикинки — направо ($x \rightarrow +\infty$). Кинки и антикинки не могут излучать в одном и том же направлении.

Соответствующие результаты для В-фазы более запутаны. Прежде всего не известно ни одного решения задачи Коши для уравнения в c -числах (3.26). Во-вторых, поле является критическим при двух значениях $\gamma \Delta B_{0c_1} = \sqrt{3/5} \Omega_{IB}$ и $\gamma \Delta B_{0c_2} = \sqrt{5/3} \Omega_{IB}$; соответствующее критическое значение τ — при $2\tau = 3/2$ и $2\tau = 5/2$. Эти критические поля хорошо известны в пространственно-однородном случае [3.18]; Уитли [3.17] сообщил о предварительных экспериментах, рассчитанных на то, чтобы их обнаружить. В неоднородном случае мы сообщали [3.48] о численных результатах, свидетельствующих о наличии таких критических полей, а также о явлениях, весьма отличных от тех, что имеются для СГ-уравнения в случае А-фазы. Здесь нет места для детального изложения всех этих численных результатов. Но один из особо интересных результатов — то, что выше первого порога, где $\Delta B = \Delta B_{0c_1}$, как $(4\pi - 2\delta)$ -кинки, так и $(4\pi - 2\delta)$ -антикинки излучают в одном и том же направлении.

Исходя из результатов работы [3.48], мы приходим к выводу, что в отличие от случая СГ-уравнения, задача Коши (3.31) для двойного уравнения sine-Gordon с отрицательным знаком, $\lambda = 1$, $u \rightarrow \delta$, $|x| \rightarrow \infty$, $u(x, 0) = \delta$, чувствительна как к l , так и к τ . Имеется порог при $u_l = 2\tau = 3/2$: ниже этого порога образуются только бризеры, но они могут излучать; на самом пороге или выше его могут появляться также излучающие кинки и излучающие пары кинк — антикинк (как уже отмечали,

этот результат резко отличается от случая СГ-уравнения); наряду с этими парами кинк — антикинк могут иметься излучающие бризероподобные возбуждения. Мы отсылаем читателя к нашей статье [3.48], а также к работе [3.32], где на многочисленных рисунках наглядно представлены те численные результаты, на которых мы основываем свои выводы. Здесь мы приведем только результат о прохождении второго критического порога при $u_i = 5/2$.

Граничные условия для решения, изображенного на рис. 3.8, имеют вид $u = \delta$, $|x| \rightarrow \infty$. Пробегая рис. 3.8 справа налево, мы видим, что $\delta \rightarrow 4\pi - \delta \rightarrow 4\pi + \delta \rightarrow 8\pi - \delta \rightarrow 4\pi + \delta \rightarrow 8\pi - \delta$. Следовательно, последовательность кинков и антикинков имеет вид (справа налево): $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинк, -2δ -антикинк, $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинк, $(4\pi - 2\delta)$ -кинк, $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинк. Эта последовательность подтверждает сами собой напрашивающиеся выводы, а именно: 1) для граничных условий $u \rightarrow \delta$, $|x| \rightarrow \infty$ сначала испускается $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинк (или 2δ -

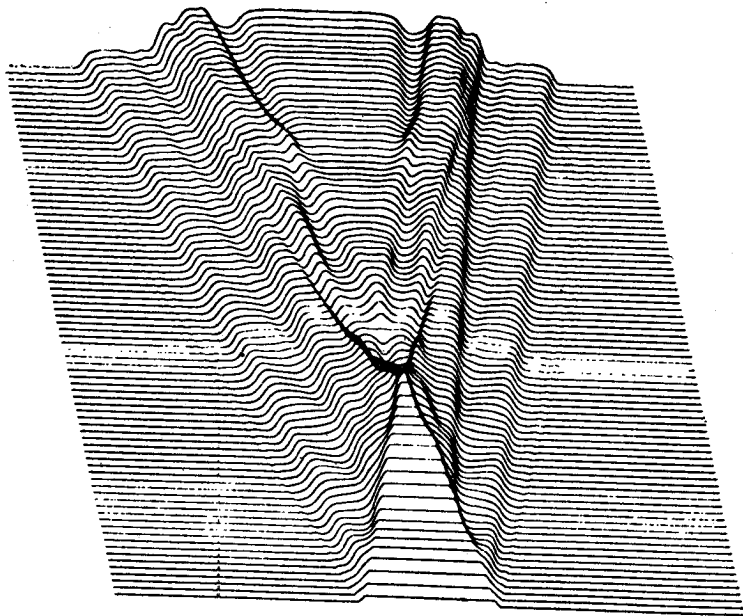


Рис. 3.8. Результат прохода через второй критический порог двойного уравнения sine-Gordon при $u_i = 5/2$; $u_i = 2,6$, $|x| < 15$. Граничные условия заданы в виде $u \rightarrow \delta$, $|x| \rightarrow \infty$; прочитанная справа налево последовательность испускаемых кинков и антикинков такова: $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинк, -2δ -антикинк, $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинк, $(4\pi - 2\delta)$ -кинк, $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинк. Обратите внимание на наличие -2δ -антикинка и 2δ -кинка. Похоже, что в этом примере никаких бризеров не образуется.

кинк); II) за $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинком следует или -2δ -антикинк, или $-(4\pi - 2\delta)$ -кинк. В этом примере нет свидетельств в пользу образования бризероподобных возбуждений, однако представляется вероятным, что при изменении l последняя пара $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинков может образовать связанное состояние в виде исходящего бризера. У нас нет свидетельств даже о наличии уходящих 2δ -пар кинк — антикинк. Мы отмечали, что если такие пары столкнутся, они превратятся в пары $-(4\pi - 2\delta)$ -антикинков, обязательно приобретающие за счет дефекта масс кинетическую энергию, достаточную для преодоления тенденции к образованию бризера. Таким образом, уходящая 2δ -пара кинк — антикинк является, вероятно, неустойчивой по отношению к образованию уходящих $-(4\pi - 2\delta)$ -пар антикинк — кинк.

Упомянутые выше «критические поля» для А-фазы (СГ-уравнение) и В-фазы (двойное уравнение sine-Gordon) обладают тем свойством, что в пространственно-однородной задаче индуцированная намагниченность не «звенит». Это легко увидеть на фазовой плоскости в синхронной системе: например, уравнение (3.26) для c -чисел имеет первый интеграл

$$-\frac{1}{2} u_t^2 - \cos u - \cos \frac{1}{2} u = c, \quad (3.32)$$

а это и есть траектория на фазовой плоскости уравнения (3.10) (где $u_t \rightarrow u_t$). Траектории, соединяющие неустойчивые особые точки, получаются при $-c = 2$ и при $c = 0$. При $u = \delta$ имеем: если $c = -2$, то $u_t = 5/2$; если $c = 0$, то $u_t = 3/2$. На этих траекториях u_t изменяется до нуля без осцилляций (без «звона»), когда u изменяется до 4π и соответственно до 2π . Поскольку u_t определяет намагниченность (умножьте первое из уравнений (3.21a) на $\chi\gamma^{-1}$), мы назовем эти траектории «незвенящими»: скачки магнитного поля, выбивающие систему из состояния $u = \delta$ на одну из этих траекторий, равны соответственно $\Delta B_{0c_2} = \gamma^{-1} \sqrt{5/3} \Omega_{IV}$ и $\Delta B_{0c_1} = \gamma^{-1} \sqrt{3/5} \Omega_{VI}$; именно эти значения упоминались выше. Для СГ-уравнения в задаче об А-фазе аналогичный анализ показывает, что $u_t = 2\pi = 2$ определяет единственную незвенящую траекторию, и система из состояния $u = 0$ выбивается на эту траекторию посредством скачка $\Delta B_{0c} = \gamma^{-1} \Omega_{IA}$.

Явление ЯМР зависит от времени и не зависит от пространственных координат. Оно, стало быть, может быть использовано для того, чтобы определить критические поля для приведения в незвенящее состояние; это было подробно проделано Уитли [3.17] для А-фазы и с меньшей степенью подробности для В-фазы. Один из выводов, вытекающих из проделанного анализа, тот, что критические поля для «незвенящего» ЯМР

в однородном случае остаются, следовательно, критическими для распада на солитоны как в А-, так и в В-фазе в пространственно-неоднородном случае. Однако если бы распад на солитоны (или, разумеется, на квазисолитоны в случае В-фазы) все же происходил, такой распад сопровождался бы наблюдаемым звенящим сигналом по крайней мере в выделенных точках $x > l$ вне исходной области неоднородности магнитного поля. Не очевидным является то, что средний сигнал непременно должен быть незвенящим, и, возможно, это имеет некоторое отношение к неполному согласию между теорией и экспериментом, обнаруженному Уитли в исследованиях А-фазы [3.17]. По крайней мере наш анализ показывает существенность граничных условий.

Несмотря на возможность образования уходящих бризеров выше и ниже порога в В-фазе, должно было бы быть возможным, по крайней мере в принципе, обнаружить кинки и антикинки, движущиеся в одном и том же направлении, на самом пороге при $u_t = 3/2$ или выше его. Ясно, что ниже второго порога при $u_t = 5/2$ 2 δ -кинки не возникают. Последовательность испускаемых кинков для $3/2 < u_t(x, 0) < 5/2$ должна, следовательно, иметь вид кинк — антикинк — кинк и т. д. (или антикинк — кинк и т. д.), и для достаточно больших l можно ожидать образования многих пар кинк — антикинк. Кроме того, результаты работы [3.48] показывают, что излучающие пары кинк — антикинк (пары антикинк — кинк) могут образовывать уходящие бризероподобные возбуждения.

Все это разнообразие явлений для неинтегрируемого двойного уравнения sine-Gordon резко отличается от относительной простоты интегрируемого СГ-уравнения для случая А-фазы. Как показывают результаты численных и аналитических исследований [3.48], здесь выше единственного порога при $u_t = 2$ может испускаться только простая последовательность, состоящая из одних кинков (или из одних антикинков).

Мы предложили в работе [3.48] возможное использование этого факта: магнитный детектор в принципе мог бы регистрировать кинки и антикинки для случая В-фазы, а в А-фазе — только кинки, и таким образом мы можем получить экспериментальное подтверждение гипотез о симметриях «параметров порядка» для этих двух различных фаз. Из результатов нашей работы [3.48] вытекает, однако, что для В-фазы малые (порядка одного-двух радиусов корреляции $\lambda_B = c_B \Omega_B^{-1}$) изменения начального распределения u_t приводят, например, к тому, что вместо бризера на пороге испускается одиночный кинк. Для того чтобы использовать особенности поведения ^3He В, необходимо удалить малые поля ~ 20 Гаусс из заданной области размером ~ 100 микрон; требуется также чувствительный детектор намагниченности. Такие эксперименты могут в настоящее

время оказаться неосуществимыми. Возможно, практически более реально возбуждать бризеры посредством магнитного удара и, например, обеспечивать их фазовую синхронизацию с продольными rF -полями. Для достаточно больших значений константы связи γ_0 может быть достаточно много термических возбужденных кинков и бризеров даже при температурах ≤ 2.6 мК, как это вытекает из вида спектра (1.104)¹⁾. Однако в настоящее время мы полагаем, что эффективное значение γ_0 намного меньше того, что было нами найдено раньше.

Вот и все, что мы хотели сказать по поводу противопоставления интегрируемого СГ-уравнения неинтегрируемому двойному уравнению sine-Gordon, а также о возможных экспериментах с реальными физическими системами, использующих различия между этими уравнениями. Есть искушение интерпретировать эти разнообразные результаты для двойного уравнения sine-Gordon аналитически на языке данных рассеяния подходящей задачи рассеяния и непосредственно сравнить их со случаем СГ-уравнения. Пока что это было сделано только для двух частных решений уравнения (3.1): оба они получены для случая $\lambda = 1$ и знака «+»; аналогичное сопоставление пока не было проделано для знака «-». Мы приведем набросок такого исследования для решений с положительным знаком в следующем разделе. По сравнению с остальной частью главы у читателя будет предполагаться более серьезная математическая подготовка; нелишне, если он (или она) прочтет предварительно гл. 6 и основательно ознакомится с методом обратной задачи рассеяния, а также с тем, как этот метод может применяться в сингулярной теории возмущений.

3.4. Теория возмущений для двойного СГ-уравнения

В разд. 3.2 мы показали, как 4π -кинк (3.12), являющийся решением двойного уравнения sine-Gordon с $\lambda = 1$ и знаком «+», может быть превращен в устойчивые внутренние «качания». Аналогичный анализ можно проделать и для решения (3.13), соответствующего возбужденному состоянию с граничными условиями $u = 2\pi$, $|x| \rightarrow \infty$. Такое решение и является связанным состоянием кинка и антикинка: соответствующее электрическое поле имеет нулевую площадь, так что оптически это 0π -импульс. Естественно ожидать, что это решение является бризером для двойного уравнения sine-Gordon. Оно, однако,

¹⁾ Спектр (1.104) для СГ-уравнения показывает, что энергия образования кинков и бризеров пропорциональна γ_0^{-1} . В результате численного счета величина $\gamma_0 \sim 10^5$ [3.4, 3.5]. Однако эффективное значение γ_0 весьма существенно уменьшено за счет деления на плотность сверхтекучей компоненты ρ_s (см. примечание на с. 141).

является, очевидно, неустойчивым: при $\Delta' > \ln(\sqrt{3} + 2)$ первый 2π -импульс ускоряется, а второй замедляется. Потенциал $V(u)$ в формуле (3.17) не меняется, но состояние $u = 2\pi$ может уменьшить свою энергию за счет промежуточного перехода $u = 2\pi \rightarrow u = 0 \rightarrow u = 2\pi$ и развалиться на кинк и антикинк; это опять-таки иллюстрирует его неустойчивость. Последний аргумент, однако, является интуитивным свидетельством в пользу того, что осцилляции пар кинк — антикинк возможны, как и в настоящем бризере; результаты численного счета [3.31, 3.32] показывают, что именно так обстоит дело, если $\Delta' < \ln(\sqrt{3} + 2)$. На рис. 3.9 изображен режим опрокидывания. На рис. 3.10 изображен осцилляторный бризероподобный режим, индуцированный сжатием в интервале $2\Delta'$. В этом разделе мы дадим набросок сингулярной теории возмущений, подтверждающей такое поведение. Наше изложение основывается на работах наших коллег А. Мейсона и П. Китченсайда.

СГ-уравнение вполне интегрируемо: для малых λ естественно рассмотреть член $(1/2)\lambda \sin(u/2)$ в уравнении (3.1) для случая положительного знака как возмущение обычного СГ-уравнения. Удобно начать с двухкинкового решения СГ-уравнения, которое

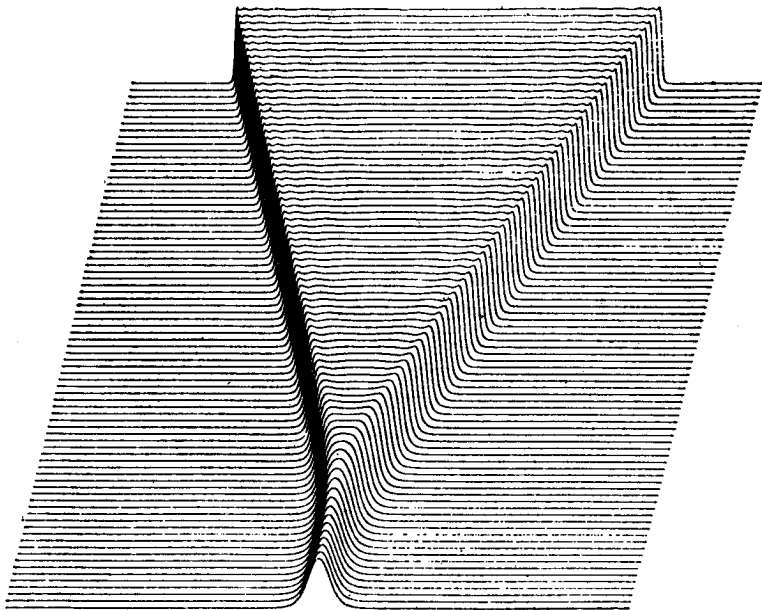


Рис. 3.9. Численное интегрирование двойного уравнения sine-Gordon с положительным знаком ($\lambda = 1$) для режима распада. Граничные условия имеют вид $u \rightarrow 2\pi$, $|x| \rightarrow \infty$,

может быть переписано с помощью переменных данных рассеяния в виде

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{1 - \left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} \right)^2 \frac{\gamma_1}{2\zeta_1} \frac{\gamma_2}{2\zeta_2} \exp [i2(k_1 + k_2')x]}{\frac{\gamma_1}{2\zeta_1} \exp (i2k_1x) + \frac{\gamma_2}{2\zeta_2} \exp (i2k_2x)} \right], \quad (3.33)$$

где $k_i = \frac{1}{2} \left(\zeta_i - \frac{1}{4\zeta_i} \right)$, $i = 1, 2$.

Здесь γ_1 и γ_2 — вычеты коэффициента отражения b/a (аналитически продолженного в верхнюю полуплоскость), вычисленные в комплексных собственных значениях ζ_1 и ζ_2 соответственно.

Для СГ-уравнения временная эволюция данных рассеяния весьма проста, и, в частности, спектр задачи рассеяния является интегралом движения. Однако для неинтегрируемой системы типа уравнения (3.1) при ненулевых λ ситуация является более сложной. Ньюэлл в гл. 6 (и в работе [3.51]) показал, что соответствующие уравнения для данных рассеяния решения (3.33) имеют вид¹⁾

$$\begin{aligned} \zeta_{i,t} &= -\frac{\lambda}{8\gamma_i \dot{a}_i^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{u}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)_{\zeta_i} dx \quad (i=1, 2), \\ \gamma_{i,t} &= i2\gamma_i \omega_i - \frac{\gamma_i \ddot{a}_i}{\dot{a}_i} \zeta_{i,t} - \frac{\lambda}{8\dot{a}_i^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{u}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)_{\zeta_i} dx, \\ \left(\frac{b}{a} \right)_t &= i2\omega \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{\lambda}{8a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{u}{2} \cdot |\varphi_1^2 + \varphi_2^2|_{\zeta_i} dx, \\ \omega &= \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{4\zeta} \right), \quad \gamma_i = \frac{b_i}{a_i}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где \dot{a}_i обозначает производную a по ζ в точке $\zeta = \zeta_i$. Выражение $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$ обозначает значение в точке ζ квадрата собственной функции задачи рассеяния для СГ-уравнения.

Уравнения (3.34) задают простой закон изменения во времени данных рассеяния, взятых для интегрируемой системы типа СГ-уравнения (случай $\lambda = 0$). В таком общем виде они являются точными для *всех* значений λ , как это вытекает из результатов гл. 6. Но с ними трудно работать. Однако они

¹⁾ Это не совсем точно. Ньюэлл рассматривает эволюционные уравнения вида $u_t = K[u]$, где $K[u]$ — функционал от u , u_x , u_{xx} и т. д. СГ-уравнение может быть записано в таком виде (для зависимой координаты u_x) в конусных переменных $u_{xt} = \sin u$. Мы работаем в лоренц-ковариантных координатах, и задачу следует переписать для этого случая. Подходящим образом преобразованная задача рассеяния указана Каупом в [3.49].

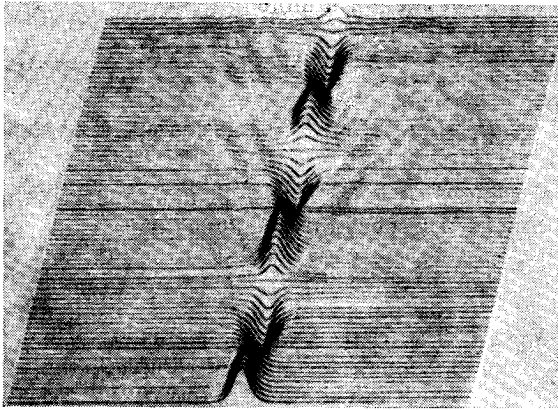


Рис. 3.10. То же, что и на рис. 3.9, но для осцилляторного режима.

существенно упрощаются, если выкинуть вклад непрерывной части спектра. Интуитивно это представляется оправданным, если мы начинаем с решения (3.33), в которое входят только два дискретных собственных значения, и λ берется достаточно малым. Фактически, как мы покажем дальше, для многих характеристик движения параметр λ может быть большим (как, например, в физически важном случае $\lambda = 1$).

Поскольку мы хотим изучать бризер, ассоциированный с (3.13), мы используем для СГ-уравнения параметры бризера $\zeta_1 = -\zeta_2^*$, $\gamma_1 = -\gamma_2^*$. Наложим ограничения

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} e^{i\varphi}, \quad \gamma_1 = \operatorname{tg} \varphi e^{i\psi}$$

(φ, ψ — новые функции); это ограничение означает, что решение (3.33) симметрично относительно начала координат в сопутствующей системе. Полагая $\varphi = \arccos(\lambda/4)$ и $\theta \equiv \psi - \varphi = 0$ в (3.33), мы получим

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{4-\lambda}} \operatorname{ch} \frac{1}{2} \sqrt{4-\lambda} x \right). \quad (3.35)$$

Это — запись решения (3.13) в сопутствующей системе, причем не обязательно $\lambda = 1$. Последующая временная эволюция может быть определена из (3.34) при предположении, что вкладом от непрерывного спектра можно пренебречь. Это было сделано Мейсоном в [3.35]. Выкладки оказываются весьма громоздкими; читателю, желающему освоить соответствующую технику, рекомендуем работы [3.32], [3.52]. Предполагая, что задача описывается двумя дискретными собственными значениями ζ_i , мы

получим точные уравнения в виде

$$C_t = \frac{\lambda}{2} P \frac{J(a) + a}{1+a}; \quad a \equiv \cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad J \equiv \frac{a}{\sqrt{1+a}} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1+a}};$$

$$P_t = P^2 - \frac{\lambda}{4} + C; \quad P = \operatorname{tg} \theta \cos \varphi, \quad C \equiv \cos^2 \varphi. \quad (3.36)$$

Из этих уравнений вытекает, что для начальных условий $\theta = 0$, $0 < \varphi < \operatorname{arccos}(\lambda/4)$, результирующее движение является осцилляторным; для $\varphi > \operatorname{arccos}(\lambda/4)$ φ в конце концов достигает значения $\pi/2$ [3.32, 3.35, 3.36]. При этом решение представляет собой пару из быстро расходящихся кинка и антикинка. В этом случае бризерные формулы уже не годятся, и надо повторить вычисления с использованием параметров кинков. Подходящая параметризация в этом случае выглядит так:

$$\xi_1 = \frac{i}{2} e^{-q}, \quad \frac{\eta_1}{2\xi_1} = \operatorname{cth} q e^p; \quad (3.37)$$

уравнения движения имеют вид

$$P_t = P^2 + C - \frac{\lambda}{4}; \quad P = \operatorname{cth} p \cdot \operatorname{sh} q, \quad C = -\operatorname{sh}^2 q;$$

$$C_t = \frac{\lambda}{2} P \frac{J(a) + a}{1+a}; \quad a = \operatorname{cth}^2 q \operatorname{sh}^2 p. \quad (3.38)$$

То, что уравнения движения (3.38) имеют такой же вид, как и уравнения (3.36) при соответствующей параметризации, позволяет гладко сшивать решения при переходе через режим распада.

Уравнения (3.36), (3.38) были проинтегрированы численно для начальных условий

$$\theta = 0, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \lambda (1 - \varepsilon)^{-1}, \quad (3.39)$$

где $\varepsilon = \pm 0.1$ и $\lambda = 1.0$. Для $\varepsilon = -0.1$ движение оказывается осцилляторным (см. рис. 3.11).

Для $\varepsilon = 0.1$ возникает распад (рис. 3.12), так что требуется изменить параметризацию, когда C становится отрицательным. Сравнение рис. 3.12 с рис. 3.9 показывает, что имеется хорошее согласование для случая распада в приближении, где отсутствует непрерывный спектр. Эти рисунки точно накладываются друг на друга для моментов времени, изображенных на рис. 3.12. Однако ошибки округления приводят к тому, что использованная параметризация делается непригодной из-за асимптотических свойств гиперболических функций в формулах (3.38); это является причиной того, что рис. 3.12 не продолжен дальше по времени.

Для осцилляторного режима согласование почти идеальное, пока u не достигла максимума амплитуды. После этого, как видно на рис. 3.10, начинает излучаться небольшая периодическая рябь; это проявление перекачки энергии в непрерывную составляющую. В результате укорачивается период бризероподобных осцилляций на рис. 3.10 по сравнению с тем, который получен по теории возмущений и изображен на рис. 3.11. Мы не нашли пока метода, позволяющего учитывать вклад непрерывной составляющей с такой же простотой, которой отличаются уравнения (3.36), (3.38); эта ситуация характерна для нынешней стадии исследований, основанных на теории возмущений. Стоит отметить, что во всех других отношениях согласование между теорией и непосредственным численным интегрированием почти идеальное даже для большого значения $\lambda = 1$.

Можно использовать и еще один аналитический подход. Например, для случая распада численное интегрирование показывает, что величина $Y \equiv C + P^2$ быстро стремится к нулю. Это позволяет легко найти асимптотическое решение, описывающее поведение далеко отстоящих друг от друга кинка и антикинка.

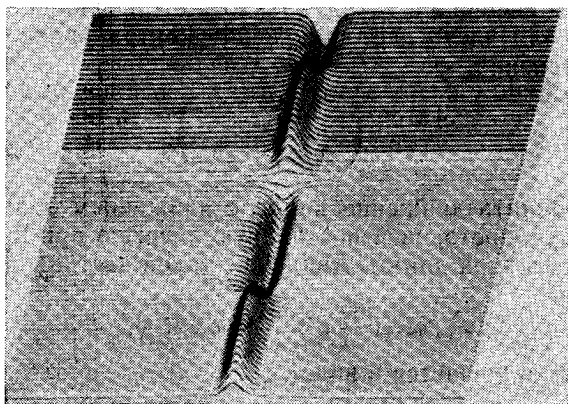


Рис. 3.11. Осцилляторный режим, описываемый уравнениями (3.36).

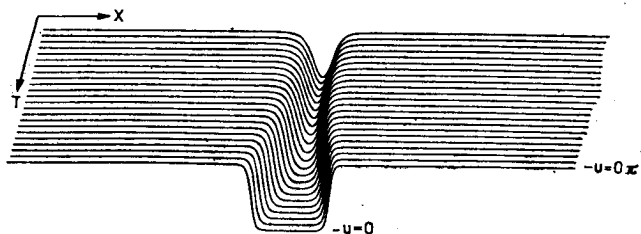


Рис. 3.12. Распад, описываемый уравнениями (3.36) и (3.38).

Уравнение (3.38) для P_t дает

$$P = \int_0^{\infty} Y dt - \frac{\lambda}{4} t \equiv Z - \frac{\lambda}{4} t; \quad (3.40)$$

пренебрегая членами второго порядка по Y , получаем приближенное уравнение

$$(1 + P^2) \frac{d}{dt} \ln Y - \frac{\lambda}{4} P \ln Y = 2P \left[1 + P^2 + \frac{\lambda}{4} (\ln 2 \sqrt{1 + P^2} - 1) \right]. \quad (3.41)$$

Используя выражение (3.40), можно явно решить уравнение (3.41) в виде

$$\begin{aligned} (\ln 2 \sqrt{1 + P^2} - \frac{1}{2} \ln Y) / \sqrt{1 + P^2} = \\ = \left[\left(\frac{4}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{4Z}{\lambda} - t \right)^2 \right]^{1/2} - \gamma, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где γ — константа интегрирования. Следуя работе А. Мейсона, которому мы обязаны приводимыми здесь рассуждениями, мы записываем решение в такой, казалось бы, неудобной форме, поскольку левая часть дает положение центра кинка, определяемое из уравнения

$$4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{ch} x \sqrt{1 - C}}{\sqrt{\frac{1 - C}{C + P^2}}} \right) = \pi. \quad (3.43)$$

Можно сравнить движение кинка с движением релятивистской частицы, приобретающей постоянную энергию при прохождении отрезка единичной длины. Движение такой частицы описывается уравнением

$$m_0 (1 - v^2)^{-1/2} = \varepsilon X + \gamma,$$

которое легко решается в виде

$$X = \left[\frac{m_0^2}{\varepsilon^2} + (1 - k)^2 \right]^{1/2} - \gamma \quad (3.44)$$

в полном соответствии с (3.42).

Движение, описываемое уравнением (3.42), есть, разумеется, движение одного 2π -кинка, входящего в среду, находящуюся в состоянии $u = 0$, и замедляющегося по мере того, как он оставляет за собой шлейф возбуждений, как это изображено на рис. 3.2. Другими словами, это движение первого из очень сильно разнесенных один относительно другого 2π -кинков в 4π -вобблере.

Аналогичные вычисления можно проделать для решения типа 4π -вобблера уравнения (3.1). Удобно сделать замену $u \rightarrow u - 2\pi$;

это изменит знак у λ в (3.1). В системе центра масс для столкновения двух кинков u тогда будет нечетной функцией от x .

В системе центра масс равенство нулю полного импульса дает

$$\zeta_1 \zeta_2 = -\frac{1}{4}, \quad \text{где } \zeta_i = i\eta_i \quad (\eta_i > 0), \quad (3.45)$$

так что $k = k_1 = k_2$ (где $k/\zeta = (\zeta - \frac{1}{4\zeta})/2$).

Условие нечетности u дает

$$1 = \left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} \right)^2 \frac{\gamma_1}{2\zeta_1} \frac{\gamma_2}{2\zeta_2}, \quad (3.46)$$

где для двухкинкового решения γ_1 и γ_2 имеют одинаковый знак и чисто мнимы. Можно положить

$$\zeta_1 = \frac{i}{2} e^q, \quad \zeta_2 = \frac{i}{2} e^{-q}, \quad (3.47)$$

а также

$$\left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} \right) \frac{\gamma_1}{2\zeta_1} = e^p, \quad \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} \frac{\gamma_2}{2\zeta_2} = e^{-p}, \quad (3.48)$$

учитывая аналогии с 0л-задачей. В этих обозначениях

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{ch} qx)}{\operatorname{ch} p \operatorname{cth} q} \right]. \quad (3.49)$$

Уравнения движения (3.34) без учета непрерывного спектра дают

$$\begin{aligned} P_t &= P^2 - C + \frac{\lambda}{4}, \\ C_t &= -\frac{\lambda}{2} P I, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где $P \equiv \operatorname{th} p \operatorname{sh} q$, $C \equiv \operatorname{sh}^2 q$,

$$\begin{aligned} I &\equiv \frac{J(a) - a}{a - 1}, \quad J(a) = \left(\frac{a}{a - 1} \right)^{1/2} \operatorname{arcth} \left(\frac{a}{a - 1} \right)^{1/2}, \\ a &\equiv \operatorname{cth}^2 q \operatorname{ch}^2 p, \end{aligned} \quad (3.51)$$

и $\lambda > 0$. Обратите внимание на другие знаки по сравнению с уравнениями (3.36) и (3.38).

Из явного вида параметризации (3.47) вытекает, что $\infty > P > -\infty$, $C > 0$, и мы можем, разумеется, взять $P = 0$, $C = \lambda/4$, что отвечает выбору $\operatorname{th} p = 0$, $\operatorname{ch} q = (1 + \lambda/4)$. Такой выбор дает решение, не зависящее от времени,

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left[\left(1 + \frac{4}{\lambda} \right)^{1/2} \operatorname{sh} \left(1 + \frac{\lambda}{4} \right)^{1/2} x \right], \quad (3.52)$$

в котором можно узнать стационарный 4л-кинк (3.6) или (3.12) двойного уравнения sine-Gordon, учитывая, что мы работаем в области $-2\pi < u < 2\pi$.

Если начальные условия выбрать близкими к этому решению, т. е. $\lambda/4 \approx C \gg P \sim 0$, и λ достаточно мало, то $I \approx -1$, и

$$C_t = \frac{\lambda}{4} P, \quad P_t = \frac{\lambda}{4} - C, \quad (3.53)$$

поскольку P^2 можно пренебречь. Эта пара уравнений имеет решение

$$\begin{aligned} P &= A \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} t + \alpha\right), \\ C &= \frac{\lambda}{4} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} A \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} t + \alpha\right), \end{aligned} \quad (3.54)$$

которое является простым гармоническим колебанием с угловой частотой $\sqrt{\lambda/2}$. Ньюэлл [3.34], работая в конусных переменных (т. е. с двойным СГ-уравнением в форме (3.5)), в числе первых приложений своей теории возмущений нашел 4π -вобблер с внутренними осцилляциями с периодом $\sqrt{\lambda/2}$ для малых λ .

В этих вычислениях снова предполагается, что вкладом непрерывной части спектра можно пренебречь. Рис. 3.13 изображает результат численного интегрирования уравнений (3.50). Согласование с прямым численным интегрированием двойного

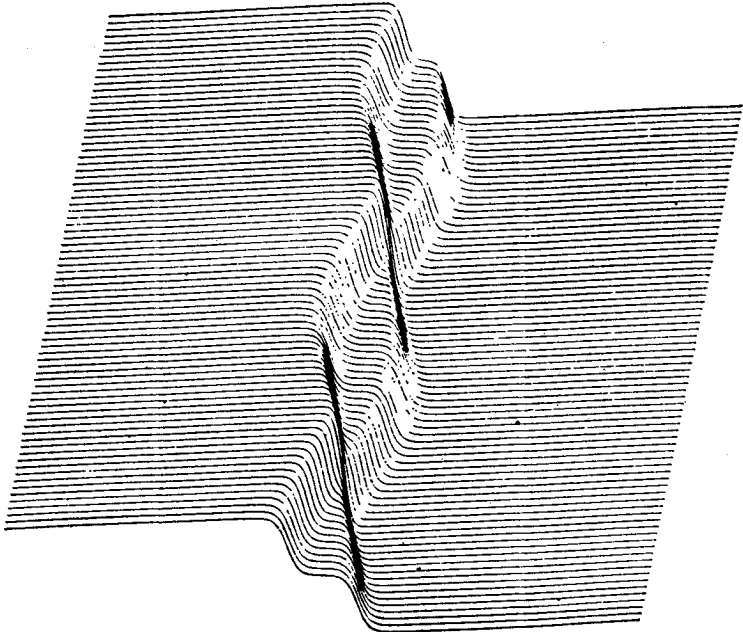


Рис. 3.13. Качающийся 4π -кинк, описываемый системой (3.50). Обратите внимание на отсутствие радиации по сравнению с рис. 3.1.

уравнения sine-Gordon, изображенным на рис. 3.1, почти идеальное; заметно расхождение за счет испускания излучения на рис. 3.1, а также за счет небольшого укручения профиля кинков в окрестности тех точек, где два 2π -кинка меняются местами. Период колебаний точно воспроизводится на рис. 3.13, так что результат здесь отличен от 0π -случая.

Эти результаты показывают, с одной стороны, нетривиальность методов сингулярной теории возмущений и, с другой стороны, что теория тем не менее дает отличное согласование с результатами прямого численного интегрирования, что аналитическая сторона теории возмущений проясняет ряд существенных моментов, которые не видны при численном интегрировании, и что вклад непрерывной части спектра бывает существенным (именно так обстоит дело в случае 0π -задачи). Нужны дальнейшие исследования этого вклада для обсуждавшихся здесь задач.

Разумеется, приведенные здесь результаты являются лишь первым продвижением; например, 4π -вобблер должен быть изучен в первую очередь. Не ясно также, как работать со столкновениями кинков и антикинков для двойного уравнения sine-Gordon с отрицательным знаком, описанного в разд. 3.3. Насколько нам известно, теория возмущений не применялась к более сложным случаям, чем это описано здесь. Маклафлин и Скотт [3.53] имели дело с уравнением sine-Gordon с затуханием; Ньюэлл [3.54] изучал соотношения между теорией возмущений и уравнениями типа (3.34). Как мы уже отмечали, в разд. 3.4 даны лишь наброски рассуждений, за подробностями мы отсылаем читателя к работам Китченсайда [3.32], Мейсона [3.52] или Ньюэлла [3.34]. Цель, которую мы себе ставили в настоящей статье, — показать, чего можно достичь при помощи сингулярной теории возмущений, а также дать некоторое представление о том, что для этого нужно сделать. В будущем мы предполагаем продолжить эту работу.

Примечание при корректуре

Теорема 10 в [3.30] о том, что нелинейное уравнение Клейна — Гордона $u_{xt} = F(u)$ имеет бесконечное семейство полиномиальных законов сохранения, если и только если $F''(u) + \alpha^2 F(u) = 0$ для некоторого $\alpha \neq 0$, возможно, доказана с пробелами. Михайлов [3.55] недавно обнаружил в связи с исследованием обобщенной цепочки Тоды уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + 2\exp(4u) - 2\exp(-2u) = 0, \quad (3.55)$$

интегрируемое методом обратной задачи рассеяния для 3×3 линейного оператора. Система (3.55) оказывается вполне интегрируемой с бесконечным числом нетривиальных первых интегралов.

Независимо Форди и Гиббонс [3.56] применили метод обратной задачи для $N \times N$ линейного оператора к интегрированию нелинейной системы уравнений Клейна — Гордона $u_{i,xt} = F_i(u)$ для $N - 1$ взаимодействующего поля $u = (u_1, \dots, u_{N-1})$ и нашли преобразование Бэклунда для этой системы. Для $N = 3$ они обнаружили, что система

$$\theta_{xt} = e^{2\theta} - e^{-\theta} \operatorname{ch} 3\varphi, \quad \varphi_{xt} = e^{-\theta} \sin^3 \varphi \quad (3.56)$$

является вполне интегрируемой гамильтоновой системой, допускает АПБ и имеет бесконечное семейство нетривиальных полиномиальных законов сохранения. Отметим, что решения (3.56) с $\varphi = 0$ находятся из уравнения

$$\theta_{xt} = \exp(2\theta) - \exp(-\theta), \quad (3.57)$$

не отличающегося от (3.55) и, разумеется, дающего пример уравнения типа (3.1). Уравнение (3.57) не допускает АПБ (по-видимому), поскольку АПБ переводит (3.57) (с $\varphi = 0$) в (3.56) (с $\varphi \neq 0$). Однако оно имеет бесконечное число нетривиальных полиномиальных законов сохранения даже в случае $\varphi \equiv 0$. Так что похоже, что теорема работ [3.28], [3.29] о том, что уравнение $u_{xt} = F(u)$ для одного поля u допускает АПБ, если и только если $F''(u) + \alpha^2 F(u) = 0$, не опровергнута. Но теорема 10 из [3.30] о полиномиальных законах сохранения опровергнута. В настоящее время не ясно, исключает ли близкая связь уравнений (3.57) и (3.56) уравнение (3.57) из рассуждений теоремы 9 работы [3.30] и тем самым из теоремы 10. Отметим, однако, что теорема 9 основывалась на разборе двух случаев: I) $F(u) = A \exp(\alpha u) + B \exp(-\alpha u)$ и II) $F(u) = A \exp(\alpha u) + B \exp(-\frac{1}{2} \alpha u)$ (случай (3.57)). Так что, по-видимому, доказательство в [3.30] того, что имеется верхняя граница (< 24) на ранг и, следовательно, число полиномиальных законов сохранения конечно, для случая II неверно. Мы, естественно, подвергли тщательному анализу весьма утомительное доказательство существования упомянутой границы; однако ко времени написания этого текста ошибка в доказательстве теоремы 9 обнаружена не была.

ЛИТЕРАТУРА

- 3.1. Lamb G. L. — Rev. Mod. Phys. 43, 99 (1971).
- 3.2. Duckworth S., Bullough R. K., Caudrey P. J., Gibbon J. D. — Phys. Lett. 57A, 19 (1976).
- 3.3. Bullough R. K., Caudrey P. J., Kitchenside P. W. Bumping spin waves in the B-Phase of liquid ^3He . — J. Phys. C (1980).
- 3.4. Bullough R. K., Caudrey P. J. The Multiple Sine-Gordon Equations in Non-Linear Optics and in Liquid ^3He . — В кн.: Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform, ed. by F. Calogero (Pitman, London, 1978), pp. 180—224.

- 3.5. Bullough R. K., Caudrey P. J. — В кн.: Coherence and Quantum Optics IV, ed. by L. Mandel, E. Wolf (Plenum Press, New York, 1978), pp. 767—780.
Bullough R. K. Solitons in Physics. — Proc. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Equations in Physics and Mathematics, Istanbul, August, 1977, ed. by A. O. Barut (D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978), pp. 99—141.
- 3.6. Kitchenside P. W., Bullough R. K., Caudrey P. J. — В кн.: Solitons and Condensed Matter Physics, Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 291—296.
- 3.7. Maki K., Tsuneto T. — Phys. Rev. B11, 2539 (1979).
- 3.8. Maki K. — Phys. Rev. B11, 4264 (1975).
Maki K., Kumar P. — Phys. Rev. B14, 118, 3920 (1976).
- 3.9. Maki K., Kumar P. — Phys. Rev. Lett. 38, 558 (1977).
Maki K. В кн.: Solitons and Condensed Matter Physics, Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 278—290.
- 3.10. Bullough R. K., Caudrey P. J., Gibbon J. D., Duckworth S., Gibbs H. M., Bölger B., Baede L. — Opt. Commun. 18 200 (1976).
- 3.11. Воловик Г. Е., Минеев В. П. — Письма в ЖЭТФ 24, 605 (1976); ЖЭТФ 72, 2256 (1977); Phys. Rev. B (1979).
- 3.12. Gibbs H. M., Bölger B., Baede L. — Opt. Commun. 18. 199 (1976).
Mattar F. P., Newstein M. C., Serafin P. E., Gibbs H. M., Bölger B., Forster G., Toschek P. E. — В кн.: Coherence and Quantum Optics IV, ed. by L. Mandel, E. Wolf (Plenum Press, New York, 1978), pp. 143—164.
- 3.13. Bullough R. K., Jack P. M., Kitchenside P. W., Saunders R. Solitons in laser physics. — Phys. Scr. 20, 364 (1979).
- 3.14. Bullough R. K. Solitons. — В кн.: Interaction of Radiation and Condensed Matter, Vol. 1, IAEA-SMR-20/51 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1977), pp. 381—469.
- 3.15. Bullough R. K., Caudrey P. J., Eilbeck J. C., Gibbon J. D. — Opto-electronics 6, 121 (1974).
- 3.16. Eilbeck J. C., Caudrey P. J., Gibbon J. D., Bullough R. K. — J. Phys. A: Math. Gen. 6, 1337 (1973).
- 3.17. Wheatley J. C. — Rev. Mod. Phys. 47, 415 (1975).
- 3.18. Leggett A. J. — Ann Phys. 85, 11 (1974).
- 3.19. Leggett A. J. — Rev. Mod. Phys. 47, 331 (1975).
- 3.20. Hermann J. A., Bullough R. K. Superfluorescence from degenerate media. — Paper T. 9 X Intern. Quantum Electronics Conf. Atlanta, Georgia, May 29 — June 1, 1978 (J. Opt. Soc. Am., May 1978 issue).
- 3.21. Rice M. R. — В кн.: Solitons and Condensed Matter Physics. — Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 246—253.
- 3.22. Peierls R. E. Quantum Theory of Solids. — Oxford University Press, London, 1955, p. 108.
- 3.23. Fröhlich H. — Proc. Roy. Soc. A223, 296 (1954).
- 3.24. Lee P. A., Rice T. M., Anderson P. W. — Solid State Commun. 14, 703 (1974).
- 3.25. Hopfinger A. J., Lewanski A. J., Sluckin T. J., Taylor P. L. — В кн.: Solitons and Condensed Matter Physics. — Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 330—333.
- 3.26. Luther A. — В кн.: Solitons and Condensed Matter Physics. — Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 78—84.
- 3.27. Josephson B. D. Weakly Coupled Super-Conductors. — В кн.: Superconductivity, ed. by R. D. Parks (Marcel Dekker, New York, 1969), pp. 423—448.

- 3.28. Dodd R. K., Bullough R. K. — Proc. Roy. Soc. (London) A351, 499 (1976).
- 3.29. McLaughlin D. W., Scott A. C. — J. Math. Phys. 14, 1817 (1973).
- 3.30. Dodd R. K., Bullough R. K. — Proc. Roy. Soc. (London) A352, 481 (1977).
- 3.31. Duckworth S. — Ph. D. Thesis, University of Manchester (1976).
- 3.32. Kitchenside P. W. — Ph. D. Thesis, University of Manchester (1979).
- 3.33. Shiefman J., Kumar P. — Phys. Scr. 20, 435 (1979).
- 3.34. Newell A. C. — J. Math. Phys. 18, 922 (1977).
- 3.35. Mason A. L. — В кн.: Nonlinear Equations in Physics and Mathematics, ed. by A. O. Barut (D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978), pp. 205—218.
- 3.36. Kitchenside P. W., Mason A. L., Bullough R. K., Caudrey P. J. — В кн.: Solitons and Condensed Matter Physics. — Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 48—51.
- 3.37. Dodd R. K., Bullough R. K., Duckworth S. — J. Phys. A: Math. Gen. 8, L 64 (1975).
- 3.38. Rebbi C. — Sci. Amer, 240 (2), 76—91 (1978)
- 3.39. Salamo G. J., Gubbs H. M., Churchill G. G. — Phys. Rev. Lett. 33, 273 (1974).
- 3.40. Bölger B., Baede L., Gibbs H. M. — Opt. Commun, 18, 67 (1976).
- 3.41. Kreiger W., Gaida G., Toschek P. E. — Z. Phys. B25, 297 (1976).
Gibbs H. M., Bölger B., Mattar F. P., Newstein M. C., Forster G., Toschek P. E. — Phys. Rev. Lett. 37, 174 (1976).
- 3.42. Gibbs H. M., Bölger B. — В кн.: Coherence and Quantum Optics IV, ed. by L. Mandel, E. Wolf (Plenum Press, New York, 1978), pp. 759—765.
- 3.43. Saunders R., Bullough R. K. — В кн.: Cooperative Effects in Matter and Radiation, ed. by C. M. Bowden, D. W. Howgate, H. R. Robl (Plenum Press, New York, 1977), pp. 209—256.
Bonifacio R., Gronchi M., Lugiato L. A., Ricca A. M., *ibid.*, pp. 193—208.
Bullough R. K., Saunders R., Feuillade C. — В кн.: Coherence and Quantum Optics IV, ed. by L. Mandel, E. Wolf (Plenum Press, New York, 1978), pp. 263—279.
- 3.44. Vrehen Q. H. F., Hiksipoors H. M. J., Gibbs H. M. — В кн.: Coherence and Quantum Optics IV, ed. by L. Mandel, E. Wolf (Plenum Press, New York, 1978), pp. 543—553.
- 3.45. Ablowitz M. J., Kodama Y. Transverse instability of one-dimensional transparent optical pulses in resonant media. — Phys. Lett 70A, 83 (1979).
- 3.46. Schroer V. Частное сообщение.
- 3.47. Bullough R. K., Caudrey P. J. — Rocky Mount. J. Math. 8, 53 (1978).
- 3.48. Kitchenside P. W., Caudrey P. J., Bullough R. K. Soliton like spin waves in $^3\text{He B}$. — Phys. Scr. 20, 673 (1979).
- 3.49. Kaup D. J., Newell A. C. — Phys. Rev. B18, 5162 (1978).
- 3.50. Kaup D. J. — Stud. Appl. Math. LIV, 165 (1975).
- 3.51. Kaup D. J., Newell A. C. — Proc. Roy. Soc. (London) A361, 413 (1978).
- 3.52. Kitchenside P. W., Mason A. L., Caudrey P. J., Bullough R. K.
- 3.53. McLaughlin D. W., Scott A. C. Soliton perturbation theory. — В кн.: Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform, ed. by F. Calogero (Pitman, London, 1978); Phys. Rev. A18, 1632 (1978).
- 3.54. Newell A. C. — В кн.: Solitons and Condensed Matter Physics. — Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 8, ed. by A. R. Bishop, T. Schneider (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978), pp. 52—64.
Ценный дополнительный источник — статья
Karpman V. I. Soliton perturbation in the presence of perturbation. — Phys. Scr. 20, 462 (1979).
- 3.55. Михайлов А. Б. — Письма в ЖЭТФ 30 (7), 443 (1979).
- 3.56. Fordy A. P., Gibbons J. A class of integrable nonlinear Klein — Gordon equations in many dependent variables. — Dublin Inst. Adv. preprint DIAS-STP-80-03.

4. НЕЛИНЕЙНАЯ РЕШЕТКА (ЦЕПОЧКА ТОДЫ)

М. Тода

Чтобы продемонстрировать некоторые характерные свойства нелинейных волн, описана одномерная решеточная модель. Модель допускает точные решения, типа многосолитонных состояний и периодических волн, а также решение задачи Коши методом обратной задачи рассеяния. Обсуждаются преобразования Бэклунда и связь с уравнением КдФ.

4.1. Нелинейные решетки

Существовало общепринятое убеждение, что нелинейное взаимодействие нормальных мод гармонических осцилляторов приведет к полному перераспределению энергии между ними. Чтобы проверить это убеждение, Ферми и др. [4.1] проанализировали с помощью ЭВМ одномерные решетки с нелинейным взаимодействием ближайших соседей. К их удивлению, перераспределение энергии мод для этих нелинейных решеток наблюдалось в весьма малой степени; напротив, выявилась устойчивость начального состояния.

Форд [4.2] исследовал нелинейные системы осцилляторов по теории возмущений и численными методами; он пришел к выводу, что они не будут эргодическими, хотя при выполнении некоторых резонансных условий перераспределение энергии возможно. Более того, Форд и Уотерс [4.3] показали существование нормальных мод у нелинейных систем, если определить нормальные моды как движение, при котором каждый осциллятор движется с практически постоянной амплитудой и с заданной частотой. Этот неожиданный и проясняющий результат стал исходной точкой моих исследований нелинейных цепочек.

Если система не эргодична, то ее уравнения движения могут иметь аналитическое решение. Следовательно, можно было надеяться найти какие-то нелинейные цепочки, пригодные для анализа. Такая система должна была иметь некоторое отношение к физическим системам, причем решения ее уравнений движения не должны были быть чрезмерно сложными. Таким образом, я приступил к поискам поддающейся анализу нелинейной системы и через некоторое время нашел модельную систему, исследование которой оказалось весьма интересным.

Для меня большая честь и удовольствие описать здесь тот путь размышлений, который привел меня к изобретению этой системы, и изложить достижения последнего времени и виды на будущее.

4.1.1. Уравнения движения

Уравнения движения цепочки имеют вид

$$m\ddot{Y}_n = -\varphi'(Y_n - Y_{n-1}) + \varphi'(Y_{n+1} - Y_n), \quad (4.1)$$

где Y_n — отклонение n -й частицы, а $\varphi(r)$ — потенциал взаимодействия ближайших соседей.

У меня не было никакой определенной стратегии, кроме надежды, что методом проб и ошибок я могу найти одновременно потенциал и решения.

4.1.2. Преобразования дуальности

Большой удачей было для меня то, что мне приходилось ранее заниматься теорией гармонических решеток, и я уже нашел преобразование, которое сопоставляет систему с переменными массами системе с переменными константами взаимодействия [4.4]. Это преобразование линеаризует члены взаимодействия в уравнениях движения нелинейной решетки путем введения нелинейных импульсов.

Роль обобщенных координат в этом преобразовании играют относительные смещения

$$r_n = Y_n - Y_{n-1}, \quad (4.2)$$

а обобщенные импульсы s_n им канонически сопряжены. Канонические уравнения движения для s_n

$$\dot{s}_n = -\frac{d\varphi(r_n)}{dr_n} \quad (4.3)$$

предполагаются обратимыми, т. е. позволяют получить

$$r_n = -\frac{1}{m} \chi(\dot{s}_n) \quad (4.4)$$

как однозначную функцию от $\dot{s}_n = ds_n/dt$. Тогда (4.1) отвечает уравнение

$$\frac{d}{dt} \chi(\dot{s}_n) = s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}. \quad (4.5)$$

Поскольку обе формы записи системы, (4.1) и (4.5), эквивалентны, это преобразование было названо преобразованием дуальности. В результате этого преобразования для импульсов получаем

$$m\dot{Y}_n = s_n - s_{n+1}. \quad (4.6)$$

Таким образом, мы имеем

$$Y_n = (S_n - S_{n+1})/m, \quad (4.7)$$

где

$$S_n = \int^t s_n(t) dt. \quad (4.8)$$

Уравнения движения принимают следующий простой вид:

$$\chi(\dot{S}_n) = S_{n-1} - 2S_n + S_{n+1}. \quad (4.9)$$

4.2. Экспоненциальное взаимодействие

Нелинейные нормальные моды (т. е. периодическое поведение нелинейных систем) настолько поразили меня, что я приступил к поискам нелинейной решетки, допускающей такие решения. Ключ к этой задаче дали преобразования дуальности. Мне помогло то, что (4.5) можно рассматривать как рекуррентную формулу для s_n , и в конце концов я нашел ответ, оказавшийся чрезвычайно плодотворным [4.5].

Потенциал, который я выбрал, состоит из экспоненциальной отталкивающей части $A \exp(-br)$ и притягивающей части ar , где a , b , A суть константы, причем $ab > 0$ и $A > 0$. Если выбрать параметр A так, что минимум потенциала находится при $r = 0$, то последний принимает вид

$$\varphi(r) = (a/b) \exp(-br) + ar + \text{const}. \quad (4.10)$$

Тогда (4.1) дает уравнения движения

$$m\ddot{Y}_n = a \{ \exp[-b(Y_n - Y_{n-1})] - \exp[-b(Y_{n-1} - Y_n)] \}, \quad (4.11)$$

а (4.3) и (4.5) дают

$$\exp(-br_n) - 1 = \frac{1}{a} \dot{s}_n, \quad (4.12)$$

$$\frac{\dot{s}_n}{a + \dot{s}_n} = \frac{b}{m} (s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}). \quad (4.13)$$

4.2.1. Кноидальные волны

Периодическое волновое решение (4.13) есть [4.5]

$$s_n = \mp \frac{2mKv}{b} Z \left\{ 2 \left(\frac{n}{\lambda} \mp vt \right) K \right\}, \quad (4.14)$$

где $Z(u)$ есть Z -функция Якоби, определяемая выражением

$$Z(u) = \int_0^u \frac{dn^2 u}{du} du - \frac{E}{K} u, \quad (4.15)$$

а частота ν и длина волны λ связаны дисперсионным соотношением

$$2K\nu = \sqrt{\frac{ab}{m}} \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2(2K/\lambda)} - 1 + \frac{E}{K} \right)^{-1/2}, \quad (4.16)$$

В вышеописанных формулах sn и dn обозначают эллиптические функции Якоби, K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Они имеют одинаковый модуль k , который определяет амплитуду волны. Из (4.12) волновой профиль можно найти в виде

$$\exp(-br_n) - 1 = \frac{(2K\nu)^2}{ab/m} \left[\operatorname{dn}^2 \left\{ 2 \left(\frac{n}{\lambda} \mp \lambda t \right) K \right\} - \frac{E}{K} \right]. \quad (4.17)$$

Поскольку функция dn может быть выражена через sn , периодические волны можно назвать кноидальными волнами для цепочки, следуя терминологии Кортвега и де Фриза [4.6], которые получили подобные решения для волн на мелкой воде.

При постоянном модуле k (4.16) дает полосу частот от $\nu = 0$ для $1/\lambda = 0$ до максимальной частоты $\nu_m = \sqrt{ab/mEK}/2$ для волнового числа $1/\lambda_m = 1/2$.

Кноидальные волны (4.11) можно рассматривать как волны в периодической цепочке. Если эта цепочка состоит из N частиц, мы получаем независимые волны с волновыми числами

$$\frac{1}{\lambda} = 0, \quad \frac{1}{N}, \quad \frac{2}{N}, \quad \dots, \quad \frac{(N-1)}{N}. \quad (4.18)$$

Волны с волновыми числами $1/\lambda = N/N, (N+1)/N, \dots$ и с $1/\lambda = 0, 1/N, \dots$ эквивалентны в силу $2K$ -периодичности функций sn^2 и dn^2 в (4.16), (4.17).

4.2.2 Солитоны

Кортвег и де Фриз нашли решения в виде уединенных волн для уравнения, описывающего волны на мелкой воде. Уединенные волны для нашей цепочки получаются в пределе $k \rightarrow 1$ при условии, что

$$\alpha = \frac{2K}{\lambda} \quad (4.19)$$

конечна [4.7]. В этом пределе уравнения (4.17) и (4.16) принимают вид

$$\exp(-br_n) - 1 = \frac{m}{ab} \beta^2 \operatorname{sech}^2(\alpha n \mp \beta t), \quad (4.20)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{ab}{m}} \operatorname{sh} \alpha. \quad (4.21)$$

Уравнения (4.20) и (4.21) представляют импульсные волны сжатия при $b > 0$, имеющие ширину h/α , высоту β^2 и скорость

$c = h\beta/\alpha$, где h — постоянная цепочки. Чем больше импульс, тем меньше ширина и больше скорость волны. Численный расчет показал, что импульс весьма устойчив [4.8]. Устойчивость при взаимодействии уединенных волн для уравнения КдФ показали численно Забуски и Крускал [4.9]; они же назвали уединенные устойчивые волны «солитонами». В этом смысле (4.20) представляет собой решеточный солитон.

Солитон может быть записан как

$$s_n = \mp \frac{\beta m}{b} \operatorname{th}(an \mp \beta t) \quad (4.22)$$

или как

$$S_n = \frac{m}{b} \log \{1 + A \exp [2(an \mp \beta t)]\}. \quad (4.23)$$

4.2.3. Гармонический предел

Одно из достоинств рассматриваемой цепочки состоит в том, что и сама система, и ее точные решения допускают переход как к гармоническому пределу ($b \rightarrow 0$), так и к пределу твердых сфер ($b \rightarrow \infty$). То же имеет место и для других решений, которые будут приведены в следующих разделах.

Гармоническая цепочка получается в пределе $b \rightarrow 0$ при конечной константе взаимодействия $\kappa = ab$. В пределе $b \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ кноидальная волна (4.17) переходит в синусоидальную волну

$$r_n = - \frac{(\pi v)^2}{ab/m} \frac{k^2/b}{2} \cos 2\pi \left(\frac{n}{\lambda} \mp vt \right), \quad (4.24)$$

где

$$v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{m}} \sin \left(\frac{\pi}{\lambda} \right). \quad (4.25)$$

Этот предел существует лишь при конечном k^2/b . В пределе $b \rightarrow 0$ мы ожидаем, что $\exp(-br_n) \rightarrow 1$; тогда из (4.20) мы получаем вследствие (4.21), что α стремится к нулю. Таким образом, решений типа уединенных волн в гармоническом пределе нет.

4.2.4. Двухсолитонные решения

Решение с двумя солитонами получится, если предположить, что

$$S_n = \frac{m}{b} \log \psi_n, \quad (4.26)$$

где [4.10]

$$\psi_n = A \operatorname{ch}(an - \beta t) + B \operatorname{ch}(\mu n - \gamma t). \quad (4.27)$$

Здесь A , B , β и γ суть функции от α и μ , которые определяются уравнениями движения. Другой способ — это использовать формулу [4.11]

$$\psi_n = 1 + A_1 \exp[2(\alpha_1 n - \beta_1 t)] + A_2 \exp[2(\alpha_2 n - \beta_2 t)] + A_3 \exp[2(\alpha_1 + \alpha_2)n - 2(\beta_1 + \beta_2)t], \quad (4.28)$$

где A_1 , A_2 , A_3 , β_1 и β_2 определяются как функции от α_1 и α_2 путем подстановки (4.26) и (4.28) в уравнения движения (4.13). Итак, мы получаем следующие два случая.

Случай I)

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{ab}{m}} \operatorname{sh} \alpha_1, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{ab}{m}} \operatorname{sh} \alpha_2, \\ A_3 = \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 A_1 A_2. \quad (4.29)$$

В этом случае два солитона распространяются в одном направлении, один догоняет другой и проходит сквозь него.

Случай II)

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{ab}{m}} \operatorname{sh} \alpha_1, \quad \beta_2 = -\sqrt{\frac{ab}{m}} \operatorname{sh} \alpha_2, \\ A_3 = \left(\frac{\operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{ch}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 A_1 A_2. \quad (4.30)$$

В этом случае солитоны распространяются в противоположных направлениях, происходит встречное столкновение, и один проходит через другой.

И в том и в другом случае асимптотический вид обоих солитонов дается формулой

$$\exp(-br_n) - 1 = \frac{m}{ab} \beta_i^2 \operatorname{sech}^2(\alpha_i n - \beta_i t + \delta_i^\mp) \quad (4.31)$$

для $i = 1, 2$, причем

$$\delta_1^- = \log A_1, \quad \delta_2^- = \log \frac{A_3}{A_1} \quad (4.32)$$

при $t \rightarrow -\infty$, и

$$\delta_1^+ = \log \frac{A_3}{A_2}, \quad \delta_2^+ = \log A_2 \quad (4.33)$$

при $t \rightarrow +\infty$. В общем мы имеем соотношение

$$\delta_1^- + \delta_2^- = \delta_1^+ + \delta_2^+, \quad (4.34)$$

которое имеет следующий смысл.

Солитон — это импульс сжатия с избыточной массой (h — постоянная цепочки)

$$M = - \sum_n (Y_n - Y_{n-1}) \frac{m}{h} = \frac{m}{h} (Y_{-\infty} - Y_{\infty}). \quad (4.35)$$

Однако (4.26) и (4.27) дают

$$\begin{aligned} mY_n = S_n - S_{n+1} &\rightarrow 0 & (n \rightarrow -\infty) \\ &\rightarrow -2 \frac{m}{b} \alpha & (n \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Таким образом, мы имеем

$$M = \frac{2m}{bh} \alpha, \quad (4.37)$$

что выполняется для $\alpha = \alpha_1$ и α_2 . Импульс солитона есть

$$P = \sum_n m \dot{Y}_n = m(s_{-\infty} - s_{\infty}) = \frac{2m}{b} \beta = Mc, \quad (4.38)$$

где $c = h\beta/\alpha$ есть скорость.

Поскольку положение двух солитонов при $t \rightarrow \mp \infty$ дается выражением

$$n_i^{\mp} = (\beta_i t - \delta_i^{\mp})/\alpha_i, \quad (4.39)$$

то центр масс системы находится в

$$n^{\mp} = \frac{M_1 n_1^{\mp} + M_2 n_2^{\mp}}{M_1 + M_2} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} [(\beta_1 + \beta_2)t - \delta_1^{\mp} - \delta_2^{\mp}]. \quad (4.40)$$

Таким образом, соотношение (4.34) показывает, что центр масс двух солитонов движется по прямой (и с постоянной скоростью) в (x, t) плоскости.

Показано, что кноидальные волны можно рассматривать как последовательности солитонов [4.12].

Общие N -солитонные решения были получены Хиротой [4.13] и Флашкой [4.15]. Мы вернемся к ним в следующем разделе.

4.3. Матричный формализм

Для краткости запишем уравнения движения (4.11) в безразмерной канонической форме

$$\dot{Q}_n = P_n, \quad \dot{P}_n = \exp[-(Q_n - Q_{n-1})] - \exp[-(Q_{n+1} - Q_n)]. \quad (4.41)$$

Уравнения движения можно представить в виде [4.14]

$$\dot{L} = BL - LB, \quad (4.42)$$

где L и B — матрицы, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} (L\varphi)_n &= b_n \varphi(n) + a_n \varphi(n-1) + a_{n+1} \varphi(n+1), \\ (B\varphi)_n &= a_n \varphi(n-1) - a_{n+1} \varphi(n+1). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Уравнения (4.42) дадут (4.41), если выбрать a_n и b_n следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{2} \exp[-(Q_n - Q_{n-1})/2], \quad b_n = \frac{1}{2} P_n. \quad (4.44)$$

Можно показать, что собственные значения λ оператора L

$$L\varphi = \lambda\varphi \quad (4.45)$$

не зависят от времени, если φ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi} = B\varphi. \quad (4.46)$$

4.3.1. Метод обратной задачи

Для бесконечной цепочки [4.15], где движение сосредоточено в конечной области, можно говорить о рассеянии падающей волны $z^{-n} = \exp(-ikn)$ (k — волновое число) и о рассеянной волне $R(k)z^n$, так что

$$\varphi \sim z^{-n} + R(z, t)z^n \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (4.47)$$

Помимо непрерывного у (4.45) будет дискретный спектр

$$\lambda_j = \frac{z_j + z_j^{-1}}{2} \quad (|z_j| < 1), \quad (4.48)$$

не зависящий от времени. Соответствующие собственные функции имеют асимптотики

$$\varphi_j(n) \sim c_j(t)z_j^n \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (4.49)$$

где $c_j(t)$ — нормировочные константы, определенные так, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_j(n)^2 = 1. \quad (4.50)$$

Если задана волновая функция в начальный момент времени, то мы можем вычислить $R(z, 0)$, z_j и $c_j(0)$. Их мы будем называть начальными данными рассеяния. Можно показать, что данные рассеяния, отвечающие моменту времени t , даются формулами

$$R(z, t) = R(z, 0) \exp[t(z^{-1} - z)], \quad (4.51)$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad (4.52)$$

$$c_j(t)^2 = c_j(0)^2 \exp[t(z_j^{-1} - z_j)]. \quad (4.53)$$

Построим ядро

$$F(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z, t) z^{m-1} dz + \sum_j c_j(t)^2 z_j^m, \quad (4.54)$$

где контур интегрирования окружает начало координат в плоскости комплексной переменной z , и дискретное интегральное уравнение

$$\kappa(n, m) + F(n+m) + \sum_{n'=-n+1}^{\infty} \kappa(n, n') F(n'+m) = 0. \quad (4.55)$$

Если решить это уравнение относительно $\kappa(n, m)$, то мы получим решение уравнений движения в виде [4.15]

$$\exp[-(Q_n - Q_{n-1})] = \left(\frac{K(n, n)}{K(n-1, n-1)} \right)^2, \quad (4.56)$$

$$[K(n, n)]^{-2} = 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') F(n' + n). \quad (4.57)$$

Мы видим, что [4.16]

$$\begin{aligned} P_n &= s_n - s_{n+1}, \\ s_n &= \kappa(n-1, n). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Такой способ решения задачи Коши для нелинейной системы принято называть методом обратной задачи (рассеяния).

4.3.2. Многосолитонные решения

Если предположить, что отражения нет, т. е.

$$R(z, 0) = 0, \quad (4.59)$$

то мы получаем N -солитонное решение, найденное в [4.13], [4.15]:

$$S_n = \log \det B_n, \quad (4.60)$$

где B_n — матрица $N \times N$ с элементами

$$(B_n)_{jk} = \delta_{jk} + c_j c_k \frac{(z_j z_k)^{n+1}}{1 - z_j z_k} \exp[-(\beta_j + \beta_k)t] \quad (j, k = 1, 2, \dots, N), \quad (4.61)$$

причем

$$z_j = \pm \exp(-\alpha_j), \quad \beta_j = \pm \sqrt{\frac{ab}{m}} \operatorname{sh} \alpha_j, \quad (4.62)$$

где константы α_j и $c_j = c_j(0)$ произвольны. Это решение состоит из N солитонов вида

$$\exp[-(Q_n - Q_{n-1})] - 1 = \beta_j^2 \operatorname{sech}^2(\alpha_j n - \beta_j t + \delta_j^\mp), \quad (4.63)$$

где сдвиги фаз δ_j^\mp при $t \rightarrow \mp \infty$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_j \delta_j^- = \sum_j \delta_j^+, \quad (4.64)$$

представляющему собой сохранение полного импульса (ср. (4.34)).

4.4. Непрерывный предел

Кратко опишем некоторые результаты в непрерывном пределе.

Для достаточно гладких волн наше уравнение движения (4.11) превращается в дифференциальное уравнение [4.7]

$$Y_{tt} = c_0^2 \left[(1 - bhY_x) Y_{xx} + \frac{h^2}{12} Y_{xxx} \right], \quad (4.65)$$

где

$$c_0 = h \sqrt{\frac{ab}{m}}, \quad x = nh, \quad (4.66)$$

и после некоторых преобразований оно сводится к уравнению КдФ

$$u_\tau - 6uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (4.67)$$

где

$$u = 2br_n, \quad \xi = \frac{x - c_0 t}{h}, \quad \tau = \frac{c_0 t}{24h}. \quad (4.68)$$

Если обозначить

$$u = \omega_\xi, \quad (4.69)$$

то уравнение КдФ записывается в виде

$$\omega_\tau - 3\omega_\xi^2 - \omega_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.70)$$

4.5. Преобразования Бэклунда

Если поставлены периодические граничные условия или условия закрепленного конца, то гамильтониан нашей системы может быть записан в виде

$$H(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_n P_n^2 + \sum_n \frac{\exp(Q_{n-1})}{\exp(Q_n)} + \text{const}. \quad (4.71)$$

Как легко убедиться, преобразование $(Q, P) \rightarrow (Q', P')$, где

$$P_n = \frac{\exp(Q_n)}{\exp(Q'_n)} + \frac{\exp(Q'_{n-1})}{\exp(Q_n)} - \alpha, \quad (4.72)$$

$$P'_n = \frac{\exp(Q_n)}{\exp(Q'_n)} + \frac{\exp(Q'_n)}{\exp(Q_{n+1})} - \alpha$$

($\alpha = \text{const}$), сохраняет гамильтониан с точностью до константы:

$$H'(Q', P') = H(Q, P) + \text{const}; \quad (4.73)$$

дополнительная константа определяется граничными условиями.

Это преобразование является каноническим и выводится из производящей функции [4.17]

$$W(Q, Q') = \sum_n \{ \exp[-(Q'_n - Q_n)] - \exp[-(Q_{n+1} - Q'_n)] - \alpha(Q'_n - Q) \} \quad (4.74)$$

с помощью обычных формул канонического преобразования, т. е.

$$P_n = \frac{\partial W}{\partial Q_n}, \quad P'_n = -\frac{\partial W}{\partial Q'_n}. \quad (4.75)$$

Предположим, что (Q, P) — известное решение, тогда (Q', P') тоже будет решением той же системы. Такие преобразования известны для других нелинейных уравнений и называются преобразованиями Бэклунда.

Поскольку $P_n = \dot{Q}_n$ и $P'_n = \dot{Q}'_n$, то преобразования Бэклунда для нашей решетки могут быть записаны [4.17], [4.18] следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_n &= \exp[-(Q'_n - Q_n)] + \exp[-(Q_n - Q'_{n-1})] - \alpha, \\ \dot{Q}'_n &= \exp[-(Q'_n - Q_n)] + \exp[-(Q_{n+1} - Q'_n)] - \alpha. \end{aligned} \quad (4.76)$$

В качестве простого примера мы начнем с тривиального решения

$$Q_n = \dot{Q}_n = 0 \quad (4.77)$$

и получим решение уравнения (4.76), задаваемое формулой

$$\exp Q'_n = \frac{\operatorname{ch}(\kappa n - \beta t)}{\operatorname{ch}[\kappa(n+1) - \beta t]}, \quad (4.78)$$

где

$$\alpha = 2\operatorname{ch} \kappa, \quad \beta = -\operatorname{sh} \kappa. \quad (4.79)$$

Равенство (4.78) можно записать как

$$\exp[-(Q'_n - Q'_{n-1})] = 1 + \operatorname{sh}^2 \kappa \cdot \operatorname{sech}^2(\kappa n - \beta t). \quad (4.80)$$

Таким образом, видно, что преобразование от (Q, P) к (Q', P') добавляет еще один солитон. Можно показать, что это преобразование эквивалентно преобразованию Бэклунда, предложенному Ченом и Лю [4.19].

Можно показать [4.20], что описанное выше преобразование переходит в непрерывном пределе в преобразование Бэклунда для уравнения КдФ [4.21]

$$\begin{aligned} \omega_\xi - \omega'_\xi &= -2\eta^2 - (\omega - \omega')^2/2, \\ \omega_\tau - \omega'_\tau &= [-2\omega_{\xi\xi} - 2\omega_\xi(\omega - \omega') = 4\eta^2(\omega - \omega')],_\xi, \end{aligned} \quad (4.81)$$

если записать

$$\begin{aligned} \omega &= 2Q_{n+1/2} = Q_n + Q_{n+1}, \\ \omega' &= 2Q'_n. \end{aligned} \quad (4.82)$$

4.6. Заключительные замечания

Недавно было получено общее решение задачи Коши для периодической цепочки Тоды [4.22, 4.23]. Что касается дальнейших задач, то нам придется иметь дело с цепочками, содержащими примеси, которые связаны с теплопроводностью [4.24],

а также с устойчивостью траекторий на фазовой плоскости. Кроме того, остаются проблемы граничных условий и внешних сил. Помимо этих задач классической механики можно ожидать, что квантование волн в нелинейных решетках прояснит их связь с решеточными фононами.

ЛИТЕРАТУРА

- 4.1. Fermi E., Pasta J., Ulam S. — Collected Papers of ENRICO FERMI, Vol. II (University of Chicago Press, 1965), p. 978.
- 4.2. Ford J. — J. Math. Phys. 2, 387 (1961).
- 4.3. Ford J., Waters J. — J. Math. Phys. 4, 1293 (1963).
- 4.4. Toda M. — J. Phys. Soc. Jpn. 20, 2095 (1965); Progr. Theor. Phys. Suppl. 36, 113 (1966).
- 4.5. Toda M. — J. Phys. Soc. Jpn. 22, 431 (1967).
- 4.6. Korteweg D. J., De Vries G. — Philos. Mag. 18, 35 (1895).
- 4.7. Toda M. — J. Phys. Soc. Jpn. 23, 501 (1967).
- 4.8. Saito N. — Progr. Theor. Phys. Suppl. 45, 201 (1970).
- 4.9. Zabusky N. J., Kruskal M. D. — Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965).
- 4.10. Toda M. — Intern. Conf. Statistical Mech. Kyoto (1968); J. Phys. Soc. Jpn. Suppl. 26, 235 (1969).
- 4.11. Toda M., Wadati M. — J. Phys. Soc. Jpn. 34, 18 (1973).
- 4.12. Toda M. — Progr. Theor. Phys. Suppl. 45, 174 (1970).
- 4.13. Hirota R. — J. Phys. Soc. Jpn. 35, 286 (1973).
- 4.14. Flaschka H. — Phys. Rev. B9, 1924 (1974).
- 4.15. Flaschka H. — Progr. Theor. Phys. 51, 703 (1974).
- 4.16. Toda M. — Phys. Rep. 18C, 1 (1975).
- 4.17. Toda M., Wadati M. — J. Phys. Soc. Jpn. 39, 1204 (1975).
- 4.18. Wadati M., Toda M. — J. Phys. Soc. Jpn. 39, 1196 (1975).
- 4.19. Chen H., Liu C. — J. Math. Phys. 16, 1428 (1975).
- 4.20. Toda M. — Progr. Theor. Phys. Suppl. 59, 1 (1976); Intern. Symp. on Mathematical Problems in Theoretical Physics, ed. by H. Araki, Lecture Notes in Physics, Vol. 39 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975), p. 387.
- 4.21. Wahlquist H. D., Estabrook F. B. — Phys. Rev. Lett. 31, 1386 (1973).
- 4.22. Кас М., Van Moerbeke P. — J. Math. Phys. 72, 2879 (1974).
- 4.23. Date E., Tanaka S. — Progr. Theor. Phys. 55, 457 (1976).
- 4.24. Toda M. — Phys. Scr. 20, 424 (1979).

5. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ

Р. Хирога

Главная цель этой главы представить прямой и последовательный метод нахождения точных решений и преобразований Бэклунда для определенного класса нелинейных уравнений эволюции. Заменой зависимых переменных нелинейные уравнения эволюции преобразуются в билинейные дифференциальные уравнения специального вида

$$F\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) f(t, x) f(t', x')|_{t=t', x=x'} = 0,$$

которые мы решаем точно, используя подход теории возмущений.

В этой статье рассмотрены следующие примеры: уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), уравнения КдФ более высокого порядка, модельные уравнения для волн на мелкой воде, уравнение Буссинеска, уравнения цепочки Тоды, цепочка Тоды в дискретном времени и др.

5.1. Предварительные замечания

Для того чтобы проиллюстрировать указанный метод, мы рассмотрим уравнения КдФ [5.1, 5.2]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (5.1)$$

с граничным условием $u = 0$ при $|x| = \infty$. Здесь индексы t, x обозначают частные производные.

Решим (5.1), используя обычный метод возмущений. Пусть $u = w_x$; тогда, интегрируя (5.1) по x , получим

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0, \quad (5.2)$$

где постоянная интегрирования выбрана равной нулю. Разложим w в степенной ряд по малому параметру ϵ :

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots \quad (5.3)$$

Подставим (5.3) в (5.2) и, собирая члены с одинаковыми степенями ϵ , получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) w_1 = 0, \quad (5.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) w_2 = -3(w_1)_x^2, \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) w_3 = -6(w_1)_x(w_2)_x, \quad (5.6)$$

и т. д. Разрешив эти уравнения, мы получим формальное решение в виде ряда теории возмущений. Трудность, с которой мы сталкиваемся на этом пути, заключается в том, что ряд теории возмущений не сходится быстро и даже расходится.

Недавно была разработана мощная техника суммирования, получившая название аппроксимации Паде [5.3]. $[N/M]$ Паде-аппроксимантой функции $f(\epsilon)$ называется отношение двух полиномов, числитель которого степени N , а знаменатель степени M . Аппроксимация Паде применялась в различных разделах физики как систематический метод получения большей информации из разложений в степенные ряды [5.4].

Рассмотрим Паде-аппроксиманту для $w(\epsilon)$. Хотя мы можем построить Паде-аппроксиманту для $w(\epsilon)$ прямо из степенного ряда решения (5.3), значительно интересней преобразовать первоначальное уравнение к специальному виду, удобному для использования Паде-аппроксиманты. Для этого заменим w на G/F и найдем уравнения, которым удовлетворяют F и G . Тогда степенные ряды решений для F и G дадут Паде-аппроксиманту для w .

Подставляя $w = G/F$ в (5.2), получим уравнение

$$\begin{aligned} & (G_t F - G F_t)/F^2 + 3(G_x F - G F_x)^2/F^4 + \\ & + (G_{xx} F - 3G_{xx} F_x - 3G_x F_{xx} - G F_{xxx})/F^2 + \\ & + 6(F G_x F_x^2 + F G F_x F_{xx} - G F_x^3)/F^4 = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

которое, очевидно, имеет более сложный вид, чем первоначальное уравнение для w . Теперь в одном уравнении содержатся две зависимые переменные: F и G . Но, замечая, что (5.7) может быть переписано как

$$\begin{aligned} & [G_t F - G F_t + 3\lambda(G_x F - G F_x) + G_{xx} F - \\ & - 3G_{xx} F_x + 3G_x F_{xx} - G F_{xxx}]/F^2 + \\ & + 3(G_x F - G F_x)[G_x F - G F_x - 2(F F_{xx} - F_x^2) - \lambda F^2]/F^4 = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

расцепим (5.7), введя произвольную функцию λ . Мы получим два уравнения

$$\begin{aligned} & G_t F - G F_t + 3\lambda(G_x F - G F_x) + G_{xx} F - \\ & - 3G_{xx} F_x + 3G_x F_{xx} - G F_{xxx} = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$2(F F_{xx} - F_x^2) + \lambda F^2 - (G_x F - G F_x) = 0, \quad (5.10)$$

которые могут быть представлены в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} + 3\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^3 \right] G(x, t) F(x', t')|_{x=x', t+t'} = 0, \quad (5.11)$$

и

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 + \lambda \right] F(x, t) F(x', t) |_{x=x'} - \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) G(x, t) F(x', t) |_{x=x'} = 0. \quad (5.12)$$

Удобно ввести операторы D_t , D_x и различные их произведения:

$$D_t^n D_x^m f \cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m f(x, t) g(x', t') |_{x=x', t=t'}. \quad (5.13)$$

С помощью этих обозначений (5.11) и (5.12) записываются как

$$(D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) G \cdot F = 0, \quad (5.14)$$

$$(D_x^2 + \lambda) F \cdot F - D_x G \cdot F = 0. \quad (5.15)$$

Заметим, что (5.14) и (5.15) инвариантны относительно преобразований F и G , которые не изменяют $\psi = G/F$. Пусть $F = hF'$ и $G = hG'$, тогда (5.14) и (5.15) преобразуются к виду [см. ниже (VI.3)]

$$(D_t + 3\lambda' D_x + D_x^3) G' \cdot F' = 0, \quad (5.16)$$

$$(D_x^2 + \lambda') F' \cdot F' - D_x G' \cdot F' = 0, \quad (5.17)$$

где

$$\lambda' = \lambda + (D_x^2 h \cdot h) / h^2. \quad (5.18)$$

Запишем (5.15) в виде

$$\lambda = (G/F)_x - 2(\ln F)_{xx}, \quad (5.19)$$

который показывает, что асимптотическое значение λ определяется граничным значением для $u = (G/F)_x$ и асимптотикой F при $|x| = \infty$. В последующем положим λ равным нулю.

Для $\lambda = 0$ найдем, что

$$G = 2F_x \quad (5.20)$$

является решением (5.19). Следовательно, имеем

$$u = 2(\ln F)_{xx}. \quad (5.21)$$

Подставляя (5.20) в (5.14), получим

$$(D_t + D_x^3) F_x \cdot F = 0, \quad (5.22)$$

что равносильно [см. ниже (III.1)]

$$D_x (D_t + D_x^3) F \cdot F = 0. \quad (5.23)$$

5.2. Свойства D -оператора

В этом разделе перечислены некоторые свойства операторов D_t, D_x , введенных в предыдущем разделе. Имеем

$$D_t^n D_x^m a \cdot b = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m a(t, x) b(t', x') \Big|_{t=t', x=x'}.$$

Полезно ввести оператор D_z и дифференцирование $\partial/\partial z$, полагая

$$D_z = \delta D_t + \varepsilon D_x, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \delta \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x},$$

где δ и ε — постоянные. Из определения очевидны следующие свойства:

- (I) $D_z^m a \cdot 1 = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^m a,$
- (II) $D_z^m a \cdot b = (-1)^m D_z^m b \cdot a,$
- (II.1) $D_z^m a \cdot a = 0$ для нечетных $m,$
- (III) $D_z^m a \cdot b = D_z^{m-1} (a_z \cdot b - a \cdot b_z),$
- (III.1) $D_z^m a \cdot a = 2D_z^{m-1} a_z \cdot a$ для четных $m,$
- (III.2) $D_x D_t a \cdot a = 2D_x a_t \cdot a = 2D_t a_x \cdot a,$
- (IV) $D_x^m \exp(p_1 x) \cdot \exp(p_2 x) = (p_1 - p_2)^m \exp[(p_1 + p_2)x].$

Пусть $F(D_t, D_x)$ есть полином от D_t и D_x , тогда

- (IV.1) $F(D_t, D_x) \exp(\Omega_1 t + p_1 x) \cdot \exp(\Omega_2 t + p_2 x) =$
 $= F(\Omega_1 - \Omega_2, p_1 - p_2) / F(\Omega_1 + \Omega_2, p_1 + p_2) \times$
 $\times F(D_t, D_x) \exp[(\Omega_1 + \Omega_2)t + (p_1 + p_2)x] \cdot 1,$
- (V) $\exp(\varepsilon D_x) a(x) \cdot b(x) = a(x + \varepsilon) b(x - \varepsilon),$
- (VI) $\exp(\varepsilon D_z) a b \cdot c d = [\exp(\varepsilon D_z) a \cdot c] \times$
 $\times [\exp(\varepsilon D_z) b \cdot d] = [\exp(\varepsilon D_z) a \cdot d] [\exp(\varepsilon D_z) b \cdot c],$
- (VI.1) $D_z a b \cdot c = \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right) b c + a (D_z b \cdot c),$
- (VI.2) $D_z^2 a b \cdot c = \left(\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right) b c + 2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} \right) D_z b \cdot c + a (D_z^2 b \cdot c),$
- (VI.3) $D_z^3 a c \cdot b c = (D_z^3 a \cdot b) c^2 + 3(D_z a \cdot b) D_z^2 c \cdot c,$
- (VI.4) $D_x^m \exp(px) a \cdot \exp(px) b = \exp(2px) D_x^m a \cdot b,$
- (VII) $\exp(\delta D_t) [\exp(\varepsilon D_x) a \cdot b] \cdot [\exp(\varepsilon D_x) c \cdot d] =$
 $= \exp(\varepsilon D_x) [\exp(\delta D_t) a \cdot c] \cdot [\exp(\delta D_t) b \cdot d] =$
 $= [\exp(\delta D_t + \varepsilon D_x) a \cdot d] [\exp(-\delta D_t + \varepsilon D_x) c \cdot b].$

Следующие формулы полезны для преобразования нелинейных дифференциальных уравнений к билинейному виду.

$$(VIII) \quad \exp\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\right) \left[\frac{a}{b}\right] = [\exp(\varepsilon D_z) a \cdot b] / [\operatorname{ch}(\varepsilon D_z) b \cdot b],$$

$$(VIII.1) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D_z a \cdot b}{b^2},$$

$$(VIII.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D_z^2 a \cdot b}{b^2} - \left(\frac{a}{b}\right) \frac{D_z^2 a \cdot b}{b^2},$$

$$(VIII.3) \quad \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D_z^3 a \cdot b}{b^2} - 3 \left[\frac{D_z a \cdot b}{b^2} \frac{D_z^2 b \cdot b}{b^2} \right],$$

$$(IX) \quad 2 \operatorname{ch}\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\right) \ln f = \ln [\operatorname{ch}(\varepsilon D_z) f \cdot f],$$

$$(IX.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln f = \frac{D_z^2 f \cdot f}{2f^2},$$

$$(IX.2) \quad \frac{\partial^4}{\partial z^4} \ln f = \frac{D_z^4 f \cdot f}{2f^2} - 6 \left[\frac{D_z^2 f \cdot f}{2f^2} \right]^2.$$

Формулы, приведенные ниже, полезны для преобразования билинейных дифференциальных уравнений обратно к первоначальным нелинейным дифференциальным уравнениям.

$$(X) \quad \exp(\varepsilon D_x) a \cdot b = \left\{ \exp \left[2 \operatorname{ch} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \ln b \right] \right\} \left[\exp \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{a}{b} \right) \right].$$

Пусть $\psi = a/b$, $u = 2(\ln b)_{xx}$, тогда

$$(X.1) \quad (D_x a \cdot b)/b^2 = \psi_x,$$

$$(X.2) \quad (D_x^2 a \cdot b)/b^2 = \psi_{xx} + u\psi,$$

$$(X.3) \quad (D_x^3 a \cdot b)/b^2 = \psi_{xxx} + 3u\psi_x,$$

$$(X.4) \quad (D_x^4 a \cdot b)/b^2 = \psi_{xxxx} + 6u\psi_{xx} + (u_{xx} + 3u^2)\psi.$$

$$(XI) \quad \exp(\varepsilon D_x) a \cdot b = \exp \left[\operatorname{sh} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \ln \frac{a}{b} + \operatorname{ch} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \ln(ab) \right].$$

Пусть $\varphi = \ln(a/b)$ и $\rho = \ln(ab)$, тогда

$$(XI.1) \quad (D_x a \cdot b)/ab = \varphi_x,$$

$$(XI.2) \quad (D_x^2 a \cdot b)/ab = \rho_{xx} + (\varphi_x)^2,$$

$$(XI.3) \quad (D_x^3 a \cdot b)/ab = \varphi_{xxx} + 3\varphi_x \rho_{xx} + (\varphi_x)^3,$$

$$(XI.4) \quad (D_x^4 a \cdot b)/ab = \rho_{xxxx} + 4\varphi_x \varphi_{xxx} + 3(\rho_{xx})^2 + 6(\varphi_x)^2 \rho_{xx} + (\varphi_x)^4.$$

Все эти свойства проверяются просто, поэтому мы проверим только (X). Мы имеем

$$2 \operatorname{ch} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \ln b = \ln b(x + \varepsilon) + \ln b(x - \varepsilon),$$

$$\exp \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{a}{b} \right) = a(x + \varepsilon)/b(x + \varepsilon),$$

и из (V)

$$\exp(\varepsilon D_x) a \cdot b = a(x + \varepsilon) b(x - \varepsilon);$$

следовательно,

$$\exp(\varepsilon D_x) a \cdot b = \exp \left[2 \operatorname{ch} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \ln b \right] \left[\exp \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{a}{b} \right) \right],$$

что доказывает (X). Соотношения (X.1)—(X.4) получены разложением (X) в степенной ряд по ε и приравниванием членов с одинаковыми степенями ε . Другие свойства D -оператора описаны в другой работе автора [5.5].

5.3. Решения билинейных дифференциальных уравнений

Будем решать (5.23), разлагая F в степенной ряд по параметру [5.6]

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (5.24)$$

Подставляя (5.24) в (5.23) и объединяя члены с одинаковыми степенями ε , получим

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_1 = 0, \quad (5.25)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_2 = -D_x (D_t + D_x^3) f_1 \cdot f_1, \quad (5.26)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_3 = -D_x (D_t + D_x^3) (f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2) \quad (5.27)$$

и т. д.

Можно получить два типа решений: 1) полиномиальное решение и 2) экспоненциальное решение.

Для случая 1) найдем, что

$$f_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + bt - 24a_4 t x \quad (5.28)$$

является решением (5.25). Подставляя (5.28) в (5.26), найдем, что правая часть в (5.26) обращается в нуль, и, стало быть, f_2 может быть выбрана равной нулю, если

$$a_4 = 0, \quad 3a_1 a_3 = a_2^2 \quad \text{и} \quad b = 12a_3.$$

Следовательно, мы получили точное решение (5.23)

$$F = 1 + \varepsilon [a_0 + a_1 x + (3a_1 a_3)^{1/2} x^2 + a_3 (x^3 + 12t)]. \quad (5.29)$$

Если мы наложим на u граничные условия

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (5.30)$$

то найдем, что $a_1 = 0$ и, полагая ε равным единице, получим

$$F = a_3 [x^3 + 12(t + \text{const})], \quad (5.31)$$

которое вместе с условием $u = 2(\ln F)_{xx}$ составляет решение с бесконечным разрывом

$$u = -6x(x^3 - 24t)/(x^3 + 12t)^2. \quad (5.32)$$

Для случая 2) из (5.25) имеем

$$f_1 = \sum_{i=1}^N a_i \exp(\Omega_i t + p_i x), \quad (5.33)$$

где $\Omega_i + p_i^3 = 0$, p_i и a_i постоянны.

Подставляя (5.33) в (5.26), найдем, что вследствие свойства (IV) D -оператора члены, подобные $\exp 2(\Omega_i t + p_i x)$, исключаются из правой части (5.26). Тогда, используя (IV.1), получим

$$f_2 = \sum_{i>j}^N \exp(A_{ij} + \eta_i + \eta_j), \quad (5.34)$$

где $\exp(\eta_i) = a_i \exp(\Omega_i t + p_i x)$, и

$$\exp(A_{ij}) = -\frac{(p_i - p_j)[\Omega_i - \Omega_j + (p_i - p_j)^3]}{(p_i + p_j)[\Omega_i + \Omega_j + (p_i + p_j)^3]} = (p_i - p_j)^2 / (p_i + p_j)^2. \quad (5.35)$$

Подставляя (5.34) в (5.27), найдем, что вследствие свойства (IV.4) и соотношения (5.25) члены, подобные $\exp(2\eta_i + \eta_k)$, исключаются из правой части (5.27). Тогда

$$f_3 = \sum_{i>j>k}^N \exp(A_{ijk} + \eta_i + \eta_j + \eta_k). \quad (5.36)$$

Здесь

$$\exp(A_{ijk}) = \exp(A_{ij} + A_{ik} + A_{jk}). \quad (5.37)$$

В нашем случае степенной ряд оканчивается членом f_N , и мы получаем точное решение в виде

$$F = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{i>j}^{(N)} A_{ij} \mu_i \mu_j + \sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i\right), \quad (5.38)$$

где $\sum_{\mu=0,1}$ означает суммирование по всем возможным комбинациям из $\mu_1 = 0, 1; \mu_2 = 0, 1; \dots; \mu_N = 0, 1$, и $\sum_{i>j}^{(N)}$ означает суммирование по всем возможным парам, выбранным из N элементов. Параметр ε содержится в константе a_i . Уравнение (5.38) вместе с $u = 2(\ln F)_{xx}$ дает N -солитонное решение уравнения КдФ [5.8].

5.4. N -солитонные решения уравнений типа КдФ

В предыдущем разделе мы преобразовали уравнение КдФ в билинейное дифференциальное уравнение

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = 0. \quad (5.39)$$

В этом разделе рассмотрим обобщенный вид уравнения (5.39)

$$F(D_t, D_x)f \cdot f = 0, \quad (5.40)$$

где F есть многочлен или экспоненциальная функция от D_t, D_x , удовлетворяющая условию

$$F(D_t, D_x) = F(-D_t, -D_x), \quad (5.41)$$

$$F(0, 0) = 0. \quad (5.42)$$

Повторяя процедуру предыдущего раздела, найдем, что следующий вид функции f дает N -солитонное решение:

$$f = \sum_{\mu=0,1}^{(N)} \exp\left(\sum_{i>j}^{(N)} A_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^N \mu_i\eta_i\right), \quad (5.43)$$

где

$$\eta_i = \Omega_i t + p_i x + \eta_i^0, \quad (5.44)$$

$$F(\Omega_i, p_i) = 0, \quad (5.45)$$

$$\exp(A_{ij}) = -F(\Omega_i - \Omega_j, p_i - p_j) / F(\Omega_i + \Omega_j, p_i + p_j) \quad (5.46)$$

при условии, что выполняется следующее тождество:

$$\sum_{\sigma=\pm 1} F\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i \Omega_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i p_i\right) \times \prod_{i>j}^{(n)} F(\sigma_i \Omega_i - \sigma_j \Omega_j, \sigma_i p_i - \sigma_j p_j) \sigma_i \sigma_j = 0 \quad (5.47)$$

для $n = 1, 2, \dots, N$.

Заметим, что для $N = 2$ тождество (5.47) выполняется без каких-либо дополнительных условий на F , что указывает на наличие по крайней мере 2-солитонного решения для каждого нелинейного эволюционного уравнения, которое может быть преобразовано к обобщенному билинейному дифференциальному уравнению (5.40).

Уравнение (5.40) может быть преобразовано обратно к обыкновенному виду нелинейного эволюционного уравнения, используя свойства (V), (IX), (X) и т. д. Ниже помещены нелинейные уравнения эволюции, преобразования их зависимых переменных и билинейные формы в тех случаях, когда известно, что F удовлетворяет тождеству для произвольного N .

1. Уравнение Буссинеска [5.9]

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0, \quad (5.48)$$

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad (5.49)$$

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)f \cdot f = 0. \quad (5.50)$$

11. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили [5.10]

$$u_{tx} + u_{yy} + 6(uu_x)_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.51)$$

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad (5.52)$$

$$(D_t D_x + D_y^2 + D_x^4) f \cdot f = 0. \quad (5.53)$$

III. Модельные уравнения для волн на мелкой воде [5.11], [5.12]

$$(a) \quad u_t - u_{xxt} - 3uu_t + 3u_x \int_x^\infty u_t dx' + u_x = 0, \quad (5.54)$$

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad (5.55)$$

$$D_x(D_t - D_t D_x^2 + D_x) f \cdot f = 0. \quad (5.56)$$

$$(б) \quad u_t - u_{xxt} - 4uu_t + 2u_x \int_x^\infty u_t dx' + u_x = 0, \quad (5.57)$$

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad (5.58)$$

$$\left[D_x(D_t - D_t D_x^2 + D_x) + \frac{1}{3} D_t(D_\tau + D_x^3) \right] f \cdot f = 0, \quad (5.59)$$

причем

$$D_x(D_\tau + D_x^3) f \cdot f = 0, \quad (5.60)$$

где τ — вспомогательная переменная.

IV. Уравнения КдФ более высокого порядка [5.13], [5.14]

$$(a) \quad u_t + 45u^2 u_x + 15(u_x u_{xx} + u_{xxx} u) + u_{xxxxx} = 0, \quad (5.61)$$

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad (5.62)$$

$$D_x(D_t + D_x^5) f \cdot f = 0. \quad (5.63)$$

$$(б) \quad u_t + 30u^2 u_x + 10(2u_x u_{xx} + u_{xxx} u) + u_{xxxxx} = 0, \quad (5.64)$$

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad (5.65)$$

$$\left[D_x(D_t + D_x^5) - \frac{5}{3} D_\tau(D_\tau + D_x^3) \right] f \cdot f = 0, \quad (5.66)$$

причем

$$D_x(D_\tau + D_x^3) f \cdot f = 0, \quad (5.67)$$

где τ — вспомогательная переменная.

V. Цепочка Тоды [5.15]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln [1 + V_n(t)] = V_{n+1}(t) + V_{n-1}(t) - 2V_n(t), \quad (5.68)$$

$$V_n(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln f_n(t), \quad (5.69)$$

$$V_n(t) = f_{n+1}(t) f_{n-1}(t) / f_n^2(t) - 1, \quad (5.70)$$

$$[D_t^2 - 4 \operatorname{sh}^2(D_n/2)] f \cdot f = 0. \quad (5.71)$$

VI. Разностный аналог уравнения КДФ [5.16]

$$\Delta_t \frac{W_n(t)}{1 + W_n(t)} = W_{n-1/2}(t) - W_{n+1/2}(t), \quad (5.72)$$

$$W_n(t) = f_{n+1/2}(t) f_{n-1/2}(t) / f_n \left(t + \frac{\delta}{2} \right) f_n \left(t - \frac{\delta}{2} \right) - 1, \quad (5.73)$$

где Δ_t — разностный оператор вида

$$\Delta_t F(t) = \delta^{-1} \left[F \left(t + \frac{\delta}{2} \right) - F \left(t - \frac{\delta}{2} \right) \right], \quad (5.74)$$

$$\text{sh} \frac{1}{4} (D_n + \delta D_t) [2\delta^{-1} \text{sh}(\delta D_t/2) + 2 \text{sh}(D_n/2)] f \cdot f = 0. \quad (5.75)$$

VII. Цепочка Тоды в дискретном времени [5.17].

$$\Delta_t^2 \ln [1 + V_n(t)] = \hat{V}_{n+1}(t) + \hat{V}_{n-1}(t) - 2\hat{V}_n(t), \quad (5.76)$$

где

$$\hat{V}_n(t) = \delta^{-2} \ln [1 + \delta^2 V_n(t)], \quad (5.77)$$

$$V_n(t) = f_{n+1}(t) f_{n-1}(t) / f_n^2(t) - 1, \quad (5.78)$$

$$[4\delta^{-2} \text{sh}^2(\delta D_t/2) - 4 \text{sh}^2(D_n/2)] f \cdot f = 0, \quad (5.79)$$

где Δ_t^2 определяется как

$$\Delta_t^2 F(t) = \delta^{-2} [F(t + \delta) + F(t - \delta) - 2F(t)]. \quad (5.80)$$

По-видимому, это только некоторые примеры нелинейных эволюционных уравнений, которые обладают N -солитонными решениями. Для дальнейшего изучения остается следующий вопрос. «Какому условию должна удовлетворять функция F , чтобы существовало N -солитонное решение?» или «При каких условиях F удовлетворяет тождеству (5.47)?»

5.5. Билинейный вид преобразований Бэклунда

Рассмотрим преобразование Бэклунда, связывающее пары решений нелинейных эволюционных уравнений. Преобразование Бэклунда использовалось для построения N -солитонных решений [5.18, 5.19] и для получения законов сохранения более высокого порядка [5.20]. Его связь с методом обратной задачи рассеяния обсуждалась в [5.21]—[5.24].

Преобразование Бэклунда для билинейного дифференциального уравнения было введено в [5.5]. В предыдущем разделе мы рассматривали билинейное дифференциальное уравнение вида

$$F(D_t, D_x) f \cdot f = 0, \quad (5.81)$$

для которого мы укажем теперь метод построения преобразования Бэклунда. Метод заключается в следующей процедуре. Рассмотрим сначала уравнение

$$[F(D_t, D_x) f' \cdot f'] ff - f' f' [F(D_t, D_x) f \cdot f] = 0 \quad (5.82)$$

или подобное ему. Понятно, что если f является решением (5.81), то f' — другое решение, и наоборот. Тогда, выполняя действия в (5.82), выведем уравнение, связывающее f' и f . Уравнения, полученные таким образом, являются преобразованием Бэклунда для билинейного уравнения $F(D_t, D_x) f \cdot f = 0$.

Преобразование Бэклунда линейно по отношению к каждой зависимой переменной и может быть сведено либо к 1) новому нелинейному эволюционному уравнению, обладающему N -солитонными решениями, либо к 2) обратной задаче рассеяния для нелинейного эволюционного уравнения. Выведем преобразование Бэклунда в билинейном виде для уравнения КдФ.

Прежде всего представим математическую формулу, являющуюся ключевой для нахождения преобразования Бэклунда билинейного вида. Она записывается так:

$$\begin{aligned} \exp(D_1) [\exp(D_2) a \cdot b] \cdot [\exp(D_3) c \cdot d] &= \\ &= \exp \frac{1}{2} (D_2 - D_3) \left\{ \exp \left[\frac{1}{2} (D_2 + D_3) + D_1 \right] a \cdot d \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \exp \left[\frac{1}{2} (D_2 + D_3) - D_1 \right] c \cdot b \right\}, \quad (5.83) \end{aligned}$$

где $D_i = \epsilon_i D_x + \delta_i D_t$ с постоянными ϵ_i и δ_i для $i = 1, 2, 3$. Отметим, что в (5.83) b и d меняются местами по отношению к a и c . По этой причине назовем ее «формулой обмена». Формула обмена легко доказывается с использованием свойства (V).

Разлагая формулу обмена в степенной ряд по $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \delta_3$, приравнявая члены с одинаковыми степенями и комбинируя полученные результаты, мы найдем ряд операторных тождеств. Укажем некоторые из них, имеющие отношение к нашей задаче:

$$(D_x^2 a \cdot b) cd - ab (D_x^2 c \cdot d) = D_x [(D_x a \cdot d) \cdot cb + ad \cdot (D_x c \cdot b)], \quad (5.84)$$

$$(D_x D_t f' \cdot f') ff - f' f' (D_x^2 f \cdot f) = 2D_x (D_t f' \cdot f) \cdot ff', \quad (5.85)$$

$$(D_x^2 f' \cdot f') ff - f' f' (D_x^3 f \cdot f) = 2D_x (D_x f' \cdot f) \cdot ff', \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} (D_x^4 f' \cdot f') ff - f' f' (D_x^4 f \cdot f) &= 2D_x (D_x^3 f' \cdot f) \cdot ff' + \\ &\quad + 6D_x (D_x^2 f' \cdot f) \cdot D_x (f \cdot f'). \quad (5.87) \end{aligned}$$

Эти соотношения будут использованы для нахождения преобразования Бэклунда для уравнения КдФ.

Теперь рассмотрим уравнение КдФ в билинейном виде

$$D_x(D_t + c_0 D_x + D_x^3) f \cdot f = 0, \quad (5.88)$$

где постоянная c_0 введена для последующего рассмотрения.

Пусть f и f' два разных решения (5.88). Если, преобразовав следующее уравнение

$$[D_x(D_t + c_0 D_x + D_x^3) f' \cdot f'] f f - f' f' [D_x(D_t + c_0 D_x + D_x^3) f \cdot f] = 0, \quad (5.89)$$

мы получим соотношение, связывающее f и f' , то это и будет преобразованием Бэклунда.

Используя тождества (5.85) — (5.87) и соотношение

$$D_x(D_x f' \cdot f) \cdot (D_x f \cdot f') = 0, \quad (5.90)$$

приведем (5.89) к виду

$$2D_x \{ [D_t + (c_0 + 3\lambda) D_x + D_x^3] f' \cdot f \} \cdot (f f') + \\ + 6D_x [(D_x^2 - \mu D_x - \lambda) f' \cdot f] \cdot (D_x f \cdot f') = 0, \quad (5.91)$$

где λ и μ — произвольные постоянные. Следовательно, если f является решением (5.88), то f' будет другим решением того же уравнения при условии, что f' удовлетворяет следующим уравнениям:

$$[D_t + (c_0 + 3\lambda) D_x + D_x^3] f' \cdot f = 0, \quad (5.92)$$

$$(D_x^2 - \mu D_x - \lambda) f' \cdot f = 0. \quad (5.93)$$

Уравнения (5.92) и (5.93) являются преобразованием Бэклунда для (5.88).

Теперь у нас имеется преобразование Бэклунда билинейного вида. В предыдущем разделе мы обсуждали метод нахождения N -солитонных решений уравнений, записанных в таком виде. Таким образом, вполне разумно ожидать, что это преобразование Бэклунда является билинейной формой некоторого нелинейного эволюционного уравнения, имеющего N -солитонное решение.

Действительно, подбором подходящих преобразований зависимых переменных из (5.92) и (5.93) мы можем вывести два типа нелинейных эволюционных уравнений, обладающих N -солитонными решениями. Более того, подбором подходящих зависимых переменных (5.92) и (5.93) преобразуются к хорошо известной форме обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ.

I. Модифицированное уравнение КдФ, описывающее слабо нелинейную решетку

Рассмотрим сначала случай, в котором f' и f комплексно сопряжены: $f' = \bar{f} + i\hat{g}$, $f = \hat{f} - i\hat{g}$, тогда (5.92) и (5.93) сведутся к

$$(D_t + D_x^3) \hat{g} \cdot \hat{f} = 0, \quad (5.94)$$

$$D_x^2 (\hat{f} \cdot \hat{f} + \hat{g} \cdot \hat{g}) + 2\alpha\beta^{-1/2} D_x \hat{g} \cdot \hat{f} = 0, \quad (5.95)$$

где мы положили $\mu = i\alpha\beta^{-1/2}$ и $\lambda = c_0 = 0$.

Уравнения (5.94) и (5.95) могут быть преобразованы обратно к модифицированному уравнению КдФ, описывающему слабо нелинейную решетку [5.25]

$$u_t + 6\alpha u u_x + 6\beta u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (\beta > 0), \quad (5.96)$$

если использовать преобразование зависимой переменной

$$u = i\beta^{-1/2} \Phi_x, \quad (5.97)$$

$$\Phi = \ln(\hat{f} + i\hat{g}) / (\hat{f} - i\hat{g}). \quad (5.98)$$

II. Модифицированное уравнение КдФ, обладающее решением типа ударной волны

Пусть $\lambda = 0$, $c_0 = -6$, $\mu = -2$ и $\tau = -t$, тогда (5.92) и (5.93) сводятся к уравнениям

$$(D_\tau + 6D_x - D_x^3) f' \cdot f = 0, \quad (5.99)$$

$$(D_x^2 + 2D_x) f' \cdot f = 0, \quad (5.100)$$

которые преобразуются обратно к модифицированному уравнению КдФ с решением типа ударной волны [5.26]

$$v_\tau + 6v^2 v_x - v_{xxx} = 0 \quad (5.101)$$

с помощью преобразования зависимой переменной

$$v = 1 + \Phi_x, \quad (5.102)$$

$$\Phi = \ln(f'/f). \quad (5.103)$$

Исследуя вывод этих уравнений, мы видим, что к билинейной форме они могут быть сведены выбором подходящих преобразований переменных. Следуя процедуре, описанной в предыдущем разделе, разложим f' и f в степенной ряд по параметру ε

$$f' = 1 + \varepsilon f'_1 + \varepsilon^2 f'_2 + \dots, \quad (5.104)$$

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (5.105)$$

и обычным методом возмущений определим коэффициенты разложения. N -солитонные решения этих уравнений даны в работах [5.25] и [5.26].

III. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ

Пусть $\psi = f'/f$, $u = 2(\ln f)_{xx}$, тогда (5.92) и (5.93) преобразуются к

$$\psi_t + 3\lambda\psi_x + \psi_{xxx} + 3i\psi_x = 0, \quad (5.106)$$

$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi, \quad (5.107)$$

где c_0 и μ выбраны равными нулю. Уравнения (5.106) и (5.107) составляют содержание хорошо известного метода обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ, найденного Гарднером с соавторами [5.27].

IV. Нелинейное преобразование Миуры

Известное преобразование Миуры [5.28], которое связывает решение уравнения КдФ с решением модифицированного уравнения КдФ, было основным для разработки метода обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ [5.27].

Для $\lambda = \mu = c_0 = 0$ (5.93) принимает вид

$$D_x^2 f' \cdot f = 0. \quad (5.108)$$

Используя (XI.2), найдем

$$\begin{aligned} (D_x^2 f' \cdot f)/(f'f) &= [\ln(f'f)]_{xx} + \{[\ln(f'/f)]_x\}^2 = \\ &= 2(\ln f)_{xx} + [\ln(f'/f)]_{xx} + \{[\ln(f'/f)]_x\}^2. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Тогда (5.108) преобразуется к виду

$$u = (2v)^2 - 2iv_x \quad (5.110)$$

с помощью соотношений

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad (5.111)$$

$$v = (1/2i)[\ln(f'/f)]_x, \quad (5.112)$$

где v удовлетворяет модифицированному уравнению КдФ

$$v_t + 24v^2v_x + v_{xxx} = 0. \quad (5.113)$$

Уравнение (5.110) и есть преобразование Миуры.

V. Преобразование Бэклунда в обыкновенном виде

Билинейное преобразование Бэклунда может быть переписано в обыкновенном виде с использованием потенциала

$$w = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x u \, dx = (\ln f)_x \quad (5.114)$$

и его производных. Для преобразования выражений (5.92) и (5.93) с параметрами $\mu = c_0 = 0$ введем новые переменные

$$\varphi = \ln(f'/f), \quad (5.115)$$

$$\rho = \ln(f/f'). \quad (5.116)$$

Тогда, используя (XI.1) — (XI.3), из (5.92) и (5.93) получим

$$\rho_{xx} + (\varphi_x)^2 = \lambda, \quad (5.117)$$

$$\varphi_t + 3\lambda\varphi_x + \varphi_{xxx} + 3\varphi_x\rho_{xx} + (\varphi_x)^3 = 0. \quad (5.118)$$

Замечая, что

$$\varphi_x = w' - w, \quad (5.119)$$

$$\rho_x = w' + w, \quad (5.120)$$

мы можем (5.117) и (5.118) свести соответственно к

$$(w' + w)_x + (w' - w)^2 = \lambda, \quad (5.121)$$

$$(w' - w)_t + 3\lambda(w' - w)_x + (w' - w)_{xxx} + 3[(w' - w)(w' + w)_x]_x + [(w' - w)^3]_x = 0. \quad (5.122)$$

Уравнения (5.121) и (5.122) эквивалентны преобразованию Бэклунда, впервые обнаруженному Уолквистом и Эстабруком [5.19].

Нужно заметить, что (5.122) записано в консервативной форме. Из (5.122) и (5.121) можно получить бесконечный набор сохраняющихся величин [5.28], используя систематический подход, разработанный Сатсумой [5.20].

Указанная схема получения преобразования Бэклунда для уравнения КдФ применима к уравнениям I — VII из разд. 5.4. Ниже помещены билинейные дифференциальные уравнения и их преобразования Бэклунда, которые получаются с использованием уравнения

$$[F(D_t, D_x)f' \cdot f']ff - f'f'[F(D_t, D_x)f \cdot f] = 0 \quad (5.123)$$

и формулы обмена (5.83).

I. Уравнение Буссинеска [5.29], [5.30]

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)f \cdot f = 0, \quad (5.124)$$

$$\begin{cases} (D_t + aD_x^2)f' \cdot f = 0, \\ (aD_tD_x + D_x + D_x^3)f' \cdot f = 0, \end{cases} \quad (5.125)$$

$$\quad (5.126)$$

где $a^2 = -3$.

II. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили [5.31], [5.32]

$$(D_tD_x + D_y^2 + D_x^4)f \cdot f = 0, \quad (5.127)$$

$$\begin{cases} (D_y + aD_x^2)f' \cdot f = 0, \\ (-aD_yD_x + D_t + D_x^3)f' \cdot f = 0, \end{cases} \quad (5.128)$$

$$\quad (5.129)$$

где $a^2 = 3$.

III. Модельные уравнения для волн на мелкой воде

$$(a) \quad D_x (D_t - D_t D_x^2 + D_x) f \cdot f = 0. \quad (5.130)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_x^3 - D_x) f' \cdot f = \lambda f' f, \\ (3D_x D_t - 1) f' \cdot f = \mu D_x f' \cdot f. \end{array} \right. \quad (5.131)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_x^3 - D_x) f' \cdot f = \lambda f' f, \\ (3D_x D_t - 1) f' \cdot f = \mu D_x f' \cdot f. \end{array} \right. \quad (5.132)$$

$$(b) \quad \left[D_x (D_t - D_t D_x^2 + D_x) + \frac{1}{3} D_t (D_t + D_x^3) \right] f \cdot f = 0, \quad (5.133)$$

причем

$$D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f = 0. \quad (5.134)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) f' \cdot f = 0, \\ D_x^2 f' \cdot f = \lambda f' f + \mu D_x f' \cdot f, \end{array} \right. \quad (5.135)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x^2 f' \cdot f = \lambda f' f + \mu D_x f' \cdot f, \\ [(1 - 3\lambda) D_t - D_x^2 D_t + D_x] f' \cdot f = 0. \end{array} \right. \quad (5.136)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) f' \cdot f = 0, \\ [(1 - 3\lambda) D_t - D_x^2 D_t + D_x] f' \cdot f = 0. \end{array} \right. \quad (5.137)$$

IV. Уравнения КдФ более высокого порядка [5.33]

$$(a) \quad D_x (D_t + D_x^5) f \cdot f = 0. \quad (5.138)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x^3 f' \cdot f = \lambda f' f, \\ [D_t - \frac{15}{2} \lambda D_x^2 - \frac{3}{2} D_x^5] f' \cdot f = 0. \end{array} \right. \quad (5.139)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x^3 f' \cdot f = \lambda f' f, \\ [D_t - \frac{15}{2} \lambda D_x^2 - \frac{3}{2} D_x^5] f' \cdot f = 0. \end{array} \right. \quad (5.140)$$

$$(b) \quad \left[D_x (D_t + D_x^5) - \frac{5}{6} D_x^3 (D_t + D_x^3) \right] f \cdot f = 0, \quad (5.141)$$

причем

$$D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f = 0. \quad (5.142)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) f' \cdot f = 0, \\ D_x^2 f' \cdot f = \lambda f' f, \end{array} \right. \quad (5.143)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x^2 f' \cdot f = \lambda f' f, \\ (D_t + 15\lambda^2 D_x + D_x^5) f' \cdot f = 0. \end{array} \right. \quad (5.144)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t + 15\lambda^2 D_x + D_x^5) f' \cdot f = 0, \\ (D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) f' \cdot f = 0. \end{array} \right. \quad (5.145)$$

V. Уравнение Годы [5.34], [5.35]

$$\left[D_t^2 - 4 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right] f \cdot f = 0. \quad (5.146)$$

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[D_t \exp \left(-\frac{1}{2} D_n \right) - 2\lambda \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right] f' \cdot f = 0, \\ [D_t + \lambda^{-1} (\exp(-D_n) - 1)] f' \cdot f = 0. \end{array} \right. \quad (5.147)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [D_t + \lambda^{-1} (\exp(-D_n) - 1)] f' \cdot f = 0, \\ D_t f' \cdot f + 2\alpha \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) g' \cdot g = 0, \end{array} \right. \quad (5.148)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t f' \cdot f + 2\alpha \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) g' \cdot g = 0, \\ D_t g' \cdot g + 2\alpha^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) f' \cdot f = 0, \end{array} \right. \quad (5.149)$$

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_t g' \cdot g + 2\alpha^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) f' \cdot f = 0, \\ [\beta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} D_n \right)] g' \cdot g = f' f, \end{array} \right. \quad (5.150)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\beta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} D_n \right)] g' \cdot g = f' f, \\ [\beta_2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} D_n \right)] f' \cdot f = g' g, \end{array} \right. \quad (5.151)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\beta_2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} D_n \right)] f' \cdot f = g' g, \\ [\beta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} D_n \right)] g' \cdot g = f' f. \end{array} \right. \quad (5.152)$$

где

$$\alpha^{-1}(\beta_1^2 - 1) = \alpha(\beta_2^2 - 1). \quad (5.153)$$

VI. Разностный аналог уравнения КдФ [5.16]

$$\operatorname{sh} \frac{1}{4}(D_n + \delta D_t) \left[2\delta^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) + 2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right] f \cdot f = 0. \quad (5.154)$$

$$\left\{ \left[2\delta^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) + 2\lambda \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right] f' \cdot f = 0, \quad (5.155) \right.$$

$$\left. \left[\operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} D_n \right) f' \cdot f = \lambda \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) f' \cdot f. \quad (5.156) \right. \right.$$

VII. Цепочка Тоды с дискретным временем [5.36]

$$\left\{ \left[2\delta^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) \right]^2 - \left[2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right]^2 \right\} f \cdot f = 0. \quad (5.157)$$

$$\delta^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) f' \cdot f + \alpha \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) g' \cdot g = 0, \quad (5.158)$$

$$\delta^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) g' \cdot g + \alpha^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) f' \cdot f = 0, \quad (5.159)$$

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} D_n \right) + \beta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right] g' \cdot g = \\ = \left[\operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) + \gamma_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) \right] f' \cdot f, \end{aligned} \quad (5.160)$$

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} D_n \right) + \beta_2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right] f' \cdot f = \\ = \left[\operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) + \gamma_2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \delta D_t \right) \right] g' \cdot g, \end{aligned} \quad (5.161)$$

где δ , α и β_i , γ_i для $i = 1, 2$ — произвольные постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\alpha^{-1} [(\beta_1 + \gamma_1 \alpha \delta)^2 - (1 - \delta^2)] = \alpha [(\beta_2 + \gamma_2 \alpha^{-1} \delta)^2 - (1 - \delta^2)]. \quad (5.162)$$

Отметим, что преобразования Бэклунда для разностного аналога уравнения КдФ получаются с использованием следующего соотношения:

$$\begin{aligned} & \left\{ \operatorname{sh} \frac{1}{4}(D_n + \delta D_t) \left[\delta^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{\delta}{2} D_t \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right] f' \cdot f' \right\} \times \\ & \times \left[\operatorname{ch} \frac{1}{4}(D_n - \delta D_t) f \cdot f \right] - \left[\operatorname{ch} \frac{1}{4}(D_n - \delta D_t) f' \cdot f' \right] \times \\ & \times \left\{ \operatorname{sh} \frac{1}{4}(D_n + \delta D_t) \left[\delta^{-1} \operatorname{sh} \left(\frac{\delta}{2} D_t \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} D_n \right) \right] f \cdot f \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.163)$$

Примеры I—VII, приведенные выше, указывают, что для каждого билинейного уравнения вида $F(D_t, D_x) f \cdot f = 0$, которое обладает N -солитонным решением, можно найти билинейное преобразование Бэклунда. В этой связи интересно найти примеры других функций F , удовлетворяющих тождеству (5.47), и посмотреть на их преобразования Бэклунда.

В этой работе мы обсуждали нелинейные эволюционные уравнения, которые преобразуются в билинейные уравнения вида

$$F(D_t, D_x) f \cdot f = 0 \quad (5.164)$$

и их преобразования Бäckлунда. Другие классы нелинейных уравнений эволюции, обладающих N -солитонными решениями, частично рассмотрены в [5.6] и [5.34].

ЛИТЕРАТУРА

- 5.1. Korteweg D. J., de Vries G. — *Philos. Mag.* 39, 422 (1895).
- 5.2. Zabusky N. J., Kruskal M. D. — *Phys. Rev. Lett.* 15, 240 (1965).
- 5.3. Baker G. A., Jr., Gammel J. L. (eds.). *The Padé Approximant in Theoretical Physics*. — Academic Press, New York, 1970.
- 5.4. Graves-Morris P. R. (ed.). *Padé Approximants and their Applications*. — Academic Press, New York, 1973.
- 5.5. Hirota R. — *Prog. Theor. Phys.* 52, 1498 (1974).
- 5.6. Hirota R. *Direct Methods of Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations*. — В кн.: *Bäcklund Transformations*, ed. by R. M. Miura, *Lecture Notes in Mathematics* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976), Vol. 515.
- 5.7. Moses H. E. — *J. Math. Phys.* 17, 73 (1976).
- 5.8. Hirota R. — *Phys. Rev. Lett.* 27, 1192 (1971).
- 5.9. Hirota R. — *J. Math. Phys.* 14, 810 (1973).
- 5.10. Satsuma J. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 40, 611 (1976), 286 (1976).
- 5.11. Hirota R., Satsuma J. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 40, 611 (1976).
- 5.12. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — *Stud. Appl. Math.* 53, 249 (1974).
- 5.13. Sawada K., Kotera T. — *Prog. Theor. Phys.* 51, 1355 (1974).
- 5.14. Caudrey P. J., Dodd R. K., Gibbon J. D. — *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 351, 407 (1976).
- 5.15. Hirota R. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 35, 286 (1973).
- 5.16. Hirota R. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 43, 1424 (1977).
- 5.17. Hirota R. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 43, No. 6 (1977).
- 5.18. Lamb G. L., Jr. — *Rev. Mod. Phys.* 43, 99 (1971).
- 5.19. Wahlquist H. D., Estabrook F. B. — *Phys. Rev. Lett.* 31, 1386 (1973).
- 5.20. Satsuma J. — *Prog. Theor. Phys.* 52, 1396 (1974).
- 5.21. Chen H. H. — *Phys. Rev. Lett.* 33, 925 (1974).
- 5.22. Wadati M., Sanuki H., Konno K. — *Prog. Theor. Phys.* 53, 419 (1975).
- 5.23. Lamb G. L., Jr. — *J. Math. Phys.* 15, 2157 (1974).
- 5.24. Chen H. H., Liu C. C. — *J. Math. Phys.* 16, 1428 (1975).
- 5.25. Wadati M. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 38, 673 (1975).
- 5.26. Perelman T. L., Fridman A. Kh., El'Yashevich M. M. — *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095 (1967).
- 5.27. Gardner C. D. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095 (1967).
- 5.28. Miura R. M. — *J. Math. Phys.* 9, 1202 (1968).
- 5.29. Hirota R., Satsuma J. — *Prog. Theor. Phys.* 57, 797 (1977).
- 5.30. Chen H. H. *Relations between Bäcklund Transformations and Inverse Scattering Problems*. — В кн.: *Bäcklund Transformations*, ed. by R. M. Miura, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 515 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976).
- 5.31. Дрюма В. С. — *Письма в ЖЭТФ* 19, 387 (1974).
- 5.32. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — *Функц. анализ и его прилож.* 8, 43 (1974).
- 5.33. Satsuma J., Kaup D. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 43, 692 (1977).
- 5.34. Hirota R., Satsuma J. — *Prog. Theor. Phys. Suppl.* No. 59, 64 (1976).
- 5.35. Wadati M., Toda M. — *J. Phys. Soc. Jpn.* 39, 1196 (1975).

6. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАССЕЙНИЯ

А. Ньюэлл

В работе приводится детальное описание обратного преобразования рассеяния, ассоциированного с обобщениями задач Захарова — Шабата и Шрёдингера на собственные значения. Указывается на тесную аналогию с идеей преобразования Фурье. Для обоих типов задач на собственные значения развиваются методы разложения неизвестных функций по квадратам собственных функций и их производным. Результаты, относящиеся к уравнению Шрёдингера, новы¹⁾. Уравнения в частных производных, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, связанные с рассматриваемыми задачами на собственные значения, классифицируются в соответствии с характером дисперсионных соотношений. Особый интерес представляют такие классы уравнений, которые интегрируемы, но для которых нет сохраняющихся величин или для которых спектр вспомогательных линейных задач не инвариантен. Наиболее существенные моменты теории демонстрируются на нескольких примерах: нелинейное уравнение Шрёдингера, задача о распространении когерентного импульса, уравнение sine-Gordon. В заключение рассматривается теория сингулярных возмущений для оценки эффектов возмущений на длинных временах. Последние исправления и добавления содержатся в разд. 6.12 и 6.13 и отражают некоторые недавние достижения.

6.1. Общие замечания

Одним из наиболее значительных достижений математической физики за последние десять лет явилось открытие Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой (ГГКМ) [6.1, 6.2] и Забуски и Крускалом [6.3] нового нелинейного преобразования и солитонов. Это преобразование (обратное преобразование рассеяния) полностью аналогично преобразованию Фурье в линейных задачах. Более точно, оно преобразует зависимую переменную, удовлетворяющую данному уравнению в частных производных, в набор новых переменных, эволюция которых во времени описывается бесконечной последовательностью обыкновенных дифференциальных уравнений. Для специальных

¹⁾ Эта статья была написана в апреле 1976 г.

классов уравнений в частных производных отвечающие им обыкновенные уравнения разделимы и, следовательно, тривиально интегрируемы.

Новое нелинейное преобразование отличается от преобразования Фурье двумя наиболее существенными особенностями. Во-первых, базис не фиксирован (подобно $\exp(\pm ikx)$), а изменяется в зависимости от искомого решения. Во-вторых, спектр (а здесь мы рассматриваем уравнения в частных производных на всей прямой) состоит не только из вещественных волновых векторов k , а содержит и конечное число изолированных комплексных волновых векторов. Именно эти комплексные волновые векторы порождают образования, называемые солитонами. Последние вполне нелинейны и не имеют линейных аналогов.

Общее решение любого из упомянутых выше классов уравнений в частных производных может быть качественно описано в терминах различных спектральных компонент. Солитон (термин, введенный Забуски и Крускалом) есть уединенная волна, которая локализована и имеет постоянную форму (возможно, она содержит внутренние осцилляции). Ее важнейшая особенность заключается в постоянстве характеристик (амплитуды, скорости, формы, внутренних частот), не изменяющихся даже при столкновениях с какой-либо другой компонентой решения. Эта инвариантность следует из инвариантности соответствующего собственного значения. Единственный эффект взаимодействия сводится к сдвигу положения солитона по отношению к его движению без столкновений. В случае столкновения двух солитонов фазовый сдвиг является простой функцией двух собственных значений. (В неинтегрируемых ситуациях, например, для уравнения $\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \Phi - \lambda\Phi^3 = 0$, уединенная волна — решение в виде гиперболического тангенса — разрушается при столкновениях.) Компоненты в пространстве решений, связанные с непрерывным спектром, в общем случае не локализованы, не сохраняют форму и в силу дисперсии убывают алгебраически во времени. Это убывание вполне аналогично поведению на больших временах линейных диспергирующих волн. Тем не менее и в этой компоненте решений есть черты специфически нелинейные, особенно в автономной области [6.4].

Одна из основных причин, вызвавших столь широко распространившийся интерес к обратному преобразованию рассеяния, заключается в том, что специальный класс интегрируемых уравнений включает в себя ряд фундаментальных уравнений, которые играют центральную роль во многих разделах математической физики. Решения этих уравнений чрезвычайно важны для общего понимания нелинейных волновых явлений. Для того чтобы подтвердить сказанное, перечислим некоторые из этих уравнений одновременно с обсуждением истории развития обратного преобразования рассеяния за последние десять лет.

Так случилось, что метод обратного преобразования рассеяния был впервые развит при изучении уравнения Кортевега — де Фриза

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad (6.1)$$

которое естественно возникает как главный член аппроксимации во всех консервативных волновых системах со *слабой* дисперсией и со *слабой* нелинейностью. Это уравнение было впервые предложено Кортевегом и де Фризом для описания длинных поверхностных волн в поле тяжести, крутизна которых мала и равна приблизительно кубу отношения глубины к длине волны. Волна должна быть достаточно велика, чтобы проявлялись эффекты опрокидывания. С другой стороны, глубина должна быть достаточной, чтобы сказывалась дисперсия. Предположим, что начальное возмущение локализовано. Первоначальное возмущение в рассматриваемой системе разделяется на волны, распространяющиеся вправо и влево аналогично представлению Даламбера решений линейного волнового уравнения. И те и другие распространяющиеся профили, которые теперь разделены, существенно искажаются совместным действием нелинейности и дисперсии. Эволюцию именно этих профилей описывает уравнение (6.1). Существует много естественных постановок, в которых возникает подобная динамика: длинные внутренние волны в тяжелой жидкости [6.5]; ионно-акустические волны в холодной плазме [6.6]; волны вихрей [6.7]; продольные колебания соударяющихся массивных частиц [6.8]. Уравнение (6.1) привлекло внимание Забуски и Крускала [6.3] при исследовании решеток и результатов Ферми — Пасты — Улама [6.9] о теплопроводности твердых тел.

Второе уравнение, к которому был применен метод обратного преобразования рассеяния, носит такой же универсальный характер. В замечательной работе 1972 г. Захаров и Шабат [6.10] показали, каким образом нелинейное уравнение Шрёдингера

$$q_t - iq_{xx} \pm 2iq^2q^* = 0 \quad (6.2)$$

включается в формализм этого метода. Эти авторы широко использовали идеи Лакса [6.11], который переформулировал первоначальные результаты ГГКМ на операторном языке и нашел несколько интегрируемых уравнений в семействе уравнений Кортевега — де Фриза. Универсальное уравнение (6.2) было получено несколькими авторами в конце пятидесятых и начале шестидесятых годов в различных задачах; оно описывает медленную пространственную и временную эволюцию огибающей $q[e(X - c_g T), e^2 T]$ почти монохроматического цуга волн в *слабо* нелинейной, *сильно* диспергирующей среде (X, T — вещественные пространственные и временные переменные, c_g — групповая скорость) [6.12—6.16]. Весьма общий вывод нелинейного

уравнения Шрёдингера содержится в [6.16] и [6.17]. Оно возникает всюду, начиная с задач о модуляции высокочастотных электромагнитных колебаний в средах, в которых коэффициент преломления зависит от амплитуды, и кончая задачами о расплывании огибающей волн в глубокой тяжелой жидкости. Следует отметить, что в неоднородной ситуации волны с линейным законом дисперсии $\omega = c|k|$ являются сильно диспергирующими; вектор групповой скорости зависит от направления k , и тензор $\partial^2\omega/\partial k_r\partial k_s$ не равен нулю. Одним из наиболее ярких приложений уравнения (6.2) оказывается задача о волнах в глубокой тяжелой воде. Можно показать, что если в (6.2) получается знак минус, то монохроматический цуг волн $q = q(t)$ неустойчив относительно пространственных возмущений (неустойчивость была впервые открыта Бенджамином и Фейром [6.18]), и цуг волн распадается на разделенные локализованные импульсы. В некотором смысле это дает объяснение факта, известного всем занимающимся серфингом — каждая десятая (седьмая, одиннадцатая) волна — наибольшая. Представим себе следующий эксперимент. Пусть на поверхности воды периодическим образом колеблется лопатка (скажем, так, что фурье-спектр колебаний содержит несколько разных частот). Она возбуждает несколько волновых пакетов (ширины ϵ) с различными средними частотами. Так как система сильно диспергирующая, то пакеты распространяются с различными групповыми скоростями и разделяются за время порядка ϵ^{-1} . На временах порядка ϵ^{-2} на каждый пакет одновременно влияют дисперсия (которая стремится разделить пакет) и нелинейность (как и в случае слабо нелинейного осциллятора, нелинейность проявляется в автомодалных взаимодействиях третьего порядка, $\omega + \omega - \omega = \omega$, с интенсивностью $\sim \epsilon^2$). Огибающие пакетов $q(x, t)$ модулируются согласно уравнению (6.2). Через некоторое время начальная огибающая $q(x, 0)$ распадается на серию *солитонов*

$$q(x, t) = 2\eta \operatorname{sech} 2\eta(\theta_0 - \eta x - 4\xi\eta t) \exp(-2i\Phi_0 - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - 2i\xi x) \quad (6.3)$$

(где параметр $\xi = \xi + i\eta$ есть одно из тех комплексных собственных чисел, которые обсуждались выше) и *излучение*, которое диспергирует и затухает. Мы предполагали, что возбуждения имели конечную продолжительность. В случае непрерывных возбуждений солитоны перегруппируются в почти монохроматическую волну, из которой опять отщепятся солитоны, и этот процесс будет продолжаться [6.19]. Уравнение (6.2) является в некотором смысле более каноническим, чем уравнение (6.1). Уравнение (6.2) неприводимо, в то время как если дисперсия преобладает над нелинейностью, почти монохроматическое решение (6.1) эволюционирует согласно (6.2).

После того как Захаров и Шабат показали, что метод ГГКМ применим не только к уравнению Кортевега — де Фриза и его эффективность не является просто счастливой случайностью, было вновь исследовано много других уравнений, обладающих важным свойством, общим с уравнениями (6.1) — (6.2) — наличием бесконечного набора интегралов уравнения. Вскоре Вадати было проинтегрировано модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза,

$$q_t + 6q^2q_x + q_{xxx} = 0, \quad (6.4)$$

а Абловицем, Каупом, Ньюэллом и Сегуром (АКНС) [6.21 — 6.23], Лэмом [6.24], а несколько позже и Фаддеевым и Тахтаджяном [6.25] было проинтегрировано уравнение

$$u_{xt} = \sin u, \quad (6.5a)$$

$$u_{TT} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (6.5b)$$

Метод, использованный в работе АКНС, был новым. Он опирался на спектральный аналог формализма Лакса и делал все необходимые вычисления простыми и алгебраическими. Фактически метод естественно обобщал класс интегрируемых уравнений и показывал, как каждое из таких уравнений определяется дисперсионными соотношениями ассоциированных с ним линейных задач [6.23].

Наличие бесконечного набора законов сохранения для уравнения [6.4] было впервые установлено Миурой [6.26], нашедшего замечательное преобразование, связывающее решения уравнений (6.1) и (6.4). Оно имеет место не только для этих уравнений, но и для всех высших аналогов уравнения Кортевега — де Фриза и модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза [6.23]; соответствие основано на общих дисперсионных соотношениях [6.27]. Наличие бесконечного набора законов сохранения и сами сохраняющиеся величины для уравнений sine-Gordon, sh-Gordon и Клейна — Гордона были найдены Крускалом [6.28], который показал также, что эти уравнения единственные среди уравнений вида

$$u_{tt} - u_{xx} + V(u) = 0, \quad (6.6)$$

обладающие этим свойством (оказалось, что эти уравнения и единственные интегрируемые). Уравнение sine-Gordon является простейшим уравнением типа (6.6) (обладающим лоренц-инвариантностью), которое интегрируемо и имеет солитонные решения (уравнение sh-Gordon не имеет солитонов). Эти свойства указывают на связь уравнения с моделями теории поля. Уравнение sine-Gordon встречается во многих задачах, и в разд. 6.8 будет обсуждено, как оно возникает в сингулярном пределе для задачи о распространении когерентного импульса

[6.29]. Уравнение, которое описывает последнее явление — это уравнение Максвелла — Блоха. Оно интегрируемо, но не обладает бесконечным набором законов сохранения, кроме как в сингулярном пределе [6.30]. С уравнением sine-Gordon связана и точно интегрируемая массивная модель Тирринга [6.31]

$$\begin{aligned} \rho_{2x} &= im\rho_1 + 2ig\rho_1\rho_1^*\rho_2, \\ \rho_{1t} &= im\rho_2 - 2ig\rho_2\rho_2^*\rho_1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Найденные в этих моделях переменные типа действия и угла позволяют обсуждать и общие черты квантовых моделей [6.31, 6.25].

Приблизительно в то же самое время параллельное исследование дифференциально-разностных систем было предпринято Флашкой [6.32], проинтегрировавшим уравнения цепочки Тоды

$$Q_{ntt} = \exp(Q_{n+1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n-1}), \quad (6.8)$$

где Q_n есть координата n -й частицы в решетке. Уравнения цепочки Тоды наряду с некоторыми другими моделями чрезвычайно важны для понимания процессов теплопроводности. Идеи Флашки были расширены Мозером [6.33], Калоджеро [6.34], Абловицем и Ладиком [6.35, 6.36], которые развили их для разностных уравнений в нескольких измерениях. Эти результаты могут оказаться чрезвычайно важными в теории численного интегрирования.

В конце 1973 г. Захаров и Манаков использовали матричные операторы высоких порядков и нашли способ включения в формализм Лакса уравнений трехволнового взаимодействия

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} + c_j \cdot \nabla A_j = \theta_j A_k^* A_l^*, \quad (6.9)$$

(j, k, l — циклическая перестановка чисел 1, 2, 3). И вновь точные решения были найдены для фундаментальных уравнений, которые являются общими для всех слабо нелинейных систем, обладающих *континуумом* диспергирующих волн. Это происходит за счет того, что квадратичные нелинейности могут приводить к резонансу между тремя волнами с амплитудами A_j , $j = 1, 2, 3$, волновые векторы k_j и частоты ω_j которых удовлетворяют законам сохранения энергии и импульса (условиям резонанса) $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Взаимодействия подобного типа важны для волн Россби и бароклиных волн [6.38—6.41], для внутренних гравитационных волн [6.42], для волн в плазме [6.43] и для многих других областей физики сплошной среды. Кауп [6.44] и Захаров и Манаков [6.45] независимо развили обратное преобразование для этих уравнений в одномерном случае. Близкой системой является модель, описывающая взаимодействие длинных волн (с амплитудой

$A(x, t)$) и коротких волн (с амплитудой огибающей $B(x, t)$). Уравнения обобщают нелинейное уравнение Шрёдингера (учитывая эффекты длинных волн) и имеют вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 2S \frac{\partial}{\partial x} BB^*, \quad \frac{\partial B}{\partial t} - i \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = - \frac{\partial A}{\partial x} B + iA^2 B - 2iSB^2 B^*. \quad (6.10)$$

Эта точно интегрируемая модель развивалась [6.46] при исследовании новой идеи Бенни [6.47], который предположил, что длинные волны могут породиться периодической нестабильностью коротких волн (вызванных, скажем, ветром), образующей вместе с длинными волнами резонансную триаду.

Этот неполный список чрезвычайно важных уравнений показывает широкую применимость и важность обратного преобразования рассеяния. Можно с уверенностью утверждать, что солитоны вездесущи в природе (в океане, атмосфере, плазме, решетках, сверхпроводниках, сверхтекучих жидкостях, в физике элементарных частиц), по крайней мере в тех случаях, которые в хорошем приближении одномерны. Было предпринято несколько попыток [6.48—6.50] расширить идеи обратного преобразования рассеяния на многомерную ситуацию. В частности, в работе Захарова и Шабата [6.48] была предложена новаторская идея и дан более широкий (в том смысле, что он включал дополнительную пространственную переменную) класс интегрируемых систем. К сожалению, хотя эти авторы могут представить в лаксовой форме, т. е. в виде коммутирующих операторов, много уравнений, однако предлагаемая ими гипотеза, что собственные вектора вспомогательных линейных операторов допускают треугольное представление, не всегда верна (даже для одномерного случая), и ее справедливость существенно зависит от ряда свойств, которыми все собственные вектора не всегда обладают. В настоящее время полная теория рассеяния для более чем одного пространственного измерения не создана. Ряд свойств локальных решений многомерных аналогов хорошо известных уравнений показывает, что добавление лишних пространственных переменных может приводить к неожиданным следствиям. Наиболее ярким примером этого являются результаты Захарова и соавторов [6.51—6.53], которые показали, что двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера (в (6.2) следует добавить $-iq_{yy}$) обладает тем свойством, что его решения становятся сингулярными за конечное время. Это противоречит интуитивному представлению о том, что дополнительная геометрическая дисперсия в пространствах двух и более измерений должна перевесить эффекты нелинейной фокусировки. На самом деле все не так просто. Следует упомянуть замечательное наблюдение Майлса [6.54, 6.55] (см. также [6.56], [6.57], где содержится обобщение этих идей) о резонансе солитонов в уравнении Кадомцева — Петвиашвили [6.58] (часто назы-

ваемом слабо двумерным уравнением Кортевега — де Фриза, так как оно предполагает слабое изменение в перпендикулярном пространственном направлении на временах, на которых эффекты нелинейности и дисперсии становятся существенными):

$$\frac{3}{4} u_{yy} + \left(u_t + \frac{3}{2} uu_x + \frac{1}{4} u_{xxx} \right)_x = 0. \quad (6.11)$$

Майлс заметил, что сдвиг фазы двухсолитонного решения стремится к $\pm\infty$, если параметры солитонов удовлетворяют определенным условиям резонанса линейного типа. Это еще раз показывает, что поведение многомерных систем может оказаться необычным.

Однако в центре внимания настоящего обзора лежит тесная связь между обратным преобразованием рассеяния и преобразованием Фурье, и поэтому далее будет рассматриваться случай только одной пространственной переменной. Мы следуем идеям, намеченным в [6.59]. Хотя для наших целей подходят весьма разнообразные задачи рассеяния (часть их будет приведена в разд. 6.13), каждая из которых обладает своими специфическими и интересными чертами, в этой статье будут рассматриваться в основном обобщенная задача Захарова — Шабата на собственные значения

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\zeta v_1 &= q(x, t) v_2, \\ v_{2x} - i\zeta v_2 &= r(x, t) v_1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

и уравнение Шрёдингера

$$v_{xx} + [\zeta^2 + q(x, t)] v = 0. \quad (6.13)$$

Ключевыми являются следующие две идеи. Во-первых, инфинитезимальная скорость изменения данных рассеяния может быть выражена через внутренние произведения инфинитезимального изменения потенциала и квадратов собственных функций соответствующей задачи, а также их производных. Эти выражения составляют основу теории возмущений, которая будет описана в разд. 6.12. Во-вторых, квадраты собственных функций образуют базис, и, следовательно, предыдущие соотношения могут быть обращены. При этом скорость изменения потенциала представится в виде разложения по квадратам собственных функций с коэффициентами, которые выражаются через изменения данных рассеяния. Подобные разложения полностью аналогичны разложениям Фурье

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k, t) e^{ikx} dk, \\ u_t(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_t(k, t) e^{ikx} dk. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Следующий вопрос, который будет рассмотрен, связан с описанием максимально широкого класса эволюционных уравнений, интегрируемых преобразованием рассеяния, соответствующим фиксированной задаче на собственные значения. Из сказанного выше следует, что этот вопрос эквивалентен описанию операторов Ω , таких, что действие их на разложение для потенциала сводится к действию по отдельности на каждый член разложения. Для таких операторов уравнение

$$u_t = \Omega \cdot u, \quad (6.15)$$

где u потенциал, интегрируемо. Интегрируемость вытекает из того, что, сравнивая коэффициенты разложений правых и левых частей (6.15), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для скорости изменения данных рассеяния, выраженную через данные рассеяния и преобразование $\hat{\Omega}(k)$ оператора Ω , взятые при одном и том же значении волнового вектора k ; $\hat{\Omega}(k)$ называется дисперсионным соотношением. Например, для разложения (6.14) класс интегрируемых уравнений отвечает операторам $\Omega = \partial^n / \partial x^n$, при этом $\hat{\Omega}(k) = (ik)^n$.

Оказалось, что существует три различных типа эволюционных уравнений, которые могут быть классифицированы в соответствии с характером дисперсионного соотношения (или соотношений). Первый тип отвечает ситуации, в которой существует единственное дисперсионное соотношение $\hat{\Omega}(k)$, которое является либо целой функцией, либо отношением целых функций, причем ни один из их полюсов не принадлежит спектру рассматриваемой задачи на собственные значения. В этом случае уравнение в частных производных обладает бесконечным набором интегралов. Каждый из них порождает, как гамильтониан, поток, для которого остальные интегралы по-прежнему сохраняются. Второй тип эволюционных уравнений возникает, когда имеется два существенно различных дисперсионных соотношения (одно для q , другое для q^* — его комплексно сопряженного). В этом случае поток необратим, и необратимость как раз и связана с различием дисперсионных соотношений. Частным примером, который будет рассмотрен в этой связи, является задача о распространении когерентного импульса в резонирующей среде. В качестве важного, но, впрочем, сингулярного предела, будет проанализировано, что происходит, когда дисперсионные соотношения стремятся друг к другу и имеют полюс на вещественной оси волновых векторов. Третий тип уравнений будет рассмотрен в случае, когда полюс дисперсионного соотношения $\hat{\Omega}(k)$ совпадает с одним из значений дискретного спектра. В этом случае это собственное значение может двигаться. Соответствующий солитон по-прежнему сохраняет свою индивидуальность, но теперь это изменяющаяся индивидуальность,

Принятый в настоящей главе подход — начать с той или иной задачи рассеяния, а затем найти и охарактеризовать подходящим образом все уравнения, интегрируемые с помощью преобразования рассеяния, связанного с этой спектральной задачей. Некоторый прогресс был получен и в обратной постановке задачи. Именно, как по данному эволюционному уравнению установить, интегрируемо оно или нет, а если интегрируемо, то как найти соответствующую задачу на собственные значения? Существуют формальные процедуры, которые являются вариантами идей Уолквиста и Эстабрука (см. [6.60]—[6.62], [6.57]) или основаны на них. Каждая из этих процедур сводится к нахождению нетривиального решения для некоторой алгебры Ли (обычно незамкнутой). Оказывается, что если уравнение интегрируемо, то существует однопараметрическое семейство решений. Соответствующий параметр играет роль собственного значения в задачах рассеяния. Хотя, как уже было сказано, прогресс в этом направлении был достигнут, до сих пор отсутствует приемлемое описание интегрируемых уравнений.

Так как большая часть материала этой главы уже появилась или должна появиться в литературе [6.59, 6.63], то в основном настоящая глава представляет собой общий обзор сделанного ранее. Материал разд. 6.11, в котором предложены разложения по квадратам собственных функций уравнения Шрёдингера, является новым и нигде не публиковался.

6.2. Обобщенная задача Захарова — Шабата на собственные значения

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\xi v_1 &= q(x, t) v_2, \\ v_{2x} - i\xi v_2 &= r(x, t) v_1, \end{aligned} \quad -\infty < x < \infty. \quad (6.16)$$

В этом разделе будут описаны свойства данных рассеяния для (6.16), когда оба потенциала $q(x, t)$ и $r(x, t)$ абсолютно интегрируемы на оси $(-\infty, \infty)$. Определим решения $\bar{\varphi}(x, t, \xi)$, $\varphi(x, t, \xi)$, $\bar{\psi}(x, t, \xi)$, $\psi(x, t, \xi)$ по их асимптотическим свойствам (6.18), которые перечислены ниже в виде таблицы. Для $(\varphi, \bar{\varphi})$ асимптотика задается на $-\infty$, а для $(\psi, \bar{\psi})$ на $+\infty$. Так как только два из четырех решений могут быть линейно независимыми, то при вещественных ξ имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= a\bar{\psi} + b\psi, & \psi &= \bar{b}\varphi - a\bar{\varphi}, \\ \bar{\varphi} &= -\bar{a}\psi + \bar{b}\bar{\psi}, & \bar{\psi} &= \bar{a}\varphi + b\bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Из свойств вронскиана для φ и $\bar{\varphi}$ и их поведения на $-\infty$ вытекает, что $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$.

| | $x = -\infty$ | $x = +\infty$ | |
|-----------------|--|--|--------|
| φ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}$ | $\begin{pmatrix} a(\zeta, t) e^{-i\zeta x} \\ b(\zeta, t) e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$ | (6.18) |
| $\bar{\varphi}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$ | $\begin{pmatrix} \bar{b}(\zeta, t) e^{-i\zeta x} \\ -\bar{a}(\zeta, t) e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$ | |
| ψ | $\begin{pmatrix} \bar{b}(\zeta, t) e^{-i\zeta x} \\ a(\zeta, t) e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$ | |
| $\bar{\psi}$ | $\begin{pmatrix} \bar{a}(\zeta, t) e^{-i\zeta x} \\ -b(\zeta, t) e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}$ | |

Подробно свойства этих функций изложены в работах [6.23], [6.59], [6.63]. Здесь приводятся лишь наиболее важные из них.

1) Если $q(x, t)$ и $r(x, t)$ абсолютно интегрируемы, то $\varphi e^{i\zeta x}$, $\psi e^{-i\zeta x}$, $a(\zeta, t) = \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1$ (соответственно $\bar{\varphi} e^{-i\zeta x}$, $\bar{\psi} e^{i\zeta x}$, $\bar{a}(\zeta, t) = \bar{\varphi}_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\varphi}_2 \bar{\psi}_1$) аналитичны в верхней (нижней) полуплоскости ζ ; $b(\zeta, t)$, $\bar{b}(\zeta, t)$ определены для вещественных ζ . Если существуют интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n q(x, t) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n r(x, t) dx$, то b и \bar{b} дифференцируемы n раз. Более того, если $q(x, t)$ и $r(x, t)$ финитны, то все величины аналитично продолжаются на всю комплексную область параметра ζ . В частности, $b(\zeta, t)$ и $[\bar{b}(\zeta, t)]$ определены в точках дискретного спектра (6.16).

2) Поскольку $a(\zeta, t) = \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1$ (соответственно $\bar{a} = \bar{\varphi}_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\varphi}_2 \bar{\psi}_1$) аналитична в верхней (нижней) полуплоскости, то нули этой функции соответствуют таким значениям $\zeta_k(\bar{\zeta}_k)$, для которых $\varphi(\bar{\varphi})$ пропорционально $\psi(\bar{\psi})$ при всех x . Функции φ и ψ при $\text{Im} \zeta > 0$ убывают на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно, поэтому величинам ζ_k отвечают ограниченные собственные функции. Запишем $\varphi(\zeta_k, t) = b_k(t) \psi(\zeta_k, t)$, $\bar{\varphi}(\bar{\zeta}_k, t) = \bar{b}_k(t) \bar{\psi}(\bar{\zeta}_k, t)$. Если q и r финитны, то $b(\zeta_k, t) = b_k(t)$, а $\bar{b}(\bar{\zeta}_k, t) = \bar{b}_k(t)$. Аналитичность $a(\zeta, t)$ (или $\bar{a}(\bar{\zeta}, t)$) и то, что они стремятся к единице в соответствующей полуплоскости, обуславливает конечность N и \bar{N} — количеств дискретных собственных значений $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$ и $\{\bar{\zeta}_k\}_{k=1}^{\bar{N}}$. Мы предполагаем, что ни одно из собственных значений не лежит на вещественной оси. Читателю может быть

полезно проверить некоторые из сделанных выше утверждений на примере

$$-r(x, 0) = q(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad x > L, \\ Q, & 0 < x < L. \end{cases}$$

3) Набор параметров $S = \{ \{ \xi_k, b_k \}_{k=1}^N, \{ \bar{\xi}_k, \bar{b}_k \}_{k=1}^{\bar{N}}, a(\xi, t), b(\xi, t), \bar{a}(\xi, t), \bar{b}(\xi, t) \}$ называется данными рассеяния. Оказывается, что для восстановления r и q достаточна часть данных рассеяния. Соответствующие формулы даны в [6.23], [6.63] и требуют задания либо

$$S_+ = S_+ \left\{ \{ \xi_k, \gamma_k \}_{k=1}^N, \{ \bar{\xi}_k, \bar{\gamma}_k \}_{k=1}^{\bar{N}}, \frac{b}{a}(\xi, t), \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi, t), \xi = \xi^* \right\} \quad (6.19a)$$

(где $\gamma_k = b_k/a'_k$, $\bar{\gamma}_k = \bar{b}_k/\bar{a}'_k$, штрих означает дифференцирование по ξ), либо задания

$$S_- = S_- \left\{ \{ \xi_k, \beta_k \}_{k=1}^N, \{ \bar{\xi}_k, \bar{\beta}_k \}_{k=1}^{\bar{N}}, \frac{\bar{b}}{a}(\xi, t), \xi = \xi^* \right\}, \quad (6.19b)$$

где $\beta_k = 1/b_k a'_k$, $\bar{\beta}_k = 1/\bar{b}_k \bar{a}'_k$. Произвольное задание S_- и S_+ не всегда приводит к абсолютно интегрируемым и единственным потенциалам r и q [6.63]. Это указывает на необходимость ограничений на множество данных (например, таких, какие были найдены для начальных данных рассеяния в случае $r(x, 0) = \pm q^*(x, 0)$).

4) В работе [6.63], а также в настоящей работе показано, что преобразование потенциалов q и r к данным рассеяния S является каноническим для два-формы $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta q \wedge \delta r dx$, т. е. сохраняющим эту форму, и что сопряженные координаты в пространстве данных рассеяния суть

$$A = A \left\{ (2i\xi_k, \ln b_k)_{k=1}^N, (2i\bar{\xi}_k, \ln \bar{b}_k)_{k=1}^{\bar{N}}, \left[\frac{1}{\pi} \ln a\bar{a}, \ln b(\xi) \right] \right\}. \quad (6.20)$$

Эти результаты были даны в [6.63]. В настоящей работе они вводятся и доказываются более наглядно и в большей общности. Для некоторых гамильтонианов указанные сопряженные координаты являются переменными типа действие — угол, и соответствующие уравнения тривиально интегрируемы.

5) Ситуация упрощается, если r линейно связано с q или q^* . Сначала рассмотрим случай $r = \alpha q^*$, где α вещественно. Тогда $\bar{\psi}(\xi, x) = S\psi^*(\xi^*, x)$, $\bar{\varphi}(\xi, x) = -S\varphi^*(\xi^*, x)/\alpha$, $\bar{a}(\xi) = a^*(\xi^*)$, $\bar{b}(\xi) = -b^*(\xi^*)/\alpha$, $N = \bar{N}$, $\bar{\xi}_k = \xi_k^*$, $\bar{b}_k = -b_k^*/\alpha$. Здесь $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Если $r = \alpha q$, α — произвольная вещественная или

комплексная константа, $\bar{\psi}(\zeta, x) = S\psi(-\zeta, x)$, $\bar{\varphi}(\zeta, x) = S\varphi(-\zeta, x)/\alpha$, $\bar{a}(\zeta) = a(-\zeta)$, $\bar{b}(\zeta) = -b(-\zeta)/\alpha$, $N = \bar{N}$, $\zeta_k = -\bar{\zeta}_k$, $\bar{b}_k = -b_k/\alpha$. Если $r = \alpha q$, где α , r , q вещественные, то $a^*(\zeta^*) = a(-\zeta)$, $b^*(\zeta^*) = b(-\zeta)$; кроме того, если ζ_k ($\text{Re } \zeta_k \neq 0$) есть собственное значение, то $-\zeta_k^*$ также является собственным значением. В задаче нелинейной оптики единственному собственному значению $\zeta_k = i\eta_k$ отвечает 2π -импульс, или кинк, а паре собственных значений 0π -импульс, или бризер.

6) Имеют место следующие полезные соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \ln a = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varphi_1 \psi_2 + \psi_1 \varphi_2}{a} - 1 \right) dx, \quad \text{Im } \zeta > 0, \quad (6.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [B(\zeta_1)C(\zeta_2) - B(\zeta_2)C(\zeta_1)] dx = \frac{1}{2(\zeta_1 - \zeta_2)} [2A(\zeta_1)A(\zeta_2) - B(\zeta_1)C(\zeta_2) - B(\zeta_2)C(\zeta_1)]_{-\infty}^{\infty}. \quad (6.22)$$

В (6.22) A , B , C удовлетворяют уравнениям

$$A_x = qC + rB, \quad B_x + 2i\zeta B = 2qA, \quad C_x - 2i\zeta C = 2rA. \quad (6.23)$$

Соотношение (6.21), которое выводится из формулы

$$i(u_1 \omega_2 + u_2 \omega_1) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \omega_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} \omega_1 \right) \quad (6.24)$$

(где (u_1, u_2) и (ω_1, ω_2) — решения (6.16)), позволяет выразить гамильтонианы интегрируемых систем как функционалы r и q . В (6.32а) будет показано, что вариация (6.21) дает $\delta \ln a =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\delta q \varphi_2 \psi_2 / a - \delta r \varphi_1 \psi_1 / a) dx. \quad \text{Соотношение (6.22) лежит в основе}$$

доказательств соотношений ортогональности между квадратами собственных функций и их сопряженными.

7) Два важных асимптотических соотношения указывают на центральную роль функций $\ln a(\zeta)$ и $\ln \bar{a}(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \ln a(\zeta) &\sim - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta^{-n}, & \text{Im } \zeta > 0, \\ \ln \bar{a}(\zeta) &\sim \sum \zeta^{-n} C_n, & \text{Im } \zeta < 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

В работе [6.63] было показано, что функция $\ln a(\zeta)$ может быть рассмотрена и как функционал от r и q , и как часть данных рассеяния. При этом было показано, что она порождает класс гамильтонианов, для которых соответствующие потоки

интегрируемы. Функционалы C_n могут быть вычислены рекуррентным образом. Первые три имеют вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} qr \, dx, & C_2 &= \frac{1}{(2i)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} qr_x \, dx, \\ C_3 &= \frac{1}{(2i)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (qr_{xx} - q^2r^2) \, dx. \end{aligned} \quad (6.26)$$

6.3. Эволюция данных рассеяния

Вычислим изменение данных рассеяния при инфинитезимальных изменениях потенциалов r и q . Запишем (6.16) в виде

$$V_x = PV, \quad P = \begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ r & i\zeta \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Фундаментальная матрица решений

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \bar{\varphi}_1 \\ \varphi_2 & \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

используется для вычисления решения вариаций (по параметрам) уравнения (6.27)

$$(\delta V)_x = P \delta V + \delta P V, \quad \delta P = \begin{pmatrix} -i\delta\zeta & \delta q \\ \delta r & i\delta\zeta \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

В частности, когда $V = \Phi$, получим

$$\begin{aligned} \delta\Phi(x) &= \Phi \left\{ \int_{-L}^x \begin{pmatrix} -\delta q \varphi_2 \bar{\varphi}_2 + \delta r \varphi_1 \bar{\varphi}_1 & -\delta q \bar{\varphi}_2^2 + \delta r \bar{\varphi}_1^2 \\ \delta q \varphi_2^2 - \delta r \varphi_1^2 & \delta q \varphi_2 \bar{\varphi}_2 - \delta r \varphi_1 \bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} dx \right. \\ &+ \delta\zeta \int_{-L}^x \begin{pmatrix} i(\varphi_1 \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1 \varphi_2) & 2i\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \\ -2i\varphi_1 \varphi_2 & -i(\varphi_1 \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1 \varphi_2) \end{pmatrix} dx \\ &+ \delta\zeta \begin{pmatrix} iL & 0 \\ 0 & -iL \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где использовано (6.18) для нахождения вариаций Φ и $\bar{\Phi}$ по ζ . Пусть $x = L$ и $L \rightarrow +\infty$; найдем вариации коэффициентов рассеяния δa , $\delta \bar{a}$, δb , $\delta \bar{b}$, используя тот факт, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\Phi(x) \rightarrow \begin{pmatrix} ae^{-i\zeta x} & \bar{b}e^{-i\zeta x} \\ be^{i\zeta x} & -\bar{a}e^{i\zeta x} \end{pmatrix}.$$

Удобно определить билинейную форму

$$I(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\delta q u_2 v_2 + \delta r u_1 v_1) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_2 v_2 \end{pmatrix} dx. \quad (6.31)$$

Получим

$$\delta a = -I(\varphi, \psi) + \delta \zeta \lim_{L \rightarrow \infty} i \int_{-L}^L (a - \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1) dx, \quad (6.32a)$$

$$\delta b = I(\varphi, \bar{\psi}) + \delta \zeta \lim_{L \rightarrow \infty} i \int_{-L}^L (\varphi_1 \bar{\psi}_2 + \varphi_2 \bar{\psi}_1) dx, \quad (6.32b)$$

$$\delta \bar{b} = -I(\bar{\varphi}, \psi) + \delta \zeta \lim_{L \rightarrow \infty} i \int_{-L}^L -(\bar{\varphi}_1 \psi_2 + \bar{\varphi}_2 \psi_1) dx, \quad (6.32c)$$

$$\delta \bar{a} = -I(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) + \delta \zeta \lim_{L \rightarrow \infty} i \int_{-L}^L -(\bar{a} + \bar{\varphi}_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\varphi}_2 \bar{\psi}_1) dx. \quad (6.32d)$$

Соотношение (6.24) позволяет отождествить вторые члены правых частей равенств (6.32) с производными a_ζ , b_ζ , \bar{b}_ζ , \bar{a}_ζ соответственно. Заметим, в частности, что (6.32) может быть записано как общее изменение $a(\zeta)$, равное сумме вариаций по r , q и ζ .

Из формул (6.32) можно получить вариацию данных рассеяния S_- :

$$S_- = S_- \left\{ (\zeta_k, \beta_k)_{k=1}^N, (\bar{\zeta}_k, \bar{\beta}_k)_{k=1}^N, \frac{\bar{b}}{a}, \frac{b}{\bar{a}}, \zeta \text{ вещественно} \right\}, \quad (6.33)$$

где

$$\beta(\zeta) = (\zeta - \zeta_k) \frac{\bar{b}}{a}, \quad \bar{\beta}(\zeta) = (\zeta - \bar{\zeta}_k) \frac{b}{\bar{a}}. \quad (6.34)$$

Если ζ вещественно и $\delta \zeta = 0$, то

$$\delta \left(\frac{\bar{b}}{a} \right) = \frac{1}{a^2} I(\psi, \psi) = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix} dx, \quad (6.35)$$

$$\delta \left(\frac{b}{\bar{a}} \right) = \frac{1}{\bar{a}^2} I(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = \frac{1}{\bar{a}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix} dx. \quad (6.36)$$

Для удобства вычисления $\delta \beta_k$, $\delta \bar{\beta}_k$ предположим, что q и r фиксированы, и рассмотрим аналитическое продолжение (6.35) до $\zeta = \zeta_k$, $\text{Im}\{\zeta_k\} > 0$. (Напомним, что нули a и \bar{a} предполагаются простыми.) Разлагая (6.35) в ряд Тейлора в окрестности $\zeta = \zeta_k$, получим для членов первого порядка по $(\zeta - \zeta_k)$

$$\beta \delta \zeta_k + \delta \beta(\zeta - \zeta_k) + \dots$$

$$\dots = \frac{1}{a_k'^2} [I_k(\psi, \psi) + (\zeta - \zeta_k) I_k'(\psi, \psi) + \dots] \left[1 - \frac{a_k''}{a_k'} (\zeta - \zeta_k) + \dots \right].$$

Так как $\beta(\xi, t) = \beta(\xi_k(t), t) + (\xi - \xi_k) \beta'_k(\xi_k(t), t) + \dots$, то $\delta\beta = \delta\beta_k - \delta\xi_k \beta'_k + (\xi - \xi_k) (\delta\beta'_k - \delta\xi_k \beta''_k) + \dots$.

(Здесь штрих означает производную по ξ .) Приравнявая коэффициенты при степенях $(\xi - \xi_k)$, получим при $k = 1, \dots, N$

$$\delta\bar{\xi}_k + \frac{b_k}{a'_k} I_k(\psi, \psi) = \frac{b_k}{a'_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix}_{\xi_k} dx, \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{b_j a'_k}\right) &= \delta\beta_k = \frac{1}{a_k'^2} \left[I'_k(\psi, \psi) - \frac{a''_k}{a'_k} I_k(\psi, \psi) \right] = \\ &= \frac{1}{a_k'^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix}_{\xi_k} \\ -\frac{a''_k}{a'_k} \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix}_{\xi_k} \end{bmatrix} dx. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Заметим, что из (6.37) вытекает

$$\delta a[\xi_k(t), t] = -b_k I_k(\psi, \psi) + \delta\xi_k a'_k = 0$$

(так как $\varphi_k = b_k \psi_k$). Последнее равенство показывает, что ξ_k остается нулем $a(\xi)$. Аналогично

$$\delta\bar{\xi}_k = \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}'_k} I_k(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}'_k} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}_{\bar{\xi}_k} dx, \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{\bar{b}_k \bar{a}'_k}\right) &= \frac{1}{\bar{a}_k'^2} \left[I'_k(\bar{\psi}, \bar{\psi}) - \frac{\bar{a}''_k}{\bar{a}'_k} I_k(\bar{\psi}, \bar{\psi}) \right] = \\ &= \frac{1}{\bar{a}_k'^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}_{\bar{\xi}_k} \\ -\frac{\bar{a}''_k}{\bar{a}'_k} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}_{\bar{\xi}_k} \end{bmatrix} dx. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Наиболее важным является то, что вариации данных рассеяния просто выражаются через внутреннее произведение вектора $(\delta r, -\delta q)^T$ и множества квадратов собственных функций

$$\begin{aligned} E_- = \left\{ \Psi_k = \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix}_{\xi_k}, \quad \tau_k = \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix}_{\xi_k}, \quad k=1, \dots, N; \quad \bar{\Psi}_k = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}_{\bar{\xi}_k}, \right. \\ \left. \bar{\tau}_k = \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}_{\bar{\xi}_k}, \quad k=1, \dots, \bar{N}; \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^2 \\ \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}, \quad \xi \text{ вещественно} \right\}. \quad (6.41)$$

Аналогичным образом можно найти изменения данных рассеяния

$$S_+ = \left\{ (\zeta_k, \gamma_k)_{k=1}^N, (\bar{\zeta}_k, \bar{\gamma}_k)_{k=1}^{\bar{N}}, \frac{b}{a}, \frac{\bar{b}}{\bar{a}}, \zeta \text{ вещественно} \right\}$$

(где $\gamma_k = b_k/a'_k$, $\bar{\gamma}_k = \bar{b}_k/\bar{a}'_k$), соответствующих двойственной обратной задаче. Для вещественных ζ

$$\delta\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a^2} I(\varphi, \varphi) = -\frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix} dx, \quad (6.42)$$

$$\delta\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) = \frac{1}{\bar{a}^2} I(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) = -\frac{1}{\bar{a}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2^2 \\ -\bar{\varphi}_1^2 \end{pmatrix} dx. \quad (6.43)$$

При $k = 1, \dots, N$ получим

$$\delta\zeta_k = \frac{1}{\gamma_k a'_k} I_k(\varphi, \varphi) = -\frac{1}{\gamma_k a'_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}_{\zeta_k} dx, \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma_k &= \frac{1}{a'_k} \left[I'_k(\varphi, \varphi) - \frac{a''_k}{a'_k} I_k(\varphi, \varphi) \right] = \\ &= -\frac{1}{a'_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta r \end{pmatrix} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}_{\zeta_k} - \frac{a''_k}{a'_k} \begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}_{\zeta_k} \right\} dx. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Наконец,

$$\delta\bar{\zeta}_k = \frac{1}{\bar{\gamma}_k \bar{a}'_k} I_k(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) = -\frac{1}{\bar{\gamma}_k \bar{a}'_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2^2 \\ -\bar{\varphi}_1^2 \end{pmatrix}_{\bar{\zeta}_k} dx, \quad (6.46)$$

$k = 1, \dots, \bar{N}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \delta\bar{\gamma}_k &= \frac{1}{\bar{a}'_k} \left[I'_k(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) - \frac{\bar{a}''_k}{\bar{a}'_k} I_k(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) \right] = \\ &= -\frac{1}{\bar{a}'_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta r \end{pmatrix} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2^2 \\ -\bar{\varphi}_1^2 \end{pmatrix}_{\bar{\zeta}_k} - \frac{\bar{a}''_k}{\bar{a}'_k} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2^2 \\ -\bar{\varphi}_1^2 \end{pmatrix}_{\bar{\zeta}_k} \right\} dx. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Вновь заметим, что изменение данных рассеяния S_+ выражается как внутреннее произведение вектора $(\delta q, \delta r)^T$ и квадратов

двойственных собственных функций

$$E_+ = \left\{ \Psi_k^A = \begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}_{\zeta_k}, \quad \chi_k^A = \frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}_{\zeta_k}, \quad k = 1, \dots, N; \right.$$

$$\bar{\Psi}_k^A = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2^2 \\ -\bar{\varphi}_1^2 \end{pmatrix}_{\bar{\zeta}_k}, \quad \bar{\chi}_k^A = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2^2 \\ -\bar{\varphi}_1^2 \end{pmatrix}_{\bar{\zeta}_k}, \quad k = 1, \dots, \bar{N};$$

$$\left. \Psi^A = \begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}^A = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2^2 \\ -\bar{\varphi}_1^2 \end{pmatrix}, \quad \zeta \text{ вещественное} \right\}. \quad (6.48)$$

Обозначение Ψ^A для квадратов двойственных собственных функций используется потому, что они являются и сопряженными (adjoint) собственными функциями.

6.4. Квадраты собственных функций и фурье-разложения

Квадраты собственных функций E_- удовлетворяют уравнениям

$$(L - \zeta)(\Psi, \bar{\Psi}) = 0, \quad \zeta \text{ вещественное или } \zeta = (\zeta_k, \bar{\zeta}_k), \quad (6.49)$$

$$(L - \zeta)(\tau_k, \bar{\tau}_k) = (\Psi_k, \bar{\Psi}_k), \quad \zeta = (\zeta_k, \bar{\zeta}_k), \quad (6.50)$$

$$L = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} - 2q \int_x^\infty dy r & -2q \int_x^\infty dy q \\ 2r \int_x^\infty dy r & \frac{\partial}{\partial x} + 2r \int_x^\infty dy q \end{pmatrix}. \quad (6.51)$$

Эти выражения находятся непосредственно из (6.16) после умножения двух уравнений на ψ_1, ψ_2 соответственно. При этом используется соотношение $\psi_1 \psi_2 = - \int_x^\infty (q\psi_2^2 + r\psi_1^2) dx$. Оказывается, что квадраты двойственных собственных функций E_+ удовлетворяют сопряженным уравнениям

$$(L^A - \zeta)(\Psi^A, \bar{\Psi}^A) = 0, \quad \zeta = (\zeta_k, \bar{\zeta}_k), \quad \zeta \text{ вещественное} \quad (6.52)$$

$$(L^A - \zeta)(\chi_k^A, \bar{\chi}_k^A) = (\Psi_k^A, \bar{\Psi}_k^A), \quad \zeta = (\zeta_k, \bar{\zeta}_k), \quad (6.53)$$

где

$$L^A = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - 2r \int_{-\infty}^x dyq & 2r \int_{-\infty}^x dyr \\ -2q \int_{-\infty}^x dyq & -\frac{\partial}{\partial x} + 2q \int_{-\infty}^x dyr \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Используя эти уравнения, можно вычислить различные *внутренние произведения* вида

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx$$

собственных функций E_- и собственных функций E_+ . Соответствующие результаты приведены в приложении А. После получения этих выражений соотношения (6.35)—(6.40) и (6.42)—(6.47) могут быть обращены. Это дает выражения для $(\delta r, -\delta q)^T$ и $(\delta q, \delta r)^T$ через E_+ и E_- соответственно.

Доказательство того, что E_+ и E_- образуют базис в пересечении $L^{(1)}$ и всех непрерывно дифференцируемых функций, было получено Каупом [6.64]. До сих пор не доказано, что каждое из этих множеств по отдельности образует базис в $L^{(1)} \cap L^{(2)}$ или $L^{(1)}$. Из (6.35)—(6.40) и (6.42)—(6.47), а также из соотношений для внутренних произведений (6А.1)—(6А.9) вытекает, что коэффициенты выражений для $(\delta r, -\delta q)^T$ и $(\delta q, \delta r)^T$ являются просто вариациями данных рассеяния S_- и S_+ соответственно. Из соотношений

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (q\psi_2^2 + r\psi_1^2) dx &= (\psi_1\psi_2)_{-\infty}^{\infty}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (q\varphi_2^2 + (-r)(-\varphi_1^2)) dx &= (\varphi_1\varphi_2)_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

можно выразить $(r, q)^T$ и $(q, -r)^T$ через базисы E_+ и E_- соответственно. Найдем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\delta \left(\frac{\bar{b}}{a} \right) \Psi^A - \delta \left(\frac{b}{\bar{a}} \right) \bar{\Psi}^A \right] d\xi + \\ &+ 2i \sum_1^N (\delta\beta_k \Psi_k^A + \beta_k \delta\bar{\xi}_k \bar{\chi}_k^A) + 2i \sum_1^{\bar{N}} (\delta\bar{\beta}_k \bar{\Psi}_k^A + \bar{\beta}_k \delta\xi_k \bar{\chi}_k^A), \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\bar{b}}{a} \Psi^A + \frac{b}{\bar{a}} \bar{\Psi}^A \right) d\xi - 2i \sum_1^N \beta_k \Psi_k^A + 2i \sum_1^{\bar{N}} \bar{\beta}_k \bar{\Psi}_k^A, \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \delta q \\ \delta r \end{array} \right) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\delta \left(\frac{b}{a} \right) \Psi - \delta \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right) \bar{\Psi} \right] d\xi - \\ &- 2i \sum_1^N (\delta \gamma_k \Psi_k + \gamma_k \delta \zeta_k \tau_k) - 2i \sum_1^{\bar{N}} (\delta \bar{\gamma}_k \bar{\Psi}_k + \bar{\gamma}_k \delta \bar{\zeta}_k \bar{\tau}_k). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Кроме того,

$$\left(\begin{array}{c} q \\ -r \end{array} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b}{a} \Psi + \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \bar{\Psi} \right) d\xi + 2i \sum_1^N \gamma_k \Psi_k - 2i \sum_1^{\bar{N}} \bar{\gamma}_k \bar{\Psi}_k. \quad (6.58)$$

Получив эти выражения, можно задать вопрос: какие операторы Ω действуют на $\left(\begin{array}{c} r \\ q \end{array} \right)$ так, что на каждый член разложения по ξ они действуют по отдельности? Для таких операторов уравнения в частных производных

$$\delta \left(\begin{array}{c} r \\ -q \end{array} \right) + \Omega \left(\begin{array}{c} r \\ q \end{array} \right) = 0 \quad (6.59)$$

приводятся путем простого приравнивания коэффициентов в разложениях для $\delta \left(\begin{array}{c} r \\ -q \end{array} \right)$ и $\Omega \left(\begin{array}{c} r \\ q \end{array} \right)$ к разделенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для скорости изменения данных рассеяния. Таким образом, фурье-разложения (6.55)–(6.58) являются «каноническими» для множества операторных уравнений (6.59), где оператор Ω диагонален в спектральном представлении L^A , т. е. действует на каждой компоненте спектра по отдельности. Эти уравнения будут рассмотрены в разд. 6.5, а пока сделаем несколько замечаний по разд. 6.2–6.4.

Замечание 1. Можно теперь непосредственно доказать, что обратное преобразование рассеяния является каноническим, т. е.

сохраняющим симплектическую форму $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta q \wedge \delta r dx$. Рас-

смотрим скалярные произведения уравнений (6.55), (6.57), взятых с различными вариациями δ_1 и δ_2 . Используя выражения для внутренних произведений, полученные в приложении А, найдем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta q \wedge \delta r dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \frac{\ln a \bar{a}}{\pi} \wedge \delta \ln b(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_1^N \delta 2i \zeta_k \wedge \delta \ln b_k + \sum_1^{\bar{N}} \delta 2i \bar{\zeta}_k \wedge \delta \ln \bar{b}_k. \end{aligned} \quad (6.60)$$

В этом выражении использовано, что для вещественных ξ имеет место равенство $\bar{b} = (1 - a\bar{a})/b$. В разд. 6.6, где будет развит гамильтонов формализм для рассматриваемых уравнений, соотношение (6.60) позволит отождествить $(\ln b(\xi), \ln b_k, \ln \bar{b}_k)$ и $(\pi^{-1} \ln a\bar{a}, 2i\xi_k, 2i\bar{\xi}_k)$ с переменными типа угла и действия соответственно.

Замечание 2. Для пояснения сути сделанного возьмем линейный предел (6.55), (6.57). Вычисляя собственные функции с точностью до первого порядка по r и q , получим $a \approx \bar{a} \approx 1$,

$$\Psi^A \cong - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2i\xi x}, \quad \bar{\Psi}^A \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2i\xi x}.$$

Тем самым (6.55) и (6.57) сводятся просто к соотношениям линейного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \delta r &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta b e^{2i\xi x} d\xi, & r &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b e^{2i\xi x} d\xi, \\ \delta q &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \bar{b} e^{-2i\xi x} d\xi, & q &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{b} e^{-2i\xi x} d\xi. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Замечание 3. В этом замечании мы обратим внимание на то, что описание данных рассеяния было формальным. При произвольном задании данных рассеяния S_+ или S_- можно получить сингулярные или неединственные решения $r(x, t)$ и $q(x, t)$. Например, если $b = \bar{b} = 0$ при вещественных ξ , $N = \bar{N} = 1$ и $S_- = ((\xi_1, \beta_1), (\bar{\xi}_1, \bar{\beta}_1))$, то соответствующие r и q имеют сингулярности вида $(x - x_0(t))^{-1}$. Фактически сингулярности могут возникнуть, даже если начальные данные $r(x, 0)$ и $q(x, 0)$ не имели сингулярностей и были абсолютно интегрируемыми. Происходит это из-за того, что базисы E_- и E_+ становятся сами сингулярными в этой точке t . Одно из необходимых условий формализма Лакса сводится к самосопряженности оператора L , эволюция во времени которого является унитарной. Вследствие этого оператор B , описывающий эволюцию во времени собственных функций, кососимметрический. Таким образом, преобразование собственных функций подобно вращению, и их величина ограничена. Остается открытым вопрос о необходимых условиях на r и q , которые обеспечивали бы отсутствие сингулярностей при всех временах t . Известно, что для $r = \alpha q^*$ (α вещественное) и для $r = \alpha q$ (α комплексное, q вещественное или чисто мнимое) достаточным условием отсутствия сингулярностей является $\int_{-\infty}^{+\infty} |q| dx < \infty$. Эти условия (подробнее см. [6.23])

гарантируют также единственность решения уравнений обратного преобразования рассеяния. Возможный ответ о необходимых условиях дан Флашкой и Ньюеллом [6.63].

Замечание 4. Соотношения (6.55), (6.56) могут быть записаны в виде, который проясняет их смысл и является весьма полезным для дальнейших обобщений:

$$\begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi} \int_C \frac{I(\psi, \psi)}{a^2} \Psi^A d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{\bar{C}} \frac{I(\psi, \psi)}{\bar{a}^2} \bar{\Psi}^A d\zeta, \quad (6.62)$$

$$\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\bar{b}}{a} \Psi^A d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{\bar{C}} \frac{b}{\bar{a}} \bar{\Psi}^A d\zeta. \quad (6.63)$$

Для записи соотношений в таком виде необходимо, чтобы b/a и b/\bar{a} допускали аналитическое продолжение на верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно. Здесь $C(\bar{C})$ — контур, идущий из $-\infty$ в $+\infty$ над (под) всеми нулями функции $a(\zeta)$ ($\bar{a}(\zeta)$). Важно заметить, что эти выражения остаются справедливыми и в более широкой ситуации, когда $a(\zeta)$ и $\bar{a}(\zeta)$ имеют кратные нули. В предшествующей форме разложений для $(\delta r, -\delta q)^T$ и $(r, q)^T$ в случае, когда $a(\zeta)$ имеет полюс второго порядка, следовало бы включить члены с величинами $(\partial^2 \Psi / \partial \zeta^2)_k$, $(\partial^3 \Psi / \partial \zeta^3)_k$.

6.5. Эволюционные уравнения класса I

Зададимся вопросом: какие операторы Ω , действующие на $(r, q)^T$ в (6.56), дадут $(\delta r, -\delta q)^T$? Ясно, что если Ω действует по отдельности на каждую ζ -составляющую, то уравнение

$$\begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = 0 \quad (6.64)$$

сведется к разделенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для данных рассеяния. Очевидно, что кандидатами на Ω являются полиномы от L^A . В действительности требуемому свойству удовлетворяют любые операторы B , коммутирующие с L^A , так как $L^A B \Psi^A = B L^A \Psi^A = \zeta B \Psi^A$ и $B \Psi^A$ является линейной комбинацией решений уравнения $L^A \Psi^A = \zeta \Psi^A$. Для удобства изложения разобьем интегрируемые уравнения на классы. Первый класс будет связан с мероморфными функциями $\Omega(\zeta)$, не имеющими особенностей на спектре L, L^A . При этом уравнение

$$\begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} + 2\Omega(L^A) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad (6.65)$$

эквивалентно уравнениям

$$\begin{aligned} \delta(\bar{b}/a) &= 2\Omega(\zeta) \bar{b}/a, & \delta(b/\bar{a}) &= -2\Omega(\zeta) b/\bar{a}, \\ \delta\zeta_k &= 0, & \delta\beta_k &= 2\Omega(\zeta_k) \beta_k, & k &= 1, \dots, N, \\ \delta\bar{\zeta}_k &= 0, & \delta\bar{\beta}_k &= -2\Omega(\zeta_k) \bar{\beta}_k, & k &= 1, \dots, \bar{N}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Для получения последних уравнений достаточно приравнять коэффициенты при базисных функциях E_- в разложениях для $(\delta r, -\delta q)^T$ и $(r, q)^T$. Система (6.66) тривиально интегрируема.

Замечание 1. Пример. Если $\Omega(\zeta) = \sum_{r=0}^3 a_r \zeta^r$, $\delta = \frac{\partial}{\partial t}$, то уравнения (6.65) имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} + 2a_0 \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} + \frac{2a_1}{2i} \begin{pmatrix} r_x \\ -q_x \end{pmatrix} + \frac{2a_2}{(2i)^2} \begin{pmatrix} r_{xx} - 2qr^2 \\ q_{xx} - 2q^2r \end{pmatrix} + \\ + \frac{2a_3}{(2i)^3} \begin{pmatrix} r_{xxx} - 6qrr_x \\ -q_{xxx} + 6qrq_x \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Эти уравнения объединяют одномерное линейное волновое уравнение, нелинейное уравнение Шрёдингера, модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза. Из соображений устойчивости $\Omega(\zeta)$ должно быть чисто мнимым при вещественных ζ ; в противоположность этому \bar{b}/a или b/\bar{a} должны расти экспоненциально. Этот факт находит свое отражение в (6.67): если a_2 вещественно и положительно, то r удовлетворяет прямому, а q обратному уравнению теплопроводности.

Замечание 2. Дисперсионные соотношения. Функция $\Omega(\zeta)$ непосредственно связана с дисперсионными соотношениями соответствующих линейных задач для r и q . В самом деле, $\Omega(\zeta) = i/2\omega_r(2\zeta) = -i/2\omega_q(-2\zeta)$.

Замечание 3. Законы сохранения. Для всех уравнений, описываемых (6.65), функции $a(\zeta)$ и $\bar{a}(\zeta)$ не зависят от времени. Следовательно, коэффициенты $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ разложения (6.25) также являются законами сохранения.

Замечание 4. Высшие размерности и псевдопространственные производные. На конференции в Аризоне в 1976 г. Франческо Калоджеро отметил, что δ может содержать производные по добавочным «пространственным» переменным. Например, если $y = (y_1, \dots, y_n)$ и

$$\delta = F(L^A) \frac{\partial}{\partial t} + G(L^A) \cdot \nabla_y,$$

то эволюционное уравнение имеет вид

$$F(L^A) \begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} + G(L^A) \cdot \nabla_y \begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix} + 2\Omega(L^A) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0. \quad (6.68)$$

Эволюция данных рассеяния описывается уравнениями

$$F(\xi) \left(\frac{\bar{b}}{a} \right)_t + \mathbf{G}(\xi) \cdot \nabla_y \left(\frac{\bar{b}}{a} \right) = 2\Omega(\xi) \frac{\bar{b}}{a}; \quad (6.69a)$$

$$F(\xi) \left(\frac{b}{\bar{a}} \right)_t + \mathbf{G}(\xi) \cdot \nabla_y \left(\frac{b}{\bar{a}} \right) = -2\Omega(\xi) \frac{b}{\bar{a}}; \quad (6.69b)$$

$$F(\xi_k) \xi_{kt} + \mathbf{G}(\xi_k) \cdot \nabla_y \xi_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [F(\xi_k) \beta_k] + \nabla_y \cdot [\mathbf{G}(\xi_k) \beta_k] = \\ = -2\Omega(\xi_k) \beta_k, \quad k = 1, \dots, N; \quad (6.69c)$$

$$F(\bar{\xi}_k) \bar{\xi}_{kt} + \mathbf{G}(\bar{\xi}_k) \cdot \nabla_y \bar{\xi}_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [F(\bar{\xi}_k) \bar{\beta}_k] + \nabla_y \cdot [\mathbf{G}(\bar{\xi}_k) \bar{\beta}_k] = \\ = -2\Omega(\bar{\xi}_k) \bar{\beta}_k, \quad k = 1, \dots, \bar{N}. \quad (6.69d)$$

Отметим, что уравнения (6.69) обладают весьма интересными свойствами. Они гиперболичны и могут приводить к многозначным решениям за конечное время. Например, если $F = 1$ и $G = \xi^2$, то начальный профиль $\xi(y, 0)$ (скажем, треугольной формы) может приводить к многозначным решениям, которые могут быть интерпретированы как распад солитона. Можно пойти дальше и задаться вопросом: можно ли, включив вторую

и третью вариации $\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}$, найти уравнения на собственные значения вида

$$\zeta_t + \zeta^2 \zeta_y + \zeta_{yyy} = 0, \quad (6.70)$$

соответствующие двумерным солитонным решениям в (x, y) -пространстве? Эти идеи весьма привлекательны не только потому, что они приводят к физическим следствиям, но и потому, что разложение (6.68) в (6.69) и, возможно, в (6.70) является весьма естественным обобщением идеи разделения переменных в линейных задачах.

Замечание 5. Можно включить эффекты линейных градиентов плотности, заметив, что

$$\left(\frac{b}{a} \right)_\zeta = -\frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2ix \begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_2^2 \\ -\Phi_1^2 \end{pmatrix} dx, \\ \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right)_\zeta = -\frac{1}{\bar{a}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2ix \begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_2^2 \\ -\bar{\Phi}_1^2 \end{pmatrix} dx. \quad (6.71)$$

Это позволяет написать разложение для

$$2ix \begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{b}{a} \right)_\zeta \Psi d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right)_\zeta \bar{\Psi} d\zeta. \quad (6.72)$$

Например, уравнение

$$\begin{pmatrix} q_t \\ r_t \end{pmatrix} + 4iL^2 \begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix} + 2i\alpha x \begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix} = 0,$$

которое при $r = -q^*$ является нелинейным уравнением Шрёдингера для распространения огибающей волнового пакета при наличии градиентов плотности, приводит к следующему уравнению для эволюции b/a :

$$(b/a)_t + \alpha (b/a)_x = 4i\xi^2 b/a. \quad (6.73)$$

Влияние градиента плотности проявляется в том, что пакет в основном связан с областью $x + \alpha t^2 = \text{const}$. Если пакет движется в область с увеличивающейся плотностью, $\alpha > 0$, то в конечном итоге это приводит к его отталкиванию.

6.6. Гамильтонова структура уравнений класса I

Основной целью этого раздела является определение гамильтоновой структуры для (6.65) и доказательство того, что обратное преобразование рассеяния является каноническим преобразованием, сохраняющим уравнения Гамильтона. Сначала будет показано, что второй член в (6.65) может быть записан как градиент по q и r некоторого функционала — гамильтониана системы. Оказывается, что все гамильтонианы порождаются единственной функцией $\ln a(\xi)$. Так как эта функция выражается через данные рассеяния, то немедленно получим выражения для гамильтонианов в переменных действие — угол. С этими выражениями тесно связаны формулы следов, которые выражают сохраняющиеся величины через переменные действия.

Рассмотрим функцию

$$\Phi^A = \frac{1}{a(\xi)} \begin{pmatrix} \varphi_2 \psi_2 \\ -\varphi_1 \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

Легко показать, что

$$(L^A - \xi) \Phi^A = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \quad (6.75)$$

Решая (6.75) при больших $|\xi|$, $\text{Im } \xi > 0$, получим асимптотические разложения

$$\Phi^A \sim -\frac{1}{2i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{m+1}} (L^A)^m \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \quad (6.76)$$

Из (6.32a) при $\delta\xi = 0$ следует

$$\delta \ln a = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\delta q \frac{\varphi_2 \psi_2}{a} + \delta r \frac{\varphi_1 \psi_1}{a} \right) dx. \quad (6.77)$$

Таким образом

$$\text{grad}_{q,r} \ln a = \Phi^A, \quad \text{grad}_{q,r} = (\delta/\delta q, \delta/\delta r)^T. \quad (6.78)$$

Из (6.25) получаем

$$\ln a(\xi) \sim - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{m+1}} C_{m+1}, \quad (6.79)$$

где $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность интегралов уравнений. Отсюда и из уравнений (6.76), (6.78), (6.79)

$$(L^A)^m \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 2i \text{grad} C_{m+1}. \quad (6.80)$$

Если $\Omega(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m$, то

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = -4i \sum_{m=0}^{\infty} a_m \text{grad} C_{m+1},$$

и гамильтониан имеет вид

$$H_{\Omega} = -4i \sum_{m=0}^{\infty} a_m C_{m+1}. \quad (6.81)$$

Введем теперь скобки Пуассона. Пусть $I(q, r)$ есть функционал от q и r и их производных (например, $\int_{-\infty}^{+\infty} (q_x r_x + q^2 r^2) dx$). Тогда

$$\frac{dI}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta I}{\delta q} q_t + \frac{\delta I}{\delta r} r_t \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta H}{\delta q} \frac{\delta I}{\delta r} - \frac{\delta H}{\delta r} \frac{\delta I}{\delta q} \right) dx. \quad (6.82)$$

Последнее выражение и определим как скобку Пуассона $\{H, I\}$ для величин H и I . Заметим, что если I есть интеграл движения, то $\{H, I\} = 0$; тогда говорят, что величины H и I находятся в инволюции. Каждый член последовательности $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ порождает в качестве гамильтониана потоки, для которых все остальные потенциальные гамильтонианы сохраняются. Следовательно, $\{C_m, C_n\} = 0$. Значит, все функционалы $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ находятся в инволюции.

Сама функция $\ln a(\xi)$ при любом фиксированном $\hat{\xi}$ ($\hat{\xi}$ не принадлежит спектру) может порождать в качестве гамильтониана поток

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = (\Phi^A)_{\hat{\xi}}, \quad (6.83)$$

который вместе с (6.75) образует замкнутую систему уравнений. Эта система может быть записана в виде

$$(L^A - \hat{\xi}) \begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \quad (6.84)$$

Она соответствует дисперсионному соотношению

$$\Omega(\zeta) = \frac{i}{4} \frac{1}{\zeta - \bar{\xi}}. \quad (6.85)$$

Можно также показать [6.63], что

$$\{\ln a(\zeta_1), \ln a(\zeta_2)\} = 0.$$

Таким образом, спектральная функция $\ln a(\zeta)$ играет центральную роль в наших построениях. За дальнейшими подробностями о значении этой функции в операторной теории отошлем читателя в [6.63]. Для получения *формул следов* найдем выражения функции $\ln a(\zeta)$ через данные рассеяния. Согласно (6.23), можно получить (здесь полагаем $r = -q^*$, $\bar{a}(\zeta) = a^*(\zeta^*)$, $\bar{b}(\zeta) = b^*(\zeta^*)$, $\bar{b}_k = b_k^*$, $\bar{\zeta}_k = \zeta_k^*$, $\bar{N} = N$)

$$\begin{aligned} \ln a(\zeta) &= \sum_{k=1}^N \ln \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta - \zeta_k^*} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln aa^*}{\zeta - \zeta'} d\zeta' \sim \\ &\sim - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta^m} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\zeta_k^m - \zeta_k^{*m}}{m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{m-1} \ln aa^* d\xi \right). \end{aligned} \quad (6.86)$$

Следовательно, из (6.79)

$$C_m = \sum_{k=1}^N \frac{\zeta_k^m - \zeta_k^{*m}}{m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{m-1} \ln aa^* d\xi, \quad (6.87)$$

и мы нашли выражения для гамильтониана через переменные действия $(\pi^{-1} \ln aa^*, 2i\zeta_k, 2i\zeta_k^*)$, которым отвечают угловые переменные $\ln b(\xi), \ln b_k, \ln b_k^*$. Заметим, что если $\Omega(\zeta) = a_m \zeta^m$, то

$$H_m = -4ia_m C_{m+1} = -4ia_m \sum_{k=1}^N \frac{\zeta_k^{m+1} - \zeta_k^{*m+1}}{m+1} - \frac{2a_m}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^m \ln aa^* d\xi. \quad (6.88)$$

Так как уравнения Гамильтона при канонических преобразованиях сохраняются, то

$$\begin{aligned} \frac{d \ln b_k}{dt} &= \frac{\delta H_m}{\delta (2i\zeta_k)} = -2a_m \zeta_k^m = -2\Omega(\zeta_k), \\ \frac{d \ln b_k^*}{dt} &= \frac{\delta H_m}{\delta (2i\zeta_k^*)} = 2a_m \xi_k^{*m} = 2\Omega(\zeta_k^*), \\ \frac{d \ln b(\xi)}{dt} &= \frac{\delta H_m}{\delta (\pi^{-1} \ln aa^*)} = -2a_m \xi^m = -2\Omega(\xi), \\ \frac{d}{dt} 2i\zeta_k &= \frac{d}{dt} 2i\zeta_k^* = \frac{d}{dt} \frac{1}{\pi} \ln aa^* = 0. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Например, пусть $\Omega = -2i\zeta^2$ и $r = -q^*$. Уравнения (6.81) сводятся в этом случае к нелинейному уравнению Шрёдингера $q_t - i(q_{xx} + 2q^2q^*) = 0$ с гамильтонианом

$$H = -i \int_{-\infty}^{+\infty} (qq_{xx}^* + q^2q^{*2}) dx = -8 \sum_{k=1}^N \frac{\zeta_k^3 - \zeta_k^{*3}}{3} - \frac{4}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \ln aa^* d\xi.$$

Замечание 1. Линейный предел. Предположим, что q и r малы. Тогда, как показано в [6.63], в системе отсутствуют связанные состояния, и

$$C_m = \frac{1}{(2i)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} r dx. \quad (6.90)$$

В этом случае (6.87) (причем r не обязательно равно $-q^*$) переходит в

$$\frac{1}{(2i)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} r dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{m-1} b \bar{b} d\xi. \quad (6.91)$$

Замечание 2. Потоки для $H = \alpha \zeta_k$. Если гамильтониан пропорционален собственному значению ζ_k , тогда, поскольку $\delta a(\zeta_k, t) = 0$, из (6.32а) получим, что

$$\delta(\zeta_k) = \frac{1}{a_k} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta q \varphi_2 \psi_2 - \delta r \varphi_1 \psi_1) \zeta_k dx. \quad (6.92)$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{a_k} \begin{pmatrix} \varphi_2 \psi_2 \\ -\varphi_1 \psi_1 \end{pmatrix}_{\zeta_k} = \alpha \beta_k \begin{pmatrix} \varphi_2^2 \\ -\varphi_1^2 \end{pmatrix}_{\zeta_k} = \alpha \beta_k \Psi_k^A. \quad (6.93)$$

Приравнивая коэффициенты в (6.55) (предположим опять для простоты, что $r = -q^*$, $\zeta_k = i\eta_k$, $\alpha = 4i\alpha$), найдем

$$\left(\frac{b^*}{a}\right)_t = \zeta_{jt} = \beta_{jt} = 0, \quad j \neq k, \quad \zeta_{kt} = 0, \quad \beta_{kt} = 2\bar{\alpha}\beta_k. \quad (6.94)$$

Уравнения движения тривиальны. Представим, что начальные данные разложены на солитонную и радиационную составляющие. Тогда солитон, соответствующий η_k , движется с постоянной скоростью, а все остальное неизменно.

6.7. Система с двумя дисперсионными соотношениями

В разд. 6.5, 6.6 рассматривались эволюционные уравнения, в которых обе зависимые переменные удовлетворяли одному и тому же дисперсионному соотношению. Было показано, что это приводит к системам, обладающим бесконечным набором интегралов движения.

В этом разделе будет проанализирован случай, когда q и r удовлетворяют двум *различными* дисперсионным соотношениям.

Зададим движение данных рассеяния S_- уравнениями

$$\delta\left(\frac{\bar{b}}{a}\right) = 2M\frac{\bar{b}}{a}, \quad \delta\left(\frac{b}{\bar{a}}\right) = -2\bar{M}\frac{b}{\bar{a}}, \quad (6.95)$$

$$\delta\beta_k = 2m_k\beta_k, \quad \delta\zeta_k = 2Z_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\delta\bar{\beta}_k = -2\bar{m}_k\bar{\beta}_k, \quad \delta\bar{\zeta}_k = -2\bar{Z}_k, \quad k = 1, \dots, \bar{N}. \quad (6.96)$$

Тогда из (6.55) вытекает

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} = & -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(M\frac{\bar{b}}{a} \Psi^A + \bar{M}\frac{b}{\bar{a}} \bar{\Psi}^A \right) d\zeta + \\ & + 4i \sum_{k=1}^N (m_k\beta_k \Psi_k^A + \beta_k Z_k \chi_k^A) - 4i \sum_{k=1}^{\bar{N}} (\bar{m}_k\bar{\beta}_k \bar{\Psi}_k^A + \bar{\beta}_k \bar{Z}_k \bar{\chi}_k^A). \end{aligned} \quad (6.97)$$

Поставим вопрос: существует ли оператор Ω , действующий на вектор $\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$ так, что

$$\Omega\Psi^A = -2M\Psi^A, \quad \Omega\bar{\Psi}^A = -2\bar{M}\bar{\Psi}^A, \quad M \neq \bar{M},$$

причем по-прежнему получатся уравнения, представляющие практический или теоретический интерес? Удобно ввести функции

$$\tilde{\Psi}(x, \zeta) = \begin{pmatrix} \Psi_1\bar{\Psi}_1 \\ \Psi_2\bar{\Psi}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Psi}^A(x, \zeta) = \begin{pmatrix} \Phi_2\bar{\Phi}_2 \\ -\Phi_1\bar{\Phi}_1 \end{pmatrix}, \quad (6.98)$$

Можно показать, что (для удобства обозначений предположим, что q и r финитны, а значит, \bar{b}/a и b/\bar{a} аналитичны)

$$\tilde{\Psi}^A(x, \eta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{b}}{a} \frac{1}{\zeta - \eta} \Psi^A d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{b}{\bar{a}} \frac{1}{\zeta - \eta} \bar{\Psi}^A d\zeta. \quad (6.99)$$

Здесь C , \bar{C} — контуры, такие же как и в разд. 6.4. Функция $\tilde{\Psi}^A(x, \eta)$ определена лишь для вещественных η и для собственных значений ζ_k , $\bar{\zeta}_k$. Для того чтобы $\tilde{\Psi}^A$ стремилась к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$, для вещественных η необходимо потребовать $b(\eta) = \bar{b}(\eta) = 0$. Рассмотрим взвешенное среднее от функции $\tilde{\Psi}^A(x, \eta)$ на вещественной оси η

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \tilde{\Psi}^A(x, \eta) d\eta, \quad (6.100)$$

где функция $g(\eta)$ аналитическая в полосе, содержащей вещественную ось, и допускающая разложение Винера — Хопфа

$$g(\eta) = \frac{2}{\pi} [\bar{M}(\eta) - M(\eta)], \quad (6.101)$$

где M и \bar{M} аналитические при $\text{Im } \eta > 0$ ($\text{Im } \eta < 0$). Например, для данной аналитической в окрестности $\text{Im } \eta = 0$ функции $g(\eta)$ можно записать

$$M(\eta) = -\frac{i}{4} \int_{C_u} \frac{g(\alpha) d\alpha}{\eta - \alpha}, \quad \bar{M}(\eta) = -\frac{i}{4} \int_{C_A} \frac{g(\alpha) d\alpha}{\eta - \alpha}. \quad (6.102)$$

Контуры C_u и C_A проведены вдоль вещественной оси над и под полюсом в точке $\alpha = \eta$ соответственно. Частным, но полезным выбором $g(\eta)$ является лоренцево уширение

$$g(\eta) = \frac{\beta}{\pi(\eta^2 + \beta^2)} = \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{i}{4}\right) \frac{1}{\eta - i\beta} - \left(-\frac{i}{4}\right) \frac{1}{\eta + i\beta} \right]. \quad (6.103)$$

Используя (6.99), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \tilde{\Psi}^A(x, \eta) d\eta &= -\frac{2}{\pi} \int_C \frac{\bar{b}}{a} \Psi^A \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{M} - M}{\zeta - \eta} d\eta d\zeta - \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \int_{\bar{C}} \frac{b}{\bar{a}} \bar{\Psi}^A \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{M} - M}{\zeta - \eta} d\eta d\zeta = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_C M(\zeta) \frac{\bar{b}}{a} \Psi^A d\zeta - \frac{2}{\pi} \int_{\bar{C}} \bar{M}(\zeta) \frac{b}{\bar{a}} \bar{\Psi}^A d\zeta. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Здесь при интегрировании по контуру в верхней (нижней) полуплоскости подставлены соответствующие выражения, содержащие $M(\bar{M})$. Напомним, что в первом члене интегрирование ведется при $\text{Im } \eta \geq 0$, а во втором при $\text{Im } \eta \leq 0$.

Выражение (6.104) совпадает с (6.97), если положить

$$m_k = M(\zeta_k), \quad \bar{m}_k = \bar{M}(\bar{\zeta}_k), \quad Z_k = \bar{Z}_k = 0. \quad (6.105)$$

Таким образом, система состоит из уравнения

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \tilde{\Psi}^A(x, \eta) d\eta \quad (6.106)$$

и уравнения, связывающего $\tilde{\Psi}^A$ с потенциалами r и q ,

$$(L^A - \eta) \tilde{\Psi}^A = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \quad (6.107)$$

Эта система обратным преобразованием рассеяния сводится к тривиально интегрируемой системе (6.96). Заметим, что так как \bar{b} ассоциировано с r , а b ассоциировано с q , то $M(\xi)$ отвечает за эволюцию q , а $\bar{M}(\xi)$ за эволюцию r .

6.8. Распространение когерентного импульса

Для того чтобы проиллюстрировать возможности метода обратного преобразования рассеяния на конкретных примерах, рассмотрим следующее важное его приложение. Подробности явления, которое вкратце будет здесь описано, можно найти в [6.29], [6.30]. Пусть $r = \alpha q^*$, α вещественное, $q = E/2$, $2\varphi_1\bar{\varphi}_1 = \lambda$, $N = \varphi_1\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1\varphi_2$. Тогда $2\varphi_2\bar{\varphi}_2 = \alpha\lambda^*$, и (6.106) превращается в уравнение

$$E_t = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \lambda(x, t, \eta) d\eta, \quad (6.108)$$

которое является усредненным уравнением Максвелла, описывающим изменения огибающей электрического поля $E(x, t)$ при прохождении через резонирующую, с неоднородным уширением (за счет доплеровского эффекта), невырожденную среду двухуровневых атомов. Разность уровней энергии предполагается близкой (с точностью до ширины $g(\eta)$) к частоте несущей волны с огибающей E . Здесь t является расстоянием X вдоль среды, а x есть $T - X$. Величины $\lambda(x, t, \eta)$ и $N(x, t, \eta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_x + 2i\eta\lambda = EN, \quad N_x = \frac{\alpha}{2} (E\lambda^* + E^*\lambda). \quad (6.109)$$

Для случая $\alpha = -1$ это хорошо известные уравнения Блоха [6.30], описывающие влияние огибающей электрического поля на поляризацию и плотность заселения уровней $N(x, t, \eta)$. Фактически $N = (\eta_E - \eta_G) / (\eta_E + \eta_G)$, где η_E — число атомов в возбужденном, а η_G в основном состоянии. При $x \rightarrow -\infty$ граничные условия $\lambda = 0$ и $N = -1$ означают просто, что до прихода импульса среда находится в основном состоянии.

Динамика системы показана на рис. 6.1. Начальный импульс распадается на солитоны, которые соответствуют дискретным

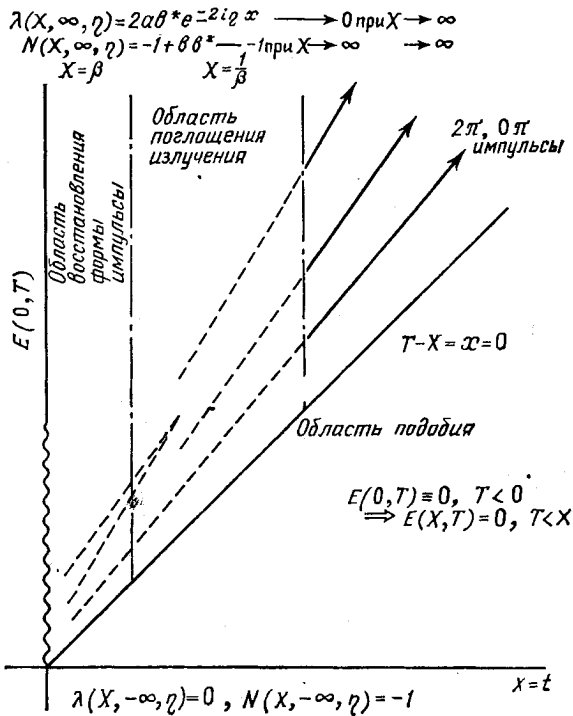


Рис. 6.1. $X-T$ -диаграмма распространения импульса $E(0, T)$, приходящего в точку $X=0$ в момент времени $T=0$.

собственным значениям $\xi = i\eta$ (2π -импульсы) и парам собственных значений $\xi, -\xi^*$ (0π -импульсам). Радиационная составляющая определяется отношением $b^*(\xi, 0)/a(\xi, 0)$. Эти величины могут быть просто найдены из (6.16) при $-r^* = q = E/2$, где $E(x, 0) [= E(0, T)]$ задано. Солитоны распространяются сквозь среду без потерь, когерентно, тогда как излучение в конце концов полностью поглощается в соответствии с законом Беера. Система обладает некоторыми чрезвычайно интересными свойствами, часть из которых следует описать более детально. Замечания 1, 2 и 3 относятся к случаю $\alpha = -1$, а замечание 4 к случаю $\alpha = +1$.

Замечание 1. В системе нет других сохраняющихся величин, кроме собственных значений. Действительно, анализ эволюции во времени функции $\ln a(\xi, t)$ показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln a(\xi, t) = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \frac{2bb^*}{\xi - \eta} d\eta, \quad \text{Im } \xi > 0. \quad (6.110)$$

В частности, используя (6.25), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} C_1 = -\frac{1}{8i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} EE^* dx = -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)(N+1)_{x=+\infty} d\eta,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} EE^* dx = -4 \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) bb^* d\eta, \text{ так как } N|_{+\infty} = -1 + 2bb^*. \quad (6.111)$$

Последнее выражение в общем случае отлично от нуля. Этот результат можно вывести непосредственно из (6.108), (6.109). Потеря энергии связана с ее поглощением (радиационной части) средой. Поглощение происходит вследствие перемешивания фаз и определяется гладкой ненулевой функцией $g(\eta) = (2/\pi)(M - M)$.

Это показывает, что различие в дисперсионных соотношениях приводит к весьма реальному эффекту.

Замечание 2. Обобщенная теорема площадей Мак-Колла — Хана. Если в качестве $g(\eta)$ дано лоренцево уширение $\beta/[\pi(\eta^2 + \beta^2)]$, то, интегрируя (6.95), получим

$$\frac{b^*(\xi, t)}{a(\xi, t)} = \frac{b^*(\xi, 0)}{a(\xi, 0)} \exp\left[\frac{-(\beta + i\xi)t}{2(\xi^2 + \beta^2)}\right]. \quad (6.112)$$

Для $\xi \gg \beta$ коэффициент отражения убывает и энергия рассеивается в среде на расстояниях порядка $1/\beta$ (закон Беера). С другой стороны, при $\xi = 0$

$$\frac{b^*(0, t)}{a(0, t)} = \frac{b^*(0, 0)}{a(0, 0)} e^{-t/2\beta}. \quad (6.113)$$

Следовательно, $b^*(0, t)/a(0, t)$ стремится к нулю на расстояниях порядка β , т. е. порядка толщины слоя неоднородного уширения. Для вещественных E , когда $b^*(0, t) = b(0, t)$, можно показать, что b^*/a есть $\operatorname{tg} A(t)/2$, где $A(t)$ — площадь (отрицательная)

электрического импульса $-\int_{-\infty}^{+\infty} E(x, t) dx$. (Это легко увидеть,

так как при $\xi = 0$, если $E/2 = q = -r = -u_x/2$, $\varphi_1 = \cos u/2$, $\varphi_2 = \sin u/2$, то $b^*(0, t)/a(0, t) = b(0, t)/a(0, t) = \operatorname{tg} u/2 (+\infty)$,

где $u(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} E dx$.) Уравнение (6.113) показывает, что пло-

щадь $\int_{-\infty}^{+\infty} E dx$ стремится к кратному 2π на расстояниях порядка

β . Если $\beta < 0$ (или $\operatorname{Re} M(0) < 0$), что соответствует системам,

находящимся первоначально в возбужденном состоянии, площадь стремится к нечетному кратному π . Можно получить обобщения этой теоремы на более высокие нелинейные моменты.

Объединяя эти два замечания, можно представить структуру общего решения. Из рис. 6.1 и предположения $\beta < 1$ видно, что импульс, возникший при $X = 0$ и $T = 0$, в первый момент так меняет свою форму, что его площадь становится кратной 2π . Это не означает, что радиационная составляющая рассеивается, а просто то, что общая площадь солитона и радиационного поля равна 2π . Следующий факт заключается в том, что импульс распадается на 2π - и 0π -импульсы (если E вещественно) и радиационная энергия поглощается на бееровской длине $1/\beta$. На расстояниях, больших $X = t \sim 1/\beta$, радиационная составляющая полностью поглощена, а 2π - и 0π -импульсы продолжают распространяться когерентно, без потерь.

Замечание 3. Предельное уравнение sine-Gordon. Если β стремится к нулю, дисперсионные соотношения M и \bar{M} стремятся к $-i/4\xi$, а $g(\eta)$ к $\delta(\eta)$ т. е. к дельта-функции Дирака. Формально $\lambda(\eta = 0) = 2\varphi_1\varphi_1|_{\eta=0} = \sin u$, и, так как $E = -u_x$, то уравнение Максвелла (6.108) превращается в уравнение

$$u_{xt} = -\sin u. \quad (6.114)$$

Это уравнение sine-Gordon в форме Гурса; данные заданы при $t = 0$ и $x = -\infty$. При $\beta \rightarrow 0$ из (6.113) следует, что $b(0) \rightarrow 0$ для любого $t > 0$. Значит, форма импульса изменяется мгновенно. Тем самым для уравнения sine-Gordon в форме уравнения типа Гурса допустимые начальные данные являются лишь подклассом начальных данных, допустимых для задачи о распространении когерентного импульса. Необходимым условием, выделяющим этот подкласс, является $b(0, 0) = 0$ (или $u(\pm\infty, 0) = 2n\pi$). Достаточные условия [6.65] на начальные данные, гарантирующие интегрируемость (6.114) с помощью метода обратного преобразования рассеяния, имеют вид $b(\xi, 0) = O(\xi^{1/2})$ при $\xi \rightarrow 0$. Видно, что начальные данные могут содержать радиационную составляющую, но она должна быть ассоциирована с волновыми векторами, отличными от $\eta = 0$. Кроме того, в пределе sine-Gordon радиация не убывает (в системе отсутствует поглощение), а диспергирует и распространяется вместе с солитонами.

В заключение заметим, что если $\bar{M} = M = -1/4(\xi - \bar{\xi})$, ξ вещественное, то для корректной постановки задачи Гурса условия $b(\xi) = \bar{b}(\bar{\xi}) = 0$ необходимы.

Замечание 4. Операторная точка зрения. Флашка и Ньюэлл [6.63] показали, что уравнения типа Лакса $L_t = [B, L]$ преобразуются обратным преобразованием рассеяния к уравнению

$$\dot{\hat{S}}_t = \hat{T}_+ \hat{S} - \hat{S} \hat{T}_-, \quad (6.115)$$

описывающему эволюцию матрицы рассеяния \hat{S} . Так как формализм Лакса требует самосопряженности оператора L и кососимметричности оператора B , положим $r = +q^*$ или $\alpha = +1$, что влечет за собой самосопряженность (6.16). Используя (6.95) для вычисления эволюции во времени b^*/a и других данных, найдем

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b^*}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad T_+ = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} \left\langle \frac{1+bb^*}{\zeta\eta} \right\rangle & \frac{\pi}{4} gb^* \\ -\frac{\pi}{4} gb & \frac{i}{4} \left\langle \frac{1+bb^*}{\zeta\eta} \right\rangle \end{pmatrix},$$

$$T_- = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} \left\langle \frac{1+bb^*}{\zeta\eta} \right\rangle & -\frac{\pi}{4} b^*g \\ \frac{\pi}{4} gb & \frac{i}{4} \left\langle \frac{1+bb^*}{\zeta\eta} \right\rangle \end{pmatrix},$$

где $\langle f \rangle = P \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) f(\eta) d\eta$. Если $T_+ = T_- = T$, то (6.115) имеет вид $\hat{S}_t = [T, \hat{S}]$, и, следовательно, существует такой унитарный оператор U , что $U_t = TU$ и $\hat{S}(t)U = U\hat{S}(0)$. Следовательно, для многих величин (например, для $\det \hat{S}$) нетрудно показать их сохраняемость. В общем случае $T_+ \neq T_-$, и единственной сохраняющейся величиной является спектр. Это явление связано с тем, что $g(1) \neq 0$. Если $g(\eta) \equiv 0$ или $g(\zeta) = \delta(\zeta)$ (в последнем случае, поскольку $M = \bar{M} = -i/4\zeta$ имеет полюс в точке $\zeta = 0$, необходимо положить $b(0) = 0$), то

$$T = T_+ = T_- = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4\zeta} & 0 \\ 0 & \frac{i}{4\zeta} \end{pmatrix}.$$

В этом пределе система (6.108), (6.109) сводится к уравнению sh-Gordon

$$u_{xt} = -\text{sh } u, \quad [E(x, t) = -u_x].$$

6.9. Движущиеся собственные значения

Общей чертой всех рассмотренных выше классов эволюционных уравнений является инвариантность дискретных собственных значений. Тем не менее в общей теории нет ничего, чтобы запрещало их движение. В самом деле, ясно, что практически каждое операторное уравнение вида

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad (6.116)$$

посредством обратного преобразования рассеяния сводится к эквивалентной механической системе в пространстве данных рассеяния. В этих системах все нормальные моды сильно связаны, и собственные значения эволюционируют. Из-за сильной связи нормальных мод каноническое преобразование к данным рассеяния не всегда оказывается непосредственно полезным. Ниже будет описано (этот материал содержится также в [6.59]) множество таких операторов Ω , что соответствующие собственные значения движутся, но уравнения в пространстве данных рассеяния по-прежнему разделимы.

Желательно, чтобы оператор Ω действовал на каждую ζ -компоненту разложения $\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$ отдельно и, кроме того, его действие на Ψ_k^A для некоторого k описывалось формулой

$$\Omega \Psi_k^A = \alpha \Psi_k^A + \chi_k^A. \quad (6.117)$$

В этом случае в разложении $\Omega \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$ один из членов компенсируется коэффициентом ζ_{ki} при χ_k^A в разложении $\begin{pmatrix} r_i \\ -q_i \end{pmatrix}$. Поскольку

$$(L^A - \zeta_k) \chi_k^A = \Psi_k^A, \quad (6.118)$$

то в качестве такого оператора можно выбрать оператор $(L^A - \zeta_k)^{-1}$. Согласно определению (6.98), для $\tilde{\Psi}^A(x, \eta)$ имеем

$$(L^A - \zeta_k) \tilde{\Psi}^A(x, \zeta_k) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \quad (6.119)$$

Напомним, что $\tilde{\Psi}^A(x, \eta)$ определено для вещественных η или для дискретных собственных значений. Значит,

$$(L^A - \zeta_k)^{-1} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = -2i \tilde{\Psi}^A(x, \zeta_k). \quad (6.120)$$

Из (6.99) при $\eta = \zeta_k$ непосредственно вытекает, что в выражение для $\tilde{\Psi}^A$ входит как $\Psi^A(x, \zeta_k)$, так и $\partial/\partial \zeta \Psi^A(x, \zeta_k) = \chi_k^A$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно записать интеграл вдоль контура C как сумму интеграла вдоль вещественной оси и вклада от полюсов. Вычет при $\zeta = \zeta_k$ содержит оба приведенных члена, поскольку $a(\zeta) (\zeta - \zeta_k)$ имеет двойной полюс при $\zeta = \zeta_k$.

Из сделанных замечаний вытекает, что уравнение

$$\begin{pmatrix} r_i \\ -q_i \end{pmatrix} = 4i\Omega_j \tilde{\Psi}^A(x, \zeta_j) + 4i\bar{\Omega}_j \tilde{\Psi}^A(x, \bar{\zeta}_j) \quad (6.121)$$

отвечает следующему потоку на пространстве данных рассеяния:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{b}}{a}\right)_t &= 2M(\zeta) \frac{\bar{b}}{a}, & \left(\frac{b}{a}\right)_t &= -2M(\zeta) \frac{b}{a}, \\ \beta_{k,t} &= 2M(\zeta_k) \beta_k, & \bar{\beta}_{k,t} &= -2M(\bar{\zeta}_k) \bar{\beta}_k, \\ \zeta_{k,t} &= \bar{\zeta}_{k,t} = 0 & \text{при } k \neq j, \\ \zeta_{j,t} &= 2\Omega_j, & \beta_{j,t} &= \frac{2\bar{\Omega}_j \beta_j}{\zeta_j - \bar{\zeta}_j} + 2\Omega_j \beta'_j, \\ \bar{\zeta}_{j,t} &= -2\bar{\Omega}_j, & \bar{\beta}_{j,t} &= \frac{2\Omega_j \bar{\beta}_j}{\zeta_j - \bar{\zeta}_j} - 2\bar{\Omega}_j \bar{\beta}'_j; \end{aligned} \quad (6.122)$$

здесь

$$M(\zeta) = \frac{\Omega_j}{\zeta - \zeta_j} + \frac{\bar{\Omega}_j}{\zeta - \bar{\zeta}_j}.$$

Во-первых, заметим, что эволюция величины β_j , характеризующей положение солитона, может быть записана в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta[\zeta_j(t), t] = \frac{2\bar{\Omega}_j}{\zeta_j - \bar{\zeta}_j} \beta[\zeta_j(t), t],$$

где

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta[\zeta_j(t), t] = \frac{d}{dt} \beta[\zeta_j(t), t] - \zeta_{j,t} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \zeta}\right)_{\zeta_j}. \quad (6.123)$$

Это означает, что эволюция β_j ($\bar{\beta}_j$) зависит лишь от $\bar{\Omega}_j$ (Ω_j) и от $\zeta_j(t)$ ($\bar{\zeta}_j(t)$). Более того, весь поток (6.122) допускает простую интерпретацию.

Рассмотрим зависимость от времени функции $a(\zeta, t)$. Для простоты предположим, что $r = -q^*$, $\bar{\Omega}_j = -\Omega_j^*$, $\bar{\zeta}_k = \zeta_k^*$ (при всех k). Тогда из (6.32) следует

$$a(\zeta, t) = a(\zeta, 0) \frac{\zeta - \zeta_j(t)}{\zeta - \zeta_j(0)} \frac{\zeta - \zeta_j^*(0)}{\zeta - \zeta_j^*(t)}. \quad (6.124)$$

Это означает, что член $(\zeta - \zeta_j(0))/(\zeta - \zeta_j^*(0))$ в выражении (6.86) для $a(\zeta, 0)$

$$a(\zeta, 0) = \prod \frac{\zeta - \zeta_k(0)}{\zeta - \zeta_k^*(0)} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln a a^*}{\zeta - \xi} d\xi\right) \quad (6.125)$$

должен быть заменен на $(\zeta - \zeta_j(t))/(\zeta - \zeta_j^*(t))$. Можно также показать, что $\partial b(\zeta, t)/\partial t = 0$ и даже что $b_j[\zeta_j(t), t] = b_j$, т. е. константа. Отсюда вытекает, что единственные элементы данных

рассеяния, которые изменяются, суть ζ_j и ζ_j^* . Их эволюция определяется коэффициентами эволюционных уравнений (6.121).

Из (6.32) в силу равенств $\Phi_k = b_k \Psi_k$ и $b_k b_k^* = 1$ следует, что (6.121) может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = \text{grad}_{q, r} H, \quad (6.126)$$

где

$$H = 4i\Omega_j \ln b_j + 4i\Omega_j^* \ln b_j^*. \quad (6.127)$$

В этом выражении b_j и b_j^* понимаются как функционалы от r и q , вариации в которых относительно этих переменных даются (6.32).

Из сказанного следует, что все данные рассеяния $2i\zeta_k$, $2i\zeta_k^*$, $k \neq j$, $\ln b_k$, $\ln b_k^*$, $\pi^{-1} \ln aa^*$, $\ln b(\zeta)$, которые играют роль переменных действие — угол, оказываются интегралами движения. Переменные действие — угол ($2i\zeta_j$, $\ln b_j$) и ($2i\zeta_j^*$, $\ln b_j^*$), связанные с собственными значениями ζ_j и ζ_j^* , меняются ролями. Роль переменных действия играют величины $\ln b_j$ ($\ln b_j^*$), а величины $2i\zeta_j$ ($2i\zeta_j^*$) есть *угловые* переменные, эволюция которых определяется уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t} 2i\zeta_j = \frac{\delta H}{\delta \ln b_j} = 4i\Omega_j, \quad \frac{\partial}{\partial t} 2i\zeta_j^* = \frac{\delta H}{\delta \ln b_j^*} = 4i\Omega_j^*. \quad (6.128)$$

Вновь подчеркнем, что эволюция данных E_+ или E_- полностью определяется зависимостью от $\zeta_j(t)$ или $\zeta_j^*(t)$.

Например, если $r = -q^*$, q вещественно и

$$M(\zeta) = \frac{1}{2} \left[\frac{i\hat{\eta}_t(t)}{\zeta - i\hat{\eta}(t)} + \frac{i\hat{\eta}_t(t)}{\zeta + i\hat{\eta}(t)} \right], \quad (6.129)$$

то соответствующее эволюционное уравнение имеет вид

$$r_{xxt} + (2rR_t)_x - 4\hat{\eta}^2(t)r_t = 4\hat{\eta}_t r_x, \quad (6.130)$$

$$R = \int_{-\infty}^x r^2 dy.$$

Если одно из собственных значений, связанных с $r(x, 0)$, соответствует $\hat{\eta}(0)$, то последующее поведение ассоциированного солитона определяется формулой

$$r(x, t) = 2\hat{\eta}(t) \operatorname{sech} \left[2\hat{\eta}(t)x + \ln \left(\frac{\hat{\eta}(t)}{\hat{\eta}(0)} \right) \right]. \quad (6.131)$$

Вопросы, связанные с неединственностью солитона, обсуждаются в [6.59].

Объединяя общие черты разд. 6.5, 6.7—6.9, можно записать общую форму эволюционных уравнений, интегрируемых обратным преобразованием рассеяния (для которого задачей на собственные значения является (6.16)), следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \delta r \\ -\delta q \end{pmatrix} + 2\Omega(L^A) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \tilde{\Psi}^A(x, \eta) d\eta + \sum_{j=1}^N g_j \tilde{\Psi}^A(x, \zeta_j) + \sum_{j=1}^{\bar{N}} \bar{g}_j \tilde{\Psi}^A(x, \bar{\zeta}_j). \quad (6.132)$$

6.10. Уравнение sine-Gordon

Если с самого начала налагается ограничение $r = -q$, то вариации по r и q уже не являются независимыми. Поэтому формулировка гамильтонова формализма должна быть изменена. Предположим, что r и q вещественны. В этом случае имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\zeta) &= S\varphi^*(\zeta^*) = S\varphi(-\zeta), & \bar{\psi}(\zeta) &= S\psi^*(\zeta^*) = S\psi(-\zeta), \\ S &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{b}(\zeta) &= b^*(\zeta^*) = b(-\zeta), & \bar{a}(\zeta) &= a^*(\zeta^*) = a(-\zeta), \\ \bar{\zeta}_k &= -\zeta_k, & \bar{a}'_k &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{a}(\zeta)|_{\zeta_k} = -a'_k = -\frac{\partial}{\partial \zeta} a(\zeta)|_{\zeta_k}, \\ & & \bar{\beta}_k &= -\beta_k, & \bar{\gamma}_k &= -\gamma_k. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Выражения (6.57), (6.58) при этом дают

$$\delta q = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\frac{b}{a} \right) \psi^-(\zeta) d\zeta + 2i \sum (\delta \gamma_k \psi_k^- + \gamma_k \delta \zeta_k \tau_k^-), \quad (6.134)$$

$$q = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{a} \psi^+(\zeta) d\zeta + 2i \sum \gamma_k \psi_k^+, \quad (6.135)$$

где

$$\begin{aligned} \psi^-(\zeta) &= \psi_2^2 - \psi_1^2, & \psi_k^- &= (\psi_2^2 - \psi_1^2)_k, & \tau_k^- &= \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2^2 - \psi_1^2)|_{\zeta_k}, \\ \psi^+(\zeta) &= \psi_2^2 + \psi_1^2, & \psi_k^+ &= (\psi_2^2 + \psi_1^2)_k. \end{aligned} \quad (6.136)$$

Функция $\psi^-(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$L_F \psi^-(\zeta) = \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q^2 + q_x \int_{\mp}^{+\infty} dy q \right) \psi^-(\zeta) = \zeta^2 \psi^-(\zeta). \quad (6.137)$$

Имеет место равенство

$$\psi_x^+(\zeta) = 2i\zeta \psi^-(\zeta) \quad (6.138)$$

Двойственные разложения (6.55), (6.56) сводятся к

$$\delta q = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \frac{\bar{b}}{a} \varphi^{-}(\zeta) d\zeta - 2i \sum (\delta \beta_k \varphi_k^{-} + \beta_k \delta \zeta_k \chi_k^{-}), \quad (6.139)$$

$$q = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{b}}{a} \varphi^{+}(\zeta) d\zeta + 2i \sum \beta_k \varphi_k^{+}. \quad (6.140)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi^{-}(\zeta) &= \varphi_2^2 - \varphi_1^2, & \varphi^{+}(\zeta) &= \varphi_2^2 + \varphi_1^2, & \varphi_k^{-} &= (\varphi_2^2 - \varphi_1^2)_{\zeta_k}, \\ \varphi_k^{+} &= (\varphi_2^2 + \varphi_1^2)_{\zeta_k}, & \chi_k' &= \frac{\partial}{\partial \zeta} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2)_{\zeta_k}. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Функции $\varphi^{-}(\zeta)$ и $\varphi^{+}(\zeta)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} L_F^A \varphi^{+}(\zeta) &= \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q^2 + q \int_{-\infty}^x dy q_y \right) \varphi^{+}(\zeta) = \zeta^2 \varphi^{+}(\zeta), \\ \varphi_x^{+}(\zeta) &= 2i \zeta \varphi^{-}(\zeta). \end{aligned} \quad (6.142)$$

Для любой целой функции $F(\zeta^2)$ эволюционное уравнение

$$q_t = i \frac{\partial}{\partial x} F(L_F^A) q, \quad (6.143)$$

как следует из (6.139), (6.140), (6.142), разделяется в пространстве данных рассеяния на выражения

$$\left(\frac{\bar{b}}{a} \right)_t = 2\zeta F(\zeta^2) \frac{\bar{b}}{a}, \quad \beta_{kt} = 2\zeta_k F(\zeta_k^2) \beta_k, \quad \zeta_{kt} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (6.144)$$

Например, для $F(\zeta^2) = -4i\zeta^2$ уравнение (6.143) является модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза

$$q_t + 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0.$$

С другой стороны, это уравнение может быть обобщено на сингулярные функции $F(\zeta^2)$. Если $F(\zeta^2) = i/4\zeta^2$, то получим

$$q_t = \frac{1}{2} (\varphi_2 \bar{\varphi}_2 - \varphi_1 \bar{\varphi}_1)_{\zeta=0} = -\frac{1}{2} \sin u, \quad (6.145)$$

где $u(x, t) = -2 \int_{-\infty}^x q(x, t) dx$. Здесь использованы формулы, полученные в [6.49].

С помощью соотношений ортогональности, которые приводятся в приложении В, можно показать, что симплектическая форма

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \delta q \wedge \int_{-\infty}^x \delta q dy \right\} dx \quad (6.146)$$

сохраняется при обратном преобразовании рассеяния и равна

$$\int_0^{+\infty} \delta\left(\frac{\ln aa^*}{-2\xi\pi}\right) \wedge \delta \operatorname{Arg} b(\xi) d\xi + \sum \delta(-\ln \zeta_k) \wedge \delta \ln b_k. \quad (6.147)$$

Переменные действие — угол суть

$$\frac{\ln aa^*}{-2\xi\pi} \quad (\text{при } \xi \text{ вещественных и положительных}), \quad -\ln \zeta_k \text{ и} \\ \operatorname{Arg} b(\xi), \quad \ln b_k \quad (6.148)$$

соответственно.

В [6.63] показано также, что

$$iF(L_F^A)q = \frac{\delta H}{\delta q},$$

где в случае дисперсионного соотношения

$$\Omega(\zeta) = \zeta F(\zeta^2) = \sum_0^{\infty} a_{2m+1} \zeta^{2m+1} \quad (6.149)$$

гамильтониан есть

$$H_{\Omega} = \sum_0^{\infty} a_{2m+1} C_{2m+1}. \quad (6.150)$$

Последовательность $\{C_r\}_{r=1}^{\infty}$ определена (6.25).

Для сингулярных дисперсионных соотношений гамильтониан определяется значениями функции $\ln a(\zeta)$ и ее производных, взятых в некоторой точке $\hat{\zeta}$. Для $F(\zeta^2) = i/4\zeta^2$, что, как было показано, отвечает уравнению sine-Gordon, гамильтониан есть

$$H = \frac{i}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \ln a \right)_{\zeta=0}; \quad (6.151)$$

согласно (6.21),

$$H = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_1 \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1 \varphi_2 + 1)_{\zeta=0} dx = \\ = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \cos \left(-2 \int_{-\infty}^x q dy \right) \right] dx. \quad (6.152)$$

Посредством (6.86) гамильтониан может быть выражен через данные рассеяния:

$$H = \sum_{\operatorname{Re} \zeta_k \neq 0} \left(-\frac{i}{2\zeta_k} + \frac{i}{2\zeta_k^*} \right) - \sum_{\eta_k = \eta_k^*} \frac{i}{2\eta_k} + \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\ln aa^*}{\xi^2} d\xi. \quad (6.153)$$

В этой формуле выделяются два типа собственных дискретных значений: ζ_k ($\operatorname{Re} \zeta_k \neq 0$) и $i\eta_k$. Подобное выделение связано с тем, что первому типу, т. е. парам $(\zeta_k, -\zeta_k^*)$, отвечают более

сложные солитоны, называемые бризерами. Теперь легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{d \ln b_k}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta (-\ln \zeta_k)} = -\frac{i}{2\zeta_k}, \\ \frac{d \ln b(\xi)}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \left(-\frac{\ln a a^*}{2\pi\xi}\right)} = -\frac{1}{2\xi}, \\ \frac{d(-\ln \zeta_k)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\ln a a^*}{-2\pi\zeta}\right) = 0. \end{aligned} \quad (6.154)$$

С учетом (6.133) это полностью согласуется с (6.144).

6.11. Уравнение Шрёдингера

Эволюционные уравнения, которые ассоциированы с уравнением Шрёдингера, могут быть найдены методом, полностью аналогичным изложенному выше. Рассмотрим разложение уравнения

$$v_{2xx} + [\zeta^2 + q(x, t)] v_2 = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x| + |x^2|) |q(x, t)| dx < \infty, \quad (6.155)$$

в систему

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\zeta v_1 &= q(x, t) v_2, \\ v_{2x} - i\zeta v_2 &= -v_1. \end{aligned} \quad (6.156)$$

Определим решения $\varphi(x, t, \zeta)$, $\bar{\varphi}(x, t, \zeta)$, $\psi(x, t, \zeta)$, $\bar{\psi}(x, t, \zeta)$ следующими асимптотиками:

| | $x = -\infty$ | $x = +\infty$ |
|-----------------|---|---|
| φ | $\begin{pmatrix} 2i\zeta \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}$ | $\begin{pmatrix} 2i\zeta a e^{-i\zeta x} \\ a e^{-i\zeta x} + b e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$ |
| $\bar{\varphi}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$ | $\begin{pmatrix} 2i\zeta \bar{b} e^{-i\zeta x} \\ \bar{a} e^{i\zeta x} + \bar{b} e^{-i\zeta x} \end{pmatrix}$ |
| ψ | $\begin{pmatrix} -2i\zeta \bar{b} e^{-i\zeta x} \\ a e^{i\zeta x} - \bar{b} e^{-i\zeta x} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$ |
| $\bar{\psi}$ | $\begin{pmatrix} 2i\zeta \bar{a} e^{-i\zeta x} \\ \bar{a} e^{-i\zeta x} - \bar{a} e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2i\zeta \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}$ |

Коэффициенты рассеяния $a(\zeta, t)$, $\bar{a}(\zeta, t)$, $b(\zeta, t)$, $\bar{b}(\zeta, t)$ определяются соотношениями между парами решений

$$\begin{aligned} \varphi &= a\bar{\varphi} + b\psi, & \psi &= a\bar{\varphi} - \bar{b}\varphi, \\ \bar{\varphi} &= \bar{a}\psi + \bar{b}\bar{\varphi}, & \bar{\psi} &= \bar{a}\varphi - b\bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (6.157)$$

При этом $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. Можно показать, что a, φ, ψ аналитичны в верхней полуплоскости переменной ζ , а $\bar{a}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}$ — в нижней. Нули $a(\zeta, t)$ и $\bar{a}(\zeta, t)$ являются дискретными собственными значениями (6.155) в верхней и соответственно нижней полуплоскостях ζ . Если $\varphi_2(\zeta)$ есть решение (6.155), то этому же уравнению удовлетворяет и $\varphi_2(-\zeta)$. Следовательно, имеет место $\bar{\varphi}_2(\zeta) = \varphi_2(-\zeta)$. Из этого можно вывести $\bar{a}(\zeta) = a(-\zeta)$, $\bar{b}(\zeta) = b(-\zeta)$, $\bar{\zeta}_k = -\zeta_k$, $k = 1, \dots, N$. Если $q(x, t)$ вещественная, то $a^*(\zeta^*) = a(-\zeta)$, $b^*(\zeta^*) = b(-\zeta)$ и все $\zeta_k = i\eta_k$, η_k — вещественные. Будем предполагать, что нули $a(\zeta, t)$ простые и не лежат на вещественной оси.

Линейные интегральные уравнения, позволяющие восстановить потенциал по данным рассеяния, содержат следующие комбинации этих данных:

$$\begin{aligned} S_+; \quad & \frac{b}{a}(\zeta, t), \zeta \text{ вещественное}; \quad (\zeta_k, \gamma_k), \quad k = 1, \dots, N, \\ S_-; \quad & \frac{\bar{b}}{a}(\zeta, t), \zeta \text{ вещественное}; \quad (\zeta_k, \beta_k), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.158)$$

Здесь $\gamma_k = b_k/a'_k$, $\beta_k = \bar{b}_k/a'_k = -1/b_k a'_k$, а b_k определено равенством $\varphi(\zeta_k, t) = b_k \psi(\zeta_k, t)$ и совпадает с аналитическим продолжением $b(\zeta, t)$ до ζ_k , если такое существует. Вычисления вариаций данных рассеяния приводят к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \delta S_+; \quad & \delta\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2i\zeta^2 a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta q \varphi_2^2 dx, \\ \gamma_k \delta \zeta_k &= \frac{1}{2i\zeta_k a_k'^2} \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta q \varphi_{2k}^2 dx, \\ \delta \gamma_k &= -\frac{1}{2i\zeta_k a_k'^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta q \left[\left(\frac{\partial \varphi_2^2}{\partial \zeta} \right)_k - \left(\frac{a_k''}{a_k'} + \frac{1}{\zeta_k} \right) \varphi_{2k}^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (6.159)$$

$$\begin{aligned} \delta S_-; \quad & \delta\left(\frac{\bar{b}}{a}\right) = \frac{1}{2i\zeta^2 a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta q \psi_2^2 dx, \\ \beta_k \delta \zeta_k &= \frac{1}{2i\zeta_k a_k'^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta q \psi_{2k}^2 dx, \\ \delta \beta_k &= \frac{1}{2i\zeta_k a_k'^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta q \left[\left(\frac{\partial \psi_2^2}{\partial \zeta} \right)_k - \left(\frac{a_k''}{a_k'} + \frac{1}{\zeta_k} \right) \psi_{2k}^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (6.160)$$

Удобно ввести следующие двойственные множества¹⁾ функций:

$$\Phi(x, t, \xi) = \varphi_2^2, \quad \xi \text{ вещественное;}$$

$$\Phi_k(x, t) = \varphi_2^2(\xi_k), \quad \chi_k(x, t) = \left(\frac{\partial \varphi_2^2}{\partial \xi} \right)_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (6.161)$$

и

$$\Psi(x, t, \xi) = \psi_2^2, \quad \xi \text{ вещественное;}$$

$$\Psi_k(x, t) = \psi_2^2(\xi_k), \quad \tau_k(x, t) = \left(\frac{\partial \psi_2^2}{\partial \xi} \right)_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (6.162)$$

Функции (6.161) удовлетворяют уравнению

$$L_S \Phi = \xi^2 \Phi, \quad L_S = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dy q_y. \quad (6.163)$$

Сопряженным множеством к (6.161) является

$$\Phi^A(x, t, \xi) = \frac{\partial \varphi_2^2}{\partial x}, \quad \Phi_k^A(x, t) = \left(\frac{\partial \varphi_2^2}{\partial x} \right)_k, \quad \chi_k^A(x, t) = \left(\frac{\partial^2 \varphi_2^2}{\partial \xi \partial x} \right)_k. \quad (6.164)$$

Эти функции удовлетворяют уравнению

$$L_S^A \Phi^A = \xi^2 \Phi^A + \frac{1}{2} q_x \varphi_2^2(R), \quad L_S^A = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q + \frac{1}{2} q_x \int_x^R dy; \quad (6.165)$$

применяя (6.156), мы рассматриваем предел $R \rightarrow +\infty$.

Множество функций (6.162) удовлетворяет уравнению

$$M_S \Psi = \xi^2 \Psi, \quad M_S = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} dy q_y. \quad (6.166)$$

Сопряженным к (6.162) является множество

$$\Psi^A(x, t, \xi) = \frac{\partial \psi_2^2}{\partial x}, \quad \Psi_k^A(x, t) = \left(\frac{\partial \psi_2^2}{\partial x} \right)_k, \quad \tau_k^A(x, t) = \left(\frac{\partial^2 \psi_2^2}{\partial x \partial \xi} \right)_k. \quad (6.167)$$

Его элементы удовлетворяют уравнениям

$$M_S^A \Psi^A = \xi^2 \Psi^A + \frac{1}{2} q_x \psi_2^2(-R), \quad M_S^A = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q - \frac{1}{2} q_x \int_{-R}^x dy, \quad (6.168)$$

где мы вновь рассматриваем предел $R \rightarrow +\infty$.

¹⁾ Так как $(\partial \varphi_2^2 / \partial \xi)|_{\xi_k}$ не стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, то это множество не может быть базисом для разложения произвольной функции $f(x)$.

В отличие от разд. 6.4 сопряженное и двойственное множества в этом случае различны. Более того, интеграл в сопряженном операторе не может использоваться свободно, так как подынтегральное выражение не содержит $r(x, t)$ или $q(x, t)$, что гарантировало бы интегрируемость. Тем не менее эти определения оказываются работоспособными, и читатель может найти много интересных деталей в доказательстве соотношений ортогональности, которые приводятся в приложении С.

Используя соотношения ортогональности, можно выписать разложения $q(x, t)$ и $\delta q(x, t)$ через эти базисы¹⁾:

$$q(x, t) = -\frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \frac{\bar{b}}{a} \Phi d\xi + 4 \sum_{k=1}^N \beta_k \xi_k \Phi_k, \quad (6.169)$$

$$q(x, t) = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \frac{b}{a} \Psi d\xi - 4 \sum_{k=1}^N \gamma_k \xi_k \Psi_k, \quad (6.170)$$

$$\delta q(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\frac{b}{a} \right) \Phi^A d\xi + 2i \sum_{k=1}^N (\delta \gamma_k \Phi_k^A + \gamma_k \delta \xi_k \chi_k^A), \quad (6.171)$$

$$\delta q(x, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\frac{\bar{b}}{a} \right) \Psi^A d\xi + 2i \sum_{k=1}^N (\delta \beta_k \Psi_k^A + \beta_k \delta \xi_k \tau_k^A). \quad (6.172)$$

Симплектическая форма также находится из соотношений ортогональности.

Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \delta q \wedge \int_{-\infty}^x dy \delta q \right) dx.$$

Применяя (6.171) для первого члена и интеграл по x от (6.172) для второго члена, получим (для простоты считая q вещественным)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \delta q \wedge \int_{-\infty}^x dy \delta q \right) dx = & \int_0^{\infty} -\frac{2\xi}{\pi} \delta \ln(1 - |R|^2) \wedge \delta \operatorname{Arg} b(\xi) + \\ & + \sum_{k=1}^N \delta(-2\eta_k^2) \wedge \delta \ln b_k. \end{aligned} \quad (6.173)$$

¹⁾ Отметим, что выражение для $q(x, t)$ не содержит членов с χ_k в (6.169) или τ_k в (6.170). Множества (6.161) и (6.162) можно использовать в качестве базисов для функций $f(x)$, для которых $\int_{-\infty}^{+\infty} f \Phi_{kx}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f \Psi_{kx}^2 = 0$, $k = 1, \dots, N$. То, что это справедливо для $f(x) = q(x, t)$, следует из (6С.1).

Здесь $R(\xi) = b/a$ есть коэффициент отражения. Следовательно, обратное преобразование рассеяния является каноническим. Оно переводит $q(x, t)$ в переменные действия $(-2(\xi/\pi)\ln(1 - |R|^2), -2\eta_k^2)$ и угла $(\text{Arg } b(\xi), \ln b_k)$. Отметим простоту предложенного вывода (6.173) в сравнении с выводом Захарова и Фаддеева [6.66].

Из (6.169)—(6.172) легко могут быть найдены уравнения, интегрируемые обратным преобразованием рассеяния. Рассмотрим (6.170). Применяя оператор $P_0(M_S)$, где P_0 целая функция, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} P_0(M_S) q = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta P_0(\zeta^2) \frac{b}{a} \Psi_{2x}^2 d\zeta - 4 \sum \zeta_k P_0(\zeta_k^2) \gamma_k \Psi_{2kx}^2.$$

Из сравнения с (6.171) вытекает, что уравнение

$$q_t + \frac{\partial}{\partial x} P_0(M_S) q = 0 \quad (6.174)$$

эквивалентно уравнениям для данных рассеяния

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{a}\right)_t &= -2i\zeta P_0(\zeta^2) \frac{b}{a}, \\ \gamma_{kt} &= -2i\zeta_k P_0(\zeta_k^2) \gamma_k, \\ \zeta_{kt} &= 0. \end{aligned} \quad (6.175)$$

Для того чтобы определить структуру гамильтониана, необходимо найти функционал H , вариация которого по q есть

$$\frac{\delta H}{\delta q} = -P_0(M_S) q. \quad (6.176)$$

Тогда из (6.174) следует

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}. \quad (6.177)$$

И вновь центральным звеном оказывается функционал $\ln a(\zeta)$. Из вариаций данных рассеяния следует

$$\frac{\delta \ln a}{\delta q} = \frac{1}{2i\zeta} \frac{\Psi_2 \Psi_2}{a}. \quad (6.178)$$

Имеем

$$(M_S - \zeta^2) \left(\frac{\Psi_2 \Psi_2}{a} - 1 \right) = \frac{q}{2}. \quad (6.179)$$

Выпишем разложение для решений (6.179) при больших ζ^2 , $\text{Im } \zeta > 0$,

$$\frac{\Psi_2 \Psi_2}{a} = 1 - \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(\zeta^2)^{m+1}} M_S^m q. \quad (6.180)$$

Сопоставляя разложение

$$\ln a = - \sum \frac{1}{\xi^n} C_n$$

и формулы (6.178), (6.180), найдем

$$\frac{\delta C_{2m+3}}{\delta q} = \frac{1}{4i} M_S^m q. \quad (6.181)$$

Таким образом, если дисперсионное соотношение имеет вид

$$\Omega(\xi) = i\xi P_0(\xi^2) = i\xi \sum_0^{\infty} a_{2m+1}(\xi^2)^m, \quad (6.182)$$

то соответствующий гамильтониан есть

$$H_{\Omega} = -4i \sum a_{2m+1} C_{2m+3}. \quad (6.183)$$

Для данных рассеяния имеет место формула

$$\ln a = \sum \ln \frac{\xi - i\eta_k}{\xi + i\eta_k} - \frac{\xi}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi^2 - \xi'^2} \ln(1 - |R|^2) d\xi', \quad (6.184)$$

поэтому потенциальные гамильтонианы C_{2m+1} даются выражением

$$C_{2m+1} = 2 \sum \frac{(i\eta_k)^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \xi^{2m} \ln(1 - |R|^2) d\xi. \quad (6.185)$$

Например, если $\Omega(\xi) = -4i\xi^3$, то

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (q_x^2 - 2q^3) dx = \frac{-32}{5} \sum \eta_k^5 - \frac{16}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^4 \ln(1 - |R|^2) d\xi,$$

что соответствует уравнению Кортевега — де Фриза.

6.12. Сингулярная теория возмущений

Результаты разд. 6.3, 6.11 позволяют непосредственно рассмотреть влияние возмущений. Предположим, что исследуемое уравнение является возмущением одного из интегрируемых потоков (6.65),

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} + 2\Omega(L^A) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix}_{\text{возм}}, \quad (6.186)$$

или (6.174),

$$q_t + \frac{\partial}{\partial x} P_0(M_S) q = \varepsilon (q_t)_{\text{возм}}. \quad (6.187)$$

Для вычисления скорости изменения данных рассеяния S_- в (6.21) или S_- или S_+ в (6.185) используются формулы (6.35) — (6.38) или (6.159) — (6.160). Интегрируемые члены $2\Omega(L^A)\left(\frac{r}{q}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial x}P_0(M_S)q$ допускают точные интегралы в соответствующих случаях, в то время как в общем случае член, отвечающий возмущению, таких интегралов не допускает. Например, из (6.160) следует

$$\zeta_{kt} = \frac{\varepsilon}{2i\zeta_k\beta_k(a'_k)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (q_t)_{\text{возм}} \psi_k^2 dx, \quad (6.188a)$$

$$\beta_{kt} + \left(\frac{a''_k}{a'_k} + \frac{1}{\zeta_k}\right)\beta_k\zeta_{kt} = 2i\zeta_k P_0(\zeta_k^2)\beta_k + \frac{\varepsilon}{2i\zeta_k(a'_k)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (q_t)_{\text{возм}} \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\zeta}\right)_k dx, \quad (6.188b)$$

$$\left(\frac{b^*}{a}\right)_t = 2i\zeta P_0(\zeta^2)\frac{b}{a} + \frac{\varepsilon}{2i\zeta a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (q_t)_{\text{возм}} \psi^2 dx. \quad (6.188c)$$

Влияние возмущений на данные рассеяния определяется прямо из решения (6.188) методом итераций. Обычно интерес представляют возмущения на временах порядка $t = O(\varepsilon^{-1})$, для которых претерпевают изменения такие величины, как амплитуда солитона, которые должны в невозмущенной системе оставаться неизменными. Для этого надо описать медленные изменения под влиянием возмущений переменных действия и угловых частот (производных угловых фаз). При решении (6.188) итерациями будем допускать медленные изменения во времени переменных действия невозмущенной системы. Выбор такого поведения переменных действия необходим для того, чтобы исключить секулярные члены (пропорциональные εt), входящие в асимптотическое разложение для данных рассеяния. Естественный вопрос, который в связи с этим возникает: эквивалентна ли эта процедура более непосредственному итерационному подходу — прямому использованию исходного уравнения? Конкретнее, пусть дано уравнение

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = \varepsilon(q_t)_{\text{возм}}.$$

Разлагая $q = q_0 + \varepsilon(\delta q) + \dots$, получим для возмущения δq уравнение

$$(\delta q)_t + \frac{\partial}{\partial x}[(\delta q)_{xx} + 6q_0\delta q] = (q_{0t})_{\text{возм}}, \quad (6.189)$$

Из (6.160) (напомним, что $\bar{b} = b^*$ для вещественных q) следует, что

$$\delta\left(\frac{\bar{b}}{a}\right) = \frac{1}{2i\zeta a^2} \int \delta q \psi_2^2 dx. \quad (6.190)$$

Аналогичное выражение имеет место для данных рассеяния, отвечающих дискретному спектру. Обращая (6.190), можно выразить δq через сопряженный базис Ψ^A , определенный (6.167), где все величины берутся для невозмущенного $q_0(x, t)$. Мы утверждаем, что в этом базисе левая часть (6.189) разделяется, и найденные выражения для изменения во времени совпадают с теми выражениями, которые бы получились после прямой подстановки $\frac{\bar{b}}{a} = \left(\frac{\bar{b}}{a}\right)_0 + \varepsilon \delta\left(\frac{\bar{b}}{a}\right)$ в (6.188с). Для того чтобы убедиться в этом, продифференцируем (6.190) по времени, помня, что невозмущенный базис ψ_2^2 зависит от времени. Фактически используется выражение

$$(\psi_2^2)_t = (2q_x - 8i\zeta^3) \psi_2^2 + (4\zeta^2 - 2q)(\psi_2^2)_x \quad (6.191)$$

и уравнение (6.166), которое может быть переписано в виде

$$-\frac{1}{4}(\psi_2^2)_{xxx} - \frac{1}{2}q_x \psi_2^2 - q(\psi_2^2)_x = \zeta^2(\psi_2^2)_x. \quad (6.192)$$

Из (6.189), (6.190) и (6.191) находим, что

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\bar{b}}{a}\right)_t &= \frac{1}{2i\zeta a^2} \int \left\{ \left[-\frac{\partial}{\partial x} [(\delta q)_{xx} + 6q_0 \delta q] + (q_t)_{\text{возм}} \right] \psi_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \delta q [2q_{0x} - 8i\zeta^3] \psi_2^2 + (4\zeta^2 - 2q_0)(\psi_2^2)_x \right\} dx = \\ &= -8i\zeta^3 \delta\left(\frac{\bar{b}}{a}\right) + \frac{1}{2i\zeta a^2} \int (q_t)_{\text{возм}} \psi_2^2 dx + R, \end{aligned} \quad (6.193)$$

где остаток R определяется формулой

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2i\zeta a^2} \int \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [(\delta q)_{xx} + 6q_0 \delta q] \cdot \psi_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \delta q [2q_{0x} \psi_2^2 + (4\zeta^2 - 2q_0)(\psi_2^2)_x] \right\} dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и учитывая (6.192), получим $R = 0$.

Прежде чем мы перейдем к конкретным примерам, следует сделать несколько замечаний. Сначала перечислим преимущества обратного преобразования рассеяния при исследованиях возмущений.

1) Естественно исследовать механические системы в переменных действия и угла или «нормальных мод», поскольку в этих переменных первоначально зацепленная система уравнений разделяется. Обратное преобразование рассеяния указывает, как произвести разделение и, значит, решить (6.189),

2) Исследуя медленные изменения главного члена аппроксимации переменных действия на временах порядка ε^{-1} , можно использовать законы сохранения. Это позволяет вычислить скорость медленных изменений угловых переменных. С точностью до главного члена, возмущение влияет на угловые переменные посредством медленных изменений переменных действия. Этот подход будет продемонстрирован тремя приведенными ниже примерами.

3) Возбуждение других нормальных мод под влиянием возмущений можно вычислить непосредственно. Будет показано, как эти результаты позволяют понять роль, которую играет «шельф» в возмущении уединенной волны для уравнения Кортевега — де Фриза.

Рассматриваемый метод обладает следующими недостатками:

1) Его трудно применять в тех случаях, когда невозмущенное состояние отличается от многосолитонных решений (этот недостаток еще в большей степени свойствен прямому методу).

2) Вычисление эффектов второго порядка и исследование поведения системы на временах, больших ε^{-1} , затруднительно. Это связано с тем, что в пределе, когда $t \rightarrow +\infty$ при фиксированном εt , зависимость собственных функций и данных рассеяния от ξ неравномерна. Например, для чисто многосолитонного состояния коэффициент отражения $R(\xi)$ для оператора Шрёдингера тождественно равен нулю. При включении возмущения сразу же имеем $R(0) = -1$.

3) Трудно проследить за возникновением солитонов. Более подробные комментарии будут сделаны при обсуждении поведения шельфа уравнения Кортевега — де Фриза на длинных временах $t \gg \varepsilon^{-1}$.

Прямой метод теории возмущения также имеет ряд серьезных недостатков.

1) В общем случае уравнение (6.189) не разделяется. Обычно, но не всегда, q_0 должна быть функцией некоторой определенной комбинации независимых переменных x и t . В тех случаях, когда это не так (например, при исследовании стабильности бризера, обсуждаемой ниже, где q_0 периодична по t), прямой метод требует усреднения по периоду переменной, отвечающей быстрому времени. Этот шаг не всегда оправдан (например, когда частота бризера порядка ε).

2) Прямой метод требует принятия анзаца (предварительного предположения) о форме старшего члена аппроксимации. Например, в исследованиях возмущений солитона уравнения Кортевега — де Фриза в ранних работах [6.67]—[6.71] принималось, что движение адиабатично, и бралась форма медленно меняющейся уединенной волны. Это неверно, и, как будет показано ниже, в главном члене решение должно содержать и

неадиабатическую часть (шельф). В действительности открытие шельфа и преодоление затруднений, на которые наталкивался прямой метод, было осуществлено с помощью обратного преобразования рассеяния. Конечно, когда ответ уже известен, то, внося необходимые поправки в процедуру, можно получить решение проблемы и с помощью прямого метода теории возмущений.

3) Бывает трудно интерпретировать секулярные члены.

Одно из преимуществ прямого метода теории возмущений заключается в том, что он применим и тогда, когда невозмущенная задача неинтегрируема.

Резюмируя, можно сказать, что, хотя рассматриваемый метод и его варианты, описываемые здесь, весьма мощны, не существует пригодного для всех ситуаций подхода к задачам теории возмущений. Каждый метод обеспечивает свой уровень понимания. Полезно исследовать трудности, возникшие в рамках одного метода, на языке другого. Следующие три примера служат не только для иллюстрации предлагаемого метода; каждый из них по-своему важен для его приложений в общем случае. Хочется подчеркнуть большое значение правильного использования законов сохранения. Другие важные примеры и работы, связанные с теорией возмущений, содержатся в работах [6.57], [6.72]—[6.93].

В первом примере рассматривается влияние внешних сил на солитонное решение нелинейного уравнения Шрёдингера. Рассмотрим уравнение

$$q_t - iq_{xx} - 2iq^2q^* = -pq - Ee^{i\Omega t}, \quad (6.194)$$

которое можно записать в виде (6.186) при $\Omega(\xi) = -2i\xi^2$, $\varepsilon(q_t)_{\text{возм}} = -pq - Ee^{i\Omega t}$, где p и E малы. Пусть невозмущенным состоянием является

$$q(x, t) = 2\eta \operatorname{sech} 2\eta(x - \bar{x}) \exp(-2i\xi x - 2i\bar{\sigma}t).$$

В отсутствие возмущений

$$\eta_t = \xi_t = 0, \quad \bar{\sigma}_t = 2(\xi^2 - \eta^2), \quad \bar{x}_t = -4\xi. \quad (6.195)$$

Для невозмущенных собственных функций справедливы следующие выражения. Определим

$$\sqrt{\gamma_k} \exp(i\xi_k x) = \lambda_k, \quad \sqrt{\gamma_k} \Psi_j(\zeta_k) = u_{jk}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2. \quad (6.196)$$

Тогда из формул (6.10), (6.69) следует, что

$$(I + B^*B)u_2^* = \lambda^*, \quad u_1 = -Bu_2^*, \quad B = \left[\frac{\lambda_j \lambda_k^*}{\xi_j - \xi_k^*} \right]. \quad (6.197)$$

Производные квадратов собственных функций даются выражениями

$$\begin{aligned} \gamma_k \left(\frac{\partial \psi_1^2}{\partial \xi} \right)_k &= 2ix (u_{1k})^2 + 2 \sum_{l=1}^N \frac{\lambda_k \lambda_l^* u_{1k} u_{2l}^*}{(\xi_l^* - \xi_k)^2}, \\ \gamma_k \left(\frac{\partial \psi_2^2}{\partial \xi} \right)_k &= 2ix (u_{2k})^2 - 2 \sum_{l=1}^N \frac{\lambda_k \lambda_l^* u_{2k} u_{1l}^*}{(\xi_l^* - \xi_k)^2}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.198)$$

Для вещественных ξ собственными функциями являются

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \end{pmatrix} = e^{i\xi x} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\xi_k^* - \xi} \begin{pmatrix} \lambda_k^* u_{2k}^* \\ -\lambda_k^* u_{1k}^* \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.199)$$

Односолитонному решению отвечает $a = (\xi - \xi_1)/(\xi - \xi_1^*)$, $\xi_1 = \xi_1 + i\eta_1$, $\gamma_1 = 2\eta_1 \exp(2\bar{\theta}_1 + 2i\bar{\sigma}_1)$ [или $\beta_1 = (\gamma_1 a_1')^{-1} = -2\eta_1 \exp(-2\bar{\theta}_1 - 2i\bar{\sigma}_1)$]. Из (6.197), (6.198) и (6.58) получаем

$$q(x, t) = 2\eta_1 \operatorname{sech} 2\theta_1 \exp \left[-2i \left(\sigma_1 + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (6.200)$$

где $\theta_1 = -\eta_1 x + \bar{\theta}_1$, $\delta_1 = \xi_1 x + \bar{\sigma}_1$. В случае вполне интегрируемой системы время t входит в решение только через θ_1 и σ_1 , поскольку $\xi_{1t} = 0$. Если $\Omega(\xi_1) = \Omega_r(\xi_1, \eta_1) + i\Omega_i(\xi_1, \eta_1)$, то, согласно (6.66), имеем

$$\bar{\theta}_{1t} = -\Omega_r, \quad \bar{\sigma}_{1t} = -\Omega_i. \quad (6.201)$$

Используя эти результаты, найдем

$$\eta_t = -2\rho\eta + \frac{\pi E}{2} \operatorname{sech} \frac{\xi\pi}{2\eta} \sin \chi, \quad \xi_t = -\frac{\pi E \xi}{2\eta} \operatorname{sech} \frac{\xi\pi}{2\eta} \sin \chi \quad (6.202)$$

(где $\chi = \Omega t + 2\xi\bar{x} + 2\bar{\theta}$). Отсюда можно показать, что $(\eta\xi)_t = -2\rho(\xi\eta)$. Это означает, что либо ξ , либо η стремится к нулю. Именно, если ξ слишком велико, то тогда имеется несоответствие между пространственной фазой солитона и внешнего поля, что приводит к затуханию солитона. С другой стороны, если ξ первоначально не слишком велико, то оно стремится к нулю, и пространственная фаза солитона стремится к фазе внешнего поля. Пусть $\xi = 0$. Тогда для χ_t получим уравнение

$$\chi_t = \Omega - 4\eta^2, \quad (6.203)$$

которое вместе с

$$\eta_t = -2\rho\eta + \pi E/2 \sin \chi \quad (6.204)$$

позволяет найти η и χ . Анализ фазовой плоскости показывает, что солитон *фазово-замкнут* по отношению к внешнему полю

(т. е. $\chi_t = 0$) лишь когда Ω принадлежит интервалу

$$0 < \Omega < \pi^2 E^2 / 4\rho^2. \quad (6.205)$$

С другой стороны, если $\Omega > 0$ и фиксированно, то на приложение внешней силы солитон не реагирует и проходит сквозь внешнее поле при амплитудах, больших $2\rho/\pi \sqrt{\Omega}$. В этом смысле солитон фазово-замкнут по отношению к внешнему полю и достигает амплитуды $\frac{1}{2} \sqrt{\Omega}$ совершенно независимо от величины E и ρ , пока выполняется (6.205).

Уравнения (6.202) могут быть просто получены [6.75] вычислением

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} qq^* dx \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} (qq_x^* - q_x q^*) dx$$

с помощью (6.194) и использованием невозмущенного солитона для определения членов правой части уравнений. Второе уравнение дает $\partial(\xi\eta)/\partial t = -2\rho(\xi\eta)$.

В первом примере были вычислены лишь изменения параметров солитона, и появление непрерывного спектра не учитывалось. Это не всегда обосновано, как будет показано во втором примере. В последующем мы попытаемся описать распространение солитона в мелком слое воды, глубина которого начинает медленно меняться начиная с некоторого места $t = t_0$. Соответствующее уравнение является возмущенной формой уравнения (6.1),

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = -\Gamma q, \quad \Gamma = O(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (6.206)$$

причем t отвечает положению солитона, x отвечает времени, а Γ пропорционально D_t , изменению глубины. Заметим, что если глубина убывает ($\Gamma < 0$), то $-\Gamma q$ приводит к увеличению волны. Невозмущенное многосолитонное состояние дается следующими уравнениями:

$$\psi_j + \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \exp i(\zeta_k + \zeta_j)x}{\zeta_k + \zeta_j} \psi_k = \exp(i\zeta_j x), \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.207a)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)_{\zeta_j} = ix\psi_j + \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \psi_k \exp i(\zeta_k + \zeta_j)x}{(\zeta_k + \zeta_j)^2}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.207b)$$

$$\psi(\zeta) = e^{i\zeta x} \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \psi_k \exp(i\zeta_k x)}{(\zeta_k + \zeta)} \right), \quad \zeta \text{ вещественно.} \quad (6.207c)$$

Если $N = 1$, $\zeta_1 = i\eta$, $\gamma_1 = 2i\eta e^{2\theta}$, то из (6.170) находим

$$q(x, t) = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(x - \bar{x}), \quad \eta_t = 0, \quad \bar{x}_t = 4\eta^2. \quad (6.208)$$

Опишем изменения (6.208) в области, где глубина уже непостоянна. Используя (6.207) и (6.198), получим

$$\eta_t = -\frac{2}{3}\Gamma\eta \quad (6.209)$$

и с точностью до главных членов

$$\bar{x}_t = 4\eta^2. \quad (6.210)$$

Оба уравнения могут быть легко проинтегрированы. Они дают вариацию амплитуды и положения солитона с глубиной. Наиболее интересно отметить, что (6.209) удовлетворяет только второму из трех локальных соотношений для массы, энергии и положения центра тяжести:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} q dx = -\Gamma \int_{-\infty}^{+\infty} q dx, \quad (6.211a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 dx = -2\Gamma \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 dx, \quad (6.211b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} xq dx = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 dx - \Gamma \int_{-\infty}^{+\infty} xq dx. \quad (6.211c)$$

Интегрируя каждое из соотношений, получим глобальные соотношения

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q dx = M(t_0) \exp \left[- \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(s) ds \right], \quad (6.212a)$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 dx = E(t_0) \exp \left[-2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(s) ds \right], \quad (6.212b)$$

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xq dx = \\ &= \left\{ G(t_0) + 3E(t_0) \int_{t_0}^t ds \left[\exp \left(- \int_{t_0}^s \Gamma(r) dr \right) \right] \right\} \exp \left[- \int_{t_0}^t \Gamma(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (6.212c)$$

Если $q(x, t)$ состоит только из солитонной части, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} q dx = \frac{\partial}{\partial t} 4\eta = -\frac{2}{3}\Gamma \int_{-\infty}^{+\infty} q dx.$$

Следовательно, если глубина уменьшается, то увеличение солитона поглощает лишь две трети дополнительной массы, воз-

никающей на единице длины из-за уменьшения глубины. Куда уходит оставшаяся масса воды?

Чтобы это понять, надо учесть, что под влиянием возмущения индивидуальные моды, разделенные в интегрируемых системах, зацепляются. Возмущение может возбуждать нормальные моды, так что они будут играть основную роль на больших временах. Вычисляя коэффициент отражения b/a из (6.188) при $P_0 = -4\xi^2$ и $b/a(\xi, t=0) = 0$, используя (6.207с) и то, что с точностью до первого порядка $a = (\xi - i\eta)/(\xi + i\eta)$, найдем

$$\xi \frac{b(\xi, t)}{a(\xi, t)} = - \frac{2\Gamma i}{3a \operatorname{sech}(\xi\pi/\eta)} \exp(-2i\xi x_0) \frac{\exp(-8i\xi\eta^2 t) - \exp(8i\xi^3 t)}{8i(\xi^2 + \eta^2)}. \quad (6.213)$$

С точностью до членов первого порядка здесь $\bar{x} = 4\eta^2 t + x_0$. Заметим, что коэффициент отражения имеет сингулярность типа $1/\xi$ при $\xi \rightarrow 0$, тогда как $\xi b/a$ (аналог обычного фурье-образа; см. (6.170)) растет линейно по t при $\xi \rightarrow 0$. Как нужно интерпретировать соотношение (6.213)? В том виде, в каком оно записано, не существует предела для быстрого времени при $t \rightarrow +\infty$. Ответ можно найти, если рассмотреть поведение системы в физическом пространстве и оценить вклад в $q(x, t)$ от непрерывного спектра, возбуждаемого солитоном. Обозначим этот вклад через $q_C(x, t)$. Из (6.170) следует

$$q_C(x, t) = \frac{4\Gamma}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi d\xi}{a(\xi) \operatorname{sh}(\xi\pi/\eta)} \left(1 - \frac{2\eta}{\eta - i\xi} \frac{e^{2\theta}}{1 + e^{2\theta}}\right)^2 \times \\ \times \exp 2i\xi(x - x_0) \frac{\exp(-8i\xi\eta^2 t) - \exp(8i\xi^3 t)}{8i\xi(\xi^2 + \eta^2)}, \quad (6.214)$$

где $\theta = -\eta(x - \bar{x})$. Из леммы Римана — Лебега вытекает, что необращающийся в нуль вклад в (6.214) дает лишь окрестность точки $\xi = 0$, поэтому можно написать

$$q_C(x, t) = \frac{\Gamma}{6\pi\eta} \operatorname{th}^2 \eta(x - \bar{x}) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin 2\xi(x - x_0 - 4\eta^2 t)}{2\xi} - \right. \\ \left. - \frac{\sin 2\xi(x - x_0 + 4\xi^2 t)}{2\xi} \right] d(2\xi). \quad (6.215)$$

Первый интеграл есть $\pi \operatorname{sgn}(x - x_0 - 4\eta^2 t)$. Второй является интегралом функции Эйри и равен π для $x \gg x_0$ и $-\pi$ для $x \ll x_0$. Переход между этими величинами осуществляется серией убывающих осцилляций. Следовательно, $q_C = 0$ вне области $x_0 < x < \bar{x}$, где \bar{x} — положение солитона и x_0 соответствует точке, в которой глубина начинает изменяться. В области $x_0 < x < \bar{x}$, $\bar{x} - x_0 \ll \varepsilon^{-1}$

$$q_C(x, t) = -\Gamma/3\eta, \quad x_0 < x < \bar{x}, \quad (6.216)$$

что представляет собой шельф слабо меняющейся амплитуды Γ , отражающей топографию дна. В этом шельфе и содержится излишняя масса воды, о которой шла речь выше. Можно найти скорость, с которой поглощается вода шельфом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} q_C dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^{\bar{x}} q_C dx = \bar{x}_t \cdot q_C = -\frac{1}{3} \Gamma 4\eta. \quad (6.217)$$

Вместе со скоростью поглощения добавочной воды солитоном это выражение дает общую скорость возникновения дополнительной массы. Указанные результаты приведены в [6.73], [6.76] и [6.84].

При описании движений на временах и расстояниях порядка ϵ^{-1} следует учитывать эволюцию шельфа с момента его первоначального формирования. Это может быть сделано непосредственно из (6.206). Задача сравнительно проста, поскольку шельф мал и его эволюция медленная. Она описывается соотношением $q_t = -\Gamma q$. В момент \bar{t} , когда солитон находится

в $\bar{x}(\bar{t}) = \int_{t_0}^{\bar{t}} 4\eta^2 dt$, $q_C(x, \bar{t})$, высота шельфа в точке x , дается (см. [6.83], [6.84], [6.93]) формулой

$$q_C(x, \bar{t}) = -\Gamma/3\eta(t) \exp \int_{\bar{t}}^{t(x)} \Gamma(s) ds, \quad 0 < x < \bar{x},$$

$$q_C(x, \bar{t}) = 0 \text{ в остальной области,} \quad (6.218)$$

причем $t(x)$ находится интегрированием уравнения $x_t = 4\eta^2$. Теперь можно показать, что локальные и глобальные законы сохранения выполняются точно. Действительно,

$$M(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_s dx + \int_0^{\bar{x}} q_C dx = 4\eta_0 \exp \left[-\frac{2}{3} \int_{t_0}^{\bar{t}} \Gamma(s) ds \right] +$$

$$+ 4\eta_0 \left\{ \left[\exp \left(-\int_{t_0}^{\bar{t}} \Gamma(s) ds \right) \right] - \exp \left[-\frac{2}{3} \int_{t_0}^{\bar{t}} \Gamma(s) ds \right] \right\} =$$

$$= 4\eta_0 \exp \left[-\int_{t_0}^{\bar{t}} \Gamma(s) ds \right], \quad (6.219)$$

что в точности совпадает с (6.212а). Равенство (6.212с) выполняется с точностью до второго порядка по Γ .

Приведенные результаты показывают, что шельф играет центральную роль в описании поведения системы; его необходимо

учитывать уже в старших членах. Хотя амплитуда шельфа порядка ε , но масса содержащейся в нем воды имеет порядок 1.

Следует заметить, что все эти результаты могут быть получены и непосредственно с помощью правильного использования законов сохранения [6.83—6.85]. Предположим, что $q(x, t)$ состоит из солитонной части $q_s = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(x - \bar{x})$ и шельфа $q_c(x, t)$. Из (2.211b) найдем $\eta_t = -(2/3)\Gamma\eta$. Из (2.211c) следует $\bar{x}_t = 4\eta^2$; в главном члене можно считать, что угловая переменная \bar{x} меняется адиабатически только под влиянием изменений $\eta_{\bar{x}}$. Используя закон сохранения локальной массы, по-

лучим $\partial/\partial t \int_0^{\bar{x}} q_c dx = \bar{x}_t q_c(\bar{x}) = -4\eta\Gamma/3$. Следовательно, в мо-

мент возникновения $q_c(\bar{x}) = -\Gamma/3\eta$. Используя рассуждения предпоследнего абзаца, можно получить (6.210) и описание глобальной структуры шельфа. Перечислим результаты, относящиеся к нескольким важным примерам.

Рассмотрим уравнение

$$q_t + 6q^r q_x + q_{xxx} = F, \quad (6.220)$$

где $q_s = \alpha \operatorname{sech}^{2/r} \eta(x - \bar{x})$, $\alpha^r = (r+1)(r+2)\eta^2/3r^2$. Пусть $r = 1$, $F = \varepsilon q$ (случай *a*). Тогда

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{2}{3}\varepsilon t\right), \quad \bar{x}_t = 4\eta^2, \quad q_c = \frac{\varepsilon \exp(\varepsilon t)}{3\eta_0 \left(1 + \frac{\varepsilon x}{3\eta_0^2}\right)^{5/4}}, \quad 0 < x < \bar{x}. \quad (6.221a)$$

Пусть теперь $r = 1$, $F = \varepsilon q_{xx}$ (случай *b*). Тогда

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{16\eta_0^2 \varepsilon t}{15}\right)^{-1/2}, \quad \bar{x}_t = 4\eta^2, \quad q_c = \frac{8\eta_0 \varepsilon}{15} \exp\left(-\frac{2\varepsilon x}{15}\right), \quad (6.221b)$$

$$0 < x < \bar{x}.$$

Наконец, пусть $r = 2$, $F = \varepsilon q$ (случай *c*). Тогда

$$\eta = \eta_0 \exp(2\varepsilon t), \quad \bar{x}_t = \eta^2, \quad q_c = \frac{\pi \varepsilon \exp(2\varepsilon t)}{\eta_0^2 + 4\varepsilon x}, \quad 0 < x < \bar{x}. \quad (6.221c)$$

Мы описали поведение системы в главном порядке на временах порядка ε^{-1} . Но процесс на этом не кончается, поскольку шельф продолжает развиваться. Уравнение (6.185) при $m = 1$ дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q dx = 4 \sum_{k=1}^N \eta_k + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^{2m} \ln(1 - |R|^2) d\xi, \quad (6.222)$$

где N есть число связанных состояний, соответствующих потенциалу $q(x, t)$. Если $\Gamma > 0$, то левая часть равенства есть

$4\eta_0 \exp\left(-\int_0^t \Gamma ds\right)$, первое слагаемое правой части равно

$4\eta_0 \exp\left(-\frac{2}{3}\int_0^t \Gamma ds\right)$. Значит, второе слагаемое правой части,

соответствующее вкладу непрерывного спектра, которое всегда отрицательно или равно нулю, может скомпенсировать разницу двух предшествующих членов. В случае $\Gamma < 0$, что соответствует уменьшению глубины, очевидна необходимость дополнительных связанных состояний, чтобы (6.222) могло выполняться (это замечание было впервые сделано Райтом [6.94]). Таким образом, представление о том, что уменьшению глубины в направлении распространения соответствует непрерывный спектр, неправильно. Ситуация аналогична спектральному разложению

для широкой (порядка $\int_{t_0}^t 4\eta^2 dt$, т. е. ϵ^{-1}) потенциальной ямы

глубины Γ (порядка ϵ). Для такого потенциала имеем дискретный набор собственных значений $(\eta_k)_1^K$, где K порядка $\epsilon^{-1/2}$, которые плотно заполняют интервал длины $\epsilon^{1/2}$ на положительной мнимой оси в комплексной плоскости. В теории возмущений наличие такого эффекта проявляется в том, что развитие $a(\xi, t)$ неравномерно по разложению. Карпман и Маслов [6.77] пытались объяснить этот эффект возникновения новых связанных состояний введением единственного дополнительного солитона, однако это не совсем правильно.

Затем при временах порядка $(1/\epsilon)\ln(1/\epsilon)$ становится заметным влияние нелинейного члена $6qq_x$. Заметим, что для таких времен и расстояний шельф полностью отрывается от первоначального солитона, т. е. если $\bar{x} \gg O(1/\epsilon)$, то в непосредственной близости за солитоном q_c имеет порядок $(\epsilon\bar{x})^{-5/4}$, $\exp(-2\epsilon\bar{x}/15)$ и $(\epsilon\bar{x})^{-1}$ в примерах a , b и c соответственно. Нелинейный член приводит к увеличению крутизны до тех пор, пока при $t = O((1/\epsilon)\ln(1/\epsilon))$ она не станет порядка единицы. Последующая эволюция шельфа вновь подчиняется возмущенному уравнению Кортевега — де Фриза, в котором $-\Gamma q$ является членом, описывающим возмущение. На фронте шельфа формируется цуг солитонов, который на промежуточных временах (длинных по сравнению с $(1/\epsilon)\ln(1/\epsilon)$, но коротких по сравнению с временем, за которое задняя часть цуга пройдет до конца шельфа) подобен решению, найденному Гуревичем и Питаевским [6.95] для описания развития разрывного начального профиля в виде постоянной ступеньки. Главный импульс этого цуга имеет вид $q = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta \left(x - 4\eta^2 t + \frac{3}{4} \ln t + \text{const}\right)$, где η^2 равно максимальной амплитуде разрыва. Когда задняя часть цуга достигает

конца шельфа, индивидуальные импульсы цуга превращаются в индивидуальные солитоны. Задача, рассматриваемая здесь, сложнее той, которая рассматривалась Гуревичем и Питаевским, поскольку, во-первых, шельф не постоянен по x и, во-вторых, возмущение влияет на эволюцию. Тем не менее описанная картина качественно остается правильной.

Случай $\Gamma > 0$ менее интересен. Солитон в этом случае медленно затухает, а шельф, затухая, превращается в цуг длинных диспергирующих волн малой амплитуды.

Третий пример демонстрирует применение теории возмущений для исследования длинноволновых дву- и трехмерных нестабильностей одномерных солитонов и бризеров. Рассмотрим (6.186) при $r = -q^*$ и $(\epsilon q_t)_{\text{возм}} = i\gamma q_{yy}$. Если $\Omega = -2i\xi^2$, то соответствующее уравнение $q_t - iq_{xx} - i\gamma q_{yy} - 2iq^2q^* = 0$ является нелинейным уравнением Шрёдингера в двумерном пространстве. Как уже отмечалось во введении, одномерный солитон

$$q(x, t) = 2\eta \operatorname{sech} 2\theta \exp[-2i(\sigma + \pi/4)], \quad (6.223)$$

где $\theta = -\eta x + \bar{\theta}$, $\sigma = \xi x + \bar{\sigma}$, $\bar{\theta}_t = -\Omega_r$, $\Omega(\xi + i\eta) = \Omega_r(\xi, \eta) + i\Omega_i(\xi, \eta)$, $\bar{\sigma}_t = -\Omega_t$, неустойчив. Мы исследуем эту неустойчивость, используя сокращенный вариант предлагаемой теории возмущений. Как отмечалось в каждом из предшествующих примеров, часто бывает достаточно найти медленные изменения переменных действия, предполагая, что в главном порядке влияние возмущения на угловые переменные проявляется только через изменение переменных действия. В таких случаях самый быстрый способ получить скорости изменения переменных действия — применить законы сохранения. Для (6.186) с q , данным (6.223), и $(\epsilon q_t)_{\text{возм}} = i\gamma q_{yy}$, при $|\gamma| \ll 1$ получим

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} qq^* dx = \frac{d}{dt} 4\eta = i\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} (q^* q_{yy} - qq_{yy}^*) dx, \quad (6.224)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (qq_x^* - q^*q_x) dx = \frac{d}{dt} 16i\xi\eta = 2i\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} (q_x^* q_{yy} + q_x q_{yy}^*) dx. \quad (6.225)$$

Пусть $\eta = \eta_0 + \eta_1(y, t)$, $\xi = \xi_0 + \xi_1(y, t)$, что влечет за собой $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}_1$. Тогда

$$\eta_{1t} = 4\gamma\eta_0\bar{\sigma}_{1yy} + 4\gamma\bar{\theta}_0\xi_{1yy}, \quad (6.226)$$

$$\xi_{1t} = -\frac{4}{3}\gamma\eta_0\bar{\theta}_{1yy} - \frac{4\gamma}{3}\eta_{1yy}\bar{\theta}_0. \quad (6.227)$$

Предполагая $\bar{\theta}_t = -\Omega_r$, $\bar{\sigma}_t = -\Omega_i$, найдем

$$\bar{\theta}_{1t} = -\Omega_{rt}\eta_1 - \Omega_{r\xi}\xi_1, \quad (6.228)$$

$$\bar{\sigma}_{1t} = -\Omega_{it}\eta_1 - \Omega_{i\xi}\xi_1, \quad (6.229)$$

где $\Omega_{r\eta} = (\partial/\partial\eta)\Omega_r$. Второй член правой части обоих уравнений (6.226) и (6.227) имеет указанный вид вследствие того, что $(\partial^2/\partial y^2)(\xi x + \bar{\sigma})$ (и $(\partial^2/\partial y^2)(-\eta x + \bar{\theta})$) содержит два члена, $\xi_{yy}x$ и $\bar{\sigma}_{yy}$ (соответственно $-\eta_{yy}x$, $\bar{\theta}_{yy}$), дающих вклад в интегралы в (6.224), (6.225). Эти вклады неважны при рассмотрении вопросов неустойчивости. Действительно, оказывается, что $(\partial/\partial t) = O\sqrt{|\gamma|}$ и, следовательно, η_1 , ξ_1 по порядку меньше на $\sqrt{|\gamma|}$, чем σ_1 и $\bar{\theta}_1$. Поэтому соответствующие члены опускаются (с последующей проверкой корректности этого шага). Заметим, что η , σ и ξ , $\bar{\theta}$ являются парами переменных типа действие — угол. Несложно показать, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\gamma\Omega_{i\eta}\eta_0\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\eta_1 = 4\gamma(-\Omega_r - \Omega_{i\xi}\eta_0)\frac{\partial^2\xi_1}{\partial y^2}, \quad (6.230)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{4}{3}\Omega_{r\xi}\eta_0\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\xi_1 = \frac{4\gamma}{3}(-\Omega_r + \Omega_{r\xi}\eta_0)\frac{\partial^2\eta_1}{\partial y^2}. \quad (6.231)$$

Полагая η_1 , $\xi_1 \sim \exp(iky + vt)$, мы получим (напомним, что Ω аналитична и, значит, удовлетворяет уравнениям Коши — Римана $\Omega_{r\xi} = \Omega_{i\eta}$, $\Omega_{r\eta} = -\Omega_{i\xi}$)

$$(\nu^2 - 4\gamma\Omega_{i\eta}\eta_0k^2)\left(\nu^2 + \frac{4\gamma}{3}\Omega_{r\xi}\eta_0k^2\right) = \frac{16\gamma^2}{3}(-\Omega_r - \Omega_{i\xi}\eta_0)^2k^4. \quad (6.232)$$

Это означает в главном порядке по k^2 , что либо

$$\nu^2 = 4\gamma\Omega_{i\eta}\eta_0k^2, \quad \text{либо} \quad \nu^2 = -4\gamma/3\Omega_{r\xi}\eta_0k^2. \quad (6.233)$$

Вспоминая, что $\Omega_{i\eta} = \Omega_{r\xi}$, получим, что при $4\gamma\Omega_{i\eta}\eta_0k^2 > 0$ η и $\bar{\sigma}$ неустойчивы, в то время как ξ и $\bar{\theta}$ устойчивы. Это приводит к взрывной неустойчивости. С другой стороны, если $4\gamma/3\Omega_{r\xi}\eta_0k^2 < 0$, то ξ и $\bar{\theta}$ неустойчивы. Этот случай Захаров и Рубенчик [6.52] называют змеевидной неустойчивостью, приводящей к скручиванию гребня солитона. Для $\Omega = -2i\xi^2$ скорость роста возмущения равна $4\sqrt{|\gamma|}\eta_0$ при $\gamma > 0$ и равна $4(\sqrt{|\gamma|}/3)\eta_0k$ при $\gamma < 0$. Двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера для волн в поле тяжести на глубокой воде соответствует $\gamma < 0$. Следовательно, для него имеет место змеевидная неустойчивость. В этом случае неустойчивость означает, что волновой пучок с волновым вектором \mathbf{k} возбуждает резонансные волны (с волновыми векторами $\mathbf{k} \pm \mathbf{K}$, где $2\mathbf{k} = \mathbf{k} + \mathbf{K} + \mathbf{k} - \mathbf{K}$, $\omega(2\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k} + \mathbf{K}) + \omega(\mathbf{k} - \mathbf{K})$), соответствующие восьмой резонансной кривой работы Филлипса [6.96].

Рассмотрим следующий класс неустойчивости — длинноволновые трансверсальные возмущения для уравнений, обсуждавшихся в разд. 6.10:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q} + \gamma u_{yy}, \quad q = \frac{-u_x}{2}. \quad (6.234)$$

Например, если $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} q^4 + \frac{1}{2} q_x^2 \right) dx$, то $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q} = -q_{xxx} - 6q^2 q_x$ и (6.234) описывает распространение импульсов в решетке с потенциалом $a\Delta^2 + b\Delta^4$ в направлении x , линейно связанных в трансверсальном направлении y . Солитон в этом случае имеет вид $q = 2 \operatorname{sech} 2\theta$, $\theta = -\eta(x - \bar{x})$, $\bar{x}_t = V = -\Omega_t/\eta$. Используя закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 dx = 2\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} qu_{yy} dx, \quad (6.235)$$

получим

$$\eta_{1t} = 4\gamma\eta_0\bar{x}_{1yy}, \quad (6.236)$$

$$\bar{x}_{1t} = V_\eta\eta_1. \quad (6.237)$$

Ясно, что неустойчивость имеет место, если $\gamma V_\eta < 0$. Для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза $V = 4\eta^2$, и, следовательно, критерием неустойчивости является $\gamma < 0$. Для уравнения sine-Gordon $V = -1/(4\eta^2)$, и вновь неустойчивость возникает только при $\gamma < 0$. Можно найти простое объяснение этого. Запишем $q_t = -u_{xt}/2$ в лабораторной системе координат $X = x + t$, $T = x - t$. При этом получим уравнение $q_t - \gamma u_{yy} = (1/2)u_{TT} - (1/2)u_{XX} - \gamma u_{yy}$. Если $\gamma < 0$, то уравнение в направлении y является эллиптическим.

Рассмотрим устойчивость солитона уравнения Кортевега — де Фриза и его высших аналогов относительно трансверсальных возмущений. Пусть

$$q_t = -\frac{\partial}{\partial x} P(M_S)q + \gamma\psi_{yy}, \quad q = \psi_x. \quad (6.238)$$

Если $P = -4M_S$ (где M_S определяется согласно (6.166)) и $\gamma = -\frac{3}{4}$, то (6.238) совпадает с (6.11), т. е. с уравнением Кадомцева — Петвиашвили. Пусть $q = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(x - \bar{x})$, $\psi = 4\eta \operatorname{th} \eta(x - \bar{x}) + K$. Используя закон сохранения энергии, получим

$$\begin{aligned} \eta_t &= 2\gamma \left(\frac{1}{4} \frac{K_{yy}}{K} - \eta_y \bar{x}_y - \frac{1}{3} \eta \bar{x}_{yy} \right), \\ \bar{x}_t &= V(\eta) = P(-\eta^2). \end{aligned} \quad (6.239)$$

Положим $\eta = \eta_0 + \eta_1(y, t)$, $\bar{x} = \bar{x}_0(t) + \bar{x}_1(y, t)$. Линеаризуя предшествующие уравнения, найдем

$$\begin{aligned} \eta_{1t} &= 2\gamma \left(\frac{1}{4} \frac{K_{yy}}{K} - \frac{1}{3} \eta_0 \bar{x}_{1yy} \right), \\ \bar{x}_{1t} &= V_\eta \eta_1. \end{aligned} \quad (6.240)$$

Для неустойчивости системы необходимо

$$\gamma V_\eta > 0. \quad (6.241)$$

Для (6.11) имеем $\gamma < 0$, $V_\eta = 4\eta > 0$.

В заключение мы приведем новые результаты. Одномерный бризер или 0л-импульс

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg}(\eta/\xi \operatorname{sech} 2\theta \sin 2\sigma), \quad (6.242)$$

являющийся решением уравнения sine-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} - Ku_{yy} + \sin u = 0, \quad (6.243)$$

неустойчив. В (6.242) имеем

$$\theta_x = \frac{-\eta}{2} \left(1 + \frac{1}{4\xi\xi^*}\right), \quad \sigma_x = \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{1}{4\xi\xi^*}\right), \quad \xi = \xi + i\eta, \quad (6.244a)$$

$$\theta_t = \frac{-\eta}{2} \left(1 - \frac{1}{4\xi\xi^*}\right), \quad \sigma_t = \frac{\xi}{2} \left(1 + \frac{1}{4\xi\xi^*}\right). \quad (6.244b)$$

Эти уравнения для постоянных ξ и η приводят к

$$\theta = \frac{-\eta}{2\sqrt{\xi\xi^*}} \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} + \hat{\theta}_0, \quad \sigma = \frac{\xi}{2\sqrt{\xi\xi^*}} \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} + \hat{\sigma}_0, \quad v = \frac{1-4\xi\xi^*}{1+4\xi\xi^*}. \quad (6.245)$$

Воспользуемся точными соотношениями

$$\frac{dl_1}{dt} = K \int_{-\infty}^{+\infty} u_{yy} u_t dx, \quad \frac{dl_2}{dt} = K \int_{-\infty}^{+\infty} u_{yy} u_x dx, \quad (6.246)$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2 + 4 \sin^2 u/2) dx = 16\eta \left(1 + \frac{\xi\xi^*}{4}\right),$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x u_t dx = 16\eta \left(1 - \frac{1}{4} \xi\xi^*\right).$$

Рассмотрим одномерное решение u_0 , даваемое (6.242) при $\xi = \xi_0 + i\eta_0$ и $\xi_0\xi_0^* = 1/4$ (стационарный бризер), $\theta_{0t} = 0$, $\sigma_{0t} = \xi_0$. Полагая $\eta = \eta_0 + \eta_1(y, t)$, $\xi = \xi_0 + \xi_1(y, t)$, $\theta = \theta_0(x, t) + \theta_1(x, y, t)$, $\sigma = \sigma_0(x, t) + \sigma_1(x, y, t)$ и вычисляя правые части (6.246) для $u = u_0$, получим

$$(\xi_0\eta_1 - \eta_0\xi_1)_t = \frac{\alpha^2 K}{2\eta_0} \sigma_{1yy} (\cos^2 2\sigma_0) J_1, \quad (6.247)$$

$$(\xi_0\xi_1 + \eta_0\eta_1)_t = \frac{-\alpha^2 K}{2\eta_0} \theta_{1yy} (\sin^2 2\sigma_0) J_2, \quad (6.248)$$

где $\alpha = \eta_0/\xi_0$, $D = y^2 + 2(1 + 2\alpha^2 \sin^2 2\sigma_0)y + 1$,

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{(1+y)^2 dy}{D^2} = \frac{1}{1+\lambda} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}) \right],$$

$$\lambda = 1 + 2\alpha^2 \sin^2 2\sigma_0, \quad J_2 = \int_0^\infty (1-y)^2 dy/D^2.$$

Здесь мы пренебрегли в θ_1 членами, пропорциональными x (корректность этого может быть обоснована).

Из (6.244b)

$$\theta_{1t} = -4\eta_0(\eta_0\eta_1 + \xi_0\xi_1), \quad (6.249)$$

$$\sigma_{1t} = -4\eta_0(\xi_0\eta_1 - \xi_1\eta_0). \quad (6.250)$$

Из (6.245), (6.250) можно увидеть, что изменения фазы θ и момента ($\xi_0\xi_1 + \eta_0\eta_1$) являются простыми осцилляциями. С другой стороны, из (6.247), (6.251) вытекает, что

$$\hat{\sigma}_{1tt} = 2(\alpha k)^2 (\cos^2 2\sigma_0) J_1 \hat{\sigma}_1, \quad (6.251)$$

где $K = 1$ и $\sigma_1 = \hat{\sigma}(t) \exp(iky)$. Так как J_1 положительно, то изменения фазы σ_1 и энергии растут со временем. Интерес представляют два предельных случая. Во-первых, если положить α малым, $J_1 = 1$, то уравнение sine-Gordon может быть аппроксимировано нелинейным уравнением Шрёдингера. Для этого представим $u = \exp(-it)\psi(x, t) + (*)$. Средняя (за период σ_0) скорость роста, полученная согласно (6.252), совпадает в точности с той, которая дается (6.233) при $\gamma = 1$ и $\Omega = -2i\zeta^2$. С другой стороны, при больших α величина σ_0 слабо меняется как функция t ($2\sigma_0$ приблизительно равно t/α). В этом случае, используя ВКБ-приближение, можно показать

$$\hat{\sigma}_1 \sim \frac{\left[1 + \alpha^2 \sin^2 \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{1/2} \right]}{\alpha k \cos(t/\alpha)} \exp(\pm \alpha k) \ln \left[\alpha \sin \frac{t}{\alpha} + \left(1 + \alpha^2 \sin^2 \frac{t}{\alpha} \right)^{1/2} \right]. \quad (6.252)$$

Когда α велико, ξ_0 является малым (напомним, что $\xi_0^2 + \eta_0^2 = 1/4$), поэтому бризер представляет собой пару кинка и антикинка. Действительно, при $\alpha \rightarrow \infty$ уравнение (6.242) дает

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} t \operatorname{sech} x, \quad (6.253)$$

что соответствует паре кинк — антикинк, элементы которой разделяются с логарифмической скоростью. Результаты, полностью согласующиеся с изложенными выше, были получены также в [6.91] прямыми методами теории возмущений вплоть до значений α порядка единицы.

6.13. Заключение

В этой статье мы хотели подчеркнуть тесную взаимосвязь между методом обратного преобразования рассеяния, идеями фурье-анализа и идеями гамильтоновой механики. Теперь должно быть ясно, что именно квадраты собственных функций для задач (6.16), (6.155), а не сами собственные функции играют центральную роль в рассматриваемой теории и образуют подходящий базис для различных разложений. Даже в линейном пределе (замечание 2, разд. 6.4) этот базис сводится к $(\exp(\pm i\xi x))^2$. В задачах с сингулярными дисперсионными соотношениями (разд. 6.5, 6.7—6.9) квадратичные произведения и квадраты собственных функций явно входят в уравнения в частных производных как независимые переменные и, следовательно, могут иметь непосредственную физическую интерпретацию.

Центральная роль квадратов собственных функций стала ясной нам еще в ходе первой попытки [6.23] построить возможно более широкий класс интегрируемых систем, связанных с задачей на собственные значения (6.16). В той работе вводилась дополнительно временная зависимость собственных функций v_1 и v_2 задачи (6.16) вида

$$\begin{aligned} v_{1t} &= A(x, t, \xi) v_1 + B(x, t, \xi) v_2, \\ v_{2t} &= C(x, t, \xi) v_1 - A(x, t, \xi) v_2. \end{aligned} \quad (6.254)$$

Для A, B, C были получены уравнения

$$A_x = qC - rB, \quad B_x + 2i\xi B = q_t - 2qA, \quad C_x - 2i\xi C = r_t + 2Ar. \quad (6.255)$$

Они следуют из приравнивания коэффициентов при v_1 и v_2 в выражениях для v_{1xt} , v_{1tx} и v_{2xt} , v_{2tx} , которые получаются после перекрестного дифференцирования уравнений (6.16), (6.219). Связь с квадратами собственных функций можно увидеть, если заметить, что решения однородных (A, B, C) уравнений (6.255) являются квадратичными произведениями v_1, v_2 . Следовательно, таким способом можно найти общие выражения для v_{1t} и v_{2t} . Если интересоваться более общими полиномиальными решениями, то удобнее следовать разд. 6.3.

Хотя подход, намеченный в [6.23], а также в предыдущем абзаце, не дает столь полной картины, как теория, развитая в настоящей работе, он обладает тем преимуществом, что позволяет найти некоторые из интегрируемых уравнений в частных производных даже без знания деталей прямой задачи рассеяния. Например, можно искать *полиномиальные* решения урав-

нений (6.255) в виде

$$A = \sum_{n=0}^N A_n(x, t) \zeta^n, \quad B = \sum_{n=0}^{N-1} B_n(x, t) \zeta^n, \quad C = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(x, t) \zeta^n \quad (6.256)$$

непосредственной подстановкой (6.256) в (6.255) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ζ . Приравнивание коэффициентов при ζ^0 дает эволюционное уравнение (соответствующее одному из уравнений класса I). Конечно, причины, по которым уравнения допускают некоторые упрощения, кажушиеся случайными, при таком подходе остаются неясными; например, все уравнения для A_{nt} могут быть один раз проинтегрированы. Тем не менее сам метод и вычисления весьма просты. Можно порекомендовать в качестве первого упражнения проверку того, может ли данная задача на собственные значения (например, $y'''' + (py)'' + qy = \lambda y$) быть использована для решения уравнений в частных производных.

В настоящем обзоре мы в первую очередь стремились охарактеризовать и классифицировать эволюционные уравнения, ассоциированные с задачами (6.16), (6.155). Полностью аналогичный подход может быть применен и к другим задачам на собственные значения. Например, простую и удобную классификацию допускают уравнения, связанные с задачей на собственные значения, предложенной Захаровым и Шабатом,

$$V_x = [\zeta R_0 + P(x, t)] V, \quad (6.257)$$

где R_0 — диагональная матрица с нулевым следом [6.57, 6.97].

С другой стороны, как уже отмечалось во введении, полный ответ на обратный вопрос о нахождении для данного эволюционного уравнения подходящей задачи на собственные значения, которая могла быть использована для его интегрирования, еще не получен, хотя заметный прогресс достигнут в этом направлении. Было бы очень важно найти легко проверяемые признаки, которые бы означали, что уравнение может быть проинтегрировано.

В качестве первого шага процедуры выявления этих признаков можно записать эволюционное уравнение в виде условия совместности

$$P_t - Q_x + [P, Q] = 0 \quad (6.258)$$

пары линейных уравнений

$$V_x = PV, \quad (6.259)$$

$$V_t = QV. \quad (6.260)$$

Здесь элементы матриц P и Q зависят от неизвестных зависимых переменных эволюционного уравнения (системы эволю-

ционных уравнений). Например, если нам дано (6.67) с $a_0 = a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -2i$, то напомним

$$P = X_1 + qX_2 + rX_3, \quad (6.261)$$

где X_1 , X_2 , X_3 подлежат определению. Подставим (6.261) в (6.258), используя выражения для q_t и r_t . Нашей целью будет решение получившихся уравнений относительно Q . Это можно делать с помощью итераций. Запишем $P_t = (P_t)_0 + (P_t)_1 + (P_t)_2$ по убывающим порядкам производных. Из $Q_{0,x} = (P_t)_0$ можно определить Q_0 . Величину Q_1 найдем из уравнения $(P_t)_1 + [P, Q_0] = Q_{1,x}$ и замкнем систему уравнений, положив $Q_2 = 0$. Это дает незамкнутую алгебру Ли, порожденную X_1 , X_2 , X_3 и постоянными матрицами, возникшими как константы интегрирования при решении уравнений относительно Q . Алгебру можно замкнуть, потребовав, чтобы все коммутаторы являлись линейными комбинациями X_1 , X_2 , X_3 и выполнялись все тождества Якоби. Для большинства уравнений возникающие алгебры имеют только тривиальные решения ($X_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, или $Q \sim P$; это отражает тот факт, что уравнение имеет локальный закон сохранения). Однако для интегрируемых уравнений существует бесконечно много нетривиальных алгебр. Например, для (6.67) найдем при произвольном ξ представление

$$X_1 = -i\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.262)$$

откуда следует, что (6.257) совпадает с (6.16). Для массивной модели Тирринга или для уравнения

$$q_t = iq_{xx} - (q^2r)_x, \quad r = \mp q^* \quad (6.263)$$

одно из представлений соответствующей алгебры имеет вид

$$X_1 = -i\xi^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.264)$$

Это означает, что для указанного уравнения система

$$\begin{aligned} v_{1,x} + i\xi^2 v_1 &= \xi q v_2, \\ v_{2,x} - i\xi^2 v_2 &= \xi r v_1 \end{aligned} \quad (6.265)$$

есть подходящая задача на собственные значения. Наличие свободного параметра ξ является решающим, поскольку оно позволяет строить решения эволюционного уравнения с помощью обратного преобразования рассеяния, построив отображение потенциалов

$$P(x, t) \rightarrow \Phi(x = +\infty, t, \xi)$$

в матрицы данных рассеяния Φ для каждого значения ξ . Эволюция во времени $\Phi(\infty, t, \xi)$ тривиальна.

Что же приводит к интегрируемости эволюционных уравнений? Ясно, что необходима согласованность членов с высокими производными, которые в меньшей степени нелинейны, с членами, содержащими высокую нелинейность, но производные меньших порядков. В уравнениях, которые были рассмотрены в этой главе, подобное соотношение было связано с тем, что эволюции величин определялись степенями операторов (ср. L^A в (6.54)). Эти операторы содержат оператор $\partial/\partial x$ и нелинейный оператор весьма специфическим образом. Когда ответ на поставленный вопрос будет найден, он должен также естественным образом показать, что если уравнение интегрируемо, то оно всегда принадлежит целому семейству коммутирующих потоков. Каждый из этих потоков порождается одним из бесконечного числа законов сохранения, используемым в качестве гамильтониана.

В заключение следует упомянуть некоторые недавние достижения. Суть метода обратного преобразования рассеяния состоит в том, что поскольку коэффициент $q(x, t)$, входящий в оператор $L = -\partial^2/\partial x^2 - q(x, t)$, изменяется в соответствии с определенным классом нелинейных уравнений, то спектр оператора L (рассматриваемого как оператор в $L^2(R)$, например) остается неизменным. Такие деформации называются *изоспектральными*. Можно задать вопрос о том, какие другие глобальные свойства операторов (или систем линейных операторов) сохраняются при деформациях. Два подхода следует отметить. Один содержится в [6.98], [6.99], а второй в [6.100]—[6.102]. Каждый из них будет проиллюстрирован на примере системы

$$V_x = \begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ q & i\zeta \end{pmatrix} V, \quad (6.267)$$

$$V_t = \begin{pmatrix} -4i\zeta^3 - 2iq^2\zeta & 4\zeta^2q + 2i\zeta q_x - q_{xx} + 2q^3 \\ 4\zeta^2q - 2i\zeta q_x - q_{xx} + 2q^3 & 4i\zeta^3 + 2iq^2\zeta \end{pmatrix} V. \quad (6.268)$$

Условие совместности этой системы дает модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$q_t - 6q^2q_x + q_{xxx} = 0. \quad (6.269)$$

Работы по обратному преобразованию рассматривали задачу для (6.267) на всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Эволюция данных рассеяния, определяемая (6.269), весьма проста. Предположим, что теперь нас интересуют стационарные решения $q(x, t) = q(x - ct)$ уравнения (6.269). Тогда (6.268) превращается ($X = x - ct$, $T = t$) в

$$V_T = \begin{pmatrix} -4i\zeta^3 - 2iq^2\zeta - i\zeta c & 4\zeta^2q + 2i\zeta q_x + v \\ 4\zeta^2q - 2i\zeta q_x + v & 4i\zeta^3 + 2iq^2\zeta + i\zeta c \end{pmatrix} V. \quad (6.270)$$

Уравнение (6.269) может быть один раз проинтегрировано до

$$q_{xx} - 2q^3 - cq = -v. \quad (6.271)$$

Пусть $V = \hat{V} \exp(\lambda T)$; так как q не зависит от T , то из (6.270) получим

$$Q\hat{V} = \lambda\hat{V}. \quad (6.272)$$

При этом \hat{V} удовлетворяет тому же самому уравнению (6.267) по переменной X . Метод Кричевера [6.98] и Новикова [6.99] основан на рассмотрении (6.272) вместо (6.267). Заметим, что условие существования \hat{V} влечет за собой

$$\det(Q - \lambda I) = 0. \quad (6.273)$$

Это уравнение определяет алгебраическую кривую $F(\zeta, \lambda) = 0$, которая является римановой поверхностью R рода 2. Легко показать, что R не зависит от X ; матрица $Q(X)$ подобна $Q(X_0)$ в силу того, что выполнено $Q_x = \left[\begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ q & i\zeta \end{pmatrix}, Q \right]$. Зависимость от X собственного вектора \hat{V} может быть найдена из (6.267), которое теперь играет роль вспомогательного уравнения. Оказывается, что если вектор $\hat{V}(\zeta, \lambda)$ нормирован на $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$ в обоих бесконечностях на R , то он является мероморфным на $R \setminus \infty$, причем полюсы не зависят от X . Таким образом, аналогом спектра в обратном преобразовании рассеяния в этом случае служит риманова поверхность. Аналогом переменных действия служат полюсы, поскольку они не зависят от X^1).

Обратная задача ставится следующим образом. Пусть заданы риманова поверхность R рода 2 с отмеченными точками в бесконечности и неспециальный дивизор полюсов $P_1 + P_2$. Требуется найти мероморфную на R вне точек $P = \infty$ функцию $V[P(\zeta, \lambda), X]$, такую, что $\hat{V} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}$ в бесконечно удаленных точках. Кроме того, \hat{V} должна иметь полюса в P_1 и P_2 , не зависящие от X . Такая функция удовлетворяет (6.272) и (6.267), и $q(x)$ может быть найдено при всех x .

Другим типом деформаций, сохраняющих определенные глобальные свойства системы (6.267), (6.268), являются дефор-

¹⁾ На самом деле правильная интерпретация этих данных такова: коэффициенты уравнения, определяющего риманову поверхность — это переменные типа действия, а полюсы суть угловые переменные (полюсы не зависят от X , но зависят от точки нормировки и поэтому изменяются при замене $X \rightarrow X - X_0$). — Прим. перев.

мации, связанные с автомодельными решениями уравнения (6.269). Пусть

$$q(x, t) = \frac{1}{(3t)^{1/3}} f \left[\frac{x}{(3t)^{1/3}} \right], \quad \eta = \frac{x}{(3t)^{1/3}}; \quad (6.274)$$

тогда $f(\eta)$ удовлетворяет уравнению Пенлеве второго типа

$$f'' = 2f^3 + \eta f - \nu. \quad (6.275)$$

Преобразование $V(x, t, \zeta) \rightarrow V(\eta, \xi)$, $\xi = \zeta(3t)^{1/3}$ приводит к системе

$$V_\eta = \begin{pmatrix} -i\xi & f(\eta) \\ f(\eta) & i\xi \end{pmatrix} V, \quad (6.276)$$

$$\xi V_\xi = \begin{pmatrix} -4i\xi^3 - 2if^2\xi - i\eta\xi & 4\xi^2f + 2i\xi f' + \nu \\ 4\xi^2f - 2i\xi f' + \nu & 4i\xi^3 + 2if^2\xi + i\eta\xi \end{pmatrix} V. \quad (6.277)$$

Рассмотрим теперь уравнение (6.277). Это система обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых зависят полиномиально от ξ и содержат f и ее первые две производные. Уравнение (6.277) имеет иррегулярную особую точку $\xi = \infty$ ранга 3 и регулярную особую точку $\xi = 0$. С каждой особой точкой связана матрица монодромии. Например, если $\Phi(\xi)$ — фундаментальная матрица решений (6.277) в окрестности $\xi = 0$, то, обходя точку $\xi = 0$, мы получим

$$\Phi(\xi e^{2\pi i}) = \Phi(\xi) J. \quad (6.278)$$

Обход точки $\xi = \infty$ более сложен, поскольку окрестность бесконечности разделена антистоксовскими линиями на шесть секторов, в каждом из которых фундаментальные матрицы $\Psi_j(\xi)$, $j = 1, \dots, 6$, имеют асимптотику $\begin{bmatrix} e^{-\theta} & 0 \\ 0 & e^\theta \end{bmatrix}$, где $\theta = 4i\xi^3/3 + i\eta\xi$. Связь матриц Ψ_{j+1} и Ψ_j дается множителями Стокса, т. е. $\Psi_{j+1} = \Psi_j A_j$, где $A_j = \begin{bmatrix} 1 & b_j \\ a_j & 1 \end{bmatrix}$ и либо a_j , либо b_j равно нулю. Матрицы A_j , J и матрица A , связывающая Ψ_1 и Φ ($\Psi_1 = \Phi A$), называются данными монодромии. Имеет место следующий замечательный результат.

Если $f(\eta)$ удовлетворяет (6.275), то данные монодромии являются постоянными. Это аналогично сохранению спектра в задачах, связанных с обратным преобразованием рассеяния, и сохранению римановых поверхностей, связанных с многофазными решениями эволюционных уравнений.

Обратная задача в этой ситуации такова. Для данных A_j , A , J можно построить матрицу с предписанными асимптотиками Ψ_j и Φ в окрестностях $\xi = \infty$ и $\xi = 0$ соответственно. (Это задача Римана — Гильберта.) При этом она будет удовлетворять одновременно уравнениям по ξ и η . Коэффициент

$f(\eta)$, входящий в эти уравнения (который лучше вычислять из второго члена асимптотического разложения $\Psi_j(\xi)$ в $\xi = \infty$), удовлетворяет уравнению (6.275). Подробности приведены в работе [6.101], а в [6.102] предложен новый тип решений — многофазные автомодельные решения эволюционных уравнений. Эти исследования были стимулированы работами Сато и его соавторов [6.100], результаты которых указывают на тесную связь между точно решаемыми моделями статистической физики (таких, как двумерная модель Изинга) и интегрируемыми эволюционными уравнениями.

В заключение я хочу посвятить эту статью моим коллегам Марку Абловицу, Дэвиду Каупу и Харви Сегуру из Кларксоновского колледжа и Генри Флашке из Университета штата Аризона и выразить им благодарность за многие плодотворные часы, которые мы провели вместе, открывая с удовольствием результаты, изложенные в ней.

Приложение А. Соотношения ортогональности

Определим внутреннее произведение

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx. \quad (6A.1)$$

Пусть $L\mathbf{u} = \zeta \mathbf{u}$ и $L^A \mathbf{v} = \zeta' \mathbf{v}$, тогда

$$\int_{-R}^R \mathbf{u}(\zeta) \cdot \mathbf{v}(\zeta') \, dx = \frac{1}{2i(\zeta - \zeta')} (u_2 v_2 - u_1 v_1) \Big|_{-R}^R. \quad (6A.2)$$

Из (6A.2) и (6.18) можно получить

$$\int_{-R}^R \Psi(\zeta) \cdot \Psi^A(\zeta') \, dx = \frac{a^2(\zeta) e^{-2i(\zeta - \zeta')R} - a^2(\zeta') e^{2i(\zeta - \zeta')R}}{2i(\zeta - \zeta')}. \quad (6A.3)$$

В свою очередь из (6A.3) вытекает

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\zeta), \Psi^A(\zeta') \rangle &= -\pi a^2 \delta(\zeta - \zeta'), \text{ если } \zeta, \zeta' \text{ вещественные,} \\ &= 0 \text{ в остальных точках.} \end{aligned} \quad (6A.4)$$

Заметим, что a^2 есть квадрат $a(\zeta, t)$. Это приводит к необходимости введения производных χ и τ в соответствующих базисах. Дифференцируя (6A.3) по ζ и ζ' , получим

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi(\zeta_k), \Psi^A(\zeta_j) \right\rangle = \left\langle \Psi(\zeta_k), \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi^A(\zeta_j) \right\rangle = -\frac{i}{2} a_k' a_k'' \delta_{kj}, \quad (6A.5)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi(\zeta_k), \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi^A(\zeta_j) \right\rangle = -\frac{i}{2} a_k' a_k'' \delta_{kj}. \quad (6A.6)$$

Аналогичные вычисления приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi}(\zeta), \bar{\Psi}^A(\zeta') \rangle &= \pi a^{-2} \delta(\zeta - \zeta') \text{ для вещественных } \zeta, \zeta', \\ &= 0 \text{ для остальных точек,} \end{aligned} \quad (6A.7)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{\Psi}(\zeta_k), \bar{\Psi}^A(\zeta_j) \right\rangle = \left\langle \bar{\Psi}(\zeta_k), \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{\Psi}(\zeta_j) \right\rangle = -\frac{i}{2} \bar{a}'_k \delta_{kj}, \quad (6A.8)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{\Psi}(\zeta_k), \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{\Psi}^A(\zeta_j) \right\rangle = -\frac{i}{2} \bar{a}'_k \bar{a}''_k \delta_{kj}. \quad (6A.9)$$

Все остальные внутренние произведения равны нулю.

Приложение В. Доказательство инвариантности формы (6.146)

Используя соотношения между $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ и φ , ψ (см. разд. 6.2), которые имеют место при $r = -q$, уравнение (6A.3) и соответствующее уравнение, в котором Ψ и Ψ^A заменены на $\bar{\Psi}$ и $\bar{\Psi}^A$, могут быть преобразованы к виду

$$\int_{-R}^R (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)(\zeta') (\psi_2^2 - \psi_1^2)(\zeta) dx = \frac{a^2(\zeta') e^{2i(\zeta - \zeta')R} - a^2(\zeta) e^{-2i(\zeta - \zeta')R}}{2i(\zeta - \zeta')}. \quad (6B.1)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)(\zeta') (\psi_2^2 - \psi_1^2)(\zeta) dx &= \\ &= \pi a^2 \delta(\zeta - \zeta') \text{ для вещественных } \zeta, \zeta', \\ &= 0 \text{ для остальных точек,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta'} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)(\zeta_k) (\psi_2^2 - \psi_1^2)(\zeta_j) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)(\zeta_j) \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2^2 - \psi_1^2)(\zeta_k) = \frac{i}{2} a'_k \delta_{kj}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta'} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)(\zeta_{ij}) \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2^2 - \psi_1^2)(\zeta_k) &= \frac{i}{2} a'_k a''_k \delta_{kj}. \end{aligned} \quad (6B.2)$$

Для доказательства инвариантности два-формы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \delta q \wedge \int_{-\infty}^x dy \delta q \right) dx \quad (6B.3)$$

возьмем δq согласно (6.134), а для $\int_{-\infty}^x dy \delta q$ проинтегрируем (6.139):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x dy \delta q &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \delta \left(\frac{\bar{b}}{a} \right) \left(\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2i\zeta} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{2i\zeta R}}{2i\zeta} \right) - \\ &- 2i \sum_1^N \delta \beta_k \left(\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2i\zeta} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{2i\zeta R}}{2i\zeta} \right)_{\zeta_k} - \\ &- 2i \sum_1^N \beta_k \delta \zeta_k \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2i\zeta} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{2i\zeta R}}{2i\zeta} \right)_{\zeta_k}. \quad (6B.4) \end{aligned}$$

Члены, связанные со значениями $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$ на $-\infty$, дают вклады, которыми можно пренебречь. Возможность пренебречь вкладом подынтегрального выражения следует из леммы Римана — Лебега и того, что оно равно нулю при $\zeta = 0$. Вклады членов, входящих в сумму, убывают экспоненциально, поскольку $\text{Im } \zeta_k > 0$. После несложных вычислений, использующих (6B.2), можно показать, что (6B.4) дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{2i\pi\zeta} \delta \ln b(\zeta) \wedge \ln aa^* + \sum_{k=1}^N \delta \ln b_k \wedge \delta \ln \zeta_k = \\ = \int_0^{\infty} \delta \frac{\ln aa^*}{-2\zeta\pi} \wedge \delta \text{Arg } b(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^N \delta(-\ln \zeta_k) \wedge \delta \ln b_k. \quad (6B.5) \end{aligned}$$

Следовательно, сопряженными переменными в пространстве данных рассеяния являются $\left[-\frac{1}{2\zeta\pi} \ln aa^*, \text{Arg } b(\zeta) \right]$ для положительных и вещественных ζ и $(-\ln \zeta_k, \ln b_k)$. Для специальных классов интегрируемых гамильтоновых систем, рассмотренных выше, эти пары являются переменными типа действие — угол.

Приложение С. Соотношения ортогональности и сохранение два-форм, связанных с уравнением Шрёдингера

Мы часто использовали следующие соотношения. Если (v_1, v_2) и (w_1, w_2) удовлетворяют (6.156), то

$$\begin{aligned} (v_2 w_2)_{xx} + 4\zeta^2 (v_2 w_2) + 2q (v_2 w_2) = 2(v_1 w_1 - i\zeta (v_1 w_2 + v_2 w_1)), \\ [v_1 w_1 - i\zeta (v_1 w_2 + v_2 w_1)]_x = -q (v_2 w_2). \quad (6C.1) \end{aligned}$$

В частности, если $v = \omega = \varphi$, то

$$\Phi_1^2 - 2i\zeta\Phi_1\Phi_2 = -q\Phi_2^2 + \int_{-\infty}^x q_y\Phi_2^2 dy \quad (6C.2)$$

и

$$-\frac{1}{4}(\Phi_2^2)_{xx} - \zeta^2\Phi_2^2 - q\Phi_2^2 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x q_y\Phi_2^2 = L_S\Phi_2^2 - \zeta^2\Phi_2^2 = 0. \quad (6C.3)$$

Сформулируем теперь и докажем соотношения ортогональности.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2^2(\zeta') \Psi_{2x}^2(\zeta) dx &= 2i\zeta\pi a^2 \delta(\zeta - \zeta') \quad \text{для вещественных } \zeta, \zeta', \\ &= 0 \quad \text{для остальных точек,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi_{2x}^2(\zeta_k) \Phi_2^2(\zeta_j) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{2x}^2(\zeta_k) \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi_2^2(\zeta_j) dx = -\zeta_k a_k'^2 \delta_{kj}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi_{2x}^2(\zeta_k) \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi_2^2(\zeta_j) dx &= -a_k'(\zeta_k a_k'' + a_k') \delta_{kj}. \end{aligned} \quad (6C.4)$$

Для двойственного множества получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2^2(\zeta) \Psi_{2x}^2(\zeta') dx &= -2i\zeta\pi a^2 \delta(\zeta - \zeta') \quad \text{для вещественных } \zeta, \zeta', \\ &= 0 \quad \text{для остальных точек,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi_2^2(\zeta_k) \Phi_2^2(\zeta_j) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{2x}^2(\zeta_k) \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi_{2x}^2(\zeta_j) dx = \zeta_k a_k'^2 \delta_{jk}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi_2^2(\zeta_k) \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi_{2x}^2(\zeta_j) dx &= a_k'(\zeta_k a_k'' + a_k') \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (6C.5)$$

Докажем соотношения (6C.4). Из уравнений (6.163), (6.165), которым удовлетворяют Φ_2^2 и Ψ_{2x}^2 , вытекает

$$\begin{aligned} (\zeta'^2 - \zeta^2) \int_{-R}^R \Phi_2^2(\zeta') \Psi_{2x}^2(\zeta) dx &= \\ &= \int_{-R}^R \left\{ \Psi_{2x}^2(\zeta) L_S \Phi_2^2(\zeta') - \Phi_2^2(\zeta') \left[L_S^A \Psi_{2x}^2(\zeta) - \frac{1}{2} q_x \Psi_{2x}^2(R) \right] \right\} dx = \\ &= \int_{-R}^R \left\{ \Psi_{2x}^2(\zeta) \left[-\frac{1}{4} \Phi_{2xx}^2(\zeta') - q\Phi_2^2(\zeta') + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x q_y \Phi_2^2(\zeta') dx \right] - \right. \\ &\quad \left. - \Phi_2^2(\zeta') \left[-\frac{1}{4} \Psi_{2xxx}^2(\zeta) - q\Psi_{2x}^2(\zeta) - \frac{1}{2} q_x \Psi_{2x}^2(\zeta) \right] \right\} dx. \end{aligned}$$

В этом выражении второй и пятый члены сокращаются. Дальнейшие сокращения можно произвести, если проинтегрировать по частям третий член. Используя (6С.2), получим

$$\begin{aligned}
 (\zeta'^2 - \zeta^2) \int_{-R}^R \varphi_2^2(\zeta') \psi_{2x}^2(\zeta) dx &= \\
 &= \frac{1}{4} [\varphi_2^2(\zeta') \psi_{2xx}^2(\zeta) - \varphi_{2x}^2(\zeta') \psi_{2x}^2(\zeta)]_{-R}^R + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{ \psi_2^2(\zeta) [\varphi_1^2(\zeta') - 2i\zeta' \varphi_1(\zeta') \varphi_2(\zeta')] \}_{x=R} = \\
 &= -\zeta(\zeta + \zeta') a^2(\zeta') e^{2i(\zeta - \zeta')R} + \zeta(\zeta + \zeta') a^2(\zeta) e^{-2i(\zeta - \zeta')R} - \\
 &\quad - \zeta(\zeta - \zeta') b^2(\zeta') e^{2i(\zeta + \zeta')R} + \zeta(\zeta - \zeta') \bar{b}^2(\zeta) e^{2i(\zeta + \zeta')R} - \\
 &\quad - 2(\zeta^2 - \zeta'^2) a(\zeta') b(\zeta') e^{2i\zeta R}.
 \end{aligned}$$

Третий и четвертый члены могут быть отброшены, поскольку при $R \rightarrow \infty$ они соответствуют (после деления на $\zeta^2 - \zeta'^2$) дельта-функциям Дирака $\delta(\zeta + \zeta')$, а $\bar{b}(\zeta) = b(-\zeta)$. Используя лемму Римана — Лебега, можно отбросить и последний член (обращающийся в нуль при $\text{Im}\{\zeta\} > 0$). Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \int_{-R}^R \varphi_2^2(\zeta') \psi_{2x}^2(\zeta) dx &= \frac{\zeta}{\zeta - \zeta'} a^2(\zeta') e^{2i(\zeta - \zeta')R} - \\
 &\quad - \frac{\zeta'}{\zeta - \zeta'} a^2(\zeta) e^{-2i(\zeta - \zeta')R} + O(1), \quad (6С.6)
 \end{aligned}$$

откуда уже легко выводится (6С.4). Аналогичным образом могут быть получены соотношения (6С.5).

Воспользуемся соотношениями ортогональности для построения симплектической структуры на пространстве данных рассеяния. Рассмотрим внешнее произведение (6.171) и интеграла от (6.172). Лемма Римана — Лебега и соотношения

$$\begin{aligned}
 b\bar{b} &= a\bar{a} - 1, \quad \bar{b}(\zeta) = b(-\zeta), \quad \bar{a}(\zeta) = a(-\zeta), \quad \gamma_k = \\
 &= b_k/a'_k, \quad \beta_k = \frac{-1}{b_k a'_k}
 \end{aligned}$$

дают

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \delta q \wedge \int_{-\infty}^x dy \delta q \right) dx &= \int_0^{\infty} \frac{2i\zeta}{\pi} \delta \ln \left(1 - \frac{b\bar{b}}{a\bar{a}} \right) \wedge \delta \ln b(\zeta) d\zeta + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^N \delta(2\xi_k^2) \wedge \delta \ln b_k. \quad (6С.7)
 \end{aligned}$$

Если $q(x, t)$ вещественно, то $\bar{b}(\zeta) = b^*(\zeta)$, $\bar{a}(\zeta) = a^*(\zeta)$ для вещественных ζ и $\zeta_k = i\eta_k$. Следовательно, выражение (6С.7) есть

$$\int_0^{\infty} -\frac{2\zeta}{\pi} \delta \ln(1 - |R|^2) \wedge \delta \operatorname{Arg} b(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^N \delta(-2\eta_k^2) \wedge \delta \ln b_k,$$

где $R(\zeta) = b/a$. Это дает канонически сопряженные переменные в пространстве данных рассеяния, и когда H (гамильтониан системы) принадлежит к классам интегрируемых систем, то эти переменные являются переменными типа действие — угол.

ЛИТЕРАТУРА

- 6.1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. — Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967).
- 6.2. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. — Comm. Pure Appl. Math. 27, 97 (1974).
- 6.3. Zabusky N. J., Kruskal M. D. — Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965).
- 6.4. Ablowitz M. J., Segur H. — Stud. Appl. Math. 45, 13—44 (1977).
- 6.5. Benney D. J. — J. Math. Phys. 57, 52 (1966).
- 6.6. Washimi H., Taniuti T. — Phys. Rev. Lett. 17, 996 (1966).
- 6.7. Leibovich S. — J. Fluid Mech. 42, 803—822 (1966).
- 6.8. Zabusky N. J. — Comp. Phys. Commun. 5, 1 (1973).
- 6.9. Fermi E., Pasta J., Ulam S. — Los Alamos Report LA 1940 (May 1955); Перепечатано в «Nonlinear Wave Motion», Lectures in Applied Mathematics, Vol. 15 (A. M. S. Providence, Rhode Island 1974), p. 1430.
- 6.10. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ 61 118 (1971).
- 6.11. Lax P. D. — Comm. Pure Appl. Math. 21, 467 (1968)
- 6.12. Гинзбург В. Л., Питаевский Л. П. — ЖЭТФ 34, 1240 (1958).
- 6.13. Питаевский Л. П. — ЖЭТФ 35 408 (1958)
- 6.14. Kelly P. L. — Phys. Rev. Lett. 15, 1005 (1965).
- 6.15. Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И. — Труды второго все-союзного симпозиума по нелинейной оптике. — М.: Наука, 1968.
- 6.16. Benney D. J., Newell A. S. — J. Math. Phys. 46, 133—139 (1967).
- 6.17. Newell A. S. — В кн.: Nonlinear Wave Motion, Lectures in Applied Mathematics, v. 15 (A. M. S., Providence, Rhode Island 1974), p. 157.
- 6.18. Benjamin T. B., Feir J. E. — J. Fluid Mech. 27, 417 (1966).
- 6.19. Lake B. M., Yuen H. C., Rungaldier H., Ferguson W. E. — J. Fluid Mech. 83, 49—74 (1977).
- 6.20. Wadati M. — J. Phys. Soc. Jpn. 32, 1681 (1972).
- 6.21. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — Phys. Rev. Lett. 30, 1462 (1973).
- 6.22. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — Phys. Rev. Lett. 31, 125 (1973).
- 6.23. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — Stud. Appl. Math. 53, 249 (1974).
- 6.24. Lamb G. L. — Phys. Rev. A9, 422 (1974).
- 6.25. Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А. Существенно нелинейные одномерные модели классической теории поля. — Препринт, 1974.
- 6.26. Miura R. — J. Math. Phys. 9, 1202 (1968).
- 6.27. Newell A. C. — В кн.: Bäcklund Transformations, ed. by Miura R. M., Lect. Notes in Math., v. 515 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1976).
- 6.28. Kruskal M. D. — В кн.: Nonlinear Wave Motion, Lectures in Applied Mathematics, v. 15 (A. M. S., Providence, Rhode Island 1974), p. 61.

- 6.29. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. — J. Math. Phys. 15, 1852 (1974).
- 6.30. McCall S. L., Hahn E.L. — Phys. Rev. Lett. 18, 908 (1967); Phys. Rev. 103, 183 (1969).
- 6.31. Kaup D. J., Newell A. C. — Lett. Nuovo Cimento 20, 325 (1977).
- 6.32. Flaschka H. — Teor. Phys. 51, 703 (1974); Phys. Rev. B9, 1924 (1974).
- 6.33. Moser J. (ed.) — Dynamical Systems, Theory and Applications, Lecture Notes in Physics, v. 38 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975).
- 6.34. Calogero F., препринт, 1975.
- 6.35. Ablowitz M. J., Ladik J. — J. Math. Phys. 16, 598 (1975).
- 6.36. Ablowitz M. J., Ladik J. — Stud. Appl. Math. 57, 1—12 (1977).
- 6.37. Захаров В. Е., Манаков С. В. — Письма в ЖЭТФ 18, 413 (1973), см. также препринт С. В. Манакова.
- 6.38. Kenyon K. — Proc. Roy. Soc. A299, 141 (1966).
- 6.39. Loguet-Higgins M. S., Gill A. E. — Proc. Roy. Soc. A299 120 (1966).
- 6.40. Newell A. C. — J. Fluid Mech. 35, 255 (1967).
- 6.41. Newell A. C. — J. Atmos. Sci. 29, 64 (1972).
- 6.42. Phillips O. M. — The dynamics of the Upper Ocean (Cambridge University Press, Cambridge, 1966).
- 6.43. Davidson R. C. — Methods in Nonlinear Plasma Theory (Academic Press, New York, 1972).
- 6.44. Kaup D. J. — Stud. Appl. Math. 54, 165 (1975).
- 6.45. Захаров В. К., Манаков С. В. — ЖЭТФ 71, 203 (1976).
- 6.46. Newell A. C. — SIAM J. Appl. Math. 35, 650—664 (1978).
- 6.47. Benney D. J. — Stud. Appl. Math. 56, 81 (1977).
- 6.48. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — Функци. анализ 8, 43 (1974).
- 6.49. Ablowitz M. J., Haberman R. — Phys. Rev. Lett. 35, 1195 (1975).
- 6.50. Calogero F. — Nuovo Cimento 16, 423 (1976).
- 6.51. Захаров В. Е. — ЖЭТФ 62, 1745 (1972).
- 6.52. Захаров В. Е., Рубенчик А. М. — ЖЭТФ 65, 997 (1973).
- 6.53. Захаров В. Е., Сынах В. С. — ЖЭТФ 68, 940 (1975).
- 6.54. Miles J. W. — J. Fluid Mech. 79, 157 (1977).
- 6.55. Miles J. W. — J. Fluid Mech. 79, 171 (1977).
- 6.56. Newell A. C., Redekopp L. G. — Phys. Rev. Lett. 38, 377 (1977).
- 6.57. Newell A. C. — В кн.: Proc. of Symposium on Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Inverse Spectral Transform, Rome 1977, ed. F. Calogero (Pitman, London 1978).
- 6.58. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. — ДАН СССР 192, 753 (1970).
- 6.59. Kaup D. J., Newell A. C. — Adv. Math. 31, 67—100 (1970).
- 6.60. Walfquist H. D., Estabrook F. D. — J. Math. Phys. 16, 1 (1975); см. также в кн. [6.57].
- 6.61. Miura R. M. (ed.) — Bäcklund Transformations, Lecture Notes in Mathematics, v. 515 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1976).
- 6.62. Morris H. D. — J. Math. Phys. 17, 1867 (1976).
- 6.63. Flaschka H., Newell A. C. — В кн.: Dynamical Systems, Theory and Applications, ed. J. Moser, Lectures Notes in Physics, v. 38 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1975), p. 355.
- 6.64. Kaup D. J. — J. Math. Anal. Appl. 54, 349 (1976).
- 6.65. Kaup D. J., Newell A. C. — SIAM J. Appl. Math. 34, 37—54 (1978).
- 6.66. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. — Функци. анализ и его приложения 5, 18 (1971).
- 6.67. Grimshaw R. — J. Fluid Mech. 42, 639—656 (1970); 46, 611—622 (1971).
- 6.68. Johnson R. S. — J. Fluid Mech. 60, 813—824 (1973); Proc. Camb. Philos. Soc. 73, 183 (1973).
- 6.69. Kakutani T. — J. Phys. Soc. Jpn. 30, 272 (1971).
- 6.70. Leibovich S., Randall J. D. — J. Fluid Mech. 58, 481—493 (1973).
- 6.71. Ott E., Sudan R. N. — Phys. Fluids 13, 1432 (1970).
- 6.72. Kaup D. J. — SIAM J. Appl. Math. 31, 121—133 (1976).
- 6.73. Kaup D. J., Newell A. C. — Proc. Roy. Soc. A361, 413—446 (1978).

- 6.74. Newell A. C. — Rocky Mount. J. Math. 8, 25—52 (1978).
- 6.75. Кауп D. J., Newell A. C. — Phys. Rev. B18, 5162—5167 (1978).
- 6.77. Карпман В. И., Маслов Е. М. — ЖЭТФ 75, 504 (1978).
- 6.78. Bishop A. R. — В кн.: Solitons in Action, ed. K. Longren, A. C. Scott (Academic Press, New York 1978), p. 61—68. [Имеется перевод: Бишоп А. Солитоны и физические возмущения. — В кн.: Солитоны в действии. — М.: Мир, 1981, с. 72—102.]
- 6.79. Fogel M. B., Trullinger S. E., Bishop A. R. — Phys. Rev. Lett 36, 1411—1414 (1976); Phys. Rev. B15, 1578—1592 (1977).
- 6.80. Keener J. P., McLaughlin D. W. — Phys. Rev. A16, 777—790 (1977); J. Math. Phys. 18, 2008—2013 (1977).
- 6.81. McLaughlin D. W., Scott A. C. — Appl. Phys. Lett. 30, 545—547 (1977).
- 6.82. McLaughlin D. W., Scott A. C. — В кн.: Solitons in Action, ed. K. Longren, A. C. Scott (Academic Press, New York, 1978), p. 201—256. [Имеется перевод: В кн.: Солитоны в действии. — М.: Мир, 1981, с. 210—268.]
- 6.83. Knickerbocher C. J., Newell A. C. — J. Fluid Mech. (1980).
- 6.84. Newell A. C. «Soliton Perturbations and Nonlinear Focussing». — В кн.: Solitons and Condensed Matter Physics, ed. A. R. Bishop, T. Schneider, Springer Series in Solid-State Sciences, v. 8 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1978), p. 52—68.
- 6.85. Knickerbocker C. J., Newell A. C. — Phys. Lett. 75A, 326 (1980).
- 6.86. Newell A. C. — J. Math. Phys. 18, 922 (1977).
- 6.87. Newell A. C. — J. Math. Phys. 19, 1126—1133 (1978).
- 6.88. Кауп D. J. «Solitons as Particles and the Effects of Perturbations». — В кн.: Significance of Nonlinearity in the Natural Sciences (Plenum Press, New York, 1977), p. 97—119.
- 6.89. Кауп D. J., Reimann A., Bers A. — Rev. Mod. Phys. 51, 275 (1979).
- 6.90. Кауп D. J. — Phys. Rev. A16, 704 (1977).
- 6.91. Kodama Y. — Ph. D. Thesis, Clacson (1979).
- 6.92. Kodama Y., Tanuiti T. — J. Phys. Soc. Jpn. 45, 298—310, 311—314 (1970).
- 6.93. Miles J. W. — J. Fluid Mech. 91, 181—190 (1979).
- 6.94. Wright J., частное сообщение.
- 6.95. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. — ЖЭТФ 65, 590 (1973).
- 6.96. Phillips O. M. — J. Fluid Mech. 9, 193 (1960).
- 6.97. Newell A. C. — Proc. Roy. Soc. A365, 283—311 (1979).
- 6.98. Кричевер И. М. — Функци. анализ и его приложения 11, 15—31 (1977).
- 6.99. Novikov S. P. — Rocky Mount. J. Math. 8, 83—94 (1978).
- 6.100. Sato S., Miwa T., Jimbo M. — Серия статей под общим названием «Hologomic Quantum Fields»: I, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14, 223—267 (1977); II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15, 201—278 (1979); III, IV, V, RIMS Preprints 260 (1978), 263 (1978), 267 (1978). Основные результаты, к которым мы отсылаем, содержатся в статье под номером III. См. также заметки «Studies on Hologomic Quantum Fields, I—XV». — Proc. Jpn. Acad.
- 6.101. Flaschka H., Newell A. C. — Monodromy and Spectrum Preserving Deformations, Part I.
- 6.102. Flaschka H., Newell A. C. — «Multiphase Similarity. Solutions in Integrable Evolution Equations». — В кн.: Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Sciences, ed. R. Stenberg (Marcel Dekker, New York, 1980).

7. МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В. Е. Захаров

7.1. Введение

Настоящая статья посвящена систематическому изложению различных методов получения уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Изложение начинается с элементарных методов и завершается методом одевания многомерных операторов. Многие результаты (это относится как к элементарной части, так и в особенности к методу одевания) являются оригинальными и публикуются впервые.

С тех пор, как в 1967 г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [7.1] проинтегрировали уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), открыв тем самым метод обратной задачи рассеяния, предпринимаются многочисленные попытки расширения сферы применимости этого метода. Актуальность этой проблематики объясняется как желанием глубже понять математическую природу операций, составляющих метод, так и надеждами относительно приложений метода в механике и теоретической физике. Насколько обширен класс уравнений, интегрируемых методом обратной задачи?

Фактически, некоторые возможности поиска интегрируемых уравнений были заложены уже в первой работе [7.1]. Они, однако, были реализованы лишь в 1973 г. в работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сегура [7.2]. До этого в 1968 г. появилась работа П. Лакса [7.3], предложившего упрощенное доказательство основного результата работы [7.1] и вместе с тем — первый метод поиска интегрируемых уравнений. Именно этим методом были найдены первые отличные от КдФ уравнения, интегрируемые при помощи обратной задачи рассеяния [7.4—7.6].

Оба упомянутых выше метода имеют преимущество элементарности, и в сущности сводятся к вычислению условий сохранения собственных чисел некоторой спектральной задачи при известном способе изменения собственных функций. Однако после получения интегрируемых уравнений для фактического их интегрирования, или хотя бы для вычисления отдельных их точных решений, необходимо развитие техники решения соответствующей обратной спектральной задачи, что вообще говоря может оказаться затруднительным. Эта трудность была отчасти преодолена в работе [7.7], в которой была продемонстрирована

возможность построения интегрируемых уравнений вместе с явным указанием способа вычисления их точных решений. Методика, использованная в [7.7], основывалась на следующей идее: линейные операторы с переменными коэффициентами могут быть получены при помощи операторов преобразования из операторов с постоянными коэффициентами (обычный способ решения обратных спектральных задач); при одновременном преобразовании двух таких постоянных операторов, имеющих совместный спектр, условие совместности примет вид нелинейного уравнения на коэффициенты. Это и есть искомое интегрируемое уравнение. Процедуру преобразования уравнения с постоянными коэффициентами в уравнения с переменными коэффициентами можно, используя язык теоретической физики, называть «одеванием», а весь соответствующий метод — методом одевания.

Важным преимуществом метода одевания является возможность распространения его на случай многих переменных, — частично избегая при этом неприятного вопроса о постановке и разрешимости соответствующей обратной спектральной задачи. Если говорить о применении к физике, то уже простейшие точные решения таких многомерных уравнений оказываются весьма интересными и информативными.

В приведенном ниже систематическом изложении различных методов получения уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, уровень строгости, вероятно, не везде удовлетворит чистого математика, — например, почти нигде не фиксируется, в каких функциональных пространствах должны рассматриваться найденные уравнения. В оправдание можно здесь сказать, что центральные и инвариантные моменты работы имеют алгебраический характер, на аналитические же аспекты очень влияет как конкретный выбор уравнения, так и выбор для него краевой задачи. При подборе примеров, иллюстрирующих тот или иной вариант метода, предпочтение оказано уравнениям, имеющим (на сегодняшний день) физический смысл.

7.2. Метод отыскания « $\hat{L} - \hat{A}$ » пар

Пусть $\psi(z)$ ($-\infty < z < \infty$) — комплексные вектор-функции ($\psi = \psi_1, \dots, \psi_N$), а L — дифференциальный оператор

$$\hat{L} = l_0 \frac{\partial^n}{\partial z^n} + u_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} + \dots + u_n. \quad (7.1)$$

Здесь l_0 — постоянная невырожденная матрица, а $u_i(z)$ — переменные матрицы, имеющие пределом на бесконечности постоянные матрицы l_i , причем

$$\|u_i(z) - l_i\| < c(\mu) e^{-\mu|z|} \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty \text{ и любом } \mu > 0. \quad (7.2)$$

Таким образом при $z \rightarrow \pm\infty$ $L \rightarrow L_0$, где

$$\hat{L}_0 = l_0 \frac{\partial^n}{\partial z^n} + l_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} + \dots + l_n,$$

а дифференциальное уравнение

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \quad (7.3)$$

при $z \rightarrow \infty$ вырождается в уравнение с постоянными коэффициентами

$$\hat{L}_0\psi = \lambda\psi. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) задает риманову поверхность

$$\det \left\| \sum_{k=0}^n l_k \xi^{n-k} - \lambda I \right\| = 0 \quad (7.5)$$

и имеет в точках общего положения на ней набор фундаментальных решений

$$\psi_i(\lambda, z) = \psi_i e^{i z}, \quad i = 1, \dots, nN. \quad (7.6)$$

Любое решение системы (7.3) имеет асимптотику

$$\psi \rightarrow \sum_{i=1}^{nN} X_i(\lambda) \psi_i(\lambda, z), \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad (7.7)$$

причем

$$X_i^+(\lambda) = \sum_{j=1}^{nN} S_{ij}(\lambda) X_j^-(\lambda); \quad (7.8)$$

матрицу $S_{ij}(\lambda)$, аналитичную в предположении (7.2) на римановой поверхности (7.5), мы назовем полной матрицей рассеяния оператора L . Она имеет существенную особенность в бесконечно-удаленной точке.

Если $S_{ij}(\lambda)$ является точной матрицей рассеяния для оператора L , то она очевидно является полной матрицей рассеяния и для оператора

$$\tilde{L} = e^{\gamma(z)} \hat{L}_0 e^{-\gamma(z)}, \quad (7.9)$$

где $\gamma(z)$ — произвольная матрица, коммутирующая с l_0 . Из всего класса L выберем канонический оператор, определяемый условием

$$u_1 = l_1 + [l_0, Q], \quad (7.10)$$

где $Q(z)$ — некоторая матричная функция z .

Пусть $S_{ij}(\lambda)$ — полная матрица рассеяния для некоторого канонического оператора L . Будем говорить, что для оператора L однозначно определена обратная задача рассеяния, если оператор L восстанавливается по $S_{ij}(\lambda)$ единственным образом. Заметим, что задача восстановления оператора L по произволь-

ной матрице $S_{ij}(\lambda)$ является сильно переопределенной. Это видно хотя бы из подсчета числа функциональных коэффициентов матрицы $S_{ij}(\lambda)$ (их n^2N^2), тогда как у оператора \mathcal{L} при учете (7.10) их не более $nN^2 - N$. Поэтому оператор \mathcal{L} восстанавливается по набору $q \leq nN^2 - N$ рациональных соотношений $T_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, q$, от элементов матрицы $S_{ij}(\lambda)$. При замене (7.2) условием более слабого убывания $u_i(z)$ при $z \rightarrow \pm\infty$ элементы $T_{ij}(\lambda)$ оказываются определенными лишь на некотором множестве на римановой поверхности (7.5) — в пределе на непрерывном и дискретном спектре оператора \mathcal{L} . Подробное обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей статьи.

Пусть коэффициенты канонического оператора \mathcal{L} с определенной задачей рассеяния зависят еще от параметра t , причем $\partial l_k / \partial t = 0$. Потребуем, чтобы полугруппа сдвигов по t , порождаемая дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \hat{A}\psi = 0, \quad (7.11)$$

где

$$\hat{A} = a_0 \frac{\partial^m}{\partial z^m} + v_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} + \dots + v_m$$

(a_0 — постоянная матрица), действовала при каждом фиксированном λ инвариантно на линейном многообразии всех решений уравнения (7.3). Это требование эквивалентно выполнению соотношения

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial t} = [\hat{\mathcal{L}}, \hat{A}]. \quad (7.12)$$

Коммутатор $[\mathcal{L}, \hat{A}]$ в общем случае представляет собой оператор $n + m$ порядка, и условие (7.12) эквивалентно $n + m + 1$ уравнению, первые три из которых имеют вид

$$\begin{aligned} [l_0, a_0] &= 0, \\ [l_0, v_1] - [a_0, u_1] &= 0, \\ [l_0, v_2] - [a_0, u_2] + [u_1, v_1] + nl_0v_{1z} - ma_0u_{1z} &= 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

При $z \rightarrow \pm\infty$ $\hat{A} \rightarrow \hat{A}_0$, причем очевидно $[\hat{\mathcal{L}}_0, \hat{A}_0] = 0$,

$$\hat{A}_0 = a_0 \frac{\partial^m}{\partial z^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} + \dots \quad (7.14)$$

Соотношение (7.14) можно рассматривать как уравнение для определения \hat{A}_0 . Это уравнение при любом \mathcal{L}_0 имеет решения — достаточно взять, например, в качестве \hat{A}_0 произвольный оператор с постоянными числовыми коэффициентами. Имеет место следующая

Теорема 1. Существует единственный оператор \hat{A} , имеющий своим пределом при $z \rightarrow \pm \infty$ оператор \hat{A}_0 .

Доказательство. Уравнения (7.13) определяют коэффициенты v_k рекуррентным образом. Для k и $k+1$ уравнения имеют вид

$$[l_0, v_k] = f_k, \quad (7.15)$$

$$[l_0, v_{k+1}] + [u_1, v_k] + nl_0 v_{kz} = f_{k+1}. \quad (7.16)$$

Здесь f_k, f_{k+1} зависят только от $v_i, i < k$. Уравнение (7.15) определяет v_k с точностью до q -мерного подпространства R матриц, коммутирующих с l_0 . Умножая уравнение (7.16) на $r_i \in R$ и вычисляя след, замечаем, что

$$\text{Tr} \{r_i [l_0, v_{k+1}]\} = \text{Tr} \{v_{k+1} [l_0, r_i]\} = 0.$$

В силу невырожденности l_0 получаем в результате систему q линейно независимых дифференциальных уравнений на коэффициенты матрицы v_{k+1} . Аналогичные уравнения имеют место для a_k , окончательный результат извлекается из оценки (7.12).

Из (7.13) легко получить, что если оператор A_0 канонический, то \hat{A} — также канонический.

Из (7.11) при $z \rightarrow \infty$ следует

$$\psi_i(\lambda, z, t) = \exp \left[- \int_0^t \hat{A}_0(\xi_i) dt + \xi_i z \right] \psi_i \quad (7.17)$$

(коэффициенты оператора \hat{A}_0 могут зависеть от времени!). Отсюда для матрицы S получаем

$$S_{ij}(\lambda, t) = \exp \left[\int_0^t \hat{A}_0(\xi_i) dt \right] S_{ij}(\lambda) \exp \left[- \int_0^t \hat{A}_0(\xi_j) dt \right]. \quad (7.18)$$

После определения оператора \hat{A} остальные n уравнений, следующие из (7.12), представляют собой нелинейную систему эволюционных уравнений относительно $u_i(t)$. Она может быть записана в символическом виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \mathcal{F}(u_i), \quad (7.19)$$

где $\mathcal{F}(u_i)$ — некоторый нелинейный оператор.

Из формулы (7.18) следует, что задачи Коши для этой системы может быть решена по следующей схеме:

$$u_i|_{t=0} \xrightarrow{I} S(\lambda, 0) \xrightarrow{II} S(\lambda, t) \xrightarrow{III} u(z, t). \quad (7.20)$$

На первом этапе схемы нужно по начальным данным $u_i(z, 0)$ найти матрицу $S(\lambda, 0)$ (точнее говоря, набор данных $T_i(\lambda)$, до-

статочный для восстановления $u_i(z)$, затем — на втором этапе — применить формулу (7.18), на третьем этапе — решить обратную задачу рассеяния, восстанавливающую $u_i(z, t)$. В этом и состоит метод обратной задачи.

Из сказанного выше ясно, что уравнение (7.19) восстанавливается по паре «затравочных» асимптотических операторов \hat{L}_0 и \hat{A}_0 .

Приведем ряд простейших примеров

$$1) \hat{L}_0 = J \frac{\partial}{\partial z}; \quad \hat{A}_0 = I \frac{\partial}{\partial z}; \quad [I, J] = 0;$$

$$\hat{L} = J \frac{\partial}{\partial z} + [J, Q]; \quad \hat{A} = I \frac{\partial}{\partial z} + [I, Q];$$

из (7.12) теперь следует ([7.8] — [7.10])

$$\frac{\partial}{\partial t} [J, Q] = IQ_z J - JQ_z I + [[J, Q], [I, Q]]. \quad (7.21)$$

$$2) \hat{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \hat{A}_0 = 4 \frac{\partial^3}{\partial z^3};$$

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - u; \quad \hat{A} = 4 \frac{\partial^3}{\partial z^3} - 3 \left(u \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} u \right);$$

$$u_t - 3(uu_z + u_z u) - u_{zzz} = 0. \quad (7.22)$$

$$3) \hat{L}_0 = \frac{\partial^3}{\partial z^3} + s^2 \frac{\partial}{\partial z}; \quad \hat{A}_0 = -i\beta \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\hat{L} = \frac{\partial^3}{\partial z^3} - \frac{3}{4} \left(u \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} u \right) + \frac{3}{2} \omega + s^2 \frac{\partial}{\partial z};$$

$$A = -i\beta \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - u \right);$$

$$u_t = 2\beta\omega_z;$$

$$\omega_t = \frac{2}{3}\beta \left(-\frac{1}{4} u_{zzz} - s^2 u_z + \frac{3}{4} uu_z + \frac{3}{4} u_z u \right). \quad (7.23)$$

О физическом смысле всех этих уравнений будет сказано ниже.

$$4) \hat{L}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}; \quad \hat{L} = \hat{L}_0 + \begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix};$$

$$a) \hat{A}_0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\hat{A} = \hat{A}_0 + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} rq & 0 \\ 0 & -qr \end{pmatrix};$$

$$r_t = \frac{\alpha}{2} (r_{zz} + rqr);$$

$$q_t = -\frac{\alpha}{2} (q_{zz} + qrq). \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \hat{A}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^3}{\partial z^3}; \\
 \hat{A} &= \hat{A}_0 - \frac{3}{4} \left[\begin{pmatrix} rq & -r_z \\ q_z & qr \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} rq & -r_z \\ q_z & qr \end{pmatrix} \right]; \\
 r_t &= -\frac{1}{2} r_{zzz} - \frac{3}{4} (r_z qr + rqr_z); \\
 q_t &= -\frac{1}{2} q_{zzz} - \frac{3}{4} (q_z rq + qrq_z).
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5) } \hat{L}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \hat{A}_0 = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}; \\
 \hat{L} &= \hat{L}_0 + u; \quad \hat{A} = \hat{A}_0 + \frac{1}{\beta} v; \\
 \beta u_t &= \frac{1}{2} \{l, u_t\} + [u, v]; \quad v_z = -\frac{1}{2} [l, u] \quad (\text{см. [7.11]}).
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

7.3. Элементарные многомерные обобщения

Наиболее простой способ осуществить многомерные обобщения рассмотренной выше процедуры — это рассмотреть при одномерном операторе \mathcal{L} многомерный оператор \hat{A} вида

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^N f_i(\hat{L}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{A}_1, \tag{7.27}$$

где $f_i(\hat{L})$ — некоторые фиксированные полиномы от оператора \hat{L} . Поскольку $[\hat{L}, f_i(\hat{L})] = 0$, основное уравнение Лакса примет теперь вид

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [\hat{L}, \hat{A}_1] + \sum_{i=1}^N f_i(\hat{L}) \frac{\partial \hat{L}}{\partial x_i} = 0. \tag{7.28}$$

Уравнение (7.28) отличается от (7.12) только присутствием свободного члена $f_i(\hat{L}) \partial \hat{L} / \partial x_i$ и очевидно в силу теоремы 1 однозначно определяет \mathcal{L} и \hat{A} по предельным значениям \hat{L}_0 и \hat{A}_0 . В качестве примера рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \hat{L} &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} + \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}; \\
 \hat{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{L} + \hat{L} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{A}_1; \\
 \hat{A}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Условие (7.28) приводит к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + i u u; \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -2 \frac{\partial}{\partial x} |u|^2.\end{aligned}\quad (7.29)$$

К сожалению, уравнение (7.29) и другие уравнения типа (7.28) не имеют пока физических применений (кроме [7.14]).

Более содержательные многомерные системы возникают, если оператор \hat{L} сам становится многомерным. Пусть, например, оба оператора \hat{L} и \hat{A} содержат производные по переменным x и z . Выписывая уравнения (7.13), мы уже на простейших примерах убеждаемся, что за счет появления смешанных производных по z число условий на коэффициенты операторов \hat{L} и \hat{A} превышает число этих коэффициентов, что делает невозможным буквальное повторение вышеизложенной процедуры. Единственным исключением является случай, когда оператор \hat{L} содержит только первую производную по переменной x (включение первой производной по x в оператор \hat{A} эквивалентно переопределению переменной t). При этом оператор \hat{L} заменяется на \hat{M} ,

$$\hat{M} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \hat{L}, \quad (7.30)$$

а уравнение (7.12) заменяется на уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \alpha \frac{\partial A}{\partial x} = [\hat{L}, \hat{A}]. \quad (7.31)$$

Расписанное по производным уравнение (7.31) отличается от системы (7.13) только добавлением производных v_{ix} в соответствующие строчки. Поэтому только несколько первых коэффициентов v_i может быть определено из алгебраических уравнений — для остальных возникают уравнения в частных производных. Теорема 1 может быть теперь переформулирована следующим образом: задание операторов \hat{A}_0 и $\hat{M}_0 = \alpha (\partial/\partial x) + \hat{L}_0$ однозначно определяет систему уравнений для коэффициентов операторов \hat{L} и \hat{A} . Приведем теперь примеры, обобщающие на двумерный случай примеры из разд. 7.1.

$$1) \hat{L}_0 = J \frac{\partial}{\partial z}; \quad \hat{A}_0 = I \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [J, Q] - \frac{\partial}{\partial x} [I, Q] = IQ_z J - JQ_z I + [[J, Q], [I, Q]]. \quad (7.32)$$

2) Операторы \hat{L} и \hat{A} из примера (7.22) дают при помощи формулы (7.31) систему

$$\begin{aligned}u_t &= 2\beta w_z, \\ w_t &= \frac{2}{3}\beta \left(-\frac{1}{4} u_{zzz} - s^2 u_z + \frac{3}{4} u u_z + \frac{3}{4} u_z u \right) + \alpha u_x.\end{aligned}\quad (7.33)$$

Система (7.33) является одновременно двумерным обобщением уравнений (7.22) и (7.23).

$$\begin{aligned}
 3) \quad \hat{L}_0 &= \begin{pmatrix} l & +1 \\ 0 & l \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}; \quad \hat{L} = \hat{L}_0 + \begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix}; \\
 \hat{A}_0 &= \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} a & +1 & 0 \\ 0 & & a \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (r \text{ и } q \text{ предполагаются скалярными}); \\
 \hat{A} &= \hat{A}_0 + \frac{1}{2\beta} \left[\begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} r_1 & \Phi_1 \\ \Phi_2 & r_2 \end{pmatrix}; \\
 \beta r_t &= \hat{D}_1 r + (r_1 - r_2) r; \\
 -\beta q_t &= \hat{D}_1 r + (r_1 - r_2) q; \\
 \hat{D}_2 (r_1 - r_2) + 2\hat{D}_1 r q &= 0; \\
 \hat{D}_1 &= \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(l - a) \alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (l^2 - 2la - a) \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\
 \hat{D}_2 &= \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha(2l + 1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + l(l + 1) \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{7.34}
 \end{aligned}$$

Очевидно, мы получили двумерное обобщение уравнений (7.24).

Рассмотрим спектральную задачу

$$\hat{M}\psi = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{L}\psi = \lambda \psi. \tag{7.35}$$

Легко видеть, однако, что эта задача обладает вырождением по λ . Действительно, преобразование $\psi = \exp(\lambda x / \alpha) \chi$ приводит уравнение (7.35) к уравнению

$$\alpha \frac{\partial \chi}{\partial x} + \hat{L}\chi = 0. \tag{7.36}$$

Рассмотрим уравнение (7.36) при $z \rightarrow \pm\infty$. Оно имеет решение вида

$$\chi_i(\lambda, z, x) = \chi_i \exp(\xi_i z - \lambda x / \alpha),$$

где (ξ, λ) расположены на римановой поверхности (7.5). При $z \rightarrow \pm\infty$ полное решение разлагается теперь в интеграл

$$\chi^\pm(z, x) = \int \sum_{i=1}^{nN} X_i^\pm(\lambda) \chi_i \exp(\xi_i z - \lambda x / \alpha) d\lambda.$$

Величины $X_i^\pm(\lambda)$ связаны линейным операторным соотношением

$$X_i^+(\lambda) = \int \sum_{j=1}^{nN} S_{ij}(\lambda, \lambda') X_j^-(\lambda') d\lambda'.$$

Операторная матрица $S_{ij}(\lambda, \lambda')$ представляет теперь полную матрицу рассеяния, и обратная задача состоит в восстановле-

нии коэффициентов оператора \mathcal{L} по матрице $S_{ij}(\lambda, \lambda')$. Возможность этого восстановления в ряде случаев строго доказана [7.15]. Зависимость оператора $S_{ij}(\lambda, \lambda')$ от времени t восстанавливается из уравнения

$$S_{ij}(\lambda, \lambda', t) = \exp \left[\int_0^t A(\xi_j) dt \right] S_{ij}(\lambda, \lambda', 0) \exp \left[- \int_0^t A(\xi'_j) dt \right]. \quad (7.37)$$

Если коэффициенты операторов \mathcal{L} и $\hat{\mathcal{A}}$ не зависят от x , то

$$S_{ij}(\lambda, \lambda', t) = S_{ij}(\lambda) \delta(\lambda - \lambda'),$$

и мы приходим к формуле (7.18).

Заметим еще, что уравнение (7.31) можно рассматривать как условие совместности уравнения (7.11) и уравнения

$$\hat{M}\psi = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{L}\psi = 0. \quad (7.38)$$

7.4. Одевание « $\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{A}}$ » пар

До сих пор мы занимались только отысканием уравнений, в принципе интегрируемых методом обратной задачи. В настоящем разделе мы опишем способ построения их точных решений, не использующий уравнений обратной задачи рассеяния. Как и прежде, мы стартуем с «затравочных» или «голых» операторов \hat{L}_0, \hat{A}_0 . Пусть \hat{K}^+ — вольтерровский справа интегральный оператор, определенный на том же пространстве функций, что и \hat{L}_0 ,

$$\hat{K}^+ \psi = \int_z^\infty K^+(z, z') \psi(z') dz'. \quad (7.39)$$

В силу известного свойства вольтерровских операторов, оператор $1 + \hat{K}^+$ является обратимым. Преобразуем оператор \hat{L}_0 при помощи $1 + \hat{K}^+$, т. е. рассмотрим оператор

$$\hat{L} = (1 + \hat{K}^+) \hat{L}_0 (1 + \hat{K}^+)^{-1}. \quad (7.40)$$

Вообще говоря, оператор \hat{L} состоит из двух частей — дифференциального оператора с переменными, зависящими от \hat{K}^+ коэффициентами, и интегрального вольтерровского справа оператора (ядро оператора \hat{K}^+ предполагается достаточное число раз дифференцируемым). Однако, можно найти такие \hat{K}^+ , что интегральная часть в \hat{L} обратится в нуль.

Для этого рассмотрим фредгольмов оператор F ,

$$\hat{F}\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, z') \psi(z') dz',$$

также обладающий сколь угодно гладким ядром, и произведем факторизацию этого оператора, то есть представим его в виде произведения двух вольтерровских в разные стороны операторов

$$1 + \hat{F} = (1 + \hat{K}^+)^{-1} (1 + \hat{K}^-),$$

$$\hat{K}^- \psi = \int_{-\infty}^z K^-(z, z') \psi(z') dz'. \quad (7.41)$$

Операторы \hat{K}^\pm можно назвать вольтерровскими факторами оператора \hat{F} .

Среди всех операторов \hat{F} нас будут интересовать коммутирующие с дифференциальными операторами. Пусть, например, оператор \hat{F} коммутирует с оператором $\hat{M}_0 = \alpha \partial / \partial x + \hat{L}_0$, т. е.

$$\hat{F} \hat{M}_0 - \hat{M}_0 \hat{F} = 0. \quad (7.42)$$

Применяя соотношение (7.42) ко всем функциям ψ и интегрируя по частям выражение $\hat{F} \hat{M}_0 \psi$, получим дифференциальное уравнение на ядро оператора \hat{F}

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{k=0}^n \left[l_k \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} F + (-1)^{k+1} \frac{\partial^{n-k}}{\partial z'^{n-k}} F l_k \right] = 0. \quad (7.43)$$

Эквивалентное условию коммутативности (7.42) уравнение (7.43) можно записать в символическом виде

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{L}_0 F - F \hat{L}_0^+ = 0. \quad (7.44)$$

Выражение $F \hat{L}_0^+$ означает, что оператор \hat{L}_0^+ — сопряженный к \hat{L}_0 , дифференцирование — по переменной z' , а матричные коэффициенты умножаются на F справа.

Рассматривать коммутирующие с \hat{M}_0 операторы \hat{F} важно потому, что имеет место

Теорема 2. Если оператор $(1 + \hat{F})$ коммутирует с дифференциальным оператором \hat{M}_0 и обратим, то его вольтерровские факторы $(1 + \hat{K}^\pm)$ преобразуют \hat{M}_0 в один и тот же чисто дифференциальный оператор \hat{M} .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \hat{M} &= (1 + \hat{K}^+) \hat{M}_0 (1 + \hat{K}^+)^{-1} = \\ &= (1 + \hat{K}^-) (1 + \hat{F})^{-1} \hat{M}_0 (1 + \hat{F}) (1 + \hat{K}^-)^{-1} = \\ &= (1 + \hat{K}^-) \hat{M}_0 (1 + \hat{K}^-)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Из (7.45) следует, что операторы $(1 + \hat{K}^\pm)$ преобразуют оператор \hat{M}_0 к одному и тому же оператору \hat{M} . Следовательно, этот

оператор чисто дифференциальный, и его интегральные вольтерровские составляющие равны нулю.

Коэффициенты оператора \hat{M} можно вычислить из соотношения

$$\hat{M}(1 + \hat{K}^+) = (1 + \hat{K}^+) \hat{M}_0. \quad (7.46)$$

Расписывая (7.46) в явном виде, легко вычислить коэффициенты оператора \hat{M} в явном виде

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \hat{L}, \text{ причем } u_1(z) = [l_0, \xi_0] + l_1, \\ u_2(z) &= (n-1)l_0 \frac{d\xi_0}{dz} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\xi_0}{dz}, l_0 \right\} + \frac{1}{2} [l_0, \xi_1] + u_1 \xi_0 + [l_1, \xi_0]. \end{aligned} \quad (7.47)$$

В этих формулах

$$\xi_i(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z'} \right)^i K(z, z') \Big|_{z=z'}. \quad (7.48)$$

Таким образом, n коэффициентов оператора \mathcal{L} оказались выражены через n величин $\xi_i(z)$. Если при этом оператор L_0 канонический, то \mathcal{L} также канонический. Процедура явного построения операторов \hat{L}, \hat{M} по операторам \hat{L}_0, \hat{M}_0 может быть названа одеванием операторов L_0, M_0 . Аналогичным образом можно произвести одевание оператора $\partial/\partial t + \hat{A}_0$. В результате его одевания возникает оператор $\partial/\partial t + \hat{A}$, где коэффициенты v_i оператора \hat{A} выражаются через ξ_i по формулам, аналогичным (7.47).

Пусть теперь оператор F коммутирует одновременно с операторами \hat{M}_0 и $\partial/\partial t + \hat{A}_0$, т. е. его ядро кроме уравнения (7.43) удовлетворяет еще уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \hat{A}_0 F - F \hat{A}_0^+ = 0. \quad (7.49)$$

Тогда при помощи оператора \hat{K}^+ осуществляется одновременное одевание обоих затравочных операторов. Рассмотрим теперь некоторую функцию ψ_0 , для которой

$$\hat{M}_0 \psi_0 = \alpha \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \hat{L}_0 \psi_0 = 0; \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \hat{A}_0 \psi_0 = 0. \quad (7.50)$$

Из формулы (7.34) немедленно следует, что функция

$$\psi = (1 + \hat{K}^+) \psi_0$$

удовлетворяет уравнениям (7.11) и (7.38). Таким образом, $u_i(z, x, t)$ и $v_i(z, x, t)$, определенные по формулам (7.47) при помощи оператора \hat{K}^+ , автоматически представляют собой решение уравнения (7.35). В частном случае, когда $\alpha = 0$ и $\hat{M} = \mathcal{L}$, уравнение (7.44) заменится на

$$\hat{L}_0 F - F \hat{L}_0^+ = 0 \quad (7.51)$$

и мы получим решение уравнения (7.12). Если вместо оператора $\partial/\partial t + \hat{A}_0$ выбрать оператор $\sum f_i(\hat{L}_0)\partial/\partial x_i + \hat{A}_0$, то совместное решение уравнения (7.51) и уравнения

$$\sum f_i(\hat{L}_0) \frac{\partial F}{\partial x_i} + \hat{A}_0 F - F \hat{A}_0^+ = 0 \quad (7.52)$$

дает решение уравнения типа Калоджеро (7.28). Заметим еще, что все эти уравнения можно рассматривать непосредственно как уравнения на величины $\xi_i(x, z, t)$ — при этом проблема отыскания \hat{A} -оператора по данному \hat{L} -оператору отпадает.

Перейдем к вопросу о нахождении ядра оператора K^+ по данному F . Умножая (7.41) на $(1 + K^+)$ и рассматривая ответ в области $z' > z$, получим соотношение

$$F(z, z') + K^+(z, z') + \int_z^\infty K^+(z, z'') F(z'', z) dz'' = 0. \quad (7.53)$$

Его можно рассматривать при каждом $z = z_0$ как интегральное уравнение Фредгольма второго рода для отыскания функции $K^+(z_0, z')$. (При заданном K^+ (7.53) можно рассматривать также как вольтерровское уравнение для определения $F(z, z')$.) При этом возникает следующая схема построения точных решений уравнения (7.31), (7.28), (7.12):

$$F(z, z', x, t) \xrightarrow{\text{I}} K^+(z, z', x, t) \xrightarrow{\text{II}} \xi_i(z, x, t) \xrightarrow{\text{III}} \\ \rightarrow u_i(z, x, t), v_i(z, x, t). \quad (7.54)$$

На первом этапе рассматривается произвольное решение системы двух уравнений для F , затем решается уравнение (7.53), далее по известному K^+ производится одевание затравочных операторов и вычисление величин u_i и v_i . Отдельные частные решения могут быть найдены при помощи разделения переменных. Пусть F удовлетворяет уравнениям (7.53), (7.49). Будем искать их решение в виде

$$F = F_1(z, x, t) F_2(z', x, t). \quad (7.55)$$

Легко видеть, что F_1 и F_2 должны удовлетворять уравнениям

$$\alpha \frac{\partial F_1}{\partial x} + L_0 F_1 = c_1 F_1, \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} + A_0 F_1 = c_2 F_1, \quad (7.56)$$

$$\alpha \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 L_0 = -F_2 c_1, \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} - F_2 A_0 = -F_2 c_2. \quad (7.57)$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные пока матричные функции от x и t , которые должны быть выбраны из условий совместности систем

уравнений (7.56) и (7.57). Легко видеть, что для этого необходимо

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - \alpha \frac{\partial c_2}{\partial t} = [c_1, c_2]. \quad (7.58)$$

Решение уравнения (7.53) будем искать в виде:

$$K^+ = K(z, x, t) F_2(z', x, t). \quad (7.59)$$

После подстановки в (7.53) найдем

$$K(z, x, t) = -F_1(z, x, t) \left[1 + \int_z^\infty F_2(z, x, t) F_1(z, x, t) dz \right]^{-1}. \quad (7.60)$$

Более общие решения можно искать в виде

$$F = \sum_{k=1}^n F_1^{(k)}(z, x, t) F_2^{(k)}(z', x, t),$$

$$K^+ = \sum_{k=1}^n K^{(k)}(z, x, t) F_2^{(k)}(z', x, t). \quad (7.61)$$

Все $F_1^{(k)}$, $F_2^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям (7.56), (7.57); $K^{(k)}$ определяются из линейной алгебраической системы уравнений с постоянными коэффициентами.

Все решения, при которых происходит разделение переменных и уравнение (7.53) сводится к системе алгебраических, мы будем называть N -солитонными решениями. Условие отсутствия интегральной части в «одетых» операторах можно рассматривать как уравнение на ядро оператора K^+ . Легко видеть, что эти уравнения имеют вид

$$\alpha \frac{\partial K^+}{\partial x} + \hat{L}K^+ - K^+\hat{L}_0 = 0, \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \hat{A}K^+ - K^+\hat{A}_0 = 0. \quad (7.63)$$

Метод одевания позволяет, по крайней мере в принципе, решать для исследуемых уравнений задачу Коши по следующей схеме:

$$u_i|_{t=0} \xrightarrow{\text{I}} \xi_i|_{t=0} \xrightarrow{\text{II}} K^+|_{t=0} \xrightarrow{\text{III}} F|_{t=0} \xrightarrow{\text{IV}} \\ \rightarrow F|_{t=t} \xrightarrow{\text{V}} K^+|_{t=t} \xrightarrow{\text{VI}} \xi_i|_{t=t} \xrightarrow{\text{VII}} u_i|_{t=t}. \quad (7.64)$$

На втором этапе этой схемы нужно найти в начальный момент времени $t = 0$ ядро $K^+(z, z', x, t)$. Это можно сделать, решая задачу Коши — Гурса для уравнения (7.62) — величины $\xi_i(z, x, t)$ при этом рассматриваются как данные на характеристике $z' = z$. На третьем этапе схемы нужно найти $F(z, z')|_{t=0}$. Для этого можно использовать уравнение (7.53), рассматривая его как

вольтерровское уравнение относительно F . Далее схема (7.64) не отличается от (7.54).

В качестве простейшего примера положим $\alpha = 0$, $L_0 = \partial^2/\partial z^2$. Тогда уравнение (7.43) приобретет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} = 0. \quad (7.65)$$

В частности, можно выбрать $F = F(z + z')$. В этом случае уравнение (7.53) переходит в известное уравнение Марченко, решающее обратную задачу рассеяния для оператора Шрёдингера. Вопрос о том, в какой мере и в каком смысле уравнение (7.53) решает обратную задачу рассеяния для операторов \hat{M} и $\partial/\partial t + \hat{A}$, еще недостаточно исследован.

Общее совместное решение уравнений (7.43), (7.49) может быть записано в виде

$$F(z, z', x, t) = \int \exp\left[i(\lambda z + \lambda' z') + A_0(i\lambda)t + \frac{1}{\alpha_0} L_0(i\lambda)x\right] \times \\ \times \tilde{F}(\lambda, \lambda') \exp\left[-A_0(i\lambda't) - \frac{1}{\alpha} L_0(i\lambda')x\right] d\lambda d\lambda'. \quad (7.66)$$

Здесь $\tilde{F}(\lambda, \lambda')$ — произвольная матричная функция, $A_0(i\lambda)$ и $L_0(i\lambda)$ — символы операторов \hat{A}_0 и \hat{L}_0 . Запись (7.66) существенно использует тот факт, что $[\hat{A}_0, \hat{L}_0] = 0$.

Заметим, что изложенная выше схема одевания нигде не использует не только факт коммутативности операторов \hat{L}_0 и \hat{A}_0 , но даже и постоянство их коэффициентов. В принципе можно было бы одевать произвольные операторы \hat{A} и \hat{L} некоммутирующими операторами с зависящими от x , t и z переменными коэффициентами. При этом, однако, уравнения (7.43) и (7.49) могут оказаться несовместными. Для их совместности достаточно выполнения условия (7.31). В частности, коэффициенты новых «затравочных» операторов \hat{L} и \hat{A} могут быть одним из частных решений уравнения (7.31), возможно не убывающим при $z \rightarrow \pm\infty$.

7.5. Проблема редукции и физическая интерпретация примеров

Хотя метод обратной задачи начался с уравнений, имеющих прозрачный и достаточно общий физический смысл, общим уравнениям, получаемым при помощи $\hat{L} - \hat{A}$ -пар, обычно нелегко найти разумную физическую интерпретацию. Опыт показывает, что чаще всего физический смысл эти уравнения приобретают при априорных дополнительных ограничениях на вид решений, которые мы будем называть редукциями.

Простейшая форма редукции состоит в фиксации алгебры, к которой принадлежат коэффициенты операторов \mathcal{L} и \bar{A} . Поскольку при вычислении интегрируемых уравнений производились лишь линейные операции и умножение (не обязательно коммутативное), то эти коэффициенты могут принадлежать к любой ассоциативной алгебре, в том числе и не обязательно матричной (например, алгебре операторов в гильбертовом пространстве). Дальнейшие редукции удобно разобрать на примере уравнений (7.21) — (7.32).

Эти уравнения являются нетривиальными, начиная с размерности $N = 3$. Однако даже в этом простейшем случае при общем виде матриц I , J и Q они не допускают (на сегодняшний день) физической интерпретации.

Пусть I , J , Q принадлежат к алгебре, на которой определена аддитивная инволюция $A \rightarrow \bar{A}$, причем $\bar{\bar{A}} = A$,

$$\overline{\bar{A}_1 \pm \bar{A}_2} = \overline{A_1 \pm A_2}.$$

Пусть матрицы I и J инвариантны относительно этой инволюции ($\bar{I} = I$, $\bar{J} = J$). Тогда уравнения (7.21) — (7.32) допускают редукцию

$$Q = \bar{Q}. \quad (7.67)$$

Это означает, что взяв начальные условия, удовлетворяющие соотношению (7.67), мы получим при всех t (или x) решение, также удовлетворяющее этому условию.

Пусть зафиксирована алгебра комплексных $N \times N$ матриц, причем I и J — диагональные матрицы. Определим инволюцию формулой

$$\bar{Q} = C^{-1} Q^+ C, \quad (7.68)$$

где C — диагональная унитарная матрица ($CC^+ = 1$). (Значок Q^+ означает эрмитовское сопряжение.) В общем случае $C_{kj} = \exp(i\varphi_k) \delta_{kj}$, и (7.68) означает, что

$$\bar{Q}_{kj} = \exp[i(\varphi_j - \varphi_k)] Q_{jk}^*. \quad (7.69)$$

Из условия $\bar{Q} = Q$ мы получаем $\varphi_k = 0$, π . В частном случае можно положить $C = 1$, $Q_{kj} = Q_{jk}^*$, т. е. выбрать Q эрмитовой матрицей.

Пусть матрица $J = \text{diag } a_i$ ($a_{i+1} > a_i$), $I = \text{diag } b_i$. Введем набор величин

$$u_{ik} = \frac{iQ_{ik}}{\sqrt{a_k - a_i}}, \quad i < k.$$

Тогда уравнение (7.32) эквивалентно гамильтоновой системе

$$\frac{\partial u_{jk}}{\partial t} = i \frac{\delta}{\delta u_{jk}} H \quad (7.70)$$

где

$$H = \frac{i}{2} \sum_{i < k} [u_{ik}^* (\mathbf{v}_{ik} \cdot \nabla u_{ik}) - u_{ik} (\mathbf{v}_{ik} \cdot \nabla u_{ik}^*)] + \sum_{i < k < j} \varepsilon_{ijk} (u_{ik} u_{kj} u_{ij}^* + u_{ik}^* u_{kj}^* u_{ij}), \quad (7.71)$$

где ∇ — градиент в плоскости xz , \mathbf{v}_{ik} — двумерные векторы,

$$(v_{ik})_x = -\frac{b_i - b_k}{a_i - a_k}; \quad (v_{ik})_z = \frac{a_i b_k - a_k b_i}{a_i - a_k}; \quad (7.72)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{a_i b_k - a_k b_i + a_k b_j - a_j b_k + a_j b_i - a_i b_j}{\sqrt{(a_k - a_i)(a_j - a_k)(a_j - a_i)}}. \quad (7.73)$$

Очевидно, что система (7.70) нетривиальна лишь с $N = 3$. В этом случае она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla u_0) &= i\varepsilon u_1 u_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1) &= i\varepsilon u_0 u_2^*, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla u_2) &= i\varepsilon u_0 u_1^*, \end{aligned} \quad (7.74)$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{13}; & u_1 &= u_{12}; & u_2 &= u_{23}; \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_{13}; & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_{12}; & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_{23}; & \varepsilon &= \varepsilon_{123}. \end{aligned}$$

Система (7.74) представляет собой фундаментальную систему уравнений нелинейной оптики, описывающую распад волны накачки u_0 на «вторичные волны» u_1 и u_2 и обратный процесс слияния вторичных волн в волну накачки (см., например, [7.15], [7.17]); \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — групповые скорости волн. При выводе уравнений (7.74) из конкретных физических уравнений (например, из нелинейных уравнений Максвелла) может оказаться, что эти векторы не лежат в одной плоскости, однако переходом в движущуюся систему отсчета этого всегда можно добиться, так что уравнения (7.74) описывают общую трехмерную ситуацию.

Выберем матрицу C в виде $C = \text{diag}(-1, 1, 1)$. При этом мы снова придем к системе (7.74), однако теперь

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{12}; & u_1 &= u_{13}; & u_2 &= u_{23}; \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_{12}; & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_{13}; & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_{23}. \end{aligned}$$

Накачкой теперь является волна u_{12} , а u_{13} и u_{23} — вторичными волнами. Аналогично при выборе $C = \text{diag}(1, 1, -1)$ накачкой становится волна u_{23} .

Если же выбрать $C = \text{diag}(1, -1, 1)$, то мы придем к новой системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla u_0) &= i\epsilon u_1^* u_2^*, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1) &= i\epsilon u_0^* u_2^*, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla u_2) &= i\epsilon u_0^* u_1^*.\end{aligned}\quad (7.75)$$

Система (7.75) описывает нелинейную стадию «взрывной неустойчивости» в среде, в которой могут распространяться волны с отрицательной энергией. Теперь

$$u_0 = u_{13}; \quad u_1 = u_{12}^*; \quad u_2 = u_{23}^*.\quad (7.76)$$

Поставим вопрос о возможности дальнейшей редукции описанных систем. Это можно сделать, налагая дальнейшие ограничения на выбор матриц I и J . Так, положим в системе (7.74) $a_2 = 0$, $(b_1 - b_2)/a_1 = (b_3 - b_2)/a_3$. Тогда $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ и можно положить $u_1 = u_2$. Система (7.75) приобретает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla u_0) &= i\epsilon u_1^2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1) &= i\epsilon u_0 u_1^*.\end{aligned}\quad (7.77)$$

Система (7.77) также известна в нелинейной оптике в связи с задачей о генерации в нелинейной среде второй гармоники (см. [7.17]). Дальнейшая редукция может быть осуществлена переходом из алгебры комплексных в алгебру вещественных матриц. Ее можно осуществить, полагая в уравнениях все u_{ij} чисто мнимыми:

$$\begin{aligned}u_{ij} &= i\omega_{ij}, \\ \frac{\partial \omega_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \omega_0) &= -\epsilon \omega_1 \omega_2, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \omega_1) &= \epsilon \omega_0 \omega_2, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla \omega_2) &= \epsilon \omega_0 \omega_1.\end{aligned}\quad (7.78)$$

Аналогичная система возникает и из системы (7.75). Эти вещественные системы соответствуют в нелинейной оптике случаю «точного резонанса».

Система (7.78) замечательна тем, что в однородном случае, когда $\nabla \omega_i = 0$, она совпадает с уравнениями Эйлера свободного вращения твердого тела. Это совпадение не случайно. Как показал Манаков [7.18], среди уравнений (7.21) содержатся и

уравнения свободного движения N -мерного твердого тела. Действительно, эти уравнения имеют вид

$$\dot{M} = [M, \Omega], \quad (7.79)$$

где M и Ω — вещественные антисимметричные матрицы, причем $M = I_0 \Omega + \Omega I_0$, а I_0 — положительно определенная симметричная матрица (тензор инерции). Приведем матрицу I_0 к главным осям и положим $I_0 = \text{diag } i_k$. Полагая $J = I^2$, $I = I_0$, $M = [J, Q]$, $\Omega = [I, Q]$ и отбрасывая производные по z , убеждаемся, что система уравнений (7.21) совпадает с (7.79).

Среди комплексных многомерных систем (7.70) разумная физическая интерпретация найдена пока только для одной системы при $N = 4$ и дополнительном условии $a_1 - a_2 = a_3 - a_4$; $b_1 - b_2 = b_3 - b_4$. Эта система возникает за счет добавочной редукции $u_{13} = -u_{24}$, $u_{12} = u_{34}$ и приводит к задаче о взаимодействии четырех волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{12}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{12} \cdot \nabla u_{12}) &= iq (u_{14} u_{13}^* + u_{13} u_{23}^*), \\ \frac{\partial u_{13}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{13} \cdot \nabla u_{13}) &= iq (u_{14} u_{12}^* + u_{13} u_{12}^*), \\ \frac{\partial u_{23}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{23} \cdot \nabla u_{23}) &= iqu_{13} u_{12}^*, \\ \frac{\partial u_{14}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{14} \cdot \nabla u_{14}) &= iqu_{12} u_{23}^*, \\ (\mathbf{v}_{12} - \mathbf{v}_{14}) \cdot (\mathbf{v}_{13} - \mathbf{v}_{23}) + (\mathbf{v}_{13} - \mathbf{v}_{14}) \cdot (\mathbf{v}_{12} - \mathbf{v}_{23}) &= 0, \\ q = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{124} = -\varepsilon_{234} = -\varepsilon_{134}. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Система (7.80) описывает распад накачки u_{13} на вторичные волны u_{12} и u_{23} в присутствии холостой (антистоксовой) волны u_{14} , которая в свою очередь может распасться на накачку u_{13} и вторичную стоксову волну u_{12} . Уравнение (7.80) встречается в задачах физики нелинейных волн [7.21]. Полное описание редукций систем (7.21) и (7.32) пока еще не проделано.

Уравнение (7.22) в скалярной алгебре есть знаменитое уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), с которого и начался метод обратной задачи рассеяния. Его физическая интерпретация не нуждается в пояснениях. Заметим только, что в коммутативной треугольной матричной алгебре

$$u = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ 0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad (7.81)$$

уравнение (7.22) распадается на два

$$\begin{aligned} u_{0t} &= 6u_0 u_{0z} + u_0 zzz, \\ u_{1t} &= 6u_1 u_{0z} + 6u_0 u_{1z} + u_1 zzz, \end{aligned} \quad (7.82)$$

из которых первое есть обычное уравнение КдФ, а второе — уравнение КдФ, линейризованное на фоне данного решения u_0 . Этот факт является общим — использование треугольных матриц типа (7.81) позволяет изучать линейризованные интегрируемые системы.

Система (7.23) при разных выборах β и s приводится в скалярной алгебре к одному из четырех канонических видов

$$u_{tt} \pm u_{xx} \pm u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0. \quad (7.83)$$

Физический смысл всех вариантов этой системы достаточно прозрачен.

Система (7.24) содержательна, если $\alpha = i$ и имеет место редукция $q = \pm r^\dagger$. Тогда она приводится к одному уравнению

$$2r_t = i(r_{zz} \pm rr^\dagger r). \quad (7.84)$$

В скалярной алгебре $r^\dagger = r^*$, и это — нелинейное уравнение Шрёдингера, часто возникающее в физике нелинейных волн в связи с задачами типа самофокусировки [7.17]. В алгебре матриц вида

$$r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & r_1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

оно приводится [7.18] к системе нелинейных уравнений Шрёдингера

$$-2ir_{nt} = r_{nzz} \pm \sum_{i=1}^n |r_i|^2 r_n. \quad (7.85)$$

Уравнение (7.85) имеет любопытный континуальный предел:

$$-2ir_t(t, z, \xi) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} r(t, z, \xi) \pm \int |r(t, z, \xi')|^2 d\xi' r(t, z, \xi), \quad (7.86)$$

где ξ — векторный параметр; интегрирование ведется по некоторой области в пространстве этого параметра.

Система уравнений типа (7.85) при $n = 2$ описывает самодействие электромагнитных волн с различной поляризацией и встречается в нелинейной оптике. Наиболее интересно было бы рассмотреть уравнение (7.24) в гейзенберговской алгебре операторов, задаваемых коммутативными или антикоммутативными уравнениями

$$[\psi(z), \psi(z')] = \delta(z - z'), \quad (7.87)$$

$$\{\psi(z), \psi(z')\} = \delta(z - z'). \quad (7.88)$$

В этих случаях уравнение (7.84) описывало бы одномерный Бозе и Ферми газ с точечным взаимодействием. Несмотря на то, что соответствующие теории далеко продвинуты (известны спектр

оператора Гамильтона и статистическая сумма), использование метода обратной задачи могло бы здесь оказаться полезным.

Уравнения (7.25) рассматривались только в скалярной алгебре $q = \pm r^*$. В этом случае возникает так называемое модифицированное уравнение КдФ (или МКдФ)

$$r_t + \frac{1}{2} r_{zzz} \pm \frac{3}{2} |r|^2 r_z = 0. \quad (7.89)$$

Оба эти уравнения являются универсальными и применяются для описания волн в средах со слабой дисперсией — в тех случаях, когда преобладает кубичная нелинейность.

Система (7.33) эквивалентна уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-v^2 u + \frac{1}{4} u_{zz} + \frac{3}{4} u^2 \right) + \frac{3}{4} \beta^2 \frac{\partial^2 u}{y^2}, \quad (7.90)$$

впервые, по-видимому, рассматривавшемся Б. Б. Кадомцевым и В. И. Петвиашвили [7.22]. Это уравнение обобщает КдФ на случай слабой зависимости от конечной координаты y .

Из многочисленных вариантов системы (7.34) мы рассмотрим только один, когда $a = 0$. В этом случае система (7.34) приводится к виду ($\beta = i, q = \pm r^*, \alpha = 1$, алгебра скалярна)

$$\begin{aligned} ir_t &= \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + ur, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \pm \frac{\partial}{\partial \xi} |r|^2. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Здесь

$$u = r_1 - r_2, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} + (l+1) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Система (7.91) встречается в физике плазмы; при $\eta = t$ она описывает взаимодействие околосвуковых ленгмюровских солитонов [7.23], [7.24].

7.6. Двумерная неустойчивость солитонов [7.25]

Приступим теперь к физическим задачам, которые могут быть решены с помощью методов, представленных в разд. 7.4. Ограничимся только очень простыми примерами, содержащими точные «односолитонные» решения (7.60).

Рассмотрим (7.90). Уравнения (7.43), (7.49) имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z'^3} - v^2 \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z'} \right), \quad (7.92)$$

$$\beta \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} = 0. \quad (7.93)$$

Эти уравнения имеют простое известное решение

$$F = F_0 = 2ve^{-v(z+z')}. \quad (7.94)$$

Из (7.53) получим

$$K = K_0 = \frac{2ve^{-v(z+z')}}{1 + e^{-2vz}}. \quad (7.95)$$

В этом случае формула одевания (7.47) дает

$$u = 2 \frac{d}{dz} K(z, z, x, t). \quad (7.96)$$

Из (7.95), (7.96) имеем

$$u = u_0 = \frac{2v^2}{\operatorname{ch}^2 vx}. \quad (7.97)$$

Решение (7.97) есть солитон — изолированная неискажаемая волна в своей собственной системе отсчета, в которой записано уравнение (7.90). С физической точки зрения очень интересным является вопрос о неустойчивости солитона (7.97) относительно поперечных возмущений. Он был частично решен Кадомцевым и Петвиашвили [7.22], которые показали, что если взять

$$u = u_0 + \delta u; \quad \delta u \simeq e^{i\Omega t + i p y},$$

то для малых значений p

$$\Omega^2 = \beta^2 v^2 p^2 + \dots \quad (7.98)$$

Таким образом, солитон устойчив, если $\beta^2 > 0$ и неустойчив, если $\beta^2 < 0$. В случае устойчивости (7.90) описывает слабо нелинейные волны в среде с дисперсионным соотношением

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 (1 - \lambda^2 k^2 + \dots), \quad (7.99)$$

тогда как в неустойчивом случае дисперсионное отношение имеет вид

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 (1 + \lambda^2 k^2 + \dots). \quad (7.100)$$

Здесь λ — дисперсионная длина волны. Если $l_{\perp 1}$ — поперечный размер солитона, а $l_{\parallel} \sim 1/p$ — характерный размер возмущения, то соблюдается следующее неравенство:

$$\frac{1}{p} \gg l_{\perp 1} \gg \lambda. \quad (7.101)$$

Метод обратной задачи рассеяния позволяет получить полное решение задачи о неустойчивости солитона потому, что он позволяет определить функцию $\Omega^2(p)$. Для этого рассмотрим (7.90) в алгебре треугольных матриц отмеченного уже типа (7.81). Матрица F и K также принадлежит этой алгебре. Уравнение

для u_1 получается линеаризацией уравнения (7.90), а (7.53) приобретает вид

$$F_1(z, z', t, y) + K_1(z, z', t, y) + \int_z^\infty K_1(z, z'', t, y) F_0(z'', z', t, y) dz'' + \\ + \int_z^\infty K_0(z, z'', t, y) F_1(z'', z', t, y) dz'' = 0. \quad (7.102)$$

Уравнение (7.102) легко решается. Полагая, что

$$F_1 = \varphi(y, t) e^{-\eta z - k z'},$$

найдем, что

$$K_1(z, z, y, t) = \varphi(y, t) e^{-(\eta+k)z} \left(-1 + \frac{2v}{(v+k)(1+e^{2vz})} \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{1+e^{2vz}} \right). \quad (7.103)$$

Из нулевых граничных условий для $u_1(z, y, t)$ при $z \rightarrow \pm\infty$ и

$$u_1(z, y, t) = 2 \frac{d}{dz} K_1(z, z, y, t)$$

найдем, что $k = v$ и $\text{Re}(v - \eta) > 0$. Теперь из (7.92) и (7.93) получим

$$\varphi(y, t) = \varphi_0 e^{i\Omega t + i p y}; \quad \Omega^2 = \beta^2 p^2 (v^2 - i\beta p). \quad (7.104)$$

Значение β выбирается так, чтобы удовлетворить условию $\text{Im} \Omega \geq 0$ при $|p| \rightarrow \infty$. Там, где $\beta^2 > 0$, формула (7.104) описывает спектр затухающих колебаний солитона, а там, где $\beta^2 < 0$, она описывает возрастание неустойчивости солитона. При $p^2 \rightarrow 0$ результат Кадомцева и Петвиашвили (7.98) следует из (7.104).

Теперь вернемся к скалярной алгебре и исследуем решение типа (7.55), полагая, что

$$F = \psi(z, y, t) \psi^*(z', y, t). \quad (7.105)$$

В скалярном случае выбор c_1 и c_2 не влияет на конечный вид решения, и можно выбрать $c_1 = c_2 = 0$,

$$\psi(z, y, t) = \int a(\eta) \exp[\eta(v^2 - \eta^2)t + i(\eta^2 - v^2)y - \eta x] d\eta, \quad (7.106)$$

где $a(\eta)$ — произвольная функция. Решение для (7.90) теперь дается формулой

$$u(z, y, t) = -2 \frac{d}{dz} \frac{|\psi(z', y, t)|^2}{1 + \int_z^\infty |\psi(z', y, t)|^2 dz'}. \quad (7.107)$$

В частности если

$$\psi(z, y, t) = \int_a^v a(\eta) \exp[\eta(v^2 - \eta^2)t + i(\eta^2 - v^2)y - \eta x] d\eta, \quad (7.108)$$

мы получаем решение, стремящееся к солитону (7.97) при $t \rightarrow -\infty$. Это решение описывает развитие неустойчивости солитона, изменяющейся при различных выборах $a(\eta)$. Если $a(\eta) = ad(\eta, -\eta_0)$, где $\eta_0 < v$, то в результате развития неустойчивости рождается солитон с низшей амплитудой η_0 . В случае произвольного выбора $a(\eta)$ первоначальный солитон полностью исчезает. Энергия, содержащаяся в нем, переходит в осциллирующий фон, равномерно убывающий относительно x и t . Похожие решения, описывающие затухающие нелинейные колебания солитона, также могут быть получены в устойчивом случае $\beta^2 > 0$.

7.7. Точные решения уравнений нелинейной оптики [7.26]

Исследуем теперь точное решение системы (7.74), одной из основных систем уравнений нелинейной оптики. Сначала заметим без доказательства, что главное интегральное уравнение (7.53) может быть заменено на

$$F(z, z') + K(z, z') + \int_z^\infty K(z, z'') CF(z'', z') dz'' - \\ - \int_{-\infty}^z K(z, z'')(1 - C) F(z'', z') dz'' = 0, \quad (7.109)$$

где C является произвольной матрицей, коммутирующей со всеми l_i . Далее отметим, что система (7.74) имеет тривиальные точные решения, когда только одно из значений u_i отличается от нуля, например, $u_0 = u_1 = 0$; $u_2 = u(x - v_{2x}t, z - v_{2z}t)$. На основании этого точного решения системы (7.74) введем процедуру одевания. Здесь матричная функция F удовлетворяет двум уравнениям,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + I \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z'} I + [I, P(z, x, t)] F - F [I, P(z', x, t)] = 0, \quad (7.110)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + J \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z'} J + [J, P(z, x, t)] F - F [J, P(z', x, t)] = 0, \quad (7.111)$$

где матрица P имеет вид

$$P = -i \sqrt{a_2 - a_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \\ 0 & u^* & 0 \end{pmatrix} \quad (7.112)$$

и $u(\xi, \eta)$ — произвольная матричная функция.

Учтем следующее ограничение на вид матрицы F :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & 0 & 0 \\ F_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.113)$$

и выберем матрицу C в виде

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.114)$$

Если выбирать всевозможные функции u и всевозможные решения системы (7.110), (7.111) вида (7.113), для которых интегралы в (7.109) сочетаются с матрицей C , взятой в виде (7.114), то мы получим общее решение системы (7.34). Здесь $u_0, u_1 \rightarrow 0$, $u_2 \rightarrow u$ при $z \rightarrow \pm \infty$.

Система (7.74) физически наиболее интересна, если u_i зависит от трех пространственных координат. Однако, переходя к системе координат, в которой групповая скорость одной из волн (например, u_0) равна нулю, система может быть сведена к существенно двумерной, для которой достаточно совместить координатную плоскость с плоскостью векторов v_2 и v_3 . В этом случае исчезает производная вдоль направления, перпендикулярного этой плоскости. Пусть это будет направление y . Предположим, что $b_1 = b_3 = 0$, тогда

$$\begin{aligned} v_{1x} &= \frac{b}{a_1 - a_2}; & v_{1z} &= \frac{a_1 b}{a_1 - a_2}; \\ v_{2x} &= \frac{b}{a_2 - a_3}; & v_{2z} &= \frac{a_2 b}{a_2 - a_3}. \end{aligned}$$

Числа a_1, a_2 и a_3 нормированы так, что $\epsilon = 1$. Редукция функции F

$$F^\dagger(z, z') = F(z', z) \quad (7.115)$$

соответствует выбору редукции (7.67). Формула (7.47) дает

$$\begin{aligned} q_0 &= -i\sqrt{a_1 - a_3} u_0 = K_{13}(z, z, x, t), \\ q_1 &= i\sqrt{a_1 - a_2} u_1 = K_{12}(z, z, x, t), \\ q_2 &= i\sqrt{a_2 - a_3} u_2 = K_{23}(z, z, x, t) + u. \end{aligned} \quad (7.116)$$

Рассмотрим простейший случай $u = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} F_{12} &= F(z - a_1 x) \Phi(z' - a_2 x - bt); \\ F_{13} &= F(z - a_1 x) \Psi(z - a_3 x); \\ \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds &= J_1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(s)|^2 ds = J_2; \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(s)|^2 ds &= J_3. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Легко проверить, что (7.117) с произвольными комплексными F , Φ и Ψ является решением системы (7.110), (7.111).

Из (7.60) найдем, что

$$\begin{aligned} q_0 &= -\frac{F\Psi}{\Delta}; \quad q_1 = -\frac{F\Phi}{\Delta}; \\ q_2 &= \frac{\Phi^*\Psi}{\Delta} \int_{-\infty}^{z-a_1x} |F(s)|^2 ds; \end{aligned} \quad (7.118)$$

где

$$\Delta = 1 + \int_{-\infty}^{z-a_1x} |F(s)|^2 ds \left[\int_{z-a_2x-bt}^{\infty} |\Phi(s)|^2 ds + \int_{z-a_3x}^{\infty} |\Psi(s)|^2 ds \right].$$

Асимптотически при $t \rightarrow -\infty$ решение (7.118) распадается на пакет накачки u_0 и волновой пакет u_1^- с интегральными интенсивностями

$$\begin{aligned} I_0^- &= \int |u_0(x, z)|^2 dx dz = q \ln(1 + J_1 J_0), \\ I_1^- &= \int |u_1^-(x, z)|^2 dx dz = q \ln \left(1 + \frac{J_1 J_2}{1 + J_1 J_2} \right). \end{aligned}$$

При $t \rightarrow +\infty$ имеются все три пакета с интенсивностями

$$\begin{aligned} I_0^+ &= q \ln 1 + \frac{J_1 J_3}{1 + J_1 J_2}; \quad I_2^+ + I_1^+ - I_1^-; \\ I_1^+ &= q \ln(1 + J_1 J_2); \quad q = \frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}{b^2(a_1 - a_3)}. \end{aligned}$$

Если $J_1, J_3 \gg 1$ и $J_1 \gg J_2, J_3$, то мы имеем задачу взаимодействия интенсивного пакета накачки с маленьким волновым пакетом u_2 . Значения интенсивностей указывают, что происходит почти полный распад накачки. Асимптотический вид пакетов u_1 и u_2 зависит от функции ϕ , которая не входит в асимптотическое выражение накачки u_0^- . Этот факт отражает распад неустойчивости волны накачки.

В целом, разобранный метод также может быть применен к проблеме взрывной неустойчивости (7.75). Соответствующее решение имеет вид ($V_0 = 0$, $\varepsilon = 1$):

$$q_0 = -\frac{F\psi}{\Delta}; \quad q_1 = \frac{F^*\varphi}{\Delta}; \quad q_2 = \frac{\varphi^*\psi^*}{\Delta} \int_{-\infty}^{z-a_1x} |F(s)|^2 ds$$

$$\Delta = 1 - \int_{-\infty}^{z-a_1x} |F(s)|^2 ds \left[\int_{z-a_2x-bt}^{-\infty} |\varphi(s)|^2 ds + \int_{z-a_2x}^{\infty} |\psi(s)|^2 ds \right]. \quad (7.119)$$

Эволюция решения (7.119) может привести к тому, что в некоторой точке в конечный момент времени знаменатель обратится в нуль. Это доказывает, что развитие взрывной неустойчивости для трехмерного волнового пакета ведет к точке «коллапса».

7.8. Триада \hat{L} , \hat{A} , \hat{B}

Возможность восстановления коэффициентов двумерного оператора из матрицы рассеяния, заданной в одной точке спектра, привела Манакова [7.27] к открытию нового класса интегрируемых систем, которые не допускают введения \hat{L} , \hat{A} -пар.

Пусть заданы дифференциальный оператор \hat{L} по двум переменным z и x и соответствующее уравнение

$$\hat{L}\psi = 0. \quad (7.120)$$

Решаемые уравнения (7.120) составляют линейное пространство $\tilde{\psi}$. Потребуем, чтобы полугруппа сдвигов по t , которые определяются дифференциальным уравнением (7.11) $\psi_t + \hat{A}\psi = 0$, действовала на $\tilde{\psi}$ инвариантно. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} - [\hat{L}, \hat{A}] = \hat{B}\hat{L}, \quad (7.121)$$

где \hat{B} — некоторый дифференциальный оператор. Очевидно, что оператор \hat{A} определен здесь не однозначно, а только с точностью до преобразования

$$\hat{A} \rightarrow \hat{A} + \hat{C}\hat{L}; \quad \hat{B} \rightarrow \hat{B} + [\hat{L}, \hat{C}], \quad (7.122)$$

где \hat{C} — произвольный дифференциальный оператор.

Соотношение (7.121) задает некоторую систему уравнений, решаемую методом обратной задачи по схеме (7.20) — (7.64).

Опишем (без доказательства) класс операторов L , приводящий к уравнениям типа (7.121). Выберем L в виде:

$$\widehat{L} = \widehat{L}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + \widehat{L}^{(1)}, \quad (7.123)$$

где $\widehat{L}^{(0)}$ и $\widehat{L}^{(1)}$ — матричные $N \times N$, дифференциальные по z операторы

$$L^{(0)} = l_0^{(0)} \frac{\partial^{m_1}}{\partial z^{m_1}} + u_1 \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial z^{m_1-1}} + \dots, \quad (7.124)$$

$$L^{(1)} = v_0 \frac{\partial^{m_2}}{\partial z^{m_2}} + v_1 \frac{\partial^{m_2-1}}{\partial z^{m_2-1}} + \dots. \quad (7.125)$$

Матрица $l_0^{(0)}$ является постоянной; матрица v_0 является постоянной, если $m_2 \geq m_1$. В случае $m_2 = m_1 - 1$, v_0 — переменная матрица. При $z \rightarrow \infty$ оператор L принимает предельное постоянное значение L_0 . В качестве операторов \widehat{A} и \widehat{B} могут быть выбраны произвольного вида дифференциальные по x и z операторы, характеризуемые своими предельными значениями $A \rightarrow A_0$, $\widehat{B} \rightarrow \widehat{B}_0$ при $z \rightarrow \infty$, причем

$$-[\widehat{L}_0, \widehat{A}_0] = \widehat{B}_0 \widehat{L}_0, \quad (7.126)$$

Операторы \widehat{A} и \widehat{B} удобно представлять в виде

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{A}^{(0)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \dots + \widehat{A}^{(n)}, \\ \widehat{B} &= \widehat{B}^{(0)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \dots + \widehat{B}^{(n)}, \end{aligned} \quad (7.127)$$

где $\widehat{A}^{(i)}$, $\widehat{B}^{(i)}$ — операторы, дифференциальные по z . Подстановка в условие (7.121) дает систему уравнений на коэффициенты операторов \widehat{A} , \widehat{B} (и уравнение для коэффициентов оператора L). Операторы \widehat{A} и \widehat{B} , вообще говоря, определяются из этих уравнений неоднозначно, однако вся неоднозначность связана с преобразованием (7.122) и не меняет вида искомого уравнений.

Рассмотрим случай, когда \widehat{A} и \widehat{B} являются дифференциальными по z операторами. Тогда из (7.121) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{L}^{(0)}}{\partial t} - [\widehat{L}^{(0)}, \widehat{A}] &= \widehat{B} \widehat{L}^{(0)}, \\ \frac{\partial \widehat{L}^{(1)}}{\partial t} - [\widehat{L}^{(1)}, \widehat{A}] &= \widehat{L}^{(0)} \widehat{A}_x + \widehat{B} \widehat{L}^{(1)}. \end{aligned} \quad (7.128)$$

Выберем в качестве простейшего примера

$$\widehat{L}^0 = \frac{\partial}{\partial z} + u; \quad \widehat{L}^{(1)} = v; \quad \widehat{A} = I \frac{\partial}{\partial z} + w;$$

$\widehat{B} = [I, u]$; I — постоянная матрица.

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}(\omega - Iu) + [u, \omega] + [I, u]u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial v}{\partial z}I + [v, \omega] - [uv, I], \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} &= [I, v].\end{aligned}\quad (7.129)$$

Система (7.129) интересна в двух предельных случаях, когда отсутствует зависимость от одной из координат. Если $\partial/\partial z = 0$, $u = 0$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = [v, \omega]; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = [I, v]. \quad (7.130)$$

Если $\partial/\partial x = 0$, $\omega = v = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -I \frac{\partial u}{\partial z} + [I, u]u. \quad (7.131)$$

Покажем теперь, как применить к уравнениям (7.121) метод одевания. Для этого зафиксируем предельное значение операторов $\hat{L}^{(0)}$ и $\hat{L}^{(1)}$:

$$\hat{L}^{(0)} \rightarrow \hat{M}_0; \quad \hat{L}^{(1)} \rightarrow \hat{M}_1, \quad z \rightarrow \pm \infty,$$

так что

$$\hat{L}_0 = \hat{M}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{M}_1, \quad (7.132)$$

и рассмотрим пространство $\tilde{\Psi}_0$ решений уравнения

$$\hat{L}_0 \psi_0 = 0. \quad (7.133)$$

Будем предполагать, что операторы F и R действуют как интегральные операторы на $\tilde{\Psi}_0$. Все дифференциальные операторы рассматриваются теперь по модулю оператора \hat{L}_0 , то есть с точностью до добавления произвольного оператора вида $\hat{C}\hat{L}_0$.

Пусть интегральный оператор F с гладким ядром переводит функции из $\tilde{\Psi}_0$ снова в $\tilde{\Psi}_0$ ($F: \tilde{\Psi}_0 = \tilde{\Psi}_0$). Тогда очевидно

$$(\hat{L}_0 \hat{F} - F \hat{L}_0) | \psi_0 \rangle = \hat{L}_0 \hat{F} | \psi_0 \rangle = 0 \quad (\psi, \in \tilde{\Psi}). \quad (7.134)$$

Пусть $1 + \hat{K}^+$ — правый вольтерровский фактор оператора F . Рассмотрим одетый по формуле (7.40) оператор \hat{L} . Из формулы (7.46) следует, что

$$[\hat{L}(1 + \hat{K}^+) - (1 + \hat{K}^+)\hat{L}_0] | \psi_0 \rangle = \hat{L}(1 + \hat{K}^+) | \psi_0 \rangle. \quad (7.135)$$

Таким образом, функции вида $\Psi = (1 + K^+) | \psi_0 \rangle$ представляют собой решения уравнения (7.120), что и требовалось,

Выпишем теперь явный вид условия (7.134). Оно эквивалентно условию

$$\hat{L}_0 \hat{F} = \hat{G} \hat{L}_0^\dagger,$$

где G — некоторый интегральный оператор, или двум условиям на ядра

$$M_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) F(z, z') = G(z, z') M_0^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial z'} \right),$$

$$M_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial x}(z, z') + M_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) F(z, z') = G(z, z') M_1^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial z'} \right). \quad (7.136)$$

Пара уравнений (7.136) заменяет уравнение (7.44).

Аналогичным образом уравнение (7.49) заменяется на уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \hat{A}_0 F - F \hat{A}_0^\dagger = R \hat{L}_0,$$

$$R = \sum_{k=0}^n G_k \frac{\partial^k}{\partial x^k}, \quad (7.137)$$

которое также легко может быть расписано в виде системы уравнений для ядер F и G_k .

Приведем теперь явные формулы одевания оператора L . Пусть

$$\hat{M}_0 = l_0 \frac{\partial}{\partial z^m}; \quad \hat{M}_1 = 0,$$

тогда

$$\hat{L}_0 = l_0 \frac{\partial^m}{\partial z^m} + u_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} + \dots, \quad (7.138)$$

$$\hat{L}_1 = v_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} + \dots,$$

$$u_1 = l_0 K(z, z, x, t) - Q(z, z, x, t) l_0,$$

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x} K(z, z, x, t). \quad (7.139)$$

Здесь ядро Q есть решение уравнения

$$\hat{L}_0 \hat{K} = Q \hat{M}_0^\dagger.$$

Аналогичные формулы легко (хотя и путем громоздких вычислений) можно получить для оператора A . Эти формулы позволяют в принципе исследовать уравнения типа (7.121) с той же полнотой, что и уравнения, допускающие $\hat{L} - \hat{A}$ -пару.

Заметим, что в одевание оператора \hat{M}_0 входят только производные по z от величин $\xi_i(z, x, t)$, но не сами эти величины,

7.9. Сохранение спектра операторных пучков

Пусть нам заданы два совместных дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{L}\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + \hat{A}\psi = 0 \quad (7.140)$$

и их условие совместности

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial x} = [\hat{L}, \hat{A}]. \quad (7.141)$$

Здесь \hat{L} и \hat{A} — как обычно, дифференциальные по z канонические операторы. Пусть коэффициенты этих операторов не зависят от z и являются только функциями x и t . Тогда к уравнениям (7.140) можно применить преобразование Фурье по λ . Факт совместности уравнений перейдет в факт существования совместного спектра полиномиальных по λ операторных пучков.

$$\psi_x + P(x, t, \lambda)\psi = 0, \quad (7.142)$$

$$\psi_t + R(x, t, \lambda)\psi = 0, \quad (7.143)$$

$$P = l_0 \lambda^n + u_1 \lambda^{n-1} + \dots; \quad R = a_0 \lambda^m + v_1 \lambda^{m-1} + \dots \quad (7.144)$$

Точнее говоря, при каждом λ полугруппа, порожденная уравнением (7.143), должна инвариантно действовать на пространстве, порожденном решением уравнения (7.142).

Задача об определении уравнений, которым должны подчиняться матрицы P и R для того, чтобы любое решение системы (7.142) было одновременно решением системы (7.143) и наоборот, может быть поставлена и непосредственно вне связи с происхождением уравнений (7.142) и (7.143) из дифференциальной по z L — A -пары. Дифференцируя (7.142) по t , (7.143) по x , вычитая результаты и заменяя производные по x и t по формулам (7.142), (7.143), получим

$$(P_t - R_x - [P, R])\psi = 0.$$

Откуда получаем уравнение

$$P_t - P_x = [P, R], \quad (7.145)$$

формально совпадающее с (7.141).

Естественно рассматривать задачу в более общей постановке, считая, что P и R являются рациональными функциями λ . Разлагая их на простые дроби, положим

$$P = l_0 \lambda^n + u_1 \lambda^{n-1} + \dots + u_n + \sum p_i,$$

$$p_i = \sum_{j=1}^{s_i} \frac{p_{ij}}{(\lambda - \lambda_i)^j}; \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad (7.146)$$

$$R = a_0 \lambda^m + v_1 \lambda^{m-1} + \dots + v_m + \sum Q_i,$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{Q_{ij}}{(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_i)^j}; \quad \tilde{\lambda}_i \neq \tilde{\lambda}_j. \quad (7.147)$$

Здесь $\lambda_i, \tilde{\lambda}_i$ — комплексные константы.

Условия на матрицы u_i, v_i, p_{ij}, Q_{ij} должны быть получены непосредственно подстановкой (7.146) и (7.147) в (7.145).

Очевидно, что прежде всего для существования таких уравнений необходима коммутативность матриц l_0 и a_0 . При выполнении этого условия уравнения всегда существуют, но могут определяться неоднозначно. Легко проверить, что для однозначного определения уравнений на u_i, v_i, p_{ij}, Q_{ij} из (7.145) необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий.

1) По крайней мере одно из чисел m, n равно нулю.

2) Ни одно из чисел λ_i не совпадает ни с одним из чисел $\tilde{\lambda}_i$.

Для доказательства этого утверждения заметим, что при выполнении условий 1, 2 в коммутаторе $[P, R]$ не появляется ни новых степеней λ , ни новых простых дробей, не содержащихся в P или R . Поэтому коммутатор может быть переразложен по тем же степеням и по тем же простым дробям, что и P и R . Тем самым все уравнения определяются однозначно.

Приведем несколько примеров.

1) Пусть

$$P = \frac{p_1}{\lambda - a}; \quad R = \frac{q_1}{\lambda + a}.$$

Из (7.145) следует

$$p_{1t} - q_{1x} = 0; \quad a(p_{1t} + q_{1x}) = [p_1, q_1].$$

Или возьмем

$$p_1 = \Phi_x; \quad q_1 = \Phi_t;$$

$$2a\Phi_{xt} = [\Phi_x, \Phi_t]. \quad (7.148)$$

Полагая $\xi = x + t, \eta = x - t$, приведем систему (7.148) к виду

$$a \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = [\Phi_\xi, \Phi_\eta],$$

из которого видна ее релятивистская инвариантность.

2) Пусть $p = v/\lambda; R = I\lambda - \omega$.

После подстановки в (7.145) возникает система (7.130).

В матрицах 2×2 система (7.130) совпадает с уравнениями Блоха — Бломбергена, описывающими распространение световых импульсов в двухуровневой среде с бесконечными временами релаксации. Полагая в этих уравнениях

$$I = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = i \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = i \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix},$$

придем к известному уравнению sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + 2 \sin 2\varphi = 0. \quad (7.149)$$

$$3) P = I\lambda + u + \frac{x}{\lambda}; \quad R = J\lambda + w.$$

Этот пример не удовлетворяет условию 1, поскольку $m = n = 1$. Подставляя в (7.145), получаем

$$[I, w] = [J, u], \quad (7.150)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} = -[J, v] + [u, w], \quad (7.151)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = [v, w]. \quad (7.152)$$

Неоднозначности в этих уравнениях можно избежать, предполагая, что матрицы u, w возникли (если $v = 0$) из канонических операторов, т. е. что

$$u = [I, Q], \quad w = [J, Q]. \quad (7.153)$$

Тогда при $v = 0$ система (7.153) совпадает с (7.32) при $\partial/\partial z = 0$. Аналогичные трудности неоднозначности возникают и при наличии у знаменателей $R(x, t, \lambda)$ и $P(x, t, \lambda)$ совпадающих нулей.

Правила доопределения в этом случае, в частности обосновывающие выбор (7.153), будут сформулированы в разд. 7.10.

Обратимся теперь к уравнениям (7.121), допускающим « L, \hat{A}, B -тройки». Их можно представить как условия совместности двух уравнений

$$\hat{L}_0 \psi_x + \hat{L}_1 \psi = 0, \quad (7.154)$$

$$\psi_t + \hat{A}_\psi = 0, \quad (7.155)$$

причем операторы L_0, L_1 содержат производные только по z , а оператор \hat{A} — по x и z . Пусть коэффициенты этих операторов не зависят от z , а коэффициенты оператора L_0 — также и от x и t (что согласуется с правилом одевания троек). Совершая преобразование Фурье по z , придем от уравнения (7.154) к уравнению

$$\psi_x = \frac{P_1(x, t, \lambda)}{P_2(\lambda)} \psi, \quad (7.156)$$

где $P_1(\lambda, x, t)$ и $P_2 = \det \| e^{-\lambda z} \hat{L}_0 e^{\lambda z} \|$ многочлены по λ .

При помощи формулы (7.156) легко вычислить высшие производные ψ по x . Очевидно, что

$$\psi^{(n)} = \frac{P_n(x, t, \lambda)}{[P_2(\lambda)]^n}. \quad (7.157)$$

Выражая производные по x в уравнении (7.155), используя (7.157), мы приходим к уравнению (7.143), в котором, однако, рациональная функция R имеет весьма специальный вид — в частности, ее знаменатель есть степень знаменателя функции P . В частном случае уравнений (7.128), когда оператор \bar{A} не содержит производных по x , P — произвольная рациональная функция, а R — многочлен.

Естественно предположить, что и общее уравнение (7.145) для произвольных рациональных операторных пучков является результатом отбрасывания производных по z у некоторого более сложного уравнения, но его вычисление уже выходит за рамки настоящей работы.

Можно поставить еще вопрос о сохранении по t спектра операторного пучка, содержащего более высокие производные. Пусть, например, совместны при всех λ следующие системы:

$$\psi_{xx} = P(x, t, \lambda)\psi, \quad (7.158)$$

$$\psi_t = R(x, t, \lambda)\psi_x + R_1(x, t, \lambda)\psi. \quad (7.159)$$

Дифференцируя (7.158) по t , а (7.159) дважды по x , вычитая результаты и выражая ψ_t , ψ_{xx} , ψ_{xxx} из (7.158) и (7.159), получим, приравнявая нулю коэффициенты при ψ , ψ_x ,

$$[P, R] = R_{xx} + 2R_{1x}, \quad (7.160)$$

$$P_t + [P, R_1] - 2R_x P - R D_x - R_{1xx} = 0. \quad (7.161)$$

Если P , R , R_1 коммутируют (являются числами или принадлежат коммутативной матричной алгебре), уравнения (7.160), (7.161) упрощаются до одного уравнения

$$P_t - 2R_x P - R P_x + \frac{1}{2} R_{xxx} = 0. \quad (7.162)$$

Подставляя в (7.152) P и R в виде (7.146) (7.147), легко получить уравнения на коэффициенты u_i , p_{ij} , v_i , Q_{ij} , обеспечивающие совместность (7.158), (7.159). При этом, однако, можно не накладывать никаких ограничений на степени m , n или на числа λ_i , $\tilde{\lambda}_i$ — в любом случае возникает определенная система уравнений. Приведем несколько примеров.

$$\begin{aligned} 1) \quad & P = \lambda + u, \\ & R = \lambda^m + v_1 \lambda^{m-1} + \dots + v_m. \end{aligned} \quad (7.163)$$

При подстановке (7.163) в (7.162) мы, очевидно, получим уравнения, определяющие $\mathcal{L} - \bar{A}$ -пару, если оператор \mathcal{L} есть $(d^2/dx^2) - u$, а оператор \bar{A} скалярный порядка $2m + 1$. В частности при $m = 1$, выбирая $R = 4\lambda + v$, из (7.162) получаем $v = -2u$, $u_t + 6u u_x - u_{xxx} = 0$, что в скалярном случае совпадает с уравнением КдФ.

Если R - рациональная функция, то возникают уравнения, уже не обладающие $\mathcal{L}-\bar{A}$ -парой. Так, например, полагая $R = v/\lambda$, получим систему

$$\begin{aligned} u_t &= 2v_x, \\ v_{xxx} &= 4uv_x + 2vu_x. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} P &= \lambda^2 + u_1\lambda + u_2, \\ R &= \lambda + u. \end{aligned} \quad (7.164)$$

Имеем систему, описывающую длинные волны на мелкой воде [7.30]:

$$\begin{aligned} u_{1t} + \frac{3}{2} u_1 u_{1x} - u_{2x} &= 0, \\ u_{2t} + u_2 u_{1x} + \frac{1}{2} u_2 u_{2x} - \frac{1}{4} u_{1xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (7.165)$$

3)
$$\begin{aligned} P &= \lambda + u + \frac{v}{\lambda}, \\ R &= \lambda + w, \\ w &= -\frac{1}{2} u, \\ u_t + \frac{3}{2} u u_x - \frac{1}{4} u_{xxx} &= v_x, \\ v_t + v u_x + \frac{1}{2} u v_x &= 0. \end{aligned} \quad (7.166)$$

В более общих некоммутативных уравнениях (7.161) ситуация сложнее - они накладывают жесткие ограничения на вид зависимости P , R и R_1 от λ . При подстановке произвольных полиномов от λ в уравнение (7.161) мы получим, вообще говоря, неопределенную систему уравнений для коэффициентов. Тем не менее, в некоторых случаях эта переопределенная система имеет решения - это следует хотя бы из того обстоятельства, что уравнение типа (7.158) можно получить из системы двух уравнений первого порядка (7.142).

С формальной точки зрения все уравнения, получаемые из (7.158), (7.159), можно рассматривать как частные случаи уравнений, получаемых при помощи общей процедуры (7.142), (7.143), поскольку уравнение (7.158) можно свести к системе уравнений первого порядка (7.142) (7.143), в удвоенной по сравнению с (7.158) размерности, причем матрицы P и R имеют вид

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ P & 0 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & R \\ P + R_{1x} & R_x + R_1 \end{bmatrix}, \quad (7.167)$$

а вектор $\psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \psi_x \end{bmatrix}$. Нетривиальным является, однако, что матрица P , выбранная в виде (7.167), сохраняет этот вид и во времени.

7.10. «Одевание» операторных пучков [7.31]

Опишем теперь метод построения решений уравнений, описанных в разд. 7.9, а также метод доопределения уравнений, где это необходимо. Как и в разд. 7.2, для построения уравнений (и их решений) нам потребуются «затравочные» коммутирующие операторы с постоянными коэффициентами. Для этого рассмотрим две коммутирующие рациональные функции λ : $P_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$, причем $[P_0, R_0] = 0$. Предполагается, что P_0 и R_0 — квадратные матрицы порядка N .

Рассмотрим произвольный контур G в комплексной плоскости λ и припишем ему матричную функцию $S(\lambda)$. Построим сингулярное интегральное уравнение для матричной функции $\tilde{\psi}(\lambda)$:

$$\tilde{\psi}(\lambda) = S(\lambda) + \int_G \frac{\tilde{\psi}(\lambda')}{\lambda - \lambda' + i0} d\lambda' S(\lambda). \quad (7.168)$$

Наложим на контур G и функцию $S(\lambda)$ единственное требование — чтобы (7.168) было однозначно определено. (Этого всегда можно добиться, например, выбирая функцию $S(\lambda)$ достаточно малой.)

Кроме того, пусть теперь $S(\lambda)$ зависит от двух параметров x и t :

$$S(\lambda, x, t) = \exp[P_0(\lambda)x + R_0(\lambda)t] S(\lambda) \exp[-P_0(\lambda)x - R_0(\lambda)t]. \quad (7.169)$$

Следовательно, это приведет к

$$S_x = [P_0(\lambda), S], \quad (7.170)$$

$$S_t = [R_0(\lambda), S]. \quad (7.171)$$

Покажем теперь, что функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет двум уравнениям

$$\tilde{\psi}_x = P(\lambda, x, t) \tilde{\psi} - \tilde{\psi} P_0(\lambda), \quad (7.172)$$

$$\tilde{\psi}_t = R(\lambda, x, t) \tilde{\psi} - \tilde{\psi} R_0(\lambda), \quad (7.173)$$

где P и R — некоторые матрицы, явно выражаемые через $\tilde{\psi}$, P_0 , R_0 . Обозначим

$$\chi = \tilde{\psi}_x - P\tilde{\psi} + \tilde{\psi}P_0. \quad (7.174)$$

Продифференцируем (7.168) по x и t и выразим $\tilde{\psi}_x$ через χ . После простых операций с использованием (7.168), (7.170) получим

$$\chi(\lambda) = gS(\lambda) + \int \frac{\chi(\lambda')}{\lambda - \lambda' + i0} d\lambda' S(\lambda), \quad (7.175)$$

где

$$g(\lambda, x, t) = [P_0(\lambda) - P(\lambda, x, t)] + \int \frac{P(\lambda') - P(\lambda)}{\lambda - \lambda' + i0} \tilde{\psi}(\lambda') d\lambda' + \int \frac{\tilde{\psi}(\lambda')}{\lambda - \lambda' + i0} [P_0(\lambda) - P_0(\lambda')] d\lambda' \quad (7.176)$$

Выберем матрицу P так, чтобы $g \equiv 0$. Из того, что (7.168) имеет единственное решение, следует, что $\chi \equiv 0$, т. е. выполняется (7.172). Аналогично матрица $R(\lambda)$ может быть подобрана так, чтобы выполнялось (7.173).

Представив

$$\tilde{\psi} = \psi e^{-P_0(\lambda)x - R_0(\lambda)t}, \quad (7.177)$$

убеждаемся, что ψ удовлетворяет (7.142), (7.143) и, следовательно, матрицы P и R удовлетворяют (7.145).

Исследуем подробнее условие $g \equiv 0$, т. е.

$$P(\lambda, x, t) - P_0(\lambda) = \int \psi(\lambda') \frac{P_0(\lambda) - P_0(\lambda')}{\lambda - \lambda'} d\lambda' - \int \frac{P(\lambda, x, t) - P(\lambda', x, t)}{\lambda - \lambda'} \psi(\lambda') d\lambda'. \quad (7.178)$$

Пусть $P_0(\lambda)$ разложено на элементарные дроби. Будем искать $P(\lambda, x, t)$ в виде рациональной функции от тех же самых элементарных дробей, что и $P_0(\lambda)$. Равенство (7.178) выполняется в каждом полюсе $P_0(\lambda)$ (включая и случай $\lambda = \infty$), поэтому можно считать, что

$$P_0(\lambda) = \frac{p_{01}}{\lambda - \lambda_0} + \dots + \frac{p_{0k}}{(\lambda - \lambda_0)^k},$$

$$P(\lambda) = \frac{p_1}{\lambda - \lambda_0} + \dots + \frac{p_k}{(\lambda - \lambda_0)^k}. \quad (7.179)$$

Подставляя (7.179) в (7.178), получим систему уравнений для p_k :

$$\begin{aligned} p_k - p_{0k} &= p_k I_1 - I_1 p_{0k}, \\ p_{k-1} - p_{0, k-1} &= p_{k-1} I_1 - I_1 p_{0, k-1} + p_k I_2 - I_2 p_{0k}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.180)$$

Здесь

$$I_k(x, t) = \int \frac{\psi(\lambda', x, t)}{(\lambda' - \lambda_0)^k} d\lambda'. \quad (7.181)$$

Система уравнений (7.180) может быть разрешена рекуррентно:

$$\begin{aligned} p_k &= (1 - I_1) p_{0k} (1 - I_1)^{-1}, \\ p_{k-1} &= (1 - I_1) p_{0, k-1} (1 - I_1)^{-1} + (p_k I_2 - I_2 p_{0k}) (1 - I_1)^{-1}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.182)$$

Аналогично могут быть найдены коэффициенты полиномиальной части P . Полагая

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= l_0 \lambda^n + l_1 \lambda^{n-1} + \dots \\ P(\lambda) &= l_0 \lambda^n + u_1 \lambda^{n-1} + \dots \end{aligned} \quad (7.183)$$

и подставляя (7.183) в (7.178), получим рекуррентные соотношения

$$u_1 = l_1 + [J_0, l_0], \quad (7.184)$$

$$u_2 = l_2 + J_0 l_1 - u_1 J_0 + [J_1, l_0], \quad (7.185)$$

...

Здесь

$$J_i = \int \lambda^i \psi(\lambda, x, t) d\lambda. \quad (7.186)$$

Подобным образом коэффициенты матрицы $R(\lambda, x, t)$ могут быть выражены через $R_0(\lambda)$, I_i и J_i . Этот процесс построения переменных матриц P и R из постоянных матриц P_0 и R_0 может быть назван процессом «одевания» «затравочных» или «голых» матриц. Процесс одевания устраняет неоднозначность в построении интегрируемых уравнений, когда P и R имеют совпадающие полюса. Все их коэффициенты при полюсе n -го порядка выражаются через n величин I_k и через коммутирующие величины p_{0k} , R_{0k} . В частности, если P и R имеют простой полюс, то при этом полюсе

$$\begin{aligned} p_1 &= (1 - I_1) p_{01} (1 - I_1)^{-1}, \\ R_1 &= (1 - I_1) R_{01} (1 - I_1)^{-1}, \end{aligned} \quad (7.187)$$

т. е. коммутирующие матрицы p_1 , R_1 подобны постоянным матрицам p_{01} и R_{01} относительно одинакового преобразования (это следует из (7.145)!). Сходным образом устраняются неоднозначности полиномиальных частей P и R . Из (7.184) следует, что там, где $p_1 = 0$, P и R являются каноническими.

Метод одевания позволяет нам по следующей схеме найти решение задачи Коши по t для уравнений, описанных в разд. 7.9:

$$\begin{aligned} P|_{t=0} \rightarrow \Psi(\lambda, x)|_{t=0} \rightarrow S(\lambda, x)|_{t=0} \rightarrow S(\lambda, x, t) \rightarrow \Psi(\lambda, x, t) \rightarrow \\ \rightarrow P(\lambda, x, t). \end{aligned} \quad (7.188)$$

Аналогично может быть решена задача Коши по x . Более того, произвольно выбирая G и $S(\lambda)$, можно построить различные точные решения рассматриваемых уравнений. В частности, контур можно выбрать в виде набора дискретных точек μ_i (не совпадающих с полюсами P и $R!$), и заменить интеграл (7.168) на сумму

$$\tilde{\Psi}_n = S_n + \sum_{m \neq n} \frac{\tilde{\Psi}_n}{\mu_n - \mu_m} S_n. \quad (7.189)$$

Это — линейная алгебраическая система уравнений. Ее решение может быть найдено в явном виде. Теперь очевидно, что

$$S_n(x, t) = \exp [P_0(\mu_n)x + R_0(\mu_n)t] S_n \times \exp [-P_0(\mu_n)x - R_0(\mu_n)t]; \quad (7.190)$$

$$I_k = \sum_n \frac{\bar{\Psi}_n(x, t)}{(\mu_n - \lambda_0)^k}; \quad J_k = \sum_n \mu_n^k \bar{\Psi}_n. \quad (7.191)$$

В простейшем случае, в котором существует всего только две точки $\mu_1, \mu_2, \mu_1 - \mu_2 = \mu$, решение системы (7.189) принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \mu (\mu S_1 + S_2^2) (\mu^2 + S_1 S_2)^{-1}, \\ \psi_2 &= \mu (\mu S_2 - S_1^2) (\mu^2 + S_2 S_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.192)$$

Формула (7.192) содержит большой класс физически важных решений уравнений разд. 7.9, аналогичных односолитонным решениям.

Пусть контуром G является действительная ось $-\infty < \lambda < \infty$. Далее, пусть $\bar{\Psi}(\lambda)$ и $S(\lambda)$ имеют абсолютно интегрируемые фурье-преобразования. Тогда (7.168) равносильно уравнению

$$K(z - z') + F(z - z') + \int_z^\infty K(z - z'') F(z'' - z') dz'' = 0, \quad (7.193)$$

где

$$\begin{aligned} K(\zeta) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}(\lambda) e^{i\lambda\zeta} d\lambda, \\ F(\zeta) &= i \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) e^{i\lambda\zeta} d\lambda. \end{aligned} \quad (7.194)$$

Пусть F и K будут ядрами некоторых интегральных операторов, а R — оператор Вольтерра справа. Очевидно, что уравнение (7.193) связано с проблемой факторизации оператора F с ядром, зависящим только от разности аргументов, если он задан в виде произведения вольтерровских операторов. С другой точки зрения (7.168) решает задачу Римана о связи матричных функций, аналитических на противоположных сторонах контура G . Введем

$$\varphi^\pm(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{\Psi}(\lambda')}{\lambda - \lambda' \pm i0} d\lambda'. \quad (7.195)$$

Как известно,

$$\bar{\Psi}(\lambda) = \varphi^-(\lambda) - \varphi^+(\lambda),$$

и теперь из (7.168) следует, что

$$\varphi^- = S + \varphi^+ (1 + 2\pi i S) \quad (7.196)$$

является линейным соотношением, связывающим аналитические матрицы $\Phi^\pm(\lambda)$ на контуре G . Теория матричной функции Римана в связи с уравнениями из разд. 7.5 была детально разработана в [7.31], где показано, что имеются определенные ограничения на вид $P_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$. Уравнение (7.168) можно рассматривать как уравнение Гельфанда — Левитана, которое решает обратную задачу рассеяния для операторов (7.172), (7.173). Ясно, что для уравнений, допускающих введение $\hat{L} - \hat{A}$ пары или $\hat{L} - \hat{A} - \hat{B}$ триады, метод одевания, изложенный выше, является вариантом метода, описанного в разд. 7.4.

ЛИТЕРАТУРА

- 7.1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. — Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967).
- 7.2. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — Stud. Appl. Math. 53, 249 (1974).
- 7.3. Lax P. D. — Comm. Pure Appl. Math. 21, 467 (1968).
- 7.4. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ 61, 118 (1971).
- 7.5. Захаров В. Е. — ЖЭТФ 65, 219 (1973).
- 7.6. Wadati M. — J. Phys. Soc. Jpn. 34, 1289 (1973).
- 7.7. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — Функци. анализ 8, вып. 3, 43 (1974).
- 7.8. Захаров В. Е., Манаков С. В. — Письма в ЖЭТФ 18, № 7, 413 (1973).
- 7.9. Захаров В. Е., Манаков С. В. — ЖЭТФ 69, 1654 (1975).
- 7.10. Кауп Д. Дж. — Stud. Appl. Math. 55, 9, (1976).
- 7.11. Calogero F., Degasperis A. — Lett. Nuovo Cimento 16, 425 (1976)
- 7.12. Calogero F. — Lett. Nuovo Cimento 14, 433 (1975).
- 7.13. Захаров В. Е., Манаков С. В. — ТМФ 27, 283 (1976).
- 7.14. Hirota R., Satsuma I. — J. Phys. Soc. Jpn. 40, 611 (1976).
- 7.15. Нижник Л. П. Нестационарная обратная задача рассеяния. — Киев: Наукова Думка, 1973.
- 7.16. Шабат А. Б. — ДАН СССР 211, 1310 (1973); см. также: Захаров В. Е. Метод обратной задачи рассеяния. — В кн.: «Теория упругости среды с микроструктурой» под ред. Кунинной И. А. — М.: Наука, 1975.
- 7.17. Bloembergen N. — Nonlinear Optics, a Lecture Note. — W. A. Benjamin, New York — Amsterdam, 1965.
- 7.18. Манаков С. В. — Функци. анализ 10, 93 (1976).
- 7.19. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
- 7.21. Манаков С. В. — ЖЭТФ 67, 543, (1974).
- 7.22. Кадомцев В. Б., Петвиашвили В. И. — ДАН СССР 192, 753 (1970).
- 7.23. Захаров В. Е. — ЖЭТФ 62, 1945 (1972).
- 7.24. Yajima N., Oikawa M. Formation and Interaction of Sonic-Langmuir Solitons (Inverse scattering method). — Preprint, Research Inst. of Appl. Mech. Phys., Japan, 1976.
- 7.25. Захаров В. Е. — Письма в ЖЭТФ 22, 364 (1975).
- 7.26. Захаров В. Е. — ДАН СССР 229, 1314 (1976).
- 7.27. Манаков С. В. — УМН 31 (5), 245 (1976).
- 7.28. Тахтаджян Л. А. — ЖЭТФ 66, 476 (1974).
- 7.29. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. — ДАН СССР 219, 1334 (1974).
- 7.30. Кауп Д. Дж. A Higher Order Water Wave Equation and the Method for Solving It. — Preprint, New York, 1975.
- 7.31. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — Функци. анализ 13(3), 13 (1979).

8. ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЧНАЯ ФОРМА МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

М. Вадати

В настоящей статье дается обзор результатов по матричному обобщению метода обратной задачи рассеяния. В первой части статьи обсуждается обратная задача рассеяния для матричного ($n \times n$) уравнения Шрёдингера. Во второй части метод обратной задачи рассеяния обобщается на матричный случай. Приводятся матричные нелинейные эволюционные уравнения, которые могут быть проинтегрированы с помощью предложенного обобщения. В заключение подчеркивается, что подобное обобщение возможно и для дискретного случая (решеточные задачи).

8.1. Исторические замечания

Обзор краткой истории метода обратной задачи рассеяния (иногда МОЗР для краткости) позволяет прояснить мотивировку и цели матричного обобщения, предлагаемого ниже.

В 1967 г. Гарднер с соавторами [8.1] открыли метод интегрирования уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ). Они рассмотрели уравнение Шрёдингера, потенциал которого является решением уравнения КдФ, и показали, что точные решения уравнения КдФ могут быть получены с помощью решения обратной задачи рассеяния для уравнения Шрёдингера. В общей форме этот метод вскоре был сформулирован Лаксом [8.2]. Он заметил, что «унитарная эквивалентность» ассоциированного оператора является сущностью метода. В 1972 г. Захаров и Шабат [8.3] проинтегрировали с помощью МОЗР нелинейное уравнение Шрёдингера. Они использовали матричный оператор 2×2 дираковского типа с производными первого порядка. Их работа оказалась весьма существенной для развития метода обратной задачи рассеяния. Стало ясно, что МОЗР пригоден не только для интегрирования уравнения КдФ. Впоследствии автором было показано, что модифицированное уравнение КдФ интегрируемо с помощью формализма Захарова — Шабата. Другая существенная особенность работы Захарова и Шабата состоит в том, что вспомогательный линейный оператор не эрмитов. Следовательно, унитарная эквивалентность Лакса не единственный путь построения МОЗР. Заметив это, Абловиц с соавторами (АКНС) [8.5] показали, что уравнение sine-Gordon в ко-

нусных переменных также интегрируемо, и упростили формулировку метода обратной задачи рассеяния.

Под влиянием работы Захарова и Шабата в ходе интегрирования модифицированного уравнения КдФ автор заметил, что МОЗР может быть сформулирован с помощью матричного уравнения Шрёдингера. Приблизительно в то же самое время Лэм [8.6] получил сходный результат при исследовании распространения когерентного импульса в нелинейной оптике. Наличие более общих задач на собственные значения, для которых обратная задача рассеяния разрешима, также способствовало дальнейшему прояснению возможностей МОЗР. После этого обобщенная матричная форма МОЗР была предложена в работе [8.7]. Вскоре автор заметил возможность подобного обобщения для задач на решетке.

Без сомнения, МОЗР является одним из крупнейших открытий современной математической физики. Здесь хочется сделать два замечания. Во-первых, метод обратной задачи рассеяния — единственный метод, позволяющий точно решить задачу Коши для нелинейных уравнений. Во-вторых, он естественно приводит к выводу, что солитонные системы являются вполне интегрируемыми системами.

Настоящая работа посвящена подведению итогов обобщенной матричной формулировки метода обратной задачи рассеяния. В разд. 8.2 рассматривается обратная задача рассеяния для матричного $m \times m$ уравнения Шрёдингера. В разд. 8.3 МОЗР обобщается на матричный случай. Приводятся интегрируемые уравнения, связанные с матричным уравнением Шрёдингера. Последний раздел содержит заключительные замечания.

8.2. Обратная задача рассеяния

Рассмотрим задачу на собственные значения для матричного $m \times m$ оператора Шрёдингера на всей прямой ($-\infty < x < \infty$)

$$L\psi(x, k) = \lambda\psi(x, k), \quad \lambda = k^2, \quad (8.1)$$

где

$$L = -(\partial^2/\partial x^2)I + U(x), \quad (8.2)$$

$$I = (\delta_{ij}), \quad U(x) = (u_{ij}(x)); \quad i, j = 1, \dots, m,$$

$$\tilde{\psi}(x, k) = [\psi_1(x, k), \psi_2(x, k), \dots, \psi_m(x, k)]. \quad (8.3)$$

Каждый набор из m решений системы (8.1) может быть представлен матрицей $\Psi(x, k)$ размером $m \times m$, удовлетворяющей уравнению

$$-\Psi''(x, k) + U(x)\Psi(x, k) = k^2\Psi(x, k). \quad (8.4)$$

Пусть потенциал $U(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- а) потенциал $U(x)$ эрмитов, т. е. $U^*(x) = U(x)$;
 б) потенциал $U(x)$ непрерывен и достаточно быстро убывает при $|x| \rightarrow \infty$.

В конце этого раздела будут приведены необходимые пояснения к этим предположениям. Далее формулировки теорем и лемм приводятся без доказательств, которые могут быть найдены в оригинальной работе [8.7].

8.2.1. Функции Йоста

Введем для вещественных k функции Йоста $F(x, k)$ и $G(x, k)$ как решения уравнения (8.4), нормированные следующими граничными условиями на бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, k) \exp(-ikx) &= I, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x, k) \exp(ikx) &= I. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Условие б позволяет доказать аналитичность $F(x, k)$ и $G(x, k)$ в верхней полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$.

8.2.2. Фундаментальная система решений

Для вещественных k пары $F(x, k)$; $F(x, -k)$ и $G(x, k)$; $G(x, -k)$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (8.4). Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} W\{F^*(x, \bar{k}), F(x, k)\} &= -W\{G^*(x, \bar{k}), G(x, k)\} = 2ikI, \\ W\{F^*(x, \bar{k}), F(x, -k)\} &= W\{G^*(x, \bar{k}), G(x, -k)\} = 0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где

$$W\{Y^*(x), Z(x)\} = Y^*(x)Z'(x) - Y'^*(x)Z(x) \quad (8.7)$$

есть вронскиан матричных функций Y и Z , а черта означает комплексное сопряжение. Следовательно, G может быть представлено в виде линейной комбинации $F(x, k)$ и $F(x, -k)$, а $F(x, k)$ в виде линейной комбинации $G(x, k)$ и $G(x, -k)$:

$$G(x, k) = F(x, -k)A(k) + F(x, k)B(k), \quad (8.8a)$$

$$F(x, k) = G(x, -k)C(k) + G(x, k)D(k). \quad (8.8b)$$

Для совместности соотношений (8.8) необходимо, чтобы было выполнено

$$\begin{aligned} B(k)D(k) + A(-k)C(k) &= D(k)B(k) + C(-k)A(k) = I, \\ A(k)D(k) + B(-k)C(k) &= C(k)B(k) + D(-k)A(k) = 0, \end{aligned} \quad (8.9)$$

Матричные коэффициенты $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ могут быть выражены через вронскианы решений $F(x, k)$; $G(x, k)$ и их комплексно-сопряженные при вещественных k :

$$\begin{aligned} A(k) &= -W \{F^*(x, -k), G(x, k)\}/2ik; \\ B(k) &= W \{F^*(x, k), G(x, k)\}/2ik, \\ C(k) &= W \{G^*(x, -k), F(x, k)\}/2ik; \\ D(k) &= -W \{G^*(x, k), F(x, k)\}/2ik. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Из (8.10) следует, что

$$A(k) = C^*(-k), \quad B(k) = -D^*(k). \quad (8.11)$$

Для комплексных k ($\text{Im } k \geq 0$) матричные коэффициенты определим следующим образом:

$$\begin{aligned} A(k) &= -W \{F^*(x, -\bar{k}), G(x, k)\}/2ik; \\ B(k) &= W \{F^*(x, \bar{k}), G(x, k)\}/2ik, \\ C(k) &= W \{G^*(x, -\bar{k}), F(x, k)\}/2ik; \\ D(k) &= -W \{G^*(x, \bar{k}), F(x, k)\}/2ik. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Это определение совпадает с (8.10) на вещественной оси. Так как F , G , $F^*(x, -\bar{k})$, $G^*(x, -\bar{k})$ аналитичны в верхней полуплоскости, то $A(k)$ и $C(k)$ также аналитичны в верхней полуплоскости. Из (8.12) следует, что при комплексных k ($\text{Im } k \geq 0$) выполнены соотношения

$$A(k) = C^*(-\bar{k}); \quad B(k) = -D^*(\bar{k}). \quad (8.13)$$

Приведем формулировки двух лемм, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 1. При вещественных k , $\det A(k) \neq 0$.

Лемма 2. При $|k| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A(k) &= I + O(k^{-1}); \quad B(k) = O(k^{-1}); \\ C(k) &= I + O(k^{-1}); \quad D(k) = O(k^{-1}). \end{aligned} \quad (8.14)$$

8.2.3. Связанные состояния

Связанные состояния определяются при тех k , для которых

$$\det A(k) = 0. \quad (8.15)$$

Если для данного k_j условие (8.15) выполнено, то существует ненулевой вектор \mathbf{a} такой, что $A(k_j)\mathbf{a} = 0$. В этом случае существует решение основной системы (8.1) такое, что

$$\Psi(x, k_j) = G(x, k_j)\mathbf{a} = F(x, k_j)B(k_j)\mathbf{a}. \quad (8.16)$$

Из граничных условий (8.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \psi(x, k_j) &\rightarrow \exp(-ik_j x) \text{ а при } x \rightarrow -\infty, \\ &\rightarrow \exp(ik_j x) \text{ а при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Следовательно, при $k = k_j$ ($\text{Im } k_j \geq 0$) у системы (8.1) имеется решение, квадратично-интегрируемое на всей оси. Так как потенциал $U(x)$ эрмитов, то энергия k_j^2 вещественна, и тогда $k_j = i\kappa_j$ (где κ_j — вещественное положительное число).

Таким образом, связанным состояниям соответствуют в точности такие точки k , $\text{Im } k_j \geq 0$, $\text{Re } k_j = 0$, что $\det A(k_j) = 0$, и в которых тем самым $A^{-1}(k)$ имеет полюс.

Как следует из леммы 1, $\det A(k)$ не равен нулю на вещественной оси. Более того, из асимптотики (8.14) вытекает, что $\det A(k)$ отличен от нуля для достаточно больших k . Следовательно, $\det A(k)$ может иметь лишь конечное число нулей, что означает конечность числа связанных состояний. Таким образом, мы приходим к следующей важной теореме.

Теорема 1. Все особенности матрицы $A^{-1}(k)$ в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$ являются простыми полюсами. В окрестности каждого полюса $k_j = i\kappa_j$ (κ_j — вещественное, положительное) матрица $A^{-1}(k)$ имеет вид

$$A^{-1}(k) = N_j(k - k_j)^{-1} + O(1), \quad (8.18)$$

где $N_j \neq 0$.

8.2.4. Уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

Представим функцию Йоста в следующей форме:

$$F(x, k) = \exp(ikx) I + \int_x^\infty K(x, y) \exp(iky) dy. \quad (8.19)$$

Подстановка выражения (8.19) для F в (8.4) дает

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = -\frac{1}{2} U(x), \quad (8.20)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + U(x) \right] K(x, y) = 0. \quad (8.21)$$

Равенство (8.8а), согласно лемме 1, может быть записано в виде

$$G(x, k) A^{-1}(k) = F(x, -k) + F(x, k) R(k), \quad (8.22)$$

где

$$R(k) = B(k) A^{-1}(k). \quad (8.23)$$

Из (8.9), (8.11) легко вытекает, что $R(k) = R^*(-k)$. Матрица $R(k)$ будет называться матричным коэффициентом отражения.

Выведем уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко. Фурье-преобразование (8.22) и соотношения (8.16), (8.18),

(8.19) позволяют получить, что

$$K(x, y) + H(x + y) + \int_x^{\infty} K(x, z) H(y + z) dz = 0, \quad x \leq y, \quad (8.24)$$

где

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk R(k) \exp ikx - i \sum_{j=1}^s R_j \exp(tk_j x), \quad (8.25a)$$

$$R_j = B(k_j) N_j. \quad (8.25b)$$

Уравнения (8.24) вместе с соотношениями (8.25) и будут называться уравнениями Гельфанда — Левитана — Марченко. Совокупность величин

$$\{R(k), k_j^2, R_j\}, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (8.26)$$

называется данными рассеяния для задачи (8.1). Уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко позволяют по данным рассеяния найти $K(x, y)$ и затем получить потенциал $U(x)$ из (8.20).

Таким образом доказано, что обратная задача рассеяния для системы (8.1) может быть решена, что позволяет применить МОЗР. При рассмотрении этой задачи были сделаны два предположения о потенциале $U(x)$. Условие б) нас здесь не очень интересует, и мы не будем акцентировать внимание на нем. Условие а) весьма существенно, поскольку во многих случаях потенциал $U(x)$ оказывается не эрмитовым. В настоящее время остается открытым вопрос о том, при каких наиболее общих условиях на потенциал обратная задача разрешима.

Рассматривались следующие три случая:

I) U диагональна (и, возможно, комплексна),

II) $U = JUJ$, J постоянная матрица, $J^2 = 1$,

III) $U^* = JUJ$, J постоянная матрица, $J^2 = 1$.

Первым существенным моментом анализа этих случаев является определение вронскиана. Хотя при этом нужны некоторые дополнительные предположения, рассуждения, аналогичные предшествующим, представляются верными. Случай I изучался для 2×2 -матрицы, связанной с уравнением (8.41). Хотелось бы добавить, что следовало бы изучить случай периодических граничных условий.

8.3. Метод обратной задачи рассеяния и интегрируемые уравнения

Пусть задано нелинейное эволюционное уравнение вида

$$U_t = S\{U\}, \quad (8.27)$$

где S — нелинейный оператор, а матричная функция $U(x, t)$ имеет размер $m \times m$. Предположим, что можно выбрать для

оператора L , линейного по U , такой матричный оператор B , что (8.27) запишется в операторной форме

$$L_t = [B, L] = BL - LB. \quad (8.28)$$

Вместо того чтобы решать (8.28), рассмотрим задачу на собственные значения

$$L\psi = \lambda\psi, \quad (8.29)$$

собственные функции которой изменяются во времени по формуле

$$\psi_t = B\psi. \quad (8.30)$$

Из эволюционных уравнений для L и ψ легко следует, что собственные значения λ не зависят от времени, т. е.

$$\lambda_t = 0. \quad (8.31)$$

Таким образом, нелинейные уравнения (8.27), эквивалентные уравнениям (8.28), эквивалентны в свою очередь набору уравнений (8.29) — (8.31). Исследование обратной задачи для (8.29) показывает, что матричная функция $U(x, t)$ может быть восстановлена по данным рассеяния. Зависимость данных рассеяния от времени определяется из (8.30) при стремлении $x \rightarrow \pm \infty$. Эта процедура нахождения решений системы (8.27) и есть обобщение метода обратной задачи рассеяния на матричный случай.

Следует заметить, что

I) если $L^+ = L$, то $B^+ = -B$,

II) если $L^+ = JLJ$ ($J^+ = J$, $J^2 = 1$), то $B^+ = -JB$,

III) если $\tilde{L} = JLJ$ ($J = J$, $J^2 = 1$), то $\tilde{B} = -JB$.

Беря в качестве оператора L матричный оператор Шрёдингера, можно выписать нелинейные эволюционные уравнения, которые могут быть проинтегрированы с помощью предложенного обобщения метода обратной задачи рассеяния. Однако, прежде чем сделать это, отметим, что формализм Абловица — Каупа — Ньюэлла — Сегура включается в нашу схему. Действительно, система

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i\zeta \psi_1 = q(x, t) \psi_2, \quad (8.32a)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - i\zeta \psi_2 = r(x, t) \psi_1 \quad (8.32b)$$

может быть переписана в виде

$$\left[-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} rq & q_x \\ r_x & rq \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \zeta^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (8.33)$$

Эта система принадлежит классу систем, для которых $L = JLJ$. Если $r = a + bq$ (a, b — константы), то эта система может быть диагонализирована. Подробности приложения к системе АКНС нашего формализма даются в [8.7].

8.3.1. Матричное уравнение Кортевега — де Фриза

Если положить

$$B = B_2 \partial^3 + B_1 \partial + \partial B_1; \quad B_2 = \text{const}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (8.34)$$

то из (8.28) с учетом (8.2) и (8.34) следует

$$U_t = \frac{1}{4} B_2 U_{xxx} - \frac{3}{4} B_2 (U^2)_x \quad (8.35)$$

с соотношениями $B_2 U = U B_2$ и $3B_2 U = -4B_1$. Уравнение (8.35) есть матричное уравнение Кортевега — де Фриза. Простейший случай соответствует выбору

$$U(x, t) = u(x, t), \quad B_2 = -4. \quad (8.36)$$

При этом из (8.35) получаем

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (8.37)$$

уравнение, которое является хорошо известным уравнением Кортевега — де Фриза. Если компоненты 2×2 -матрицы $U(x, t)$ выбрать в виде

$$\begin{aligned} U_{11}(x, t) &= -u^2 - iu_x, & U_{22}(x, t) &= U_{11}^*(x, t), \\ U_{12}(x, t) &= U_{21}(x, t) = 0, & u(x, t) &= \bar{u}(x, t) \end{aligned} \quad (8.38)$$

и положить $B_2 = -4I$, то из (8.35) получим

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \quad (8.39)$$

Это уравнение является модифицированным уравнением КдФ. В более общем случае, если положить $U_{11}(x, t)$ в (8.38) равным

$$U_{11}(x, t) = -(\alpha u + \beta u^2) - i\sqrt{\beta} u_x, \quad (8.40)$$

получим

$$u_t + 6\alpha uu_x + 6\beta u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (\beta > 0). \quad (8.41)$$

Это уравнение содержит и уравнение КдФ, и модифицированное уравнение КдФ. Кроме того, оно представляет и самостоятельный интерес, как модельное для распространения волн в нелинейной цепочке [8.8].

Можно получить различные формы многокомпонентного уравнения КдФ из уравнения (8.35). Однако их физические приложения в настоящее время не ясны, поэтому здесь эти уравнения не приводятся.

8.3.2. Матричное нелинейное уравнение Шрёдингера

Пусть задан $m \times m$ -матричный оператор B в виде

$$B = 2iJ\partial^2 - 2iV\partial - iJU, \quad (8.42)$$

где компоненты постоянной матрицы J суть

$$J_{ij} = (1, \quad i=j=1; \quad -1, \quad i=j>2; \quad 0, \quad i \neq j).$$

Пусть матричная функция V удовлетворяет условиям $V = V^*$ и $JV = -VJ$. Подстановка (8.2) и (8.42) в уравнение (8.28) дает

$$V_t = iJV_{xx} + 2iJV^3, \quad (8.43)$$

$$U = -V^2 + JU_x. \quad (8.44)$$

Если компоненты матрицы V выбраны так, что

$$V_{ij} = q_j, \quad j=2, \dots, m, \quad V_{j1} = \bar{q}_j; \quad V_{ij} = 0 \quad \text{для остальных}, \quad (8.45)$$

тогда из (8.43) вытекает

$$i(q_k)_t + (q_k)_{xx} + 2 \left(\sum_{n=1}^m \bar{q}_n q_n \right) q_k = 0. \quad (8.46)$$

Это m -компонентное нелинейное уравнение Шрёдингера. В случаях $m=1$ и $m=2$ оно было изучено Захаровым и Шабатом [8.3] и Манаковым [8.9] соответственно. Эти уравнения рассматривались в приложении к нелинейной оптике.

Мы не просчитывали, насколько широко применим этот формализм в случае $m > 3$. Недавно Калоджеро и Дегаспирес [8.10] получили новые результаты в этом вопросе.

8.4. Обобщение на решеточные задачи

В этом разделе предлагается матричное обобщение МОЗР, которое возможно также и в дискретном случае (решеточные задачи). Рассмотрим задачу на собственные значения

$$L(n)\psi(n) = \psi(n+1) + S(n)\psi(n) + T(n)\psi(n-1) = \lambda\psi(n), \quad (8.47)$$

где $\psi(n)$ есть m -компонентный вектор-столбец, а $S(n)$ и $T(n)$ суть $(m \times m)$ -матрицы. Далее предполагается, что $S(n) \rightarrow 0$ и $T(n) \rightarrow I$ при $|n| \rightarrow \infty$. Уравнение (8.47) является разностным аналогом матричного уравнения Шрёдингера. Обратная задача рассеяния для системы (8.47) изучалась Кейсом и Кацем [8.11] и Флашкой [8.12] при $m=1$. В общем матричном случае эта задача не изучена.

В качестве примера нелинейного дифференциально-разностного уравнения, интегрируемого методом обратной задачи рассеяния, связанным с системой (8.47), рассмотрим следующую систему.

8.4.1. Системы Вольтерры

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{\psi}(n+1) + T(n)\psi(n-1) = \lambda\psi(n), \quad (8.48)$$

$$\dot{\psi}(n) = \psi(n+2) + W(n)\psi(n). \quad (8.49)$$

Здесь точка обозначает производную по времени. Наложим следующие граничные условия: $W(n) \rightarrow cI$, где c константа, при $|n| \rightarrow \infty$. Условие $\lambda_t = 0$ приводит к равенству

$$\dot{T}(n) = T(n+1)T(n) - T(n)T(n-1) \quad (8.50)$$

и соотношению

$$W(n) = T(n+1) + T(n) + (c-2)I. \quad (8.51)$$

Уравнение (8.50) содержит семейство систем Вольтерры. Простейший выбор

$$T(n) = N_n \quad (8.52)$$

приводит к следующим уравнениям:

$$\dot{N}_n = N_n(N_{n+1} - N_{n-1}). \quad (8.53)$$

Эти уравнения были предложены несколькими авторами. Захаровым и его соавторами [8.13] уравнения (8.53) были введены для описания спектра ленгмюровских волн в физике плазмы.

Если в качестве $T(n)$ выбраны 2×2 -матрицы с компонентами

$$\begin{aligned} T_{11}(n) &= 1 + i(M_n - M_{n-1}) + M_n M_{n-1} = T_{22}^*(n), \\ T_{12}(n) &= T_{21}(n) = 0, \quad M_n = \bar{M}_n, \end{aligned} \quad (8.54)$$

то уравнение (8.50) дает

$$\dot{M}_n = (1 + M_n^2)(M_{n+1} - M_{n-1}). \quad (8.55)$$

В более общей ситуации, если положить $T_{11}(n)$ (8.54) равным

$$\begin{aligned} T_{11}(n) &= 1 + \frac{1}{2}(\alpha - i\sqrt{4\beta - \alpha^2})Q_{n-1} + \frac{1}{2}(\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2})Q_n + \\ &\quad + \beta Q_n Q_{n-1}, \end{aligned} \quad (8.56)$$

то из (8.50) получим

$$\dot{Q}_n = (1 + \alpha Q_n + \beta Q_n^2)(Q_{n+1} - Q_{n-1}), \quad (8.57)$$

при условии $\beta = 0$ или $4\beta - \alpha^2 > 0$. Последнее условие гарантирует положительную определенность $1 + \alpha Q_n + \beta Q_n^2$. Очевидно, что уравнение (8.57) содержит в качестве частных случаев уравнения (8.53) и (8.55).

8.4.2. Уравнения цепочки Тоды и нелинейные уравнения автодуальной сети

Рассмотрим систему уравнений

$$\psi(n+1) + S(n)\psi(n) + T(n)\psi(n-1) = \lambda\psi(n), \quad (8.58)$$

$$\dot{\psi}(n) = -T(n)\psi(n-1). \quad (8.59)$$

Условие $\lambda_t = 0$ приводит к уравнениям

$$\dot{S}(n) = T(n+1) - T(n), \quad (8.60a)$$

$$\dot{T}(n) = S(n)T(n) - T(n)S(n-1). \quad (8.60b)$$

Если положить

$$S(n) = -P_n, \quad T(n) = \exp(Q_{n-1} - Q_n), \quad (8.61)$$

то из уравнений (8.58) следуют уравнения цепочки Тоды [8.14]

$$P_n = \dot{Q}_n, \quad \dot{P}_n = \exp(Q_{n-1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n+1}). \quad (8.62)$$

В случае 2×2 -матриц, если положить

$$\begin{aligned} S_{11}(n) &= i[I_{n+1}(1 + iV_n) - I_n(1 - iV_n)] = S_{22}^*(n), \\ T_{11}(n) &= (1 + I_n^2)(1 + iV_{n-1})(1 - iV_n) = T_{22}^*(n), \end{aligned} \quad (8.63)$$

$S_{12} = S_{21} = T_{12} = T_{21} = 0$, где I_n, V_n вещественные, то уравнения (8.60) дают уравнения нелинейной автодуальной сети

$$\dot{I}_n = (1 + I_n^2)(V_{n-1} - V_n), \quad \dot{V}_n = (1 + V_n^2)(I_n - I_{n+1}). \quad (8.64)$$

8.4.3. Нелинейное разностное уравнение Шрёдингера

Рассмотрим систему уравнений

$$\psi(n+1) + S(n)\psi(n) + T(n)\psi(n-1) = \lambda\psi(n), \quad (8.65)$$

$$\dot{\psi}(n) = -iJ\psi(n+2) + C(n)\psi(n+1) + D(n)\psi(n), \quad (8.66)$$

где

$$\begin{aligned} S(n) &= \begin{pmatrix} 0 & i(\bar{R}_{n-1} - \bar{R}_n) \\ i(R_{n-1} - R_n) & 0 \end{pmatrix}, \quad T(n) = (1 + |R_{n-1}|^2)I, \\ J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C(n) = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{R}_{n-1} - \bar{R}_{n+1} \\ R_{n+1} + R_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \\ D(n) &= \begin{pmatrix} i(1 - R_{n-1}\bar{R}_n + \bar{R}_{n-1}R_n) & 0 \\ 0 & -i(1 + R_{n-1}\bar{R}_n - \bar{R}_{n-1}R_n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Условие $\lambda_l = 0$ дает нелинейное разностное уравнение Шрёдингера [8.16]

$$i\dot{R}_n + R_{n+1} + R_{n-1} - 2R_n + |R_n|^2(R_{n+1} + R_{n-1}) = 0. \quad (8.68)$$

Таким образом, нами было получено матричное обобщение метода обратной задачи рассеяния на разностный случай. Хочется подчеркнуть параллелизм дискретного и непрерывного случаев. Математические методы, применимые и весьма полезные в непрерывном случае, оказываются столь же работоспособными и в дискретном случае. Представляется, что дифференциально-разностные аналоги интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений интегрируемы.

В качестве примера, подтверждающего сказанное, рассмотрим уравнения (8.41), (8.57). Гарднером и соавторами [8.1, 8.18] метод обратной задачи рассеяния был введен как линейаризация преобразования Миуры. Суть сделанного ими такова. Подставляя

$$u = i\psi_x / (\sqrt{\beta}\psi) - \alpha/2\beta \quad (8.69)$$

в обобщенное преобразование Миуры (8.40), получим уравнение Шрёдингера

$$-\psi_{xx} + U_{11}\psi = \lambda\psi, \quad \lambda = \alpha^2/4\beta. \quad (8.70)$$

С другой стороны, подстановка

$$Q_{n-1} = i\Phi(n) / (\sqrt{\beta}\Phi(n-1)) - (\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2})/2\beta \quad (8.71)$$

в (8.56) дает

$$\Phi(n+1) + T_{11}(n)\Phi(n-1) = \lambda\Phi(n); \quad \lambda = \sqrt{4 - \frac{\alpha^2}{\beta}}. \quad (8.72)$$

В каждом шаге метода имеются сходные уравнения в непрерывном и дискретном случаях.

8.5. Заключительные замечания

В этой работе были подведены итоги развития на настоящее время матричного обобщения метода обратной задачи рассеяния. Я не утверждаю, что этот формализм наилучший. Каждая формулировка метода имеет свои преимущества и иногда позволяет восполнить недостатки других.

Недавние исследования показали, что существует множество задач на собственные значения, связанных с интегрируемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. В случае уравнения Буссинеска оператор L имеет третий порядок [8.19], а в случае уравнений взаимодействия трех волн [8.20]

этот оператор является матричным 3×3 -оператором типа Дирака, как и для уравнений, описывающих взаимодействие длинных и коротких волн [8.21]. Для уравнения волны на воде и для уравнения sine-Gordon в лабораторных координатах линейная задача содержит потенциал, зависящий от спектрального параметра. Более того, в случае уравнения Кадомцева — Петвиашвили задача на собственное значение является двумерной [8.24]. Нам не известно, какая формулировка МОЗР наиболее общая. Однако можно с уверенностью говорить о большом вкладе этого метода в математическую физику. В течение долгого времени преобразование Фурье, т. е. разложение по синусоидальным волнам, исчерпывало наши возможности исследований. Сейчас наступает период действительного понимания нелинейных волн, основанный на использовании метода обратной задачи рассеяния и концепции солитонов.

ЛИТЕРАТУРА

- 8.1. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. — Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967); Commun. Pure Appl. Math. 27, 97 (1974), см. также Wadati M., Toda M. — J. Phys. Soc. Jpn. 32, 1403 (1972).
- 8.2. Lax P. D. — Commun. Pure Appl. Math., 21, 467 (1968).
- 8.3. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ 61, 118 (1971).
- 8.4. Wadati M. — J. Phys. Soc. Jpn. 32, 1681 (1972); 34, 1289 (1973).
- 8.5. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — Phys. Rev. Lett. 30, 1262 (1973); 31, 125 (1973); Stud. Appl. Math. 53, 249 (1974).
- 8.6. Lamb G. L., Jr. — Phys. Rev. A9, 422 (1974).
- 8.7. Wadati M., Kamijo T. — Prog. Theor. Phys. 52, 397 (1974).
- 8.8. Wadati M. — J. Phys. Soc. Jpn. 38, 673, 681 (1975).
- 8.9. Манаков С. В. — ЖЭТФ 65, 1396 (1973).
- 8.10. Калоджеро Ф., Дегаспрес А. — См. гл. 9 настоящей книги.
- 8.11. Case K. M., Kac M. — J. Math. Phys. 14, 594 (1973); Case K. M. — J. Math. Phys. 14, 916 (1973).
- 8.12. Flaschka H. — Prog. Theor. Phys. 51, 703 (1974).
- 8.13. Захаров В. Е., Мушер С., Рубенчик А. — Письма в ЖЭТФ 19, 151 (1974).
- 8.14. Toda M. — Phys. Rep. 18C, 1 (1975).
- 8.15. Hirota R. — J. Phys. Soc. Jpn. 34, 289 (1973).
- 8.16. Ablowitz M. J., Ladik J. F. — J. Math. Phys. 17, 1011 (1976).
- 8.17. Wadati M. — Suppl. Prog. Theor. Phys. 59, 36 (1976).
- 8.18. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. — J. Math. Phys. 9, 1204 (1968).
- 8.19. Захаров В. Е. — ЖЭТФ 65, 219 (1973).
- 8.20. Захаров В. Е., Манаков С. В. — Письма в ЖЭТФ 18, 413 (1973); Kaup D. J. — Stud. Appl. Math. 55, 9 (1976).
- 8.21. Newell A. C. — Препринт.
- 8.22. Kaup D. J. — Prog. Theor. Phys. 54, 396 (1975).
- 8.23. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. — ДАН СССР 219, 1934 (1974).
Kaup D. J. — Stud. Appl. Math. 54, 165 (1975).
- 8.24. Дрюма В. — Письма в ЖЭТФ 19, 387 (1974).

9. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОБРАТНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ, АССОЦИИРОВАННЫМ С МАТРИЧНЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЁДИНГЕРА

Ф. Калоджеро, А. Дегаспирес

Класс нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ), которые могут быть проинтегрированы с помощью обратного спектрального преобразования (ОСП), ассоциированного с (линейным) матричным уравнением Шрёдингера на собственные значения, может быть расширен по сравнению с описанным в предыдущей главе М. Вадати. Наиболее замечательная особенность новых интегрируемых НЭУ, полученных таким образом, — это поведение их солитонов, которые, по-прежнему обладая характерной для солитонов устойчивостью, в общем случае не движутся с постоянной скоростью, а ведут себя скорее как частицы во внешнем поле (которое само, вообще говоря, зависит от параметров солитона, например, от его «формы» и начальной «поляризации»). В настоящей главе мы опишем этот класс нелинейных эволюционных уравнений, решение задачи Коши методом ОСП для этих уравнений и различные свойства их решений, в том числе преобразования Бэклунда и некоторые связанные с ними результаты (нелинейный принцип суперпозиции, многосолитонные решения, законы сохранения, обобщенные резольвентные формулы, нелинейные операторные тождества). Проанализировано простейшее из новых НЭУ и поведение его солитонов (или, скорее, «бумеронов»).

Наше изложение является весьма сжатым (особенно в том, что касается преобразований Бэклунда и смежных вопросов). Более детальное рассмотрение нашего метода, основанного на обобщенных соотношениях Вронского, и описание взаимосвязи метода с другими подходами можно найти в опубликованных нами работах [9.1]—[9.3].

9.1. Прямая и обратная задачи для матричного уравнения Шрёдингера; обозначения

Основные результаты изложены Вадати в предыдущей главе. Чтобы ввести обозначения, используемые в дальнейшем, здесь они лишь кратко перечислены.

Основные обозначения. В общем случае для матриц ($N \times N$) используются большие буквы. Исключением из этого правила

являются обозначения σ_n , $n = 1, \dots, N^2 - 1$ для $N^2 - 1$ эрмитовых матриц, которые совместно с $\sigma_0 = 1$ образуют базис в пространстве $N \times N$ -матриц. Греческие индексы пробегает значения $0, \dots, N^2 - 1$, латинские индексы $1, \dots, N^2 - 1$. Предполагается, что по повторяющимся индексам всегда производится суммирование. Латинские индексы используются как для компонент векторов, так и для матричных элементов. Например,

$(v, v) = v_n^* v_n \equiv \sum_{n=1}^N v_n^* v_n$. Коммутаторы и антикоммутаторы обозначаются так: $[A, B] = AB - BA$, $\{A, B\} = AB + BA$. Иногда для матриц будет использоваться диадическое обозначение vv^T ; при этом $W = vv^T$ означает, что $W_{lm} = v_l v_m^*$.

Прямая задача. Матричная задача Шрёдингера на собственные значения описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\Psi_{xx} = [Q - k^2] \Psi. \quad (9.1)$$

Здесь $N \times N$ -матрица Q зависит от вещественной переменной x , а вектор Ψ зависит от x и k . Кроме того, обе величины могут зависеть от других переменных как от параметров (см. ниже).

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что матричный «потенциал» Q убывает на бесконечности (достаточно быстро [9.1]). Непрерывный спектр задачи на собственные значения (9.1) определяется с помощью асимптотических граничных условий

$$\Psi(x, k) \rightarrow \exp(-ikx) + R(k) \exp(ikx), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (9.2a)$$

$$\Psi(x, k) \rightarrow T(k) \exp(-ikx), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (9.2b)$$

где Ψ является $N \times N$ -матрицей, столбцы которой являются решениями (9.1) и k вещественное (согласно договоренности, положительное). Ясно, что если Q (и, следовательно, Ψ) зависит параметрически от дополнительных переменных, то зависят от этих переменных будут и «коэффициент отражения» R , и «коэффициент прохождения» T . Дискретный спектр задачи (9.1) состоит из конечного числа собственных значений $k^{(j)} = ip^{(j)}$, которым отвечают собственные функции уравнения Шрёдингера

$$\Psi_{xx}^{(j)} = [Q + p^{(j)2}] \Psi^{(j)}, \quad (9.3)$$

удовлетворяющие условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (\Psi^{(j)}, \Psi^{(j)}) = 1. \quad (9.4)$$

В дальнейшем индекс, различающий собственные состояния, в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, будет опускаться.

Если матрица-потенциал Q эрмитова (что, как правило, предполагается), то $p^{(j)}$ вещественные (и, согласно договоренности, положительные); асимптотика собственных функций, отвечающих дискретному спектру, такова:

$$\psi(x) \rightarrow c \exp(-px) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad (9.5a)$$

$$\psi(x) = c_- \exp(px) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (9.5b)$$

Матрица

$$C = cc^T, \quad (9.6)$$

играющая важную роль в дальнейшем, связана с вычетом функции $R(k)$ в точке $k = ip$ соотношением

$$\lim_{k \rightarrow ip} [(k - ip) R(k)] = iC, \quad (9.7)$$

где $Q(x)$ убывает достаточно быстро [9.1] (и дискретные собственные значения невырождены; здесь и далее это для простоты будет предполагаться).

Ясно, что если $Q(x)$ задана, то однозначно определены матрицы $R(k)$, $T(k)$ и параметры $p^{(j)}$, $c^{(j)}$, $c_-^{(j)}$, характеризующие дискретную часть спектра (если она есть). Определение этих величин составляет прямую задачу для одномерного матричного оператора Шрёдингера.

Обратная задача. Данные, достаточные для однозначного восстановления «потенциала» $Q(x)$, суть: коэффициент отражения, дискретные собственные значения $p^{(j)}$ (если они есть) и соответствующие матрицы $C^{(j)}$. Потенциал определяется из уравнений

$$M(x) = \sum_j C^{(j)} \exp(-p^{(j)}x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk R(k) \exp(ikx), \quad (9.8)$$

$$K(x, x') + M(x + x') + \int_x^{\infty} dx'' K(x, x'') M(x' + x'') = 0, \quad x \leq x', \quad (9.9)$$

$$Q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (9.10)$$

Значения $R(k)$ для отрицательных k , входящие в определение (9.8) ядра $M(x)$ уравнения, могут быть получены с помощью аналитического продолжения $R(k)$ с положительной полуоси. Для эрмитовых матриц $Q(x)$ можно, кроме того, воспользоваться соотношением $R(-k) = R^T(k)$.

9.2. Обобщенные соотношения Вронского; основные формулы

Все результаты, которые будут изложены в настоящем разделе, выведены из следующих основных формул:

$$2ikf(-4k^2)[MR(k) - R'(k)M] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \bar{\Psi}'(x, k) \{f(\Lambda)[MQ(x) - Q'(x)M]\} \Psi(x, k), \quad (9.11)$$

$$(2ik)^2 g(-4k^2)[NR(k) + R'(k)N] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \bar{\Psi}'(x, k) \{g(\Lambda)\Gamma N\} \Psi(x, k). \quad (9.12)$$

Здесь $f(z)$ и $g(z)$ произвольные (целые) функции; M и N постоянные (т. е. не зависящие от x) матрицы; $R(k)$ и $R'(k)$ коэффициенты отражения для потенциалов $Q(x)$ и $Q'(x)$ соответственно. Операторы Λ и Γ , действующие на все, что стоит справа от них в пределах фигурных скобок, определяются в приведенных ниже формулах своим действием на функцию $F(x)$ (убывающую быстрее, чем $1/x$):

$$\Lambda F(x) = F_{xx}(x) - 2[Q'(x)F(x) + F(x)Q(x)] + \Gamma \int_x^{+\infty} dx' F(x'), \quad (9.13)$$

$$\Gamma F(x) = Q'_x(x)F(x) + F(x)Q_x(x) + \\ + \int_x^{+\infty} dx' [Q'(x)Q'(x')F(x') - Q'(x)F(x')Q(x') - \\ - Q'(x')F(x')Q(x) + F(x')Q(x')Q(x)]. \quad (9.14)$$

Получение этих формул основано на обобщенных соотношениях Вронского [9.1]. Они обладают свойством задачи на собственные значения для уравнения Шрёдингера, описанным в предыдущем разделе. Полезность этих формул проявляется в том, что они позволяют найти класс нелинейных соотношений между задачами с двумя различными потенциалами (различающимися на конечную или бесконечно малую величину, см. ниже), такой, что соотношения между коэффициентами отражения особенно просты.

Аналогичные соотношения, связывающие коэффициенты прохождения и (или) характеристики дискретных спектров, могут быть получены подобным же образом. Однако они несущественны с интересующей нас здесь точки зрения. Все формулы для параметров дискретного спектра (некоторые из них действитель-

но существенны для дальнейшего) могут быть получены из соотношений для коэффициентов отражения, если ограничиться потенциалами, убывающими быстрее экспоненты, поскольку параметры дискретного спектра в этом случае даются (9.7). Формулы, полученные таким способом, несомненно, справедливы для более общего случая.

9.3. Нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые обратным спектральным преобразованием; солитоны

Предел $Q' \rightarrow Q$. Введем зависимость потенциала от новой переменной, скажем y , заменой

$$Q(x) \rightarrow Q(x, y), \quad Q'(x) \rightarrow Q(x, y + \Delta y). \quad (9.15)$$

Отсюда несомненно следует, что от y будут зависеть и величины

$$R(k) = R(k, y), \quad R'(k) = R(k, y + \Delta y). \quad (9.16)$$

Подставляя эти выражения в уравнения предыдущего раздела, в пределе $\Delta y \rightarrow 0$ получим $Q = Q' = Q(x, y)$, а операторы Λ и Γ перейдут в операторы L и G , определяемые следующим образом ($F(x)$ есть произвольная матричная функция, убывающая при $x \rightarrow +\infty$; в выражениях мы опускаем явную индикацию зависимости всех функций от переменной y):

$$LF(x) = F_{xx}(x) - 2\{Q(x), F(x)\} + G \int_x^{+\infty} dx' F(x'), \quad (9.17)$$

$$GF(x) = \{Q_x(x), F(x)\} + \left[Q(x), \int_x^{+\infty} dx' [Q(x'), F(x')] \right]. \quad (9.18)$$

Полагая в (9.11) $M = 1/\Delta y$ и $M = \sigma_n$, а в (9.12) $N = \sigma_\mu$, получим следующие три формулы:

$$2ikf(-4k^2)R_\nu(k, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \bar{\Psi}(x, k, y) \{f(L)Q_\nu(x, y)\} \Psi(x, k, y), \quad (9.19)$$

$$2ikf_n(-4k^2)[\sigma_n, R(k, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \bar{\Psi}(x, k, y) \{f_n(L)[\sigma_n, Q(x, y)]\} \Psi(x, k, y). \quad (9.20)$$

$$(2ik)^2 g_\mu(-4k^2)\{\sigma_\mu, R(k, y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \bar{\Psi}(x, k, y) \{g_\mu(L)G\sigma_\mu\} \Psi(x, k, y). \quad (9.21)$$

Здесь f , f_n и g_μ суть произвольные целые функции; они могут зависеть параметрически от дополнительных переменных, таких, как y , но они должны быть независимы от x . Вывод, который мы сейчас наметили, показывает, что соотношения (9.20), (9.21) остаются справедливыми, даже если в них не предполагать суммирование по n и μ (от 1 и от 0 до $N^2 - 1$ соответственно). Однако ввиду произвольности функций f_n и g_μ отказ от этого суммирования не дает никакой дополнительной общности.

Нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые обратным спектральным преобразованием. Предположим, что Q (и, следовательно, R) зависит параметрически от нескольких переменных; обозначим одну из них через t («время»), а остальные через M -мерный вектор y :

$$Q \equiv Q(x, y, t), \quad R \equiv R(k, y, t). \quad (9.22)$$

Представим, что (9.19) записано с заменой y на t или на любую компоненту y , в каждом случае с произвольными и различными функциями f . Из этих уравнений и из (9.20), (9.21) непосредственно вытекает следующее: если матрица-потенциал $Q(x, y, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению

$$f_0(L, y, t) Q_t = 2\beta_0(L, y, t) Q_x + \alpha_n(L, y, t) [\sigma_n, Q] + \\ + \beta_n(L, y, t) G\sigma_n + \gamma(L, y, t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} Q, \quad (9.23)$$

то соответствующий коэффициент отражения $R(k, y, t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$f_0(-4k^2, y, t) R_t = \alpha_n(-4k^2, y, t) [\sigma_n, R] + \\ + 2ik\beta_n(-4k^2, y, t) \{\sigma_n, R\} + \gamma(-4k^2, y, t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} R. \quad (9.24)$$

В дальнейшем мы ограничимся для простоты случаем $f_0 = 1$, чтобы сходство (9.23) с привычными НЭУ было более наглядным. Более того, мы будем предполагать, что функции β_n , α_n (целые, а в остальном произвольные) не зависят от y и t , а функции β_0 и γ не зависят от y . Тем самым мы ограничимся случаем нелинейных эволюционных уравнений вида

$$Q_t(x, y, t) = 2\beta_0(L, t) Q_x(x, y, t) + \alpha_n(L) [\sigma_n, Q(x, y, t)] + \\ + \beta_n(L) G\sigma_n + \gamma(L, t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y, t) \quad (9.25)$$

и покажем, в частности, как с помощью обратного спектрального преобразования можно решить задачу Коши с начальными условиями

$$Q(x, y, t_0) = Q_0(x, y). \quad (9.26)$$

Здесь $Q_0(x, y)$ — заданная матричная функция, стремящаяся к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Пусть $R_0(k, y) = R(k, y, t_0)$ — коэффициент отражения, соответствующий $Q_0(x, y)$. Для его определения необходимо решить прямую задачу Шрёдингера. К тому же известно, что если $Q(x, y, t)$ эволюционирует согласно (9.25), то соответствующий коэффициент отражения удовлетворяет линейному уравнению $R_t(k, y, t) = 4ik\beta_0(-4k^2, t)R(k, y, t) + \alpha_n(-4k^2)[\sigma_n, R(k, y, t)] + 2ik\beta_n(-4k^2)\{\sigma_n, R(k, y, t)\} + \gamma(-4k^2, t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} R(k, y, t)$. (9.27)

Это уравнение, которое легко может быть проинтегрировано, вместе с приведенным выше начальным условием позволяет получить точную формулу

$$R(k, y, t) = \exp \left[4ik \int_{t_0}^t dt' \beta_0(-4k^2, t') \right] \times \\ \times \exp \{ (t - t_0) [\alpha_n(-4k^2) + 2ik\beta_n(-4k^2)] \sigma_n \} \times \\ \times R_0 \left[k, y + \int_{t_0}^t dt' \gamma(-4k, t') \right] \times \\ \times \exp \{ (t - t_0) [-\alpha_n(-4k^2) + 2ik\beta_n(-4k^2)] \sigma_n \}. \quad (9.28)$$

Зная коэффициент отражения R в момент t , который дает эта формула, можно, решив обратную задачу (см. разд. 9.1), восстановить потенциал Q в момент t (параметры дискретного спектра, которые также необходимы для восстановления Q , будут обсуждены ниже). Ясно, что потенциал $Q(x, y, t)$, полученный таким образом, будет решением НЭУ (9.25) с начальным условием (9.26). Следует подчеркнуть, что указанная процедура сводит решение задачи Коши для уравнения (9.25), которое является нелинейным, поскольку операторы L и G зависят от Q (см. их определения (9.17), (9.18)) к решению прямой и обратной задач, которые содержат только линейные уравнения. Для прямой задачи необходимо решить уравнение Шрёдингера (9.1), а для обратной — линейное интегральное уравнение (9.9). Более того, эта процедура позволяет непосредственно исследовать временную эволюцию любого решения $Q(x, y, t)$ уравнения (9.25), разбивая это решение на две части: связанную с непрерывным спектром ассоциированной спектральной задачи и другую часть (которая будет обсуждена ниже), связанную с дискретным спектром.

Подкласс нелинейных эволюционных уравнений вида (9.25), отвечающий выбору $\alpha_n = \beta_n = \gamma = 0$ и $\beta_0(z, t) = \beta_0(z)$, был исследован Вадати в предыдущей главе.

Ниже мы рассмотрим некоторые специфические уравнения вида (9.25); пока отметим, что если σ_n эрмитовы, то для того, чтобы матрица $Q(x, y, t)$ оставалась эрмитовой при всех t , если

она была эрмитовой в начальный момент времени t_0 , достаточно, чтобы β_ν и γ были вещественными, а α_n чисто мнимыми [9.1]:

$$\alpha_n = -\alpha_n^*, \quad \beta_\nu = \beta_\nu^*, \quad \gamma = \gamma^*. \quad (9.29)$$

Эволюция параметров дискретного спектра. Временная эволюция дискретных собственных значений, ассоциированных с (9.25), дается уравнением

$$p_t(\mathbf{y}, t) = \gamma(4p^2, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} p(\mathbf{y}, t). \quad (9.30)$$

Решение этого уравнения (в неявном виде) есть

$$p(\mathbf{y}, t) = p_0 \left[\mathbf{y} + \int_{t_0}^t dt' \gamma[4p^2(\mathbf{y}, t'), t'] \right], \quad (9.31)$$

причем начальное условие

$$p_0(\mathbf{y}) = p(\mathbf{y}, t_0) \quad (9.32)$$

должно быть найдено по начальному потенциалу $Q_0(x, \mathbf{y}) = Q(x, \mathbf{y}, t_0)$. Заметим, что если переменные \mathbf{y} отсутствуют (т. е. $\gamma = 0$ в (9.25) или в (9.23)), то собственные значения остаются постоянными. Если же $\gamma \neq 0$, то эволюция $p(\mathbf{y}, t)$ далеко не тривиальна. В этом случае даже число собственных значений может изменяться со временем. Детальный анализ этого случая здесь будет опущен.

Другой величиной, связанной с дискретным спектром, является матрица $C(\mathbf{y}, t)$, определенная в (9.6) и входящая в (9.8). Ее эволюция описывается уравнением

$$C_t(\mathbf{y}, t) = \gamma(4p^2, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} C(\mathbf{y}, t) + C(\mathbf{y}, t) \mathbf{v}_z(z, t)|_{z=4p^2} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} (4p^2) + \alpha_n(4p^2) [\sigma_n, C(\mathbf{y}, t)] - 2p\beta_\nu(4p^2) \{\sigma_\nu, C(\mathbf{y}, t)\}, \quad (9.33)$$

где $p \equiv p(\mathbf{y}, t)$ есть решение уравнения, приведенного выше. Решение уравнения (9.33) дается формулой

$$C(\mathbf{y}, t) = \exp \left[-4p \int_{t_0}^t dt' \beta_0(4p^2, t') \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \left[\int_{t_0}^t dt' \mathbf{v}_z(z, t')|_{z=4p^2} \right] 8p \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} p_0(\mathbf{y}')|_{\mathbf{y}'=\mathbf{y}} + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t dt' \gamma(4p^2, t') \right\}^{-1} \exp \{ (t - t_0) [\alpha_n(4p^2) - 2p\beta_n(4p^2)] \sigma_n \} \times \\ \times C_0 \left[\mathbf{y} + \int_{t_0}^t dt' \gamma(4p^2, t') \right] \times \\ \times \exp \{ (t - t_0) [-\alpha_n(4p^2) - 2p\beta_n(4p^2)] \sigma_n \}, \quad (9.34)$$

где

$$C_0(y) = C(y, t_0) \quad (9.35)$$

должно быть найдено по начальному потенциалу $Q_0(x, y) = Q(x, y, t_0)$. Отметим еще раз, что в (9.34) $p \equiv p(y, t)$.

Если $\gamma = 0$, то зависимость от y исчезает и уравнение (9.34) существенно упрощается. Ввиду важности этого случая приведем окончательную формулу

$$\begin{aligned} C(t) = \exp \left[-4p \int_{t_0}^t dt' \beta_0(4p^2, t') \right] \times \\ \times \exp \{ (t - t_0) [\alpha_n(4p^2) - 2p\beta_n(4p^2)] \sigma_n \} \cdot C(t_0) \times \\ \times \exp \{ (t - t_0) [-\alpha_n(4p^2) - 2p\beta_n(4p^2)] \sigma_n \}, \end{aligned} \quad (9.36)$$

где p теперь константа.

Следует подчеркнуть, что временная эволюция параметров p и C , описывающих каждое дискретное собственное значение, не зависит от наличия других собственных значений или непрерывного спектра. Хорошо известно, что именно этот факт обуславливает замечательное поведение «солитонов», в частности их стабильность. Кроме того, это объясняет особый интерес к односолитонным решениям, так как они являются не просто интересным частным решением исследуемых НЭУ, но представляют собой компоненту (которая проявляется или не проявляется в асимптотике; см. ниже) широкого класса решений.

Солитоны. Прямой путь получения односолитонного решения состоит в решении (9.9) при $R = 0$ и при наличии одного собственного значения. В результате получим

$$Q(x, y, t) = -2p^2 \{ \text{ch} [p(x - \xi)] \}^{-2} P. \quad (9.37)$$

Здесь $p = p(y, t)$ — это параметр, характеризующий величину дискретного собственного значения, а $P = P(y, t)$ есть матрица, удовлетворяющая задающему проекционный оператор ограничению

$$P^2 = P. \quad (9.38)$$

Эта матрица связана с матрицей $C(y, t)$ формулой

$$C = 2p \exp(2p\xi) P, \quad (9.39)$$

которая совместно с (9.38) определяет $\xi = \xi(y, t)$. Здесь вновь $p \equiv p(y, t)$.

Таким образом, видно, что для всех НЭУ, рассматриваемых в этой работе, односолитонные решения имеют обычную $(\text{ch})^{-2}$ форму относительно переменной x . Соответствующая величина ξ естественно интерпретируется как *положение солитона*, а матрицу P (удовлетворяющую проекционному свойству (9.38)), которой пропорционален солитон, можно интерпретировать как

поляризацию солитона. Зависимость ξ и P от переменных y и t определяется связью их с p и C , (9.38), (9.39), и уравнениями для p и C , приведенными выше.

Очевидно, что если переменная y действительно присутствует, то ситуация более сложная (и интересная). Но даже если $y = 0$ (что мы примем для простоты в оставшейся части работы), так что зависимость от y отсутствует и p не зависит от времени, то солитонное решение (9.37) все равно весьма интересно. Замечательным является тот факт, что ξ в общем случае нелинейно зависит от времени, т. е. в общем случае солитон движется с переменной во времени скоростью. Действительно, несложные вычисления дают

$$\xi(t) = \xi(t_0) - 2 \int_{t_0}^t dt' \beta_0(4p^2, t') + (2p)^{-1} \ln [(c_0, E(t-t_0)c_0)/(c_0, c_0)], \quad (9.40)$$

где

$$E(t) = \exp \{-t [\alpha_n(4p^2) + 2p\beta_n(4p^2)] \sigma_n\} \times \\ \times \exp \{t [\alpha_n(4p^2) - 2p\beta_n(4p^2)] \sigma_n\}. \quad (9.41)$$

Соответствующая формула для P имеет вид

$$P(t) = \{(c_0, c_0)/(c_0, E(t-t_0)c_0)\} \times \exp \{(t-t_0)[\alpha_n(4p^2) - \\ - 2p\beta_n(4p^2)] \sigma_n\} \times P(t_0) \exp \{-(t-t_0)[\alpha_n(4p^2) + 2p\beta_n(4p^2)] \sigma_n\}. \quad (9.42)$$

Здесь

$$c_0 = c(t_0) \quad (9.43)$$

определяется по начальным данным. Мы использовали соотношение

$$P(t) = c(t) c^T(t)/(c(t), c(t)), \quad (9.44)$$

вытекающее из (9.38), (9.39) и (9.6).

Для анализа поведения солитона удобно ввести специальное разложение матрицы $E(t)$

$$E(t) = \sum_{k=1}^N \exp [2p\zeta_k(t)] E_k(t), \quad (9.45)$$

где

$$E_k(t) E_e(t) = \delta_{ke} E_k(t). \quad (9.46)$$

Заметим, что величины $\zeta_k(t)$, как и проекционные операторы $E_k(t)$, зависят от функций α_n и β_n , определяющих структуру нелинейного уравнения (см. (9.25)); они зависят от начальных данных только через зависимость от p . Временная эволюция

$\xi(t)$ и $P(t)$ зависит, кроме того, от начального вектора $c_0 = c(t_0)$ через величины

$$e_k(t) = (c_0, E_k(t) c_0) / (c_0, c_0). \quad (9.47)$$

Точные формулы суть

$$\xi(t) = \xi(t_0) - 2 \int_{t_0}^t dt' \beta_0(4\rho^2, t') + (2\rho)^{-1} \times \\ \times \ln \left\{ \sum_{k=1}^N e_k(t-t_0) \exp[2\rho \zeta_k(t-t_0)] \right\}, \quad (9.48)$$

$$P(t) = \left\{ \sum_{k=1}^N e_k(t-t_0) \exp[2\rho \zeta_k(t-t_0)] \right\}^{-1} \times \\ \times \exp \{ (t-t_0) [\alpha_n(4\rho^2) - 2\rho \beta_n(4\rho^2)] \sigma_n \} \times P(t_0) \times \\ \times \exp \{ -(t-t_0) [\alpha_n(4\rho^2) + 2\rho \beta_n(4\rho^2)] \sigma_n \}. \quad (9.49)$$

Так как зависимость от времени, связанная с параметром β_0 , относительно тривиальна, то положим для простоты $\beta_0 = 0$. Рассмотрим следующие два специальных случая.

Сначала положим $\beta_n(4\rho^2) = 0$. Тогда $E(t) = 1$, $\xi(t) = \xi(t_0)$, и солитон будет покоящимся (если $\beta_0(4\rho^2, t) = \beta_0(4\rho^2) \neq 0$, то он бы двигался с постоянной скоростью).

Следующему случаю отвечает

$$[\alpha_n(4\rho^2) \sigma_n, \beta_m(4\rho^2) \sigma_m] = 0. \quad (9.50)$$

При этом подразумевается, что в этот случай включается ситуация, когда все $\alpha_n(4\rho^2) = 0$, но исключается $\beta_n(4\rho^2) = 0$, что было рассмотрено выше. Тогда

$$\zeta_k(t) = -2t\beta^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (9.51)$$

где $\beta^{(k)}$ — собственные значения матрицы $\beta_n(4\rho^2) \sigma_n$. Если начальные условия были таковы, что

$$e_k(0) = \delta_{kl}, \quad (9.52)$$

то солитон будет двигаться с постоянной скоростью

$$\xi(t) = \xi(t_0) - 2(t-t_0)\beta^{(1)}. \quad (9.53)$$

В более общем случае, $e_1(0) \neq 0$ и $e_N(0) \neq 0$, при больших $|t|$ получим

$$\xi(t) = -2(t-t_0)\beta^{(1)} + \xi(t_0) + (2\rho)^{-1} \ln[e_1(0)] + \\ + O\{\exp[-4t\rho(\beta^{(2)} - \beta^{(1)})]\}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (9.54a)$$

$$\xi(t) = -2(t-t_0)\beta^{(N)} + \xi(t_0) + (2\rho)^{-1} \ln[e_N(0)] + \\ + O\{\exp[4t\rho(\beta^{(N)} - \beta^{(N-1)})]\}, \quad t \rightarrow -\infty. \quad (9.54b)$$

Мы предполагаем, что β_n вещественны и, следовательно, $\beta^{(k)}$ также вещественны и упорядочены в порядке возрастания $\beta^{(k)} < \beta^{(k+1)}$ (если нет совпадений). Таким образом, в этом случае солитон движется асимптотически с постоянной скоростью. Если $\beta^{(N)} > 0 > \beta^{(1)}$, то при $t \rightarrow +\infty$ он движется направо, а при $t \rightarrow -\infty$ он опять же движется направо. Подобное поведение солитона и послужило основанием для введения термина «бумерон» [9.3].

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что если α_n мнимые и β_n вещественные, что необходимо для эрмитовости Q при всех t , то в системе координат, двигающейся со скоростью $\beta_0(4\rho^2, t)$, солитоны, уходящие на бесконечность, движутся асимптотически с постоянной скоростью. В последующем примере будет продемонстрирован случай, когда солитоны действительно уходят на бесконечность с асимптотически постоянной скоростью или осциллируют неопределенно.

Аналогично тому как получают односолитонные решения, строятся многосолитонные решения. Приведем точную формулу для двухсолитонного случая:

$$Q(x, y, t) = -W_x(x, y, t) \quad (9.55)$$

$$W(x, y, t) = -2(\rho_1 + \rho_2)[1 - \rho\tau_1\tau_2]^{-1} \cdot [\tau_1 P_1 + \tau_2 P_2 - \tau_1\tau_2 \{P_1, P_2\}], \quad (9.56)$$

$$\tau_k = [P_k/(\rho_1 + \rho_2)] \cdot \{1 - \text{th}[p_k(x - \xi_k)]\}, \quad k = 1, 2. \quad (9.57)$$

В этих уравнениях величины $\xi_k = \xi_k(y, t)$ и $P_k = P_k(y, t)$ следует интерпретировать как «положение» и «поляризацию» k -го солитона, характеризуемого положительным параметром p_k . Временная эволюция этого параметра дается в точности теми же уравнениями, которые приводились и обсуждались выше, если в них заменить ρ на p_k . Скалярная функция $\rho = \rho(y, t)$, входящая в (9.56), определяется одним из следующих двух эквивалентных уравнений:

$$\rho P_1 = P_1 P_2 P_1, \quad (9.58a)$$

$$\rho P_2 = P_2 P_1 P_2. \quad (9.58b)$$

9.4. Уравнение бумерона и другие интегрируемые нелинейные уравнения, связанные с ним; бумероны

Простейшим новым НЭУ в классе, описанном выше, является уравнение, отвечающее случаю $N = 2$, $\beta_0 = \gamma = 0$, α_n, β_n константы, $n = 1, 2, 3$. Удобно положить $b_n = 2\beta_n$, $\alpha_n = 2i\alpha_n$ и

$$U(x, t) + \sigma_n V_n(x, t) = \int_x^{+\infty} dx' Q(x', t)$$

(где σ_n — матрицы Паули). «Уравнение бумерона» удобно записать через трехмерные векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{V}(x, t)$ и скаляр $U(x, t)$. Оно имеет вид

$$U_t(x, t) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{V}_x(x, t), \quad (9.59a)$$

$$\mathbf{V}_{xt}(x, t) = U_{xx}(x, t)\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{V}_x(x, t) - 2\mathbf{V}_x(x, t) \times [\mathbf{V}(x, t) \times \mathbf{b}]. \quad (9.59b)$$

Величины $U(x, t)$ и $\mathbf{V}(x, t)$ удовлетворяют асимптотическим условиям

$$U(+\infty, t) = U_x(\pm\infty, t) = 0, \quad \mathbf{V}(+\infty, t) = \mathbf{V}_x(\pm\infty, t) = 0. \quad (9.60)$$

До сих пор не найдено физического явления, которое бы описывалось этим уравнением. Ввиду замечательных свойств его решений, которые будут обсуждены ниже, поиск физической модели для него представляет особый интерес. В этой связи следует отметить, что уравнение (9.59) может быть выведено из вариационного принципа для лагранжиана с плотностью

$$L = \frac{1}{2} U_t U_x + \frac{1}{2} \mathbf{V}_t \cdot \mathbf{V}_x - U_x \mathbf{b} \cdot \mathbf{V}_x + \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{V}_x) \cdot \mathbf{V} + 2(\mathbf{V}_x \cdot \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{V}). \quad (9.61)$$

Решение задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения (9.59) в классе функций с граничными условиями (9.60) может быть получено с помощью обратного спектрального преобразования, описанного в предшествующем разделе. Опишем более детально поведение солитонного решения

$$U(x, t) = -p \{1 - \text{th}[p(x - \xi(t))]\}, \quad \mathbf{V}(x, t) = \hat{\mathbf{n}}(t) U(x, t). \quad (9.62)$$

Можно показать, что «положение» и «поляризация» ($\hat{\mathbf{n}}(t)$ — единичный вектор; мы всегда придерживаемся обозначения $\mathbf{v} \equiv v\hat{\mathbf{v}}$) эволюционируют во времени согласно уравнениям

$$\hat{\mathbf{n}}_t(t) = \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{n}}(t) + 2p\hat{\mathbf{n}}(t) \times [\hat{\mathbf{n}}(t) \times \mathbf{b}], \quad (9.63a)$$

$$\xi_t(t) = -\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t). \quad (9.63b)$$

Эти уравнения могут быть проинтегрированы точно:

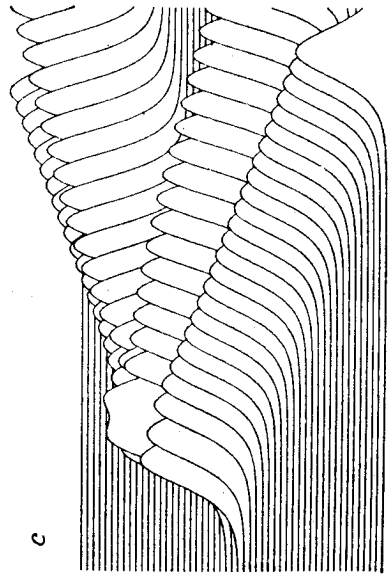
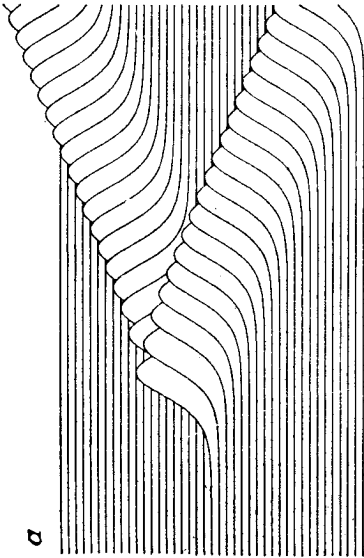
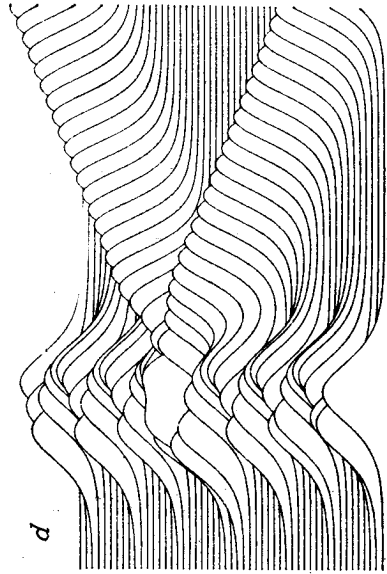
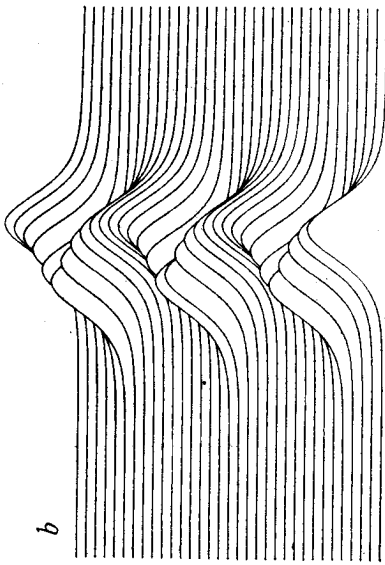
$$\xi(t) = \xi_0 + (2p)^{-1} \ln [n_+ E_+(t) + n_- E_-(t) + \bar{s}S(t) + \bar{c}C(t)], \quad (9.64)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(t) = [n_+ E_+(t) + n_- E_-(t) + sS(t) + cC(t)] \times [n_+ E_+(t) + n_- E_-(t) + \bar{s}S(t) + \bar{c}C(t)]^{-1}, \quad (9.65)$$

$$E_{\pm}(t) = \exp[\pm av_{\pm}(t - t_0)], \quad S(t) = \sin[av_+(t - t_0)], \quad (9.66)$$

$$C(t) = \cos[av_+(t - t_0)]. \quad (9.66)$$

$$v_{\pm} = \left\{ [\lambda^2 (\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}})^2 + \frac{1}{4}(1 - \lambda^2)^2]^{1/2} \pm \frac{1}{2}(1 - \lambda^2) \right\}^{1/2}, \quad (9.67)$$



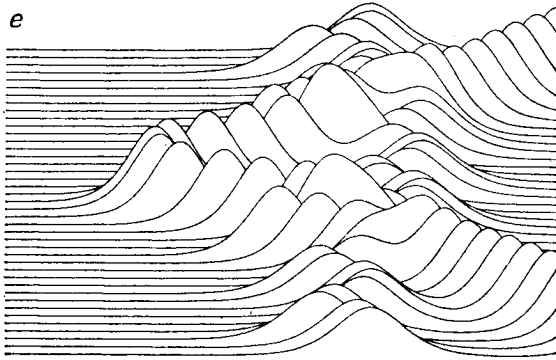


Рис. 9.1. $a - e$. Поведение бумерона. $U_x(x, t)$ показана как функция x через равные промежутки времени. Все пять случаев относятся к (9.59) при $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Рис. a и b были получены из (9.62), (9.79), (9.81), а для получения рис. $c - e$ было использовано, кроме этого, (9.56). Все рисунки были получены на ЭВМ д-ром Дж. Эйлбеком (математический факультет университета Херриот-Уоот, Эдинбург).

$$\lambda = 2pb/a, \quad (9.68)$$

$$\mathbf{n}_{\pm} = \frac{1}{2} \{ (v_+^2 - 1) \hat{\mathbf{n}}_0 + [(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) \mp \eta v_+] \hat{\mathbf{a}} + \\ + \lambda [\lambda (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) \mp v_-] \hat{\mathbf{b}} \pm v_- (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{n}_0) \mp \eta \lambda v_+ (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{n}}_0) - \\ - \lambda (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \} / (v_+^2 + v_-^2), \quad \eta = \text{sign}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}), \quad (9.69)$$

$$\mathbf{s} = \eta [v_- \hat{\mathbf{a}} - \eta \lambda v_+ \hat{\mathbf{b}} + \eta v_+ (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{n}}_0) + \lambda v_- (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{n}}_0)] / (v_+^2 + v_-^2), \\ \mathbf{c} = \mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_+ - \mathbf{n}_-, \quad (9.70)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = \eta [v_- (\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) - \eta \lambda v_+ (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0)] / (v_+^2 + v_-^2), \quad (9.71)$$

$$\bar{\mathbf{c}} = 1 - n_+ - n_-.$$

Следует отметить следующие важные свойства полученных выражений. I) $\hat{\mathbf{n}}(t)$ является единичным вектором при всех t ; II) единичные векторы $\hat{\mathbf{n}}_{\pm} = (\mp \eta v_+ \hat{\mathbf{a}} \pm \lambda v_- \hat{\mathbf{b}} - \lambda \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) / (1 + v_-^2)$ не зависят от начальной поляризации \mathbf{n}_0 ; III) поляризация остается постоянной, $\hat{\mathbf{n}}(t) = \hat{\mathbf{n}}_0$, тогда и только тогда, когда $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{n}}_+$ или $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{n}}_-$.

Скорость солитона и его поляризация, вообще говоря, меняются во времени. Обсудим кратко это замечательное свойство. Ниже обсуждаются отдельно два случая, отвечающие условиям $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ или $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$.

Если начальная поляризация \mathbf{n}_0 совпадала с одним из единичных векторов $\hat{\mathbf{n}}_{\pm}$, то солитон движется (направо или налево,

см. ниже) с постоянной скоростью, равной по модулю

$$v = \frac{1}{2} av_-/p = bv_-/\lambda. \quad (9.72)$$

Поляризация остается постоянной, т. е.

$$\hat{\mathbf{n}}(t) = \hat{\mathbf{n}}_0, \quad \xi(t) = \xi_0 \pm v(t - t_0), \quad \hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{n}}_{\pm}. \quad (9.73)$$

В противном случае обе величины $\hat{\mathbf{n}}(t)$ и $\xi(t)$ меняются во времени, и ни при каком конечном времени $\hat{\mathbf{n}}(t)$ не совпадает с $\hat{\mathbf{n}}_{\pm}$, тогда как асимптотически

$$\hat{\mathbf{n}}(\pm \infty) = \hat{\mathbf{n}}_{\pm}, \quad \xi(\pm \infty) = \pm v. \quad (9.74)$$

Таким образом, независимо от начальных условий, принятых при t_0 (лишь бы $\hat{\mathbf{n}}_0 \neq \hat{\mathbf{n}}_{\pm}$), в далеком будущем и отдаленном прошлом солитон (или, скорее, *бумерон*) уходит на бесконечность направо и приходит справа из бесконечности с одинаковой асимптотической скоростью v

$$\xi(t) - [\xi_0 + v|t - t_0|] = O[\exp(-av_-|t|)], \quad t \rightarrow \pm \infty. \quad (9.75)$$

Для данных \mathbf{a} и \mathbf{b} (т. е. для данного НЭУ вида (9.59)) форма («амплитуда» и «ширина» бумерона, а также его асимптотическая скорость v) определяются положительной константой p . Начальное положение бумерона ξ_0 может быть выбрано произвольно, что согласуется с трансляционной инвариантностью НЭУ (9.59). Начальная скорость и все последующее поведение бумерона при конечных временах зависит от начальной поляризации, в то время как его асимптотическое поведение не зависит от $\hat{\mathbf{n}}_0$ (если только $\hat{\mathbf{n}}_0$ не совпадает с $\hat{\mathbf{n}}_{\pm}$). В заключение заметим, что только в случае $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{n}}_-$ или $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{n}}_+$ солитон может уходить на левую бесконечность (или приходиться из нее).

Специальный случай $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}} = 0$. Бумерон по-прежнему описывается (9.62), (9.63), но поведение $\xi(t)$ и $\hat{\mathbf{n}}(t)$ дается более простыми выражениями

$$\xi(t) = \xi_0 + (2p)^{-1} \ln \{ \text{ch} [2pb(t - t_0)] - (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) \text{sh} [2pb(t - t_0)] \}, \quad (9.76)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}(t) = & \hat{\mathbf{b}} [(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) \text{ch} [2pb(t - t_0)] - \text{sh} [2pb(t - t_0)] + \\ & + (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{n}}_0) \sin [a(t - t_0)] + [\hat{\mathbf{n}}_0 - \hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0)] \cos [a(t - t_0)] \} \times \\ & \times \{ \text{ch} [2pb(t - t_0)] - (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) \text{sh} [2pb(t - t_0)] \}^{-1}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Эти формулы могут быть получены из общих выражений, приведенных выше. Из них следует, что поведение бумерона аналогично описанному ранее (с $\hat{\mathbf{n}}_{\pm} = \mp \hat{\mathbf{b}}$); если $\hat{\mathbf{n}}_0 = -\hat{\mathbf{b}}$ или $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{b}}$, то $\hat{\mathbf{n}}(t) = \hat{\mathbf{n}}_0$ и $\xi(t) = \xi_0 \pm b(t - t_0)$; если $\hat{\mathbf{n}}_0 \neq \pm \hat{\mathbf{b}}$, то $\hat{\mathbf{n}}(t) \neq \hat{\mathbf{b}}$ и $\hat{\mathbf{n}}(t) \neq -\hat{\mathbf{b}}$ при всех (конечных) t , $\hat{\mathbf{n}}(\pm \infty) = \mp \hat{\mathbf{b}}$,

$\xi_t(\pm\infty) = \pm b$. При больших $|t|\xi(t) = \xi_0 + b|t - t_0| + O(\exp(-2pb|t|))$. В данном случае имеет место следующее утверждение: координата бумерона $\xi(t)$ совпадает с положением (нерелятивистской) частицы единичной массы с начальным положением $\xi(t_0) = \xi_0$ и начальной скоростью $\xi_t(t_0) = -(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0)$, движущейся во внешнем поле с потенциалом $\Phi(\xi - \xi_0)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} b^2 [1 - (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0)^2] \exp(-4px). \quad (9.78)$$

Если начальная скорость отрицательна (если начальная поляризация бумерона такова, что $(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) > 0$), то частица начинает двигаться налево с уменьшающейся скоростью до точки поворота $\xi = \xi_0 + (4p)^{-1} \ln(1 - (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0)^2)$; затем она возвращается назад, уходя в конце концов на бесконечность с асимптотически постоянной скоростью b . Если бумерон начинает двигаться направо $[(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) < 0]$, то он продолжает движение с все увеличивающейся скоростью, которая стремится асимптотически к той же самой величине b . Заметим, что эта аналогия применима и к случаям $\hat{\mathbf{n}}_0 = -\hat{\mathbf{b}}$ или $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{b}}$ (в отличие от общего случая при этом бумерон не возвращается, а движется с постоянной скоростью), при этом потенциал $\Phi(x)$ в (9.78) обращается в нуль. Потенциал $\Phi(x)$ зависит от параметров бумерона (его начальной поляризации и параметра p , определяющего его форму) и от вектора $\hat{\mathbf{b}}$, но не зависит от величины \mathbf{a} , которая влияет лишь на временную эволюцию поляризации бумерона для конечных времен.

В другом специальном случае $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$ бумерон по-прежнему описывается (9.62), (9.63), но поведение $\xi(t)$ и $\hat{\mathbf{n}}(t)$ дается более простыми выражениями

$$\xi(t) = \xi_0 + (2p)^{-1} \ln \left\{ 1 - \lambda\beta S_1(t) + \frac{1}{2} \lambda(\lambda + \gamma) S_2(t) \right\}, \quad (9.79)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(t) = \left\{ \hat{\mathbf{n}}_0 - [\lambda\hat{\mathbf{b}} - (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{n}}_0)] S_1(t) - \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{n}}_0 - \alpha\hat{\mathbf{a}} - \lambda^2\hat{\beta}\hat{\mathbf{b}} + \lambda(\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}})] S_2(t) \right\} / \left\{ 1 - \lambda\beta S_1(t) + \frac{1}{2} \lambda(\lambda + \gamma) S_2(t) \right\},$$

$$S_1(t) = (\lambda^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{sh} [a(\lambda^2 - 1)^{1/2} (t - t_0)], \quad (9.80)$$

$$S_2(t) = 4(\lambda^2 - 1)^{-1} \operatorname{sh}^2 \left[\frac{a}{2} (\lambda^2 - 1)^{1/2} (t - t_0) \right] \quad \text{при } \lambda > 1,$$

$$S_1(t) = a(t - t_0), \quad S_2(t) = [a(t - t_0)]^2 \quad \text{при } \lambda = 1,$$

$$S_1(t) = (1 - \lambda^2)^{-1/2} \sin [a(1 - \lambda^2)^{1/2} (t - t_0)],$$

$$S_2(t) = 4(1 - \lambda^2)^{-1} \sin^2 \left[\frac{a}{2} (1 - \lambda^2)^{1/2} (t - t_0) \right] \quad \text{при } \lambda < 1, \quad (9.81)$$

$$\alpha = (\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0), \quad \beta = (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0), \quad \gamma = (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) = \pm (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad (9.82)$$

где λ определяется (9.68). Следовательно, если начальная поляризация $\hat{\mathbf{n}}_0$ совпадает с одним из единичных векторов ($\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(0) = 1/2$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$)

$$\hat{\mathbf{n}}_{\pm} = -\{\pm \lambda(1 - \lambda^2)^{1/2} \theta(1 - \lambda) \hat{\mathbf{a}} \pm (\lambda^2 - 1)^{1/2} \theta(\lambda - 1) \hat{\mathbf{b}} + [\theta(\lambda - 1) + \lambda^2 \theta(1 - \lambda)] \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}\} / \lambda, \quad (9.83)$$

то он не изменяется во времени, $\hat{\mathbf{n}}(t) = \hat{\mathbf{n}}_0$, и солитон вообще не движется (т. е. $\xi(t) = \xi_0$), если $\lambda \leq 1$, и движется с постоянной скоростью $\pm v$ (т. е. $\xi(t) = \xi_0 \pm v(t - t_0)$), если $\lambda > 1$, где

$$v = (\lambda^2 - 1)^{1/2} b / \lambda. \quad (9.84)$$

Если начальная поляризация $\hat{\mathbf{n}}_0$ не совпадает ни с $\hat{\mathbf{n}}_+$, ни с $\hat{\mathbf{n}}_-$, то $\hat{\mathbf{n}}(t)$ меняется со временем, отличаясь от $\hat{\mathbf{n}}_{\pm}$ при всех конечных t . Если $\lambda > 1$, то поляризация стремится асимптотически к $\hat{\mathbf{n}}_{\pm}$ (т. е. $\hat{\mathbf{n}}(\pm \infty) = \hat{\mathbf{n}}_{\pm}$), если же $\lambda < 1$, то поляризация изменяется периодически (с периодом $(2\pi/a)(1 - \lambda^2)^{-1/2}$).

Как и ранее, наиболее наглядное представление о поведении бумерона дает замечание о том, что координата бумерона совпадает с положением частицы единичной массы с начальной координатой $\xi(t_0) = \xi_0$ и начальной скоростью $\xi_t(t_0) = -\beta b$, которая движется во внешнем поле с потенциалом $\tilde{\Phi}(\xi - \xi_0)$,

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{2} (b/\lambda)^2 \exp(-2px) \{ [(\alpha^2 + \gamma^2)\lambda + \gamma]^2 + \alpha^2 / (\alpha^2 + \gamma^2) \} \times \times \exp(-2px) - 2(1 + \lambda\gamma). \quad (9.85)$$

Этот потенциал стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$; он имеет единственный отрицательный минимум в точке $\bar{x} \equiv (2p)^{-1} \ln \{ [(\alpha^2 + \gamma^2)\lambda + \gamma]^2 + \alpha^2 / [(\alpha^2 + \gamma^2)(1 + \lambda\gamma)] \}$, если $\lambda\gamma > -1$. При $x \rightarrow -\infty$ потенциал стремится к плюс бесконечности. Случай $\alpha = 1 + \lambda\gamma = 0$, при котором потенциал обращается в нуль, отвечает совпадению $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{n}}_+$ или $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{n}}_-$. Общая энергия частицы имеет простой вид

$$E = \tilde{\Phi}(0) + \frac{1}{2} \beta^2 b^2 = \frac{1}{2} v^2 \operatorname{sign}(\lambda - 1), \quad (9.86)$$

где v определено (9.84). Следовательно, энергия положительна при $\lambda > 1$ и бумерон приходит из правой бесконечности и уходит на нее, двигаясь асимптотически с постоянной скоростью v . При $\lambda < 1$ энергия частицы отрицательна и она ведет себя как частица в потенциальной яме, колеблясь вокруг положения равновесия $\xi_0 + \bar{x}$ (см. выше). Эти осцилляции, конечно, описываются выражением (9.79). Они имеют период $(2\pi/a)(1 - \lambda^2)^{-1/2}$. Случай $\lambda = 1$ соответствует движению частицы с нулевой энергией в поле с потенциалом (9.85), которая также всегда приходит из плюс бесконечности (или уходит на нее), но со стремящейся к нулю скоростью.

Заметим, что аналогия между движением бумерона и частицы во внешнем поле (9.85) справедлива и в случаях, когда начальная поляризация совпадает с $\hat{\mathbf{n}}_+$ или $\hat{\mathbf{n}}_-$, так как в этом случае потенциал (9.85) равен нулю тождественно (более того, начальная скорость бумерона $-\beta b$ стремится к нулю, если $\lambda < 1$).

Следует подчеркнуть, что для данного нелинейного эволюционного уравнения (9.59) с $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$ существуют решения, включающие одновременно все возможные типы солитонов: солитоны типа бумеронов ($\xi(t) \rightarrow +\infty, t \rightarrow \pm\infty$), неподвижные солитоны ($\xi(t) = \xi_0$), осциллирующие солитоны и солитоны, движущиеся с постоянной скоростью, — в зависимости от параметра формы p (в особенности от того, превышает он или нет величину $a/(2b)$) и поляризации каждого солитона. Солитонам, неподвижным и движущимся с постоянной скоростью, отвечает множество начальных условий, имеющее меньшую, чем для остальных типов, размерность. Наличие осциллирующих солитонов *требует*, чтобы для исходного уравнения были выполнены условия $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$, поскольку такое поведение характерно только для этого случая.

Уравнения бумерона (9.59) содержат и другие специальные классы интегрируемых НЭУ. Интересным примером служат уравнения, отвечающие следующей редукции: *если вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} ортогональны и вектор \mathbf{V} первоначально ортогонален \mathbf{a} , то он остается ортогональным \mathbf{a} :*

$$\text{из } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ и } \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}(x, t_0) = 0 \text{ следует } \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}(x, t) = 0. \quad (9.87)$$

Тогда в этом случае можно положить

$$\hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{V}(x, t/b) = -Y(x, t), \quad (9.88a)$$

$$(\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{a}}) \cdot \mathbf{V}(x, t/b) = Z(x, t) - [a/(2b)], \quad (9.88b)$$

$$U_x(x, t/b) = -Y_t(x, t) - Z^2(x, t) + [a/(2b)]^2. \quad (9.88c)$$

Для величин Y и Z получим систему уравнений в частных производных

$$Y_{tt}(x, t) - Y_{xx}(x, t) = -[Z^2(x, t)]_t, \quad (9.89a)$$

$$Z_{xt}(x, t) = 2Y_x(x, t)Z(x, t). \quad (9.89b)$$

Эти уравнения интегрируемы обратным спектральным преобразованием, так как они связаны с особым случаем уравнения бумеронов (9.87) при специальных начальных данных

$$Z(x, t_0) = Z_0(x), \quad Y(x, t_0) = Y_0(x), \quad Y_t(x, t_0) = W(x), \quad (9.90)$$

которые должны удовлетворять условиям

$$Z_{0x}(\pm\infty) = Y_0(+\infty) = Y_{0x}(\pm\infty) = W(+\infty) = W_x(\pm\infty) = 0. \quad (9.91)$$

Решения этих уравнений обладают всем богатством поведения, описанным выше.

Заметим, что нелинейные эволюционные уравнения (9.89), кроме временной и трансляционной инвариантности, не изменяются также масштабным преобразованием

$$t \rightarrow \eta t, \quad x \rightarrow \eta x, \quad Y \rightarrow Y/\eta, \quad Z \rightarrow Z/\eta \quad (9.92)$$

и дискретным преобразованием

$$Z(x, t) \rightarrow -Z(x, t). \quad (9.93)$$

В заключение заметим, что дифференцируя (9.89a) по x и используя (9.89b), получим интригующее нелинейное уравнение в частных производных для единственного поля $Z(x, t)$:

$$(\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2)(Z_{xt}/Z) + 2(Z^2)_{xt} = 0. \quad (9.94)$$

Задача Коши для этого уравнения, следовательно, также разрешима с помощью обратного спектрального преобразования. Начальные условия для этого уравнения

$$Z(x, t_0) = Z_0(x), \quad Z_t(x, t_0) = Z_1(x), \quad Z_{tt}(x, t_0) = Z_2(x), \quad (9.95)$$

удовлетворяющие условиям (которые не необходимы)

$$Z_0(x) \neq 0, \quad Z_{0x}(\pm \infty) = Z_{1x}(\pm \infty) = Z_{2x}(\pm \infty) = 0, \quad (9.96)$$

обеспечивают разрешимость задачи Коши.

9.5. Преобразования Бэклунда

Используя произвольность f и g , M и N в основных формулах, полученных непосредственно из (9.11), (9.12), можно заключить, что если матрицы-потенциалы $Q(x)$ и $Q'(x)$ связаны соотношением

$$a_\mu(\Lambda)[\sigma_\mu Q(x) - Q'(x)\sigma_\mu] + b_\mu(\Lambda)\Gamma\sigma_\mu = 0, \quad (9.97)$$

то соответствующие им коэффициенты отражения $R(k)$ и $R'(k)$ удовлетворяют уравнению

$$R'(k) = \{[a_\mu(-4k^2) + 2ikb_\mu(-4k^2)]\sigma_\mu\} R(k) \times \\ \times \{[a_\mu(-4k^2) - 2ikb_\mu(-4k^2)]\sigma_\mu\}^{-1} \quad (9.98)$$

Операторы Λ и Γ в (9.97) определяются с помощью (9.13), (9.14), функции a_μ и b_μ произвольны (лишь бы соответствующее выражение в (9.97) имело смысл; например, достаточно, чтобы они были целыми). Следует подчеркнуть, что функции a_μ и b_μ могут зависеть от произвольных дополнительных переменных, таких, как t , но должны быть независимы от x .

Важность формулы (9.97) заключается в том, что она дает точную, хотя и сложную связь между двумя потенциалами, для

которых коэффициенты отражения связаны простой линейной формулой (9.98).

Предположим, что матрица $Q(x, t)$ удовлетворяет нелинейному эволюционному уравнению (9.25) и матрица $Q'(x, t)$ связана с ней соотношением (9.97), где a_μ и b_μ не зависят от t и y . Если для всех z выполнено

$$[\alpha_m(z) a_n(z) + z \beta_m(z) b_n(z)] [\sigma_m, \sigma_n] = 0, \quad (9.99a)$$

$$[\alpha_m(z) b_n(z) + \beta_m(z) a_n(z)] [\sigma_m, \sigma_n] = 0, \quad (9.99b)$$

то из (9.98) вытекает, что связь $R'(k, t)$ с $R'(k, t_0)$ такая же, как и связь $R(k, t)$ с $R(k, t_0)$. Но последняя временная зависимость $R'(k, t)$ соответствует уравнению (9.25) для потенциала $Q'(x, t)$. Значит, если матрица $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению (9.25) и $Q'(x, t)$ связана с ней формулой (9.97) (с a_μ и b_μ , не зависящими от t и y и удовлетворяющими (9.99)), то $Q'(x, t)$ удовлетворяет тому же самому уравнению (9.25).

Преобразование (9.97) с условиями (9.99) будет называться преобразованием Бэклунда. Следует подчеркнуть еще раз произвольность функций a_μ и b_μ , удовлетворяющих единственному ограничению (9.99). Дополнительные ограничения могут возникнуть, если требовать, чтобы специальные свойства матрицы $Q(x, t)$, например ее эрмитовость, сохранялись при преобразовании Бэклунда. Далее мы ограничимся подклассом преобразований Бэклунда, отвечающих условиям $a_n = b_n = 0$. Для удобства обозначений положим $a_0 = f$, $b_0 = g$. При этом преобразование Бэклунда запишется в форме

$$f(\Lambda)[Q(x, t) - Q'(x, t)] + g(\Lambda)\Gamma = 0, \quad (9.100)$$

Соответствующая формула для коэффициентов отражения будет иметь вид

$$R'(k, t) = R(k, t) \{ [f(-4k^2) + 2ikg(-4k^2)] / [f(-4k^2) - 2ikg(-4k^2)] \}. \quad (9.101)$$

Этот класс преобразований Бэклунда интересен тем, что он имеет место для всех уравнений (9.25) (и, более того, для (9.24)). Нет никаких ограничений на вид функций f и g , связанных со структурой нелинейного эволюционного уравнения. Хотя эти преобразования представляют собой малый подкласс всех преобразований Бэклунда, они достаточно общие, чтобы получить многочисленные важные результаты, которые вытекают даже из самого простого варианта (9.100), отвечающего постоянным f и g . Последние преобразования удобно описать с помощью единственной константы $p = -0,5 f/g$. Соотношение (9.101) при этом будет иметь вид

$$R'(k, t) = -\frac{k+ip}{k-ip} R(k, t), \quad (9.102)$$

а преобразование Бэклунда —

$$Q'(x, t) = Q(x, t) - (2\rho)^{-1}\Gamma. \quad (9.103)$$

Результаты, связанные с преобразованием Бэклунда, удобнее обсуждать с помощью интеграла от Q . Введем матрицу

$$W(x, t) = \int_x^{+\infty} dx' Q(x', t), \quad (9.104)$$

которая удовлетворяет граничным условиям

$$W(+\infty, t) = W_x(\pm\infty, t) = 0. \quad (9.105)$$

На самом деле часто бывает удобнее записывать через W и нелинейные эволюционные уравнения (9.25). Например, уравнение бумерона запишется через W как уравнение в частных производных, в то время как для Q оно имело интегродифференциальный вид. Аналогичное обозначение

$$W' = \int_x^{+\infty} dx' Q'(x', t)$$

вводится для матрицы $Q'(x, t)$.

Преобразование Бэклунда между W и W' (9.103) запишется в новых обозначениях (см. [9.1]) как

$$W'_x(x, t) + W_x(x, t) = -\frac{1}{2} [W'(x, t) - W(x, t)] \times \\ \times [4\rho + W'(x, t) - W(x, t)]. \quad (9.106)$$

Полезно решить это уравнение в особом случае $W = 0$. Несложные вычисления приводят к односолитонному решению

$$W'(x, t) = -2\rho \{1 - \text{th}[\rho(x - \xi)]\} P, \quad (9.107)$$

где

$$P^2 = P. \quad (9.108)$$

Константы интегрирования ξ и P , конечно, зависят от t . Эти зависимости можно получить подстановкой (9.107) в (9.25). Получившиеся уравнения для ξ и P содержат только переменную t . Конечно, при этом получатся выражения (9.48), (9.49).

9.6. Нелинейная суперпозиция

Из (9.102) легко вытекает, что два преобразования Бэклунда (9.106), отвечающие параметрам ρ_1 и ρ_2 , коммутируют. Отсюда немедленно следует [9.1] справедливость нелинейного закона

суперпозиции, характеризуемого формулой

$$(p_1 - p_2)[W_{12} - W_0] + \frac{1}{4} \{[W_{12} - W_0], [W_1 - W_2]\} = \\ = -(p_1 + p_2)[W_1 - W_2], \quad (9.109)$$

где $W_0(x, t)$ — решение уравнения (9.25) (переписанного в терминах W), W_1 и W_2 — решения того же самого уравнения, связанные с W_0 преобразованиями Бэклунда (9.106) при значениях параметра p_1 и p_2 соответственно. При этом W_{12} есть также решение того же самого уравнения, связанное с W_1 преобразованием Бэклунда с параметром p_2 или связанное с W_2 преобразованием Бэклунда с параметром p_1 .

Этот результат может быть использован для получения из $W_0 = 0$ и двух односолитонных решений W_1 и W_2 двухсолитонного решения. Таким же образом, добавляя каждый раз солитон, можно чисто алгебраическими операциями получить многосолитонные решения [9.1].

9.7. Законы сохранения

Все нелинейные эволюционные уравнения, обсуждаемые в этой главе, допускают бесконечную последовательность законов сохранения. Точные выражения для этих сохраняющихся величин получим для следующего нелинейного эволюционного уравнения

$$Q_t(x, t) = [A(t), Q(x, t)] + \{B(t), Q_x(x, t)\} + \\ + [Q(x, t), [W(x, t), B(t)]]. \quad (9.110)$$

Здесь $A(t)$ и $B(t)$ суть произвольные N -мерные матрицы. В уравнении использовано обозначение (9.104). Уравнение Буркера соответствует (9.110) при $N = 2$ и постоянных бесследовых матрицах A и B .

Сохраняющиеся величины даются [9.1] формулой

$$c_m = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \operatorname{tr} [W^{(m)}(x, t)], \quad (9.111)$$

где матрицы $W^{(m)}$ определены рекуррентным соотношением

$$W^{(m+1)}(x, t) = W_x^{(m)}(x, t) + \sum_{l=1}^{m-1} W^{(l)}(x, t) W^{(m-l)}(x, t) \quad (9.112)$$

при

$$W^{(1)}(x, t) = W_x(x, t) = -Q(x, t). \quad (9.113)$$

Нетривиальные законы сохранения получаются лишь для c_{2n+1} , поскольку все величины с четными номерами обращаются в нуль.

Первые три интеграла имеют вид

$$c_1 = -\frac{1}{4} \operatorname{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx Q(x, t) \right\},$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx [Q(x, t)]^2 \right\},$$

$$c_5 = -\frac{1}{4} \operatorname{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx (2 [Q(x, t)]^3 + [Q_x(x, t)]^2) \right\}.$$

9.8. Обобщенная резольвентная формула

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$q_t(x, t) = i\omega(\partial/\partial x, t) q(x, t), \quad (9.114)$$

где $\omega(z, t)$ — целая функция переменной z . Решение задачи Коши для него может быть записано в краткой форме с помощью «резольвентной формулы»

$$q(x, t) = \exp \left\{ i \int_{t_0}^t dt' \omega \left(\frac{\partial}{\partial x}, t' \right) \right\} q(x, t_0). \quad (9.115)$$

Несложно вывести аналогичную (хотя намного более условную) формулу для нелинейных эволюционных уравнений (9.25). Для этого надо сравнить (9.97), (9.98) (справедливые даже в том случае, когда f и g зависят от t) с (9.28) [9.1]. Получим

$$a_\mu(\Lambda, t_0, t) [\sigma_\mu Q(x, t_0) - Q(x, t) \sigma_\mu] + b_\mu(\Lambda, t_0, t) \Gamma \sigma_\mu = 0, \quad (9.116)$$

где a_μ и b_μ определяются из

$$\begin{aligned} & [a_\mu(z^2, t_0, t) + z b_\mu(z^2, t_0, t)] \sigma_\mu = \\ & = \exp \left\{ z \int_{t_0}^t dt' \beta_0(z^2, t') \right\} \exp \{ (t - t_0) [\alpha_n(z^2) + z \beta_n(z^2)] \sigma_n V \}. \end{aligned} \quad (9.117)$$

Операторы Λ и Γ определяются из (9.13), (9.14) при $Q'(x) = Q(x, t)$ и $Q(x) = Q(x, t_0)$.

В заключение заметим, что сходным образом можно связать решение НЭУ вида (9.25), вычисленное для времени t' , с решением другого уравнения того же вида, вычисленным для времени t . Подобные преобразования называются обобщенными преобразованиями Бэклунда [9.1].

9.9. Нелинейные операторные тождества

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных (9.114) имеет при $\omega(z, t) = -iz$ решения $q(x, t) = f(x + t)$, где f — произвольная функция. Подстановка этого решения в (9.115) [с $\omega(z, t) = -iz$] приводит к хорошо известному операторному тождеству

$$f(x + y) = \exp\left(y \frac{d}{dx}\right) f(x). \quad (9.118)$$

Отправляясь от (9.116), (9.117) вместо (9.115) (и от (9.25) вместо (9.114)), можно аналогично получить целый класс нелинейных операторных тождеств [9.1].

ЛИТЕРАТУРА

- 9.1. Calogero F., Degasperis A. — *Nuovo Cimento* (в печати); настоящая работа в основном следует этой ссылке, где можно найти дополнительные детали (включая доказательства всех приводимых результатов)
 - 9.2. Calogero F., Degasperis A. — *Lett. Nuovo Cimento* 16, 181 (1976).
 - 9.3. Calogero F., Degasperis A. — *Lett. Nuovo Cimento* 16, 425; 434 (1976).
 - 9.4. Calogero F. «Generalized Wronskian Relations: a Novel Approach to Bargman Equivalent and Phase-Equivalent Potentials». В кн.: *Studies in Mathematical Physics (Essay in Honor of Valentine Bargmann)*, ed. Lieb E. N., Simon B., Wightman A. S. (Princeton University Press, Princeton, N. Y. 1976); *Lett. Nuovo Cimento* 14, 443 (1975); *Nuovo Cimento* 31B, 229 (1976); *Lett. Nuovo Cimento* 14, 537 (1975).
- Calogero F., Degasperis A., *Nuovo Cimento* 32B, 201 (1976).

10. МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ И ЕГО ОБОБЩЕНИЙ

С. П. Новиков

10.1. Одномерные системы, допускающие представление Лакса; их стационарные решения

Рассмотрим трансляционно инвариантное эволюционное уравнение вида

$$\dot{u} = K[u], \quad \left(u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (10.1)$$

где u — вектор-функция непрерывного переменного x или дискретного переменного n ; уравнение (10.1) инвариантно относительно трансляций по x (или по n).

Определение 10.1. Мы скажем, что (10.1) допускает представление Лакса, если существуют два оператора L и A , действующие на функции $f(x)$ (или $f(n)$), коэффициенты которых выражаются через u , такие, что (10.1) эквивалентно уравнению $\dot{L} = [L, A]$.

Вообще говоря, операторы L и A задаются матрицами в некотором базисе $\{f_i(x)\}$ или $\{f_i(n)\}$ в пространстве функций. В дальнейшем мы будем предполагать, что эволюционное уравнение (10.1) и ассоциированный с ним оператор L локальны. В непрерывном случае это означает, что правая часть $K[u]$ зависит только от конечного числа производных $u(x), \dots, u^{(q)}(x)$ в данной точке x , а ассоциированный оператор L является дифференциальным оператором с коэффициентами, зависящими только от конечного числа производных $u(x), \dots, u^{(q)}(x)$ в этой точке. В дискретном случае локальность означает, что $K[u]$ и коэффициенты L для любого n являются функциями от значений u на интервале определенной длины $[n - \Delta, n + \Delta]$. Длина этого интервала называется порядком оператора L . Это требование имеет смысл, только если переменная n может принимать бесконечное число значений.

Обзор уравнений, допускающих представление Лакса, можно найти в [10.1]. Из всех этих систем нелокальными являются лишь системы Мозера [10.2] и Калоджеро частиц на прямой с парным взаимодействием специального вида, где у ассоциированного линейного оператора L все матричные элементы ненулевые. В локальном случае (для матриц Якоби) ненулевые элементы сосредоточены около главной диагонали в полосе конечной ширины.

Из требований локальности и трансляционной инвариантности следует, что (10.1) определяет поток (или динамическую систему) на любом трансляционно инвариантном классе функций (быстро убывающих, периодических с любым периодом, почти периодических с любой группой периодов и др.). Оператор L действует на всех этих классах функций; его собственные значения могут давать в принципе интегралы уравнений (10.1). Наша цель — изложить некоторые основные методы изучения периодического и квазипериодического случаев, развитые автором, Дубровиным, Матвеевым и Итсом (см., например, [10.3]), а также Лаксом, Маккином и Ван Мёрбеке (см. [10.1]); более детально эти методы изложены в обзоре [10.1].

Во всех случаях, когда может быть применен наш метод, имеется бесконечное число локальных трансляционно инвариантных эволюционных систем вида (10.1), скажем

$$\dot{u} = K_m[u], \quad m = 1, 2, \dots, \quad (10.2)$$

причем соответствующие потоки коммутируют друг с другом; исходное уравнение (10.1) получается при $m = 1$. Все системы (10.2) имеют представление Лакса $\dot{L} = [L, A_m]$ с одним и тем же L . Самым известным примером является уравнение КдФ, где

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + u(x), \quad A = -4 \frac{d^3}{dx^3} + 3 \left(u \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u \right) + \lambda \frac{d}{dx}. \quad (10.3)$$

Уравнение КдФ имеет «высшие аналоги», где оператор A_m имеет порядок $2m + 1$. Из дискретных систем локального типа наиболее известной является цепочка Тода и дискретное уравнение КдФ. Эти системы, а также хорошо известное уравнение «sine-Gordon», нелинейное уравнение Шрёдингера и другие имеют «высшие аналоги» (10.2), допускающие представление Лакса с тем же ассоциированным оператором L .

Хотя, как правило, только исходное эволюционное уравнение (10.1) представляет физический интерес, существование высших аналогов оказывается весьма важным для построения решений. Будем рассуждать следующим образом: мы хотим отыскать решения исходного уравнения (10.1). Для этого мы рассмотрим стационарные решения любого из его высших аналогов

$$\dot{u} = \sum_{q=1}^m c_q K_q[u] = 0. \quad (10.4)$$

Поскольку все системы (10.2) коммутируют, множество стационарных решений (10.4) инвариантно относительно потока (10.1) на любом трансляционно инвариантном классе функций. Если мы явно решим стационарное уравнение (10.4) для некоторого аналога (10.1) и найдем на этом множестве функций

динамику исходной системы (10.1), то мы получим класс точных решений исходной системы.

При $t \rightarrow \infty$ класс решений уравнений (10.4) увеличивается.

Определение 10.2. Мы скажем, что семейство эволюционных систем (10.2) *полно для периодической задачи*, если множество периодических решений уравнений (10.4) при всевозможных константах $\{c_q\}$ плотно в пространстве всех непрерывных периодических функций от x .

Аналогичное понятие полноты может быть введено для других трансляционно инвариантных классов функций. Совершенно ясно (хотя это и не было строго доказано в упоминавшихся выше работах), что для уравнения КдФ семейство его высших аналогов полно для периодической задачи. Однако оно не является полным для класса быстро убывающих функций, для которого и был открыт Гарднером и др. [10.4] метод обратной задачи рассеяния.

Оказывается, что существование полных семейств эволюционных систем, ассоциированных с некоторым оператором L , позволяет не только находить решения системы (10.1), но и эффективно решать обратную задачу для L .

Наша идея изучения уравнения (10.1) и оператора L требует решения следующих задач:

1) Как решать стационарные уравнения (10.4)? Будут ли эти конечномерные динамические системы вполне интегрируемыми?

2) Каковы спектральные свойства оператора L , коэффициенты которого удовлетворяют стационарным уравнениям (10.4)?

10.2. Конечнзонные линейные операторы

Рассмотрим оператор L порядка k с коэффициентами, периодическими с периодом T . Выберем базис $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ решений уравнения $L\varphi = E\varphi$ с начальными условиями в точке $x = x_0$, например, вида

$$\varphi_1(x_0) = 1, \quad \varphi_1^{(q)}(x_0) = 0, \quad 1 \leq q \leq k-1, \quad \varphi_j^{(j-1)}(x_0) = 1, \\ \varphi_j^{(q)}(x_0) = 0, \quad q \neq j-1.$$

Базис $\varphi_j(n, n_0, E)$ также может быть определен в дискретном случае, если решение уравнения $L\varphi = E\varphi$ определяется начальными значениями в k соседних точках $n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k - 1$. С оператором L ассоциируются обычно следующие объекты:

а) матрица трансляции (монодромии) $\hat{T}\varphi_j(x, x_0, E) = \varphi_j(x + T, x_0, E) = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij}(x_0, E) \varphi_i(x, x_0, E)$, $\hat{T} = (\alpha_{ij})$;

б) блоховские собственные функции (или функции Флоке), такие, что $T\psi_j = \mu_j(E)\psi_j$, где $\mu_j(E)$ — собственные значения матрицы T , не зависящие от x_0 .

Если $L = -d^2/dx^2 + u(x)$, то $\varphi(x, x_0, E)$ обычно обозначается через $C(x, x_0, E)$, а $\varphi_2(x, x_0, E)$ — через $S(x, x_0, E)$. Если $\mu_j(E) = \exp(\pm ipT)$, где $\mu_1 = \exp(ipT)$, $\mu_2 = \exp(-ipT)$, то $\rho(E)$ называется *квазиимпульсом*, а зависимость $E = E(\rho)$ — *законом дисперсии*.

Нормируем блоховскую функцию требованием $\psi_{\pm} = 1$ при $x = x_0$; функция $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ ограничена по модулю, если $\rho(E)$ вещественно. Такие отрезки на оси E называются *разрешенными зонами*, *зонами устойчивости* или *спектром* оператора L в $L_2(-\infty, \infty)$; дополнительные к ним промежутки называются *лакунами*. Для двух решений $L\varphi = E\varphi$, $L\psi = E\psi$ вронскиан $W(\varphi, \psi) = \varphi\psi' - \psi\varphi'$ является сохраняющейся величиной: $W' = 0$. Поэтому матрица T унитарна.

Справедлива простая

Лемма 10.1. Для оператора Шрёдингера $L = -d^2/dx^2 + u(x)$ блоховские собственные функции $\psi_{\pm}(x, E)$ однозначны и мероморфны по E на римановой поверхности Γ , двулистно накрывающей E -плоскость и ветвящейся во всех концах разрешенных зон E_j . Полюсы функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ не зависят от x и располагаются на Γ в точках $Q_j(x_0) = (\gamma_j, \pm)$ по одному над каждой лакуной конечной длины (или над ее концами) только на одном из листов \pm . Нули функции ψ_{\pm} расположены в точках $Q_q(x)$ на Γ . При $E \rightarrow \infty$ мы имеем асимптотически $\psi_{\pm}(x, x_0, E) \sim \exp[\pm i\sqrt{E}(x - x_0)]$.

Это утверждение, по существу, тривиально; мы сформулировали его, поскольку до работ по теории уравнения КдФ указанная важная связь с римановыми поверхностями не играла серьезной роли в теории уравнения Штурма — Лиувилля (Шрёдингера) с периодическим потенциалом $u(x)$. Риманова поверхность Γ имеет естественную проекцию на E -плоскость $\pi: \Gamma \rightarrow C$. Обозначим функцию $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ через $\psi(x, x_0, P)$, где P — точка Γ . Точки P_j , $j = \pm$ из прообраза $\pi^{-1}(E) = (P_+, P_-)$ дают базис решений ψ_+ , ψ_- для данной энергии E . Из условия $T\psi = \mu(E)\psi$ получаем, что логарифмическая производная $d \ln \psi / dx = i\chi(x, E)$ не зависит от x_0 и периодична с периодом T .

Все эти свойства приводят к естественному обобщению блоховских функций на почти периодический случай и на более общие операторы L .

Определение 10.3. Пусть L — оператор k -го порядка с почти периодическими коэффициентами (вообще говоря, комплексными и, возможно, мероморфными по x). Мы скажем, что оператор L *допустимый*, если для всех комплексных E уравнение $L\psi = E\psi$

имеет «блеховское» решение $\psi(x, P)$, мероморфное на некоторой k -листной римановой поверхности Γ над E -плоскостью $\pi: \Gamma \rightarrow C$, где P — точка Γ , и полюсы ψ не зависят от x . Требуется, чтобы логарифмическая производная $d \ln \psi / dx$ была почти периодической с той же группой периодов, что и L ; более того, функции $\psi(x, P_j)$ должны давать базис решений уравнения $L\psi = E\psi$, если $\pi(P_j) = E$ и E не есть точка ветвления. При $E \rightarrow \infty$ на каждом листе мы должны иметь асимптотически для ψ : $\psi_j \sim \sim \exp[k_j(x - x_0)]$, где k_j^{-1} — локальный параметр для Γ на этом листе [$k_{\pm} = \sqrt{E}$, $L = -d^2/dx^2 + u(x)$]. Мы назовем эту риманову поверхность Γ *спектром* оператора L .

Определение 10.4. Мы скажем, что допустимый линейный оператор L *конечнозонный*, если его спектр (поверхность Γ) имеет конечный род. В этом случае число полюсов блеховской функции $\psi(x, P)$ равно роду.

Для дискретных (локальных) операторов L вводятся аналогичные понятия. Важность такого понятия конечнозонного оператора видна из следующего утверждения.

Теорема 10.1. Если трансляционно инвариантное (локальное) эволюционное уравнение (10.1) допускает представление Лакса с локальными трансляционно инвариантными операторами L, A , то каждое периодическое и квазипериодическое вещественное или комплексное (возможно, мероморфное по x) решение стационарного уравнения $K[u] = 0$ определяет конечнозонный оператор L .

Для оператора Шрёдингера $L = -d^2/dx^2 + u(x)$, а также для всех операторов L , которые возникают в теории нелинейных систем типа КдФ, доказана и обратная теорема. Более того, во всех этих случаях стационарное уравнение (10.4) оказывается вполне интегрируемой гамильтоновой системой, решения которой квазипериодичны и даются в терминах θ -функций, связанных с поверхностью Γ (см. обзор [10.1]).

В периодическом случае матрица трансляции \hat{T} оператора L (порядка k) является функцией от x_0 , E удовлетворяет по x_0 уравнению

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_0} = [Q, \hat{T}], \quad (10.5)$$

где матрица $Q(x_0, E)$ полиномиальна по E и выражается через $u(x_0)$, $u'(x_0)$, ... Для случая $L = -d^2/dx^2 + u$ Q имеет вид $Q = \begin{pmatrix} 0 & u - E \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Если справедливо (10.4), то соответствующие операторы L и A коммутируют, $[A, L] = 0$. В базисе $\varphi_i(x, x_0, E)$

решений $L\varphi_j = E\varphi_j$, оператор A задается матрицей

$$A\varphi_j = \sum_i \lambda_{ij}\varphi_i, \quad \Lambda = (\lambda_{ij}) = \sum c_q \Lambda_q.$$

Для нестационарного уравнения $L = [L, A]$ матрица Λ определяется равенством

$$\varphi_j - A\varphi_j = \sum_i \lambda_{ij}\varphi_i. \quad (10.6)$$

Имеем уравнение

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = [\Lambda, \hat{T}]. \quad (10.7)$$

В стационарном случае $[\Lambda, \hat{T}] = 0$.

Из этого мы выводим, что блоховская функция $\varphi_j(x, x_0, E)$, определяемая в периодическом случае как собственный вектор матрицы \hat{T} , является также собственным вектором матрицы Λ . Сама матрица Λ полиномиальна по E (если L имеет конечный порядок) и зависит только от $E, u(x_0), u'(x_0), \dots$. Ввиду этого блоховская функция φ (как собственный вектор матрицы Λ , локальный по x_0) определена также и в непериодическом случае.

Как собственный вектор матрицы Λ , полиномиальной по E , блоховская функция φ мероморфна на римановой поверхности Γ над E -плоскостью

$$\det [y - \Lambda(E)] = P(y, E) = 0 \quad (10.8)$$

и имеет правильную асимптотику при $E \rightarrow \infty$.

Из этих рассуждений мы выводим, что оператор L конечнозонный, что и завершает доказательство теоремы 10.1.

Если $L = -d^2/dx^2 + u$, то $\text{tr } \Lambda = 0$, $P(y, E) = y^2 - R(E)$, где $R(E) = -\det \Lambda$. В общем (нестационарном) случае мы имеем (10.7) и (10.6). Из требования, чтобы оба этих равенства были справедливы, получаем

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_0} - \frac{\partial Q}{\partial t} = [Q, \Lambda]. \quad (10.9)$$

В стационарном случае выполняется

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x_0} = [Q, \Lambda]. \quad (10.10)$$

Это дает представление типа Лакса для стационарных уравнений (10.4) на матрицах, полиномиально зависящих от E . Интегралы (10.4) даются коэффициентами характеристического полинома

$$\det [y - \Lambda(E)] = P(y, E) = 0,$$

где коэффициенты Λ выражаются через $u(x_0), u'(x_0), \dots$. Для уравнения КдФ и всех его высших аналогов, где $L = -d^2/dx^2 +$

+ u , риманова поверхность Γ гиперэллиптическая: $y^2 = R_{2n+1}(E) = -\det \Lambda$. В базисе $\varphi_1 = C(x, x_0, E)$, $\varphi_2 = S(x, x_0, E)$ матрицы Λ , Γ вещественны, если потенциал u вещественный. Если $i\chi_{\pm}(x, E) = d \ln \psi_{\pm} / dx$, то $i\chi' + \chi^2 = u - E$, $\chi = \chi_R + i\chi_I$, где $-\chi_I = \frac{1}{2} (\ln \chi_R)'$. Это χ_R совпадает с вронскианом

$$2\chi_R = \psi'_+ \psi_- - \psi'_- \psi_+ = W(\psi_+, \psi_-).$$

Имеем равенства

$$\psi_{\pm} = C(x, x_0, E) + i\chi_{\pm}(x_0, E)S(x, x_0, E),$$

$$\psi_{\pm} = \frac{\chi_R(x, E)}{\chi_R(x_0, E)} \exp\left(i \int_{x_0}^x \chi_R dx\right),$$

$$\hat{T} = (\alpha_{ij}), \quad \chi_R(x_0, E) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\alpha_{21}}, \quad a = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \hat{T}.$$

Для временной динамики в силу любого из высших уравнений КдФ из (10.5), (10.7) следует

$$\dot{\chi}_R = (\lambda_{21}\chi_R)'. \quad (10.11)$$

Если L конечнозонный, то χ_R имеет вид

$$\chi_R(x, E) = \frac{\sqrt{\prod (E - E_i)}}{P_n(x, E)}, \quad (10.12)$$

где E_i — границы лакун (точки ветвления Γ), а $P_n(x, E) = \prod_{j=1}^n [E - \gamma_j(x)]$ есть полином по E степени n .

Полюсы функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ лежат на Γ над точками $\gamma_j(x_0)$, а нули над точками $\gamma_j(x)$. Из (10.11) вытекает, что интеграл $p(E) = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R dx$ сохраняется при любом E ; сравнивая (10.11) и (10.12), получаем динамику по t параметров γ_j :

$$\dot{\gamma}_j = (\lambda_{21})_{E=\gamma_j} \sqrt{R(E)} / \prod_{k \neq j} (\gamma_j - \gamma_k). \quad (10.13)$$

Зависимость γ_j от x имеет вид

$$\gamma_j' = \pm \sqrt{R(\gamma_j)} / \prod_{k \neq j} (\gamma_j - \gamma_k). \quad (10.14)$$

Все эти уравнения линейризуются так называемой «подстановкой Абеля», которую мы обсудим ниже. Из (10.13), (10.14) ясно, что они написаны для совокупности точек $(Q_j = (\gamma_j, \pm))$ на римановой поверхности Γ .

10.3. Гамильтонов формализм стационарной и нестационарной задач для уравнения КдФ

Все высшие уравнения КдФ имеют вид

$$\dot{u} = \left(\frac{\delta I_n}{\delta u} + c_1 \frac{\delta I_{n-1}}{\delta u} + \dots + c_n \frac{\delta I_0}{\delta u} \right)', \quad (10.15)$$

где величины I_n получаются как коэффициенты асимптотического разложения $\rho(E) = T^{-1} \int \chi_R dx = \sqrt{E} \left(1 + \sum_{n \geq -1} I_n / E^{n+2} \right)$; из уравнения Риккати для χ вытекает, что $I_n = \int P_n(u, u', \dots, u^{(n)}) dx$, где P_n — полином; $I_{-1} = \text{const} \cdot \int u dx$, $I_0 = \text{const} \cdot \int \frac{u^2}{2} dx$.

В соответствии с результатом Гарднера, Захарова и Фаддеева [10.5а, б], все уравнения (10.15) — гамильтоновы системы с бесконечным числом степеней свободы. Точнее, пусть $I = \int P(u, u', \dots, u^{(m)}) dx$ есть любой функционал, определенный на любом трансляционно инвариантном классе функций (например, быстро убывающих, периодических или почти периодических по x), для которого интеграл I сходится. Рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = \left(\frac{\delta I}{\delta u} \right)'. \quad (10.16)$$

Этот поток на избранном функциональном пространстве определяет гамильтонову систему, где d/dx является кососимметрическим оператором симплектической структуры. Скобки Пуассона двух функционалов $\mathcal{F}_\alpha = \int P_\alpha(u, u', \dots) dx$, $\alpha = 1, 2$, имеют по определению вид

$$[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2] = \int \frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta u} \left(\frac{\delta \mathcal{F}_2}{\delta u} \right)' dx. \quad (10.17)$$

Мы будем изучать в дальнейшем только такие функционалы $\mathcal{F} = \int P dx$, где P не зависит явно от x . Коммутативность двух функционалов, $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2] = 0$, означает справедливость формального тождества

$$\frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta u} \left(\frac{\delta \mathcal{F}_2}{\delta u} \right)' = [Q_{12}(u, u', \dots)]'. \quad (10.18)$$

Мы будем также формально рассматривать поток (10.16) на любом трансляционно инвариантном классе гладких функций, где интеграл I , возможно, и не определен. В этом общем случае

справедливость локального тождества (10.18) означает коммутативность потоков (\mathcal{F}_1) и (\mathcal{F}_2) , где (\mathcal{F}_α) записывается в виде уравнения

$$\dot{u} = \left(\frac{\delta \mathcal{F}_\alpha}{\delta u} \right)'.$$

Гарднер, Фаддеев и Захаров [10.5а, б] показали, что все высшие уравнения КдФ, порожденные интегралами I_n , попарно коммутируют: $[I_n, I_m] = 0$.

Как уже упоминалось в разд. 10.1, мы рассматриваем поток, задаваемый уравнением КдФ, на стационарных решениях уравнения (10.4)

$$0 = \frac{\delta I_n}{\delta u} + c_1 \frac{\delta I_{n-1}}{\delta u} + \dots + c_n \frac{\delta I_0}{\delta u} + c_{n+1} \frac{\delta I_{-1}}{\delta u}, \quad (10.19)$$

где $I_1 = \gamma \int \left(\frac{u'^2}{2} + u^3 \right) dx$, $I_2 = \gamma \int \left(\frac{u''^2}{2} - \frac{5u^2 u''}{2} + \frac{5u^4}{2} \right) dx$.

С общей точки зрения мы имеем два потока (\mathcal{F}_α) , $\alpha = 1, 2$, вида (10.16), для которых справедливо соотношение (10.18), рассматриваемых на любом трансляционно инвариантном классе функций. Сами интегралы (\mathcal{F}_α) могут и не быть определенными. На множестве неподвижных точек потока (\mathcal{F}_1) мы рассмотрим поток (\mathcal{F}_2) как конечномерную динамическую систему. Из соотношения (10.18) вытекает, что Q_{12} дает интеграл уравнения (10.20) для неподвижных точек потока (\mathcal{F}_1) :

$$\frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta u} - d = 0, \quad Q_{12}^{(d)'} = \left(Q_{12} - d \frac{\delta \mathcal{F}_2}{\delta u} \right)' = \left(\frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta u} - d \right) \left(\frac{\delta \mathcal{F}_2}{\delta u} \right)' \quad (10.20)$$

Считая функционал $\mathcal{F}_1 = \int P_1 dx$ невырожденным, введем обычным образом фазовые координаты и импульсы $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, где $P_1 = P_1(u, \dots, u^{(n)})$. Выразим $Q_{12}^{(d)}$ через (q, p) . Имеем

Теорема 10.2. $Q_{12}^{(d)}$ является конечномерным гамильтонианом потока (\mathcal{F}_2) , ограниченного на множество стационарных решений потока (\mathcal{F}_1) . В простейшем случае $\mathcal{F}_2 = \int \frac{u^2}{2} ds$ поток (\mathcal{F}_2) является группой трансляций по x и $Q_{12}^{(d)}$ является гамильтонианом уравнения (10.20) (по x).

В случае высших уравнений КдФ мы имеем $\mathcal{F}_1 = \sum_{q=1}^n I_q c_{n-q}$, где $c_0 = 1$, $c_{n+1} = d$, и $\mathcal{F}_2^{(l)} = I_l$ для $0 \leq l \leq n-1$. Все потоки $\mathcal{F}_2^{(l)}$ коммутируют, и, следовательно, попарно коммутируют (имеют нулевые скобки Пуассона) все гамильтонианы $Q_{12}^{(d)(l)}$ при $0 \leq l \leq n-1$ в конечномерном пространстве (q, p) . Сле-

довательно, система (10.20) вполне интегрируема. Интегралы $Q_{12}^{(d)}(l)$ просто связаны с другим семейством интегралов — коэф-

фициентами характеристического полинома $\det \Lambda = \sum_{i=0}^{2n} (E - E_i)$, выраженными через константы c_j и производные $u, u', \dots, u^{(2n-1)}$, как указано в разд. 10.2. Явная формула имеет вид

$$Q_{12}^{(d)}(l) = 2^{2l+1} (-1)^{n+l+1} k_1 + \dots + k \sum_{2n+1} = \\ = n + l + 2\beta_{k_1} \dots \beta_{k_{2n+1}} E_0^{k_1} \dots E_{2n}^{k_{2n+1}}, \quad (10.21)$$

где $\beta_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) / k!$.

Гамильтонианы $Q_{12}^{(d)}(l)$ выражаются через концы зон E_i (10.21), $\det \Lambda = P(u, E) = \sum_{i \geq 0} a_{2n+1-i} E^i$;

$$a_{2n+1-i} = \sum_{k+l=i+1} 2^{2l+3} c_{n-k+1} c_{n-l+1} - \\ - 8 \sum_{\substack{i+l \leq n \\ l > 0}} 2^{2l} Q_{12}^{(d)}(l-1) c_{n-(i+l)}. \quad (10.22)$$

Этот формализм естественно обобщается на другие системы, допускающие представление Лакса. Завершение интегрирования уравнений (10.19) требует введения «угловых» переменных на общей поверхности уровня коммутирующих интегралов. Удобными переменными на этой поверхности уровня являются величины (γ_j, \pm) , указанные в разд. 10.2. Связь величин (γ_j) с потенциалом и его производными и тем самым с фазовыми переменными задачи (10.19) может быть получена из выражения (10.12):

$$\chi_R = \frac{\sqrt{\Pi(E - E_i)}}{\Pi(E - \gamma_j(x))}, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \chi_R dx \sim \sqrt{E} \left(1 + \sum_{n \geq -1} \frac{I_n}{E^{n+2}} \right).$$

Имеем, в частности,

$$u(x) = -2 \sum_{j=1}^n \gamma_j(x) + \sum_{i=0}^{2n} E_i. \quad (10.23)$$

Угловые переменные вводятся при помощи «отображения Абеля» (см. разд. 10.4). Как будет объяснено в разд. 10.4, комплексная поверхность уровня всех коммутирующих интегралов уравнения (10.19) является абелевым многообразием («тором Якоби»).

10.4. Функция Ахиезера и ее приложения

Для конечнозонного оператора Шрёдингера $L = -d^2/dx^2 + u$ мы получили блоховскую функцию ψ_{\pm} , мероморфную на гиперэллиптической римановой поверхности Γ рода $g > 0$, двулистно

накрывающей E -плоскость $\pi: \Gamma \rightarrow C$. При $E \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика $\psi \sim \exp[\pm i \sqrt{E}(x - x_0)]$. Совокупность полюсов функции ψ $D = P_1 + \dots + P_g$ не зависит от x , а совокупность ее нулей $Q_1(x), \dots, Q_g(x)$ не зависит от x_0 . Условие нормировки таково: $\psi = 1$ для $x = x_0$ (см. разд. 10.2).

С геометрической точки зрения мы имеем:

- а) определенную риманову поверхность Γ , гиперэллиптическую и конечного рода g («алгебраическую кривую»);
- б) отмеченную точку ветвления P_∞ («бесконечность»);
- с) дивизор полюсов $D = P_1 + \dots + P_g$ степени g .

Пусть $\omega = k^{-1}$ — локальный параметр в окрестности точки $P_\infty(\omega = 0)$. Функция $\psi(x, P)$, зависящая от параметра x , мероморфна при $P \neq P_\infty$; совокупность полюсов этой функции не зависит от x , и $\psi = \exp[k(x - x_0)] [1 + O(k^{-1})]$ при $k \rightarrow \infty$ (или $P \rightarrow P_\infty$). Такая функция однозначно определяется кривой Γ , точкой P_∞ и дивизором полюсов D . Строится она так: дифференциал $\Omega = \psi^{-1}(d\psi/d\omega)d\omega$ алгебраичен на Γ ; он имеет полюсы первого порядка в точках P_j с вычетами -1 и нули первого порядка с вычетами $+1$ в точках $Q_j(x)$. Более того, $\Omega = -(x - x_0)\omega^2 d\omega + v$, где v не имеет полюсов в окрестности точки P_∞ .

Пусть $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ — обычный базис циклов на Γ , где $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, и $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_g$ — базис голоморфных дифференциалов на Γ , таких, что $\oint_{a_j} \omega_k =$

$$= 2\pi i \delta_{jk}, \text{ и } B_{kj} = \oint_{b_k} \omega_j. \text{ Возьмем дифференциал второго рода } \omega$$

с единственным двойным полюсом в P_∞ , где $\oint_{a_j} \omega = 0$. Возьмем

также дифференциалы третьего рода Ω_j , имеющие только простые полюсы в парах точек P_j и Q_j с теми же вычетами, что и Ω . Пусть

$$\Omega = \sum_{j=1}^g \Omega_j - (x - x_0)\omega + \sum_{j=1}^g \delta_j \omega_j. \quad (10.24)$$

Используем требование $\Omega = d \ln \psi$, где ψ однозначная функция. Это значит, что $\oint_{a_j} \Omega = 2\pi i m_j$, $\oint_{b_j} \Omega = 2\pi i n_j$, где числа

m_j, n_j целые. Мы применим эти соотношения к формуле (10.24) и используем хорошо известное тождество

$$\oint_{b_k} \Omega_j = \oint_{P_j}^{Q_j(x)} \omega_k. \quad (10.25)$$

В результате получим

$$(x - x_0) \mathcal{U}_j = (x - x_0) \oint_{b_j} \omega = \sum_{k=1}^g \int_{P_k}^{Q_k(x)} \omega_j + (\text{вектор решетки}), \quad (10.26)$$

где решетка в C^g определяется матрицей Римана $(2\pi i \delta_{kj}, B_{kj})$. Фактор C^g по этой решетке есть тор Якоби $\mathcal{F}(\Gamma)$.

Итак, параметры η_k есть «углы», такие, что $\eta'_k = \mathcal{U}_k$, где $\eta_k = \sum_{j=1}^g \int_{P_j}^{Q_j} \omega_k$. Поскольку множество точек (P_j) фиксировано, мы имеем «отображение Абеля» $S^g(\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}(\Gamma)$. Тор $\mathcal{F}(\Gamma)$ с координатами η_k является факторпространством C^g по решетке. $S^g(\Gamma)$ — это симметрическая степень кривой Γ , состоящая из неупорядоченных наборов точек (P_1, \dots, P_g) . Функции на многообразии $S^g(\Gamma)$ порождаются симметрическими функциями от P_1, \dots, P_g . В частности, в соответствии с формулой (10.23) для потенциала получаем выражение

$$u(x) = -2 \sum_{j=1}^g \pi(Q_j(x)) + \sum E_i, \quad \pi: \Gamma \rightarrow C. \quad (10.27)$$

Отсюда уже вытекает в принципе выражение для потенциала $u(x)$ через θ -функции в соответствии с учебниками по римановым поверхностям и θ -функциям; см., например, [10.6]. Наиболее удобное выражение получается через θ -функцию Римана

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta[\eta_1^0 + \mathcal{U}_1(x - x_0) - K_1, \dots] + c, \quad (10.28)$$

$$K_j = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^g B_{kj} - 2\pi i j \right), \quad \eta_j^0 = \sum_k \int_{P_k}^{Q_k(x_0)} \omega_j, \quad c = c(\Gamma),$$

где риманова θ -функция определяется рядом

$$\theta(\eta_1, \dots, \eta_g) = \sum_{m_1, \dots, m_g} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i, k} B_{ik} m_i m_k + \sum_k \eta_k m_k \right\}. \quad (10.29)$$

Временная зависимость потенциала в силу уравнения КдФ (или высшего КдФ с номером $q \geq 1$) может быть получена из асимптотик при $P \rightarrow P_\infty$

$$\psi \sim \exp[kx + k^3 t] \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] \quad (10.30)$$

или

$$\psi \sim \exp[kx + P_{2q+1}(k)t] \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right],$$

где P_{2q+1} — полином от k степени $2q+1$. Отсюда вытекает формула

$$u(x, t) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta(x\mathcal{U} + t\mathcal{W}^{(q)} + \mathcal{U}_0) + c, \quad (10.31)$$

где $\mathcal{W}_j^{(q)}$ — периоды по циклам b_j некоторых дифференциалов с полюсами в P_∞ , аналогично зависимости от x . Фактически системы (10.13), (10.14) для зависимости от x и от t записаны на многообразии $S^g(\Gamma)$, и угловые параметры η_k вводятся на торе $\mathcal{F}(\Gamma)$ при помощи отображения Абеля. Таким образом, динамика всех высших уравнений КдФ дается прямолинейными обмотками на торе $\mathcal{F}(\Gamma)$. Сопоставляя с предшествующими рассмотрениями, мы видим, что для вполне интегрируемой системы (10.19) комплексная поверхность уровня всех коммутирующих интегралов является абелевым многообразием, бирационально изоморфным $\mathcal{F}(\Gamma)$. Если потенциал u вещественный и ограниченный для всех x и t , то точка $(Q_1, \dots, Q_g) \in S^g(\Gamma)$ движется в силу систем (10.13), (10.14) по вещественному тору $T^g \subset \mathcal{F}(\Gamma)$, являющемуся произведением циклов a_j , $T^g = a_1 \times \dots \times a_g$, $Q_j = (\gamma_j, \pm) \in a_j$. Циклы a_j на Γ выбираются как прообразы лакун по отношению к проекции π на E -плоскость. Некоторые конкретные вычисления и приложения можно найти в обзоре [10.1].

Новые приложения функций типа функции Ахиезера найдены в недавних работах [10.7], [10.8].

Следуя [10.7], рассмотрим произвольную алгебраическую кривую Γ (не обязательно гиперэллиптическую) и точку P_∞ на ней (не обязательно точку ветвления).

Выберем локальный параметр $w = k^{-1}$ около точки $P_\infty (w = 0)$ и дивизор полюсов $D = P_1 + \dots + P_g$ степени g . Пользуясь указанной выше конструкцией, построим «функцию Ахиезера» $\psi(x, y, t, P)$ с полюсами в дивизоре D и с асимптотикой

$$\psi \sim \exp[kx + \alpha_m(k)y + \beta_n(k)t]$$

около P_∞ ; $\alpha_m(k)$ и $\beta_n(k)$ — полиномы степеней m и n соответственно. Справедливы следующие утверждения:

а) можно найти операторы L_m и L_n по x порядков m и n с постоянными старшими членами, такие, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = L_m \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = L_n \psi; \quad (10.32)$$

б) выполнено соотношение совместности

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - L_m, \frac{\partial}{\partial t} - L_n \right] = 0, \quad (10.33)$$

эквивалентное нелинейным уравнениям Захарова — Шабата для коэффициентов операторов L_m, L_n ;

с) если $\alpha_m = k^2$, $\beta_n = k^3 + \lambda k$, то

$$L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + u, \quad L_3 = -4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right) + \lambda\frac{d}{dx} + \omega. \quad (10.34)$$

Соответствующее нелинейное уравнение (10.33) совпадает с двумерным уравнением КдФ или уравнением Кадомцева — Петвиашвили [10.9] для поперечных возмущений решений уравнения КдФ

$$\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right); \quad (10.35)$$

д) если $\alpha_m(k)$ — главная часть разложения по k алгебраической на кривой Γ функции $f(P)$ с единственным полюсом в P_∞ , то функция ψ имеет вид

$$\psi = \exp[fy]\psi_0(x, t, P),$$

и коэффициенты операторов L_m , L_n не зависят от y . Из этого вытекает, что каждой такой функции f с единственным полюсом в P_∞ (пусть $t = 0$) можно естественно сопоставить оператор L_f по x [строится целая коммутативная алгебра операторов, изоморфная всему кольцу $A(\Gamma, P_\infty)$ таких функций с полюсами в P_∞]. Это приводит к интересной классификации коммутативных колец дифференциальных операторов. Коэффициенты этих операторов и функция ψ выражаются через θ -функцию Римана.

В недавних работах, которые мы не будем здесь обсуждать, алгебро-геометрические идеи и функции типа функции Ахиезера применялись к обратной задаче для двумерного уравнения Шрёдингера с периодическими коэффициентами (см. [10.8]). Эти методы могут применяться также и в высших размерностях $n > 2$.

В заключение отметим, что большая часть настоящей статьи основывается на цикле работ автора, Дубровина, Матвеева и Итса, выполненных и в основном опубликованных в 1974 г. (см. [10.3], [10.10]), а также на работе Лакса [10.11a]. При написании разд. 10.3 я также использовал результаты более поздних работ Лакса [10.11b], Гельфанда и Дикого [10.12] и Новикова и Богоявленского [10.13], [10.14]. В конце разд. 10.4 я использовал недавнюю работу Кричевера [10.7]. Часть результатов теории одномерного уравнения Шрёдингера с периодическим конечнозонным потенциалом, использующих абелевы многообразия, была также получена в 1975 г. Маккином и Ван Мёрбеке [10.15]. Более подробное изложение этой теории, содержащее историю вопроса и библиографию, можно найти в обзоре [10.1].

ЛИТЕРАТУРА

- 10.1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Матвеев В. Б. — УМН 31, 55 (1976).
- 10.2. Moser J. — Adv. Math. 16, 354 (1975).
- 10.3. Дубровин Б. А., Новиков С. П. — ДАН СССР 219, 19 (1974); ЖЭТФ 67, 2131 (1974).
- 10.4. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. — Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967).
- 10.5a. Gardner C. S. — J. Math. Phys. 12 : 8, 1548 (1971).
- 10.5b. Фаддеев Л. Д., Захаров В. Е. — Функци. анализ, 5 : 4, 18 (1971).
- 10.6. Krazer A. Lehrbuch der Thetafunktionen. — Teubner, Leipzig, 1903.
- 10.7. Кричевер И. М. — ДАН СССР, 227, 2 (1976); Функци. анализ 10, 75 (1976).
- 10.8. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. — ДАН СССР 229 : 1, 15 (1976).
- 10.9. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. — ДАН СССР 192 : 4, 753 (1970).
- 10.10. Новиков С. П. — Функци. анализ 8, 54 (1974).
- 10.11a. Lax P. D. — Lect. Appl. Math. 15, 85 (1974).
- 10.11b. Comm. Pure Appl. Math. 28, 141 (1975).
- 10.12. Гельфанд И. М., Дикий Л. А. — УМН 30, 185 (1975); Функци. анализ 10, 18 (1976).
- 10.13. Богоявленский О. И., Новиков С. П. — Функци. анализ 10, 9 (1976).
- 10.14. Богоявленский О. И. — Функци. анализ 10, 2 (1976).
- 10.15. McKean H., van Moerbeke P. — Inventiones Math. 30, 217 (1975).

11. ГАМИЛЬТОНОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАССЕЙНИЯ

Л. Д. Фаддеев

В этой главе будет обсужден особый аспект теории нелинейных эволюционных уравнений, которые интегрируемы обратным преобразованием рассеяния. Тех из этих уравнений, которые имеют особый физический интерес и являются бесконечномерными гамильтоновыми системами. Точная интегрируемость уравнений, о которых идет речь, имеет следующую интерпретацию на языке гамильтоновых систем: преобразование данных Коши к данным рассеяния, которое лежит в основе метода обратного преобразования рассеяния, является нелинейным каноническим преобразованием к переменным типа действие — угол. Эта интерпретация была первоначально предложена Захаровым и автором [11.1] для уравнения Кортевега — де Фриза. Наиболее интересные приложения этого подхода связаны с проблемами квантования нелинейных уравнений. Оно играет важную эвристическую роль при объяснении слабой стохастизации цепочки осцилляторов [11.2] и оказывается весьма существенным при доказательстве интегрируемости конечномерных систем, связанных со стационарными точками потоков, порожденных высшими законами сохранения [11.3]. В этой связи отметим, кроме того, что недавно Манаковым [11.4] была доказана интегрируемость уравнений N -мерного твердого тела.

11.1. Гамильтонова формулировка

Напомним основные элементы гамильтонова формализма, которые необходимы для того, чтобы прояснить сделанные выше утверждения. Подробности могут быть найдены, например, в [11.5, 11.6].

В основе гамильтонова формализма лежат:

I. Фазовое пространство, которое является $2n$ -мерным многообразием Γ_{2n} .

II. Замкнутая, невырожденная 2-форма Ω на Γ_{2n} (симплектическая форма).

III. Гамильтонова функция \mathcal{H} на Γ_{2n} .

В локальных координатах ξ на Γ_{2n} форма Ω имеет вид

$$\Omega = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2n} \Omega_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} \wedge d\xi^{\beta},$$

где матрица $\Omega_{\alpha\beta}$ антисимметрична, невырожденна, $\det \|\Omega_{\alpha\beta}\| \neq 0$, и удовлетворяет условию

$$\partial_{\mu} \Omega_{\alpha\beta} + \text{цикл. перестановка} = 0.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \xi^\alpha = \dot{\xi}^\alpha = \sum_{\beta} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi^\beta},$$

где H гамильтониан и матрица $\Omega^{\alpha\beta}$ обратна к $\Omega_{\alpha\beta}$. Тензорное поле $\Omega^{\alpha\beta}$ часто рассматривается как более фундаментальная величина, чем $\Omega_{\alpha\beta}$, поскольку оно определяет скобку Пуассона для функций на Γ_{2n} :

$$\{f(\xi), g(\xi)\} = \sum_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial g}{\partial \xi^\beta}.$$

Уравнения движения при этом могут быть записаны в форме

$$\dot{\xi}^\alpha = \{\xi^\alpha, H\}.$$

Говорят, что система допускает переменные типа действие — угол, если существует преобразование $(p, q) \rightarrow \xi$, переводящее форму Ω и гамильтониан H к виду

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i, \quad H = H(p).$$

Гамильтоновы уравнения в новых координатах

$$\dot{p} = 0; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

тривиально интегрируемы:

$$p(t) = p(0), \quad q(t) = q(0) + \frac{\partial H}{\partial p} t. \quad (11.1)$$

Если существуют глобальные переменные типа действие — угол, то говорят, что система является вполне интегрируемой.

Полная интегрируемость весьма редкое явление в механике. Уравнения, интегрируемые обратным преобразованием рассеяния, увеличивают число примеров вполне интегрируемых систем, прибавляя к ним физически важные бесконечномерные системы. Мы говорим о бесконечной размерности, поскольку в дальнейшем роль ξ будут играть функции переменной $x \in R^1$, а x будет играть роль индекса α .

Изложим гамильтонову формулировку для ряда систем.

1. Уравнение *sine-Gordon*. Фазовым пространством является пространство пар функций $u(x)$, $\pi(x)$, убывающих на бесконечности, $|x| \rightarrow \infty$. Гамильтониан H и форма Ω суть

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{2} \pi^2 + \frac{1}{2\gamma} [u_x^2 + 2m^2(1 - \cos u)] \right) dx,$$

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\pi(x) \wedge \delta u(x) dx \quad (11.2)$$

соответственно. Здесь m — масса, а γ — константа взаимодействия. Уравнения движения

$$\dot{u} = \gamma \pi; \quad \dot{\pi} = \frac{1}{\gamma} (u_{xx} - m^2 \sin u)$$

эквивалентны уравнению второго порядка

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 \sin u = 0, \quad (11.3)$$

которое называется уравнением «sine-Gordon». Константа γ , которая исключилась из уравнения, входит в скобку Пуассона и играет при квантовании роль константы Планка \hbar ,

$$\{u_t(x), u(y)\} = \gamma \delta(x - y).$$

2. *Нелинейное уравнение Шрёдингера.* Пусть теперь фазовым пространством является пространство комплекснозначных функций $\psi(x)$, убывающих при $|x| \rightarrow \infty$. Гамильтониан

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2m} \bar{\psi}_x \psi_x \pm \gamma |\psi|^4 \right) dx$$

и форма

$$\Omega = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \bar{\psi}(x) \wedge \delta \psi(x) dx; \quad \{\bar{\psi}(x), \psi(y)\} = i \delta(x - y) \quad (11.4)$$

приводят к уравнению движения

$$i\psi_t = -\frac{1}{2m} \psi_{xx} \pm 2\gamma |\psi|^2 \psi.$$

Это уравнение называется нелинейным уравнением Шрёдингера. Здесь m и γ суть масса и константа взаимодействия. Знаки перед γ различают случаи отталкивающего (+) и притягивающего (−) взаимодействия. Представляет физический интерес и случай $|\psi| \rightarrow \rho$ при $|x| \rightarrow \infty$. Соответствующая этому случаю форма Ω нуждается в более подробном определении, которое здесь обсуждаться не будет.

Симплектические формы типа (11.2), (11.4) характерны для теории поля, хотя ими не исчерпываются все интересные примеры. Убедимся в этом.

3. *Уравнение Кортевега — де Фриза.* Фазовое пространство состоит из вещественных функций $v(x)$, убывающих при $|x| \rightarrow \infty$. Пусть

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} v_x^2 + v^3 \right) dx; \quad \Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta v(x) \wedge \delta v'(y) dx dy,$$

так что

$$\{v(x), v(y)\} = \delta'(x - y);$$

уравнение движения в этом случае есть уравнение Кортевега — де Фриза

$$v_t = \{v, H\} = \frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta v} = 6vv_x - v_{xxx}. \quad (11.5)$$

Эта форма уравнения КдФ была предложена Гарднером, который использовал ее для прояснения гамильтоновости этого уравнения [11.7].

4. Уравнение *sine-Gordon* в конусных переменных. В конусных переменных

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t$$

уравнение (11.3) превращается в

$$u_{\xi\eta} = m^2 \sin u, \quad (11.6)$$

и его решения могут быть параметризованы начальными данными $u(\eta) = u(\xi, \eta)|_{\xi}$, т. е. единственной функцией. Уравнение (11.6) является гамильтоновым и порождается гамильтонианом P_+ и формой Ω :

$$P_+ = \frac{m^2}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos u(\eta)) d\eta,$$

$$\Omega = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \delta u_x(\eta) \wedge \delta u(\eta) d\eta.$$

Несложно убедиться в том, что ограничение Ω на решения уравнений движения эквивалентно форме (11.2) и что P_+ есть оператор сдвига вдоль ξ , $P_+ = H + P$, где

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} \pi u_x dx.$$

5. *Три волны*. Фазовым пространством являются тройки комплексных функций $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3$, с обычной симплектической формой

$$\Omega = \text{Im} \sum_{\alpha} \delta \bar{\psi}_\alpha \wedge \delta \psi_\alpha,$$

так что

$$\{\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = i\delta_{\alpha\beta} \delta(x - y).$$

Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\alpha} v_{\alpha} (\bar{\psi}_{\alpha x} \psi_{\alpha} - \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha x}) \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\psi}_1 \psi_2 \psi_3 + \psi_1 \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_3) dx$$

приводит к хорошо известному уравнению трех волн

$$\psi_{1t} + v_1 \psi_{1x} = i\psi_2 \psi_3; \quad \psi_{2t} + v_2 \psi_{2x} = i\psi_1 \bar{\psi}_3; \quad \psi_{3t} + v_3 \psi_{3x} = i\psi_1 \bar{\psi}_2.$$

6. *Цепочка Тоды*. Вместо пространств функций, с которыми мы имели дело в предшествующих примерах, рассмотрим бесконечные последовательности переменных $p_n, q_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, Форма Ω имеет обычный вид

$$\Omega = \sum_n dp_n \wedge dq_n.$$

Если в качестве гамильтониана взять

$$H = \frac{1}{2} \sum_n p_n^2 + \sum_n [\exp(q_n - q_{n-1}) - 1 - q_n + q_{n-1}],$$

то уравнениями движения будут

$$\dot{q}_n = p_n, \quad \dot{p}_n = \exp(q_n - q_{n-1}) - \exp(q_{n+1} - q_n).$$

Эти уравнения были предложены Тодой [11.8] как модель цепочки взаимодействующих осцилляторов. На этом мы закончим перечисление примеров гамильтоновых систем, к которым применим метод обратной задачи рассеяния. Соответствующие переменные действие — угол будут определены позже.

Идея о том, что уравнение КдФ вполне интегрируемо, появилась на основе следующего наблюдения: формула [11.9]

$$r(k, t) = \exp(8ik^3t)r(k, 0)$$

для зависимости от времени коэффициента отражения для уравнения Шрёдингера с потенциалом, удовлетворяющим уравнению КдФ, может быть переписана в форме

$$|r(k, t)| = |r(k, 0)|; \quad \arg r(k, t) = \arg r(k, 0) + 8k^3t.$$

Отсюда ясно, что от времени зависит ровно половина данных рассеяния. Сравнение с (11.1) делает идею полной интегрируемости уравнения КдФ абсолютно прозрачной. Ее детальная реализация содержится в [11.1].

После [11.1] полная интегрируемость была установлена для всех приведенных выше примеров: нелинейное уравнение Шрёдингера изучалось в [11.10], уравнение sine-Gordon в [11.11], уравнение трех волн и цепочки Тоды в [11.12] (см. также [11.13]).

11.2. Полная интегрируемость нелинейного уравнения Шрёдингера

Вывод полной интегрируемости будет проведен на примере нелинейного уравнения Шрёдингера, в то время как для остальных уравнений будут сделаны некоторые замечания,

Вспомогательная спектральная задача имеет вид [11.14]
 $(m = \frac{1}{2}, \nu = 1)$

$$L\psi = k\psi; \quad L = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.7)$$

Напомним определение данных рассеяния. Пусть \mathcal{F} и \mathcal{G} фундаментальные матрицы решений задачи (11.7), такие, что

$$\mathcal{F}(x, k) \sim \mathcal{E}(x, k), \quad x \rightarrow \infty; \quad \mathcal{E}(x, k) = \begin{pmatrix} e^{ikx} & 0 \\ 0 & e^{-ikx} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{G}(x, k) \sim \mathcal{E}(x, k), \quad x \rightarrow -\infty;$$

Тогда

$$\mathcal{F}(x, k) = \mathcal{G}(x, k)T(k).$$

Матрица перехода T имеет специальный вид

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \pm \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы удовлетворяют соотношениям

$$|a|^2 \pm |b|^2 = 1; \quad a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad b(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Более того, коэффициент $a(k)$ является граничным значением аналитической в верхней полуплоскости функции

$$a(k) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')|}{k - k' + i0} dk'\right\} \prod_l \frac{k - k_l}{k - \bar{k}_l}. \quad (11.8)$$

Здесь k_l нули $a(k)$ в верхней полуплоскости (существующие лишь в случае притяжения). Предположим, что общее число этих нулей N конечно и что $a(k)$ не имеет вещественных нулей; эти предположения будут обсуждены позднее. Для $k = k_l$, $\text{Im } k_l > 0$ спектральная задача имеет решение с асимптотическим поведением

$$\chi_l(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-ik_l x) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \chi_l = d_l \begin{pmatrix} \exp(ik_l x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty,$$

где d_l — комплексный коэффициент.

Данные рассеяния составляют коэффициент $b(k)$ и числа k_l , d_l , $l = 1, \dots, N$. Функция $\psi(x)$ может быть восстановлена по данным рассеяния с помощью уравнения Гельфанда — Левитана с матричным 2×2 ядром $K(x, y)$

$$K(x, y) + \hat{F}(x + y) + \int_x^\infty K(x, z) \hat{F}(z + y) dz = 0, \quad x < y, \quad (11.9)$$

где матрица $F(x)$ имеет вид

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & F \\ -\bar{F} & 0 \end{pmatrix}; \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) \exp(ikx) dk + \sum_l m_l \exp(ik_l x).$$

Здесь

$$r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}; \quad m_l = d_l / \left(i \frac{d}{dk} a(k) \Big|_{k=k_l} \right).$$

Уравнение написано для случая притяжения. Чтобы сохранить определенность, далее будет рассматриваться именно этот случай.

Функция $\psi(x)$ дается формулой

$$\psi(x) = -2iK_{12}(x, x). \quad (11.10)$$

Нашей задачей является вычисление преобразования гамильтониана H и формы Ω при отображении

$$\text{данные рассеяния} \rightarrow [\bar{\psi}(x), \psi(x)].$$

Для того чтобы найти гамильтониан в новых переменных, мы воспользуемся следующим способом: оказывается, что H является коэффициентом разложения $\ln a(k)$ при больших $|k|$

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{k^n}.$$

Есть два способа найти коэффициенты C_n . Из (11.8) получим

$$C_n = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |a(k)| k^{n-1} dk - \sum_{l=1}^N \frac{1}{n} (k_l^n - \bar{k}_l^n).$$

С другой стороны, эти коэффициенты могут быть выражены в терминах локальных функционалов от $\bar{\psi}$ и ψ . Для этого рассмотрим матричный элемент $f_{11}(x, k)$ матрицы $\mathcal{F}(x, k)$. Можно проверить, что для $\text{Im } k > 0$

$$f_{11}(x, k) = e^{ikh} [1 + O(1)], \quad x \rightarrow \infty, \quad f_{11} = a(k) e^{ikh} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Исходное дифференциальное уравнение дает, что функция

$$\chi(x, k) = \frac{d}{dx} \ln f_{11}(x, k) - ik$$

удовлетворяет уравнению

$$\chi = -i\psi\phi; \quad \phi_x = \frac{1}{i} (2k\phi - \psi\phi^2 - \bar{\psi}). \quad (11.11)$$

Из асимптотического поведения f_{11} получаем

$$\ln a(k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, k) dx.$$

Решение уравнения (11.11) можно искать в форме

$$\chi(x, k) = \sum \frac{\chi_n(x)}{k^n}.$$

Отсюда мы получаем возможность выразить коэффициенты C_n в терминах $\bar{\psi}$ и ψ и их производных. Первые три коэффициента равны

$$C_1 = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi} \psi dx;$$

$$C_2 = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\psi}_x \psi - \bar{\psi} \psi_x) dx;$$

$$C_3 = -\frac{i}{8} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\psi}_x \psi - |\psi|^4) dx.$$

Они с точностью до постоянных множителей совпадают с важными наблюдаемыми — числом частиц, импульсом и энергией.

Окончательная формула

$$H = -\frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \ln |a(k)| dk - \frac{8i}{3} \sum_l (k_l^3 - \bar{k}_l^3) = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_x|^2 - |\psi|^4) dx$$

дает искомое выражение гамильтониана в терминах данных рассеяния.

Найдем теперь форму Ω . Для этого выразим вариации $\delta\bar{\psi}$ и $\delta\psi$ функций $\bar{\psi}$ и ψ в терминах вариаций данных рассеяния. Воспользуемся уравнением Гельфанда — Левитана. Определим резольвенту, т. е. ядро $\Gamma_x(y, z)$, такое, что решение уравнения

$$f(y) + g(y) + \int_x^{\infty} f(z) F(z+y) dz = 0, \quad y > x,$$

представимо в форме

$$f(y) = -g(y) - \int_x^{\infty} g(z) \Gamma_x(y, z) dz.$$

Сопоставляя эти формулы с уравнением Гельфанда — Левитана (11.9), получим

$$\Gamma_x(y, x) = TK^*(x, y)T, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.12)$$

Вариация δK ядра оператора преобразования удовлетворяет уравнению

$$K(x, y) + \delta F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z) \delta F(z + y) dz + \int_x^\infty \delta K(x, z) F(z + y) dz = 0.$$

Используя резольвенту, решение этого уравнения можно представить как

$$\delta K(x, y) = -(I + K) \delta F(I + \Gamma_x)(x, y).$$

В частности, отсюда следует, если учесть (11.10), (10.12), что

$$\begin{aligned} \delta \psi(x) = & \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta r(k) f_{11}^2(x, k) - \delta \bar{r}(k) f_{12}^2(x, k)] dk + \\ & + \sum_l \left[\delta m_l f_{11}^2(x, k_l) - \delta \bar{m}_l f_{12}^2(x, \bar{k}_l) + m_l \delta k_l \frac{d}{dk} f_{11}^2(x, k) \Big|_{k=k_l} - \right. \\ & \left. - \bar{m}_l \delta \bar{k}_l \frac{d}{dk} f_{12}^2(x, k) \Big|_{k=\bar{k}_l} \right]. \end{aligned}$$

Здесь использован, кроме перечисленных выше, тот факт, что матрица $\mathcal{F}(x, k)$ может быть представлена с помощью оператора преобразования в виде

$$\mathcal{F}(x, k) = \mathcal{E}(x, k) + \int_x^\infty K(x, y) \mathcal{E}(y, k) dy.$$

Подставим выражение для $\delta \psi$ в форму Ω (см. (11.4)). Соответствующий интеграл по x может быть вычислен точно, поскольку соотношение

$$\begin{aligned} u_1(x, k) v_2(x, k') + u_2(x, k) v_1(x, k') = \\ = \frac{1}{i(k - k')} \frac{d}{dx} [u_1(x, k) v_2(x, k') - u_2(x, k) v_1(x, k')] \end{aligned}$$

выполняется для любого решения задачи (11.7).

Окончательное выражение для Ω (через данные рассеяния и их вариации) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 \delta r(k) \wedge \delta \bar{r}(k) dk + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk dl \frac{\delta F(k) \wedge \delta F(l)}{k - l} + \sum \frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \delta F(k) \wedge \end{aligned}$$

$$\wedge \left(\frac{\delta k_l}{k - k_l} - \frac{\delta \bar{k}_l}{k - \bar{k}_l} \right) + 2 \sum_{l \neq j} \left(\frac{\delta k_l \wedge \delta k_j}{k_l - k_j} + \frac{\delta \bar{k}_l \wedge \delta \bar{k}_j}{\bar{k}_l - \bar{k}_j} \right) -$$

$$- 4 \sum_{l, j} \frac{\delta k_l \wedge \delta \bar{k}_j}{k_l - \bar{k}_j} + 2 \sum_l \left(\frac{\delta m_l \wedge \delta k_l}{m_l} + \frac{\delta \bar{m}_l \wedge \delta \bar{k}_l}{\bar{m}_l} \right);$$

$$\delta F(k) = a(k) \bar{b}(k) \delta r(k) + \bar{a}(k) b(k) \delta \bar{r}(k) = -2\delta \ln |a(k)|.$$

Следующие комбинации данных рассеяния

$$P(k) = -\frac{2}{\pi} \ln |a(k)|; \quad Q(k) = \arg b(k); \quad -\infty < k < \infty;$$

$$\xi_l = 4 \operatorname{Re} k_l; \quad \eta_l = -\ln |d_l|;$$

$$\alpha_l = 4 \operatorname{Im} k_l; \quad \beta_l = \arg d_l; \quad l = 1, \dots, N$$

содержат всю информацию о них и могут быть выбраны в качестве канонических переменных. В них форма Ω приобретет стандартный вид

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta P(k) \wedge \delta Q(k) dk + \sum_{l=1}^N (\delta \xi_l \wedge \delta \eta_l + \delta \alpha_l \wedge \delta \beta_l).$$

Наблюдаемые N , P , H могут быть выражены через переменные типа действия:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(k) dk + \sum \alpha_l,$$

$$P = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\psi} \psi_x - \bar{\psi}_x \psi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2kP(k) dk + \sum_l \frac{1}{2} \xi_l \alpha_l,$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_x|^2 - |\psi|^4) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 4k^2 P(k) dk + \sum_l \left(\frac{1}{4} \xi_l^2 \alpha_l - \alpha_l^3 / 12 \right).$$

Исходные гамильтоновы уравнения в данных рассеяния приобретают вид

$$\frac{d}{dt} b(k, t) = 4ik^3 t b(k, t); \quad \frac{d}{dt} m_l(t) = 4ik_l^2 t m_l(t).$$

Все вышесказанное показывает, что переход к данным рассеяния для нелинейного уравнения Шрёдингера является каноническим преобразованием к переменным типа действие — угол. В следующем разделе будут обсуждены некоторые приложения этого результата. В заключение этого раздела будут сформулированы результаты, относящиеся к переменным типа действие — угол для примеров интегрируемых уравнений, которые были приведены в разд. 11.1.

1. Уравнение Кортевега — де Фриза. Вспомогательная спектральная задача [11.9]

$$-y'' + v(x)y = k^2y; \quad v(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

имеет решения с асимптотическим поведением

$$f(x, k) = e^{ikx} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty;$$

$$g(x, k) = e^{-ikx} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow -\infty.$$

Коэффициенты перехода определяются из равенств

$$f(x, k) = a(k)g(x, -k) + b(k)g(x, k);$$

$$f(x, ik_l) = d_l g(x, ik_l); \quad a(ik_l) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

Переменные типа действие — угол выражаются через данные рассеяния с помощью следующих формул [11.1]:

$$P(k) = \frac{4k}{\pi} \ln |a(k)|; \quad Q(k) = \arg b(k); \quad 0 \leq k < \infty;$$

$$\xi_l = k_l^2; \quad \eta_l = 2 \ln d_l; \quad l = 1, \dots, N;$$

$$\Omega = \int_0^{\infty} \delta P(k) \wedge \delta Q(k) dk + \sum_l d \xi_l \wedge d \eta_l;$$

$$H = 8 \int_0^{\infty} k^3 P(k) dk + \frac{32}{5} \sum_l \xi_l^{5/2}.$$

2. Уравнение sine-Gordon. Рассмотрим лишь ту форму этого уравнения, которая соответствует конусным переменным. Вспомогательная спектральная задача для этого уравнения такая же, как и для нелинейного уравнения Шрёдингера с $\psi(x) = iu_\eta(\eta)$ чисто мнимым [11.15, 11.16]. В этом случае данные рассеяния удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$a(k) = \overline{a(-k)}; \quad b(k) = -b(-k)$$

и нули $a(k)$ симметричны относительно мнимой оси. Коэффициенты перехода d_l являются чисто вещественными для чисто мнимых k_l . Переменные типа действие — угол суть [11.11] ($m = 1$)

$$P(k) = -\frac{8}{\pi \gamma k} \ln |a(k)|; \quad Q(k) = \arg b(k), \quad 0 < k < \infty;$$

$$\xi_a = \frac{1}{\gamma} \ln \lambda_a; \quad \eta_a = 8 \ln |c_a|; \quad a = 1, \dots, A;$$

$$\xi_b = \frac{4}{\gamma} \ln |\mu_b|; \quad \eta_b = \frac{4}{\gamma} \ln |d_b|; \quad \alpha_b = \arg \mu_b; \quad \beta_b = -\frac{16}{\gamma} \arg d_b.$$

Здесь $i\lambda_a$ чисто мнимые нули $a(k)$, μ_b комплексные нули $0 < \arg \mu_b < \frac{\pi}{2}$; c_a и d_b соответствующие коэффициенты перехода. Форма Ω равна

$$\Omega = \int_0^{\infty} \delta P(k) \wedge \delta Q(k) dk + \sum_a \delta \xi_a \wedge \delta \eta_a + \sum_b (\delta \xi_b \wedge \delta \eta_b + \delta \alpha_b \wedge \delta \beta_b).$$

Соответствующие выражения для гамильтониана H и импульса P

$$H = \int_0^{\infty} \left(2k + \frac{1}{8k}\right) P(k) dk + \frac{1}{\gamma} \sum_a \left(\frac{1}{\lambda_a} + 16\lambda_a\right) + \\ + \sum_b \frac{\mu_b - \bar{\mu}_b}{i\gamma} \left(\frac{1}{|\mu_b|^2} + 16\right);$$

$$P = \int_0^{\infty} \left(2k - \frac{1}{8k}\right) P(k) dk + \frac{1}{\gamma} \sum_a \left(\frac{1}{\lambda_a} - 16\lambda_a\right) + \\ + \sum_b \frac{\mu_b - \bar{\mu}_b}{i\gamma} \left(\frac{1}{|\mu_b|^2} - 16\right).$$

3. *Цепочка Тоды*. Вспомогательная спектральная задача ставится на языке бесконечномерной матрицы [11.17, 11.18]

$$L\varphi(n) = \alpha_{n-1}\varphi(n-1) + \alpha_n\varphi(n+1) + \beta_n\varphi(n) = \lambda\varphi(n); \\ \alpha_n = \exp(q_n - q_{n-1}); \quad \beta_n = -\frac{1}{2}p_n.$$

Решения $f(n, \zeta)$ и $g(n, \zeta)$ определяются из условий

$$f(n, \zeta) = \zeta^n [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty; \quad g(n, \zeta) = \zeta^{-n} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow -\infty; \\ 2\lambda = \zeta + \frac{1}{\zeta}; \quad \zeta = e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Коэффициенты перехода определяются аналогично предшествующим случаям равенствами

$$f(n, \zeta) = a(\zeta)g\left(n, \frac{1}{\zeta}\right) + b(\zeta)g(n, \zeta);$$

$$f(n, \zeta_l) = d_l g(n, \zeta_l); \quad a(\zeta_l) = 0; \quad -1 < \zeta_l < 1, \quad l = 1, \dots, N.$$

Переменные действие — угол даются следующими формулами:

$$P(\varphi) = \frac{1}{\pi} \sin \varphi \ln |a(e^{i\varphi})|; \quad Q(\varphi) = \arg b(e^{i\varphi});$$

$$\xi_l = \zeta_l + \frac{1}{\zeta_l}, \quad \eta_l = \ln d_l;$$

$$\Omega = \int_0^{\pi} \delta P(\varphi) \wedge \delta Q(\varphi) d\varphi + \sum_l \delta \xi_l \wedge \delta \eta_l.$$

Гамильтониан может быть выражен в переменных типа действия

$$H = \int_0^\pi 2 \sin \varphi P(\varphi) d\varphi + \sum_l \left[\frac{1}{2} \left(\xi_l^2 + \frac{1}{\xi_l^2} \right) + \ln \xi_l^2 \right].$$

На этом мы закончим список примеров переменных действие — угол и отошлем к работе [11.19], в которой найдены эти переменные для уравнения трех волн.

11.3. Приложения к задаче квантования

Как уже говорилось выше, гамильтонова формулировка интегрируемых уравнений наиболее удобна для их квантования. С этой точки зрения наибольший интерес представляют нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнение sine-Gordon. В квантовом случае первое уравнение описывает взаимодействующие частицы с парным δ -образным потенциалом. Второе уравнение является нетривиальным релятивистским примером самодействующего скалярного поля.

Запись гамильтониана в переменных типа действие — угол позволяет описать его спектр. Действительно, при квантовании переменные, через которые выражается гамильтониан, переходят в коммутирующие операторы. Их спектр определяется топологией соответствующего фазового пространства. Следовательно, собственные значения квантового гамильтониана могут быть получены подстановкой собственных значений переменных типа действие — угол в классическую формулу для гамильтониана.

Проиллюстрируем это следующими примерами. Рассмотрим сначала нелинейное уравнение Шрёдингера. Простая замена позволяет записать наблюдаемые переменные N , P и H в виде

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p) dp + \sum_l \eta_l; \quad \rho(p) = \frac{1}{2} P\left(\frac{p}{2}\right); \quad \eta_l = \alpha_l;$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} p\rho(p) dp + \sum_l p_l; \quad p_l = \frac{1}{2} \xi_l \alpha_l;$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \rho(p) dp + \sum_l \left(\frac{p_l^2}{n_l} - \frac{n_l^3}{12} \right).$$

Величина $\varphi(p)$, канонически сопряженная положительной переменной $\rho(p)$, принимает значения на окружности $0 \leq \varphi(p) \leq \leq 2\pi$. Отсюда следует, что переменные

$$a^*(p) = \sqrt{\rho(p)} e^{-i\varphi(p)}; \quad a(p) = \sqrt{\rho(p)} e^{i\varphi(p)}$$

корректно определены и имеют следующую скобку Пуассона:

$$\{a^*(p), a(p')\} = i\delta(p - p').$$

При квантовании операторы $\hat{a}^*(p)$ и $\hat{a}(p)$ имеют обычный смысл операторов рождения и уничтожения, действующих в фокковском пространстве. В частности, спектр оператора

$$\hat{\rho}(p) = \hat{a}^*(p) \hat{a}(p)$$

состоит из

$$\rho'(p) = \sum_{i=1}^M \delta(p - p_i). \quad (11.13)$$

Здесь множество вещественных чисел $\{p_i\}$ и число M интерпретируются как число частиц и их импульсы. Вклады $\hat{\rho}(p)$ в спектры N , P и H равны

$$N' = M, \quad P' = \sum_{i=1}^M p_i \quad \text{и} \quad H = \sum_{i=1}^M p_i^2$$

соответственно; они представляют энергию и импульс M нерелятивистских частиц массы $1/2$.

Величины n_i также сопряжены переменным типа фазы, поэтому спектр соответствующих операторов будет состоять из целых чисел. Переменные p_i сопряжены величинам q_i , которые могут принимать любое вещественное значение. Отсюда их спектр должен содержать все вещественные значения. Соответствующий вклад солитонных переменных в спектр квантовых гамильтониана и импульса равен

$$P' = \sum_{i=1}^N p_i; \quad H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{n_i} - \frac{n_i^3}{12} \right),$$

т. е. он соответствует импульсу и энергии системы частиц с массой $n_i/2$ и внутренней энергией $-n_i^3/12$. При $n = 2, 3, \dots$ такие частицы могут быть интерпретированы как связанные состояния n частиц массы $1/2$. Член $-n^3/12$ есть их энергия связи. В случае $n = 1$ мы получаем частицу массы $1/2$, т. е. то же, что было описано выше. Их энергия приобретет вид p^2 , если заметить

$$H \rightarrow H + N/12,$$

что можно обосновать с помощью подходящего упорядочивания квантовых операторов $\hat{\psi}^*$, $\hat{\psi}$. После этого энергия связи n частиц будет равна

$$e_n = \frac{n^3 - n}{12}.$$

Интригующее совпадение вкладов непрерывного спектра и солитонных переменных при $n = 1$ до сих пор полностью не понято. По-видимому, это может быть прояснено при правильном описании топологии фазового пространства в терминах переменных действие — угол. Так, взаимозаменяемость солитонных и непрерывных переменных можно было бы получить, если рассматривать большое количество нулей с малой мнимой частью, т. е. близких к непрерывному спектру.

Обычно спектр оператора \hat{H} исследуется в представлении, в котором операторы $\hat{\psi}^*(x)$, $\hat{\psi}(x)$ имеют следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{\psi}^*(x), \hat{\psi}(x)] = \delta(x - y)$$

(постоянная Планка \hbar здесь положена равной 1).

Операторы

$$\hat{N} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^* \hat{\psi} dx; \quad \hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\psi}_x^* \hat{\psi}_x - \hat{\psi}^* \hat{\psi} \hat{\psi} \hat{\psi}) dx$$

коммутируют, и спектр \hat{N} состоит из положительных целых чисел. На подпространстве с данным собственным числом $N = M$ оператор \hat{H} является M -частичным оператором Шрёдингера

$$H_M = - \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j}^M \delta(x_i - x_j),$$

действующим на подпространстве симметрических функций. Спектр H_M подробно изучался в [11.20] и состоит из ветвей

$$p_1^2 + \dots + p_M^2; \quad p_1^2 + \dots + p_{M-2}^2 + \frac{p_M^2}{2} - \frac{2^3 - 2}{12}; \dots$$

$$\frac{p_{m_1}^2}{m_1} - \varepsilon_{m_1} + \dots + \frac{p_{m_k}^2}{m_k} - \varepsilon_{m_k}, \quad m_1 + \dots + m_k = M; \dots; \frac{p_M^2}{M} - \varepsilon_M$$

Таким образом, мы видим, что два вывода спектра квантового гамильтониана нелинейного уравнения Шрёдингера приводят к одинаковым результатам. Из общих соображений следует, что оба подхода должны давать одинаковый результат в главном порядке по \hbar , но полное квантование в разных канонических переменных не обязано совпадать полностью. В любом случае разобранный пример показывает, что квантование в переменных действие — угол позволяет найти простым и непосредственным образом спектр гамильтониана. Это побуждает применить описанные процедуры и к тем случаям, когда точное решение квантовой задачи неизвестно. Рассмотрим в качестве примера уравнение sine-Gordon.

Переопределяя подходящим образом переменные действие — угол, гамильтониан и импульс можно записать в виде

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P \rho(p) dp + \sum_{a=1}^A p_a + \sum_{b=1}^B p_b;$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p^2 + 1} \rho(p) dp + \sum_a^A \sqrt{p_a^2 + M^2} + \sum_b^B \sqrt{p_b^2 + M^2(\alpha_b)};$$

$$\rho(p) dp = P(k) dk; \quad p = \frac{1}{4}(k + \sqrt{k^2 + 1}), \quad p_a = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_a} - 16\lambda_a \right);$$

$$p_b = \frac{\mu_b - \bar{\mu}_b}{i\gamma} \left(\frac{1}{|\mu_b|^2} - 16 \right); \quad M = \frac{8}{\gamma}; \quad M(\alpha) = \frac{16}{\gamma} \sin \alpha.$$

Величина $\rho(p)$ сопряжена переменным типа фазы, поэтому спектр соответствующего квантового оператора состоит из целых чисел (11.13). Спектр величин \hat{p}_a и \hat{p}_b заполняет всю вещественную ось. Наконец, величина α сопряжена переменной β , которая принимает значения на интервале $0 \leq \beta \leq 32\pi/\gamma$, поэтому спектр α состоит из значений $\alpha_n = \gamma n/16$ в интервале $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

В результате спектр H соответствует системе частиц с массами $m = 1$, $M = 8/\gamma$ и $M_n = 16\gamma^{-1} \times \sin(\gamma n/16)$. Этот результат безусловно верен лишь в главном порядке по \hbar (или, как отмечалось ранее, по отношению к γ). В частности, представляется, что частицы с массами $m = 1$ и $M_1 = 16\gamma^{-1} \sin(\gamma/16)$ в действительности тождественны. Это аналогично соответствующему результату для нелинейного уравнения Шрёдингера.

Таким образом, мы видим, что классические решения уравнения sine-Gordon не дают полного представления о богатом спектре частиц в соответствующей квантовой задаче. Метод обратной задачи рассеяния совместно с его гамильтоновой интерпретацией позволяет преодолеть ограничения, свойственные теории возмущений. Применение последней для уравнения sine-Gordon позволяет описать лишь один сорт взаимодействующих частиц, а именно частиц с массой 1. На описанном пути было впервые получено, что локализованным решениям классических уравнений теории поля соответствуют частицы в квантовом случае [11.21, 11.22]. Солитонный подход для описания спектра масс в настоящее время получает все большую популярность. Отметим, что спектр уравнения sine-Gordon был получен в [11.23] иным способом. Обзор соответствующего направления квантовой теории поля увел бы нас далеко от основной темы настоящей книги, которая посвящена методу обратной задачи рассеяния. Поэтому в заключение мы просто отошлем читателя к многочисленным оригинальным работам [11.22—11.26] и обзорам [11.27—11.29].

ЛИТЕРАТУРА

- 11.1. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. — Функци. анализ и его приложения 5:4, 18 (1971).
- 11.2. Захаров В. Е. — ЖЭТФ 65, 219 (1973).
- 11.3. Новиков С. П. — Функци. анализ и его приложения 8:3, 54 (1974).
- 11.4. Манаков С. В. — Функци. анализ и его приложения 10:4, 93 (1976).
- 11.5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
- 11.6. Goldstein H., Classical Mechanics (Addison-Wesley, London, 1950).
- 11.7. Gardner C. S. — J. Math. Phys. 12, 1548 (1971).
- 11.8. Toda M. — Phys. Rep. 18C, 1 (1974).
- 11.9. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. — Phys. Rev. Lett. 19, 1905 (1967).
- 11.10. Захаров В. Е., Манаков С. В. — ТМФ 19, 332 (1974).
- 11.11. Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А. — ТМФ 21, 160 (1974).
- 11.12. Манаков С. В. — Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, ИТФ АН СССР им. Л. Д. Ландау.
- 11.13. McLaughlin D. W. — J. Math. Phys. 16, 96 (1975).
- 11.14. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ 61, 118 (1971).
- 11.15. Ablowitz M., Kaup D., Newell A., Segur H. — Phys. Rev. Lett. 31, 125 (1973).
- 11.16. Тахтаджян Л. А. — ЖЭТФ 66, 476 (1974).
- 11.17. Flashka H. — Prog. Theor. Phys. 51, 703 (1974).
- 11.18. Манаков С. В. — ЖЭТФ 66, 543 (1974).
- 11.19. Манаков С. В. — ТМФ 28, 172 (1976).
- 11.20. Березин Ф. А., Похилл Г. П., Финкельберг В. М. — Вестник МГУ 1, 21 (1964).
- 11.21. Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А. — УМН 29, 249 (1974).
- 11.22. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. — ТМФ 25, 147 (1975).
- 11.23. Dashen R., Hasslacher B., Neveu A. — Phys. Rev. D 10, 1449 (1974).
- 11.24. Dashen R., Hasslacher B., Neveu A. — Phys. Rev. D 11, 3424 (1975).
- 11.25. Goldstone J., Jackiw R. — Phys. Rev. D 11, 1486 (1975).
- 11.26. Gervais J., Sakita R. — Phys. Rev. D12, 1038 (1975).
- 11.27. Rajaraman R. — Phys. Reports 21C, 229 (1975).
- 11.28. Faddeev L. D.: препринт: Institute for Advanced Study, Princeton (1975).
- 11.29. Faddeev L. D., Korepin V. E. — Phys. Rep. 42C, 1 (1978).

12. КВАНТОВЫЕ СОЛИТОНЫ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

А. Лютер

Квантовые солитоны участвуют во многих одномерных моделях теории поля, статистической механики и физики твердого тела. В главе дается обзор связей между этими моделями: их формулировкой и операторами, фигурирующими в моделях. Общей основой описания является квантовое СГ-уравнение, которое сводится к решаемой форме. Обсуждается решение для спектра собственных значений, подчеркивается эквивалентность солитонов, спиновых волн и частиц. Для объяснения этой эквивалентности предлагается принцип универсальности или «операторной демократии».

12.1. Предварительные замечания

Одномерная задача о взаимодействующих скалярных фермионах сыграла основную роль в недавних успехах теоретической физики. Это не только центральная задача для различных полей, но она также входит конструктивным элементом в более сложные модели. Проблема имеет много разных названий. С параметрами, инвариантными относительно преобразований Лоренца, она известна под названием массивной модели Тирринга [12.1]. Если привести ее к виду, согласующемуся с теорией ферми-жидкости, то получим (массивную) модель Латтинджера [12.2]. На решетке она называется XYZ-моделью со спином $1/2$ (см. [12.3], [12.4]). С помощью трансфер-матрицы она может быть связана с двумерной моделью Изинга и восьмивершинной моделью [12.3]. По сути дела все перечисленные модели эквивалентны квантовому СГ-уравнению [12.5], прототипом которого является одномерное нелинейное уравнение, и квантовые солитоны — просто другое название для фермионов или спиновых волн. Все эти модели связаны с одной хорошо известной моделью статистической механики, а именно с восьмивершинной моделью [12.3]. Точное вычисление спектра собственных значений в XYZ-модели со спином $1/2$ было сделано Джонсоном, Кринским и Маккоем [12.4] с помощью обобщения методов, развитых Бакстером для восьмивершинной модели [12.3]. Имеются простые физические идеи, которые связывают континуальные теории поля с дискретной цепочкой спинов [12.6]. Целью настоящей главы является рассмотрение некоторых из этих моде-

лей, связей между ними и вычисление спектров их собственных значений.

Здесь невозможно обсудить все модели достаточно глубоко. Хотя по некоторым из них существует литература, адекватно отражающая положение дел ([12.1], [12.2]), часть материала еще должна быть обдумана и понята. Действительно, нужно еще многое сделать. Например, хорошо понят одночастичный спектр в задаче о массивных фермионах, но еще очень мало результатов по корреляционным функциям. Остаются также технические трудности в установлении связей между различными моделями в некоторых областях значений параметров [12.7].

Существенный интерес представляют недавние предложения, касающиеся S -матрицы [12.8] в задаче о массивных фермионах. Ее расчет на основании микроскопической модели несомненно стал бы огромным достижением. Очевидно, что эти области привлекут большое внимание, а успехи в решении задачи о спектрах собственных значений внушают надежды на полное решение задачи в недалеком будущем.

Цель данной работы состоит в том, чтобы указать связь между одномерной фермионной задачей и XYZ-моделью со спином $1/2$ для цепочки спинов и из спектра последней получить спектр фермионов. Полное математическое обсуждение связей между различными моделями не может быть здесь представлено, но приводятся эвристические соображения, которые могут открыть полезную перспективу. Даже если ограничиться областью квантовых солитонов, то здесь уже имеется обширная литература, часть которой приведена в гл. 1. Канонический формализм в классическом случае описывается Фаддеевым в гл. 11. Полуклассическое квантование рассмотрено в работе [12.9] Фаддеева и Корепина. Они подчеркивают, что квантовые солитоны получаются при квантовании переменных действие — угол. Прекрасным примером является СГ-уравнение (изучавшееся также Буллафом и Доддом [12.10]) и нелинейное уравнение Шрёдингера (оно рассматривалось также Каупом). Мы здесь не касаемся канонической формулировки теории поля и не пытаемся связать методы теории поля, основанные на каноническом формализме, с методами статистической механики. Мы ограничиваемся только замечаниями о том, что ответы одинаковы там, где их можно сравнивать.

Из обширной литературы по статистической механике ниже обсуждаются только работы, имеющие прямое отношение к теме данной главы, т. е. посвященные вычислению спектров. Работы, касающиеся применений к физическим системам в области фазовых переходов, квазиодномерных проводников и одномерных магнитных цепочек, не рассматриваются.

Даже в оставшейся узкой области невозможно сделать адекватный обзор, не обременяя читателя массой технических деталей

или не докучая знатокам хорошо известными или неадекватными рассуждениями и доказательствами. Эти опасности компенсируются возможностью стимулировать интерес к какой-нибудь удивительно универсальной проблеме, пересекающей междисциплинарные границы в невиданной до сих пор степени. Несомненно, что осмысление такой проблемы со всех возможных точек зрения и их объединение было бы удовлетворительной компенсацией.

Новым техническим моментом настоящей работы является введение «непрерывного предела», что дает возможность заменить непрерывную механику дискретной. После решения дискретной задачи переход к непрерывному пределу совершается путем устремления расстояния между точками к нулю и одновременного подходящего переопределения операторов. В теории поля подобная процедура называется перенормировкой. В одномерной фермионной задаче она может быть осуществлена в явном виде. Где-то под этим «непрерывным пределом» скрывается универсальная проблема, представляющая общий интерес.

Конечно, притягательная сила этой универсальной проблемы связана с чем-то большим, чем междисциплинарный интерес. Существует много задач, казалось бы не связанных друг с другом, но которые, тем не менее, могут быть сведены к одной, и ее решение даст решение для всех.

Учитывая некоторые общие характеристики одномерной фермионной задачи, такие как скалярная симметрия, лоренцева инвариантность и локальность, можно утверждать, что именно она является такой ключевой задачей. Как раз на эту задачу и на описание ее многогранной уникальности я хочу теперь обратить внимание читателя.

12.2. Квантование и квантовые солитоны

Классическое СГ-уравнение, и, кстати говоря, любое уравнение движения может давать на квантовом уровне качественно иное поведение системы. Согласно традиционным методам, классическое уравнение квантуется, исходя из канонических переменных действие — угол и уравнений, которым эти переменные удовлетворяют. Это легко проделать для линейных уравнений, однако процедура существенно усложняется для нелинейных систем и иногда становится вообще неосуществимой. Трудности возникают во многих местах; не последняя среди них — это появление расходимостей.

В другом подходе начинают с определения квантовых переменных. Квантовые переменные определяются на точках решетки. Точки принадлежат решетке, которая покрывает пространство нужной размерности. Для одномерной системы такой решеткой является цепочка и квантовыми переменными могут

быть любые операторы, удовлетворяющие подходящей алгебре. При таком подходе основная трудность заключается в переходе к непрерывному пределу, когда расстояние между соседними точками решетки устремляется к нулю.

Эта процедура очень общая, очень мощная, но пока что очень неопределенная. Чтобы придать этому описанию большую конкретность, нужно определить операторы на узлах цепочки. Самое простое — взять алгебру $SU(2)$, группу всех унитарных (2×2) -матриц с детерминантом, равным единице. Квантовая структура задается утверждением о том, что каждый узел решетки может находиться в одном из двух квантовых состояний. Есть много способов интерпретировать эти два состояния. Возможно, наиболее физической является интерпретация на языке частиц: одно состояние отвечает присутствию частицы на узле, другое — пустому узлу. С этой точки зрения задача с одним уровнем на узел тривиальна и не будет рассматриваться.

Имея в виду операторы, о которых сказано выше, перейдем к вопросу о гамильтониане или о взаимодействии между операторами на различных узлах решетки. Исходя из принципа «конструктивной простоты», предположим, что имеется взаимодействие только между ближайшими соседями. Единственный гамильтониан с таким свойством имеет вид

$$H = - \sum_{j=1}^N J_{\alpha} S_j^{\alpha} S_{j+1}^{\alpha}, \quad (12.1)$$

где операторы S_j^{α} удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[S_j^{\alpha}, S_{j'}^{\beta}] = i \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \delta_{jj'} S_j^{\gamma}. \quad (12.2)$$

Здесь α, β, γ суть x, y, z -компоненты спинового оператора, j, j' пробегают N узлов цепочки, J_{α} — взаимодействие между ближайшими соседями для компоненты α , $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор, $\delta_{jj'}$ — символ Кронекера. Взаимодействия между различными компонентами спинового оператора, например, $S_j^x S_{j+1}^y$, не включены, так как эти члены или нарушают комбинированную симметрию относительно отражения и обращения времени, или могут быть преобразованы к виду (12.1) с помощью унитарного преобразования. Если ввести еще гейзенберговские уравнения движения $i \dot{S}_j^{\alpha} = [S_j^{\alpha}, H_s]$, то задача определена.

Интересно отметить, что квантовая механика этой задачи выводится из механики квантового СГ-уравнения в непрерывном пределе, причем она содержит фермионы, бозоны, фермионные основные состояния и простое S -матричное описание рассеяния этих частиц. Действительно, связь между операторами спина

$1/2$ и бозонным полем, входящим в обычное СГ-уравнение, представляет собой пример «операторной демократии», т. е. принципиальной эквивалентности различных операторных формулировок одной и той же физической сущности. Хотя то или иное представление может сделать какой-либо сорт частиц более выделенным и изменить вид нелинейных членов, но вид спектра и S -матрицы не зависит от представления и, таким образом, предпочтительного представления не существует. Для построения решения (12.1) важно явно определить фермионную природу спиновых операторов. Это можно сделать с помощью преобразования Йордана — Вигнера. Введем фермионный оператор на узле j с антикоммутатором $[a_j, a_{j'}^\dagger]_+ = \delta_{jj'}$, тогда спиновая алгебра реализуется с помощью соотношений

$$S_j^+ = a_j^\dagger \exp\left(i\pi \sum_{k=1}^{j-1} n_k\right), \quad (12.3a)$$

$$S_j^- = (S_j^+)^\dagger, \quad (12.3b)$$

$$S_j^z = a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2}. \quad (12.3c)$$

Операторы рождения и уничтожения определяются следующим образом: $S^\pm = S^x \pm iS^y$, $n_k = a_k^\dagger a_k$. Подставляя выражения (12.3a—12.3) в (12.1), получим гамильтониан ферми-газа на решетке. Он описывает частицы, которые перескакивают с узла на узел, взаимодействуют друг с другом, если находятся на соседних узлах, и вообще их поведение не согласуется с интуитивным представлением о поведении системы, описываемой гамильтонианом со спином $1/2$. С помощью фермиевских операторов a_j гамильтониан (12.1) может быть записан в нескольких эквивалентных формах, причем оказывается, что представление, получающееся после подстановки (12.3) в (12.1), не удобно. Лучшая форма получается, если вслед за этой подстановкой сделать калибровочное преобразование $a_j \rightarrow (i)^j a_j$, после чего (12.1) записывается в виде

$$H = \sum_{j=1}^N H_s(j) - \mu n_j, \quad (12.4)$$

где

$$H_s(j) = -\frac{i}{2} V [a_j^\dagger a_{j+1} - a_{j+1}^\dagger a_j] + \\ + \frac{i}{2} J_\perp (-1)^j [a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger + a_j a_{j+1}] - J_z n_j n_{j+1}. \quad (12.5)$$

Здесь $2V = J_x + J_y$, $2J_\perp = J_x - J_y$, а μ — химический потенциал, равный J_z . Из представления (12.5) ясно, что химический потенциал связан с внешним полем. Если в основном состоянии намагниченность равна нулю, то из (12.3) следует, что число фер-

ми-частиц в основном состоянии равно $N/2$. Это случай полузаполненной зоны. Если среднее значение, соответствующее основному состоянию, вычитается из n_j , то химический потенциал исключается. Ненулевое значение намагниченности, как и внешнее поле, сдвигает число заполнения относительно значения, соответствующего полузаполненной зоне.

Необходимо отделить узлы решетки, имеющие четные номера, от нечетных, так как фермиевские поля имеют две компоненты, представляемые таким образом. Операторы на соседних узлах решетки могут сильно отличаться, но внутри четной и нечетной подрешеток они меняются слабо. Это можно показать с помощью уравнений движения для компонент фермиевских полей на подрешетках. Уравнения движения имеют вид $i\dot{a}_i = [a_i, H]$, т. е.

$$i\dot{a}_j = -\frac{i}{2} V(a_{j+1} - a_{j-1}) + \frac{i}{2} J_{\perp} (-1)^j (a_{j+1}^{\dagger} + a_{j-1}^{\dagger}) + J_z a_j (n_{j+1} + n_{j-1}), \quad (12.6)$$

причем все операторы зависят от времени. Видно, что уравнения движения для оператора четного узла зацеплены с уравнениями движения для оператора нечетного узла, и поэтому предположение о том, что поля мало меняются на расстояниях порядка постоянной решетки, фактически требуется только для каждой компоненты по отдельности.

Здесь в фермиевской задаче нет длины, только индекс, характеризующий положение вдоль цепи. В непрерывной теории поля длина входит, например, в дельта-функцию, характеризующую антикоммутирующие соотношения. Длина конструируется из расстояния между узлами решетки s и связана с длиной одномерной цепи соотношением $L = sN$. Переход к непрерывному пределу состоит в устремлении s к нулю при постоянной длине цепи. Требуется также, чтобы гамильтониан сохранялся при переходе к непрерывному пределу, например, чтобы

$$\sum_{j=1}^N H_s(j) = \int_0^L dx H_c(x), \quad \text{или} \quad H_c(x) \rightarrow s^{-1} H_s(j), \quad (12.7)$$

где непрерывная координата определяется с помощью соотношения $x/L = j/N$. Дополнительный множитель s вводит длину в гамильтониан, и теперь необходимо проверить полевые операторы. Если двухкомпонентное спинорное поле определяется выражением

$$\psi(x) = s^{-1/2} \begin{pmatrix} a_j \\ a_{j+1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_u(x) \\ \psi_l(x) \end{pmatrix} \quad (12.8)$$

для четного j , то антикоммутатор полного спинорного поля есть

$$[\psi(x), \psi^{\dagger}(x')]_{+} = s^{-1} \delta_{jj'} \rightarrow \delta(x - x'), \quad (12.9)$$

что представляет собой рецепт получения дельта-функции непрерывного предела исходя из дискретной задачи.

Переход к непрерывному пределу для операторных уравнений движения можно осуществить, просто рассматривая конечную разность в правой части (12.6) как производную, что приводит (с использованием обозначения ∂_x для $\partial/\partial x$) к выражениям

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_u(x) &= -V\partial_x\psi_l(x) - s^{-1}J_{\perp}\psi_l^{\dagger}(x) + 4J_z\psi_u(x)\rho_l(x), \\ \dot{\psi}_l(x) &= -V\partial_x\psi_u(x) + s^{-1}J_{\perp}\psi_u(x) + 4J_z\psi_l(x)\rho_u(x),\end{aligned}\quad (12.10)$$

где $\rho_u(x) = \psi_u^{\dagger}(x)\psi_u(x)$ и $\rho_l(x) = \psi_l^{\dagger}(x)\psi_l(x)$ суть плотности фермионов; эти выражения можно упростить, выразив уравнения движения через новые поля, определяемые линейными комбинациями $\sqrt{2}\psi_1 = \psi_u + \psi_l$ и $\sqrt{2}\psi_2 = \psi_u - \psi_l$. В результате получим

$$\begin{aligned}-\dot{\psi}_1 &= v\partial_x\psi_1 + s^{-1}J_{\perp}\psi_2 + 4J_z\psi_1\rho_2, \\ \dot{\psi}_2 &= v\partial_x\psi_2 - s^{-1}J_{\perp}\psi_1 - 4J_z\psi_2\rho_1,\end{aligned}\quad (12.11)$$

где v есть перенормированная скорость, $s^{-1}J_{\perp}$ оказывается массой, а пространственную зависимость еще предстоит расшифровать.

Именно эти уравнения движения, которые оказались совпадающими с уравнениями непрерывных моделей теории поля, будут рассмотрены в следующем разделе. Необходимо указать на два отличия выражений (12.11) от (12.10). Первое — это калибровочное преобразование $\psi_2 \rightarrow \psi_2^{\dagger}$, которое реализуемо в теории непрерывного поля; оно здесь предполагается. Второе касается перенормированной скорости (даваемой выражением $v = V - J_z(2\pi)^{-1}$). Она не является важным параметром в континуальной теории, так как скорость фиксируется условием перенормировки.

Логика этой процедуры состояла в анализе уравнений движения для решеточной фермионной модели и их связи с гамильтонианом со спином 1/2. Собственные значения решеточной задачи тоже можно вычислить. Посредством перехода к непрерывному пределу в спектре собственных значений тем самым можно вычислить — и интерпретировать — сами уравнения непрерывного предела. После обзора непрерывных моделей, чему посвящен следующий раздел, это решение будет приведено.

12.3. Уравнения непрерывного поля

В предыдущем разделе мы обсудили уравнения движения фермионного поля на решетке при малых значениях постоянной решетки. Эти уравнения содержат параметры, определяемые обменными константами и значением постоянной решетки. Перед тем как начать поиск решений уравнений, полезно остановиться

на соответствующих уравнениях движения для вполне непрерывных моделей, что поможет отчетливей представить связь между решеточными и непрерывными моделями.

Непрерывные модели имеют преимущество локальности. Локальность взаимодействия совместно с принципом Паули сильно ограничивает множество различных допустимых моделей для одномерного случая. Эта идея привела к представлению об универсальности солитона и о наличии определенных общих черт у внешне различающихся нелинейных уравнений.

Существование пропагирующих решений нелинейных волновых уравнений имеет чрезвычайно важное значение для физики. Осознание обилия возможных видов нелинейности произвело отрезвляющее впечатление и поставило новые вопросы о классификации мыслимых типов нелинейности. Может ли любое взятое наугад нелинейное уравнение иметь «физически интересные» решения? Определяет ли ограничение «физически интересными» решениями класс допустимых нелинейностей?

Вопросы, задаваемые в такой общей форме, обычно остаются без ответа, но в специальном случае двумерного пространства — времени возникает весьма удовлетворительная картина. Остов этой картины составляют несколько базисных постулатов: локальность, лоренц-инвариантность, тип симметрии и концепция частицы. Первые два постулата принимаются безусловно, как ограничения на типы рассматриваемых теорий. Они же позволяют придать смысл последним двум постулатам, и таким образом уменьшить изобилие возможностей до поддающегося анализу и классификации.

Ранее предлагалось несколько имеющих историческое значение моделей, удовлетворяющих вышеуказанным постулатам, и за последнее время эти модели были в разной степени исследованы. У нас нет намерения перечислять здесь основные черты этих моделей, так как существует несколько обзоров по данной теме (см., к примеру, [12.1] и книгу Либа и Маттиса [12.2]). Однако полезно обсудить несколько простых свойств этих моделей, поскольку они помогут нам выяснить принципы, ведущие к классификации нелинейностей и в конечном счете к построению решений нелинейных уравнений.

Первое такое свойство состоит в бозонно-фермионной дуальности, описываемой популярной концепцией «операторной демократии», и относится к неразличимости теорий, построенных на основе этих двух различных полей. Рассмотрим модель, состоящую из свободных безмассовых фермионов, которые могут распространяться вдоль струны в обоих направлениях. Гамильтониан H_0 дается выражением

$$H_0 = -i\nu \int_0^L dx (\psi_1^\dagger \partial_x \psi_1 - \psi_2^\dagger \partial_x \psi_2); \quad (12.12)$$

L — длина струны, использованы периодические граничные условия, и v — скорость частицы. Операторы фермионного поля удовлетворяют соотношениям антикоммутации

$$\begin{aligned} [\psi_1(x), \psi_1^\dagger(x')]_+ &= [\psi_2(x), \psi_2^\dagger(x')]_+ = \delta(x - x'), \\ [\psi_1(x), \psi_2(x')]_+ &= [\psi_1^\dagger(x), \psi_2^\dagger(x')]_+ = 0, \end{aligned} \quad (12.13)$$

и основным состоянием является бесконечное море Ферми заполненных состояний. Именно возбуждения моря Ферми соответствуют физическим процессам, бесконечная же энергия, связанная с морем, не представляет проблемы ввиду конечности значений энергии возбуждений относительно энергии моря.

Возбуждения характеризуются n -частичными корреляционными функциями, и именно их расчетом мы теперь займемся. Рассмотрим сначала простейшие одночастичные функции. Вводя фурье-образы полей выражениями

$$a_j(k) = L^{-1/2} \int_0^L dx \psi_j(x) e^{ikx} \quad (12.14)$$

с $j = 1, 2$ и $k = 2\pi n/L$ (n — целое число), находим, что гамильтониан H_0 из (12.12) может быть диагонализирован в виде

$$H_0 = v \sum_k k [a_1^\dagger(k) a_1(k) - a_2^\dagger(k) a_2(k)], \quad (12.15)$$

и легко можно получить типичную одночастичную корреляционную функцию

$$\begin{aligned} \langle \psi(x_1, t_1) \psi^\dagger(x_2, t_2) \rangle &= L^{-1} \sum_{k>0} \exp[ik(R_{12} - v\tau_{12})] = \\ &= i(2\pi)^{-1} (R_{12} - v\tau_{12})^{-1}, \end{aligned} \quad (12.16)$$

где $R_{12} = x_1 - x_2$, $\tau_{12} = t_1 - t_2$ и к τ_{12} добавлена бесконечно малая мнимая часть для обеспечения сходимости суммы по k .

Сумма преобразовывается в интеграл согласно правилу $\sum_k \rightarrow \rightarrow (2\pi)^{-1} L \int dk$.

Операторные уравнения движения допускают и иную реализацию как гамильтониана, так и оператора фермионного поля. Пусть определен оператор плотности ρ со свойством

$$[\psi_1(x), \rho_1(-k)] = e^{-ikx} \psi_1(x), \quad (12.17)$$

что приводит к следующему соотношению коммутации этого оператора с гамильтонианом H_0 :

$$[\rho_1(-k), H_0] = vk\rho_1(-k). \quad (12.18)$$

Это уравнение аналогично уравнению для гармонического осциллятора, и можно высказать догадку, что $\rho_1(-k)$ является

оператором уничтожения бозонного поля. Однако коммутатор $[\rho_1(-k), \rho_1(k')]$ не может равняться $\delta(k - k')$, так как согласно (12.18) $\rho_1(-k)$ безразмерно. Поэтому этот коммутатор должен быть равен

$$[\rho_1(-k), \rho_1(k')] = k\delta(k - k'), \quad (12.19)$$

и $\rho(-k)$ отличается множителем \sqrt{k} от канонического оператора уничтожения. Таким образом, гамильтониан H_0 может быть записан через оператор ρ_1 в виде билинейной формы

$$H_0(\rho_1) = v \int dk \rho_1^\dagger(-k) \rho_1(k). \quad (12.20a)$$

Из (12.17) видно, что оператор $\rho_1(k)$ является преобразованием Фурье плотности $\psi_1^\dagger(x) \psi_1(x)$; отсюда следует, что $\rho_1(k) = \rho_1^\dagger(-k)$. Аналогичное рассуждение для оператора $\rho_2(k)$ приводит к той же формуле, но со знаком минус из-за отрицательного значения скорости фермиона «2». В конечном счете гамильтониан принимает вид

$$H_0 = v \int_0^\infty dk [\rho_1(k) \rho_1(-k) + \rho_2(-k) \rho_2(k)], \quad (12.20b)$$

и знак минус появляется также в уравнении, соответствующем (12.19) для ρ_2 в случае бозонов, т. е. теперь вместо $\sqrt{k} \rho_1(-k)$ оператором уничтожения будет $\sqrt{k} \rho_2(k)$.

Такая «бозонизированная» форма гамильтониана наводит на мысль о существовании соответствующего бозонного представления ферми-операторов.

Рассмотрим коммутатор $\psi_1(x)$ с бозонной формой H_0 из (12.20b). В результате имеем

$$[\psi_1(x), H_0] = v \rho_1(k) \psi_1(x), \quad (12.21)$$

что совпадает с коммутационным соотношением оператора $O_1(x)$ и того же H_0 , где

$$O_1(x) = C \exp[\varphi_1(x)], \quad (12.22a)$$

$$\varphi_1(x) = \int dk k^{-1} \rho_1(k) \exp(-ikx). \quad (12.22b)$$

Значение константы C и поведение интеграла при больших k определяются, если потребовать, чтобы

$$\begin{aligned} C^2 \langle \exp[\varphi_1(x_1, t_1)] \exp[-\varphi_1(x_2, t_2)] \rangle &= C^2 \exp[\langle \varphi_1^2 - \varphi_1(x_1, t_1) \varphi_1(x_2, t_2) \rangle] = \\ &= C^2 \exp \left\{ \int_0^\infty dk k^{-1} (1 - \exp[ik(R_{12} - v\tau_{12})] \exp(-\alpha k)) \right\} = \\ &= C^2 (i\alpha) (R_{12} - v\tau_{12} + i\alpha)^{-1} \end{aligned} \quad (12.23)$$

равнялось правой части (12.16). Сделано обрезание интеграла для обеспечения сходимости, и для получения правильного ответа следует положить $C^2 = (2\pi\alpha)^{-1}$. Это обрезание соответствует инфинитезимальной мнимой части в (12.16) и может быть сделано нулевым после завершения вычислений. В промежуточных вычислениях в (12.23) была использована формула Бейкера — Хаусдорфа для оценки матричных элементов гармонического осциллятора, что будет обсуждаться далее.

Построенный таким образом оператор удовлетворяет соотношениям антикоммутации, поскольку для равных времен в соотношении

$$[\varphi_1(x), \varphi_1(x')] = i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x - x') \quad (12.24)$$

знак обращается, когда O_1 меняется местом с другим O_1 в некоторой иной позиции. В результате оператор O_1 удовлетворяет правильным уравнениям движения и соотношениям антикоммутации, а также коммутирует с операторами плотности, как в (12.17). Следовательно, оператор O_1 совместно с «бозонизированным» H_0 дадут правильные уравнения движения. Итак, рассмотренные операторы взаимозаменяемы. Следует учесть, что использование O_1 приводит к большому упрощению вычислений, так как любое математическое ожидание сводится к простому гауссову интегралу, допускающему точное вычисление.

Принято писать бозонный гамильтониан в другой форме, используя канонические операторы рождения и уничтожения, или, что эквивалентно, канонические импульсы и координаты. Последние величины даются выражениями

$$\varphi(x) = i(4\pi v)^{-1/2} \int dk k^{-1} [\rho_1(k) + \rho_2(-k)] e^{-ikx}, \quad (12.25a)$$

$$\Pi(x) = v^{1/2} (4\pi)^{-1/2} \int dk [\rho_2(-k) - \rho_1(k)] e^{-ikx}, \quad (12.25b)$$

и гамильтониан принимает вид

$$H_0 = \int dx \frac{1}{2} \{ \Pi^2(x) + v^2 [\partial_x \varphi(x)]^2 \}, \quad (12.26)$$

что завершает идентификацию операторных эквивалентов в скалярных одномерных моделях.

Таким образом построен переход от бозонов к фермионам, и этот переход будет основополагающим для понимания связи между солитонами, фермионами и СГ-уравнением. По-видимому, имеет смысл обрисовать и обратный процесс — ведущий от фермионов к бозонам. Промежуточной ступенью теперь является определение нормальным образом упорядоченных фермионных операторов плотности $\psi^\dagger \psi$ или $\psi_2^\dagger \psi_2$, — т. е. учитываются только матричные элементы, рождающие частицу или античастицу

(незаполненное состояние, дырка в море Ферми), и математическое ожидание в основном состоянии вычитается. Эти операторы соответствуют бозонам, и они задаются выражениями

$$\begin{aligned} &: \psi_1^\dagger(x) \psi_1(x) : = \rho_1(x), \\ &: \psi_2^\dagger(x) \psi_2(x) : = \rho_2(x), \end{aligned} \quad (12.27)$$

где двоеточие означает нормальное упорядочение.

Переход от этой предварительной части к более реалистичским моделям будет краток. Необходимо лишь рассмотреть все возможные комбинации фермионных операторов, совместимые с лоренц-инвариантностью и локальностью, нашими исходными постулатами. Операторные уравнения движения упрощенно записываются в спинорных обозначениях, т. е. ψ_1 (ψ_2) соответствует верхней (нижней) компоненте. Уравнения выводятся из выражения для гамильтониана

$$H = \int dx [-i v \psi^\dagger \sigma_z \psi + m_0 \psi^\dagger \sigma_x \psi + g \rho_1 \rho_2], \quad (12.28)$$

где m_0 соответствует массе фермиона, g — константе (локального) взаимодействия между фермионами, а σ_i суть матрицы Паули.

Первые два члена в (12.28) являются главными членами в разложении гамильтониана по степеням производных от операторов. Другие члены высших порядков вызвали бы появление большего числа производных, но они опущены в силу принципа локальности. Другие локальные произведения с большим числом операторов отсутствуют, так как взаимодействие вида $\rho_1 \rho_2$ соответствует максимально сложному выражению, поскольку $\psi_1^2 = \psi_2^2 = 0$ из-за принципа Паули. Возможны также члены взаимодействия вида $\rho_1 \rho_1$ и $\rho_2 \rho_2$, но, согласно (12.21), они меняют значение скорости, и если считать скорость постоянной, то и эти члены могут быть опущены. Отсутствие более сложных произведений в силу принципа Паули приводит к требованию безспиновости фермионов — симметрия, налагаемая «извне». В рамках вышеупомянутых ограничений (12.28) является наиболее общим видом гамильтониана в одномерном пространстве.

Фермионные уравнения поля следуют из гейзенберговских уравнений движения, и выраженные в переменных пространства — времени имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -v \partial_x \psi_1 + m_0 \psi_2 + g \psi_1 \rho_2, \\ \dot{\psi}_2 &= v \partial_x \psi_2 + m_0 \psi_1 + g \psi_2 \rho_2, \end{aligned} \quad (12.29)$$

где m_0 представляет величину размерности (ед. длины)⁻¹ и есть масса частицы, g — константа связи и v — скорость из (12.11). Для получения лоренц-инвариантной теории, известной как

массивная модель Тирринга, v следует перенормировать посредством функции от g , и полученную скорость принять равной единице. Этот шаг совершается ниже в соответствии с (12.35). Настоящую модель, описываемую (12.29), иногда называют массивной моделью Латтинджера. Соотношение между двумя моделями, как и связь с решеточной моделью, будет обсуждаться ниже.

По-видимому, здесь уместно указать на возможность путаницы в обозначениях. Принятые нами обозначения согласуются с таковыми Маттиса и Либа [12.2]. Как говорилось ранее, член взаимодействия $g\rho_1\rho_2$ фактически перенормирует скорость фермионов; это приводит к требованию о зависимости перенормировки «голой» скорости от константы связи, если наблюдаемая скорость должна оставаться постоянной. Альтернативой является определение члена взаимодействия как содержащего также подходящие комбинации $\rho_1\rho_1$ и $\rho_2\rho_2$ для компенсации перенормировки скорости. Такая комбинация лоренц-инвариантна. В нашей формулировке, выбранной наиболее близкой к обозначениям решеточной модели разд. 12.2, таких членов нет, и в результате необходима перенормировка. Различные модели, с различно определяемыми константами связи, связаны друг с другом определенными алгебраическими соотношениями между этими константами. В следующем разделе будет дан список подобных моделей, а также предложена формулировка «универсальной» константы связи.

Из соображений размерности ясно, что член взаимодействия $g\rho_1\rho_2$ не единственно возможный. К гамильтониану может быть добавлен член взаимодействия, содержащий произведение шестнадцати операторов. Использование свойств симметрии конечно же сводит эту задачу к (12.28), однако с иными параметрами m_0 и g (и, возможно, v). Таким образом, эти величины могут не иметь фундаментального значения, и естественным образом встает вопрос о глубинной универсальности, или, что то же, о независимых от модели величинах.

Пока не существует полностью аргументированного ответа на этот вопрос, но некоторые весьма глубокие связи между этой фермионной задачей и классическими двумерными моделями критических явлений приближают к его пониманию. Это будет детальней обсуждаться в последующем разделе после построения решений наших нелинейных уравнений.

Осталось найти бозонный эквивалент (12.28). Используя технику, развитую в (12.22), (12.15) и (12.27), несложно вывести

$$H = \int dx \frac{1}{2} [\Pi^2 + (\partial_x \Phi)^2 + m_0 (2\pi a)^{-1} \cos \sqrt{4\pi v} \Phi + g\rho_1\rho_2]. \quad (12.30)$$

Можно найти каноническое преобразование, полностью диагонализующее бозонную задачу при $m_0 = 0$, т. е. диагонализующее

задачу (безмассового) гармонического осциллятора. Это осуществляется посредством канонического преобразования вида

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho_1 \operatorname{ch} \varphi + \rho_2 \operatorname{sh} \varphi, \\ \rho_2 &= \rho_2 \operatorname{ch} \varphi + \rho_1 \operatorname{sh} \varphi,\end{aligned}\quad (12.31)$$

где $\operatorname{th} 2\varphi = -g(2\pi v)^{-1}$. Применение этого преобразования к гамильтониану с массой $m_0 \neq 0$ приводит к СГ-уравнению

$$H_{SG} = \int dx \frac{1}{2} [v'^2 (\partial_x \varphi)^2 + \Pi^2 + m_0 (2\pi\alpha)^{-1} \cos \beta \varphi], \quad (12.32)$$

где $\beta^2 = 4\pi v e^{-2\varphi}$. Замечательно, что (12.32) следует из весьма общих постулатов фундаментальных симметрий и локальности; аргументация, приводящая к (12.32), наводит на мысль, что это уравнение также должно быть наиболее общим в своем классе, а именно в иной, но эквивалентной, операторной формулировке. Преобразование (12.31) меняет и скорость. Как обсуждалось выше, новая, или перенормированная скорость может быть приравнена единице без потери общности.

Вычисление n -частичных корреляционных функций привело к обсуждению «бозонизированных» гамильтониана и фермионных операторов. Эти функции можно вычислить для случая свободных частиц, $g = 0$, и безмассового случая $m_0 = 0$, но для общего случая результатов пока нет. Массовые корреляционные функции служат интересным примером приложения рассмотренных выше методов. Для полноты приведем соотношения эквивалентности операторов:

$$\psi_j(x) = (2\pi\alpha)^{-1/2} \exp[-\varphi_j(x)],$$

где

$$\varphi_j(x) = (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} dk k^{-1} \rho_j(k) \exp\left(-ikx - \frac{1}{2} \alpha |k|\right), \quad (12.33)$$

а гамильтониан равен

$$\begin{aligned}H &= v \int_0^{\infty} dk \{[\rho_1(k) \rho_1(-k) + \rho_2(-k) \rho_2(k)] + \\ &+ g [\rho_1(k) \rho_2(-k) + \rho_1(-k) \rho_2(k)]\}.\end{aligned}\quad (12.34)$$

Исследование этих уравнений выявляет тот факт, что произведение произвольного числа фермионных операторов всегда приводит к сложному оператору, также являющемуся экспонентой бозонного оператора. Обычно используют тождество $e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B]}$, если $[A, B]$ является c -числом. Формула Бейкера — Хаусдорфа позволяет вычислить математические ожидания таких операторов с использованием

$$\langle e^A \rangle = e^{\frac{1}{2} \langle A^2 \rangle},$$

Это равенство справедливо, когда среднее берется при любом билинейном гамильтониане гармонического осциллятора. В частности, оно применимо и к гамильтониану (12.34), что приводит к следующему результату:

$$C^{-M} \langle O_1(x_1 t_1) O_1^\dagger(x_2 t_2) \dots O_1^\dagger(x_{2M}, t_{2M}) \rangle = \\ = \exp \left[- \operatorname{ch}^2 \varphi \sum_{i < j}^{2M} (-1)^{i-j} \ln \left(\frac{x_{ij} - v' t_{ij} + ia}{ia} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{sh}^2 \varphi \sum_{i < j}^{2M} (-1)^{i-j} \ln \left(\frac{x_{ij} + v' t_{ij} + ia}{ia} \right) \right]. \quad (12.35)$$

Использованы следующие обозначения: $x_{ij} = x_i - x_j$, $t_{ij} = t_i - t_j$, а φ определяется согласно (12.31). При нечетном числе точек математические ожидания равны нулю. Для произведений функций O_2 справедлив результат, аналогичный (12.35), но знак v' меняется.

Значение скорости, фигурирующее в выражении для корреляционных функций, находится из коэффициента перед членом $\rho_1 \rho_1$ в гамильтониане (12.30) после его диагонализации. Оно имеет вид $v'^2 = v^2 - g^2 (2\pi)^{-2}$ и может быть приравнено единице в результате соответствующего подбора v и g . Поскольку скорость v' — это единственная скорость, входящая в выражение для корреляционной функции, ее нормировка на единицу эквивалентна изменению масштаба времени. Далее v' будет везде принята за единицу.

Однофермионная корреляционная функция иллюстрирует несколько интересных черт непрерывной теории. Она имеет вид

$$\langle O_1(x_1 t_1) O_1^\dagger(x_2 t_2) \rangle = - \frac{(2\pi)^{-1}}{x_{12} - t_{12}} \left(\frac{\alpha^2}{x_{12}^2 - t_{12}^2} \right)^p, \quad (12.36)$$

где $p = \operatorname{sh}^2 \varphi$. Множитель α^{2p} отражает перенормировку волновой функции, т. е. константу, включенную в определение оператора O_1 . Из (12.35) следует, что $2M$ -точечная функция конечна при $\alpha \rightarrow 0$, после того как множитель α^p включен в O_1 .

Более обычная корреляционная функция порождается массовым членом, включающим произведения $O_1^\dagger O_2$. Эта функция есть

$$C^{-2M} \langle O_1(x_1 t_1) O_2^\dagger(x_1 t_1) \dots O_2(x_M t_M) O_1^\dagger(x_M t_M) \rangle = \\ = \exp \left[2\theta \sum_{i < j}^M (-1)^{i-j} \ln \left(\frac{x_{ij}^2 - t_{ij}^2}{\alpha^2} \right) \right], \quad (12.37)$$

где $2\theta = e^{2\varphi}$. Необходимо перенормировать оператор $(O_1 O_2^\dagger + \text{э. с.})$ посредством множителя, отличного от α^{2p} , а именно $\alpha^{2\theta-1}$, и для случая СГ-уравнения это ведет к хорошо знакомой перенорми-

ровке массы (см. [12.5]). Что касается остальных операторов, то ρ_1 и ρ_2 не перенормируются вовсе, тогда как комбинация $(O_1^+ O_2^+ + \text{э. с.})$ соответствует иная константа перенормировки, равная $\alpha^{2/\theta-1}$.

При перенормировке операторов описанным образом корреляционные функции остаются конечными в пределе $\alpha \rightarrow 0$. И как следствие такой процедуры предельного перехода, одновременные антикоммутиационные соотношения не выполняются, но поведение при больших расстояниях и временах, включая сингулярность при $x^2 = t^2$, имеет правильный вид.

В решеточной теории операторная алгебра всегда относится к свойствам внутри одной ячейки, соответствующей расстояниям, меньшим постоянной решетки, или длины обрезания. Решеточные корреляционные функции должны вести себя на очень малых расстояниях иначе, чем функции в непрерывном пределе. Эти последние функции правильно описывают поведение в асимптотической области, т. е. в области больших расстояний.

Имея этот результат для n -точечных корреляционных функций, можно перейти к вопросу о различиях между различными моделями, упомянутом нами в вводных замечаниях. На некоторой стадии во все эти модели входят такие n -точечные функции. Их форма позволяет наиболее просто сравнивать и истолковывать различные модели.

Эти функции содержат несколько параметров, а именно скорость v , константу обрезания α и параметр, придающий размерность корреляционной функции, θ . Таким образом, эквивалентность между моделями устанавливается в результате изучения соответствующих выражений для α , v и θ в различных моделях. Определение этих величин не имеет особого значения для физики, так как связано всего лишь с их обозначением. Для физики важно то, что лишь эти параметры появляются в теории.

Ниже мы приводим соотношения для параметра θ в трех моделях, представляющих для нас интерес:

$$\text{спиновая цепочка [12.4]} \quad \theta = 1 - \pi^{-1} \cos^{-1}(-J_2/v),$$

$$\text{модель Тирринга [12.5]} \quad \theta = \frac{1}{2} (1 + g/\pi)^{-1},$$

$$\text{модель Латтинджера [12.6]} \quad \theta = \frac{1}{2} (1 + v)^{1/2} (1 - v)^{-1/2},$$

где символы для соответствующих моделей определяются согласно обозначениям цитированных работ. Во всех непрерывных случаях перенормированная скорость приравнена единице, что является тривиальным выбором масштаба. Наконец, параметр α не уточняется, поскольку он входит лишь в качестве параметра перенормировки и не присутствует в конечном «физическом» выражении. Этот параметр может быть выбран равным постоянной решетки.

12.4. Спектр собственных значений

В предыдущем разделе были получены уравнения движения для непрерывной модели взаимодействующих массивных фермионов в одномерном пространстве, а в разд. 12.2 обсуждалась формулировка задачи на решетке в терминах квантового оператора спина, с теми же самыми уравнениями движения в пределе малой постоянной решетки. В настоящем разделе мы подытожим решения задачи на решетке, выполним требуемую процедуру предельного перехода к малой постоянной решетки и построим спектр собственных значений для непрерывного предела.

Спектр собственных значений гамильтониана (12.1) характеризуется одночастичными состояниями и связанными состояниями. В спиновой интерпретации одночастичное состояние — это спиновая волна, в бозонной — это солитон, и, наконец, в остающемся представлении — это фермион. Связанные состояния всегда строятся из этих фундаментальных объектов (или их античастиц). Спектр определяется массой частицы, энергией связи и числом связанных состояний. В собственно непрерывном пределе, когда постоянная решетки принимается равной нулю, спектр лоренц-инвариантен и получается в результате суперпозиции невзаимодействующих частиц со спектром

$$\Delta^2(k) = \Delta_n^2 + k^2, \quad (12.38)$$

где Δ_n соответствует подходящей массе, вообще говоря, отличной от голой массы m_0 предыдущего раздела, а n — индекс, соответствующий рассматриваемой частице, свободной или связанной.

Спектр принимает такой вид благодаря существованию бесконечного набора законов сохранения для задачи спиновой цепочки [12.12]. Эти законы сохранения запрещают порождение частиц или уничтожение связанных состояний. И наоборот, из формы спектра собственных значений (12.3), соответствующего набору абсолютно стабильных частиц, необходимо вытекает существование подобных законов сохранения.

Определение масс требует интерпретации перехода к непрерывному пределу и правильной перенормировки параметров решетки, J_α , в (12.1). После того как в это уравнение введена единица длины, что приводит к (12.10), несложно убедиться в том, что в пределе $s \rightarrow 0$ с необходимостью $J_\perp \rightarrow 0$, а это уже почти изотропная спиновая задача $J_\perp \ll V$. В таком пределе спектр собственных значений спиновой цепочки сильно упрощается. Значение фундаментальной массы в задаче имеет вид

$$\Delta = 8\pi v \frac{\sin \mu}{\mu} \left(\frac{J_\perp}{V} \right)^{\pi/2\mu}, \quad (12.39)$$

где $\mu = \arccos(-J_2/V)$, другие же параметры определены в разд. 12.2. Построение непрерывного предела налагает требование, согласно (12.7), чтобы $V \rightarrow V/s$. Множители s сокращаются в процессе предельного перехода; в результате поведение массы описывается соотношением

$$\Delta \sim s^{-1} J_{\perp}^{\pi/2\mu} \quad (12.40)$$

и для того, чтобы получить конечное значение щели в пределе $s \rightarrow 0$, следует выбрать $J_{\perp} = J_{\perp}^* s^{2\mu/\pi}$, где J_{\perp}^* — константа, не зависящая от s при $s \rightarrow 0$. Таким образом, на массу налагается требование конечности. Очевидно, что подобная процедура позволяет определить зависимости величины щели от «голых» обменных параметров, $\Delta \sim J_{\perp}^{\pi/2\mu}$, но не коэффициент пропорциональности.

Без сомнения, приведенное соотношение определяет показатель экспоненты, но не окончательное выражение для массы. Такое выражение должно зависеть от модели, а также от многих других параметров, которые могут даже не входить в полевые уравнения в непрерывном пределе, но останутся скрытым образом в обозначениях. Это выражение не может быть универсальным.

Однако отношение массы частицы в связанном состоянии к Δ имеет интересное свойство: в него не входит одночастичная масса. В пределе малых J_{\perp} формула для массы имеет вид

$$\Delta_n = 2\Delta \sin\left(\frac{n\pi}{2} \frac{\theta}{1-\theta}\right), \quad (12.41)$$

где $\theta = 1 - \mu/\pi$. Параметр θ содержит зависимость от продольной компоненты обмена, J_z , через параметр μ . Для таких значений этого параметра, при которых $\theta^{-1} - 1$ больше единицы, любое целое n является решением, и отношение масс зависит только от одного параметра. Спектр вида (12.41) был впервые получен для СГ-уравнения Тахтаджяном и Фаддеевым [12.13], а также Дашеном и др. [12.14], с использованием полуклассического подхода, и приводится в гл. 1, уравнение (1.105). Вывод спектра на основании решеточной модели устанавливает не только точность этого выражения для спектра, но и наводит на мысль об его универсальности. Универсальность в таком контексте подразумевает, что отношение масс связанной и свободной частиц является универсальной функцией параметра θ , задаваемой формулой (12.41). Сам параметр θ может быть не универсальной функцией констант связи, так как он определяется из показателя экспоненциальной зависимости корреляционной функции $\psi_1^{\dagger}\psi_2$, как в (12.37).

Универсальное соотношение между показателями является хорошо известным свойством критических явлений вблизи

фазового перехода второго рода. Соответствующее соотношение связывает в этом случае показатель массовой щели с показателем корреляционной функции при нулевой массе. Показатель величины щели обозначается через ν , и вышеприведенное соотношение устанавливает $\Delta \sim m_0^\nu$, где $\nu = \pi/\mu = (1 - \theta)^{-1}$. Определение θ из выражения для корреляционной функции (12.37) соответствует показателю параметра порядка в теории критических явлений. В дополнение к скейлингу, связывающему показатели, имеется универсальная функция, дающая выражение для массы связанного состояния.

Существование связи между показателями вблизи критической точки восьмивершинной модели и показателями, описывающими корреляционную функцию в фермионной задаче, является одним из приятных случаев, когда перекрестное оплодотворение было полезным. Можно найти много дальнейших применений этого принципа, позволяющего прояснить ситуацию в таких задачах, как S -матрица в решеточной теории, термодинамика квантового СГ-уравнения и важнейшие еще нерешенные проблемы в теории корреляционных функций. Другие модели с высшими внутренними симметриями основываются на квантовом СГ-уравнении [12.15]. Полное решение нашей квантовой задачи позволит значительно продвинуться и в изучении этих моделей.

При решении восьмивершинной модели центральной идеей было обобщение анзаца Бете [12.3]. С использованием обсужденных нами соотношений эквивалентности, эта идея может, очевидно, быть применена для построения волновых функций в задаче взаимодействующих ферми-полей. Эта возможность недавно обсуждалась [12.16], и она связана с «методом квантовой обратной задачи» [12.17]. Можно также предвосхитить и приветствовать обобщения метода и для моделей взаимодействующих ферми-полей с высшими внутренними симметриями.

ЛИТЕРАТУРА

- 12.1. Thirring W. — *Ann. Phys. (N. Y.)* 3, 91 (1958).
 Glaser V. — *Nuovo Cimento* 9, 990 (1958).
 Johnson K. — *Nuovo Cimento* 20, 773 (1961).
 Sommerfield C. — *Ann. Phys. (N. Y.)* 26, 1 (1963).
 Klaiber B. — В кн.: *Lectures in Theoretical Physics, Vol. XA*, ed. by A. Barut, W. Britten (Gordon and Breach, New York 1958).
- 12.2. Luttinger J. M. — *J. Math. Phys.* 4, 1154 (1963).
 Mattis D. C., Leib E. H. — *J. Math. Phys.* 6, 304 (1965).
 Theumann A. — *J. Math. Phys.* 8, 2460 (1967).
 Leib E. H., Mattis D. C. — *Math. Phys. in One Dimension*. — Academic Press, New York 1966.
- 12.3. Baxter R. J. — *Phys. Rev. Lett.* 26, 834 (1971); *Ann. Phys. (N. Y.)* 70, 33 (1972).
- 12.4. Johnson J. D., Krinsky S., McCoy B. M. — *Phys. Rev.* A8, 2526 (1973).
- 12.5. Coleman S. — *Phys. Rev.* D11, 2088 (1975).
- 12.6. Luther A. — *Phys. Rev.* B14, 2153 (1976).
 Luther A., Peschel I. — *Phys. Rev.* B12, 3908 (1975).

- 12.7. Fröhlich J. — Commun. Math. Phys. (Germany) 47 (no. 3) 233 (1976).
- 12.8. Замолодчиков А. Б. — Письма в ЖЭТФ 25, 468 (1977); Commun. Math. Phys. 35, 183 (1977).
Karowski M., Thun H. J., Truong T. T., Weisz P. — Phys. Lett. 67B, 321 (1977).
- 12.9. Faddeev L. D., Korepin V. E. Quantum Theory of Solitons. — Phys. Rep 42C, 1 (1978).
- 12.10. Bullough R. K., Dodd R. K. — В кн.: «Synergetics. A. Workshop», ed. by H. Haken, Springer Series in Synergetics, Vol. 2 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1977) pp. 92—119.
- 12.11. Kaup D. J. — J. Math. Phys. 16, 2036 (1975).
- 12.12. Luscher M. — Nucl. Phys. B117, 475 (1976).
- 12.13. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. — ТМФ 25, 147 (1975).
- 12.14. Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A. — Phys. Rev. D11, 3424 (1975).
- 12.15. Luther A., Emery V. J. — Phys. Rev. Lett. 33, 589 (1974).
Luther A. — Phys. Rev. B15, 403 (1977) (обсуждается «модель обратного рассеяния», обобщающая скалярную модель на случай фермионов со спином).
- 12.16. Bergknoff H., Thacker B. — Phys. Rev. Lett. 42, 135 (1979).
- 12.17. Фаддеев Л. Д., Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А. — ТМФ 40, № 2, 194 (1979).
Фаддеев Л. Д. — Препринт института им. Стеклова, Ленинград, 1979.

ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАМЕТКИ О ДЖОНЕ СКОТТЕ РАССЕЛЛЕ И РАННЕЙ ИСТОРИИ ЕГО УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ

Первое зарегистрированное наблюдение уединенной волны — это, несомненно, то, которое сделал Расселл в августе 1834 г.; оно описано в цитате из его работы [1.3], приведенной в гл. 1. Его увлеченность уединенной волной в тот момент очевидна; также ясно, что она продолжалась всю его жизнь — см., например, цитату из книги Расселла, написанной в 1865 г., приведенную на первой странице настоящего сборника.

Карьера Расселла, последовавшая за открытием уединенной волны, не обошлась без событий. Отметим некоторые из них. В 1832—1833 гг. у него была лишь временная должность в Эдинбургском университете, вызванная смертью проф. Лесли. Расселл не получил постоянного назначения на кафедру: кандидатом на эту должность был Брюстер, и в конце концов ее получил Дж. Д. Форбс. В 1838 г. Расселл претендовал на вакантную должность профессора математики, но несмотря на благоприятный отзыв Гамильтона, который рекомендовал Расселла как «человека с активным и изобретательным талантом» [1.5], ему не удалось получить ее. Можно только гадать, не появилась бы теория солитонов примерно на 100 лет раньше, если бы Расселл получил профессию на любой из этих двух кафедр. Интересы Форбса, несомненно, были совершенно иными, чем у Расселла, хотя кое-что сделанное им вошло в современные научные знания. Его репутация основывается сейчас в первую очередь на его ранних работах по ледникам (особенно посвященной леднику Mer de Glace, который он первым нанес на карту [1.10, 1.11]). Но он, кроме того, ввел «рейку Форбса», применяемую при измерении теплопроводности металлов. Аномальное термическое поведение одномерных ангармонических решеток, предсказанное численными исследованиями Ферми, Пасты и Улама в 1955 г. (задача ФПУ [1.12]), стимулировало исследования, приведшие Крускала к открытию метода обратной задачи рассеяния для решения уравнения КдФ, а солитонные решения этого уравнения могут вызывать некоторые из трудностей, на которые наталкивается вывод закона теплопроводности Фурье из микроскопической теории [1.13]¹⁾.

¹⁾ Как указал нам профессор Пайерлс, даже вблизи точки плавления величины возбуждений в реальных трехмерных системах столь малы, что солитоноподобными вкладами можно с уверенностью пренебречь.

До 1834 г. Расселл изобрел паровой трамвай; именно в этом году была образована Шотландская компания паровых экипажей, ставившая себе целью установить регулярное сообщение между Глазго и Эдинбургом. Ее деятельность продлилась недолго [1.5]. Тем не менее, по-видимому, вследствие своей связи с этой компанией Расселл получил от Компании канала Юнион предложение¹⁾ исследовать перспективы навигации паровых судов по этому каналу и в результате увидел первый солитон. Впоследствии Расселл стал известным кораблестроителем. Спроектированные им корпуса судов были рассчитаны так, чтобы минимизировать волновое сопротивление, вызываемое образованием носовых волн типа уединенной волны. В 1865 г. он опубликовал первую большую работу по кораблестроению [1.14]. В ней он описал свои первые эксперименты по образованию носовых волн и способу, которым они приводят воду в движение со скоростью, не зависящей от скорости корабля [1.5, 1.14]. В 1853 г. он получил от Брюнела заказ на проектирование огромного железного судна «Грейт Истерн» [1.5], что послужило прямой или косвенной причиной многих несчастий.

Расселл в первый раз разорился еще до того, как этот корабль мог быть спущен на воду, он оказался вовлеченным в судебный процесс по поводу аварии парового клапана, произошедшей при испытаниях этого судна в проливе Ла-Манш в 1859 г. и погубившей пять моряков (к тому времени Брюнел умер), а в 1867 г. он был вынужден (вероятно, наследниками Брюнела [1.5]) уйти в отставку из Института гражданских инженеров, одним из членов-основателей которого он был, преследуемый обвинением в непрофессиональном поведении, что было связано со вторым финансовым крахом, который он потерпел, продавая ружья северянам во время гражданской войны в Америке.

В последние годы своей жизни Расселл завершил книгу «Волны трансляции в водном, воздушном и эфирном океанах», опубликованную посмертно, в 1882 г. [1.15]. В нее включена перепечатка «Доклада о волнах» [1.3], опубликованного в 1844 г., где описано первое наблюдение уединенной волны. Книга содержит ряд курьезных догадок о строении материи; в ней формула (1.7) применяется для вычисления толщины атмосферы (5 миль) исходя из скорости звука и протяженности Вселенной (5×10^{17} миль) исходя из скорости света! Относительно первого вывода Расселл полагал, что звук должен переноситься его уединенными волнами, чтобы его передача происходила без искажений. Тем самым именно скорость c из (1.7) следует считать

¹⁾ См. статью Расселла в *Edinb. Roy. Soc. Trans.* XIV (1840). По-видимому, контракта заключено не было, но компания канала Юнион оплачивала связанные с исследованиями расходы, как указано в ее отчете от 27 января 1835 г. „Report on the practical results of experiments on Canal Navigation” (Canal Office, Edinburgh).

скоростью звука (а не $c_s = \sqrt{gh}$ в (1.6) или (1.8)). Вычисленная таким способом толщина атмосферы, 5 миль, оказалась эквивалентной ее действительной толщине в пересчете на равномерную плотность. Что же касается протяженности Вселенной, то 5×10^{17} миль превосходит реальную величину по крайней мере на пять порядков; во всяком случае она, видимо, основана на значении g , произвольно заниженном Расселлом в 10^{-5} раз. Тем не менее в этих ранних догадках, возможно, уже заключалось предвидение той роли, которую играют солитоны в современной физике.

Расселловский «Доклад о волнах» [1.3], несомненно, вызвал исследования де Буссинеска [1.9] и Рэлея [1.16]. Оба автора нашли, что уединенная волна имеет форму гиперболического секанса, а ее скорость определяется формулой (1.7). Рэлей, кроме того, выяснил, почему эта формула не работает при $k \approx h$, что было экспериментально показано Расселлом. Рэлей рассмотрел понятие уединенной волны, введенное Расселлом в его «Докладе о волнах», заметив, что если ее длина превышает глубину канала в 6 или в 8 раз, то ее можно приближенно рассматривать в рамках теории длинных волн; он тем не менее отмечает различия в поведении положительных и отрицательных волн, которые наблюдал Расселл, цитирует возражение Эйри, а именно, что теория Эйри очень длинных волн на мелкой воде допускает оба типа волн — положительные и отрицательные («Нам представляется, что эта волна не заслуживает эпитетов «большая» или «первичная...»), приводит противоположное мнение Стокса и на основании своего анализа приходит к твердому убеждению в правоте Рассела.

К тому времени, когда Кортвег и де Фриз [1.7] вывели свое уравнение (1.6), уединенная волна с профилем sech^2 была «хорошо известной», и основная задача их работы заключалась в опровержении мнения Эйри [1.8] о том, что длинные волны в каналах с необходимостью должны изменять свою форму. Они показали, что стоксова теория длинных волн [1.17] дает первые два члена решения в виде кноидальных волн их уравнения (КдФ) и что хотя синусоидальные волны становятся круче по мере продвижения, но другие волны ведут себя иначе. Они показали также, что решение вида $\eta = k \text{sech}^2 px$ является стационарным (в сопутствующей системе координат), если $k = 4\sigma\rho^2$; при $k > 4\sigma\rho^2$ передний фронт волны становится круче, а при $k < 4\sigma\rho^2$ увеличивается крутизна заднего склона волны. В наших обозначениях $\sigma \equiv h^3/3 - \gamma h\rho^{-1}g^{-1}$. Кортвег и де Фриз [1.7] цитируют работы де Буссинеска [1.9], Рэлея [1.16] и Сен-Венана [1.18] как содержащие теорию уединенной волны, но отмечают, что (в 1895 г.) в трактатах Лэмба и Бассета по-прежнему поддерживается мнение Эйри. Кортвег и де Фриз пишут, что поскольку работы Рэлея [1.16] и Маккоуна [1.19] прямо не оп-

ровергли возражений Лэмба и Бассета, то «именно желание с определенностью решить этот вопрос заставило нас предпринять довольно утомительные вычисления, которые можно найти в конце этой статьи». Само уравнение КдФ, названное «очень важным», вызвало куда меньше споров.

Изучая историю уединенной волны, нельзя не обратить внимания на статью Маккоуна [1.19], которая называется «Об уединенной волне» и цитируется Кортевегом и де Фризом [1.7]. Маккоун нашел и проанализировал ошибку Стокса [1.17], который в 1847 г. пришел к выводу, что деградация волны является неотъемлемой особенностью ее движения (и, следовательно, вызывается вовсе не трением). Маккоун проверил и подтвердил приближения де Буссинеска [1.9] и Рэля [1.16] для формы sech^2 уединенной волны, вывел (1.7) точно и отметил согласие своих результатов с выводами Расселла и их экспериментальным подтверждением, которое получил Базин [1.20]. Он также разработал приближенную теорию разрушения волн, выходящих на более мелкую воду. Примечательно, что, несмотря на появившуюся четыре года спустя работу Кортевега и де Фриза [1.7], затем было сделано столь мало работ на эту тему. В самом деле, значение глубокой и тщательно обоснованной ранней работы Расселла [1.3] лишь сейчас начинает осознаваться по мере того, как широкий круг приложений концепций уединенной волны и солитона получает должную оценку.

Список работ, цитируемых в этой короткой статье, помещен в литературе к гл. 1. Читателя могут заинтересовать другие опубликованные научные работы Расселла. Приводимый ниже список, несомненно неполный, составил Дж. Эйлбек в библиотеке Эдинбургского Королевского Общества.

ОПУБЛИКОВАННЫЕ НАУЧНЫЕ РАБОТЫ РАССЕЛЛА

- Russel, John Scott: Notice of the reduction of an anomalous fact in Hydrodynamics, and of a new law of the Resistance of Fluids to the motion of floating bodies. — Brit. Assoc. Rep. 1834, pp. 531—534.
- On the motion of floating bodies. — Brit. Assoc. Rep. 1835 (pt. 2), p. 16.
- On the solid of least resistance. — Brit. Assoc. Rep. 1835 (pt. 2), p. 107—108.
- On the machanism of the waves, in relation to steam navigation. — Brit. Assoc. Rep. 1837 (pt. 2), pp. 130—131.
- On the fallacies of the Rotatory Steam Engine (1837). — Edinb. New Phil. Journ. XXIV., 1838, pp. 35—64; Edinb. Trans. Scot. Soc. Arts, I, 1841, pp. 172—202; Dingler, Polytech. Journ. LXVII., 1838, pp. 332—355; LXXVIII., 1840, p. 4—18.
- On the economical proportion of power to tonnage in steam vessels. — Brit. Assoc. Rep. 1839 (pt. 2), pp. 124—125.
- On the temperature of most effective condensation in steam vessels. — Brit. Assoc. Rep. 1840 (pt. 2), pp. 186—187.
- On the most economical and effective proportion of engine power to the tonnage of the hull in steam vessels. — Brit. Assoc. Rep. 1840 (pt. 2), pp. 188—190.

- Description of a Polyphotal Lamp and Reflector of single curvature employed in steam vessels, canal-boats, and c.—Edinb. New Phil. Journ. XXVIII, 1840, pp. 193—196.
- Experimental researches into the laws of certain hydrodynamical phenomena that accompany the motion of floating bodies, and have not previously been reduced into conformity with the known laws of the Resistance of Fluids (1837).—Edinb. Roy. Soc. Trans. XIV., 1840, pp. 47—109.
- On the vibration of Suspension Bridges and other structures, and the means of preventing injury from this cause (1839).—Edinb. Trans. Scot. Soc. Arts, I., 1841, pp. 304—313; Edinb. New Phil. Journ. XXVI., 1839, pp. 386—396.
- Elementary considerations of some principles in the construction of buildings designed to accomodate spectators and auditors (1838).—Edinb. Trans. Scot. Arts, I., 1841, pp. 314—318; Edinb. New Phil. Journ. XXVII., 1839, pp. 131—136.
- Report of a Committee on the Form of Ships.—Brit. Assoc. Rep. 1841, pp. 325—326; 1842, pp. 104—105.
- Supplementary Report of a Committee on Waves.—Brit. Assoc. Rep. 1842 (pt. 2), pp. 19—21.
- On the indicator of speed of steam vessels.—Brit. Assoc. Rep. 1842 (pt. 2), pp. 115—116, p. 109.
- Report on the abnormal tides of the Firth of Forth. Brit. Assoc. Rep. 1842 (pt. 2), pp. 115—116.
- Report of a series of observations on the tides of the Firth of Forth. and the east coast of Scotland.—Brit. Assoc. Rep. 1843, pp. 112—115.
- On the application of our knowledge of the laws of sound to the construction of buildings.—Brit. Assoc. Rep. 1843 (pt. 2), pp. 96—98; Majocchi, Ann. Fis. Chim. XXVIII., 1847, pp. 121—123.
- Description of a Marine Salinometer to indicate of brine in the boilers of marine steam-egines.—Edinb. New Phil. Journ. XXXIV., 1843, pp. 278—285.
- Report on Waves.—Brit. Assoc. Rep. 1844, pp. 311—390 (reference [1.3]).
- On the tides of the east coast of Scotland.—Brit. Assoc. Rep. 1844 (pt. 2), p. 6.
- On the nature of the Sound-wave.—Brit. Assoc. Rep. 1844 (pt. 2), p. 11.
- On the resistance of railway trains.—Brit. Assoc. Rep. 1844 (pt. 2), p. 96.
- Account of a cheap and portable self-registering Tide-Gauge, invented by John WOOD (1844).—Edinb. New Phil. Journ. XXXVIII., 1845, pp. 71—76.
- On the terrestrial mechanism of the Tides.—Edinb. Roy. Soc. Proc. I, 1845, pp. 179—182.
- Notice of the remarkable mathematical properties of a certain parallelogram.—Edinb. Roy. Soc. Proc. I., 1845, pp. 187—188.
- On the law which connects the elastic force of vapour with its temperature.—Edinb. Roy. Soc. Proc. I., 1845, pp. 227—231.
- On the practical forms of breakwaters, sea walls, and other engineering works exposed to the action of the waves. Civ. Eng. Instit. Proc. IV., 1847, pp. 135—143.
- On the practical forms of engineering works exposed to the action of the waves of the sea, and on the advantages and disadvantages of certain forms of construction for breakwaters and sea-walls.—Franklin Inst. Journ. XIV., 1847, pp. 13—15.
- On certain effects produced on sound by the rapid motion of the observer. Brit. Assoc. Rep. 1848 (pt. 2), pp. 37—38.
- On recent applications of the wave-principle to the practical construction of steam-vessels.—Brit. Assoc. Rep. 1849 (pt. 2), pp. 30—33.
- On wave-line ships and yachts.—Roy. Inst. Proc. I., 1851—1854, pp. 115—119.
- On the progress of naval architecture and steam navigation, including a notice of the large ship of the Eastern steam Navigation Company.—Brit. Assoc. Rep. 1854 (pt. 2), pp. 160—161.
- Mechanical structure of the Great Eastern steamship. Brit. Assoc. Rep. 1857 (pt. 2), pp. 195—198.**

- The Wave-line principle of ship construction. Naval Architects' Instit. Trans. I., 1860, pp. 184—211; II., 1861, pp. 230—245.
- Disturbing forces of locomotive engines. Civ. Eng. Instit. Proc. XXII, 1862—1863, pp. 107—108.
- On the rolling of ships, as influenced by their forms and by the disposition of their weights. Naval Architects' Instit. Trans. IV., 1863, pp. 276—283.
- Russell, John Scott and (Sir) John Robinson: Report on Waves. — Brit. Assoc. Rep. 1837, p. 417—496; 1840, pp. 441—443.
- Russell, John Scott: On gun-cotton. — Quarterly Journ. Sci. I., 1864, pp. 401—412.
- On the mechanical nature and uses of gun-cotton (1864). — Roy. Instit. Proc. IV., 1866, pp. 292—299.
- Биография приведена в Naval Architects Trans. 23, 1882, pp. 258—261; Roy. Soc. Proc., 34, 1883, pp. XV—XVI.
- On the true nature of the wave of translation, and their part it plays in removing the water out of the way of a ship with least resistance. — Naval Architects Trans., Zo, 1879, pp. 59—84.
- On the true nature of the resistance of armour to shot. — Naval Architects Trans., 21. 1880, pp. 69—92.
- On storm stability as distinguished from smooth-water stiffness (1879). — United Service Instit. Journ., 23, 1880, p. 821—849.
- The wave of translation and the work it does as the carrier wave of sound. — Roy. Soc. Proc., 32, 1881, pp. 382—383.
- Биографию можно также найти в книге Inst. Civ. Engin. Proc. 87 (1886), pp. 427—440.
- Недавно была опубликована биография Расселла
- John Scott Russell — A Great Victorian Engineer and Naval Architect. — G. S. Emmerson, 1977 (John Murray, London) (Ref. [1.5]).
- Дополнительные биографические сведения приведены в перечисленных ниже источниках:
- J. Roy. Soc. Arts (Feb. 1967), pp. 204—208; (March 1967), pp. 299—302 (on John Scott Russell and Henry Cole, by G. P. Mabon).
- «College Courant» Glasgow, Martinmas 1958, pp. 28—37 and Whitsun 1959, pp. 98—109 (on John Scott Russell and the Great Eastern» by A. M. Robb).
- The Naval Architect, January 1978, pp. 30—35 (a review of John Scott Russell by G. S. Emmerson).
- Harpers and Queen, October 1979, pp. 258—259 (a poetic mention of John Scott Russell by Ian Hamilton Finlay).

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Предисловие | 5 |
| 1. Солитон и его история. <i>Р. Буллаф, Ф. Кодри.</i> Перевод <i>С. В. Манакова, С. В. Чудова</i> | 11 |
| 1.1. Открытие Расселом «большой уединенной волны» | 11 |
| 1.2. Определение солитона: N -солитонные решения нелинейных эволюционных уравнений | 15 |
| 1.3. Преобразование Бэклунда и сохранение плотности | 24 |
| 1.4. Другие физические задачи и открытие метода обратной задачи рассеяния | 36 |
| 1.5. Представление нелинейных эволюционных уравнений с помощью пар операторов | 41 |
| 1.6. Открытие других N -солитонных решений. Схема задачи рассеяния 2×2 АКНС — Захарова — Шабата и ее геометрия | 45 |
| 1.7. Дальнейшее развитие метода обратной задачи рассеяния | 60 |
| Литература | 69 |
| 2. Аспекты солитонной физики. <i>Дж. Лэм (мл.), Д. Маклаффлин.</i> Перевод <i>Б. А. Дубровина</i> | 78 |
| 2.1. Исторические замечания | 78 |
| 2.2. Модель нелинейной системы | 81 |
| 2.3. Обратная задача рассеяния и интегралы движения | 99 |
| Приложение А. Формальный вывод уравнений Марченко | 115 |
| Литература | 120 |
| 3. Двойное уравнение sine-Gordon: система, имеющая физические приложения. <i>Р. Буллаф, Ф. Кодри, Г. Гиббс.</i> Перевод <i>Б. А. Дубровина</i> | 122 |
| 3.1. Физические основания | 122 |
| 3.2. Теория вырожденной СИП | 128 |
| 3.3. Спиновые волны в жидком ${}^3\text{He}$ | 139 |
| 3.4. Теория возмущений для двойного СГ-уравнения | 150 |
| Примечание при корректуре | 159 |
| Литература | 160 |
| 4. Нелинейная решетка (цепочка Тоды). <i>М. Тода.</i> Перевод <i>Б. А. Дубровина, П. Б. Медведева</i> | 163 |
| 4.1. Нелинейные решетки | 163 |
| 4.2. Экспоненциальное взаимодействие | 165 |
| 4.3. Матричный формализм | 169 |
| 4.4. Непрерывный предел | 172 |
| 4.5. Преобразования Бэклунда | 172 |
| 4.6. Заключительные замечания | 173 |
| Литература | 174 |
| 5. Прямые методы в теории солитонов. <i>Р. Хирота.</i> Перевод <i>П. Б. Медведева</i> | 175 |
| 5.1. Предварительные замечания | 175 |
| 5.2. Свойства D -оператора | 178 |
| 5.3. Решения билинейных дифференциальных уравнений | 180 |
| 5.4. N -солитонные решения уравнений типа КдФ | 182 |
| 5.5. Билинейный вид преобразований Бэклунда | 184 |
| Литература | 192 |

| | |
|---|-----|
| 6. Обратное преобразование рассеяния. <i>А. Ньюэлл. Перевод И. М. Кричевера</i> | 193 |
| 6.1. Общие замечания | 193 |
| 6.2. Обобщенная задача Захарова — Шабата на собственные значения | 202 |
| 6.3. Эволюция данных рассеяния | 206 |
| 6.4. Квадраты собственных функций и фурье-разложения | 210 |
| 6.5. Эволюционные уравнения класса I | 214 |
| 6.6. Гамильтонова структура уравнений класса I | 217 |
| 6.7. Системы с двумя дисперсионными соотношениями | 221 |
| 6.8. Распространение когерентного импульса | 223 |
| 6.9. Движущиеся собственные значения | 227 |
| 6.10. Уравнение sine-Gordon | 231 |
| 6.11. Уравнение Шрёдингера | 234 |
| 6.12. Сингулярная теория возмущений | 239 |
| 6.13. Заключение | 256 |
| Приложение А. Соотношения ортогональности | 262 |
| Приложение В. Доказательство инвариантности формы (6.146) | 263 |
| Приложение С. Соотношения ортогональности и сохранение двух форм, связанных с уравнением Шрёдингера | 264 |
| Литература | 267 |
| 7. Метод обратной задачи рассеяния. <i>В. Е. Захаров. Перевод С. В. Манакова</i> | 270 |
| 7.1. Введение | 270 |
| 7.2. Метод отыскания « $L - A$ » пар | 271 |
| 7.3. Элементарные многомерные обобщения | 276 |
| 7.4. Одевание « $L - A$ » пар | 279 |
| 7.5. Проблема редукции и физическая интерпретация примеров | 284 |
| 7.6. Двумерная неустойчивость солитонов [7.25] | 290 |
| 7.7. Точные решения уравнений нелинейной оптики [7.26] | 293 |
| 7.8. Триада L, A, B | 296 |
| 7.9. Сохранение спектра операторных пучков | 300 |
| 7.10. «Одевание» операторных пучков [7.31] | 305 |
| Литература | 309 |
| 8. Обобщенная матричная форма метода обратной задачи рассеяния. <i>М. Вадати. Перевод И. М. Кричевера</i> | 310 |
| 8.1. Исторические замечания | 310 |
| 8.2. Обратная задача рассеяния | 311 |
| 8.3. Метод обратной задачи рассеяния и интегрируемые уравнения | 315 |
| 8.4. Обобщение на решеточные задачи | 318 |
| 8.5. Заключительные замечания | 321 |
| Литература | 322 |
| 9. Нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые обратным спектральным преобразованием, ассоциированным с матричным уравнением Шрёдингера. <i>Ф. Калоджеро, А. Дегаспирес. Перевод И. М. Кричевера</i> | 323 |
| 9.1. Прямая и обратная задачи для матричного уравнения Шрёдингера; обозначения | 323 |
| 9.2. Обобщенные соотношения Вронского; основные формулы | 326 |
| 9.3. Нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые обратным спектральным преобразованием; солитоны | 327 |
| 9.4. Уравнение бумерона и другие интегрируемые нелинейные уравнения, связанные с ним; бумероны | 334 |
| 9.5. Преобразования Бэклунда | 342 |
| 9.6. Нелинейная суперпозиция | 344 |

| | |
|---|-----|
| 9.7. Законы сохранения | 345 |
| 9.8. Обобщенная резольвентная формула | 346 |
| 9.9. Нелинейные операторные тождества | 347 |
| Литература | 347 |
| 10. Метод решения периодической задачи для уравнения КдФ и его обобщений. <i>С. П. Новиков. Перевод Б. А. Дубровина</i> | 348 |
| 10.1. Одномерные системы, допускающие представление Лакса; их стационарные решения | 348 |
| 10.2. Конечнзонные линейные операторы | 350 |
| 10.3. Гамильтонов формализм стационарной и нестационарной задачи для уравнения КдФ | 355 |
| 10.4. Функция Ахиезера и ее приложения | 357 |
| Литература | 362 |
| 11. Гамильтонова интерпретация метода обратного преобразования рассеяния. <i>Л. Д. Фаддеев. Перевод И. М. Кричевера</i> | 363 |
| 11.1. Гамильтонова формулировка | 363 |
| 11.2. Полная интегрируемость нелинейного уравнения Шрёдингера | 367 |
| 11.3. Приложения к задаче квантования | 375 |
| Литература | 379 |
| 12. Квантовые солитоны в статистической физике. <i>А. Лютер. Перевод С. В. Манакова, С. В. Чудова</i> | 380 |
| 12.1. Предварительные замечания | 380 |
| 12.2. Квантование и квантовые солитоны | 382 |
| 12.3. Уравнения непрерывного поля | 386 |
| 12.4. Спектр собственных значений | 396 |
| Литература | 398 |
| Дальнейшие заметки о Джоне Скотте Расселле и ранней истории его уединенной волны. <i>Перевод С. В. Чудова</i> | 400 |
| Опубликованные научные работы Расселла | 403 |