

ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ СТРУН

М.: Мир, 1991.— 296 с.

Книга авторов из Бельгии и Швеции содержит основные идеи теории струн. Изложение характеризуется достаточной степенью подробности, необходимой для изучения предмета читателями, не обладающими предварительными сведениями в этой области, но знакомыми с современной квантовой теорией поля, включая суперсимметрию. Списки литературы и упражнения облегчают читателям процесс изучения.

Для студентов и аспирантов университетов, а также специалистов, желающих войти в круг идей теории струн и получить подготовку, необходимую для работы в данной области.

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	9
Часть I Лекции по теории суперструн. <i>Ларе Бринк</i>	
Глава 1. Введение	12
Глава 2. Бозонные струны	19
Глава 3. Спиновые струны	29
Глава 4. Суперструны	37
Глава 5. Гетеротическая струна	48
Глава 6. Операторный формализм	55
Глава 7. Полевая теория свободных суперструн	67
Глава 8. Полевая теория взаимодействующих суперструн типа IIб	75
Глава 9. Другие примеры струнных взаимодействий и возможное появление аномалий	81
Глава 10. Дальнейшие перспективы	86
Приложение. Некоторые обозначения и формулы	90
Литература	92
Часть II. Лекции по теории струн с применением гамильтоновых и БРСТ-методов. <i>Марк Энно</i>	
Глава 11. Введение	95
Глава 12. Струна Намбу — Гото: классический анализ	98
12.1. Принцип действия	98
12.1.1. Действие Намбу — Гото	98
12.1.2. Действие в квадратичной форме	101
12.1.3. Интерпретация действия в терминах σ -модели	104
12.1.4. Калибровочные симметрии	105
12.1.5. Глобальные симметрии	106
12.1.6. Конформная симметрия	106
12.1.7. Граничные условия	111
12.2. Гамильтонов формализм	116
12.2.1. Связи	116
12.2.2. Смысл условий связи — упрощение формализма	120

12.2.3. Гамильтонова форма граничных условий (случай открытой струны)	124
12.2.4. Пуанкаре-заряды в гамильтоновом формализме	126
12.3. Более подробное описание алгебры связей	126
12.3.1. Явные вычисления	126
12.3.2. Условия Вирасоро	128
12.4. Фурье-моды	131
12.4.1. Открытые струны	131
12.4.2. Замкнутые струны	132
12.5. Калибровка светового конуса	134
12.5.1. Конформные калибровки	134
12.5.2. Калибровка светового конуса	138
12.5.3. Общее решение классических уравнений движения струны	141
12.5.4. Скобки Дирака как независимые степени свободы	145
12.5.5. Действие и гамильтониан в калибровке светового конуса	147
12.5.6. Генераторы алгебры Пуанкаре	148
12.5.7. Особенности замкнутой струны	150
Глава 13. Квантование струны Намбу — Гото	152
13.1. Алгебра Вирасоро — общее рассмотрение	152
13.1.1. Введение	152
13.1.2. Операторы Вирасоро — фоковское представление	152
13.1.3. Алгебра Вирасоро	155
13.1.4. Сравнение связей Вирасоро с уравнением Уилера — Де Витта	156
13.1.5. Алгебра Вирасоро и алгебры Каца — Муди	161
13.1.6. Алгебра Вирасоро на искривленном фоне	163
13.2. Квантование струны методом Бекки — Рюэ — Стора — Тютиня (БРСТ)	164
13.2.1. БРСТ-квантование — краткий обзор	164
13.2.2. Классические выражения для БРСТ-заряда	167
13.2.3. Фоковское пространство духов	169
13.2.4. Нильпотентность квантового БРСТ-оператора	170
13.2.5. Критическая размерность на искривленном фоне	172
13.2.6. Физическое подпространство	172
13.2.7. Замечания по поводу удвоения	177
13.2.8. Разное	181
13.3. Квантование в калибровке светового конуса	184
13.3.1. Пуанкаре-инвариантность квантовой теории	184
13.3.2. Описание спектра	186
13.3.3. Замкнутая струна — Пуанкаре-инвариантность	188
13.3.4. Спектр (замкнутая струна)	189
13.4. Ковариантное квантование	190
13.4.1. Устранение духов как основной результат ковариантного подхода	190
13.4.2. Вершинный оператор	194

13.4.3. Состояния ДДФ	196
13.4.4. Теорема об отсутствии духов при $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$	198
13.4.5. Квантовая калибровочная инвариантность	202
Глава 14. Фермионная струна: классический анализ	204
14.1. Локальная суперсимметрия в двух измерениях	204
14.2. Суперконформная алгебра	205
14.2.1. Квадратный корень из бозонных и фермионных связей	205
14.2.2. Граничные условия	209
14.2.3. Суперкалибровочные преобразования — калибровочные условия светового конуса	211
14.2.4. Генераторы Пуанкаре	212
14.3. Фурье-моды (открытая струна)	213
14.3.1. Фурье-разложение полей	213
14.3.2. Супергенераторы Вирасоро	213
14.3.3. Генераторы Пуанкаре	215
14.3.4. Замечания для случая замкнутой струны	215
14.3.5. Супералгебра Вирасоро	216
Глава 15. Фермионная струна: квантовый анализ	219
15.1. Бекки — Рюэ — Стора — Тютиня (БРСТ) квантование модели Неве — Шварца	219
15.1.1. Ооновское пространство духов	219
15.1.2. БРСТ-оператор	220
15.1.3. Критическая размерность	220
15.1.4. Структура физического подпространства	221
15.2. Бекки — Рюэ — Стора — Тютиня (БРСТ) квантование модели Района	224
15.2.1. Фоковское пространство духов	224
15.2.2. БРСТ-оператор	225
15.2.3. Критическая размерность	225
15.2.4. Структура физического подпространства	228
15.2.5. Замечания для случая замкнутой струны	230
15.3. Квантование модели Неве — Шварца в калибровке светового конуса	230
15.3.1. Пуанкаре-инвариантность	230
15.3.2. Спектр Неве — Шварца	231
15.3.3. Спектр замкнутой струны Неве — Шварца	232
15.4. Квантование модели Района в калибровке светового конуса	233
15.4.1. Пуанкаре-инвариантность	233
15.4.2. Спектр Рамона	234
15.4.3. Замкнутая струна	235
15.5. Суперсимметрия в десяти измерениях	236
15.5.1. Открытая струна	236
15.5.2. Замкнутая струна	238
Глава 16. Суперструна	239

16.1. Ковариантное действие	239
16.1.1. $SUSY(N)/SO(d-1,1)$ как пространство объектов	239
16.1.2. Инвариантное действие	241
16.1.3. Локальная суперсимметрия	244
16.1.4. Уравнения движения и граничные условия	247
16.1.5. Структура калибровочных симметрии	249
16.1.6. Суперзаряды Пуанкаре	251
16.1.7. Гамильтонов формализм	252
16.1.8. Калибровка светового конуса	253
16.2. Квантовая теория	257
16.3. Суперчастица	258
16.3.1. Действие — калибровочные симметрии	258
16.3.2. Суперзаряды Пуанкаре	259
16.3.3. Гамильтонов формализм	260
16.3.4. Смысл связей	261
16.3.5. Модель Сиджела	263
16.3.6. Калибровка светового конуса	268
Глава 17. Гетеротическая струна	274
Приложение А. Доказательство теоремы об отсутствии духов для бозонной струны, основанное на БРСТ-методах	275
Приложение Б. Матрицы u в десяти измерениях	278
Б.1. Свойства симметрии	278
Б.2. Преобразования Фирца	279
Приложение В. Разложение десятимерных спиноров в калибровке светового конуса	282
Литература	286
Предметный указатель	290

Предметный указатель

Амплитуды рассеяния в теории струн	<i>Венециана</i> модель 12, 24, 59
59, 60	Вершинный оператор 58, 63, 66, 195
— — для точечных частиц 55	<i>Весса</i> — <i>Зумино</i> член 242
Аномалии БРСТ 171, 226, 227	Взаимодействие между струнами 75
— калибровочные 84	Виковский поворот 57
<i>Бейкера</i> — <i>Хаусдорфа</i> формула 56	<i>Вирасоро</i> алгебра 23, 108, 127, 155
Бесконечная приводимость 267	— супералгебра 216, 217
БРСТ заряд 167	— условия 61, 116, 128
— метод квантования 164	Вложение 99
— нильпотентность квантовая,	Возбужденные состояния бозонной
бозонная струна 170, 171	струны 187, 189
— — — спиновая струна 220	— — спиновой струны 231, 232
— — классическая 166	— — суперструны 43
— оператор 170	Вторичные связи 21, 119, 260
Вейлевская инвариантность 20, 103	Гамильтоновы связи 207
<i>Вейля</i> преобразования 120	Гармонические отображения 104

- Гаусса закон 116
 Генераторы алгебры Пуанкаре 25,
 184—187, 212
 Гравитон 189, 233
 Граничные условия для бозонной
 струны 22, 25, 111, 125
 — — — спиновой струны 30, 34, 209
 — — — суперструны 247, 248
 Группа E_8 52
 — $E_8 \times E_8$ 53, 274
 — $SO(8)$ 41, 43, 90
 — — восьмимерное представление
 90
 — — ковариантность 41
 — $SO(24)$ 186, 187
 — $SO(25)$ 186, 187
 — $SO(32)$ 52, 274
 — $SO(d-2)$ 37
 — $SO(n)$ 43, 46, 163, 164
 — $Spin(32)/Z_2$ 52
 — $SU(4) \times U(1)$ 72, 73
 — $SU(N)$ 163, 164
 G -четность 231
 ДДФ операторы 181, 196—203
 — состояния 196—203
 Действие бозонной струны 20, 99
 — гетеротической струны 49
 — классической точечной частицы
 19, 98
 — спиновой струны 30, 32, 33
 — суперструны 37, 246, 256
 — суперчастицы 258
 Дилатон 189
 Дирака скобки 146—150
 Диффеоморфизмы 108, 122
 Дуальность 62
 Духи 169, 264
 — фоковское пространство 169, 219,
 224
 — для духов 264
 Индуцированная метрика 99
 Калаби — Яу пространства 87
 Калибровка светового конуса для
 бозонной струны 24, 138—140
 — — — спиновой струны 33, 211,
 212
 — — — суперструны 253—256
 — — — суперчастицы 270
 Каца — Муди алгебра 161—163
 Квадратичная форма действия 101
 Квантование БРСТ 164
 — с ограничениями 22, 35
 Квантовая калибровочная
 инвариантность 167, 183, 202
 — теория калибровочных полей 165
 Квартетный механизм 181, 223, 228,
 275
 Киральность в 10 измерениях 43, 249
 Клебша — Гордана коэффициенты 90
 Клиффорда алгебра 41, 90, 216
 Коба — Нильсена формула 60
 Ковариантное квантование бозонной
 струны 22, 190—203
 — — спиновой струны 32, 216
 Компактификация на гипертор 50
 Компонентные поля струны 72
 Конечность 84
 Контрчлены 70, 73
 Конформная алгебра 108
 — инвариантность 182
 — калибровка 107, 134—137
 Конформные преобразования 107—
 111
 Конформный вектор Киллинга 109
 — спин 61, 195
 — фактор 103
 Космологическая постоянная 88
 Коши — Римана условия 107, 111
 Критическая размерность 152
 — — бозонной струны 172, 190
 — — спиновой струны 220, 225
 — — суперструны 257
 Лагранжевы множители 119, 121, 209
 Майорана-вейлевский спинор 237,
 243, 244, 280
 Малая группа 186, 231

- Мёбиуса* подалгебра (1, 1) 35
 — преобразования 60
 Мембраны 100, 104
 Метод континуального интеграла 55
 Натяжение струны 114
Неве — *Шварца* модель 213, 230
 — — сектор 34, 35
 — — спектр 231, 232
 Неоднозначность упорядочения 154, 217
 Неориентируемые струны 46
 Нормальное упорядочение 23, 154
 Нулевые состояния 166, 176, 192, 201
 — — отщепление 166, 176, 201
 Обратное отображение 241
 Однопетлевые диаграммы 64—66, 83
 — — конечные 83, 84
 Оператор внешней производной 24Ф
 — твиста 63
 — числа духов 181, 182
 Ориентируемые струны 46
 Ортогональная калибровка 22
 Первичные связи 21, 117, 119, 260
 Перенормировка скорости света 27
 Площадь поверхности 20, 99
 Полевая теория струн 67—74
 Представления группы *Пуанкаре* 28, 29, 186
 Проектор на физические состояния 64
Пуанкаре суперзаряды 259, 260
Пуанкаре-заряды 126, 132, 134
Пуанкаре-инвариантность 20, 106, 184, 208, 230, 233
 Разложение *S*-матрицы по теории возмущений 55
Рамона модель 217, 235
 — сектор 34, 236
 — — граничные условия 34, 210
 — спектр 234, 235
Рариты — *Швингера* мультиплет 43
 — — поле 32
 — — состояния 44, 45
Редже наклон траектории 26
 — полюса 12
 — траектории 12, 186
 Репараметризационная инвариантность 20, 98, 121, 156
 Решетка дуальная 51
 — самодуальная 52
 — четная 51
 — Γ_8 52
 — Γ_{16} 52
 — $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ 52
Римана ζ -функция 27
 Связи второго рода 252, 261
 — первого рода 252, 261
 Сигма-модель 104, 105, 239
 Состояния с отрицательной нормой 22, 153, 170, 181
 Спектр бозонной струны 186
 — — — замкнутой 189
 — гетеротической струны 52
 — спиновой струны *Неве* — *Шварца* 231
 — — — — — замкнутой 232
 — — — *Рамона* 234, 235
 — суперструны 45
 — Супервейлевская инвариантность 208
 Супергравитация 207, 238, 258
 Суперзаряд 252, 272
 Суперконформная алгебра 36, 207
 — симметрия 34—36
 Супермногообразии *SUSY(N)/SO(d—1,1)* 239
 Суперпуанкаре-алгебра 38, 49, 67
 — инвариантность 259
 Суперсимметрия 38
 — в 10 измерениях 236, 239
 Суперструна типа I 40, 42, 257
 — — Pa 40, 44, 257
 — — Pb 40, 43, 257
 Суперянг-миллсова теория 237
 Тахион 27, 50, 58, 64, 187, 189, 231, 239
 Теневой мир 88

Тензор энергии-импульса 102, 109,
164
Теорема об отсутствии духов 181,
198
Теория типа *Сугавары* 163
Удвоение 177, 224
Уилера—Де Витта уравнение 156
Уравнения движения бозонной
струны 22, 33
— — — — решения 141
— — суперструны 247
Усечение 178, 236
Фейнмана правила 57
Фейнмановское правило обхода
полусов 57
Фермионная симметрия для
суперструны 245
— — — суперчастицы 258

Фирца преобразование 246
— формула 91
Флуктуации вакуумные 26, 50
Фока пространство 154, 155
Фоковское представление 152—154
Формализм суперполей 72
Функционал энергии 104
Функциональная мера 71
Функция сдвига 117, 121
— хода 117—119
Центральный заряд в алгебре
Вирасоро 23, 156
— — — супералгебре *Вирасоро* 217
Циклическая симметрия 62
Чана и *Патона* способ 42
— переменные 61
Шапиро — *Вирасоро* модель 189
— — — расширенная 189

Предисловие к русскому изданию

Нельзя не признать, что, несмотря на неизбежное чередование всплесков энтузиазма с периодами более спокойного развития, теория суперструн вот уже второе десятилетие находится в состоянии неуклонного поступательного движения. Эта теория представляется сейчас естественным этапом на пути построения объединенной картины фундаментальных сил природы. Необходимыми ингредиентами объединенной теории являются суперсимметрия [1] и включение в схему гравитационного взаимодействия. Это ведет к моделям супергравитации [2, 3], которые в принципе способны предсказывать не только симметрии взаимодействий, но и спектр масс участвующих в них частиц. Однако супергравитационные теории неперенормируемы и, по-видимому, могут иметь смысл лишь как эффективные теории в низкоэнергетическом пределе некоторых более широких моделей. Именно на такую роль и претендует теория суперструн. Она глубоко революционна в смысле представлений о природе фундаментальных физических объектов, но для их описания полностью использует традиционные принципы квантовой теории.

Предлагаемая вниманию читателя книга содержит лекции известных ученых Л. Бринка и М. Энно, внесших большой вклад в развитие этого направления. Наряду с фундаментальной монографией Грина, Шварца и Виттена [4] она пользуется большой популярностью на Западе и может служить хорошим введением в теорию суперструн.

Лекции Л. Бринка имеют вводный характер; в них изложены общие принципы классической теории бозонных струн, рассмотрены суперсимметричные струнные модели, в том числе модель гетеротической струны. При квантовании автор использует калибровку светового конуса. В лекциях М. Энно уделяется много внимания анализу связей и построению гамилтоновой формулировки классической теории струн. Обсуждается теория БРСТ-квантования и ее применение к квантованию бозонных струн и суперструн.

Следует иметь в виду, что за время, прошедшее после написания книги, в теории струн получен целый ряд новых важных результатов. Остановимся на некоторых из них подробнее.

В самое последнее время достигнут значительный прогресс в ковариантном квантовании суперструны Грина — Шварца, обладающей явной пространственно-временной суперсимметрией.

Этот вопрос имеет долгую историю. Как известно, впервые суперсимметричная теория струн была сформулирована Грином и Шварцем в калибровке светового конуса, и лишь спустя два года ими была найдена явно ковариантная формулировка. Помимо глобальной суперсимметрии ковариантное действие обладает локальной фермионной симметрией, позволяющей наложить калибровку светового конуса на фермионные координаты и тем самым исключить восемь нефизических компонент шестнадцатикомпонентного спинора. Но в калибровке светового конуса возникают серьезные проблемы вне однопетлевого приближения. Предпочтительной является явно ковариантная теория. Ковариантное действие суперструны имеет геометрическую интерпретацию как двумерная сигма-модель в суперпространстве с членом Весса — Зумино и естественно обобщается на случай искривленного фонового суперпространства. Первые попытки проквантовать такую теорию были предприняты в работах [5—7] для гетеротической струны в формулировке Грина — Шварца. Основная трудность квантования ковариантной суперструны заключается в бесконечной приводимости алгебры локальной фермионной симметрии, что приводит к бесконечному числу поколений духов. Кроме того, эта алгебра замыкается только на массовой поверхности; при квантовании подобных теорий возникают высшие (четвертичные и т. д.) взаимодействия духов. Эти особенности теории приводят к необходимости использовать формализм Баталина — Вилковисского, развитый для систем с приводимыми симметриями. Подобный подход использован в работе [7], но формулировка не была полностью ковариантной.

Ковариантная калибровка была найдена совсем недавно, и сразу несколькими группами было проведено полностью ковариантное квантование суперструны. Это сделано в работах группы авторов из Стони Брук [8], Каллош и др. [9, 10], а также Грина и Халла [11] и Перри [12].

Неожиданный поворот произошел в направлении исследования двумерных конформных теорий поля. Как известно, эти теории эквивалентны классическим стационарным решениям теории струн. Первоначально эта идея использовалась с целью систематизировать классические струнные решения в терминах двумерных конформных теорий, которые можно реконструировать, задавая поведение полей на малых расстояниях. Недавно Виттен [13] указал на другую возможность, основанную на связи двумерной теории с топологической трехмерной калибровочной теорией, описываемой действием Черна — Саймонса. Подобная теория замечательна тем, что калибровочно-инвариантные наблюдаемые в ней не зависят от метрики (как и само

действие) и являются топологическими инвариантами. Классификация этих инвариантов осуществляется в терминах математической теории узлов. Топологическая калибровочная трехмерная теория является точно решаемой причем соответствующее гильбертово пространство конечномерно. Оказывается, что между этим пространством и конформными блоками так называемой рациональной конформной теории существует взаимно-однозначное соответствие. Тем самым открывается новый путь анализа двумерных теорий поля, ассоциируемых со струнами.

Интерес к топологическим теориям, проявляемый в последнее время, имеет и более глубокие причины. Поскольку теория струн объединяет гравитационное поле с бесконечным числом других полей, пространство-время становится не фундаментальным, а скорее вторичным понятием. Топологические теории могут служить прообразом моделей квантовой гравитации, в которых гравитация существует без метрики, т. е. “вне” классического пространства-времени. Эта идея весьма привлекательна и в связи с попытками создания квантовой космологии, призванной объяснить рождение Вселенной как пространства-времени. Следует упомянуть и еще одно нетривиальное предсказание топологических трехмерных теорий (не имеющих непосредственного отношения к теории струн). Эти теории приводят к представлению об “анионах” — частицах, обладающих дробной статистикой, что в свою очередь открывает новые возможности в теории конденсированных сред (аномальный квантовый эффект Холла, высокотемпературная сверхпроводимость).

В последние годы много работ посвящено супермембранам как возможной альтернативе струн. Действие для мембраны как двумерного релятивистского протяженного объекта рассматривалось еще в 1962 г. П. Дираком. В многомерных пространствах могут существовать и протяженные объекты большего числа измерений — “ p -браны”, действие для которых является непосредственным обобщением действия струны ($p=1$). Супермембраны ($p=2$) в одиннадцатимерном пространстве приводят к одиннадцатимерной супергравитации, аналогично тому как суперструна ведет к десятимерной супергравитации.

Один из полученных недавно интересных результатов, касающихся супермембран, состоит в том, что супермембраны (в отличие от бозонных мембран) имеют непрерывный спектр масс [14] и для них отсутствует характерная для суперструнных теорий массовая щель (т. е. спектр масс непрерывно начинается от нуля). Некоторого понимания этого факта можно достичь уже на классическом уровне. Дело в том, что неотрицательный потенциал взаимодействия, изначально присутствующий в теории, имеет долины в некоторых направлениях. В этих

направлениях мембрана может вытягиваться до бесконечности без увеличения массы, образуя струноподобную конфигурацию. Состояния мембраны на дне этих долин вырождены. На квантовом уровне это приводит к непрерывному спектру гамильтониана. Для бозонной мембраны эта классическая неустойчивость стабилизируется в квантовой теории благодаря тому, что волновая функция локализуется в долинах; результирующий спектр является дискретным. Но в случае супермембран эффективный потенциал бозонной теории частично погашается вкладом фермионных степеней свободы, и данное свойство теряется.

При подготовке к печати настоящего перевода исправлены отдельные опечатки и неточности. Перевод предисловия и гл. 1—12 выполнен М. А. Рахмановым, перевод гл. 13—17 и приложений — М. С. Волковым.

Д. В. Гальцов, М. А. Рахманов

Литература

1. Уэст П. Введение в суперсимметрию. — М.: Мир, 1989.
2. Введение в супергравитацию. Сб. статей ред. С. Феррары и Дж. Тейлора. — М.: Мир, 1985.
3. Весс Дж., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. — М.: Мир, 1986.
4. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. — М.: Мир, 1990.
5. Carlip S., Nucl. Phys., **284**, 365 (1987).
6. Romans L. J., Nucl. Phys., **B281**, 639 (1987).
7. Kallosh R. E., Phys. Lett., **B195**, 369 (1987).
8. Gates J. et al., Phys. Lett., **B225**, 44 (1989);
Lindström U. et al., Construction of the covariantly quantized heterotic superstring. Preprint ITP-SB-89-38.
9. Kallosh R. E., Phys. Lett., **B224**, 273 (1989); **B225**, 49 (1989).
10. Bergshoeff E., Kallosh R. E., BRST₁-quantization of the Green — Schwarz superstring. Preprint CERN TH 5462/89;
Bars I., Kallosh R. E., OSp(2n/2m) covariant computation in the Green — Schwarz superstring. Preprint CERN TH 541/89.
11. Green M., Hull C., Phys. Lett., **B225**, 57 (1989).
12. Perry M., Covariant quantization of the Green — Schwarz superstring. Preprint DAMTP/R-89/2.
13. Witten E., Comm. Math. Phys., **121**, 351 (1989).
14. De Wit B., Lüsher M., Nikolai H., The supermembrane is unstable. Preprint DESY 88-162, THU-88-43.

Предисловие

Необыкновенная красота теории струн пленила многих физиков-теоретиков современности. Эта теория очаровала даже очень скептически настроенных людей уже известными своими результатами и большими возможностями в перспективе.

Справедливости ради следует сказать, что до сих пор остается неясным, какой вид в конце концов приобретет теория и каким конкретным способом будет осуществляться соответствие теории и реального мира. С другой стороны, мы все же должны отметить, что струны, по всей вероятности, останутся в физике и будут играть главную роль в нашем понимании природы.

Из сказанного выше следует, что существует большая необходимость в книге, которая обеспечит как специалистов, так и наиболее хорошо подготовленных студентов методами быстрого и в то же время глубокого овладения основными принципами теории. Данная книга и является одной из попыток в этом направлении. Она содержит ясное изложение главных принципов струнной теории в той форме, которая, по-видимому, уже не будет претерпевать изменений в ближайшие годы.

Книга возникла на основе лекций, прочитанных Ларсом Бринком и Марком Энно в Центре научных исследований в Сантьяго. Лекции в замкнутом виде охватывают различные, но дополняющие друг друга аспекты основ теории струн.

В лекциях Бринка читатель найдет детальный обзор по квантованию струнных моделей в калибровке светового конуса. Изложение начинается с теории бозонных и спиновых струн, затем рассматриваются суперструны и гетеротическая струна; в каждом случае дается подробная информация о представлении алгебры суперсимметрии в калибровке светового конуса. Основываясь на этом анализе, автор переходит затем к обсуждению взаимодействий и построению полевой теории суперструн.

Лекции Энно содержат подробный калибровочно-инвариантный гамильтонов формализм, тщательно продуманное изложение метода квантования Бекки, Рюэ, Стора и Тютинна как для бозонной, так и для спиновой струн, а также ковариантную формулировку суперструн.

Не говоря громких слов, можно просто сказать, что эти лекции оказались крайне полезными для тех из нас, кто имел удовольствие их посещать. Вместе с нашими сотрудниками и студентами мы рады узнать, что эти лекции будут изданы

отдельным томом. Мы верим, что данная книга долго будет оставаться нужной и интересной.

Профессоры Бринк и Энно были в числе первых, кто посетил наш центр, и мы крайне признательны им за это. Мы благодарим также Джоржа Занелли, Марию Луизу Вальдовинос и Иоланду Флорес за помощь и особенно Рафаэля Розенде за содействие в подготовке рукописи к публикации.

Лекции проводились в рамках программы, субсидированной Фондом Тинкера, и приглашения стали возможными благодаря поддержке со стороны Программы развития ООН и Государственных фондов Бельгии для научных исследований.

Клаудио Тейтельбойм

Сравнительная таблица обозначений, используемых в частях I и II

Между обозначениями, используемыми в частях I и II данной книги, существуют небольшие различия. Данная таблица составлена с целью облегчить читателю переходы от одной части книги к другой.

	Часть I	Часть II
<p>Пространственно-временной индекс</p> <p>Интервал, который пробегает пространственный параметр вдоль замкнутой струны</p> <p>Фермионные осцилляторы в модели Рамона</p> <p>Спиноры по группе $SO(8)$ для суперструны в калибровке светового конуса</p>	$\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, d-1$ $(d = 26 \text{ или } 10)$ $0 \leq \sigma \leq \pi$	$A, B, \dots = 0, 1, \dots, d-1$ $(d = 26 \text{ или } 10)$ $0 \leq \sigma \leq 2\pi$
	$\sigma_{\text{Часть I}} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{Часть II}}$	
	d^μ_m	$(1/\sqrt{2}) \Gamma^A_m$
	S^a	$\sqrt{p^+} \theta^a$

Часть I

Лекции по теории суперструн

Ларс Бринк

Глава 1

Введение

В шестидесятых годах нашего столетия четыре основных взаимодействия — сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное — рассматривались совершенно по-разному. Несмотря на то что методы квантовой теории поля успешно использовались в квантовой электродинамике и теории слабых взаимодействий, для описания сильных взаимодействий применялись совсем другие подходы. Гравитация в то время едва ли могла считаться частью физики элементарных частиц.

Одним из наиболее важных открытий в физике элементарных частиц того времени было обнаружение большого числа адронных резонансов. Для этих резонансов график зависимости спина от квадрата массы распадается на (почти) прямые линии. Это так называемые траектории Редже. Они играют главную роль в теории Редже [1], основанной на аналитичности S -матрицы. В этой теории поведение амплитуд рассеяния при высоких энергиях определяется “полюсами Редже”, которые образуют траектории Редже в кросс-канале. Тот факт, что наряду с определением амплитуд S -матрицы с помощью промежуточных резонансов имеется описание этих амплитуд в терминах полюсов Редже в асимптотическом режиме, стимулировал настойчивые попытки построить дуальные модели, объединяющие оба эти аспекта. Такие модели с необходимостью включали бесконечное число состояний. Наивысшим достижением этих исследований стало открытие дуальной модели Венециано, которая оказалась вполне удовлетворительной моделью для описания рассеяния мезонов. Потребовались еще большие усилия, чтобы понять структуру этой модели более детально. Вскоре выяснилось, что версия этой модели, которая наилучшим образом удовлетворяет эксперименту с теоретической точки зрения, имеет недостатки, такие как существование промежуточных состояний с отрицательной нормой. Однако Вирасоро [4] обнаружил, что при выборе некоторого нефизического (с точки зрения адронной физики) значения для интерсепта ведущей траектории модель приобретает широкую симметрию, соответствующую бесконечномерной алгебре, теперь называемой

алгеброй Вирасоро. В этом случае, как было окончательно доказано Брауэром, а также Годдардом и Торном [5], в модели отсутствуют состояния с отрицательной нормой (хотя и имеется тахионное состояние).

Вскоре после открытия модели Венециано замечательное наблюдение было сделано в работах Намбу, Нильсена и Саскинда [6]. Они показали, что модель описывает рассеяние одномерных объектов — струн. Конечно, попытки построить модели рассеяния протяженных объектов предпринимались и раньше, но все они не имели успеха. Основная трудность заключалась в том, чтобы обеспечить выполнение унитарности. В рамках модели Венециано эта проблема была наконец решена, так что струнная картина рассеяния мезонов казалась весьма привлекательной. При этом многие физики считали, что в модели Венециано не хватает кварков на концах струны.

Отсутствие фермионов также было недостатком модели. Для того чтобы включить фермионы, Рамон [7] расширил алгебру Вирасоро, дополнив ее антикоммутирующими генераторами и заложив тем самым основы суперсимметрии. Немного позднее Невё и Шварц [8] построили другую бозонную модель, тоже реализующую подобную симметрию. Наконец, было показано [9], что введенные Рамоном фермионы могут быть включены в модель Невё—Шварца, в результате чего возникает единая модель, включающая и бозоны, и фермионы.

Оказывается, что такие модели обладают поразительным свойством. Теория для них может быть непротиворечиво сформулирована (если не принимать во внимание тахионы) только при особых размерностях пространства-времени, называемых “критическими размерностями”. Для модели Венециано критическая размерность $d=26$, а для модели Рамона—Невё—Шварца $d=10$. Эти факты получили естественное объяснение в работе Годдарда и др. [10], посвященной квантованию релятивистской струны. Для таких объектов действие, пропорциональное площади поверхности, которую замечает струна при своем движении, было предложено Намбу [11], а также позднее Хара и Гото [12]. Квантование струны было осуществлено двумя путями. В первом случае это ковариантное квантование, воспроизводящее описание физических состояний в модели Венециано. Во втором подходе квантование проводится в калибровке светового конуса, в которой все состояния имеют положительную норму, но алгебра Лоренца реализуется нелинейно. Ограничение на размерность пространства-времени $d=26$ возникает в этом случае как необходимое условие того, чтобы алгебра Лоренца оказалась надлежащим образом замкнутой. Простое объяснение критической размерности было предложено

в работе [13], в которой струна рассматривается как бесконечный набор гармонических осцилляторов. Каждый осциллятор при квантовании дает вклад в флуктуацию энергии вакуума. Таким образом, вакуумная энергия осцилляторов представляется бесконечным рядом, суммирование которого вместе с перенормировкой скорости света приводит к появлению критических размерностей. Насколько нам известно, это было первое указание на то, что квантовая теория требует конечного значения скорости света. Но вопрос о квантовании струны в случае произвольной размерности долгое время оставался нерешенным. В конце концов по прошествии около десяти лет эта проблема была решена Поляковым [14]. Он построил одну из возможных схем квантования, которая, как оказалось, дает возможность формулировать различные теории струн в четырех измерениях. Такая схема очень похожа на частный случай КХД в пределе бесконечного числа цветов.

Обобщение действия Намбу на случай «спиновой струны», которая соответствует модели Рамона — Невё — Шварца, оказывается не простым. Дело в том, что такие струны должны содержать грассмановы степени свободы на классическом уровне, а введенное выше понятие площади не обобщается на случай поверхностей с антикоммутирующими степенями свободы. Трудность пропадает, если считать, что теория струн является общей теорией относительности в двумерном пространстве-времени [15], которое также называют мировым листом (мировой поверхностью). С открытием четырехмерной супергравитации появилась возможность рассматривать теорию спиновой струны как теорию супергравитации на двумерном мировом листе. Существует и другая интерпретация теории спиновой струны в терминах двумерных σ -моделей. Основные свойства спиновой струны [16] были получены задолго до того, как стало известно общее действие для нее. Эти свойства явно указывали на необходимость двумерной суперсимметрии и единственности критической размерности $d = 10$.

Так как модель спиновой струны, очевидно, не пригодна для описания физики адронов, естественно было искать новые струнные модели. Тот факт, что данная модель основана на двумерной суперсимметрии, приводит к вопросу о возможности расширения этой симметрии. И действительно, она может быть расширена до симметрии, включающей группу $SO(N)$ [17]. К сожалению оказалось, что только модель с группой $SO(2)$ свободна от духов, но в этом случае критическая размерность $d = 2$, поэтому такая модель не представляет интереса для физики элементарных частиц [18].

Исходная модель Венециано содержала S -матричные амплитуды в борновском приближении. Когда были предприняты попытки учесть петлевые поправки к струнным амплитудам, стало ясно, что некоторые петлевые диаграммы содержат новый набор полюсов [19]. На самом деле новые полюса появляются только при $d = 26$ (в других размерностях появляются разрезы, нарушающие унитарность), и это было первое указание на важность критической размерности. Новая траектория имеет квантовые числа вакуума, а также в два раза больший интерсепт и половинный наклон по сравнению с ведущей " ρ -траекторией". Все эти характеристики являются признаками померона. Наличие этой новой траектории в модели ранее не было известно, и это вызвало большой интерес к ней. В рамках струнной картины нетрудно было понять происхождение нового набора состояний. А именно в отличие от траекторий, возникающих при вычислении древесных амплитуд, которые соответствуют открытым струнам, новые траектории соответствуют замкнутым струнам. Поэтому в струнных взаимодействиях естественно может возникнуть такая ситуация, при которой два конца одной струны соединяются и образуется замкнутая струна.

После того как появилась новая траектория, стал вопрос о том, как понизить квантовые числа ρ - и померонной траекторий до их физических значений, не изменив при этом отношение их интерсептов, чтобы модель оставалась последовательной. Модель Рамона — Невё — Шварца не решила эту проблему, и фактически проблема до сих пор остается нерешенной. Неудачи, которыми заканчивались попытки решить эту проблему, привели к тому, что интерес к струнным моделям для описания адронной физики постепенно сошел на нет приблизительно тринадцать лет назад. Но многие идеи, которые впервые появились в дуальных моделях, повлияли на современное понимание калибровочных теорий и адронной физики, основанной на КХД; например, это вихревые линии Нильсена — Ольсена [20]. Последние были предложены в качестве примера струноподобных решений в обычной теории поля и привели к большим успехам в области непертурбативных аспектов калибровочных теорий.

В последовательной модели Венециано " ρ -траектория" должна иметь интерсепт, равный единице; другими словами, частицы спина 1 в этой модели должны быть безмассовыми. Невё и Шерк [21] вычислили амплитуды рассеяния для таких состояний в пределе, когда наклон траектории стремится к нулю (т. е. когда массы всех массивных состояний стремятся к бесконечности), и заметили, что в этом случае струнная S -матрица точно совпадает с S -матрицей теории Янга — Миллса.

Позднее Йоней [22], а также Шерк и Шварц [23] показали, что безмассовая частица спина 2, лежащая на “померонной траектории”, в пределе нулевого наклона взаимодействует таким образом, что может быть отождествлена с гравитоном. После этого Шерк и Шварц [23] сделали смелое предположение, что струнные модели следует рассматривать как единые модели, включающие гравитацию! Струны характеризуются фундаментальной длиной L [$\sim (\alpha')^{1/2} \sim (T)^{-1/2}$, где α' — наклон траектории Редже, а T — натяжение струны]. В случае адронной физики L выбирается порядка 10^{-13} см. Если же считать кванты струны фундаментальными квантами, включающими гравитацию и поля Янга — Миллса, то естественным масштабом длины в этом случае становится длина Планка и $L \sim 10^{-33}$ см.

Но даже если рассматривать модель Рамона — Невё — Шварца с этой новой точки зрения, т. е. в качестве единой модели, включающей гравитацию, она все еще не является последовательной моделью. Дело в том, что в спектре модели содержатся тахионы, и, следовательно, детальное изучение некоторых взаимодействий, таких как, например, взаимодействия с состоянием спина $3/2$ в замкнутой струне, выявило бы противоречия. Льюэци, Шерк и Олив [24] показали, однако, что тахионы могут быть устранены из модели, если рассматривать бозоны только с положительной “ G -четностью”. Хотя этот факт был известен и ранее, но накладывать такое условие на бозоны было нежелательно, поскольку в этой модели (содержащей тахионы) “пион” имел отрицательную “ G -четность”. Если же отказаться от стремления вычислять адронные амплитуды и рассматривать модель с точки зрения единой теории, то такой шаг становится вполне естественным. Более того, если потребовать, чтобы фермионы удовлетворяли одновременно и вейлевскому, и майорановскому условиям, что возможно, если $d = 10$, то, как было показано [24], число бозонных и фермионных степеней свободы становится равным, указывая на суперсимметричность спектра в теории. Суперсимметрия этой новой модели была окончательно доказана Грином и Шварцем [25]. Такие “суперструнные теории” были затем развиты в серии работ Грина и Шварца [26] частично в сотрудничестве с автором данной книги. Полученные новые суперсимметричные модели фактически свободны от всех недостатков, присутствующих старым моделям. Существуют два типа новых моделей. Модель типа I, соответствующая модели Рамона — Невё — Шварца с упомянутыми выше ограничениями, содержит как открытые, так и замкнутые струны и в пределе нулевого наклона (или бесконечного натяжения струны) соответствует

$N = 1$ -супергравитации, взаимодействующей с теорией Янга — Миллса с $N = 1$ (для $d = 10$). Модели типа II описывают только замкнутые струны и соответствуют $N = 2$ -супергравитации для $d = 10$.

Было доказано, что модели типа II конечны в однопетлевом приближении, тогда как модели типа I, по-видимому, все являются перенормируемыми в однопетлевом приближении. Эти факты выглядели очень перспективными для квантовой теории поля. Но модель типа I, а также одна из моделей типа II (а именно модель типа IIб) содержат фермионы только одной киральности, и это должно приводить к аномалиям. Тем не менее было показано, что модель типа IIб свободна от аномалий благодаря впечатляющему сокращению вкладов в аномалию, возникающих от киральных фермионов и от антисимметричного тензора четвертого ранга [27]. Аналогичного механизма сокращения аномалий нельзя было ожидать для струн типа I. Но явные вычисления, проведенные Грином и Шварцем [28], показали, что суперструна типа I с калибровочной группой $SO(32)$ свободна от аномалий (на однопетлевом уровне)! Поскольку аномалии возникают из-за наличия безмассовых киральных полей, Грин и Шварц смогли понять сокращение аномалий и в теории супергравитации, которая соответствует суперструне типа I. Они также показали, что тот же механизм работает и в случае калибровочной группы $E_8 \times E_8$.

Но теория струн типа I с такой калибровочной группой не может быть построена [29]. Позднее Гросс и др. [30] показали, что можно построить новую струнную модель (модель гетеротической струны) путем объединения суперструны с бозонной струной. Такое построение жестко фиксирует выбор калибровочной группы, а именно $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$!

Таким образом, мы проследили долгий путь от мира адронной физики до почти однозначной (на сегодняшний день) единой теории всех взаимодействий. На этом пути было найдено довольно много новых и важных понятий, таких как, например, суперсимметрия. В ретроспективе детальное изучение любого из таких понятий должно привести к теории струн. Эйнштейновская гравитация, а также ее супергравитационные обобщения имеют одну размерную константу связи. Такие теории перенормируемы. Если они квантуются по обычным правилам, то единственный способ сделать эти теории последовательными — это добиться, чтобы все расходимости сокращались. Для эйнштейновской гравитации действительно найдены расходимости в двухпетлевом приближении [31], тогда как для супергравитационных теорий было показано, что в этом приближении они имеют конечную S -матрицу. Но возможности

того, что такая конечность сохраняется во всех порядках теории возмущений, не существует [32]. Одним из способов преодоления этой трудности является введение другой размерной постоянной. Таким параметром является натяжение струны, и это естественно приводит к струнным теориям.

Теория струн может быть описана бесконечным набором гармонических осцилляторов. При квантовании такая система приводит к бесконечным вакуумным флуктуациям. В случае свободной струны эти бесконечности могут быть перенормированы. Но взаимодействие двух струн (протяженных объектов) должно быть локальным, чтобы выполнялся принцип причинности, в то время как бесконечные вакуумные флуктуации будут приводить к нарушению локальности [32]. Благодаря суперсимметрии, которая требует равного числа бозонных и фермионных мод, бесконечности удастся сократить. Таким образом, в теории струн суперсимметрия действительно является необходимой.

Материал, содержащийся в следующих главах, изложен не в соответствии с путем исторического развития, а начинается с рассмотрения свободных струн и заканчивается изложением различных взаимодействий. В этих главах описаны все основные понятия и идеи теории струн, но новейшее развитие затронуто лишь вкратце. Другие подходы к теории струн и обзор всех современных аспектов читатель найдет в литературе [34].

Бозонные струны

Описание точечных частиц лучше всего начать со свободной бесспиновой частицы. Такая частица движется вдоль однопараметрической траектории $x^\mu(\tau)$. Классическое действие, описывающее движение точечной частицы, не должно зависеть от того, каким образом задана параметризация траектории, и выбирается пропорциональным длине пути, пройденному частицей (используется пространственноподобная метрика)

$$S = m \int_{s_i}^{s_f} ds = m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\dot{x}^2(\tau)}, \quad (2.1)$$

где m — масса частицы и $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$. Инвариантность действия (2.1) относительно репараметризации приводит к появлению аналога гравитации. Считая, что $x^\mu(\tau)$ — набор скалярных полей в одномерном пространстве, мы можем ввести метрику $g \equiv g_{\tau\tau}$ и записать действие так же как и для скалярных полей, взаимодействующих с гравитацией в четырех измерениях:

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{g} (g^{-1} \dot{x}^2 - m^2). \quad (2.2)$$

(Заметим, что массовый член входит в это действие как космологическая постоянная.)

Из действия (2.2) можно исключить метрику g . Для этого подставим решение уравнения движения для g в действие (2.2) и получим выражение (2.1); таким образом, действия (2.1) и (2.2) эквивалентны, по крайней мере на классическом уровне. Выражение (2.2) в действительности является более общим, так как допускает предел $m = 0$.

Аналогично можно построить действие для свободно движущейся струны. В простейшем случае мы будем описывать струну ее d -мерными координатами Минковского $x^\mu(\sigma, \tau)$. Параметры σ и τ задают точки на мировом листе, которые струна замечает при своем движении; σ — координата вдоль пространственноподобного направления, а τ — вдоль времениподобного.

В качестве действия для струны можно взять обобщение как выражения (2.1), так и выражения (2.2). Мы рассмотрим второй способ. Введем метрику на мировом листе $g_{\alpha\beta}$; обратную метрику обозначим $g^{\alpha\beta}$. Тогда репараметризационно-инвариантное действие записывается в виде [15]

$$S = -\frac{1}{2}T \int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_1}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu, \quad (2.3)$$

где $g = \det g_{\alpha\beta}$, а T — постоянный множитель (необходимый для того, чтобы поле X^μ имело размерность длины), который оказывается равным натяжению струны.

Симметрии действия (2.3) — это глобальная пуанкаре-инвариантность

$$\delta x^\mu = l^\mu_{\nu} x^\nu + a^\nu, \quad \delta g_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.4)$$

локальная репараметризационная инвариантность

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \xi^\alpha \partial_\alpha x^\mu, \\ \delta g_{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta \xi^\gamma g_{\alpha\gamma}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

а также локальная вейлевская инвариантность

$$\delta g_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}, \quad \delta x^\mu = 0. \quad (2.6)$$

На классическом уровне можно исключить $g_{\alpha\beta}$ из выражения (2.3), решив уравнения движения для $g_{\alpha\beta}$ алгебраически и подставив решение обратно в действие. Полученное таким образом выражение является действием Намбу — Хара — Гото [11, 12] и пропорционально площади мирового листа (по определению репараметризационно-инвариантное выражение). Для исключения поля $g_{\alpha\beta}$ на квантовом уровне потребуются вычислить континуальный интеграл. В общем случае остается “лиувиллевская мода” (нарушающая вейлевскую инвариантность) за исключением особого случая $d = 26$ [14]. Вопрос о том, можно ли построить разумную теорию бозонных струн в случае $d < 26$, до сих пор не решен полностью. В последующих главах части I мы будем рассматривать только теории струн в их критических размерностях.

Заметим, что на этом этапе мы не можем ввести космологическую постоянную, если мы требуем вейлевской инвариантности (2.6).

Квантование системы будем проводить стандартным образом, используя гамильтонов формализм. Сначала вычислим

канонически сопряженные импульсы:

$$p^{\alpha\beta} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{g}_{\alpha\beta}} = 0, \quad (2.7)$$

$$p_\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}^\mu} = -T \sqrt{-g} g^{\alpha 0} \partial_\alpha x_\mu. \quad (2.8)$$

Равенства (2.7) образуют набор первичных связей

$$\psi^{\alpha\beta} = p^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.9)$$

Вычисляя плотность гамильтониана, находим

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2g^{00}} \left[(-g)^{-1/2} \frac{1}{T} p^2 + 2g^{01} x' \cdot p + T (-g)^{-1/2} |x'^2| \right], \quad (2.10)$$

где $x' = \partial x / \partial \sigma$.

Следуя методу Дирака [35] квантования систем со связями, определим полный гамильтониан

$$H = \int_0^\pi d\sigma (\mathcal{H} - A_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}), \quad (2.11)$$

где $A_{\alpha\beta}$ — произвольные коэффициенты. Введем скобки Пуассона

$$\{g_{\alpha\beta}(\sigma), p^{\gamma\delta}(\sigma')\}_\tau = \delta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.12)$$

$$\{x^\nu(\sigma), p_\mu(\sigma')\}_\tau = \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.13)$$

Если теперь исследовать зависимость связей от времени, вычисляя скобки Пуассона H и $p^{\alpha\beta}$, то мы найдем две вторичные связи:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T^2} p^2 + x'^2 \right) = 0, \quad (2.14)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{T} x' \cdot p = 0. \quad (2.15)$$

Полный гамильтониан теперь содержит сумму всех связей. Следующий шаг — проверка алгебры связей:

$$\{\psi^{\alpha\beta}, \phi_i\} = 0, \quad (2.16)$$

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_1(\sigma')\} = \frac{1}{T} [\phi_2(\sigma) + \phi_2(\sigma')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.17)$$

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_2(\sigma')\} = -\frac{1}{T} [\phi_1(\sigma) + \phi_1(\sigma')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.18)$$

$$\{\phi_2(\sigma), \phi_2(\sigma')\} = \frac{1}{T} [\phi_2(\sigma) + \phi_2(\sigma')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.19)$$

Алгебра оказывается замкнутой, следовательно, все связи первого класса. Квантование теперь можно провести непосредственно, полагая $\{A, B\} \rightarrow -(i/\hbar) [A, B]$.

На этой стадии существуют два альтернативных подхода к изучению квантовой теории. Первый подход — ковариантное квантование, при котором выбирается ортогональная калибровка

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.20)$$

Эта калибровка позволяет исключить не все условия связи, а лишь $\psi^{\alpha\beta}$. В этом случае гамильтониан имеет вид (для простоты положим $T = 1/\pi$)

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma [\pi^2 p^2 + x'^2], \quad (2.21)$$

$$p^\mu(\sigma) = \frac{1}{\pi} \dot{x}^\mu(\sigma). \quad (2.22)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0. \quad (2.23)$$

Мы наложили такие граничные условия, чтобы при выводе уравнений движения не возникали поверхностные члены. Тогда для граничных условий существует две возможности.

1. $x'^\mu(\sigma = 0) = x'^\mu(\sigma = \pi) = 0$ в случае открытых струн.

2. x^μ — периодическая функция от σ в случае замкнутых струн.

Ковариантное квантование приводит к необходимости использования гильбертова пространства состояний с индефинитной метрикой, которая возникает из коммутатора

$$[x^\mu(\sigma, \tau), p_\nu(\sigma', \tau)] = i\delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.24)$$

Решение уравнений движения в случае открытых струн дается рядом Фурье:

$$x^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + p^\mu \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} \cos n\sigma e^{-in\tau}. \quad (2.25)$$

Канонические коммутационные соотношения (2.24) приводят к виду

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n, 0} \eta^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

т. е. мы имеем бесконечный набор гармонических осцилляторов, у которых временная компонента операторов рождения α_{-n}^μ ($n > 0$) генерирует состояния с отрицательной нормой.

Оставшиеся условия связи (2.14), (2.15) должны накладываться теперь на состояния в гильбертовом пространстве. Перепишем эти связи в виде

$$\phi_{\pm} = \phi_1 \pm \phi_2. \quad (2.27)$$

Подставляя в (2.27) решения (2.25), находим

$$\phi_{\pm} = \phi(\tau \pm \sigma), \quad (2.28)$$

где

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{\mu} e^{-in\sigma} \right)^2 \quad (2.29)$$

и $\alpha_0^{\mu} \equiv p^{\mu}$.

Два условия связи (2.28), наложенные при $\tau = 0$, полностью определяются одной функцией $\phi(\sigma)$, причем $-\pi \leq \sigma \leq \pi$. Рассмотрим фурье-моды функции $\phi(\sigma)$

$$L_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{in\sigma} \phi(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m, \quad (2.30)$$

в частности

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.31)$$

В квантовом случае L_n становятся операторами, и необходимо нормальное упорядочение, чтобы L_n были хорошо определены. Тогда эти операторы удовлетворяют алгебре Вирасоро (центральный заряд которой впервые был получен Вейсом [36])

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{d}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m, 0}. \quad (2.32)$$

Вакуумное состояние в гильбертовом пространстве определяется следующим образом:

$$\alpha_n^{\mu} |0\rangle = 0, \quad n > 0.$$

Связи накладываются так же, как при квантовании КЭД по методу Гупты — Блейлера. А именно потребуем

$$\langle \text{физ} | L_n | \text{физ}' \rangle = 0, \quad n \neq 0, \quad (2.33)$$

т. е.

$$L_n | \text{физ} \rangle = 0, \quad n > 0.$$

Для $n = 0$ потребуем

$$(L_0 - 1) | \text{физ} \rangle = 0. \quad (2.34)$$

Ниже мы рассмотрим это условие более подробно.

Условия (2.33) и (2.34) на физические состояния, как было показано Вирасоро [4], совпадают с условиями, которым удовлетворяют физические состояния в модели Венециано.

Альтернативный подход состоит в том, чтобы проводить квантование в калибровке светового конуса [10]. В этом случае калибровочные симметрии фиксируются полностью. Введем изотропные и поперечные координаты:

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 \pm x^{d-1}), \quad x^i, \quad i = 1, \dots, d-2, \quad (2.35)$$

и наложим калибровку (2.20), а также условия

$$x^+(\sigma, \tau) = x^+ + p^+ \tau, \quad (2.36)$$

$$\int_0^{\sigma} d\sigma' p^+(\sigma', \tau) = \frac{1}{\pi} p^+ \sigma. \quad (2.37)$$

Условия калибровки (2.36) и (2.37) означают, что все точки струны находятся в одном и том же "конусном" времени x^+ и имеют одно и то же значение проекции импульса на временное направление p^+ .

Теперь условия связи (2.14) и (2.15) могут быть полностью разрешены:

$$\dot{x}^- = \frac{1}{2p^+} (\dot{x}^{i2} + x'^{i2}), \quad (2.38a)$$

$$x'^- = \frac{1}{p^+} \dot{x}^i x'^i. \quad (2.38b)$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, тогда координата $x^-(\sigma, \tau)$ будет полностью выражаться через поперечные координаты $x^i(\sigma, \tau)$, а также p^+ и постоянную интегрирования x^- . Уравнения движения теперь имеют вид

$$\ddot{x}^i - x''^i = 0. \quad (2.39)$$

Динамика струны в калибровке светового конуса может быть полностью описана действием

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\sigma \int d\tau \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} x^i \partial_{\beta} x^i. \quad (2.40)$$

Это действие, хотя и не является лоренц-ковариантным, должно обладать пуанкаре-инвариантностью. В данном случае преобразования группы Пуанкаре реализованы на координатах x^i нелинейно. Прежде чем выписывать эти преобразования,

рассмотрим динамическое содержание действия (2.40). Плотность канонически сопряженного момента

$$p^i(\sigma, \tau) = \frac{1}{\pi} \dot{x}^i(\sigma, \tau). \quad (2.41)$$

Как и прежде, возможны два выбора граничных условий:

1. $x'^i(\sigma=0, \pi) = 0$; это случай открытых струн, и решение уравнений движения имеет вид

$$x^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i \cos n\sigma e^{-in\tau}. \quad (2.42)$$

2. x^i — периодическая функция от σ ; это случай замкнутых струн с решением в виде

$$x^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^i e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in(\tau+\sigma)}). \quad (2.43)$$

Квантование теории осуществляется непосредственно:

$$[x^i(\sigma, \tau), p^j(\sigma', \tau)] = i\delta^{ij}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.44)$$

Параметры α_n^i ($\tilde{\alpha}_n^i$) теперь становятся операторами, удовлетворяющими следующим коммутационным соотношениям:

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n\delta_{n+m, 0}\delta^{ij}, \quad (2.45)$$

$$[\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] = n\delta_{n+m, 0}\delta^{ij}. \quad (2.46)$$

Мы снова получаем бесконечный набор гармонических осцилляторов. Гильбертово пространство состояний строится на основе вакуума $|0\rangle$, который подчиняется условиям

$$\alpha_n^i |0\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (2.47a)$$

$$\tilde{\alpha}_n^i |0\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (2.47b)$$

Очевидно, гильбертово пространство содержит только состояния с положительной нормой.

Выражения для генераторов алгебры Пуанкаре получаются из ковариантных выражений подстановкой в них калибровочных условий (2.36), (2.37), а также решения уравнения (2.38), и имеют вид [10]

$$p^+ = p^+, \quad (2.48a)$$

$$p^i = \int_0^\pi p^i(\sigma) d\sigma, \quad (2.48b)$$

$$p^- = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \dot{x}^- = \frac{1}{2\pi p^+} \int_0^\pi d\sigma [\pi^2 p^{i^2} + x'^{i^2}], \quad (2.48\text{в})$$

$$j^{ij} = \int_0^\pi d\sigma (x^i p^j - x^j p^i), \quad (2.49\text{а})$$

$$j^{+i} = \int_0^\pi d\sigma (x^+ p^i - x^i p^+), \quad (2.49\text{б})$$

$$j^{+-} = x^+ p^- - x^- p^+, \quad (2.49\text{в})$$

$$j^{-i} = \int_0^\pi d\sigma [x^-(\sigma) p^i(\sigma) - x^i(\sigma) p^-(\sigma)], \quad (2.49\text{г})$$

где $x^-(\sigma)$ — решение уравнения (2.38б), а $p^-(\sigma)$ — подынтегральное выражение в (2.48в).

На квантовом уровне произведения операторов в выражениях (2.48), (2.49) необходимо симметризовать, чтобы получить эрмитовы генераторы. Следствие такой симметризации может сказаться только на вычислении коммутатора $[j^{i-}, j^{j-}] = 0$, так как оператор j^{i-} — кубичный по полям. Явные вычисления показывают, что это коммутационное соотношение сохраняется на квантовом уровне только при $d = 26$ [10] (критическая размерность).

Подставляя решение (2.42) в выражение для p^- (2.48в), получаем

$$p^- = \frac{p^{i^2}}{2p^+} + \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i, \quad (2.50)$$

откуда

$$p^2 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = -m^2. \quad (2.51)$$

Введем размерную постоянную $\alpha' = \frac{1}{2\pi} T$ — наклон траектории Редже. Тогда формула для квадрата массы с правильной размерностью будет иметь вид

$$\alpha' m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i. \quad (2.52)$$

Следовательно, квадрат массы получается суммированием бесконечного ряда “энергий гармонических осцилляторов” [15]. В квантовом случае каждый осциллятор дает вклад в энергию за счет флуктуаций вакуума (благодаря вышеупомя-

нутой симметризации). Тогда низший массовый уровень определяется формулой

$$\alpha' m_0^2 = \frac{d-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (2.53)$$

Очевидно, эта сумма расходится и ее нужно регуляризовать. Заметим, что этот ряд похож на ряд, которым определяется ζ -функция Римана [37]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \text{Re } s > 1. \quad (2.54)$$

Эта функция обладает тем свойством, что может быть продолжена аналитически до точки $s = -1$, причем

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (2.55)$$

Используя это равенство, бесконечную сумму (2.53) можно регуляризовать, и она принимает значение

$$\alpha' m_0^2 = -\frac{d-2}{24}. \quad (2.56)$$

Следовательно, в выражении для p^- необходимо учитывать этот вклад. Так как следующее состояние, лежащее на траектории, является векторным состоянием с $d-2$ степенями свободы и поэтому должно быть безмассовым, мы снова находим, что $d=26$. Этот факт объясняет также появление (-1) в условии (2.34).

Существует также и более непосредственный способ [15] получения этого результата добавлением контрчленов к действию (2.40), что равносильно перенормировке скорости света (которая, конечно, является еще одним параметром теории). Замечательно то, что именно на квантовом уровне мы получаем требование конечности скорости света.

Наиболее важное следствие формулы (2.56) заключается в том, что *низшим* массивным состоянием в теории является *тахсион*. Фактически это означает, что теория взаимодействий, построенная на основе данной теории бозонной струны, не имеет смысла. Кроме того, поскольку тахион является скалярным состоянием, не содержащим возбуждений более высоких мод, на наш взгляд кажется маловероятным, что существует непротиворечивое усечение, приводящее к теории без тахиона.

Применим теперь наши рассуждения к замкнутым струнам. Используя решение в виде (2.43), получаем

$$\frac{\alpha'}{2} m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i) \equiv N + \tilde{N}. \quad (2.57)$$

И в этом секторе мы также получаем тахион. Для замкнутых струн мы получаем еще одно ограничение. Рассмотрим снова выражение (2.386). Интегрируя его в пределах от 0 до σ , получим выражение для $x^-(\sigma)$. Хотя $x^-(\sigma)$ зависит от x^i , мы должны считать, что $x^-(\sigma)$ является одной из компонент $x^\mu(\sigma)$ и, следовательно, должна быть периодической. Тогда

$$\int_0^\pi d\sigma x'^- = 0 = \frac{1}{p^+} \int_0^\pi d\sigma \dot{x}^i x'^i = \frac{\pi}{p^+} (N - \tilde{N}), \quad (2.58)$$

т. е. на классическом уровне $N = \tilde{N}$, а на квантовом уровне мы накладываем это условие на физические состояния.

Алгебра Пуанкаре, задаваемая генераторами (2.48), (2.49), а также условием связи (2.386), содержит всю информацию о бозонных струнах. Этот факт является типичным для калибровки светового конуса. Построив нелинейное представление алгебры Пуанкаре, мы знаем всю динамику системы, так как гамильтониан p^- является одним из генераторов. К сожалению, до сих пор не ясно, как непосредственно построить генераторы дедуктивным путем вместо того, чтобы выводить их из ковариантной теории.

Рассматривая динамику свободной бозонной струны, мы нашли, что в такой теории гораздо больше ограничений, чем в соответствующей теории точечных частиц. Несомненно, что это является весьма желательным свойством теории, так как опыт, который мы извлекли из современных теорий калибровочных полей, описывающих точечные частицы, состоит в том, что целые классы таких теорий, по-видимому, являются теоретически согласованными и только эксперименты могут указать, какие из теорий имеют отношение к действительности. Теории струн позволяют надеяться на то, что только одна модель будет последовательной, эта модель тогда и будет описывать действительность!

Спиновые струны

Представление алгебры Пуанкаре, полученное в предыдущей главе, приводит к непоследовательной теории. Чтобы получить последовательную теорию, нужно так изменить выражение для p^- (2.50), чтобы не возникало тахионов. Наиболее простым способом это можно сделать, если ввести набор антикоммутирующих гармонических осцилляторов таким образом, чтобы их вакуумные флуктуации компенсировали вакуумные флуктуации коммутирующих осцилляторов.

Прежде всего нужно решить, в каком представлении поперечной группы симметрии $SO(d-2)$ выбрать новые осцилляторы. Координаты x^μ принадлежат векторному представлению. Мы всегда можем выбрать это же представление и для нового набора координат. Так мы и сделаем сначала, но мы должны помнить, что при некоторых значениях $d-2$ существуют и другие представления с той же размерностью, что и векторное представление.

Следовательно, рассмотрим набор антикоммутирующих гармонических осцилляторов d^i , удовлетворяющих условию

$$\{d_m^i, d_n^j\} = \delta_{n+m, 0} \delta^{ij}. \quad (3.1)$$

Предположим, что соответствующая массовая формула в случае открытых струн имеет вид

$$\alpha' p^2 = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n d_{-n}^i d_n^i \right); \quad (3.2)$$

тогда мы можем вывести отсюда выражение для p^- . Это выражение можно записать в координатном базисе, если мы введем разложения по модам

$$\lambda^{1i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^i e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (3.3)$$

$$\lambda^{2i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^i e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad (3.4)$$

такие, что

$$\{\lambda^{Ai}(\sigma, \tau), \lambda^{Bj}(\sigma', \tau)\} = \pi \delta^{AB} \delta^{ij} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.5)$$

Тогда формула для генератора p^- (на классическом уровне) имеет вид

$$p^- = \frac{1}{2\pi p^+} \int_0^\pi d\sigma (\pi^2 p^{i2} + x'^{i2} - i\lambda^{1i}\lambda'^{1i} + i\lambda^{2i}\lambda'^{2i}). \quad (3.6)$$

Прежде чем мы построим остальные генераторы, рассмотрим динамику, которая следует из выражения (3.6).

Поскольку

$$p^- \sim i \frac{\partial}{\partial x^+} = \frac{1}{p^+} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \sim \frac{1}{p^+} H,$$

соответствующее действие имеет вид

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^i + i\bar{\lambda}^i \rho^\alpha \partial_\alpha \lambda^i], \quad (3.7)$$

где $\lambda^{1i}, \lambda^{2i}$ объединены в двухкомпонентный спинор и использованы 2×2 -матрицы Дирака ρ^α в майорановском представлении. В последовательной теории поверхностные члены, которые возникают при варьировании выражения (3.7), должны быть равны нулю. Мы получим отсюда граничные условия для λ^i , которые в случае открытых струн имеют вид

$$\lambda^{1i}(0, \tau) = \lambda^{2i}(0, \tau), \quad (3.8)$$

$$\lambda^{1i}(\pi, \tau) = \begin{cases} \lambda^{2i}(\pi, \tau), \\ -\lambda^{2i}(\pi, \tau). \end{cases} \quad (3.9a)$$

$$(3.9b)$$

Оказывается, что существуют две возможности — (3.9a) и (3.9b). В первом случае граничные условия и уравнения движения приводят к решениям в виде (3.3) и (3.4). Мы знаем, что в этом секторе не существует тахионов. Во втором случае мы приходим к разложениям

$$\lambda^{1i} = \sum_r b_r^i e^{-ir(\tau-\sigma)} \quad (3.10)$$

$$\lambda^{2i} = \sum_r b_r^i e^{-ir(\tau+\sigma)}, \quad (3.11)$$

в которых индекс r пробегает все полуцелые значения. Осцилляторы b_r^i удовлетворяют антикоммутиационному соотношению

$$\{b_r^i, b_s^j\} = \delta_{r+s, 0} \delta^{ij}. \quad (3.12)$$

Условие массовой поверхности (на классическом уровне) в этом случае записывается в виде

$$\alpha' m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r}^i b_r^i. \quad (3.13)$$

Вычисление вкладов вакуумных флуктуаций дает¹⁾

$$\begin{aligned} \alpha' m_0^2 &= \frac{d-2}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{d-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{1}{2} + 1 \right) = - \frac{d-2}{16} \end{aligned} \quad (3.14)$$

(в последнем выражении расходящийся ряд перенормирован). Мы снова получаем тахион! Следовательно, этот сектор модели является нефизическим, и если на основе такой модели построить теорию взаимодействий, то в ней возникнут противоречия.

Введенные только что состояния, которые порождаются осцилляторами d и b , а также α -осцилляторами, фактически образуют спектр модели Рамона — Невё — Шварца [7, 8]. Те состояния, которые построены из d -осцилляторов, ведут себя как фермионные и образуют сектор Рамона, тогда как состояния, построенные из b -осцилляторов, которые являются бозонами, образуют сектор Невё — Шварца. В модели, содержащей и фермионы, и бозоны, должны присутствовать оба сектора.

Существует метод усечения спектра, приводящий к теории без тахиона. Такой метод, как было показано [24], остается непротиворечивым и при учете взаимодействий. Рассмотрим проектор

$$P = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{\sum b_{-r} b_r}]. \quad (3.15)$$

Требую, чтобы этот проектор обращал в нуль физические состояния,

$$P | \text{физ} \rangle = 0, \quad (3.16)$$

получаем спектр масс без тахиона. Ввести последовательно в теорию взаимодействие можно, если, кроме того, потребовать, чтобы спиноры были майорана-вейлевскими (так как критическая

¹⁾ Используется формула: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^{-s} = (2^s - 1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. — Прим.

размерность равна 10 , то такой выбор возможен). Это приводит к суперструнам, теория которых излагается в гл. 4.

Можно построить операторы алгебры Пуанкаре и показать, что на квантовом уровне алгебра замыкается только в том случае, если $d = 10$. Мы не будем приводить здесь формулы для генераторов, а отложим обсуждение этого до следующей главы.

В случае замкнутых струн существуют также два сектора, которые определяются тем, какие выбраны граничные условия. Первый сектор получается, если λ выбираются периодическими по σ . Это приводит к двум наборам осцилляторов d_n^i и \tilde{d}_n^i , индексы у которых принимают целочисленные значения. Второй сектор возникает, если считать, что λ — антипериодические функции σ . В этом секторе также существует два набора осцилляторов b_r^i и \tilde{b}_r^i , но с индексами r , пробегающими полуцелые числа. Второй сектор содержит тахион. Можно также получить секторы, состоящие из осцилляторов d_n^i и \tilde{b}_r^i или из \tilde{d}_n^i и b_r^i .

До сих пор мы рассматривали спиновую струну в калибровке светового конуса. Конечно, этого вполне достаточно, как мы видели, но часто бывает полезно иметь ковариантный формализм. Действительно, обобщение ковариантного действия (2.3) на случай спиновой струны также существует. Такое действие было построено по аналогии с супергравитацией [15]. Рассматривается двумерная супергравитация (на мировом листе с координатами σ, τ), которая содержит репер V_a^a , связанный с метрикой $g_{\alpha\beta}$ стандартным образом, и майорановский спинор ψ_α — поле Рариты — Швингера. Действие записывается в виде

$$S = -\frac{T}{2} \int d\sigma d\tau \eta_{\mu\nu} V^\mu \times \\ \times \left\{ g^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu + i V_a^\alpha \bar{\lambda}^\mu \rho^a \partial_\alpha \lambda^\nu + 2 V_a^\alpha V_b^\beta \bar{\psi}_\alpha \rho^b \rho^a \lambda^\mu \left(\partial_\beta x^\nu + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^\nu \psi_\beta \right) \right\}. \quad (3.17)$$

Это действие имеет большую группу симметрий. Хотя это действие содержит члены с взаимодействием, с физической точки зрения теория, основанная на действии (3.17), есть просто свободная теория поля. Возможно также, что если этому действию придать соответствующую интерпретацию, то оно может быть использовано и в других областях физики.

Действие (3.17) может быть проквантовано ковариантно, так же, как в случае бозонных струн. Локальными симметриями действия являются репараметризационная инвариантность, вейлевская инвариантность и локальная суперсимметрия. Ана-

лиз связей по Дираку и фиксация калибровки в виде

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}, \quad (3.18)$$

$$\psi^\alpha = 0, \quad (3.19)$$

приводит к уравнениям движения

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0, \quad (3.20)$$

$$\rho^\alpha \partial_\alpha \lambda^\mu = 0 \quad (3.21)$$

вместе с условиями связи

$$\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\gamma x^\mu \partial_\gamma x_\mu + \frac{1}{4} \bar{\lambda}^\mu (\rho_\alpha \partial_\beta + \rho_\beta \partial_\alpha) \lambda_\mu = 0, \quad (3.22)$$

$$\rho^\alpha \rho_\beta \partial_\alpha x \cdot \lambda = 0. \quad (3.23)$$

Последующее наложение калибровок в виде (2.36) и (2.37), а также условие $\lambda^+ = 0$ приводит к калибровке светового конуса.

Уравнения движения (3.20) и (3.21) могут быть легко получены из действия [38]

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau [\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu + i \bar{\lambda}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \lambda_\mu - F^\mu F_\mu]. \quad (3.24)$$

Это действие отличается от действия (3.7) тем, что индекс полей пробегает d значений. (После разрешения связей и учета калибровок получаются $d-2$ значения пространственно-временного индекса.) Кроме того, мы ввели вспомогательное поле $F^\mu(\sigma, \tau)$ на мировом листе, чтобы действие обладало суперсимметрией вне массовой поверхности:

$$\delta x^\mu = i \bar{\alpha} \lambda^\mu, \quad (3.25)$$

$$\delta \lambda^\mu = \rho^\alpha \partial_\alpha x^\mu \alpha + \alpha F^\mu,$$

$$\delta F^\mu = i \bar{\alpha} \rho^\alpha \partial_\alpha \lambda^\mu.$$

Используя этот факт, мы можем описывать струну в терминах «суперкоординат» [17, 18]:

$$\phi^\mu(\sigma, \tau, \theta^A) = x^\mu(\sigma, \tau) + i \bar{\theta} \lambda^\mu(\sigma, \tau) + \frac{1}{2} i \bar{\theta} \theta F^\mu(\sigma, \tau). \quad (3.26)$$

Это замечательный результат. Десятимерная спиновая плотность $\lambda^\mu(\sigma, \tau)$ на мировом листе появляется вследствие рассмотрения супермирового листа с координатами σ, τ и θ^A , где θ^A — двухкомпонентный спинор. Определим ковариантную производную

$$D^A = \frac{\partial}{\partial \theta^A} + i (\rho^\alpha \theta)^A \partial_\alpha; \quad (3.27)$$

тогда действие (3.24) может быть представлено в виде

$$S = - \frac{1}{8\pi} \int d\tau d\sigma d^2\theta \bar{D}\phi^\mu D\phi_\mu. \quad (3.28)$$

Преобразования суперсимметрии (3.25) генерируются посредством

$$\delta\sigma^\alpha = -i\bar{\alpha}\rho^\alpha\theta, \quad \sigma^\alpha = (\tau, \sigma), \quad (3.29)$$

$$\delta\theta^A = \alpha^A. \quad (3.30)$$

В действительности действие (3.28) обладает бесконечномерной симметрией, называемой суперконформной симметрией. Для такой симметрии “суперкалибровочные” преобразования определяются правилами (3.29) и (3.30) с параметром $\alpha^A = \alpha^A(\sigma^\alpha)$, удовлетворяющим уравнению Дирака.

Поскольку область изменения σ имеет фиксированные границы 0 и π , необходимо ввести граничные условия на θ^A :

при $\sigma = 0$

$$\theta^1 + \theta^2 = 0, \quad (3.31)$$

при $\sigma = \pi$

$$\theta^1 \pm \theta^2 = 0, \quad (3.32)$$

и аналогично для α^A , где верхний знак соответствует сектору Рамона, а нижний — сектору Невё — Шварца.

Условия связи (3.22) и (3.23) могут быть записаны в суперпространственной формулировке в виде

$$J_\beta = \rho^\alpha \rho_\beta \partial_\alpha \phi \cdot D\phi = 0. \quad (3.33)$$

В рассматриваемой теории суперток (3.33) генерирует суперконформные преобразования. Следовательно, один из способов построения струнной теории заключается в том, чтобы найти суперконформное действие и потребовать, чтобы суперток был равен нулю.

Решения уравнений движения (3.20) и (3.21), полученных варьированием действия (3.24), имеют следующий вид. Рассмотрим случай открытых струн. Решение для x^μ уже приводилось выше в (2.25), а соответствующие решения для λ^μ получаются из формул (3.3), (3.4) или (3.10) и (3.11) простой заменой $d^i \rightarrow d^\mu$, $b^i \rightarrow b^\mu$. Аналогично можно рассмотреть и случай замкнутых струн. Эти решения позволяют записать связи в следующем виде [39]:

$$\Pi(\tau) \cdot D\Pi(\tau) = 0, \quad (3.34)$$

где

$$\Pi^\mu(\tau) = i D\phi^\mu(0, \tau, \theta = \theta_1 = -\theta_2), \quad (3.35)$$

$$D = -i\theta \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\theta}. \quad (3.36)$$

Здесь, как и в предыдущей главе, мы расширили интервал значений σ до $-\pi \leq \sigma \leq \pi$. Это сделано для того, чтобы условие связи можно было представить как функцию только $\sigma + \tau$. При этом, накладывая условие связи в момент $\tau = 0$, мы можем оставшуюся переменную обозначить τ , после чего можно провести отождествление (3.35).

Условие связи (3.34) теперь может быть разложено в ряд Фурье по τ и θ одновременно. Тогда коэффициенты ряда Фурье в секторе Невё — Шварца (в квантовом случае) определяются в виде

$$L_n = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \int d\theta e^{in\tau} : \Pi \cdot D\Pi : , \quad (3.37)$$

$$G_r = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \int d\theta \theta e^{ir\tau} : \Pi \cdot D\Pi : \quad (3.38)$$

и образуют алгебру

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{d}{8} n (n^2 - 1) \delta_{n+m, 0}, \quad (3.39)$$

$$[L_n, G_r] = \left(\frac{n}{2} - r \right) G_{n+r}, \quad (3.40)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{d}{2} \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r+s, 0}. \quad (3.41)$$

В секторе Рамона имеем

$$L_n = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \int d\theta e^{in\tau} : \Pi \cdot D\Pi : + \frac{5}{8} \delta_{n, 0}, \quad (3.42)$$

$$F_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \int d\theta \theta e^{in\tau} : \Pi \cdot D\Pi : , \quad (3.43)$$

где мы прибавили к L_0 дополнительный член, чтобы сохранить подалгебру Мёбиуса $SU(1, 1)$. Полная алгебра имеет вид

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{d}{8} n (n^2 - 1) \delta_{n+m, 0}, \quad (3.44)$$

$$[L_n, F_m] = \left(\frac{n}{2} - m \right) F_{n+m}, \quad (3.45)$$

$$\{F_n, F_m\} = 2L_{n+m} + \frac{d}{2} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{n+m, 0}. \quad (3.46)$$

Квантование теории осуществляется стандартно путем наложения канонических коммутационных соотношений, которые

следуют из действия (3.28):

$$[x^\mu(\sigma, \tau), p^\nu(\sigma', \tau)] = -i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.47)$$

$$\{\lambda^{A\mu}(\sigma, \tau), \lambda^{B\nu}(\sigma', \tau)\} = -\pi\delta^{AB}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.48)$$

Условия связи накладываются на состояния в виде

$$L_n|\text{физ}\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (3.49)$$

$$G_r|\text{физ}\rangle = 0, \quad r > 0, \quad (3.50)$$

$$F_n|\text{физ}\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (3.51)$$

Условия массовой поверхности имеют вид

$$\left(L_0 - \frac{1}{2}\right)|\text{физ}\rangle = 0 \quad (\text{NS}), \quad (3.52)$$

$$F_0|\text{физ}\rangle = 0 \quad (\text{R}). \quad (3.53)$$

В действительности этот метод был использован в одной из попыток построить новые струнные модели [17]. Можно построить расширенную суперконформную симметрию, в которой суперкалибровочные генераторы G_r , F_n преобразуются как векторы по группе $SO(N)$. Таким путем получается бесконечный набор расширений алгебры Вирасоро. Эти алгебры сами по себе довольно интересны. Они включают, например, генераторы алгебры Вирасоро, суперкалибровочные генераторы, а также генераторы алгебры Каца — Муди. Однако лишь одна из таких алгебр соответствует струнной модели, не содержащей духов, — это $SO(2)$ -расширение [18]. К сожалению, критическая размерность в этом случае равна 2, поэтому трудно найти применение такой модели в физике.

Суперструны

В предыдущей главе мы ввели антикоммутирующие степени свободы, чтобы сократить вклад коммутирующих координат в флуктуации вакуума. Такие степени свободы преобразуются по векторному представлению группы $SO(d-2)$. В случаях, когда $d=3, 4, 6$ и 10 , мы могли выбрать также минимальное спинорное представление, так как оно имеет такую же размерность, как векторное представление. Поскольку $SO(d-2)$ — компактная группа, в скалярном произведении двух спиноров индексы свернуты так же, как в скалярном произведении векторов (напомним, что в гл. 3 использовалось только скалярное произведение векторов). Для спинорного представления мы можем проделать построение, аналогичное проведенному в гл. 3. Для этого выполним замену

$$\lambda^{A^i} \rightarrow S^{A^a}, \quad (4.1)$$

где A — по-прежнему индекс двухкомпонентного спинора, а a — индекс $(d-2)$ -компонентного спинора. Такая замена приводит к теории суперструн, первоначальная формулировка которой обсуждалась в предыдущей главе.

Действие в теории суперструн задается в виде [40]

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int dt \int_0^\pi d\sigma [\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^i + i\bar{S}^a \rho^\alpha \partial_\alpha S^a]. \quad (4.2)$$

Мы знаем, что это действие (в случае открытых струн) приводит к сектору, в котором спектр состояний начинается с безмассовых частиц на низшем уровне. В этом секторе решения уравнений движения для спинорных полей разлагаются в ряд:

$$S_a^1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (4.3)$$

$$S_a^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau+\sigma)}. \quad (4.4)$$

Спинорные поля удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\{S_a^A(\sigma, \tau), S_b^B(\sigma', \tau)\} = \pi \delta_{ab} \delta^{AB} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.5)$$

$$\{S_n^a, S_m^b\} = \delta_{n+m, 0} \delta^{ab}. \quad (4.6)$$

Операторы S_{-n}^a с положительным n являются операторами рождения. Они действуют на бозонное состояние и отображают его в фермионное состояние. Следовательно, этот сектор теории содержит как бозоны, так и фермионы, числа которых на каждом массовом уровне одинаковы, т. е. состояния на каждом уровне образуют супермультиплеты (ниже это будет доказано).

Мы знаем также, что в другом секторе, возникающем при выборе граничных условий, соответствующих соотношениям (3.8) и (3.9б), имеются тахионы. Кроме того, разложение в ряд по фермионным осцилляторам будет идти по модам с полужелыми индексами, и, следовательно, числа бозонов и фермионов на каждом массовом уровне не будут равными. Это в свою очередь приводит к невозможности появления суперсимметрии. Поскольку рассмотренный выше сектор теории уже содержит все, что нам нужно, мы можем просто постулировать, что используются лишь граничные условия (3.8) и (3.9а).

Аналогично для замкнутых струн мы постулируем, что используются только периодические граничные условия. Это дает следующие решения уравнений движения для фермионов:

$$S_a^1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^{1a} e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad (4.7)$$

$$S_a^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^{2a} e^{-2in(\tau+\sigma)}. \quad (4.8)$$

Теперь нашей задачей будет проверить существование представления алгебры Пуанкаре в такой струнной теории. Оказывается, такое представление существует [41], и удивительный факт заключается в том, что это представление может быть расширено до суперпуанкаре-алгебры. Сначала мы рассмотрим формулировку суперсимметрии в координатах светового конуса [42]. Суперсимметричный заряд Q в десяти измерениях распадается на два $SO(8)$ -спинора — Q_+^a и Q_-^a , где индексы $a, \dot{a} = 1, \dots, 8$ принадлежат двум неэквивалентным 8-мерным

спинорным представлениям группы $SO(8)$. Алгебра имеет вид

$$\{Q_+^a, Q_+^b\} = 2p^+ \delta^{ab}, \quad (4.9a)$$

$$\{Q_-^{\dot{a}}, Q_-^{\dot{b}}\} = 2p^- \delta^{\dot{a}\dot{b}}, \quad (4.9б)$$

$$\{Q_+^a, Q_-^{\dot{b}}\} = \sqrt{2} (\gamma_i)^{ab} p^i. \quad (4.9в)$$

Используемые обозначения приведены в дополнении к части I.

Приведем теперь представление суперпуанкаре-алгебры, которое строится с помощью полей, входящих в действие (4.2). Нам снова потребуется некоторая доля предвидения, поскольку мы строим алгебру сразу в калибровке светового конуса, а не выводим ее из лоренц-ковариантной алгебры. В случае замкнутых струн это $N = 2$ -суперпуанкаре-алгебра. Итак, наиболее общая алгебра имеет вид

$$p^+ = p^+, \quad (4.10a)$$

$$p^i = \int_0^\pi d\sigma p^i(\sigma, \tau), \quad (4.10б)$$

$$p^- = \frac{1}{2\pi p^+} \int_0^\pi d\sigma [\pi^2 p^{i2} + x'^{i2} - i(S^1 S^{1'} - S^2 S^{2'})], \quad (4.10в)$$

$$q_1^{+a} = \sqrt{\frac{2p^+}{\pi}} \int_0^\pi d\sigma S_1^a, \quad (4.11a)$$

$$q_2^{+a} = \sqrt{\frac{2p^+}{\pi}} \int_0^\pi d\sigma S_2^a, \quad (4.11б)$$

$$q_1^{-\dot{a}} = \frac{1}{\pi \sqrt{p^+}} \int_0^\pi d\sigma (\gamma^i S_1)^{\dot{a}} (\pi p^i - x'^i), \quad (4.11в)$$

$$q_2^{-\dot{a}} = \frac{1}{\pi \sqrt{p^+}} \int_0^\pi d\sigma (\gamma^i S_2)^{\dot{a}} (\pi p^i + x'^i), \quad (4.11г)$$

$$j^{ij} = \int_0^\pi d\sigma \left[x^i p^j - x^j p^i + \frac{1}{4\pi} (S^1 \gamma^{ij} S^1 + S^2 \gamma^{ij} S^2) \right], \quad (4.12a)$$

$$j^{+i} = \int_0^\pi d\sigma (x^+ p^i - x^i p^+), \quad (4.12б)$$

$$j^{+-} = x^+ p^- - x^- p^+, \quad (4.12\text{в})$$

$$j^{-i} = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\sigma \left[\{x^-(\sigma), p^i\} - \{x^i, p^-(\sigma)\} - \right. \\ \left. - \frac{i}{4\pi \sqrt{\pi} p^+} (S^1 \gamma^{ij} S^1 (\pi p^j - x^{j'}) + S^2 \gamma^{ij} S^2 (\pi p^j + x^{j'})) + 4 \frac{p^i}{p^+} \right], \quad (4.12\text{г})$$

где

$$x'(\sigma) = \frac{\pi}{p^+} p^i x^{i'} + \frac{i}{2p^+} (S^1 S^{1'} + S^2 S^{2'}). \quad (4.13)$$

Знания этой алгебры достаточно для того, чтобы построить все известные струнные модели (за исключением $d=2$ -модели [18]):

1. *Суперструны типа IIб.* Эта модель соответствует полной алгебре (4.10)–(4.12) с периодическими граничными условиями на координаты. Отметим, что такая модель будет киральной, так как операторы рождения S_{-n}^{1a} и S_{-n}^{2a} порождают спиноры только одной киральности.

2. *Суперструны типа IIа.* Чтобы получить эту модель, нужно вместо антикоммутирующей координаты S_2^a ввести координату $S_2^{\dot{a}}$, преобразующуюся по другому спинорному представлению. Это никак не скажется на формулах алгебры, поскольку S_1 и S_2 нигде не перемножаются скалярно. Конечно, после такой замены S_1 и S_2 уже не могут быть объединены в двухкомпонентный спинор по двум измерениям, но это не имеет значения. Модель не киральная, так как спинорные состояния могут быть объединены в майорановские состояния.

3. *Суперструны типа I.* В случае открытых струн мы должны взять граничные условия, соответствующие (2.42), а также (3.8) и (3.9а). Тогда $q_1^+ = q_2^+$ и $q_1^- = q_2^-$, следовательно, суперсимметрия понижается до $N=1$ -суперсимметрии. Аналогичное понижение суперсимметрии можно провести и для случая замкнутых струн.

4. *Бозонные струны.* Положим $S^1 = S^2 = 0$. В этом случае суперсимметрия, конечно, отсутствует.

5. *Гетеротическая струна.* Эта струнная модель рассматривается в следующей главе.

6. *Спиновая струна.* Модель спиновой струны можно получить, если в алгебре провести преобразования тройственности от спиноров S^a обратно к векторам λ^i , такие, например, как $S^{1a} S^{1a} \rightarrow \lambda^{1i} \lambda^{1i}$ и $S^1 \gamma^{ij} S^1 \rightarrow \lambda^{1i} \lambda^{1j}$, и аналогично для S^2 . Тогда можно легко получить представление алгебры для спиновой струны. Суперсимметрия, конечно, не сохраняется.

Рассматривая теории суперструн типов I, IIa и IIb, мы знаем, что имеется квантовая теория свободных струн, в которой низшие состояния являются безмассовыми. Теперь мы хотим узнать, каковы спины этих безмассовых состояний. Для бозонной струны в качестве основного состояния можно выбрать скалярный вакуум $|0\rangle$. Действительно, если положить все фермионные осцилляторы в выражениях (4.12) равными нулю, то видно, что вакуумное состояние является скалярным. Но для суперструн в нулевой моде генератора j^{ij} (4.12a) появляется дополнительная часть, а именно

$$s_0^{ij} = \frac{1}{4} (S_0^1 \gamma^{ij} S_0^1 + S_0^2 \gamma^{ij} S_0^2). \quad (4.14)$$

В общем случае этот оператор, действуя на вакуумное состояние, дает ненулевое значение.

Кроме того, безмассовый уровень должен образовывать супермультиплет. Такой супермультиплет может быть построен на основе антикоммутатора (4.9a), а также знания выражения (4.14) с учетом того, что q_+ реализовано линейно. Генератор q_+^a является вещественным. В четырехмерном случае обычно переходят от $SO(2)$ -к $U(1)$ -описанию, строя комплексные генераторы (не имеющие лоренцевых индексов), которые образуют алгебру Клиффорда. После этого можно определить операторы рождения и уничтожения, из которых затем строится супермультиплет. В случае $d=10$ мы до сих пор использовали $SO(8)$ -ковариантные обозначения. Чтобы разложить генераторы на операторы рождения и уничтожения, мы должны нарушить $SO(8)$ -группу до $SU(4) \times U(1)$. Именно этот формализм используется в полевой теории открытых струн. Но в этой главе мы опишем альтернативный формализм, который использует полную $SO(8)$ -ковариантность. Этот метод может с таким же успехом применяться и в размерности $d=4$. Рассмотрим нулевую моду генератора j^{ij} , заданного выражением (4.12a). В случае открытых струн

$$j_0^{ij} = l^{ij} + \frac{1}{2} S_0 \gamma^{ij} S_0 \equiv l^{ij} + s_0^{ij}. \quad (4.15)$$

Последний член в этом выражении и есть вклад спина. Если считать вакуум $|0\rangle$ скалярным состоянием, то требуется наложить условие

$$s_0^{ij} |0\rangle = 0. \quad (4.16)$$

Умножая левую и правую части на S_0 и используя тождество Фирца, мы получаем $S_0^a |0\rangle = 0$, следовательно, $|0\rangle = 0$, если $d \neq 4$.

В случае $d = 10$ мы должны сделать следующую простую вещь. Возьмем вакуум в виде вектора $|i\rangle$ с нормировкой $\langle i|j\rangle = \delta^{ij}$. Потребуем, чтобы это вакуумное состояние удовлетворяло условию

$$s_0^{ij}|k\rangle = \delta_{ik}|j\rangle - \delta_{jk}|i\rangle. \quad (4.17)$$

Введем теперь следующее обозначение:

$$\psi^{ia} \equiv q_+^a |i\rangle; \quad (4.18)$$

тогда имеет место разложение

$$\psi^{ia} = \tilde{\psi}^{ia} + \frac{1}{8} \gamma^i \gamma^j \psi^j, \quad (4.19)$$

где $\gamma^i \tilde{\psi}^{ia} = 0$.

Если мы теперь умножим обе части равенства (4.17) на S_0 , то получим следующее ограничение на состояния:

$$\tilde{\psi}^{ia} = 0, \quad (4.20)$$

тогда как состояния

$$|\dot{a}\rangle \equiv \frac{1}{8} (\gamma^i q_+)^{\dot{a}} |i\rangle \quad (4.21)$$

с нормировкой $\langle \dot{b}|\dot{a}\rangle = p^+ \delta_{\dot{a}\dot{b}}$ не подчинены никаким ограничениям. Рассматривая поведение состояний (4.21) при преобразованиях Лоренца, получаем

$$s_0^{ij}|\dot{a}\rangle = -\frac{1}{2} (\gamma^{ij})^{\dot{a}\dot{b}} |\dot{b}\rangle. \quad (4.22)$$

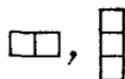
Следовательно, такие состояния преобразуются просто как компоненты спинора. Используя тождество Фирца (A.7), находим

$$q_+^a q_+^b = p^+ \delta^{ab} + \frac{1}{16} (\gamma^{ij})^{ab} q_+^i q_+^j \quad (4.23)$$

и заключаем, что не могут быть построены никакие другие безмассовые состояния и безмассовый уровень содержит одно векторное состояние и одно спинорное, которые совпадают с мультиплетом Янга — Миллса в десяти измерениях. Можно, конечно, считать, что оба эти состояния преобразуются по некоторому представлению (например, по присоединенному представлению) какой-либо внутренней группы симметрии. В теориях суперструн типа I существует стандартный способ включения в амплитуды рассеяния квантовых чисел, отвечающих внутренней группе симметрии, достаточно давно предложенный Чаном и Патеном [43]. Он заключается в следующем. Каждому i -му внешнему состоянию струны нужно поставить в соответствие

матрицу $(\lambda_i)_{ab}$ и умножить N -точечную амплитуду рассеяния на групповой множитель $\text{tr}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$. Эти множители должны факторизоваться определенным образом, чтобы не нарушать факторизационных свойств струнных амплитуд рассеяния. Такое требование ограничивает выбор группы внутренних симметрий, а именно допускаются группы симметрии $SO(n)$, $U(n)$ и $Sp(2n)$ [29]. Отметим, что в данном случае исключительные группы запрещены.

Полезно рассмотреть первый возбужденный уровень. Этот уровень состоит из 128 бозонных состояний $\alpha_{-1}^i |j\rangle$, $S_{-1}^a |b\rangle$ и 128 фермионных состояний $\alpha_{-1}^i |\dot{a}\rangle$, $S_{-1}^a |i\rangle$. Перечисленные состояния образуют различные приводимые $SO(8)$ -мультиплеты, которые (поскольку они являются массивными) могут быть встроены в представление группы $SO(9)$ с помощью лоренцевых генераторов. Таким способом для бозонов получаются следующие представления группы $SO(9)$:



с размерностями 44 и 84 соответственно. Фермионы образуют один 128-мерный $SO(9)$ -мультиплет Рариты — Швингера (подобный ψ^{ia} в выражении (4.19)).

В случае замкнутых струн безмассовый уровень возникает при действии двух генераторов суперсимметрии q_+^1 и q_+^2 . Допустим, что оба они принадлежат одному и тому же представлению группы $SO(8)$ (это означает, что они имеют одинаковую киральность в десяти измерениях (тип IIб)), тогда мы можем образовать комплексные генераторы

$$q_+^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_+^1 + iq_+^2)^a \quad (4.24)$$

и, следовательно, использовать q_+^a и q_+^{*a} в качестве операторов рождения и уничтожения. В этом случае мы можем определить скалярный вакуум (который должен быть комплексным, как следствие комплексных преобразований суперсимметрии). Действуя генератором j_0^{ij} , в определении которого (4.14) содержится s_0^{ij} , на этот вакуум, мы убеждаемся, что вакуум действительно является скалярным состоянием. Если теперь последовательно действовать оператором q_+^a на вакуумное состояние, то получим, что безмассовый супермультиплет образован

следующими состояниями:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\sim \phi, \\ q_+^a |0\rangle &\sim \phi^a, \\ q_+^a q_+^b |0\rangle &\sim \phi^{ab}, \\ &\vdots \\ q_+^{a_1} \dots q_+^{a_s} |0\rangle &\sim \phi^{a_1 \dots a_s}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это приводимый мультиплет. Чтобы получить неприводимый мультиплет, мы должны наложить условия

$$(\phi^{a_1 a_2 \dots a_{2N}})^* = \frac{1}{(8-2N)!} \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_8} \phi^{a_{2N+1} \dots a_8}, \quad (4.25)$$

$$(\psi^{a_1 a_2 \dots a_{2N+1}})^* = \frac{1}{(7-2N)!} \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_8} \phi^{a_{2N+2} \dots a_8}. \quad (4.26)$$

Так как группа $SO(8)$ обладает свойством тройственности, перечисленные выше безмассовые состояния со спинорными индексами можно переписать в эквивалентном виде с векторными индексами. Тогда мы получим следующий бозонный спектр:

2 скаляра ϕ ,

2 антисимметричных тензора 2-го ранга $A^{ij} \sim (\gamma^{ij})^{ab} \phi^{ab}$,

1 самодуальный антисимметричный тензор 4-го ранга A^{ijkl} ,

1 гравитон g^{ij} ;

последние две серии состояний строятся из $\phi^{a_1 \dots a_4}$. Фермионный спектр содержит

2 спинора ψ^a ,

2 набора состояний Рариты — Швингера $\tilde{\psi}^{i\dot{a}}$.

Допустим теперь, что q_+^1 и q_+^2 имеют противоположные киральности (тип IIa). В этом случае мы не можем образовать операторы рождения и уничтожения ковариантно по группе $SO(8)$. Нам остается последовать методу, использованному в случае $N=1$. Начнем с тензорного состояния

$$|ij\rangle \sim |i\rangle \otimes |j\rangle \sim \phi^{ij}$$

и остальные состояния построим по аналогии со случаем $N=1$:

$$|a\rangle \otimes |i\rangle \sim \psi^{ai},$$

$$|i\rangle \otimes |\dot{a}\rangle \sim \chi^{\dot{a}i},$$

$$|a\rangle \otimes |\dot{a}\rangle \sim \phi^{a\dot{a}}.$$

Тогда бозонный спектр содержит

$$1 \text{ гравитон } g^{ij} = \phi^{(ij)} - \frac{1}{8} \phi^{kk} \delta^{ij},$$

$$1 \text{ антисимметричный тензор 2-го ранга } A^{ij} = \phi^{[ij]},$$

$$1 \text{ скаляр } \phi = \phi^{ii},$$

$$1 \text{ вектор } A^i = (\gamma^i)^{a\dot{a}} \phi^{a\dot{a}},$$

1 антисимметричный тензор 3-го ранга $A^{ijk} = (\gamma^{ijk})^{a\dot{a}} \phi^{a\dot{a}}$. Фермионный спектр содержит

$$2 \text{ спинора } \psi^{\dot{a}}, \chi^a,$$

$$2 \text{ состояния Рариты — Швингера } \tilde{\psi}^{a\dot{i}}, \tilde{\chi}^{\dot{a}i}.$$

Этим методом, конечно, можно было воспользоваться и в случае, рассмотренном выше.

Мы можем наложить ограничения на спектр теории с $N = 2$ и получить, таким образом, спектр, соответствующий $N = 1$. Полученные замкнутые струны типа I являются важными, так как могут взаимодействовать с открытыми струнами. Чтобы найти спектр безмассовых состояний, в этом случае образуем линейную комбинацию $Q^1 + Q^2 = Q$; после этого можно применить метод, использованный нами в теории с $N = 1$. Тогда спектр, очевидно, будет состоять из

$$|i\rangle \otimes |j\rangle,$$

$$|i\rangle \otimes |a\rangle,$$

т. е. будет содержать

$$1 \text{ гравитон } g^{ij},$$

$$1 \text{ антисимметричный тензор } A^{ij},$$

$$1 \text{ скаляр } \phi,$$

$$1 \text{ спинор } \psi^{\dot{a}},$$

$$1 \text{ состояние Рариты — Швингера } \tilde{\psi}^{a\dot{i}}.$$

До сих пор мы обсуждали только состояния свободной струны. Мы могли бы ожидать, что все состояния замкнутой струны также принадлежат некоторому представлению внутренней группы. Но при этом оказывается, что взаимодействие можно включить только в том случае, если такое представление является тривиальным.

Так как струны являются одномерными протяженными объектами, существует возможность того, что они могут иметь внутреннюю ориентацию, которую можно представить в виде "стрелки", указывающей одно из двух направлений вдоль струны. В том случае, если струны являются ориентируемыми, для заданной пространственной конфигурации существуют два различных классических состояния струны, которые соответствуют

двум возможным ориентациям. Открытая струна является ориентируемой, если концы струны считаются различными, в то время как замкнутая струна является ориентируемой, если для нее можно отличить моду, бегущую в одном направлении вдоль струны, от моды, бегущей в противоположном направлении.

Итак, основной вопрос, касающийся ориентации, заключается в том, являются ли струны, описываемые координатами $x^\mu(\sigma)$, $S^{Aa}(\sigma)$ и $x^\mu(\pi - \sigma)$, $S^{Aa}(\pi - \sigma)$, совпадающими или различными. Рассмотрим решения уравнений движения в замкнутых струнах (2.43), (4.7) и (4.8). В этих выражениях замена $\sigma \rightarrow \pi - \sigma$ соответствует перестановкам $\alpha_n \leftrightarrow \bar{\alpha}_n$, $S_n^1 \leftrightarrow S_n^2$. Суперструны типа II, которые получаются друг из друга такой перестановкой, являются существенно разными, тогда как в теориях типа I дополнительные ограничения таковы, что приводят к совпадению двух таких струн. Поэтому мы заключаем, что струны типа II являются ориентируемыми, тогда как замкнутые струны типа I неориентируемы. Гетеротическая струна, которая имеет различные левобегущие и правобегущие моды, очевидно, ориентируема. Данный анализ проведен на классическом уровне, но его можно повторить и для квантового случая, если рассматривать матричные элементы операторов $x^\mu(\sigma)$ и $S^{Aa}(\sigma)$. При этом выводы не изменятся.

Как уже обсуждалось, в открытых струнах можно ввести (глобальную) внутреннюю группу симметрий (которая является остатком от калибровочной симметрии в ковариантном формализме). Взаимодействие допускает, чтобы состояния преобразовывались, как ϕ_b^a , где индексы a и b принадлежат фундаментальному и комплексно-сопряженному представлениям соответственно. Следовательно, ϕ_b^a либо преобразуется по присоединенному представлению, либо является синглетом. На интуитивном уровне это можно понимать так, что на одном конце струны находится "кварк", а на другом "антикварк". Поэтому, если "кварки" отличаются от "антикварков", струна является ориентируемой, если же они совпадают, то струна неориентируема. Концы таких струн могут соединяться и образуются замкнутые струны, если "кварки" являются синглетами. Например, струны с группой симметрии $U(n)$ будут образовывать ориентируемые замкнутые струны, тогда как струны с группой $SO(n)$ и $Sp(2n)$ будут образовывать неориентируемые замкнутые струны. Но все полученные таким путем замкнутые струны должны быть струнами типа I, поскольку открытые струны были типа I, и, следовательно, все они должны быть неориентируемыми. Таким образом, путем нестрогих рассуждений мы заключаем, что допустимы только группы $SO(n)$ и $Sp(2n)$ [44].

Учет ориентации струн важен при вычислениях по теории возмущений. Для ориентируемых струн взаимодействие должно быть таким, чтобы ориентация сохранялась. Это приводит к тому, что ряды теории возмущений в случае суперструн типа I и типа II будут различными.

До сих пор мы обсуждали суперструны в калибровке светового конуса. Этого вполне достаточно для понимания структуры теории и для построения теории взаимодействия. Но было бы полезно также иметь ковариантный формализм. Действие в таком формализме было найдено Грином и Шварцем [45], но до сих пор остается неясным вопрос, можно ли квантовать ковариантно это действие [46]¹⁾.

¹⁾ См. предисловие к русскому изданию. — *Прим. ред.*

Гетеротическая струна

В предыдущей главе мы видели, что существуют различные типы суперпуанкаре-алгебр, соответствующие различным типам суперструн, и генераторы алгебр в каждом частном случае могут быть получены из наиболее общего набора генераторов (4.10)—(4.12). Самый простой случай пуанкаре-алгебры получается, если для замкнутой бозонной струны провести разложение $x^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu(\tau - \sigma) + \tilde{x}^\mu(\tau + \sigma)$ и аналогично для p^μ . Тогда в алгебре Пуанкаре появятся две подалгебры, одна из которых состоит только из правобегущих полей $x^\mu(\tau - \sigma)$ и $p^\mu(\tau - \sigma)$, а другая — только из левобегущих полей $\tilde{x}^\mu(\tau + \sigma)$, $\tilde{p}^\mu(\tau + \sigma)$. Важно отметить, что эти две подалгебры являются совершенно независимыми, поэтому одну из подалгебр можно приравнять нулю. То же самое имеет место и в случае суперструны, когда алгебра задается полным набором генераторов (4.10)—(4.12). А именно нетрудно видеть, что в выражениях, содержащих произведение S^4 на x и p , S^1 умножается только на правобегущие поля, а S^2 — только на левобегущие. Кроме того, S^1 и S^2 сами являются правобегущими и левобегущими соответственно, поэтому и в случае суперструны можно проделать непротиворечивое усечение алгебры, например, полагая все левобегущие переменные равными нулю. Такое усечение приведет к алгебре с $N = 1$ -суперсимметрией.

Случай гетеротической струны [30] возникает, если к генераторам алгебры правого сектора 10-мерной суперструны, полученным методом усечения, добавить генераторы алгебры левого сектора 26-мерной бозонной струны. Видно, что размерности правого и левого секторов гетеротической струны явно не совпадают. Проблема разрешается, если считать, что к 10 пространственно-временным координатам суперструны $x^\mu(\tau - \sigma)$ добавляются только 10 координат бозонной струны $\tilde{x}^\mu(\tau + \sigma)$, образующих $SO(1,9)$ -подалгебру полной алгебры бозонной струны. Тогда остальные координаты бозонной струны $x^I(\tau, \sigma)$, $I = 1, 2, \dots, 16$, требуют иной интерпретации, нежели координаты пространства-времени. В конечном счете нужно также понять, что стало с симметрией $SO(16)$.

Проверим теперь замкнутость алгебры. Рассмотрим алгебру бозонной струны. Для левого сектора имеем

$$p^- = \frac{1}{4\pi p^+} \int_0^\pi d\sigma (\pi p^I + x'^I)^2. \quad (5.1)$$

Комбинация $\pi p^I + x'^I$ является левобегущей. Если потребовать, чтобы p^I и x^I были левобегущими по отдельности, то из разложения по модам мы видим, что p^I совпадает с x'^I (с точностью до π). Следовательно, мы должны заменить канонические коммутационные соотношения на

$$[x^I(\sigma, \tau), p^J(\sigma', \tau)] = \frac{i}{2} \delta(\sigma - \sigma') \delta^{IJ} \quad (5.2)$$

и потребовать выполнения условия

$$[x^I(\sigma, \tau), x^J(\sigma', \tau)] = -\frac{i}{2} \pi \frac{1}{\partial_\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \delta^{IJ}, \quad (5.3)$$

где

$$\frac{1}{\partial_\sigma} \delta(\sigma - \sigma') = \varepsilon(\sigma - \sigma').$$

Это изменение не нарушит замкнутости остальной алгебры. Следовательно, в полной алгебре гетеротической струны имеем

$$p^- = \frac{1}{2\pi p^+} \int_0^\pi d\sigma [\pi^2 p^{i2} + (x'^i)^2 - iS^a S_i^a + 2\pi p^I x'^I], \quad (5.4)$$

и условие на $x^-(\sigma)$ имеет вид

$$x'^- = \frac{\pi}{p^+} p^i x'^i + \frac{i}{2p^+} S^a S^a + \frac{\pi}{p^+} p^I x'^I, \quad (5.5)$$

где $S \equiv S^1$. Остальные генераторы $N = 1$ -суперпуанкаре-алгебры даются формулами (4.10) — (4.12) при $S^2 = 0$.

Действие, соответствующее гамильтониану (5.4), имеет вид

$$S = -\frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma \int d\tau \left[\eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha x^i \partial_\beta x^i + \partial_\alpha x^I \partial_\beta x^I) + iS^a \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma} \right) S^a \right] \quad (5.6)$$

вместе с условиями связи

$$\Phi^I = \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma} \right) x^I = 0. \quad (5.7)$$

Вместо этого можно добавить член $\lambda [(\partial/\partial\tau - \partial/\partial\sigma)x^I]^2$ к действию. Как показал Зигель [47], результирующее действие обладает локальной калибровочной симметрией, которая позволяет откалибровать лагранжеев множитель λ , в результате чего снова появляются условия связи (5.7).

Каноническая структура действия может быть проанализирована с помощью метода Дирака. Если учесть, что условия (5.7) являются связями второго класса, то каноническими коммутационными соотношениями являются (2.44), (4.5) и (5.2).

Следовательно, мы выбираем решение уравнений движения для x^I в виде

$$x^I(\tau + \sigma) = x^I + p^I(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^I}{n} e^{-2in(\tau + \sigma)}. \quad (5.8)$$

Но это решение не удовлетворяет периодическим граничным условиям по σ ! Для решения этой проблемы мы вынуждены допустить более общие граничные условия. Пусть координаты x^I лежат на гиперторе с радиусами R ; тогда функция $x^I(\sigma, \tau)$ отображает окружность $0 \leq \sigma \leq \pi$ на окружность $0 \leq x^I \leq 2\pi R$. Такие отображения делятся на гомотопические классы, которые характеризуются степенью отображения L^I , показывающей, сколько раз x^I пробегает по окружности [48]. Тогда выражение (5.8) допускается в качестве решения, если $p^I = 2L^I R$. Следовательно, мы вынуждены считать, что 16 координат x^I лежат на гиперторе. Это очень привлекательно с физической точки зрения, так как размеры гипертора могут быть достаточно малыми, чтобы не нужно было думать о координатах x^I в макроскопическом масштабе.

Прежде чем детально осуществлять такую компактификацию, рассмотрим ее влияние на выражения (5.4) и (5.5). Если подставить в выражения (5.4) и (5.5) решения для x^i , S^a и x^I , то по аналогии с (2.57) и (2.58) мы получим ($\alpha' = 1/2$)

$$\frac{1}{4} m^2 = N + \tilde{N} - 1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{16} (p^l)^2, \quad (5.9)$$

а также

$$N = \tilde{N} - 1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{16} (p^l)^2, \quad (5.10)$$

где

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n S_{-n}^a S_n^a), \quad (5.11)$$

$$\tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^I \tilde{\alpha}_n^I). \quad (5.12)$$

В выражениях (5.9) и (5.10) вклад (-1) появился вследствие регуляризации вакуумных флуктуаций. Хотя этот вклад и не сокращается, замечательно, что в теории нет тахиона. Это следует уже из того, что вакуумный вклад сокращается в правом

секторе. Кроме того, из выражения (5.10) видно, что $(p^I)^2$ должно быть четным целым числом.

При дальнейшем рассмотрении 16-мерный гипертор, которому принадлежат координаты x^I , может быть представлен как пространство R^{16} , факторизованное по решетке Γ^{16} , задаваемой 16 независимыми базисными векторами e_i^I ($i=1, \dots, 16$). Мы выбираем *четную* решетку (объяснение этого выбора дано ниже) с одинаковой длиной всех e_i , равной $\sqrt{2}$:

$$x^I = x^I + \sqrt{2}\pi \sum_{i=1}^{16} n_i R_i e_i^I, \quad (5.13)$$

где n_i — целые числа, а R_i — радиусы гипертора.

Для гипертора R^{16}/Γ^{16} допустимые значения импульса p^I лежат на дуальной решетке $\tilde{\Gamma}^{16}$, задаваемой векторами e_i^{*I} , удовлетворяющими условию

$$\sum_{i=1}^{16} e_i^I e_i^{*I} = \delta_{ij}. \quad (5.14)$$

Из соотношений (5.2) видно, что оператор $2p^I$ генерирует трансляции, т. е.

$$p^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{16} \frac{m_i}{R_i} e_i^{*I}, \quad (5.15)$$

где m_i — целые числа. Но мы только что видели, что $p^I = L^I$, где L^I — степень отображения, и

$$L^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{16} R_i n_i e_i^I. \quad (5.16)$$

Отсюда мы заключаем, что допускаются только состояния с импульсами, лежащими на пересечении решеток Γ^{16} и $\tilde{\Gamma}^{16}$. Более того, вводя снова наклон траектории Редже α' и сравнивая выражения (5.15) и (5.16), мы получаем

$$R_i \sim \sqrt{\alpha'}. \quad (5.17)$$

Это означает, что внутренние координаты имеют малые размеры. (Параметр α' до сих пор был произвольным, и мы надеемся, что численное значение его в конечном счете будет фиксировано теорией. Это значение, несомненно, будет малым, скажем $\sqrt{\alpha'} < 10^{-17}$ м, так как мы не наблюдали в эксперименте ни одной дочерней траектории Редже, т. е. состояний с $N = 1$ и выше.) Окончательно получаем, так как $\tilde{\Gamma} < \Gamma$ и Γ

четное, то $\tilde{\Gamma}$ тоже четное, поэтому $(\rho^I)^2$ принимает четные целые значения.

Дальнейшие ограничения возникают при исследовании взаимодействий. Двумерная (евклидова) мировая поверхность, которая соответствует однопетлевой амплитуде в теории замкнутых струн, является тором. Этот тор должен быть симметричным относительно перестановки σ и τ , так как репараметризационная инвариантность по-прежнему существует в теории (свойство дуальности). Чтобы такая симметрия имела место, решетка должна быть *самодуальной*, $\Gamma = \tilde{\Gamma}$.

Четных самодуальных решеток насчитывается совсем немного. Фактически они существуют только в $8n$ измерениях. В основополагающей работе Годдарда и Олива [49] было показано, что в 16 измерениях существуют только две такие решетки $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ и Γ_{16} , которые, как они предположили, должны иметь важное значение в физике. Решетка Γ_8 является корневой для E_8 . Построение решетки Γ_{16} более сложно. Базисные векторы для $SO(32)$ -корневой решетки могут быть выписаны в терминах набора ортогональных векторов $\{u_i\}$, $i = 1, \dots, 16$, посредством равенств $e_i = u_i - u_{i+1}$, $i = 1, \dots, 15$, и $e_{16} = u_{15} + u_{16}$. Такая корневая решетка не является самодуальной. Но самодуальная решетка может быть получена из корневой решетки путем добавления точек, которые являются мультиплетами одного из спинорных весов для $Spin(32)$. Мы можем выбрать спинорный вес в виде $s_1 = 1/2(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{15} - u_{16})$, $s_1^2 = 4$, а в качестве базисных векторов для решетки Γ_{16} взять s_1 и e_i , $i = 2, \dots, 16$. Так как e_1 — линейная комбинация базисных векторов, решетка Γ_{16} содержит все точки корневой решетки для $SO(32)$, а также дополнительные точки, соответствующие спинорным весам группы $Spin(32)/Z_2$. Последнее не является тем же самым, что и $SO(32)$. Центр группы $Spin(32)$ — это $Z_2 \times Z_2$. Устранение диагональной комбинации, состоящей из двух множителей Z_2 , приводит к исчезновению всех спинорных представлений, и мы получаем $SO(32)$. Если же устранить один множитель Z_2 , то исчезнет одно из двух спинорных представлений группы $Spin(32)$, а также все представления, находящиеся вместе с ним в одном и том же классе Z_2 -сопряженности (включая векторное представление).

Каждая из двух 16-мерных самодуальных решеток имеет 480 векторов с минимальным квадратом длины, равным 2.

Иследуем теперь низшие состояния на основе равенств (5.9) и (5.10). В суперструнном секторе по аналогии с анализом гл. 4 низшими состояниями являются

$$|i\rangle_R, |\dot{a}\rangle_R.$$

Мы должны удовлетворить условию (5.10). Следовательно, низший уровень состоит из состояний

$$\begin{aligned}
 |i\rangle_R \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L, & \quad g^{ij}, A^{ij}, \phi, \\
 |i\rangle_R \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L, & \quad 16 \text{ векторов,} \\
 |i\rangle_R \otimes |p^I\rangle_L, & \quad 480 \text{ векторов,} \\
 |\dot{a}\rangle_R \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L, & \quad \tilde{\psi}^{ai}, \psi^a, \\
 |\dot{a}\rangle_R \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L, & \quad 16 \text{ спиноров,} \\
 |\dot{a}\rangle_R \otimes |p^I\rangle_L, & \quad 480 \text{ спиноров}
 \end{aligned}$$

в обозначениях гл. 4.

Это спектр $N = 1$ -супергравитации, взаимодействующей с теорией Янга — Миллса, в которой калибровочная группа образуется 496 генераторами.

Наконец, мы должны понять, что произошло с симметрией в компактном 16-мерном пространстве. Фактически уже из работ Френкеля и Каца, Сигала, а также Годдарда и Олива [50] известно, что можно построить представления групп $E_8 \times E_8$ и $\text{Spin}(32)/Z_2$, привязанных к решеткам $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ и Γ_{16} соответственно. С этой целью мы построим оператор $E(K^I)$, который действует на левобегущие состояния. Он представляет собой генератор группы, который транслирует состояния, принадлежащие весовой решетке, на корневой вектор K^I . Построение проводится следующим образом. Рассмотрим

$$E(K) = \oint_0 \frac{dz}{2\pi iz} : \exp [2iK^I x^I(z)] : C(K), \quad (5.18)$$

где $(K^I)^2 = 2$, $z = e^{2i(\tau + \sigma)}$.

Такие операторы содержат обычные трансляционные операторы $\exp(2iK^I x^I)$, которые сдвигают внутренние импульсы (равные степеням отображения) на K^I . Дополнительный член $C(K^I)$ можно рассматривать как операторный 1-коцикл, который выбирается таким образом, чтобы 480 операторов $E(K^I)$ (5.18) вместе с 16 операторами p^I удовлетворяли алгебре Ли групп $E_8 \times E_8$ или $\text{Spin}(32)/Z_2$.

Используя свойства когерентных состояний гармонических осцилляторов, можно непосредственно проверить, что

$$\begin{aligned}
 & : \exp [2iK^I x^I(z)] : : \exp [2iL^I x^I(w)] : = \\
 & = : \exp \{2i[K^I x^I(z) + L^I x^I(w)]\} : (z - w)^{K^I L^I} \quad \text{для } |w| < |z|. \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь коммутатор

$$[E(K), E(L)].$$

Контур интегрирования в z -плоскости может быть деформирован, так что вклад в интеграл будут давать только возможные сингулярности при $z = \omega$. Чтобы коммутатор был замкнутым, мы должны потребовать выполнения условий

$$C(K)C(L) = (-1)^{K \cdot L} C(L)C(K), \quad (5.20)$$

$$C(K)C(L) = \varepsilon(K, L)C(K+L). \quad (5.21)$$

Коммутатор будет ненулевым, если $K \cdot L = -1$. В этом случае $K+L$ является одним из корневых векторов, так как $(K+L)^2 = 2$. Вследствие нормального упорядочения нулевых мод коммутатор также будет ненулевым, если $K \cdot L = -2$. В этом случае $(K+L)^2 = 0$. Следовательно, $K = -L$. В остальных случаях коммутатор равен нулю. Таким образом,

$$[E(K), E(L)] = \begin{cases} \varepsilon(K, L)E(K+L), & \text{если } K+L \text{ — корневой вектор,} \\ K^I \cdot p^I, & \text{если } K = -L, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (5.22)$$

$$[p^I, E(K)] = K^I. \quad (5.23)$$

Коммутационные соотношения (5.22) и (5.23) в точности совпадают с коммутационными соотношениями для генераторов групп $E_8 \times E_8$ или $\text{Spin}(32)/Z_2$, если $\varepsilon(K, L)$ выбираются равными структурным постоянным (± 1 в этом базисе). Было показано, что можно построить $C(K)$ и $\varepsilon(K, L)$, и, следовательно, мы имеем два явных представления в пространстве Фока для левобегущих полей. Замечательно, что группа внутренней симметрии $SO(16)$, с которой мы начали, превращается при компактификации в группу ранга 16. Такое расширение группы в данном случае играет главную роль.

Операторный формализм

Теперь мы переходим к рассмотрению взаимодействий. Как и ранее, мы будем следовать методам, применяемым в теории точечных частиц. Существуют три различных подхода: операторный формализм, метод континуального интеграла и полевая теория. Первые два подхода являются существенно пертурбативными, тогда как последний подход (мы будем обсуждать его в следующих главах) может применяться для исследования как пертурбативных, так и непертурбативных аспектов.

Рассмотрим теорию $\lambda\phi^3$. В этом случае разложение по теории возмущений для произвольного элемента S -матрицы можно рассматривать как сумму диаграмм, напоминающих разветвленные полимеры. В узлах таких диаграмм каждая частица может с некоторой вероятностью расщепиться, и между узлами распространяются свободные частицы. Такие амплитуды можно получить из интеграла по траекториям; схематично их можно записать в виде

$$A \sim \lambda^{N-2} \int D x^\mu(\tau) \psi_1(x_1) \dots \psi_N(x_N) \exp(iS[x^\mu]), \quad (6.1)$$

где $\psi_K(x_K)$ — волновая функция K -го внешнего состояния. Действие, входящее в интеграл (6.1), состоит из суммы свободного действия (2.1), члена, фиксирующего калибровку, и действия духов Фейнмана — Фаддеева — Попова.

Этот метод получения амплитуд хорошо работает в теориях, где имеется только трехточечное взаимодействие, и особенно для диаграмм первого типа, изображенных на рис. 6.1. Такие диаграммы описывают процесс распространения одной частицы, которая последовательно испускает другие частицы в моменты времени τ_k . Тогда функциональный интеграл может быть разделен на интегралы от τ_1 до τ_2 , от τ_2 до τ_3 и т. д. В этих интервалах частица движется свободной. Диаграммы других типов, изображенные на рис. 6.1, проще всего получить, используя условия унитарности, а также результаты, полученные для диаграмм первого вида.

Существует другой подход, также очень полезный в особенности для диаграмм первого типа, — это операторный форма-

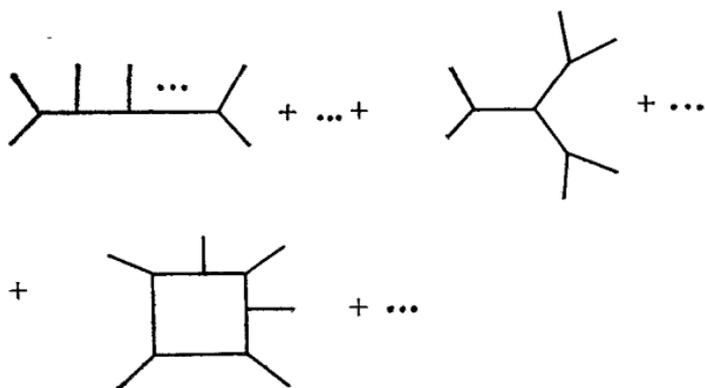


Рис. 6.1. Примеры диаграмм, отвечающих элементам S -матрицы в теории $\lambda\phi^3$.

лизм. Входящие в выражение (6.1) волновые функции внешних частиц имеют вид $\exp(ik_n \cdot x_n)$, где k_n — импульс n -й внешней частицы. Мы будем использовать представление, в котором x_n является c -числом. Рассмотрим теперь операторную волновую функцию $\exp[ik \cdot x(\tau)]$, где $x^\mu(\tau) = x^\mu + p^\mu\tau$ — решение уравнений движения и $[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$. Кроме того, введем вакуум $|0\rangle$, такой, что

$$p^\mu |0\rangle = 0. \quad (6.2)$$

Отсюда получаем

$$p^\mu e^{ik \cdot x(\tau)} |0\rangle = k^\mu e^{ik \cdot x(\tau)} |0\rangle. \quad (6.3)$$

Тогда амплитуду рассеяния, соответствующую диаграмме первого типа на рис. 6.1, естественно считать корреляционной функцией:

$$A_N \sim \lambda^{N-2} \int \prod d\tau_i \langle 0 | \exp[ik_1 \cdot x(\tau_1)] \times \\ \times \exp[ik_2 \cdot x(\tau_2)] \dots \exp[ik_N \cdot x(\tau_N)] | 0 \rangle. \quad (6.4)$$

Используя формулу Бейкера — Хаусдорфа, получаем (полагая, что $k^2 = 0$)

$$e^{ik \cdot (x + p\tau)} = \exp\left(\frac{i}{2} \tau p^2\right) e^{ik \cdot x} \exp\left(-\frac{i}{2} \tau p^2\right). \quad (6.5)$$

Поскольку τ мы считаем временной переменной, принимающей вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$, мы видим, что экспоненты в соотношении (6.5) плохо определены. Это типичная ситуация в релятивистской квантовой теории. Поэтому необходимо получить аналитическое продолжение к мнимому времени (виковский поворот), провести все вычисления и вернуться обратно; это даст в конечном счете правильную структуру полюсов. После перехода к мнимому времени мы должны также считать p^0 мнимым числом, и в окончательном выражении мы

вернем p^0 к вещественному значению обратным виковским поворотом. Следовательно, мы проводим замену $\tau \rightarrow i\tau$.

Можно ввести новые переменные:

$$\exp(-\tau_i) = z_i, \quad d\tau_i = -dz_i/z_i, \quad (6.6)$$

где z_i принадлежит действительной оси. Так как нас интересуют элементы S -матрицы, то будем считать, что начальное состояние, в котором находится первая частица, соответствует времени $-\infty$, а конечное состояние с N -й частицей соответствует времени $+\infty$. Поэтому мы получаем

$$z_1 = \infty, \quad z_N = 0.$$

После этого z_1 и z_N выпадают из выражения (6.4). Остальные переменные z_i должны быть упорядочены, и мы можем выбрать такой масштаб для z_i , чтобы $z_2 = 1$. Теперь естественно провести замену переменных $y_i = z_i/z_{i-1}$ и проинтегрировать по y_3, \dots, y_{N-1} в пределах от 0 до 1. В результате получаем выражение

$$A_N \sim \lambda^{N-2} \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \cdot \frac{1}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \cdots \frac{1}{(k_1 + \dots + k_{N-2})^2}, \quad (6.7)$$

в котором нетрудно узнать типичный элемент S -матрицы. Если мы теперь вернем p^0 обратно виковским поворотом, то получим полюсы с правильным фейнмановским предписанием. Мы могли бы провести вычисления с вещественными τ_i ; для этого нужно было вставить затухающие множители в выражение (6.5), тогда амплитуда (6.4) была бы хорошо определена. Такая процедура также привела бы к амплитуде (6.7) с фейнмановским правилом обхода полюсов. На практике мы будем работать с z -переменными и считать p^0 вещественным, но будем помнить, что полюсы нужно обходить по правилу Фейнмана.

Из выражения (6.7) легко получить диаграммные правила Фейнмана. В принципе мы можем также построить вершинные операторы и для чисто внутренних вершин, например для таких вершин, как изображенная на второй диаграмме рис. 6.1. Но в теории точечных частиц амплитуды для таких диаграмм проще получить, используя свойство унитарности и диаграммные правила Фейнмана, вытекающие из выражения (6.7).

Заметим, что на самом деле мы не выводили операторный формализм. В действительности мы можем установить однозначное соответствие между операторным формализмом и формализмом интеграла по траекториям и в этом смысле вывести его, если, конечно, считать, что последний формализм является более фундаментальным [51].

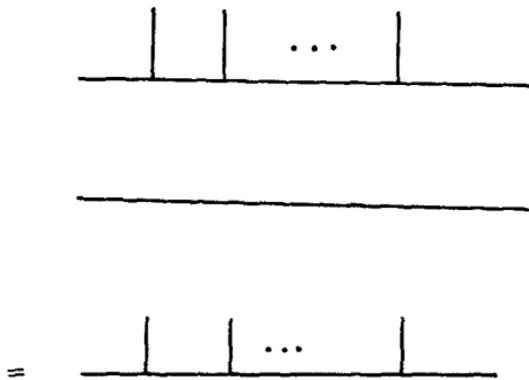


Рис. 6.2. Амплитуды излучения частиц струной.

В теориях, описывающих точечные частицы, наиболее мощным вычислительным средством оказалась квантовая теория поля, в рамках которой не только определяется правильное разложение по теории возмущений, но также исследуются различные непертурбативные аспекты. Когда мы хотим рассматривать струнные теории, которые являются более сложными, чем теории точечных частиц, оказывается нежелательным следовать слишком совершенным и потому технически достаточно сложным методам теории. Например, существует детально разработанная техника континуального интеграла, в рамках которой хорошо определяется разложение по теории возмущений. Мы не будем здесь останавливаться на этом, и читатель может найти подробное изложение этих вопросов в работе Манделстама [52]. Вместо этого остальная часть данной главы посвящена операторному формализму.

Одним из основных моментов операторного формализма в теории точечных частиц было предположение, согласно которому происходят только трехчастичные взаимодействия. Что касается струн, то в этом случае еще более естественно принять предположение, что струна распадается на две струны. (Попробуйте разрезать кусок веревки сразу на три части.) Рассмотрим вначале бозонные струны. Так как мы хотим получить S -матрицу, то нас интересуют амплитуды, в которых струны излучают определенные состояния. Для простоты начнем с амплитуды рассеяния N тахионов (рис. 6.2). Тахион представляет собой точечную частицу, особое состояние открытой струны. Чтобы не нарушить принцип локальности, мы должны предположить, что он излучается с одного из концов струны. Тогда естественное обобщение вершинного оператора теории точечных частиц на случай струн имеет вид [53]

$$V(k, \tau) = :e^{ik \cdot x(\sigma=0, \tau)}:, \quad (6.8)$$

где x^μ — то же, что в выражении (2.25), а нормальное упорядочение введено, чтобы имело смысл усреднение по вакууму. Чтобы установить соответствие с обозначениями модели Венециано, введем

$$\tau = -i \ln z, \quad Q^\mu(z) \equiv x^\mu(\sigma=0, \tau). \quad (6.9)$$

Процедура нормального упорядочения в выражении (6.8) дает

$$V(k, z) = \exp\left(k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n} z^n}{n}\right) e^{ik \cdot x + k \cdot p \ln z} \exp\left(-k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^{-n}}{n}\right). \quad (6.10)$$

Основываясь на аналогии с теорией взаимодействующих точечных частиц, предположим, что амплитуда в теории струн имеет следующий вид:

$$A_N \sim g^{N-2} \int \prod \frac{dz_i}{z_i} \langle 0 | V(k_1, z_1) \dots V(k_N, z_N) | 0 \rangle. \quad (6.11)$$

Здесь точки действительной оси z_i упорядочены таким образом, что $z_i > z_{i+1}$. Будем считать, что амплитуда (6.11) соответствует процессу, в котором частица 1 взаимодействует с частицей 2, и образовавшаяся частица затем последовательно излучает все остальные частицы. Выражение (6.11) будет правильной амплитудой в том случае, если оно содержит полюсы в промежуточных каналах и частицы, взаимодействующие в вычетах этих полюсов, совпадают с физическими состояниями струны, т. е.

$$L_n | \text{промежуточное состояние} \rangle = 0, \quad (6.12)$$

$$(L_0 - 1) | \text{промежуточное состояние} \rangle = 0. \quad (6.13)$$

Заметим, что мы не выводили амплитуду (6.11), а всего лишь взяли правдоподобное выражение.

Для дальнейшего исследования амплитуды вычислим среднее по вакууму в выражении (6.11). Это можно сделать двумя путями: либо прокоммутировать все операторы уничтожения с операторами рождения и расположить их правее всех операторов рождения, используя формулу Бейкера — Хаусдорфа, либо использовать методы операторного разложения. В результате получим

$$A_N = g^{N-2} \int \prod_{i=1}^N dz_i \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{k_i \cdot k_j}. \quad (6.14)$$

В принципе, как мы уже видели, из физических соображений следует, что должна существовать возможность выбрать $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$ и $z_N = 0$. Действительно, легко понять, что в струнной теории мы должны фиксировать три точки, так как амплитуда в том виде, в котором она выписана, инвариантна относительно преобразований Мёбиуса:

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (6.15)$$

где a , b , c и d — вещественные числа и $ad - bc = 1$. (Эта инвариантность имеет место только в том случае, когда $k^2 = 2$, т. е. испускаемые частицы должны находиться на массовой поверхности.) На операторном языке преобразования (6.15) генерируются операторами L_1 , L_0 и L_{-1} (которые образуют подалгебру алгебры Вирасоро).

Инвариантность относительно преобразований Мёбиуса позволяет преобразовать три переменные z_i так, чтобы они совпали с тремя фиксированными числами, поэтому интегрирование по этим трем переменным является лишним. Чтобы в амплитуде не было трех выделенных частиц, мы должны выполнить деление на инвариантную меру (меру Хаара). Это достигается, если переписать амплитуду в виде

$$A_N = g^{N-2} \int \prod_{i=1}^N \frac{dz_i}{z_i dV} \langle 0 | V(k_1, z_1) \dots V(k_N, z_N) | 0 \rangle, \quad (6.16)$$

где

$$dV = \frac{dz_a dz_b dz_c}{(z_a - z_b)(z_b - z_c)(z_c - z_a)};$$

в последнем выражении z_a , z_b , z_c — любые три точки из набора z_i .

Амплитуда (6.16) в действительности допускает более общие преобразования, а именно преобразования (6.15) без требования вещественности параметров a , b , c и d . Тогда мы можем деформировать вещественную ось в кривую на комплексной плоскости. Возьмем преобразование в виде

$$z \rightarrow \frac{z - i}{-iz + 1}; \quad (6.17)$$

тогда вещественная ось отобразится в единичную окружность. Если в амплитуду (6.14) подставить меру Хаара, в которой точки z принадлежат единичной окружности, мы получим известную формулу Коба — Нильсена для амплитуды рассеяния N частиц [54]. Из выражения (6.14) легко видеть, что амплитуда имеет правильную структуру полюсов. Остается доказать,

что в вычетах взаимодействуют только физические состояния. Чтобы доказать это утверждение, и был развит первоначально операторный формализм. Поэтому вернемся к выражению (6.8). Явные вычисления приводят к формуле

$$[L_n, V(k, z)] = z^n \left(z \frac{d}{dz} + n \frac{k^2}{2} \right) V(k, z). \quad (6.18)$$

Если оператор преобразуется по такому правилу, то говорят, что он имеет конформный спин $k^2/2$. В частности, мы получаем

$$[L_0, V(k, z)] = z \frac{d}{dz} V(k, z), \quad (6.19)$$

что равносильно выражению

$$V(k, z) = z^{L_0} V(k, 1) z^{-L_0}. \quad (6.20)$$

Рассмотрим теперь амплитуду (6.16) с фиксированной группой Мёбиуса $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$, $z_N = 0$:

$$\begin{aligned} A_N &= g^{N-2} \int \prod_{i=3}^{N-1} \frac{dz_i}{z_i} e^{ik_1 \cdot x} \langle 0 | V(k_2, 1) \dots V(k_{N-1}, z_{N-1}) | 0 \rangle e^{ik_N \cdot x} = \\ &= e^{ik_1 \cdot x} \langle 0 | V(k_2, 1) \frac{1}{L_0 - 1} V(k_3, 1) \dots \frac{1}{L_0 - 1} V(k_{N-1}, 1) | 0 \rangle e^{ik_N \cdot x}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

При выводе последнего выражения мы воспользовались равенством (6.20), перешли к переменным Чана [55]

$$y_i = z_i / z_{i-1} \quad (6.22)$$

и проинтегрировали по этим переменным. Мы снова явно видим структуру полюсов. Остается доказать, что в вычетах появляются только состояния, удовлетворяющие условиям Вирасоро (6.13). Для этой цели воспользуемся соотношениями

$$[L_n - L_0, V(k)] = \frac{n}{2} k^2 V(k), \quad \text{где } V(k) \equiv V(k, 1), \quad (6.23)$$

$$(L_n - L_0 + 1) \frac{1}{L_0 - 1} = \frac{1}{L_0 + n - 1} (L_n - L_0 + 1 - n), \quad (6.24)$$

где первое условие является следствием формулы (6.18), а второе следует из алгебры Вирасоро. Комбинируя их, получаем

$$(L_n - L_0 + 1) \frac{1}{L_0 + 1} V(k) = \frac{1}{L_0 + n - 1} V(k) (L_n - L_0 + 1). \quad (6.25)$$

Следовательно, оператор $(L_n - L_0 + 1)$ эффективно коммутирует со всей цепочкой пропагаторов и вершин в амплитуде, поэтому его можно протащить вправо и он будет действовать

непосредственно на “вакуум” $|0\rangle \exp(ik_N \cdot x)$, а это дает нуль. Последнее означает, что в вычетах взаимодействуют только физические состояния, и мы доказали, что амплитуда имеет правильную структуру полюсов. Заметим, что все время неявно предполагалось, что испущенные частицы находятся на массовой поверхности. Поэтому рассмотренные амплитуды можно использовать только в качестве элементов S -матриц. Проблема нахождения правильных амплитуд вне массовой поверхности представляет собой очень трудную задачу для дуальных моделей. Одно из решений этой задачи будет найдено в полевой теории струн.

Замечательное свойство амплитуды (6.16) состоит в том, что она обладает циклической симметрией по внешним состояниям. Например, если взять последний вершинный оператор, то мы можем, коммутируя его с другими вершинными операторами нужное число раз, поставить его после всех остальных вершинных операторов. Явные вычисления дают

$$V(k_1, z_1) V(k_2, z_2) = V(k_2, z_2) V(k_1, z_1) \exp[i\pi k_1 \cdot k_2 \varepsilon(z_1 - z_2)]. \quad (6.26)$$

Отсюда видно, что процесс коммутирования $V(k_N, z_N)$ со всеми остальными вершинными операторами в конечном счете приводит к появлению фазового множителя. Если учесть закон сохранения импульса (а также условия массовой поверхности), то оказывается, что этот фазовый множитель равен единице. Следовательно, мы получаем

$$A_N = g^{N-2} \int \prod_{i=1}^N \frac{dz_i}{z_i dV} \langle 0 | V(k_N, z_N) V(k_1, z_1) \dots V(k_{N-1}, z_{N-1}) | 0 \rangle. \quad (6.27)$$

Правило коммутирования (6.26) математически плохо определено, но правильность выражения (6.27) легко установить на основе формулы (6.14), если считать, что z_i в (6.14) лежат на единичной окружности. Математическая строгость достигается, если в коммутаторе считать, что импульсы лежат на решетке; такое рассмотрение проведено для случая гетеротической струны в гл. 5.

Свойство циклической симметрии амплитуды есть не что иное, как свойство *дуальности*, которое положено в основу дуальных моделей. Из этого свойства следует, что амплитуда имеет полюсы не только в тех каналах, которые показаны на рис. 6.2, но также и во многих других, а именно во всех каналах с импульсами $(k_i + k_{i+1} + \dots + k_{i+n})^2 = -2M$, где $n \leq N$, M — целое число и $M \geq -1$. Это значительно уменьшает количество слагаемых, необходимых для получения полной ампли-



Рис. 6.3. Факторизованная амплитуда струны.

туды. Чтобы построить полную амплитуду, нужно лишь взять сумму по всем циклически неэквивалентным перестановкам. Именно это делает операторный формализм столь полезным в теории струн. Амплитуда (6.16) содержит всю информацию о вершинах для других физических состояний. Благодаря свойству дуальности амплитуда может быть факторизована, как показано на рис. 6.3. Если принять, что $(k_i + k_{i+1})^2 = -2M$, то вычет дает выражение для амплитуды, у которой одна внешняя частица имеет квадрат массы, равный $2M$. Выражение для такой амплитуды может быть также получено с помощью «возбужденного» вершинного оператора. Дальнейшую информацию об этом можно найти в работе [56].

Если мы вернемся к тому, с чего начали, и обратимся к рис. 6.2, то увидим, что до сих пор мы рассматривали только частицы, испущенные из точки $\sigma = 0$. Действительно, для древесных амплитуд этого вполне достаточно, так как имеется свойство дуальности. Но если включить в рассмотрение петлевые диаграммы, то мы должны допустить, что частицы испускаются и с другого конца струны из точки $\sigma = \pi$. Такие диаграммы могут оказаться топологически неэквивалентными, поэтому они тоже должны учитываться. В нашем формализме легко построить вершину для испускания частицы из точки $\sigma = \pi$. По аналогии с выражением (6.8) определим ее как

$$\bar{V}(k, \tau) = :e^{ik \cdot x(\sigma=\pi, \tau)}: = (-1)^N V(k, \tau) (-1)^N, \quad (6.28)$$

где N — оператор числа частиц (2.57). Оператор $\Omega = (-1)^N$ называется «оператором твиста».

С помощью таких вершин мы можем, например, рассматривать такие диаграммы, как изображенная на рис. 6.4.

Упорядочение переменных интегрирования устроено так, что переменные (времена), соответствующие частицам, испущенным из точки $\sigma = 0$, и частицам, испущенным из точки $\sigma = \pi$,

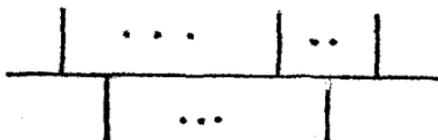


Рис. 6.4. Диаграмма струны, испускающей с обоих концов частицы.

упорядочиваются независимо друг от друга. Другими словами, один конец струны ничего не знает о том, что происходит на другом конце.

Все однопетлевые амплитуды были рассчитаны в операторном формализме. Чтобы их получить, по существу нужно взять следы от древесных амплитуд. Легко видеть, что такой простой процедуры на самом деле оказывается недостаточно. Дело в том, что в этом случае в вычетах появляются нефизические состояния. Чтобы устранить этот недостаток, надо вставить в амплитуду проектор на физические состояния. Явные вычисления приведены в работе [57]. Более современный метод состоит в использовании духов Фейнмана — Фаддеева — Попова [58]. Непосредственно видно, что это приводит к правильному результату [59].

При переходе к высшим петлям ситуация значительно усложняется, поскольку соответствующие диаграммы обязательно содержат вершинные операторы, в которых три струны находятся вне массовой поверхности. Но даже в этом случае были получены красивые результаты, основанные на топологии таких диаграмм, хотя и не все тонкости были доказаны. Дальнейшее обсуждение этих вопросов увлекло бы нас слишком далеко в сторону от основной темы этой главы, поэтому мы отсылаем читателя к литературе [60].

Операторный формализм для модели Рамона — Невё — Шварца строится совершенно аналогично процедуре в модели Венециано. Вершина излучения тахиона (в случае открытых струн) получается из рассмотрения струны, испускающей частицу с одного из концов. Здесь естественно использовать суперполевою формулировку и рассмотреть вершинный оператор [39]:

$$V(k, z, \theta) = : \exp [ik \cdot \phi(\sigma = 0, z = e^{i\tau}, \theta = \theta_1 = -\theta_2)] :. \quad (6.29)$$

При этом нужно выбрать подходящие граничные условия, соответствующие сектору Рамона или Невё — Шварца. Тогда мы можем построить N -точечную амплитуду как корреляционную функцию таких вершинных операторов:

$$A_N = g^{N-2} \int \frac{\prod_{i=1}^N dz_i}{dV} \prod_{i=1}^N d\theta_i \langle 0 | V(k_1, z_1, \theta) \dots V(k_N, z_N, \theta_N) | 0 \rangle. \quad (6.30)$$

В случае, если взят рамоновский сектор, вакуум является спинором (с равными нулю массой и импульсом). После интегрирования по θ , которое в действительности является тривиальным (и дает общий множитель $(-)^{N/2}$), а также используя

уравнения движения для x^μ и λ^μ , получаем следующие вершины, соответствующие секторам Невё — Шварца и Рамона:

$$V_{NS}(k, z) = k \cdot H(z) : e^{ik \cdot Q(z)} :, \quad (6.31)$$

$$V_R(k, z) = k \cdot \Gamma(z) : e^{ik \cdot Q(z)} :, \quad (6.32)$$

где

$$H^\mu(z) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} b_r^\mu z^{-r}, \quad (6.33)$$

$$\Gamma^\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^\mu + i\gamma_{11} \sum_{n \neq 0} d_n^\mu z^{-n} \quad (6.34)$$

и $\gamma_{11} = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_9$. Отметим, что рамоновская вершина испускает скалярную частицу, хотя возможно также испускание псевдоскалярной частицы.

Чтобы убедиться в правильности таких амплитуд, мы должны, как и выше, доказать, что в них распространяются только физические состояния. Это делается точно так же, как в модели Венециано. Проинтегрируем по z в (6.30); тогда для полученного выражения можно показать, что L_n , G_r или F_n , действуя на вычеты, дают нуль. Так же, как в предыдущем случае, коммутируя вершинные операторы, можно доказать свойство циклической симметрии для амплитуды (6.30). Как и прежде, наиболее простой способ доказательства состоит в том, чтобы перейти к амплитуде в форме Коба — Нильсена. Для сектора Невё — Шварца вакуумное среднее в амплитуде (6.30) может быть рассчитано, и результат имеет следующий вид:

$$A_N = g^{N-2} \int \frac{\prod_{i=1}^N dz_i d\theta_i}{dV} \prod_{i < j} (z_i - z_j + \theta_i \theta_j)^{k_i \cdot k_j}; \quad (6.35)$$

в таком виде амплитуда впервые была получена Фэйрли и Мартэном [61]. Отсюда легко вывести свойства дуальности.

Как и в случае модели Венециано, можно определить оператор твиста, рассматривая испускание частиц с другого конца струны, а также построить петлевые амплитуды с внешними тахионными состояниями. Чтобы удовлетворить условию унитарности, необходимо включить проекционный оператор [57]. В более современном формализме вводятся духи, после чего однопетлевые амплитуды вычисляются прямым путем. Подробности можно найти в литературе.

Рассмотренные до сих пор вершины описывают процессы, в которых струна испускает частицы, при этом статистика ее не меняется. Но если распространяющаяся фермионная струна

испускает фермионную частицу, то она становится бозонной струной. Вершины таких процессов устроены гораздо сложнее, так как две струны в них описываются различными осцилляторами.

Общее выражение для вершины испускания фермиона должно иметь вид

$$V_{\psi}(k, z) = {}_2\langle 0 | {}_b \langle 0 | O(k, z) | 0 \rangle_1 | 0 \rangle_d. \quad (6.36)$$

Явная форма оператора $O(k, z)$ достаточно сложна. Она впервые была получена Корриганом и Оливом [62]. Подробно читатель может найти в их работе. После больших усилий была построена четырехфермионная древесная амплитуда [63]. Дальнейшее продвижение столкнулось с очень большими трудностями, но современные методы, учитывающие вклад духов, могут улучшить положение.

Рассмотренный нами в этой главе операторный формализм также оказывается полезным и в случае суперструнных теорий. Так как суперструнные теории можно получить из модели Рамона — Невё — Шварца, используя определенный проекционный оператор, операторный формализм можно распространить и на такие теории.

Тем не менее до сих пор не существует суперсимметричного ковариантного операторного формализма для теорий суперструн и гетеротических струн¹⁾, хотя в калибровке светового конуса операторный формализм для этих теорий существует [64]. Если мы подставим в вершинный оператор (6.8) и в пропагатор вместо $x^{\mu}(\sigma, \tau)$ разложение в калибровке светового конуса (2.42), то получим формализм, в котором имеются только физические состояния. Недостаток такого формализма состоит в том, что x^{-} имеет сложный вид — это квадратичная функция по x^i . Но в том случае, когда количество внешних частиц не превышает d , мы можем преобразованием Лоренца перейти в такую систему отсчета, где $k_i^{\dagger} = 0$. В этой системе отсчета вершинные операторы записываются в терминах только поперечных координат и импульсов. Это приводит к тому, что в результате вычислений будут получены неинвариантные ответы даже для элементов S -матрицы. В конечных выражениях нужно искусственно восстанавливать лоренц-инвариантность.

Формализм, аналогичный только что рассмотренному, был использован при вычислении однопетлевых диаграмм в суперструнах [65]; совсем недавно подобный формализм был развит для гетеротической струны [30].

¹⁾ См. предисловие к русскому изданию. — *Прим. ред.*

Полевая теория свободных суперструн

Самым результативным подходом, применяемым для описания взаимодействий точечноподобных частиц, является формализм вторичного квантования, или квантовая теория поля. Рассмотрим скалярную частицу, заданную своими координатами в фазовом пространстве x^μ и p_μ . Каждому оператору из набора коммутирующих операторов фазового пространства, например x^μ , поле ϕ ставит в соответствие числовое значение. Лоренцевы генераторы действуют на поле $\phi(x^\mu)$ по следующим правилам: действие x^μ на поле есть просто умножение на число, а p_μ действует как $-i\partial/\partial x^\mu$. Тогда переменную x^μ можно считать c -числом (собственным значением оператора x^μ). Построение формализма вторичного квантования осуществляется далее введением импульса $\pi(x)$, канонически сопряженного полю $\phi(x)$. После этого генераторы алгебры Лоренца могут быть представлены в виде

$$G \sim \int d^3x \pi(x) g \phi(x). \quad (7.1)$$

Легко написать выражение для действия поля $\phi(x)$, описывающее произвольное число свободных распространяющихся частиц; добавление к такому действию лоренц-инвариантных полиномов по $\phi(x)$ приводит к появлению взаимодействий.

Построение полевой теории суперструн осуществляется аналогичным образом. Начнем с рассмотрения суперпуанкаре-алгебры (4.10) — (4.12) для случая суперструн типа IIб. Мы должны переписать генераторы алгебры в терминах максимального набора коммутирующих координат. Для бозонных координат это легко проделать; мы можем взять просто $x^i(\sigma)$, x^- , x^+ в качестве такого набора, а импульсы представить в виде

$$p^i(\sigma) = -i \frac{\delta}{\delta x^i(\sigma)} \equiv -i\delta^i, \quad p^+ = i \frac{\partial}{\partial x^-} \equiv i\partial_-.$$

Что касается фермионных координат S_i^{Aa} , то для них мы не можем проделать то же самое, поскольку они не антикоммутируют сами с собой в исходном представлении. Чтобы

преодолеть эту трудность, введем другие переменные:

$$\theta^a = \frac{1}{\sqrt{2\rho^+ \pi}} (S_1^a + iS_2^a), \quad (7.2)$$

$$d^a = \sqrt{\frac{\rho^+}{2\pi}} (S_1^a - iS_2^a), \quad (7.3)$$

удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\{\theta^a(\sigma), \theta^b(\sigma')\} = \{d^a(\sigma), d^b(\sigma')\} = 0, \quad (7.4)$$

$$\{\theta^a(\sigma), d^b(\sigma')\} = \delta^{ab} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (7.5)$$

Тогда в качестве координаты можно взять $\theta^a(\sigma)$, а $d^a(\sigma)$ представить в виде $\delta/\delta\theta^a(\sigma)$. Поскольку в определении θ^a и d^a входит оператор ρ^+ , который имеет нетривиальные коммутационные соотношения с генераторами j^{i-} и j^{+-} , то переписать алгебру в терминах θ^a и d^a не так просто. Правильное новое представление задается выражениями [66, 67]

$$\begin{aligned} p^- = h &= \frac{i}{2\partial_-} \int d\sigma \left(\pi \delta^i \delta^i - \frac{1}{\pi} x'^i x'^i + dd' \frac{1}{\partial_-} - \theta \theta' \partial_- \right) \equiv \\ &\equiv \int d\sigma h(\sigma), \end{aligned}$$

$$p^+ = i\partial_-, \quad p^i = -i \int d\sigma \delta^i,$$

$$j^{ii} = -i \int d\sigma \left(x^i \delta^i - x^i \delta^i + \frac{1}{2} \theta \gamma^{ii} d \right),$$

$$j^{+-} = -i \int d\sigma (x^+ \delta^+ + x^i \partial_-),$$

$$j^{+-} = x^+ h - ix^- \partial_- - \frac{i}{4} \int d\sigma [\theta^a, d^a] + 2i, \quad (7.6)$$

$$j^{-i} = -\frac{i}{2} \int d\sigma \left[\{x^-(\sigma), \delta^i\} - i \{x^i, h(\sigma)\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left([(\gamma^i \theta)^{\dot{a}}, (\gamma^i d)^{\dot{a}}] \frac{\pi \delta^i}{\partial_-} - \left(d \gamma^{ii} d \frac{1}{\partial_-} - |\theta \gamma^{ii} \theta \partial_- \right) \frac{x'^i}{\partial_-} \right) - 4 \frac{\delta^i}{\partial_-} \right],$$

$$q_1^{+a} = i \sqrt{2} \int d\sigma \theta^a \partial_-, \quad q_1^{-\dot{a}} = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \int d\sigma \left[(\gamma^i \theta)^{\dot{a}} \pi \delta^i - (\gamma^i d)^{\dot{a}} \frac{x'^i}{\partial_-} \right],$$

$$q_2^{+a} = \sqrt{2} \int d\sigma d^a, \quad q_2^{-\dot{a}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int d\sigma \left[(\gamma^i d)^{\dot{a}} \frac{\pi \delta^i}{\partial_-} + (\gamma^i \theta)^{\dot{a}} x'^i \right].$$

Оператор $x^-(\sigma)$, входящий в выражение для j^{-i} , определяется формулой

$$x'^-(\sigma) = -\frac{\pi}{\partial_-} (x'^i \delta^i + \theta' d). \quad (7.7)$$

Соответствующее поле для данного представления имеет вид $\Psi[x^+, x^-, x^i(\sigma), \theta^a(\sigma)]$, где координаты являются s -числами. Оказывается, что это представление приводимое. Введем фурье-образ

$$\Psi[x, \lambda] = \int D^8\theta(\sigma) \exp\left(\int d\sigma \lambda^a \theta^a\right) \Psi[x, \theta] \quad (7.8)$$

и наложим ограничение

$$\Psi[x, \lambda] = \Psi[x, \theta]^*, \quad (7.9)$$

где комплексное сопряжение понимается в смысле $\theta^* = (1/p^+) \lambda$. Условие (7.9) связывает Ψ^* и Ψ , а это приводит к тому, что при варьировании полей в действии поле Ψ^* не должно варьироваться независимо от Ψ . Кроме того, наложим условие, смысл которого заключается в том, что начало отсчета вдоль струны можно выбирать произвольно:

$$\Psi[x(\sigma + \sigma_0), \theta(\sigma + \sigma_0)] = \Psi[x(\sigma), \theta(\sigma)]. \quad (7.10)$$

С точки зрения разложения по модам это условие означает, что $N = \tilde{N}$ при действии на поле.

Следующий этап — вторичное квантование теории, которое осуществляется наложением канонических коммутационных соотношений на поле и его сопряженный импульс. В калибровке светового конуса в качестве импульса по существу можно взять само поле, точнее $\partial_- \Psi$. (Заметим, что ∂_- — производная не по временной, а по пространственной координате.)

Введем обозначение для конфигурации $(x^-, x^i, \theta^a) \equiv \Sigma$ и потребуем выполнения условия

$$[\partial_- \Psi[\Sigma_1], \Psi[\Sigma_2]]_{x_1^+ = x_2^+} = -\frac{i}{2} \Delta^{17}[\Sigma_1, \Sigma_2], \quad (7.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^{17}[\Sigma_1, \Sigma_2] \equiv & \delta(x_1^- - x_2^-) \int d\sigma_0 \Delta^8[x_1^i(\sigma) - x_2^i(\sigma + \sigma_0)] \times \\ & \times \Delta^8[\theta_1^a(\sigma) - \theta_2^a(\sigma + \sigma_0)]. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В коммутаторе (7.11) производная ∂_- необходима для получения правильных свойств симметрии. Использовать пространственную производную поля в качестве импульса можно только в калибровке светового конуса.

Используя каноническое коммутационное соотношение (7.11), можно показать, что генераторы суперпуанкаре-алгебры представляются в виде

$$G = i \int D\Sigma \partial_- \Psi[\Sigma] g \Psi[\Sigma], \quad (7.13)$$

где g — генератор в представлении (7.6).

Зная гамильтониан p^- , мы можем написать уравнение движения

$$\partial_+ \Psi = -i\hbar \Psi \quad (7.14)$$

и построить действие

$$S = \int D\Sigma dx^+ \partial_- \Psi (\partial_+ + i\hbar) \Psi = \int D\Sigma dx^+ \partial_- \Psi \partial_+ \Psi + i \int H dx^+. \quad (7.15)$$

Если проделать аналогичный анализ для соответствующей полевой теории точечных частиц, то можно видеть, что помимо того представления суперпуанкаре-алгебры, которое возникает из соответствующего струнного представления в пределе стягивания струны в точку, существует бесконечное число других представлений [67]. Эти представления можно интерпретировать следующим образом: они соответствуют различным членам в действии, которые содержат высшие производные \square^2 , \square^3 и т. д. и являются возможными контрчленами к кинетическому действию. Такие контрчлены обязательно порождаются во взаимодействующей квантовой теории, если они не запрещаются какой-нибудь симметрией. Такой симметрии, по-видимому, не существует в квантовой теории поля. Этот факт является веским аргументом против квантовой теории поля. В противоположность этому в теории суперструн можно доказать, что *представление (7.13) единственно*, и любые возможные контрчлены к кинетическому действию запрещены [67].

Выражения (7.13) и (7.15) являются несколько формальными, и им следует придать точный смысл. Это можно сделать, если представить их в виде бесконечных разложений по модам. Такие разложения для координат и функциональных производных имеют вид

$$\begin{aligned} x^i(\sigma) &= x^i + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^i e^{2in\sigma} + \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in\sigma}) \equiv \\ &\equiv x^i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x_n^i \cos 2n\sigma + \tilde{x}_n^i \sin 2n\sigma), \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \delta^i(\sigma) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} + i \sum_{n \neq 0} (\alpha_n^i e^{2in\sigma} + \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in\sigma}) \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_n^i} \cos 2n\sigma + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_n^i} \sin 2n\sigma \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где

$$x_n^i = \frac{i}{2\sqrt{n}} (\alpha_n^i - \alpha_{-n}^i + \tilde{\alpha}_n^i - \tilde{\alpha}_{-n}^i), \quad (7.18)$$

$$\tilde{x}_n^i = -\frac{1}{2\sqrt{n}} (\alpha_n^i + \alpha_{-n}^i - \tilde{\alpha}_n^i - \tilde{\alpha}_{-n}^i), \quad (7.19)$$

и

$$\begin{aligned} \theta^a(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2p^+\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (S_n^{1a} + iS_{-n}^{2a}) e^{2in\sigma} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\theta_n^{1a} + i\theta_{-n}^{2a}) e^{2in\sigma} \equiv \theta_0^a + \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_n^a \cos 2n\sigma + \tilde{\theta}_n^a \sin 2n\sigma), \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} d^a(\sigma) &= \sqrt{\frac{p^+}{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (S_n^{1a} - iS_{-n}^{2a}) e^{2in\sigma} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_0^a} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta_n^a} \cos 2n\sigma + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}_n^a} \sin 2n\sigma \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где

$$\theta_n^a = \frac{1}{\sqrt{2p^+\pi}} (S_n^{1a} + S_{-n}^{1a} + iS_n^{2a} + iS_{-n}^{2a}), \quad (7.22)$$

$$\tilde{\theta}_n^a = \frac{i}{\sqrt{2p^+\pi}} (S_n^{1a} - S_{-n}^{1a} - iS_n^{2a} + iS_{-n}^{2a}). \quad (7.23)$$

Координаты x_n^i , \tilde{x}_n^i , θ_n^a и $\tilde{\theta}_n^a$ являются координатами гармонических осцилляторов. Тогда поле $\Psi[x(\sigma), \theta(\sigma)]$ может быть разложено по компонентным полям, если использовать полный набор волновых функций гармонических осцилляторов $\psi_n(x)$ и соответствующие волновые функции $\chi_{n,n'}(\theta, \tilde{\theta})$ для антикоммутирующих переменных [66]:

$$\begin{aligned} \Psi[x(\sigma), \theta(\sigma)] &= \sum_{n_k, n'_l, m_s, m'_t} \psi(n_k, n'_l, m_s, m'_t)(x_0, \theta_0) \times \\ &\times \prod_k \psi_{n_k}(x_k) \prod_l \psi_{n'_l}(\tilde{x}_l) \prod_{s,t} \chi_{m_s, m'_t}(\theta_s, \tilde{\theta}_t). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Функциональная мера в действии (7.15) выбирается такой, чтобы после интегрирования по координатам гармонических осцилляторов получалось следующее действие:

$$\begin{aligned} S &= \int d^{10}x_0 d^8\theta_0 \left[-\frac{1}{2} \sum_{\{n\}} \phi_{\{n\}}(x_0, \theta_0) (\square - N_\phi) \phi_{\{n\}}(x_0, \theta_0) + \right. \\ &\left. + \frac{i}{2} \sum_{\{m\}} \psi_{\{m\}}(x_0, \theta_0) \frac{\square - M_\psi}{\partial_-} \psi_{\{m\}}(x_0, \theta_0) \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

В этом выражении символ $\{n\}$ обозначает набор числовых индексов каждого бозонного и фермионного осцилляторов. Первая сумма в (7.25) содержит только бозонные поля, а вторая — только фермионные. Следовательно, действие является суммой обычных кинетических действий для всех компонентных полей струны.

Если мы обратимся теперь к открытым струнам и струнам типа Па, то в этих случаях описанное выше построение использовать нельзя. Действуя по аналогии с построением безмассовых супермультиплетов в гл. 4, мы можем найти $SO(8)$ -ковариантный формализм с векторными или тензорными суперполями. Но такие поля имеют высокую степень приводимости и должны удовлетворять довольно сложным условиям связи, которые делают формализм неприемлемым. Работая в суперполевом формализме, следует попытаться использовать скалярные суперполя, чтобы избежать высокой степени приводимости компонентных полей. Это достигается путем нарушения явной $SO(8)$ -инвариантности до инвариантности относительно группы $SU(4) \times U(1)$ [68]. Рассмотрим два $SO(8)$ -спинора A^a и B^a . Введем $SU(4)$ -спиноры $A^a \rightarrow (A_A, \bar{A}^A)$, где $A = 1, \dots, 4$, и аналогично для B^a ; тогда

$$A^a B^a = \frac{1}{2} (A_A \bar{B}^A + \bar{A}^A B_A). \quad (7.26)$$

Спиноры S^{1a} и S^{2a} , присутствующие в киральных теориях, распадаются на пары $SU(4)$ -спиноров:

$$S^{1a} \rightarrow S_A, \bar{S}^A, \quad (7.27)$$

$$S^{2a} \rightarrow \tilde{S}_A, \tilde{\bar{S}}^A, \quad (7.28)$$

а в теориях типа Па — на пары

$$S^{1a} \rightarrow S_A, \bar{S}^A, \quad (7.29)$$

$$S^{2a} \rightarrow \tilde{S}^A, \tilde{\bar{S}}_A. \quad (7.30)$$

Используя антикоммутирующий

$$\{S_A(\sigma), \bar{S}^B(\sigma')\} = \pi \delta_A^B \delta(\sigma - \sigma') \quad (7.31)$$

и аналогичные антикоммутирующие для других S , определим координаты и производные по следующим правилам:

$$\theta_A = \frac{1}{\sqrt{\pi p^+}} S_A, \quad (7.32)$$

$$\frac{\delta}{\delta \theta_A} = \sqrt{\frac{p^+}{\pi}} \bar{S}^A, \quad (7.33)$$

$$\tilde{\theta}_A = \frac{1}{\sqrt{\pi p^+}} \tilde{S}_A, \quad (7.34)$$

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{\theta}_A} = \sqrt{\frac{p^+}{\pi}} \tilde{S}^A. \quad (7.35)$$

После этого алгебра (4.10)—(4.12) для случая суперструн типа IIa переписывается в терминах координат и вариационных производных (7.32)—(7.35). Иногда бывает удобно ввести также $SU(4) \times U(1)$ -компоненты для $SO(8)$ -вектора x^i :

$$x^i \rightarrow (x^I, x^R, x^L), \quad I = 1, \dots, 6,$$

$$x^R = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^7 + ix^8), \quad x^L = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^7 - ix^8).$$

В теории открытых струн в качестве поля можно взять скалярное поле $\Phi^{ab} [x(\sigma), \theta(\sigma), \tilde{\theta}(\sigma)]$, а в теории замкнутых струн — поле $\Psi [x(\sigma), \theta(\sigma), \tilde{\theta}(\sigma)]$.

Граничные условия на координаты приводят к различным случаям полей. Кроме того, поля в рассматриваемых случаях открытых струн и струн типа IIa также являются приводимыми, и, следовательно, необходимо наложить на них “условия вещественности”, аналогичные соотношению (7.9). Струны типа I должны также удовлетворять условию неориентированности:

$$\Phi^{ab} [x(\sigma), \theta(\sigma), \tilde{\theta}(\sigma)] = -\Phi^{ba} [x(\pi - \sigma), \tilde{\theta}(\pi - \sigma), \theta(\pi - \sigma)], \quad (7.36)$$

$$\Psi [x(\sigma), \theta(\sigma), \tilde{\theta}(\sigma)] = \Psi [x(-\sigma), \tilde{\theta}(-\sigma), \theta(-\sigma)]. \quad (7.37)$$

После этого можно ввести канонические коммутационные соотношения для полей и переписать суперпуанкаре-алгебру во вторично квантованном виде, а также определить гамильтониан и лагранжиан теории. Как и в рассмотренном выше случае суперструн типа IIb, можно доказать, что построенные таким образом представления суперпуанкаре-алгебры являются единственными [67], и допустимых контрчленов к кинетическому действию, отличных от него самого, не существует.

На этом этапе следует подвести некоторые итоги, касающиеся квантовых струн. В разложении (7.24) мы определили локальную точечноподобную структуру для каждого квантового состояния, в котором может находиться струна. Это можно понять, если считать каждую точку струны отдельным точечноподобным объектом, возбуждения которого задают определенные состояния. (Такие состояния не являются собственными векторами массового оператора и, следовательно, не являются истинными состояниями, но их гораздо легче представить себе,

чем гармонические моды, которые являются истинными состояниями.) Но когда струна распространяется, все состояния (или точки на струне) распространяются когерентно, поэтому мы должны рассматривать протяженный объект. В следующей главе мы исследуем взаимодействия и рассмотрим трехструнные вершины. Если каждая струна спроектирована на конкретное состояние, то мы получаем трехточечные функции.

Последнее замечание касается грасмановых координат, входящих в суперполе $\Psi[x(\sigma), \theta(\sigma)]$. Здесь мы не можем провести разложение в ряд Тейлора и получить конечное число полей $\Psi[x(\sigma)]$, как в случае суперполей в теории точечных частиц.

Полевая теория взаимодействующих суперструн типа IIb

Формулировка теории струн в калибровке светового конуса является вполне подходящей для введения взаимодействий. В этом формализме один из генераторов алгебры p^- является гамильтонианом, поэтому возникает естественный вопрос, можно ли добавить к гамильтониану члены с взаимодействием, сохранив при этом алгебру. Оказывается, что все генераторы алгебры, которые уводят систему с плоскости квантования $x^+ = \text{const}$, должны содержать члены с взаимодействиями. Эти генераторы называются гамильтонианами или динамическими генераторами (в противоположность линейно-реализованным генераторам, которые называются кинематическими генераторами) по терминологии Дирака [69].

Точный вид членов взаимодействия мы получим в два этапа. Сначала мы представим генераторы в функциональной форме. Динамические генераторы выпишем в наиболее общей форме и потребуем, чтобы алгебра была замкнутой. На этой стадии построения мы сможем объединить все выражения в одно общее выражение. Затем на втором этапе, чтобы установить точный смысл этого общего выражения, мы должны перейти к разложению по модам и проверить, правильно ли определено каждое взаимодействие. После всего этого мы можем вернуться обратно к функциональной форме генераторов.

Запишем в общем виде вклад трехструнных взаимодействий в произвольный генератор (для случая суперструн типа IIb):

$$G_3 = i \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 \partial_- \Psi [\Sigma_1 + \Sigma_2] g(\sigma_1, \sigma_2) \Psi [\Sigma_1] \Psi [\Sigma_2]. \quad (8.1)$$

В этом выражении конфигурации Σ_1 и Σ_2 имеют одну общую точку. Конфигурация $\Sigma_1 + \Sigma_2$ является объединением конфигураций Σ_1 и Σ_2 . Чтобы взаимодействие было локальным, оператор $g(\sigma_1, \sigma_2)$ должен действовать в точках σ_1 и σ_2 , которые расположены бесконечно близко к общей точке конфигураций Σ_1 и Σ_2 , называемой также точкой взаимодействия. Если мы перейдем в выражении (8.1) к разложению по модам, то увидим, что в разложении необходимо ввести сглаживающие функции, чтобы подавить расходимость вблизи точки взаимодействия. Но

при проверке замкнутости суперпуанкаре-алгебры эти функции не существенны.

Исследуя алгебру на замкнутость, мы будем иметь дело с коммутатором двухструнного и трехструнного операторов. Пусть

$$A = i \int D\Sigma \partial_- \Psi [\Sigma] \int d\sigma a(\sigma) \Psi [\Sigma], \quad (8.2)$$

$$B = i \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 \partial_- \Psi [\Sigma_1 + \Sigma_2] b_1(\sigma_1) \Psi [\Sigma_1] b_2(\sigma_2) \Psi [\Sigma_2], \quad (8.3)$$

причем функциональные операторы можно интегрировать по частям, т. е. оператор, действующий на $\Psi [\Sigma_1]$ или на $\Psi [\Sigma_2]$ можно перекинуть на $\Psi [\Sigma_1 + \Sigma_2]$ (с соответствующим изменением знака). С учетом этого мы получаем ответ:

$$\begin{aligned} [A, B] = & i \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 \partial_- \Psi [\Sigma_1 + \Sigma_2] \times \\ & \times \int d\sigma \{ [b_1(\sigma_1), a(\sigma)] \Psi [\Sigma_1] b_2(\sigma_2) \Psi [\Sigma_2] + \\ & + b_1(\sigma_1) \Psi [\Sigma_1] [b_2(\sigma_2), a(\sigma)] \Psi [\Sigma_2] \} \end{aligned} \quad (8.4)$$

при условии, что $a(\sigma)$ не содержит ∂_- . Производная ∂_- требует особого обращения. Это можно понять на простом примере:

$$\begin{aligned} & \left[\int D\Sigma \partial_- \Psi [\Sigma] \int d\sigma \frac{a(\sigma)}{\partial_-} \Psi [\Sigma], i \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 \partial_- \Psi [\Sigma_1 + \Sigma_2] \Psi [\Sigma_1] \Psi [\Sigma_2] \right] = \\ & = \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 \partial_- \Psi [\Sigma_1 + \Sigma_2] \times \\ & \times \int d\sigma \frac{1}{\partial_-} \left\{ \frac{a(\sigma)}{\partial_-} \Psi [\Sigma_1] \partial_- \Psi [\Sigma_2] \partial_- \Psi [\Sigma_1] \frac{a(\sigma)}{\partial_-} \Psi [\Sigma_2] \right\}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Можно ожидать, что трехструнная вершина содержит члены не более чем с двумя поперечными функциональными производными, так как безмассовая трехточечная амплитуда включает трехгравитонную вершину, но здесь мы допускаем самое общее выражение для гамильтониана.

Мы будем действовать так же, как при построении обычной суперполевой теории в калибровке светового конуса. Начнем с тех частей динамических генераторов суперсимметрии $Q_A^{-\dot{a}}$ и гамильтониана p^- , которые содержат трехструнные взаимодействия, и рассмотрим их взаимные коммутаторы, а также их коммутаторы с кинематическими генераторами. Введем обозначения

$$Q_{A_3}^{-\dot{a}} = i \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 \partial_- \Psi [\Sigma_1 + \Sigma_2] q_A^{\dot{a}}(\sigma_1, \sigma_2) \Psi [\Sigma_1] \Psi [\Sigma_2], \quad (8.6)$$

$$H_3 = i \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 \partial_- \Psi [\Sigma_1 + \Sigma_2] h(\sigma_1, \sigma_2) \Psi [\Sigma_1] \Psi [\Sigma_2]. \quad (8.7)$$

Теперь нужно просмотреть различные (анти) коммутаторы в порядке нарастания сложности. Коммутаторы $\{Q_A^{+a}, Q_B^{-\dot{a}}\}$, $[Q_A^{+a}, H]$, $[J^{+i}, Q_A^{-\dot{a}}]$ и $[J^{+i}, H]$ дают ограничение на функциональные производные, а именно они должны появляться только в комбинациях $\mathbf{d}^a = d_1^a/\partial_{-1} - d_2^a/\partial_{-2}$ и $\delta^i = \delta_1^i/\partial_{-1} - \delta_2^i/\partial_{-2}$.

Из $\{Q_1^{-\dot{a}}, Q_2^{-\dot{b}}\}$ заключаем, что x_i появляется только в комбинации $\mathbf{x}^i = x_1^i/\partial_{-1} - x_2^i/\partial_{-2}$. Из этого коммутатора также следует, что функциональные операторы не должны иметь явной зависимости от θ . Кроме того, из коммутатора $[J^{+-}, Q_A^{-\dot{a}}]$ получаем $\# \partial_{-} + 1/2 \# d = 3/2$.

Используя полученные ограничения, можно попытаться найти более конкретный вид оператора $q_A^{\dot{a}}(\sigma_1, \sigma_2)$. Тот факт, что коммутаторы $\{Q_A^{-\dot{a}}, Q_B^{-\dot{b}}\}$ должны быть пропорциональными $\delta^{\dot{a}\dot{b}}$, дает очень сильное ограничение. Начнем с той части в операторе $q_A^{\dot{a}}$, которая не содержит спинорных производных, и далее будем последовательно наращивать число таких производных. В результате долгих и кропотливых вычислений, а также многократного использования свойств представления $SO(8)$, получим однозначный ответ для h :

$$h = \kappa \partial_{-}^3 \sum_{n=0, 2, 4, 6, 8} C_{a_1 \dots a_n}^{ij} \mathbf{d}^{a_1} \dots \mathbf{d}^{a_n} \bar{\mathbf{p}}^i \mathbf{p}^j \frac{\partial_{-1}^{n/2} \partial_{-2}^{n/2}}{\partial_{-}^{n/2}}, \quad (8.8)$$

где

$$\mathbf{p}^i = -i\delta^i + \mathbf{x}'^i, \quad \bar{\mathbf{p}}^i = i\delta^i + \mathbf{x}'^i, \quad (8.9)$$

$$C^{ij} = \delta^{ij}, \quad C_{a_1 a_2}^{ij} = -\frac{i}{2} \gamma_{a_1 a_2}^{ij},$$

$$C_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{ij} = -\frac{1}{4!} t_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{ij},$$

$$C_{a_1 \dots a_6}^{ij} = \frac{i}{2 \cdot 6!} \varepsilon_{a_1 \dots a_6} \gamma_{a_7 a_8}^{ij},$$

$$C_{a_1 \dots a_8}^{ij} = \frac{1}{8!} \varepsilon_{a_1 \dots a_8} \delta^{ij}.$$

(8.10)

Использованные здесь матрицы определяются соотношениями

$$t_{abcd}^{ij} = \gamma_{[ab}^{ik} \gamma_{cd]}^{jk}. \quad (8.11)$$

Теперь остается установить точный вид членов, содержащих ∂_{-} . Для этого надо исследовать различные коммутаторы с J^{i-} . Это очень длинные и сложные вычисления, но они должны быть проведены, чтобы быть уверенным в сохранении всей алгебры. Для нахождения только ∂_{-} -структуры можно использовать

более простой подход, основанный на исследовании четырехточечной амплитуды. В работе [68] это сделано для случая открытых струн.

Для полноты мы исследуем также гамильтониан в разложении по модам. Рассмотрим гамильтониан (8.7), в котором \hbar задано выражением (8.8). Чтобы выражение (8.7) стало симметричным по отношению к перестановке струн 1, 2 и 3, вставим в выражение (8.7) интеграл

$$\int D\Sigma_3 \Delta^{17} [\Sigma_3 - \Sigma_1 - \Sigma_2] = 1. \quad (8.12)$$

На данном этапе удобно переопределить переменные σ с помощью масштабного преобразования, чтобы они стали пропорциональными p^+ . Тогда в этих новых переменных длина струны 3 совпадает с суммой длин струн 1 и 2, а дельта-функция в (8.12) означает просто, что в момент взаимодействия струны 1 и 2 точно составляют струну 3 или струна 3 распадается на струны 1 и 2, но так, что длины струн 1 и 2 не перекрываются. Ясно, что это естественное взаимодействие с точки зрения геометрии. К сожалению, в данном формализме имеется также оператор $h(\sigma_1, \sigma_2)$, действующий в точке взаимодействия, который несколько затемняет чисто геометрическую картину расщепления струны. Явное интегрирование по всем высшим модам является слишком трудной задачей. Вместо этого рассмотрим выражение

$$E = \kappa \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 D\Sigma_3 \Delta^{17} [\Sigma_3 - \Sigma_2 - \Sigma_1] \Psi[\Sigma_1] \Psi[\Sigma_2] \Psi[\Sigma_3]. \quad (8.13)$$

Проведя разложение по модам для всех координат и проинтегрировав по всем ненулевым модам, получим следующее формальное выражение:

$$E = \int \prod_{r=1}^3 d^9 x_r d^8 \theta_r \delta^{17}(z_1 - z_2) \delta^{17}(z_2 - z_3) \times \\ \times \sum_{\{n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}} C(\{n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}) \prod_{r=1}^3 \Psi_{\{n^{(r)}\}}(z_r), \quad (8.14)$$

где $\{n^{(1)}\}$ — сокращенная запись для бесконечного набора параметров $\{n_k^{(r)}, n_l'^{(r)}, m_s^{(r)}, m_t'^{(r)}\}$, определенных в (7.24), и $z_r = (x_r, \theta_r)$. Это довольно громоздкое выражение, поэтому, чтобы избежать такого большого числа индексов, введем вектор в пространстве Фока:

$$|V\rangle = \sum_{\{n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}} C(\{n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}) |n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\rangle. \quad (8.15)$$

Тогда взаимодействие трех определенных полей задается посредством выражения

$$C_{N_1, N_2, N_3} = \langle N_1, N_2, N_3 | V \rangle, \quad (8.16)$$

где $|N_1, N_2, N_3\rangle$ — вектор в пространстве Фока, а через N_1, N_2 и N_3 обозначены три набора целых чисел, задающих возбужденные уровни трех струн. Зная $|V\rangle$, можно в принципе получить исходное выражение для E .

Нахождение $|V\rangle$ путем прямых вычислений — утомительная задача. Более быстрый путь заключается в следующем. Заметим, что если подставить $x_3^i(\sigma) - x_1^i(\sigma) - x_2^i(\sigma)$ в подынтегральное выражение (8.14), то из-за Δ -функционала получим нуль. Проследив путь от формулы (8.14) к (8.16), мы заключаем, что вектор $|V\rangle$ должен удовлетворять условиям

$$(x_3^i(\sigma) - x_1^i(\sigma) - x_2^i(\sigma)) | V \rangle = 0, \quad (8.17)$$

$$(\theta_3^a(\sigma) - \theta_1^a(\sigma) - \theta_2^a(\sigma)) | \bar{V} \rangle = 0, \quad (8.18)$$

а также соответствующим условиям, содержащим импульсы. Все перечисленные условия позволяют определить вектор $|V\rangle$ с точностью до некоторых общих множителей, которые не содержат осцилляторов. Эти множители будут окончательно найдены ниже. Если написать наиболее общее выражение для $|V\rangle$ в терминах операторов рождения и потребовать выполнения условий (8.17) и (8.18), то мы получим

$$|V\rangle = \exp(E_\alpha + E_\theta) | 0 \rangle \delta^{17}(z_1^0 - z_2^0) \delta^{17}(z_2^0 - z_3^0); \quad (8.19)$$

здесь нулевые моды $z^0 = (x_0, \theta_0)$ и

$$E_\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r, s=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^{(r)} \bar{N}_{mn}^{rs} \alpha_{-n}^{(s)} + \tilde{\alpha}_{-m}^{(r)} \tilde{N}_{mn}^{rs} \tilde{\alpha}_{-n}^{(s)}) + \right. \\ \left. + P \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \bar{N}_m^r (\alpha_{-m}^{(r)} + \tilde{\alpha}_{-m}^{(r)}) - \frac{\tau_0}{\alpha} P^2 \right\}, \quad (8.20)$$

$$E_\theta = \frac{1}{2} \sum_{r, s=1}^3 \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r} [\theta_{-m}^{1(r)} (C \bar{N}^{rs})_{mn} \theta_{-n}^{1(s)} + \theta_{-m}^{2(r)} (C \bar{N}^{rs})_{mn} \theta_{-n}^{2(s)}] + \\ + \frac{i}{2} \alpha \left(\sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{-m}^{(r)} \frac{C}{\alpha_r} \bar{N}_m^r \right) \left(\sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{-n}^{(s)} \frac{C}{\alpha_s} \bar{N}_n^s \right) - \\ - \Lambda \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r} (\bar{N}^r C)_m (e^{-i\pi/4} \theta_{-m}^{1(r)} + e^{i\pi/4} \theta_{-m}^{2(r)}), \quad (8.21)$$

где $\theta_{-m}^{1,2}$ определены выражением (7.20), а также введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 2\rho_r^+, \quad \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \quad \tau_0 = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \ln \alpha_r, \\ P^i &= \alpha_1 p_2^i - \alpha_2 p_1^i, \quad \Lambda^a = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \theta_{02}^a} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \theta_{01}^a}, \quad C_{mn} = m \delta_{mn}, \\ \bar{N}_{mn}^{rs} &= - \frac{mna}{n\alpha_r + m\alpha_s} \bar{N}_m^r \bar{N}_n^s, \\ \bar{N}_m^r &= \frac{1}{\alpha_r} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{\Gamma\left(m\left(1 + \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - m\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r}\right)}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Теперь мы можем рассмотреть гамильтониан (8.7) с оператором $h(\sigma_1, \sigma_2)$, заданным выражением (8.8). Используя вставку Δ -функционала (8.12), приведем h к симметричной форме $h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Повторяя путь от выражения (8.13) до (8.15), мы получим, что гамильтониану соответствует в фокковском пространстве вектор

$$|H\rangle = h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) |V\rangle, \quad (8.23)$$

где h выражено через осцилляторы. Если операторы, содержащиеся в h , прокоммутировать с экспонентой в $|V\rangle$, то получим

$$p_1^i(\sigma) |V\rangle \xrightarrow{\sigma \rightarrow \sigma_1} \frac{1}{\pi} (\sigma_1 - \sigma)^{-1/2} Z^i |V\rangle, \quad (8.24)$$

$$d_1^a(\sigma) |V\rangle \xrightarrow{\sigma \rightarrow \sigma_1} \frac{1}{\pi} (\sigma_1 - \sigma)^{-1/2} Y^a |V\rangle, \quad (8.25)$$

где $Z^i |V\rangle$ и $Y^a |V\rangle$ — векторы с конечной нормой.

Наконец, мы можем теперь вернуться к функциональному выражению, чтобы получить правильно нормированный трехструнный гамильтониан в виде (8.7) и (8.8), где сделана замена

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^i(\sigma) &\rightarrow \sqrt{\sigma_1 - \sigma} \mathbf{p}^i(\sigma), \\ \bar{\mathbf{p}}^i(\sigma) &\rightarrow \sqrt{\sigma_1 - \sigma} \bar{\mathbf{p}}^i(\sigma), \\ \mathbf{d}^a(\sigma) &\rightarrow \sqrt{\sigma_1 - \sigma} \mathbf{d}^a(\sigma), \end{aligned} \quad (8.26)$$

и рассмотреть поведение всего выражения в пределе $\sigma \rightarrow \sigma_1$.

Дальнейшую проверку гамильтониана можно осуществить, рассматривая взаимодействия трех безмассовых частиц. Эти взаимодействия легче всего получить из вершинного вектора (8.23), вычисляя различные матричные элементы $|H\rangle$ с тремя основными состояниями. Вместо этого можно принять, что $\sigma \rightarrow 0$, и, таким образом, воспроизвести точечные частицы в выражениях (8.7) и (8.8). Можно показать, что полученные выражения соответствуют кубичным взаимодействиям в $N = 2$ -супергравитации.

Другие примеры струнных взаимодействий и возможное появление аномалий

Построение взаимодействий включает нахождение нелинейных представлений суперпуанкаре-алгебры с использованием вторично квантованных функционалов. В случае открытых струн мы начнем с построения трехструнного взаимодействия. Рассмотрим естественное взаимодействие, которое возникает, когда концы двух струн соединяются и образуется одна струна. Будем использовать полевой формализм, рассмотренный в гл. 7, и возьмем гамильтониан в виде

$$H_3 = i \int D\Sigma_1 D\Sigma_2 h_3(\sigma_1, \sigma_2) \text{Tr}(\partial_- \Phi[\Sigma_1 + \Sigma_2] \Phi[\Sigma_1] \Phi[\Sigma_2]), \quad (9.1)$$

где след берется по индексам группы $SO(N)$ или $Sp(2N)$ поля Φ . В момент взаимодействия одна крайняя точка в конфигурации Σ_1 совпадает с одной из крайних точек в Σ_2 . Переменные σ мы выберем так, чтобы длина струны была равна $\alpha \equiv 2\rho^+ \pi$.

Здесь также необходимо использовать всю алгебру, чтобы получить однозначный ответ для гамильтониана, где

$$h_3 = g \partial_- \sum_{n=0, 2, 4} C_{A_1, \dots, A_n}^i \frac{\delta}{\delta \theta_{A_1}} \dots \frac{\delta}{\delta \theta_{A_n}} \mathbf{p}^i \frac{\partial_{-1}^{n/2} \partial_{-2}^{n/2}}{\partial_{-}^{n/2}}; \quad (9.2)$$

часть обозначений уже использовалась в выражении (8.8). (Дальнейшая информация об обозначениях приведена в приложении к части I). Кроме того,

$$\begin{aligned} C^i &= 1/\sqrt{2} && \text{для } i = L, \\ C_{AB}^i &= \rho_{AB}^I && \text{для } i = I, \\ C_{ABCD}^i &= (\sqrt{2}/3) \varepsilon_{ABCD} && \text{для } i = R, \\ C^i &= C_{AB}^i = C_{ABCD}^i = 0 && \text{в остальных случаях.} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Как и в случае замкнутых струн, детальное исследование гамильтониана в разложении по модам показывает, что

необходимо включить определенные сглаживающие факторы. А именно все операторы $\delta/\delta\theta_A$ и \mathbf{p}^i нужно умножить на фактор $(\lambda\alpha_1 - \sigma)^{1/2}$ и взять предел при $\sigma \rightarrow \lambda\alpha_1$.

Вершины для открытых струн также можно использовать для построения вершин в замкнутых струнах; для этого нужно взять их прямое произведение. Поскольку мы уже видели, что левобегущие и правобегущие моды разделяются во всех генераторах, мы можем построить вершину для замкнутых струн путем перемножения двух вершин для открытых струн, одна из которых содержит только левобегущие моды, а другая — только правобегущие. После этого построенную вершину можно переписать также в функциональной форме как произведение левобегущих и правобегущих операторов.

Таким образом, трехструнные взаимодействия мы знаем. Существуют ли взаимодействия с большим числом струн, подобно тому как существуют высшие взаимодействия в теории точечных частиц? Ответ вероятнее всего будет отрицательным. Можно убедиться в том, что четырехструнное взаимодействие, которого можно было бы ожидать из коммутатора $\{Q_{A_3}^{-a}, Q_{B_3}^{-b}\}$, в действительности равно нулю [68] (за исключением возможного ненулевого члена, соответствующего рассеянию вперед), а также в том, что явные вычисления четырехчастичной амплитуды с использованием только трехструнных вершин приводят к лоренц-инвариантным выражениям. Следовательно, алгебра оказывается замкнутой с учетом только трехструнных взаимодействий. Возможность привлечения взаимодействий с большим числом струн до сих пор не исключена, но это весьма маловероятно.

Оба рассмотренных типа взаимодействий являются локальными. Для получения последовательной теории мы должны потребовать, чтобы взаимодействие возникало всякий раз, когда концы струн соприкасаются или сближаются две внутренние точки струн. Эти случаи изображены на рис. 9.1 и 9.2.

В случае открытых струн с естественным трехструнным «взаимодействием Янга — Миллса», как в выражении (9.2), одна струна может свернуться и образовать замкнутую струну. Это приведет к взаимодействию в виде $g\Psi\Phi^{aa}$. То же самое касается гравитационного взаимодействия (8.8). В этом случае две открытые струны могут соприкоснуться двумя своими внутренними точками, затем обменяться сегментами и рассеяться в две новые струны, порождая взаимодействие $\kappa\Phi^4$. Отметим, что это взаимодействие отличается от обычного четырехструнного взаимодействия, в котором возникают только процессы $1 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 1$.

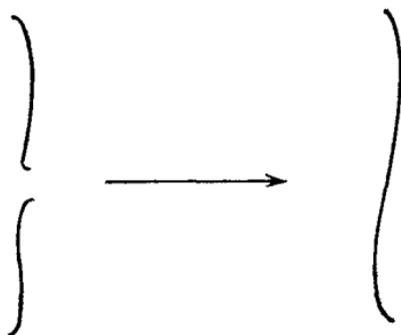


Рис. 9.1. Две открытые струны касаются концами и образуется новая струна.

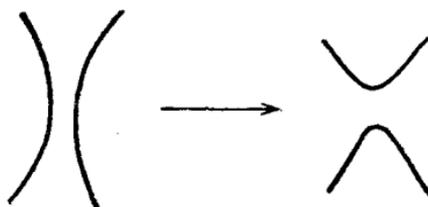


Рис. 9.2. Две струны касаются внутренними точками и обмениваются сегментами.

Гравитационное взаимодействие приводит к тому, что открытая струна может распасться на замкнутую и открытую струны, порождая вершину взаимодействия вида $\kappa\Psi\Phi^2$.

Наконец, в теориях типа I как открытая, так и замкнутая струна может сложиться вдвое, в результате чего образуется новая открытая или замкнутая струна. Эти взаимодействия порождают вершины вида $\kappa\Phi^2$ и $\kappa\Psi^2$.

Все вторично квантованные действия, соответствующие различным струнам, однозначны [67]. Это можно также доказать и для гетеротической струны [70]. Поэтому допустимых контрчленов к действию не существует, за исключением, может быть, его самого. Если в теории удастся доказать, что квантовые поправки не нарушают суперпуанкаре-инвариантности, то такие теории по крайней мере перенормируемы. Как было показано Манделстамом [71], S-матрица в суперструнах является ковариантной, поэтому она должна быть по крайней мере перенормируемой. Чтобы решить окончательно вопрос о конечности, потребуется гораздо лучшее понимание того, как устроены высшие петли.

Однопетлевые диаграммы были вычислены в операторном формализме светового конуса [65]. Было найдено, что в суперструнах типа II такие диаграммы действительно оказываются конечными, тогда как в суперструнах типа I однопетлевой

вклад, по-видимому, расходится, но является перенормируемым. Тем не менее детальная проверка показывает, что и в случае суперструн типа I однопетлевые диаграммы также приводят к конечному ответу, если в качестве калибровочной группы взять $SO(32)$ [72]. Для гетеротической струны также была показана конечность на однопетлевом уровне.

Суперпуанкаре-инвариантность, о которой мы говорили выше, в теории с взаимодействием проверялась только на классическом уровне. Исследование полной квантовой теории может только наложить еще большие ограничения на теорию. Так на однопетлевом уровне появляется условие $\kappa \sim g^2$. Более того, в киральных теориях квантовые поправки могут привести к аномалиям. Замечательно, что для суперструн типа I с калибровочной группой $SO(32)$ [28], для суперструн типа IIb [27] и для гетеротической струны не существует аномалий на однопетлевом уровне, хотя эти теории и содержат киральные фермионы.

Отсутствие аномалий в этих теориях само по себе оказалось большим сюрпризом. В десятимерной калибровочной теории с киральными фермионами, например в суперструнах типа I, можно было ожидать, что калибровочный ток имеет аномальную дивергенцию, возникающую из шестиугольных диаграмм, поскольку такие диаграммы могут давать вклад вида

$$\partial \cdot J^a \sim \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{10}} \text{Tr} (\Lambda^a F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_9 \mu_{10}}), \quad (9.4)$$

где матрицы взяты в том представлении, в котором находятся киральные фермионы, циркулирующие по петле. Грин и Шварц [28] вычислили шестиугольную диаграмму в операторном формализме Рамона — Невё — Шварца. Они показали, что аномалия сокращается, если взять калибровочную группу $SO(32)$.

Поскольку аномалии вызываются именно безмассовыми фермионами, нужно понять этот результат и на уровне соответствующей теории точечных частиц. Такая теория получается из струнной теории следующим образом. Будем исходить из полной струнной теории поля в случае суперструн типа I. Разложим порождающие функционалы Φ и Ψ в бесконечные ряды по полям, которые соответствуют точечным частицам, а затем проинтегрируем по всем массивным суперполям. Тогда мы получим (в принципе) эффективное действие в терминах суперполей ϕ_0 и ψ_0 безмассовых мод.

$$S_{\text{эфф}} = S_1(\phi_0, \psi_0) + S_2(\phi_0, \psi_0), \quad (9.5)$$

где S_1 состоит из локальных членов, а S_2 — из бесконечной последовательности нелокальных членов. Снова мы снимаем в

принципе все калибровки и получаем ковариантное действие, построенное из супергравитационного мультиплетта, взаимодействующего с мультиплетом Янга — Миллса. Хотя это гипотетические вычисления, отдельные члены эффективного действия можно получить, рассматривая струнные амплитуды с внешними безмассовыми состояниями в разложении по α' .

Тогда можно ожидать, что полученное действие S_1 в низшем порядке по α' совпадает с действием минимальной супергравитации, взаимодействующей с теорией Янга — Миллса. Однако оказывается, что это не так. А именно появляется новое дополнительное действие, включающее антисимметричное тензорное поле $B_{\mu\nu}$, которое в случае калибровочной группы $SO(32)$ имеет вид

$$S_c \sim \int B \wedge \left[\frac{1}{24} \text{Tr}(F \wedge F \wedge F \wedge F) - \frac{1}{7200} \text{Tr}(F \wedge F) \wedge \text{Tr}(F \wedge F) - \right. \\ \left. - \frac{1}{240} \text{Tr}(F \wedge F) \wedge \text{tr}(R \wedge R) + \frac{1}{8} \text{tr}(R \wedge R \wedge R \wedge R) - \right. \\ \left. - \frac{1}{32} \text{tr}(R \wedge R) \wedge \text{tr}(R \wedge R) \right]. \quad (9.6)$$

Действие (9.6) построено так, что уже в древесном приближении приводит к аномалиям, которые сокращают все однопетлевые аномалии, возникающие в минимальной теории. Это замечательный результат, и он показывает, каким образом струнные теории являются внутренне согласованными.

Рассмотренный нами механизм сокращения аномалий в теории поля работает также и в случае калибровочной группы $E_8 \times E_8$; этот факт стал основой для открытия гетеротической струны.

В суперструнах типа I и в гетеротической струне все однопетлевые диаграммы оказываются конечными. Следовательно, не нужно использовать какую-либо регуляризацию, и аномалии не могут возникнуть.

Мы только что видели, что между конечностью теории и отсутствием аномалий имеется глубокая связь. Эта связь несомненно распространяется и на петли высших порядков; она укрепляет нашу веру в то, что фундаментальная теория струн должна быть конечной.

Дальнейшие перспективы

Теория струн имеет прекрасную перспективу стать фундаментальной единой теорией природы. Как мы уже убедились, она, по-видимому, решает проблему квантовой гравитации; в рамках этой теории делается однозначный выбор калибровочной группы, а число возможных теоретически непротиворечивых моделей оказывается ограниченным. В настоящее время мы имеем всего пять моделей, которые, по-видимому, являются последовательными. И в лучшем из миров только одна из этих моделей должна быть полностью непротиворечивой. Нам остается выяснить три чрезвычайно важных вопроса.

1. Нам нужно выяснить вопрос о конечности квантовых поправок. Как мы уже говорили, имеются хорошие шансы, что конечность теории возмущений будет доказана в ближайшем будущем. Здесь наиболее плодотворным может оказаться подход Манделстама [71], основанный на первично квантованном формализме интеграла по траекториям; может также оказаться полезным подход вторично квантованной теории поля, который мы обсуждали выше. С некоторыми дополнительными предположениями аргументы, использующие контрчлены, также должны дать убедительные результаты.

Но показать, что каждый член разложения по теории возмущений является конечным, еще недостаточно. Мы должны также быть в состоянии просуммировать весь ряд или по крайней мере показать, что он является асимптотическим рядом. Здесь могут возникнуть трудности, так как параметром разложения является κ — размерная величина. В принципе петли высших порядков могут доминировать при высоких энергиях, а это как раз та область, где, как предполагается, мы должны перейти к струнной теории и отказаться от теорий точечных частиц. На старом S -матричном языке петли дают разрезы Редже, которые доминируют над полюсом Редже, если интерсепт полюса больше единицы, а именно это имеет место в данном случае. Поэтому возникают некоторые сомнения относительно того, что струнная теория является действительно фундамен-

тальной теорией в области очень высоких энергий. Решение этой проблемы безусловно окажется поучительным.

2. Второй основной вопрос касается нахождения геометрической интерпретации теории струн. Струнные теории рассматривались по существу только в калибровке светового конуса. Если обычную гравитацию описывать аналогичным образом в калибровке светового конуса, то в такой формулировке будет не просто увидеть принцип эквивалентности или общую ковариантность, лежащую в основе эйнштейновской теории. Поэтому мы должны найти общековариантные теории, которые после фиксации симметрии наложением калибровки светового конуса приводят к результатам, рассмотренным выше. В этом направлении были достигнуты некоторые успехи [73]. Это действительно грандиозная задача, поскольку нахождение общего принципа, по которому строится правильная теория струн, означало бы нахождение принципа, лежащего в основе теории, описывающей Природу! Кроме того, такая теория, возможно, имела бы важные следствия для математики. В свое время эйнштейновская гравитация оказала влияние на развитие таких областей современной математики, как дифференциальная геометрия, топология и многие другие. Вероятнее всего, теория струн будет использовать еще более тонкие математические методы и даже такую математику, которая еще находится на стадии развития.

3. Наконец, мы должны понять, каким образом осуществляется компактификация теории струн на четыре измерения. В этом вопросе недавно был достигнут большой прогресс. Канделас и др. [74] показали, что в случае гетеротической струны с калибровочной группой $E_8 \times E_8$ требование $N = 1$ -суперсимметрии для $d = 4$ приводит к тому, что можно найти такие классические решения, которые компактифицируются на $M_4 \times K$, где M_4 — четырехмерное пространство Минковского, а K — некоторое шестимерное пространство. Основываясь на аргументах из струнной теории, а также на исследовании соответствующей теории поля, они пришли к выводу, что это пространство должно быть риччи-плоским пространством с группой голономии $SU(3)$. Примеры этих пространств, называемых также «пространствами Калаби — Яу», были уже известны [75]. Таких пространств можно построить около 10 000. Остается надеяться, что дальнейшие исследования квантовой теории уменьшат число возможных решений. Мы надеемся, что в конечном счете только одно из таких решений окажется полностью последовательным. Все мечты осуществились бы в том случае, если квантовая теория не только выделила бы одну из струнных моделей, но также привела к тому, чтобы эта струнная модель компактифицировалась на четырех измерениях единственным

способом. Непротиворечивость решений Калаби—Яу подвергалась сомнениям, но я считаю, что нужно дождаться окончательного построения квантовой теории, и только после этого мы сможем полностью понять механизм компактификации.

Феноменология, основанная на решениях Калаби—Яу, рассматривалась Виттеном [76]; возможно, она является вполне перспективной. Такая феноменология приводит к четырехмерной теории с группой $E_6 \times E_8$; E_6 -часть четырехмерного мира это некая новая Теория великого объединения (ТВО), основанная на группе E_6 . Она обладает всеми теми хорошими свойствами, которые были характерны для старой вполне удовлетворительной ТВО, также основанной на группе E_6 . Но юкавские связи в новой ТВО существенно отличаются от проблематичных юкавских связей в старой ТВО. Часть четырехмерной теории с группой E_8 можно считать теневым миром, поскольку она взаимодействует с E_6 -частью только через гравитационные силы. Совершенно нетривиально, что возникает такая перспективная феноменология. В этой области еще многое нужно сделать, и только после полного понимания квантовой теории можно будет дать окончательные заключения.

Если теория струн действительно окажется такой успешной теорией, как я надеюсь, она должна будет прояснить некоторые фундаментальные физические проблемы, а также оказать влияние на другие области физики. А именно:

1. Теория струн должна объяснить, почему космологическая постоянная равна нулю. По-видимому, нет никакой возможности объяснить этот факт в рамках обычной физики. Здесь надежды связаны с тем, что симметрия общей ковариантности в теории струн окажется столь большой, что даже при тех энергиях, которые доступны для исследования сегодня, какая-то часть этой симметрии останется и приведет к требованию нулевой космологической постоянной.

2. Теория струн должна иметь важные следствия в космологии. Мы уже упоминали о возможности существования теневого мира. Кроме того, на очень ранних этапах своего развития Вселенная должна подчиняться законам струнной физики. Теория струн должна также влиять и на более поздние этапы, и здесь важно отметить, что теория струн не нарушает красоты стандартной космологической модели.

3. Теория струн должна оказывать воздействие на гравитацию при малых масштабах. Теория струн имеет гораздо более гладкое высокоэнергетическое поведение, чем обычная гравитация, а это должно привести к изменениям в физике черных дыр. Очень вероятно, что изменится структура сингулярностей, и возможно, что шварцшильдовская сингулярность исчезнет.

Всего несколько лет назад вся представленная здесь программа казалась бы слишком надуманной. Теперь я думаю, что это реалистическая программа, и надеюсь, что развитие фундаментальной физики пойдет этими путями. Уже несколько раз в прошлом ученые считали, что физика в основном завершена. Сегодня мы снова находимся на таком этапе. Будущее обязательно принесет нам сюрпризы, тем не менее я убежден, что струнная физика приведет нас к единой фундаментальной картине мира.

Некоторые обозначения и формулы

Алгебра группы $SO(8)$ имеет три неэквивалентные вещественные восьмимерные представления: одно векторное и два спинорных. Для векторного представления мы используем индексы i, j, \dots ; индексы a, b, \dots соответствуют первому спинорному представлению, а индексы \dot{a}, \dot{b}, \dots — второму спинорному представлению. Все перечисленные индексы пробегает значения от 1 до 8. Матрицы Дирака $\gamma_{\dot{a}\dot{a}}^i$ можно считать коэффициентами Клебша — Гордана, с помощью которых из трех различных представлений можно образовать синглет. Используется также второй набор матриц $\tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{a}}^i$. Мы выбираем их следующим образом:

$$\tilde{\gamma} = \gamma^T, \quad (\text{П.1})$$

$$\gamma_{\dot{a}\dot{a}}^i \tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{b}}^j + \gamma_{\dot{a}\dot{a}}^j \tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{b}}^i = 2\delta^{ij} \delta_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (\text{П.2})$$

$$\tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{a}}^i \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^j + \tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{a}}^j \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^i = 2\delta^{ij} \delta_{\dot{a}\dot{b}}.$$

Тогда матрицы 16×16

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\dot{a}\dot{a}}^i \\ \tilde{\gamma}_{\dot{b}\dot{b}}^i & 0 \end{pmatrix}$$

образуют алгебру Клиффорда. Определим также матрицы

$$\gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{\dot{a}\dot{a}}^i \tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{b}}^j - \gamma_{\dot{a}\dot{a}}^j \tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{b}}^i). \quad (\text{П.3})$$

Мы видим, что с учетом соотношения (П.1) эти матрицы являются антисимметричными по индексам a и b . Мы также можем определить матрицы

$$\gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{a}}^i \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^j - \tilde{\gamma}_{\dot{a}\dot{a}}^j \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^i), \quad (\text{П.4})$$

которые по тем же причинам антисимметричны по индексам \dot{a} и \dot{b} .

Чтобы иметь полное матричное пространство размерности 8×8 , введем также матрицы

$$\gamma_{ab}^{ijkl} \equiv (\gamma^{[i} \tilde{\gamma}^j \gamma^k \tilde{\gamma}^{l]})_{ab}, \quad (\text{П.5})$$

$$\gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{ijkl} \equiv (\tilde{\gamma}^{[i} \gamma^j \tilde{\gamma}^k \gamma^{l]})_{\dot{a}\dot{b}}. \quad (\text{П.6})$$

Эти матрицы симметричны.

Общая формула для преобразования Фирца имеет вид

$$M_{ab} = \frac{1}{8} \delta_{ab} \text{tr} M - \frac{1}{16} \gamma_{ab}^{ij} \text{tr} (\gamma^{ij} M) + \frac{1}{384} \gamma_{ab}^{ijkl} \text{tr} (\gamma^{ijkl} M). \quad (\text{П.7})$$

Шестимерное векторное представление группы $SU(4)$ можно получить как антисимметричное тензорное произведение двух спинорных представлений 4_s и $\bar{4}_s$. Соответствующие коэффициенты Клебша — Гордана (или матрицы Дирака) обозначим ρ_{AB}^{IAB} и ρ^{IAB} . Они нормируются, как обычно:

$$\rho^{IAB} \rho_{BC}^J + \rho^{IAB} \rho_{BC}^I = 2\delta^{IJ} \delta^A_C. \quad (\text{П.8})$$

Литература

1. *Regge T.*, Nuovo Cimento, **14**, 951 (1959); **18**, 947 (1960).
2. *Dolen R., Horn D., Schmid C.*, Phys. Rev., **166**, 1768 (1968).
3. *Veneziano G.*, Nuovo Cimento, **57A**, 190 (1968).
4. *Virasoro M. A.*, Phys. Rev., **D1**, 2933 (1970).
5. *Brower R. C.*, Phys. Rev., **D6**, 1655 (1972);
Goddard P., Thorn C. B., Phys. Lett., **40B**, 235 (1972).
6. *Nambu Y.*—In: Proc. Int. Conf. on Symm. and Quark Models, Wayne State Univ. 1969, Gordon and Breach, London, 1970;
Nielsen H. B., частное сообщение, 1969;
15th International Conference on High Energy Physics, Kiev, 1970;
Susskind L., Phys. Rev., **D1**, 1182 (1970).
7. *Ramond P. M.*, Phys. Rev., **D3**, 2415 (1971).
8. *Neveu A., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B31**, 86 (1971); Phys. Rev., **D4**, 1109 (1971).
9. *Brink L., Olive D. J., Rebbi C., Scherk J.*, Phys. Lett., **45B**, 379 (1973).
10. *Goddard P., Goldstone J., Rebbi C., Thorn C. B.*, Nucl. Phys., **56**, 109 (1973).
11. *Nambu Y.*, Lectures at Copenhagen Symposium, 1970.
12. *Hara O.*, Prog. Theor. Phys., **46**, 1549 (1971);
Goto T., Prog. Theor. Phys., **46**, 1560 (1971).
13. *Brink L., Nielsen H. B.*, Phys. Lett. **45B**, 332 (1973).
14. *Polyakov A. M.*, Phys. Lett. **103B**, 207, 211 (1981).
15. *Brink L., Di Vecchia P., Howe P. S.*, Phys. Lett. **65B**, 471 (1976);
Deser S., Zumino B., Phys. Lett., **65B**, 369 (1976).
16. *Gervais J.-L., Sakita B.*, Nucl. Phys., **B34**, 632 (1971).
17. *Ademollo M., Brink L., D'Adda A., D'Auria R., Napolitano E., Sciuto S., Del Giudice E., Di Vecchia P., Ferrara S., Gliozzi F., Musto R., Pettorino R.*, Phys. Lett., **62B**, 105 (1976).
18. *Ademollo M., Brink L., D'Adda A., D'Auria R., Napolitano E., Sciuto S., Del Giudice E., Di Vecchia P., Ferrara S., Gliozzi F., Musto R., Pettorino R., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B111**, 77 (1976).
19. *Lovelace C.*, Phys. Lett., **34B**, 500 (1970).
20. *Nielsen H. B., Olesen P.*, Nucl. Phys., **B57**, 367 (1973).
21. *Neveu A., Scherk J.*, Nucl. Phys., **B36**, 155 (1972).
22. *Yoneya T.*, Prog. Theor. Phys., **51**, 1907 (1974).
23. *Scherk J., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B81**, 118 (1974).
24. *Gliozzi F., Scherk J., Olive D. I.*, Phys. Lett., **65B**, 282 (1976); Nucl. Phys., **B122**, 253 (1977).
25. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B181**, 502 (1981).
26. *Schwarz J. H.*, Phys. Rep., **89**, 223 (1982);
Green M. B., Surveys in High Energy Physics, **3**, 127 (1983);
Brink L.—In: Supersymmetry (K. Dietz, R. Flume, G. Gehlen, V. Rittenberg, eds.), Plenum Press, New York, 1984, p. 89.
27. *Alvarez-Gaumé L., Witten E.*, Nucl. Phys. **B234**, 269 (1983).

28. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Phys. Lett., **149B**, 117 (1984); Nucl. Phys., **B255**, 93 (1985).
29. *Marcus N., Sagnotti A.*, Phys. Lett., **119B**, 97 (1982).
30. *Gross D. J., Harvey J. A., Martinec E., Röhm R.*, Phys. Rev. Lett., **54**, 502 (1985); Nucl. Phys., **B256**, 253 (1985). Princeton preprint, 1985.
31. *Goroff M., Sagnotti A.*, Phys. Lett., **160B**, 81 (1985).
32. *Howe P. S., Lindström U.*, Nucl. Phys., **B181**, 487 (1981); *Kallos R. E.*, Phys. Lett., **99B**, 122 (1981).
33. *Zumino B.*, не опубликовано.
34. Proceedings from the Workshop on Unified String Theories, Santa Barbara, 1985 (M. B. Green, D., J. Gross, eds.), World Scientific Publishing Company, Singapore, 1985.
35. *Dirac P. A. M.*, Can. J. Math., **2**, 129 (1950).
36. *Weis J. H.*, не опубликовано.
37. *Gliozzi F.*, не опубликовано.
38. *Zumino B.* — In: Renormalization and Invariance in Quantum Field Theory (E. Caianiello, ed.), Plenum Press, New York, 1974, pp. 367, 383.
39. *Brink L., Winnberg J.-O.*, Nucl. Phys., **B103**, 445 (1976).
40. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Phys. Lett., **109B**, 444 (1982).
41. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B181**, 502 (1981).
42. *Brink L., Lindgren O., Nilsson B. E. W.*, Nucl. Phys., **B212**, 401 (1983).
43. *Chan Hong-Mo, Paton J.*, Nucl. Phys., **B10**, 519 (1969).
44. *Schwarz J. H.*, Phys. Rep., **89**, 233 (1982).
45. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Phys. Lett., **136B**, 367 (1984).
46. *Bengtsson I., Cederwall M.*, ITP-Göteborg, 84—21 (1984).
47. *Siegel W.*, UCB-PTH-83/22 (1983).
48. *Gremmer E., Scherk J.*, Nucl. Phys., **B103**, 399 (1976); *Green M. B., Schwarz J. H., Brink L.*, Nucl. Phys., **B198**, 474 (1982).
49. *Goddard P., Olive D.* — In: Vertex Operators in Mathematics and Physics (J. Lepowski et al., eds.), MSRI Publication No. 3, p. 51, Springer, Heidelberg, 1984.
50. *Frenkel I. B., Kac V. G.*, Invent. Math., **62**, 23 (1980); *Segal G.*, Commun. Math. Phys., **80**, 301 (1981); *Goddard P., Olive D.* (см. 49).
51. *Casalbuoni R., Gomis J., Longhi G.*, Nuovo Cimento, **24A**, 249 (1974).
52. *Mandelstam S.* — In: Recent Development in Quantum Field Theory (J. Ambjörn, B. J. Duurhuus, J. L. Petersen, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1985, p. 251.
53. *Fubini S., Veneziano G.*, Nuovo Cimento, **67A**, 29 (1970).
54. *Koba Z., Nielsen B.*, Nucl. Phys., **B10**, 633 (1969).
55. *Chan Hong-Mo, Tsun T. S.*, Phys. Lett., **28B**, 485 (1969).
56. *Alessandrini V., Amati D., LeBellac M., Olive D.*, Phys. Rep., IC. No. 6 (1971).
57. *Brink L., Olive D.*, Nucl. Phys., **B58**, 237 (1973).
58. *Kato M., Ogawa K.*, Nucl. Phys., **B212**, 443 (1983); *Hwang S.*, Phys. Rev., **D28**, 2614 (1983).
59. *Bengtsson I.*, Classical and Quantum Gravity, **3**, L31 (1986).
60. *Lovelace C.*, Phys. Lett., **32B**, 703, (1970); *Alessandrini V.*, Nuovo Cimento, **2A**, 321 (1971); *Alessandrini V., Amati D.*, Nuovo Cimento, **4A**, 793 (1971).
61. *Fairlie D. B., Martin D.*, Nuovo Cimento, **18A**, 373 (1973).
62. *Corrigan E., Olive D.*, Nuovo Cimento, **11A**, 749 (1972).
63. *Corrigan E. F., Goddard P., Smith R. A., Olive D.*, Nucl. Phys., **B67**, 477 (1973).
64. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B198**, 252 (1982).
65. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B198**, 441 (1982).

66. *Green M. B., Schwarz J. H., Brink L.*, Nucl. Phys., **B219**, 437 (1983).
67. *Bengtsson A. K. H., Brink L., Cederwall M., Ögren M.*, Nucl. Phys., **B254**, 625 (1985).
68. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B243**, 475 (1984).
69. *Dirac P. A. M.*, Rev. Mod. Phys., **26**, 392 (1949).
70. *Brink L., Cederwall M., Green M. B.*, Nucl. Phys., **B293**, 114 (1987).
71. *Mandelstam S.* — In: Proceedings from the Workshop on Unified String Theories, Santa Barbara, 1985 (M. B. Green, D. J. Gross, eds.), World Scientific Publishing Company, Singapore, 1985, p. 46.
72. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Phys. Lett., **151B**, 21 (1985).
73. *Siegel W.*, Phys. Lett., **151B**, 391; 396 (1985);
Siegel W., Zweibach B., Nucl. Phys., **B263**, 105 (1986);
Banks T., Peskin M., SLAC preprint, 1985;
Itoh K., Kugo T., Kunitomo H., Ooguri H., Prog. Theor. Phys., **75**, 162 (1986);
Neveu A., West P., CERN preprints, 1985;
Friedan D., University of Chicago preprints, 1985.
74. *Candelas P., Horowitz G. T., Strominger A., Witten E.*, Nucl. Phys., **B258**, 46 (1985).
75. *Calabi E.* — In: Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, 1957, p. 78;
Yau S.-T., Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **74**, 1798 (1977).
76. *Witten E.*, Nucl. Phys., **B258**, 75 (1985).

Лекции по теории струн с применением гамильтоновых и БРСТ-методов

Марк Энно

Глава 11

Введение

Открытие Грином и Шварцем замечательного сокращения аномалий в суперструнных моделях с калибровочной группой $SO(32)$ или $E_8 \times E_8$ привело к огромному всплеску интереса к струнным теориям. Кроме того, большой интерес был связан с надеждой, что теория суперструн, объединяющая гравитацию с другими фундаментальными взаимодействиями, может оказаться конечной и, следовательно, свободной от расходимостей, которые доставляют крупные неприятности при любых попытках квантовать теорию Эйнштейна.

Даже если окажется, что струнные модели не приводят к «окончательной теории», но тот факт, что они затрагивают почти все основные понятия и трудности современной теории поля, делает их достойными изучения и объясняет то большое внимание, которое уделяется этим моделям. Это верно даже для первично квантованных моделей, которые используют такие понятия, как аномалии (квантовое нарушение классических симметрий или калибровочных инвариантностей), гамильтоновы системы со связями, гильбертовы пространства с индефинитной метрикой, симметрия Бекки—Рюэ—Стора—Тютинна (БРСТ), локальные и глобальные симметрии, подход Калуцы—Клейна, алгебры Каца—Муди, σ -модельные методы, топологические эффекты и пространства Тейхмюллера.

Данный обзор основан на лекциях, прочитанных в Брюсселе и Сантьяго для неспециалистов, впервые приступающих к изучению теории струн. Главное внимание уделено педагогическому изложению основ свободной первично квантованной теории.

Наш план заключается в том, чтобы рассмотреть в деталях бозонную модель, на примере которой проиллюстрировать все методы теории струн (единственное важное понятие, которое не рассматривается—суперсимметрия). Затем лишь кратко описываются другие модели, так как все необходимые средства для их понимания уже рассмотрены.

Повсюду в лекциях применяется гамильтонов формализм. Одним из преимуществ этого формализма является то, что он явно показывает связь условий Вирасоро с двумерной репараметризационной инвариантностью, а также выявляет их внутренний характер.

Одна из целей данного обзора состоит в том, чтобы продемонстрировать, что теория бозонной струны полностью определяется действием Намбу—Гото (или его квадратичной версией) без каких-либо дальнейших допущений как для открытых, так и для замкнутых струн. В обзор включены также классические вопросы, которые не являются легко доступными, такие как обоснование калибровки светового конуса.

В лекциях объясняются различные методы нахождения критической размерности и интерсепта, а также приводится спектр теории. Особое внимание уделяется методу БРСТ, который, по видимому, играет важную роль во вторично квантованных теориях струн. Кроме того, подробно исследуется вопрос о том, какие требования накладывает квантовая теория на калибровочную инвариантность.

Затем обсуждается включение локальной суперсимметрии, причем, как и выше, особое внимание обращено на метод БРСТ. В конце обзора кратко рассматриваются суперструны и гетеротическая модель.

Данный обзор преследует те же цели, что и лекции, на которых он основан, поэтому он обладает и теми же недостатками. Главный недостаток — отсутствие многих важнейших направлений современных исследований, которые включают обсуждение взаимодействий, предел нулевого наклона, а также вторично квантованные модели. Эти вопросы достаточно хорошо изложены в обзорной литературе, которая приведена ниже.

Автор выражает признательность Клаудио Тейтельбойму за предоставленную возможность прочитать курс лекций по теории струн в Центре научных исследований в Сантьяго. Автор благодарит также Клаудио Тейтельбойма и Луку Мезинческу за полезные обсуждения.

Обзорная литература

- Brink L.*, Superstrings. — In: Supersymmetry, Plenum Press, New York, 1984, p. 89.
Green M., Surveys in High Energy Physics, 3, 127 (1983).
Green M., *Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., B243, 45 (1984) (light-cone gauge field theory of superstrings).

- Jacob M.*, Dual Theory, Physics Reports Reprint Book Series, North-Holland, Amsterdam, 1974.
- Kaku M., Kikkawa K.*, Phys. Rev., **D10**, 1110; 1823 (1974) (light-cone gauge field theory of bosonic strings).
- Scherk J.*, Rev. Mod. Phys., **47**, 123 (1975).
- Schwarz J. H.*, Phys. Rep., **89**, 223 (1982).
- Schwarz J. H.*, Superstrings (The First 15 Years of Superstring Theory), 2 vols., World Scientific Publishing Company, Singapore, 1985.

Струна Намбу — Гото: классический анализ

Многие понятия, которые часто используются в теории струн, появляются уже в более простой бозонной модели. Поэтому мы прежде всего рассмотрим эту модель.

12.1. Принцип действия

12.1.1. Действие Намбу — Гото

Свободная релятивистская частица движется в пространстве-времени так, что ее мировая линия является времениподобной, а также имеет максимальную собственную длину. Соответствующее действие имеет вид

$$S = -m \int ds, \quad (12.1.1.1)$$

где m — масса, а ds — элемент длины вдоль мировой линии. Одним из основных свойств действия (12.1.1.1) является его репараметризационная инвариантность.

Струна представляет собой одномерный протяженный объект. Поэтому траекторией струны является двумерная поверхность в пространстве-времени. Обобщая естественным образом случай релятивистской частицы, мы постулируем, что свободная струна (со свободными концами, если она открытая) описывается поверхностью со следующими свойствами:

1. Поверхность является времениподобной, т. е. всюду на поверхности (за исключением, может быть, граничных точек) можно выбрать два направления: времениподобное и пространственноподобное.

2. Поверхность имеет экстремальную площадь, т. е. является “экстремальной поверхностью”.

Удобно использовать параметрическое описание струны. Это, помимо прочего, позволяет иметь явно ковариантный формализм.

Параметрическое представление мировой поверхности струны имеет вид

$$X^A = X^A(x^\alpha), \quad A = 0, 1, \dots, d-1, \quad \alpha = 0, 1. \quad (12.1.1.2)$$

Мы предполагаем, что $x^\alpha \equiv (\tau, \sigma)$ задают хорошую параметризацию в том смысле, что касательные векторы $\partial X^A/\partial\tau$ и $\partial X^A/\partial\sigma$ всюду отличны от нуля и линейно независимы. Кроме того, мы примем, что вектор $\partial X^A/\partial\tau$ является времениподобным (или изотропным), а вектор $\partial X^A/\partial\sigma$ является пространственноподобным, причем

$$\eta_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial\tau} \frac{\partial X^B}{\partial\tau} \leq 0, \quad (12.1.1.3a)$$

$$\eta_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial\sigma} \frac{\partial X^B}{\partial\sigma} > 0, \quad (12.1.1.3b)$$

где сигнатура выбрана в виде $\eta_{AB} = (-, +, +, \dots +)$.

Данное вложение индуцирует метрику на поверхности $X^A(\tau, \sigma)$, заданную явно в виде

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^B}{\partial x^\beta} \eta_{AB}. \quad (12.1.1.4)$$

В качестве метрики фонового d -мерного пространства, в котором осуществляется вложение, мы возьмем плоскую метрику η_{AB} . Ее можно искривить; в классической теории это не приведет к существенным изменениям. Но в квантовой теории появление кривизны приводит к значительным осложнениям; в общем случае произвольного фона такая задача до сих пор полностью не решена. Поэтому мы выбрали плоскую метрику. Некоторые последствия кривизны, которые влияют на определение критической размерности, кратко рассмотрены ниже.

Площадь поверхности, которую замечает струна, определяется выражением

$$A[X^A(x^\alpha)] = \int d^2x \sqrt{-^{(2)}g}, \quad (12.1.1.5)$$

где $^{(2)}g$ — детерминант матрицы $g_{\alpha\beta}$, который отрицателен, так как $g_{\alpha\beta}$ имеет сигнатуру $(-, +)$.

Действие свободной струны пропорционально площади (12.1.1.5) и, следовательно, задано в виде¹⁾

$$S[X^A(x^\alpha)] = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\sigma} d\sigma \sqrt{-^{(2)}g}. \quad (12.1.1.6)$$

$\begin{matrix} \text{п (откр. струна)} \\ 2\pi \text{ (замкн. струна)} \end{matrix}$

Для замкнутых струн выражение (12.1.1.6) нужно дополнить периодическими граничными условиями:

$$X^A(\tau, 0) = X^A(\tau, 2\pi) \text{ (замкнутые струны)}. \quad (12.1.1.7)$$

¹⁾ Выбор верхней и нижней границ интервала σ зависит от соглашения. Мы придерживаемся здесь первоначальных обозначений.

(В этом случае интеграл по σ фактически можно брать по любому интервалу длины 2π .)

Выражение (12.1.1.6) есть действие Намбу — Гото [1, 2]. Постоянная α' имеет размерность квадрата длины в единицах \hbar . Поэтому в теории появляется масштаб для массы $(\alpha')^{-1/2}$. Когда дуальные модели использовались для описания адронного мира, эта масса выбиралась порядка 1 ГэВ. После коренного перелома в развитии и перспективах, связанного с работой Шерка и Шварца [3], α' берется порядка массы Планка ($\sim 10^{19}$ ГэВ), так как считается, что теория струн является единой теорией всех взаимодействий.

Замечание. Действие частицы можно обобщать и дальше на высшие измерения, т. е. можно рассматривать протяженные объекты больших размерностей (например, «мембраны»), для которых действие пропорционально их пространственно-временному объему. О квантовой теории релятивистских мембран известно совсем немного. Неясно даже, является ли она последовательной теорией. Поэтому мембраны не вызвали большого интереса (тем не менее см. работу [4], где приведен ряд интересных достижений).

Упражнения

1. Из действия Намбу — Гото выведите явно уравнения движения. Покажите, что они записываются в виде

$$\square X^A = 0,$$

где \square — ковариантный лапласиан, построенный по индуцированной метрике $g_{\alpha\beta}$, которая задана выражением (12.1.1.4).

2а. Покажите, что проекции уравнений движения на касательные векторы X^A, α в действительности являются тождествами, $X^A, \alpha \square X_A \equiv 0$, так что независимыми являются только $d-2$ уравнений. Это выражение является следствием репараметризационной инвариантности действия.

2б. Пусть $\xi_{(\Delta)}^A$, $\Delta = 1, 2, \dots, d-2$, — набор $d-2$ ортонормированных векторов, перпендикулярных мировому листу:

$$\xi_{(\Delta)}^A X_{A, \alpha} = 0, \quad \xi_{(\Delta)}^A \xi_{(\Lambda)}^B A_{AB} = \delta_{(\Delta)(\Lambda)}.$$

«Вторая фундаментальная форма $\Omega_{(\Delta)\alpha}^\beta$ » поверхности $X^A = X^A(x^\alpha)$ определяется уравнением

$$X^B, \alpha \xi_{(\Delta), B}^A = -\Omega_{(\Delta)\alpha}^\beta X^A, \beta + \mu_{(\Delta)}^{(\Sigma)} \xi_{(\Sigma)}^A$$

(см. [5], разд. 47). При параллельном переносе вектора нормали $\xi_{(\Delta)}^\alpha$ по отношению к d -мерной фоновой геометрии этот

вектор поворачивается. Величина этого поворота параметризуется $\Omega_{(\Delta)\alpha}{}^\beta$ и $\mu_{(\Delta)}^{(\Sigma)}$ и является мерой искривления двумерной поверхности $X^A = X^A(x^\alpha)$ в фоновом пространстве.

Если $d - 2 = 1$, последний член в приведенном выше выражении отсутствует. В общем случае $\mu_{(\Delta)}^{(\Sigma)}$ определяет инфинитезимальные $SO(d - 2)$ -вращения. При замене нормальных векторов $\xi_{(\Delta)}^A$ (которые определены с точностью до $SO(d - 2)$ -вращения), $\Omega_{(\Delta)\alpha}{}^\beta$ преобразуется однородно, как $SO(d - 2)$ -вектор, а $\mu_{(\Delta)}^{(\Sigma)}$ преобразуется неоднородно [5].

Покажите, что

$$\Omega_{(\Delta)\alpha\beta} = \xi_{(\Delta)}^A X_{A;\alpha\beta},$$

где символ “;” обозначает ковариантную производную по метрике $g_{\alpha\beta}$. Следовательно, $\Omega_{(\Delta)\alpha\beta}$ — симметричный тензор второго ранга при любом значении Δ .

2в. Средняя кривизна $\Omega_{(\Delta)}$ определяется по формуле $\Omega_{(\Delta)} = \Omega_{(\Delta)\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$. Выведите из этого, что струнные уравнения движения полностью эквивалентны уравнению

$$\Omega_{(\Delta)} = 0,$$

т. е. условию нулевой средней кривизны для любого направления вдоль нормалей.

3. Повторите упражнения 1 и 2 для случая искривленной фоновой метрики $\eta_{AB}(X^C)$. *Указание.* Добавьте просто символы Кристоффеля Γ^A_{BC} в уравнения движения и другие соотношения, чтобы удовлетворялось требование общей ковариантности по отношению к фоновой геометрии. $X^A_{;\alpha}$ преобразуется как d -мерный вектор и 2-мерный ковектор (см. [5], разд. 52).

12.1.2. Действие в квадратичной форме

Действие $S[X^A(x^\alpha)]$ имеет один недостаток: оно не квадратично по полям. Это вызывает серьезные трудности при квантовании струны методом интеграла по траекториям, так как в обычной лагранжевой форме интеграл по траекториям определен только для квадратичных действий.

Можно улучшить состояние дел, если ввести вспомогательные поля, т. е. поля без распространяющихся степеней свободы, удовлетворяющие алгебраическим (в противоположность дифференциальным) уравнениям. Цель их в данном случае состоит в том, чтобы придать действию квадратичную форму.

Оказывается, что необходимые вспомогательные поля пропорциональны метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$ двумерной поверхности,

которую замечает струна. Таким образом, квадратичная форма действия задана выражением

$$S[X^A(x^\alpha), \gamma_{\alpha\beta}(x^\nu)] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A. \quad (12.1.2.1)$$

Ниже мы увидим, что это действие (здесь X^A и $\gamma_{\alpha\beta}$ варьируются независимо) эквивалентно старому действию. Прежде чем перейти к доказательству, мы немного отвлечемся и исследуем эту новую интерпретацию действия, которая имеет больше сходства с теорией поля.

Выражение (12.1.2.1) можно рассматривать как действие, описывающее d безмассовых скалярных полей X^A в двух измерениях (одно поле X^0 имеет неправильный знак перед кинетическим членом), распространяющихся на искривленном фоне $\gamma_{\alpha\beta}$. Более того, так как в выражении (12.1.2.1) компоненты метрики $\gamma_{\alpha\beta}$ тоже нужно варьировать, мы должны смотреть на "гравитационное поле" $\gamma_{\alpha\beta}$ не как на заданное фоновое поле, а скорее как на некоторое приспособляемое поле, взаимодействующее со скалярными полями.

Это наводит на мысль, что, может быть, к выражению (12.1.2.1) нужно добавить кинетический член для $\gamma_{\alpha\beta}$, т. е. действие Эйнштейна — Гильберта, а также космологический член. Но действие Гильберта в двух измерениях оказывается тривиальным (вариация лагранжиана $R\sqrt{-\gamma}$ является полной дивергенцией), в то время как космологический член приводит к противоречиям, так как он нарушает вейлевскую инвариантность. Поэтому действие (12.1.2.1) является вполне удовлетворительным в том виде, в каком оно записано, даже в свете новой интерпретации.

Что новое действие (12.1.2.1) эквивалентно предыдущему, можно показать следующим образом. Уравнения движения, полученные вариацией действия (12.1.2.1) по отношению к метрике $\gamma_{\alpha\beta}$, имеют вид

$$\delta S / \delta \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} T^{\alpha\beta}(X) + \frac{\lambda}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} = 0, \quad (12.1.2.2)$$

где мы на время добавили космологический член, чтобы показать, что он должен быть равен нулю, и $T^{\alpha\beta}(X)$ — тензор энергии-импульса d скалярных полей для двух измерений:

$$T_{\alpha\beta}(X) = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \gamma^{\rho\sigma} X_{,\rho}^A X_{A,\sigma} - X_{,\alpha}^A X_{A,\beta} \right]. \quad (12.1.2.3)$$

В двух измерениях безмассовое скалярное поле конформноинвариантно, откуда следует, что след тензора $T_{\alpha\beta}$ тождественно равен нулю. Это можно явно получить из выражения

(12.1.2.3). Взятие следа от выражения (12.1.2.2) дает

$$0 + \lambda \sqrt{-\gamma} = 0 \Rightarrow \lambda = 0,$$

поэтому мы положим, что $\lambda = 0$.

С учетом того, что $\lambda = 0$, уравнения движения для $\gamma_{\alpha\beta}$ означают, что полный тензор энергии-импульса d скалярных полей X^A равен нулю:

$$T_{\alpha\beta}(X) = 0 \quad (12.1.2.4)$$

(число независимых уравнений здесь равно двум, а не трем, так как $T_{\alpha\beta}$ — бесследовый тензор). Общее решение уравнения (12.1.2.4) имеет вид

$$\gamma_{\alpha\beta} = \beta \partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A, \quad (12.1.2.5)$$

где β — произвольная функция. Таким образом, вспомогательное поле $\gamma_{\alpha\beta}$ связано конформным преобразованием с индуцированной метрикой $\partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A$ с неопределенным конформным фактором.

Точное значение конформного фактора в действительности несущественно вследствие вейлевской инвариантности, т. е. инвариантности действия (12.1.2.1) при вейлевских масштабных преобразованиях:

$$\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow \phi^2 \gamma_{\alpha\beta}, \quad (12.1.2.6a)$$

$$X^A \rightarrow X^A. \quad (12.1.2.6b)$$

Следовательно, мы можем положить $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. Если исключить из действия (12.1.2.1) вспомогательное поле $\gamma_{\alpha\beta}$ подстановкой в действие решения его уравнений движения, а именно (12.1.2.5), то мы получим правильное исходное действие Намбу — Гото. В этом смысле теории, основанные на действиях (12.1.1.6) и (12.1.2.1), эквивалентны, так как произвольное развитие во времени полей $X^A(x^\alpha)$, даже не удовлетворяющих условию массовой поверхности, они учитывают с одним и тем же весом. (Что касается вспомогательного поля, то оно обязательно должно удовлетворять условию массовой поверхности (12.1.2.5), иначе сравнение будет невозможным.)

Замечания. а. Чтобы доказать эквивалентность теорий, основанных на действиях (12.1.1.6) и (12.1.2.1), недостаточно лишь проверить, что соответствующие классические уравнения движения имеют одинаковые решения. Необходимо также показать, как это и было сделано выше, что совпадают сами действия, в том смысле, что действие (12.1.2.1), в котором вспомогательное поле исключено с помощью его уравнения движения, оказывается действием (12.1.1.6). Если бы этого не было, то скобки Пуассона полей X , а, следовательно, их коммутаторы

в квантовом случае были различными для разных теорий, несмотря на то, что классические уравнения движения и в том, и в другом случае совпадают. Это имеет непосредственное отношение к обратной задаче вариационного исчисления (см., например, работу [6], а также работы, которые там цитируются).

б. На квантовом уровне исключение вспомогательного поля $\gamma_{\alpha\beta}$ осуществляется не так просто, как в классической теории. Только при $d = 26$ восстанавливается эквивалентность действий (12.1.2.1) и (12.1.1.6) [7a].

Упражнения

1а. Получите действие в квадратичной форме для свободной частицы исходя из действия $-m \int ds$. Покажите, что необходимо включить “космологический член”, и найдите его связь с массой m .

1б. Из действия $-m \int ds$ выведите действие в гамильтоновой форме S_H .

1в. Покажите, что если проинтегрировать (в S_H) по каноническому импульсу p_A , сопряженному X^A , то мы получим действие в квадратичном виде. Покажите, что лагранжев множитель N , соответствующий гамильтонову условию “массовой поверхности” $p^2 + m^2 \approx 0$, связан с метрикой g_{00} на мировой линии частицы.

1г. Покажите, что и квадратичное действие, и S_H правильно описывают безмассовый случай в пределе $m = 0$.

2. Выведите квадратичное действие для релятивистской мембраны. Покажите, что в этом случае также необходимы космологический член (вейлевская инвариантность отсутствует).

12.1.3. Интерпретация действия в терминах σ -модели

Действие (12.1.2.1) относится одновременно к двум различным пространствам: двумерному пространству с координатами $x^\alpha \equiv (\tau, \sigma)$ и d -мерному пространству Минковского M^d , в котором координатами являются скалярные поля. Последнее является фактор-пространством группы Пуанкаре по группе Лоренца $M^d = \text{Poincaré/Lorentz}$.

Произвольное поле $X^A(\tau, \sigma)$ задает отображение из одного пространства в другое. Те отображения, при которых действие (12.1.2.1) является экстремальным, называются в математической литературе “гармоническими отображениями”, а выражение (12.1.2.1) — “функционалом энергии”. В физической литера-

туре такая модель называется “ σ -моделью”. (Значение гармонических отображений для физики обсуждалось Мизнером [76], а также в цитированной им литературе.)

Интерпретация действия в терминах σ -модели слабо отражает геометрическое значение действия Намбу — Гото (площадь поверхности), а больше внимания сосредотачивает на теоретико-полевых аспектах теории. Эта интерпретация окажется особенно полезной при обсуждении струн на искривленном фоне, а также суперструн.

12.1.4. Калибровочные симметрии

Действие Намбу — Гото очевидно инвариантно относительно замены координат, поскольку площадь является геометрическим инвариантом.

Инфинитезимальные замены координат приводят к следующим преобразованиям полей:

$$\delta X^A = \xi_{\delta\xi} X^A = \delta\xi^{\alpha} X^A_{,\alpha}, \quad (12.1.4.1)$$

где $\xi_{\delta\xi}$ — производная Ли по направлению двумерного вектора $\delta\xi^{\alpha}$. Соотношение (12.1.4.1) отражает тот факт, что X^A являются двумерными скалярами.

При преобразованиях полей X^A по правилу (12.1.4.1) возникает следующая вариация лагранжиана:

$$\delta\mathcal{L} = \xi_{\delta\xi}\mathcal{L} = (\delta\xi^{\alpha}\mathcal{L})_{,\alpha} \quad (12.1.4.2)$$

(\mathcal{L} является двумерной плотностью). Следовательно, вариация действия сводится к интегралу по границе (линии):

$$\delta S = \oint \delta\xi^{\alpha}\mathcal{L} dS_{\alpha} \quad (12.1.4.3)$$

и, конечно, равна нулю для тех преобразований координат, которые на границе обращаются в нуль.

Квадратичное действие (12.1.2.1) также обладает инвариантностью относительно замены координат, и преобразование метрики $\gamma_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \xi_{\delta\xi}\gamma_{\alpha\beta} = \delta\xi^{\gamma}\gamma_{\alpha\beta,\gamma} + \delta\xi^{\gamma}_{,\alpha}\gamma_{\gamma\beta} + \delta\xi^{\gamma}_{,\beta}\gamma_{\alpha\gamma}. \quad (12.1.4.4)$$

Кроме того, как мы уже видели, квадратичное действие также обладает вейлевской инвариантностью (преобразования (12.1.2.6)).

12.1.5. Глобальные симметрии

Струна распространяется в d -мерном пространстве-времени, которое является плоским, поэтому имеется пуанкаре-инвариантность.

Симметрия по отношению к группе Пуанкаре в данном случае похожа на внутреннюю симметрию (этот тип симметрии характерен для σ -моделей), и она связывает преобразованием различные поля, взятые в одной и той же точке x^α :

$$\delta X^A = a^A + \Lambda^A_B X^B, \quad (12.1.5.1a)$$

$$\delta \gamma_{\alpha\beta} = 0 = \delta g_{\alpha\beta} \quad (12.1.5.1b)$$

(выражения (12.1.5.1) не содержат производных).

Используя метод Нётер, получаем $d(d+1)/2$ сохраняющихся токов, удовлетворяющих уравнению непрерывности $\partial_\alpha j^\alpha = 0$. Это токи, соответствующие трансляциям:

$$j_A^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_{,\alpha}^A} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X_A, \quad (12.1.5.2)$$

а также токи, отвечающие поворотом и бустам:

$$j_{AB}^\alpha = -j_{BA}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_{,\alpha}^{[A}} X_{B]} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X_{[A} X_{B]}. \quad (12.1.5.3)$$

Заряды получают интегрированием

$$Q_A = \int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} j_A^\alpha d\sigma \quad (12.1.5.4)$$

(полный импульс струны) и

$$Q_{AB} = \int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} j_{AB}^\alpha d\sigma \quad (12.1.5.5)$$

(угловой момент).

В случае замкнутых струн заряды, очевидно, сохраняются вследствие уравнения непрерывности, так как в системе, в которой нет границ, не может быть ни входящего, ни выходящего потока. В открытых струнах заряды сохраняются только в том случае, если выбрать подходящие граничные условия при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$, которые запрещают поток через эти границы (см. разд. 12.1.7).

12.1.6. Конформная симметрия

Среди преобразований координат $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = f^\alpha(x^\beta)$ есть такие, при которых метрика умножается на локальный фактор. Эти

преобразования носят название псевдоконформных преобразований¹⁾):

$x'^\alpha = f^\alpha(x^\beta)$ являются конформными преобразованиями

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} = g_{\lambda\mu}(x') \Lambda^2(x'). \end{array} \quad (12.1.6.1)$$

Инфинитезимальные конформные преобразования $x'^\alpha = x^\alpha + \delta\xi^\alpha$ удовлетворяют условию

$$\mathcal{L}_{\delta\xi} g_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \quad (12.1.6.2)$$

как видно из разложения уравнения (12.1.6.1).

Чтобы проанализировать свойства конформной группы, удобно переписать уравнение (12.1.6.1) в “конформной калибровке”, т. е. в системе координат, в которой метрика пропорциональна двумерному тензору Минковского:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \phi^2(x) \eta_{\alpha\beta} \text{ («конформная калибровка») } \quad (12.1.6.3)$$

$$\Leftrightarrow g_{\alpha\beta} = \sqrt{-g} \eta_{\alpha\beta}.$$

Существование таких систем координат хорошо известно из дифференциальной геометрии (см., например, книгу Эйзенхарта [5] и разд. 12.5, где обсуждается калибровка светового конуса).

Соотношение (12.1.6.3) позволяет записать уравнение (12.1.6.1) в виде

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} = \eta_{\lambda\mu} \bar{\Lambda}^2(x), \quad (12.1.6.4)$$

что в инфинитезимальной форме эквивалентно уравнениям

$$\delta\xi^0_{,0} = \delta\xi^1_{,1}, \quad \delta\xi^0_{,1} = \delta\xi^1_{,0} \quad (12.1.6.5)$$

(условия псевдо-Коши — Римана).

С этими уравнениями удобнее работать в светоподобных координатах (u, v) , в которых квадрат длины записывается как $ds^2 = -2\phi^2 du dv$. Тогда конформные преобразования $U(u, v)$, $V(u, v)$ являются преобразованиями координат, подчиненными

¹⁾ Очевидно, можно принять бескоординатные обозначения и определить конформную группу, но здесь это необязательно, поскольку мы рассматриваем (по крайней мере в этом разделе) многообразия с тривиальной топологией ($\sim R^2$) и используем глобальные координаты.

условиям

$$\frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad (12.1.6.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} = 0. \quad (12.1.6.7)$$

Следовательно, с точностью до перестановочного преобразования $U=v$, $V=u$ общее двумерное конформное преобразование является прямым произведением двух одномерных координатных преобразований

$$U = U(u), \quad V = V(v). \quad (12.1.6.8)$$

Соответственно конформная группа является прямым произведением двух групп одномерных диффеоморфизмов¹⁾. Эта структура прямого произведения оказывается явной в светоподобных координатах.

В терминах координат Минковского x^0 , x^1 получаем

$$\begin{aligned} x'^0 &= f(x^0 + x^1) + g(x^0 - x^1), \\ x'^1 &= f(x^0 + x^1) - g(x^0 - x^1). \end{aligned} \quad (12.1.6.9)$$

Новые координаты x'^0 и x'^1 удовлетворяют свободному волновому уравнению.

По многим причинам конформная группа играет важную роль в теории струн. Одна из причин заключается в том, что эта группа является остаточной группой диффеоморфизмов в часто используемой конформной калибровке (12.1.6.3).

Более важным оказывается то свойство, что алгебра компонент тензора энергии-импульса скалярного поля X^1 изоморфна конформной алгебре (ее центральное расширение называется алгеброй Вирасоро). Именно это свойство мы сейчас обсудим.

Рассмотрим безмассовое двумерное скалярное поле $X(x^\alpha)$ с обычным действием

$$S[X] = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X d^2x. \quad (12.1.6.10)$$

Очевидно, это выражение инвариантно относительно преобразований координат из конформной группы.

По теореме Нётер эта инвариантность приводит к бесконечному числу сохраняющихся токов, которые имеют вид

$$j^\alpha(\xi) = T^{\alpha\beta} \xi_\beta, \quad (12.1.6.11)$$

где ξ^β — конформный вектор Киллинга, т. е. решение уравнения (12.1.6.2). Здесь $T^{\alpha\beta}$ — компоненты симметричного бесследо-

¹⁾ В случае, если одномерное многообразие является окружностью, эта группа обозначается $\text{Diff}(S^1)$.

вого тензора энергии-импульса скалярного поля ($\sim \delta \mathcal{L} / \delta g_{\alpha\beta}$, см. выражение (12.1.2.3)):

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}, \quad T^{\alpha\beta};_{\beta} = 0, \quad T^{\alpha}_{\alpha} = 0 \quad (12.1.6.12)$$

(как мы уже говорили в разд. 12.1.2, бесследовость тензора $T^{\alpha\beta}$ является результатом вейлевской инвариантности, а символ “;” обозначает ковариантную производную).

Используя соотношения (12.1.6.12) и условие (12.1.6.2) для конформного вектора Киллинга, действительно можно убедиться, что ток $j^{\alpha}(\xi)$ сохраняется:

$$j^{\alpha}(\xi);_{\alpha} = 0. \quad (12.1.6.13)$$

Соответствующие заряды определяются выражением

$$Q(\xi) = \int \xi^{\alpha} T_{\alpha}^{\beta} d\sigma_{\beta}, \quad (12.1.6.14)$$

где интегрирование ведется по пространственной кривой. Из общих соображений следует, что заряды $Q(\xi)$, выраженные в виде функций в фазовом пространстве от X и сопряженного импульса, удовлетворяют скобкам Пуассона, соответствующим конформной алгебре:

$$[Q(\xi), Q(\eta)] = Q([\xi, \eta]). \quad (12.1.6.15)$$

Здесь $[\xi, \eta]$ — конформный вектор Киллинга, полученный взятием скобок Ли от векторов ξ и η :

$$[\xi, \eta]^{\alpha} = \eta^{\beta} \xi^{\alpha}_{;\beta} - \xi^{\beta} \eta^{\alpha}_{;\beta}. \quad (12.1.6.16)$$

Ниже мы явными вычислениями получим соотношение (12.1.6.15), которое означает просто, что алгебра симметрии реализуется в фазовом пространстве через скобки Пуассона.

Чтобы перейти от соотношения (12.1.6.15) к скобкам Пуассона для компонент тензора энергии-импульса, возьмем конкретный вектор ξ^{α} . Например, если в момент времени $x^0 = 0$ векторы ξ^{α} и η^{α} взять в виде

$$\xi^0(0, x^1) = \delta(x^1 - \sigma), \quad \xi^1(0, x^1) = 0, \quad (12.1.6.17a)$$

$$\eta^0(0, x^1) = \delta(x^1 - \sigma'), \quad \eta^1(0, x^1) = 0 \quad (12.1.6.17b)$$

(в координатах Минковского), то получим, что заряды сводятся к

$$Q(\xi) = T_0^0(\sigma), \quad Q(\eta) = T_0^0(\sigma'), \quad (12.1.6.18)$$

и алгебра (12.1.6.15) даст скобки Пуассона $[T_0^0(\sigma), T_0^0(\sigma')]$. Чтобы вычислить компоненты скобок Ли (12.1.6.16), нужно проинтегрировать конформные уравнения Киллинга для ξ^{α} и η^{α}

с приведенными выше начальными условиями (12.1.6.17). Это дает

$$\begin{aligned}\xi^0(x^0, x^1) &= \frac{1}{2} [\delta(x^0 + x^1 - \sigma) + \delta(x^0 - x^1 + \sigma)], \\ \xi^1(x^0, x^1) &= \frac{1}{2} [\delta(x^0 + x^1 - \sigma) - \delta(x^0 - x^1 + \sigma)].\end{aligned}\quad (12.1.6.19)$$

Аналогичные выражения получаются и для η^α . (Конечно, основной факт здесь заключается в том, что векторы ξ^α , η^α полностью определяются из начальных условий (12.1.6.17) и конформных уравнений Киллинга. Без этого алгебра (12.1.6.15) была бы бессмысленной, поскольку она связывала бы выражение, хорошо определенное на поверхности $x^0 = 0$ (в левой части алгебры) с выражением, содержащим векторы ξ^α и η^α вне поверхности $x^0 = 0$ (в правой части). Этим свойством конформной группы полная группа диффеоморфизмов не обладает.) Скобки Ли векторов ξ^α и η^α имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}[\xi, \eta]^0(0, x^1) &= 0, \\ [\xi, \eta]^1(0, x^1) &= -\delta(x^1 - \sigma) \delta'(x^1 - \sigma') + \delta(x^1 - \sigma') \delta'(x^1 - \sigma),\end{aligned}\quad (12.1.6.20)$$

где штрихом обозначена обычная пространственная производная. Следовательно, скобки Пуассона при совпадающем времени имеют вид

$$[T_{00}(\sigma), T_{00}(\sigma')] = (T_{01}(\sigma) + T_{01}(\sigma')) \delta'(\sigma - \sigma'). \quad (12.1.6.21a)$$

Аналогично получаем

$$[T_{00}(\sigma), T_{01}(\sigma')] = (T_{00}(\sigma) + T_{00}(\sigma')) \delta'(\sigma - \sigma'), \quad (12.1.6.21б)$$

$$[T_{01}(\sigma), T_{01}(\sigma')] = (T_{01}(\sigma) + T_{01}(\sigma')) \delta'(\sigma - \sigma'). \quad (12.1.6.21в)$$

На этом мы завершаем вычисления алгебры, которой удовлетворяют компоненты тензора энергии-импульса. Это та же самая конформная алгебра, записанная в базисе "векторов- δ -функций". (Близкие вопросы обсуждаются в работе Фубини и др. [8], а также в цитируемой там литературе.)

Все рассмотренное здесь для случая безмассового скалярного поля остается справедливым и для струны, описываемой d такими полями. Так как конформная группа является теперь подгруппой общей калибровочной группы теории, ее генераторы должны быть равны нулю. Но остается то важное свойство, что компоненты тензора энергии-импульса и в этом случае удовлетворяют конформной алгебре.

Упражнения

1а. Покажите, что из (12.1.6.4) следуют соотношения

$$\dot{Z}^0 = \varepsilon Z^{1'}, \quad Z^{0'} = \varepsilon \dot{Z}^1, \quad \varepsilon^2 = 1,$$

для инфинитезимальных конформных преобразований $x'^\alpha = Z^\alpha(x^\nu)$. Выведите, что произвольное конформное преобразование является произведением пространственного отражения $Z^0 = x^0$, $Z^1 = -x^1$ и некоторого преобразования, удовлетворяющего условиям псевдо-Коши — Римана.

1б. Покажите сходство двумерных переменных светового конуса u , v , использованных в псевдоконформной группе, и комплексных переменных z , $\bar{z} = x \pm iy$, применяемых в евклидовой конформной группе.

2а. Покажите, что условие бесследовости $T^\alpha_\alpha = 0$ в светоподобных переменных записывается, как $T^{uv} = 0$.

2б. Покажите, что закон сохранения тензора энергии-импульса означает, что T^{uu} является функцией только v , тогда как T^{vv} является функцией только u : $T^{uu} = T^{uu}(v)$, $T^{vv} = T^{vv}(u)$.

12.1.7. Граничные условия

В случае замкнутых струн уравнений движения

$$\square X^A = 0, \quad (12.1.7.1a)$$

$$T_{\alpha\beta}(X) = 0 \quad (12.1.7.1б)$$

достаточно для того, чтобы действие (12.1.2.1) было экстремальным на классической траектории. Для открытых струн это неверно. В этом случае действие достигает экстремума, только если уравнения движения (12.1.7.1) удовлетворяются вместе с подходящими граничными условиями при $\sigma = 0$ и π . Эти граничные условия необходимы для того, чтобы нежелательные граничные члены, возникающие в вариации действия S , обращались в нуль.

Пусть $X_1^A(\sigma)$ и $X_2^A(\sigma)$ — две конфигурации открытой струны в моменты времени τ_1 и τ_2 соответственно. Мы хотим найти экстремум действия в классе всех траекторий струны $X^A(\tau, \sigma)$, которые начинаются из $X_1^A(\sigma)$ в момент времени τ_1 и заканчиваются в $X_2^A(\sigma)$ в момент времени τ_2 . Мы не требуем, чтобы функции $X^A(\tau, \sigma)$ имели заданные значения на вертикальных линиях $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$, следовательно, мы допускаем произвольные значения вариаций $\delta X^A(\tau, 0)$ и $\delta X^A(\tau, \pi)$. Две возможные эволюции струны изображены на рис. 12.1.

Причина, по которой мы различаем временные и пространственные границы, заключается в том, что мы рассматриваем

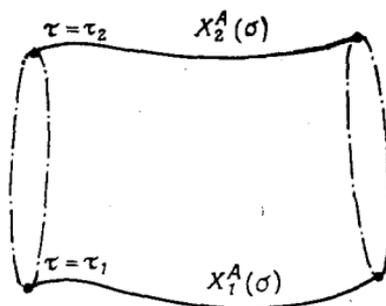


Рис. 12.1. В вариационной задаче для открытой струны траектории концов струны $X^A(\tau, 0)$ и $X^A(\tau, \pi)$ также варьируются.

в данном случае струны со свободными концами. Принцип действия должен полностью определять движение струны в будущем, и мы не должны доопределять это движение дополнительной внешней информацией. Чтобы импульс и угловой момент струны сохранялись, необходимо отсутствие взаимодействий с внешним миром через границы.

Мы вычислим вариацию действия для произвольных вариаций полей, удовлетворяющих приведенным выше требованиям. Для простоты возьмем действие в квадратичной форме. Легко найти все члены в вариации действия:

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\int_0^\pi d\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha 0} \partial_\alpha X^A \delta X_A \right]_{\tau_1}^{\tau_2} - \\ & -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{-g} g^{1\alpha} \partial_\alpha X^A \delta X_A \right]_0^\pi + \\ & + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma (\sqrt{-g} \square X^A \delta X_A + \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}). \quad (12.1.7.2) \end{aligned}$$

Первый член в правой части равен нулю, так как струна имеет фиксированные конфигурации $X_1^A(\sigma)$ и $X_2^A(\sigma)$ при τ_1 и τ_2 . Требуя, чтобы и остальные члены в выражении для δS были равны нулю для любых допустимых эволюций струны, мы получим не только уравнения движения (12.1.7.1), но также условия

$$\sqrt{-g} g^{1\alpha} \partial_\alpha X^A = 0 \text{ при } \sigma = 0, \pi. \quad (12.1.7.3)$$

Это и есть искомые граничные условия для случая открытых струн. (В случае замкнутых струн, конечно, нет пространственной границы, поэтому не нужно накладывать условия (12.1.7.3), чтобы получить $\delta S = 0$.)

Прежде чем обсуждать геометрический смысл соотношений (12.1.7.3), заметим, что граничные условия являются более фундаментальными, чем уравнения массовой поверхности, как это можно видеть из приведенного выше вывода. В действительности их нужно накладывать даже на поля вне массовой поверхности, чтобы иметь корректную вариационную задачу. В самом деле, для тех полевых траекторий, которые не удовлетворяют условиям (12.1.7.3), действие фактически является “недифференцируемым” в том смысле, что его вариация не представляется в виде двумерного интеграла, содержащего только вариации полей без производных:

$$\delta S \neq \int \left(\frac{\delta S}{\delta X^A} \delta X^A + \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} \right) d\tau d\sigma \quad (12.1.7.4)$$

(остаются граничные члены при $\sigma = 0$ и π).

Поскольку мы умеем обращаться только с дифференцируемыми действиями (которые приводят к хорошо определенной канонической структуре), здесь и далее мы ограничимся пространством траекторий открытых струн, удовлетворяющих условиям (12.1.7.3). Как мы уже показали, эти условия являются естественными граничными условиями для данного вариационного принципа, так как они допускают произвольные вариации траекторий концов струны $X^A(\tau, 0)$ и $X^A(\tau, \pi)$ в вариационном принципе.

Геометрический смысл соотношений (12.1.7.3) мы сразу увидим, как только вспомним, что два d -мерных вектора $\partial X^A/\partial\tau$ и $\partial X^A/\partial\sigma$, по предположению, являются линейно независимыми. Другими словами, если некоторая линейная комбинация этих двух векторов равна нулю, то коэффициенты в этой линейной комбинации также должны быть равны нулю. Поэтому условия (12.1.7.3) эквивалентны условию

$$\sqrt{-g} g^{1\alpha} = 0, \quad (12.1.7.5)$$

или, выражая $g^{1\alpha}$ через $g_{\alpha\beta}$,

$$\frac{g_{00}}{\sqrt{-g}} = 0 = \frac{g_{01}}{\sqrt{-g}}. \quad (12.1.7.6)$$

Таким образом, мы видим, что g_{00} и g_{01} равны нулю на границах ($g_{\alpha\beta}$ и g по-прежнему остаются ограниченными функциями, как и скалярное произведение Минковского регулярных векторов), т. е. индуцированная метрика оказывается вырожденной в граничных точках струны:

$$\frac{\partial X^A}{\partial\tau} \frac{\partial X_A}{\partial\tau} = 0 = \frac{\partial X^A}{\partial\tau} \frac{\partial X_A}{\partial\sigma} \quad \text{при } \sigma = 0, \pi. \quad (12.1.7.7)$$

Более того, g_{11} строго положительно, а g_{01}^2 должно стремиться к нулю быстрее, чем g_{00} , поэтому отношения (12.1.7.6) в самом деле равны нулю:

$$g_{11} > 0, \quad (12.1.7.8a)$$

$$g_{01}^2/g_{00} \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow 0, \pi. \quad (12.1.7.8б)$$

(Если $g_{01}^2 \sim g_{00}$ или $g_{00} \ll g_{01}^2$, то $g_{01}/\sqrt{-g}$ не стремится к нулю в граничных точках.)

Первое равенство (12.1.7.7) выражает тот факт, что вектор $\partial X^A/\partial \tau$ является светоподобным. Второе равенство (12.1.7.7) означает, что вектор $\partial X^A/\partial \tau$ также ортогонален пространственному вектору, касательному к мировой поверхности струны. Таким образом, мы видим, что концы струны движутся со скоростью света под прямым углом к струне; траектория струны касательна к изотропным плоскостям в граничных точках.

Нужно отметить, что вырождение метрики в граничных точках на первый взгляд противоречит выбору конформной калибровки ($g_{00} = 0$, $g_{11} \neq 0$ не согласуется с выбором $g_{\alpha\beta} = = \phi^2 \eta_{\alpha\beta}$). Но это противоречие не является серьезным; оно обсуждается ниже (противоречие снимается, если использовать подходящим образом выбранные координаты, в которых $\partial X^A/\partial \sigma = 0$ при $\sigma = 0, \pi$).

Физическое объяснение этого особого движения концов струны состоит в следующем. Струна движется свободно, поэтому ее угловой момент (вызванный движением концов струны под прямым углом к струне) должен уравнивать внутреннее натяжение, которое стремится стянуть ее в точку. С учетом рассмотренных граничных условий эффективное натяжение струны обращается в нуль в точках $\sigma = 0, \pi$ [9]. В то же время граничные условия означают, что потоки импульса и углового момента j_A^1 и j_{AB}^1 , заданные выражениями (12.1.5.2) и (12.1.5.3), в граничных точках струны равны нулю, так что все пуанкаре-заряды сохраняются, как и должно быть, если струна действительно движется совершенно свободно.

Упражнения

1. Задачи на вариационный принцип без граничных условий:

а. Рассмотрите скалярное поле X в двумерном плоском пространстве с обычным уравнением Клейна — Гордона. Напишите приведенное действие для конфигураций вида

$$X(\tau, \sigma) = a(\tau) \cos 2\sigma + b(\tau) \sin \sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi.$$

Покажите, что условие экстремума приведенного действия по отношению к a и b не приводит к правильным дифференциальным уравнениям.

б. Покажите, что трудность возникает вследствие неравных нулю поверхностных членов.

2. Жестко вращающаяся струна [10]:

а. Покажите, что траектория

$$X^0 = \tau, \quad X^1 = A(\sigma - \pi/2) \cos \omega\tau, \quad X^2 = A(\sigma - \pi/2) \sin \omega\tau, \quad X^3 = 0,$$

где A и ω — постоянные, связанные соотношением $1/2\pi\omega A = 1$, является решением классических уравнений движения струны в четырех измерениях.

б. Покажите, что граничные условия также выполняются.

в. Исследуйте светоподобные кривые на мировом листе струны. Вычислите время Минковского, необходимое для того, чтобы световой сигнал с одного конца струны достиг другого конца. Заметим, что это время конечно (даже с учетом вырождения метрики на границах), поэтому концы струны не являются причинно несвязанными с внутренними точками струны.

г. Вычислите сохраняющиеся токи. Покажите, что масса и угловой момент определяются выражениями

$$M = A\pi/4\alpha', \quad J = A^2\pi^2/16\alpha'$$

и, следовательно,

$$J = \alpha' M^2$$

(линейная траектория Редже).

д. Являются ли токи j_A^α , j_{AB}^α везде времениподобными? Объясните.

е. Рассмотрите пересечения траектории струны с изотропными плоскостями $X^0 + X^3 = \text{const}$. Являются ли эти пересечения времениподобными, светоподобными или пространственноподобными?

За. Покажите, что решений уравнений движения и граничных условий в двумерном пространстве Минковского не существует: метрика, индуцированная в граничных точках струны, не может быть вырожденной (необходимо еще одно пространственное направление, вдоль которого двигаются концы струны под прямым углом к струне).

Зб. Рассмотрите геометрическое значение результата. Покажите, что для вариаций $\delta X^A(\tau, \sigma)$, не исчезающих на границе, не существует способа сделать площадь экстремальной (в двух измерениях).

Зв. Что произойдет, если потребовать, чтобы $X^A + \delta X^A$ не было пространственноподобным в точках $\sigma = 0, \pi$? Покажите,

как можно построить (тривиальную) струнную теорию в двух измерениях.

Зг. Заключение: струна в двумерном (фоновом) пространстве является плохим примером того, что может быть при $d > 2$.

12.2. Гамильтонов формализм

12.2.1. Связи

Вследствие калибровочной инвариантности действия в каноническом формализме появляются связи. Не все импульсы являются независимыми функциями скоростей. Как справиться с этой проблемой, не фиксируя калибровку, было показано Дираком в его работах [11], ставших теперь классическими.

Эта ситуация хорошо известна из электродинамики, где закон Гаусса в каноническом формализме возникает как связь, отвечающая калибровочной инвариантности. Оказывается, что соответствующий этой связи лагранжев множитель совпадает с полем A_0 , которое в отсутствие калибровки является свободным. Как известно, закон Гаусса играет существенную роль. Он обеспечивает калибровочную инвариантность квантовой теории. Поэтому в любом подходе к квантовой теории этот закон должен включаться тем или иным способом. В противоположность этому калибровочные условия (кулоновская калибровка, временная калибровка, лоренцева калибровка и т. д.) являются менее фундаментальными, так как в их выборе существует произвол. Калибровочные условия можно выбирать разные, а закон Гаусса только один.

Главной целью этого раздела является исследование условий Вирасоро, которые появляются в канонической формулировке струнной теории; мы хотим подчеркнуть, что эти условия аналогичны закону Гаусса и не имеют отношения к калибровочным условиям. Точнее, эти условия следуют непосредственно из репараметризационной инвариантности действия струны. Таким образом, они играют фундаментальную роль в теории. Открытие принципа действия (12.1.1.6), который воспроизводит все условия Вирасоро, было в действительности большим достижением [1, 2, 12].

Чтобы в полной мере показать значение “условий Вирасоро”, нужно сохранить все калибровочные симметрии действия и применить метод Дирака [11, 13]. Так как детальное исследование действия Намбу—Гото в гамильтоновом формализме достаточно хорошо представлено в литературе [10, 13], мы

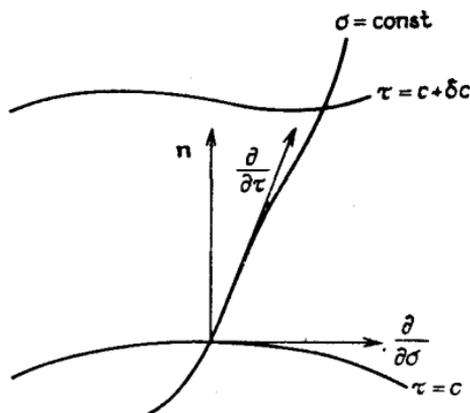


Рис. 12.2. Вектор $d/d\tau$ можно разложить по базису $\{n, d/d\sigma\}$.

возьмем в качестве исходной точки квадратичное действие (12.1.2.1).

Нетрудно найти канонический импульс

$$\mathcal{P}_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^A} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-\gamma} \gamma^{0B} \partial_B X_A, \quad (12.2.1.1)$$

$$p^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{\alpha\beta}} = 0. \quad (12.2.1.2)$$

Уравнения $\dot{\phi}^{\alpha\beta} = p^{\alpha\beta} = 0$ называются первичными связями. Они являются следствием того, что в действии отсутствует кинетический член для метрики.

Следующий шаг в методе Дирака — получение гамильтониана

$$H = \int (\mathcal{P}_A \dot{X}^A + p^{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} - \mathcal{L}) d\sigma \approx \int (\mathcal{P}_A \dot{X}^A - \mathcal{L}) d\sigma; \quad (12.2.1.3)$$

последнее выражение нужно переписать в терминах только канонических переменных. Это нетрудно сделать, так как выражение (12.2.1.3) представляет собой обычный гамильтониан для d скалярных полей на искривленном фоне.

Для упрощения уравнений, а также для того, чтобы воспользоваться вейлевской инвариантностью, компоненты метрики удобно представить в терминах “функции хода” и “функции сдвига” (рис. 12.2). С этой целью разложим вектор $d/d\tau$, касательный к кривым $\sigma = \text{const}$ (т. е. τ -координатным линиям) по базису $(n, d/d\sigma)$. Здесь n — нормированный вектор, перпендику-

лярный к кривым $\tau = \text{const}$:

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1, \quad (12.2.1.4)$$

а $\partial/\partial\sigma$ — касательный вектор к кривым $\tau = \text{const}$ ¹⁾.

Функции хода N и сдвига N^1 определяются по формулам

$$\partial/\partial\tau = N \sqrt{\gamma} \mathbf{n} + N^1 \partial/\partial\sigma, \quad (12.2.1.5)$$

где γ — детерминант пространственной (одномерной!) метрики γ_{11} , индуцированной на кривых $\tau = \text{const}$ ²⁾.

Ниже все величины, не имеющие верхнего индекса (2), мы будем систематически считать одномерными. Например, γ^{11} — обратная величина одномерной метрики: $\gamma^{11} = 1/\gamma_{11}$; она не должна совпадать, если $N^1 \neq 0$, с величиной ${}^{(2)}\gamma^{11}$, которая определяется из соотношения ${}^{(2)}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\sigma} = \delta_{\sigma}^{\alpha}$ (хотя ${}^{(2)}\gamma_{11} = \gamma_{11}$, поэтому для γ_{11} верхний индекс (2) не нужен). Все величины будут одномерно ковариантными. Напомним, что в одномерии плотность веса один есть ковектор и т. д. (для инфинитезимальных координатных преобразований).

Легко вывести следующие полезные соотношения, которые позволяют переходить от (N, N^1, γ_{11}) к $\gamma_{\alpha\beta}$ и обратно:

$$\gamma_{00} = -N^2\gamma + (N^1)^2\gamma_{11}, \quad (12.2.1.6a)$$

$$\gamma_{01} = N^1\gamma_{11}, \quad N^1 = \gamma^{11}\gamma_{01}, \quad (12.2.1.6б)$$

$$N = (-\gamma^{00}\gamma_{11})^{-1/2}, \quad (12.2.1.6в)$$

$$(-{}^{(2)}\gamma)^{1/2} = N\gamma_{11}, \quad (12.2.1.6г)$$

$$\gamma^{00} = -\frac{1}{N^2\gamma}, \quad \gamma^{01} = \frac{N^1}{N^2\gamma}, \quad {}^{(2)}\gamma^{11} = \gamma^{11} - \frac{(N^1)^2}{N^2\gamma}. \quad (12.2.1.6д)$$

Соотношения (12.2.1.6) означают, что замена переменных $\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow N, N^1, \gamma_{11}$ обратима; таким образом, величины N, N^1, γ_{11} можно считать новыми независимыми переменными.

Преимущество использования функции сдвига N (которая имеет вес -1) вместо более привычной функции $\alpha = N\gamma$ состоит в том, что N является вейль-инвариантной величиной, так же как N^1 . Следовательно, единственная переменная, которая не является вейль-инвариантной, это γ_{11} , причем предполагается, что она выпадает из окончательных выражений вследствие вейлевской инвариантности.

¹⁾ Вектор $\partial/\partial\sigma$ имеет d пространственно-временных компонент $\partial X^A/\partial\sigma$; аналогично $(\partial/\partial\tau)^A = \partial X^A/\partial\tau$. Отметим, что \mathbf{n} , конечно, берется касательным к поверхности, заматаемой струной.

²⁾ Формулы (12.2.1.5) эквивалентны соотношению $\partial X^A/\partial\tau = N\sqrt{\gamma}n^A + N^1\partial X^A/\partial\sigma$ в терминах пространственно-временных компонент.

В самом деле, после стандартных преобразований гамильтониан (12.2.1.3) принимает вид

$$H = \int (N\mathcal{H} + N^1\mathcal{H}_1) d\sigma, \quad (12.2.1.7)$$

где

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(2\pi\alpha' \mathcal{P}_A \mathcal{P}^A + \frac{1}{2\pi\alpha'} X'^A X'_A \right), \quad (12.2.1.8a)$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_A X'^A \quad (X'^A \equiv \partial X^A / \partial \sigma). \quad (12.2.1.8b)$$

Коэффициент \mathcal{H} перед функцией хода в гамильтониане равен плотности энергии скалярных полей в системе отсчета, движущейся со скоростью \mathbf{n} (а именно $\mathcal{H} = \gamma T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$). Эта плотность имеет вес 2 и иногда называется супергамильтонианом по аналогии с гравитацией (обсуждение гамильтоновой формы уравнений Эйнштейна см. в работе [13]).

Функция \mathcal{H}_1 равна $\sqrt{\gamma} T_{1\alpha} n^\alpha$; иногда ее называют суперимпульсом. Это векторная плотность веса 1.

Уравнения движения по Дираку [11] генерируются полным гамильтонианом, получаемым из H добавлением к нему первичных связей с лагранжевыми множителями:

$$H_T = H + \int (\lambda p_N + \lambda^1 p_{N^1} + \mu p_{\gamma_{11}}) d\sigma. \quad (12.2.1.9)$$

Чтобы установить, являются ли множители Лагранжа произвольными функциями от σ и τ или определяются из теории, мы должны теперь исследовать “условия непротиворечивости”.

Требование, чтобы первичные связи $p_N \approx 0$, $p_{N^1} \approx 0$, $p_{\gamma_{11}} \approx 0$ (эквивалентные уравнению (12.2.1.2)) сохранялись во времени, приводит к следующим условиям:

$$\dot{p}_N \approx 0 \Rightarrow \mathcal{H} \approx 0, \quad (12.2.1.10a)$$

$$\dot{p}_{N^1} \approx 0 \Rightarrow \mathcal{H}_1 \approx 0, \quad (12.2.1.10b)$$

$$\dot{p}_{\gamma_{11}} \approx 0, \text{ других условий нет } (H \text{ не содержит } \gamma_{11}). \quad (12.2.1.10в)$$

Новые “вторичные” связи $\mathcal{H} = 0$ и $\mathcal{H}_1 = 0$ означают просто, что все компоненты тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}(X)$ равны нулю (условия (12.1.2.4)). Как и в общей теории относительности, гамильтониан (12.2.1.9) оказывается равным нулю в слабом смысле.

Легко проверить, что \mathcal{H} и \mathcal{H}_1 коммутируют со всеми первичными связями. Кроме того, как мы уже указывали и как мы покажем явными вычислениями в разд. 12.3, они

удовлетворяют конформной алгебре:

$$[\mathcal{H}(\sigma), \mathcal{H}(\sigma')] = (\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (12.2.1.11a)$$

$$[\mathcal{H}(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')] = (\mathcal{H}(\sigma) + \mathcal{H}(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (12.2.1.11б)$$

$$[\mathcal{H}_1(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')] = (\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma') \quad (12.2.1.11в)$$

(подразумевается, что $X^A(\sigma)$ и $\mathcal{P}_A(\sigma')$ удовлетворяют каноническим скобкам Пуассона). Следовательно, вторичные связи сохраняются во времени ($\dot{\mathcal{H}} \approx 0$, $\dot{\mathcal{H}}_1 \approx 0$). На этом исследовании “условий непротиворечивости” закончено. Мы нашли все связи в теории, это связи “первого класса” [11]; множители Лагранжа в выражении (12.2.1.9) не определяются.

Упражнение. Выведите соотношения (12.2.1.6).

12.2.2. Смысл условий связи — упрощение формализма

Связи первого класса в общем случае соответствуют калибровочной инвариантности. В этом разделе это соответствие будет продемонстрировано явно, и мы покажем, что появление неопределенных функций от τ в уравнениях Гамильтона связано с возможностью провести произвольные калибровочные преобразования по ходу эволюции системы. В отсутствие условий, фиксирующих калибровку, такой произвол, конечно, должен быть.

Связь $p_{\gamma_{11}} = 0$, или, точнее, $\gamma_{11} p_{\gamma_{11}} = 0$, генерирует преобразования Вейля канонических переменных. В самом деле, получаем

$$\begin{aligned} \delta \gamma_{11}(\sigma) &= \left[\gamma_{11}(\sigma), \int \mu(\sigma') p^{11}(\sigma') \gamma_{11}(\sigma') d\sigma' \right] = \mu(\sigma) \gamma_{11}(\sigma), \\ \delta p^{11}(\sigma) &= -\mu(\sigma) p^{11}(\sigma). \end{aligned} \quad (12.2.2.1)$$

Для остальных канонических переменных y^i имеем

$$\left[y^i, \int \mu(\sigma') p^{11}(\sigma') \gamma_{11}(\sigma') d\sigma' \right] = 0$$

(где $p_{\gamma_{11}} \equiv p^{11}$). Вейлевскими преобразованиями величине γ_{11} можно придать любое (положительное) значение; таким образом, она становится произвольной функцией времени. Это и объясняет, почему в гамильтониане связь $p^{11} = 0$ умножена на неопределенную функцию.

Пара канонически сопряженных величин (γ_{11}, p^{11}) не соответствует никакой реальной степени свободы (γ_{11} произвольно, p^{11} должно быть равно нулю). Более того, эта пара не появляется в выражениях для \mathcal{H} или \mathcal{H}_1 . Следовательно, эти вели-

чины вместе с лагранжевым множителем μ можно просто опустить. Это не приведет к модификации уравнений движения для других вейль-инвариантных переменных.

Остающиеся связи $\mathcal{H} = 0$, $\mathcal{H}_1 = 0$, $p_N = 0$ и $p_{N^1} = 0$ соответствуют другой калибровочной инвариантности струны, а именно репараметризационной инвариантности. Из уравнений

$$\dot{N} = \lambda, \quad \dot{N}^1 = \lambda^1 \quad (12.2.2.2)$$

следует, что N и N^1 являются произвольными, так как их можно изменять как угодно подходящим выбором λ и λ^1 . Этого и следовало ожидать, так как функции хода N и сдвига N^1 описывают рассечение двумерной поверхности эволюции струны, которое получается при пересечении ее с поверхностями $\tau = \text{const}$ (рис. 12.2). Поскольку это рассечение не является калибровочно-инвариантным в общековариантной теории, функции, которые характеризуют это рассечение, не могут быть определены из уравнений движений.

Кроме того, канонически сопряженные импульсы p_N и p_{N^1} должны быть равны нулю, поэтому переменные фазового пространства N , p_N , N^1 и p_{N^1} не отвечают никаким физическим степеням свободы. Эта ситуация очень похожа на ту, которая была с переменными γ_{11} и p^{11} . Тем не менее в данном случае нужно сохранить в действии переменные N и N^1 , так как они играют роль лагранжевых множителей и варьирование по ним приводит к условиям связи на супергамильтониан и суперимпульс $\mathcal{H} = 0$ и $\mathcal{H}_1 = 0$. Следовательно, можно забыть только о переменных p_N , p_{N^1} , λ и λ^1 ; тогда упрощенное действие принимает вид

$$S_H[X^A, \mathcal{P}_A, N, N^1] = \int dt \left(\int d\sigma \mathcal{P}_A \dot{X}^A - H \right), \quad (12.2.2.3)$$

$$H = \int d\sigma (N\mathcal{H} + N^1\mathcal{H}_1). \quad (12.2.2.4)$$

Легко установить, что уравнения движения, полученные из действия (12.2.2.3), полностью эквивалентны уравнениям, которые следуют из действия Намбу — Гото.

Нельзя не указать на параллели между каноническими формулировками двух теорий: струнной модели (с действием (12.2.2.3)) и теории Эйнштейна (см. работу Хансона и др. [13], а также цитируемую там литературу). В обоих случаях получается, что гамильтониан равен нулю в слабом смысле и имеет структуру (12.2.2.4) с произвольными функциями хода и сдвига. Эти функции умножаются на связи $\mathcal{H} = 0$ и $\mathcal{H}_1 = 0$, которые генерируют изменения канонических переменных при произвольных деформациях линии (гиперповерхности) $\tau = \text{const}$.

Общие черты, присущие и струнной модели, и гравитации, появились не случайно. Они имеют одно и то же происхождение, а именно репараметризационную инвариантность в двух и четырех измерениях.

Наконец, мы должны указать, что в выражении (12.2.2.3) полностью исчезло упоминание о вейлевской инвариантности. Это произошло не потому, что мы фиксировали симметрию Вейля в выражении (12.2.2.3), — мы вообще не накладывали никаких калибровок, — а потому, что мы использовали вейль-инвариантные переменные.

Замечание. Конкретный вид двумерных репараметризаций мировой поверхности струны $X^A(\tau, \sigma)$, которые генерируют $\mathcal{H}(\sigma)$ и $\mathcal{H}_1(\sigma)$, построен следующим образом.

Пусть $X^A(\tau, \sigma)$ и $\mathcal{P}_A(\tau, \sigma)$ задают траекторию в фазовом пространстве. Рассмотрим зависящий от τ генератор

$$H_\tau[\xi] = \int d\sigma \{ \xi^\perp(\tau, \sigma) \mathcal{H}(\sigma) + \xi^1(\tau, \sigma) \mathcal{H}_1(\sigma) \}, \quad (12.2.2.5)$$

действие которого на функции в фазовом пространстве задается скобками Пуассона. Он генерирует канонические преобразования

$$\delta X^A(\tau, \sigma) = [2\pi\alpha' \xi^\perp \mathcal{P}^A + \xi^1 X'^A](\tau, \sigma), \quad (12.2.2.6a)$$

$$\delta \mathcal{P}_A(\tau, \sigma) = \left[\frac{(\xi^\perp X'_A)'}{2\pi\alpha'} + (\mathcal{P}_A \xi^1)' \right](\tau, \sigma). \quad (12.2.2.6b)$$

Преобразование (12.2.2.6a) совпадает с произвольным двумерным диффеоморфизмом при следующих условиях: 1) \mathcal{P}^A связано с \dot{X}^A “первым” уравнением Гамильтона и 2) ξ^\perp и ξ^1 выражаются через ξ^μ с помощью разложений $\xi^\perp = \xi^0 N g^{1/2}$ и $\xi^1 = \xi^0 N^1 + {}^{(2)}\xi^1$. (Здесь N и N^1 являются функциями канонических переменных, заданными в виде $N = (-g^{00}g)^{-1/2}$ и $N_1 = g_{01}$; это легко видеть из связей, которые мы также считаем выполненными.) Перечисленные условия позволяют записать соотношение (12.2.2.6a) в виде

$$\delta X^A = \xi^\mu X'_{,\mu}. \quad (12.2.2.7)$$

Чтобы соотношение (12.2.2.6b) воспроизводило соответствующее изменение импульса \mathcal{P}_A , рассматриваемого как функция \dot{X}^A , нужно предположить, что “второе” уравнение Гамильтона также выполнено.

Таким образом, чтобы отождествить канонические преобразования (12.2.2.6) с двумерными диффеоморфизмами, необходимо переопределить инфинитезимальные параметры, а также использовать уравнения движения. Поэтому нет никакой гаран-

тии, что алгебра генераторов \mathcal{H} , \mathcal{H}_1 изоморфна алгебре диффеоморфизмов. Действительно, оказывается, что это не так, даже с учетом того, что преобразования, генерируемые выражением (12.2.2.5), замкнуты вне массовой поверхности. (Если число измерений больше двух, то преобразования не замыкаются.)

Но это не мешает нам называть функции $H_\tau[\xi]$ генераторами двумерных замен координат, поскольку преобразования (12.2.2.6) совпадают с (12.2.2.7) на массовой поверхности. Оказывается, что это самый лучший способ, которым можно "представить" группу диффеоморфизмов в канонической формулировке, а следовательно, также в квантовой механике. Аналогичные трудности возникают и в общей теории относительности.

Любопытное свойство двух измерений состоит в том, что подкласс функций (12.2.2.5) с постоянными во времени параметрами $\xi^\perp(\sigma)$ и $\xi^1(\sigma)$, а именно

$$H[\xi] = \int d\sigma (\xi^\perp(\sigma) \mathcal{H}(\sigma) + \xi^1(\sigma) \mathcal{H}_1(\sigma)), \quad (12.2.2.8)$$

образует замкнутую алгебру по отношению к одновременным скобкам Пуассона¹⁾. Эта алгебра изоморфна двумерной конформной алгебре, т. е. удвоенной алгебре одномерной группы диффеоморфизмов.

В квантовой механике на физические состояния накладываются условия связи

$$\mathcal{H}(\sigma)|\psi\rangle = \mathcal{H}_1(\sigma)|\psi\rangle = 0. \quad (12.2.2.9)$$

В том случае, когда уравнения (12.2.2.9) имеют смысл, а именно, если \mathcal{H} и \mathcal{H}_1 на квантовом уровне остаются связями первого класса (не возникает аномалии), физические состояния не только инвариантны по отношению к конформной группе (12.2.2.8)

$$\left[\exp i \int d\sigma (\xi^\perp(\sigma) \mathcal{H}(\sigma) + \xi^1(\sigma) \mathcal{H}_1(\sigma)) \right] |\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad (12.2.2.10)$$

но также инвариантны при произвольных заменах координат $\xi^\mu(\tau, \sigma)$:

$$\left[\exp i \int d\sigma (\xi^\perp(\tau, \sigma) \mathcal{H}(\sigma) + \xi^1(\tau, \sigma) \mathcal{H}_1(\sigma)) \right] |\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (12.2.2.11)$$

Это показывает, как калибровочная инвариантность вводится в квантовую теорию. Мы подчеркиваем, что инвариантность по отношению к произвольным конформным преобразованиям с

¹⁾ Это не верно в случае высших размерностей, в которых оказывается, что структурные "постоянные" зависят от канонических переменных.

параметрами $\xi^\perp(\sigma)$ и $\xi^1(\sigma)$ приводит к уравнениям (12.2.2.9), а следовательно, к соотношению (12.2.2.11).

В случае, если в алгебре связей на квантовом уровне появляется аномалия, условия (12.2.2.9) накладывать нельзя. Это означает, что потеряна не только конформная инвариантность, но также и инвариантность относительно произвольных замен координат, поскольку физические состояния не удовлетворяют больше условию (12.2.2.11). Именно эта ситуация возникает в теории струн, однако оказывается, что в критической размерности после учета духов инвариантность по отношению к преобразованиям, которые генерируются связями, восстанавливается.

Упражнения

1. Выведите соотношение (12.2.2.3), применяя метод Дирака к действию в форме Намбу — Гото.

2. Постройте гамильтонов формализм для релятивистской мембраны. В качестве отправной точки используйте действие с квадратным корнем или квадратичное действие. Во втором случае появятся связи второго класса. Освободитесь от них подходящим выбором скобок Дирака.

12.2.3. Гамильтонова форма граничных условий (случай открытой струны)

Как мы уже видели, в случае открытых струн уравнения движения нужно дополнить граничными условиями (12.1.7.6). Цель данного раздела — переписать условия (12.1.7.6) на языке канонических переменных X^A , \mathcal{P}_A и лагранжевых множителей N , N^1 .

Из определений \mathcal{P}_A , N и N^1 легко вывести, что

$$\mathcal{P}_A \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow 0, \quad N^1 \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0, \pi. \quad (12.2.3.1)$$

Кроме того, \mathcal{P}_A не может расти быстрее, чем N^{-1} , так как величина

$$\partial_0 X^A = [X^A, H] = N \mathcal{P}^A + N^1 X'^A \quad (12.2.3.2)$$

должна оставаться конечной.

Граничные условия в виде (12.2.3.1) здесь неудобны. Можно воспользоваться тем фактом, что \mathcal{P}_A является плотностью, и переписать граничные условия в более удобном виде. Идея состоит в том, что если заменить координату σ на

$$\sigma' = f(\tau, \sigma),$$

так чтобы $\partial\sigma/\partial\sigma' \rightarrow 0$ в граничных точках, то можно сделать \mathcal{P}_A конечным. Тогда N становится тоже конечным. Это можно проделать, не нарушая интервала σ .

В выбранных подходящим образом координатах новая форма граничных условий имеет следующий вид:

$$X'^A = 0, \quad (12.2.3.3a)$$

$$\mathcal{P}_A \text{ конечно,} \quad (12.2.3.3б)$$

$$N \text{ конечно,} \quad (12.2.3.3в)$$

$$N^1 = 0 \quad (12.2.3.3г)$$

при $\sigma = 0, \pi$. Очевидно, что можно перейти от функций, удовлетворяющих условию (12.2.3.3a) (и $X'^A \neq 0$ внутри интервала), обратно к “регулярным” координатам, в которых $X'^A \neq 0$ всюду; это осуществляется соответствующим преобразованием координат. Таким способом получают новые \mathcal{P}_A, N и N^1 , которые удовлетворяют первоначальным граничным условиям. Поэтому можно принять условия (12.2.3.3), которые более удобны, так как в этом случае ни одна из переменных не имеет сингулярного поведения в граничных точках.

Упражнение. Проверьте явно утверждения, сделанные выше. Исследуйте более детально поведение переменных в окрестности точек $\sigma = 0, \pi$.

Уравнения движения будут сохранять условия (12.2.3.3) только в том случае, если пространственные производные высших порядков от канонических переменных подчиняются специальным ограничениям.

Это легче всего проанализировать, если предположить, что калибровочные функции, которые имеются в нашем распоряжении, N и N^1 удовлетворяют следующим условиям:

$$N^{(2k+1)} = 0, \quad N^{1(2k)} = 0 \quad \text{при } \sigma = 0, \pi. \quad (12.2.3.4)$$

Здесь $f^{(k)}$ обозначает k -ю производную от функции f^1 . Тогда уравнения движения

$$\dot{X}^A = [X^A, H], \quad \dot{\mathcal{P}}_A = [\mathcal{P}_A, H] \quad (12.2.3.5)$$

вместе с условиями (12.2.3.3) означают, что все нечетные производные от X^A и \mathcal{P}_A равны нулю в граничных точках:

$$X^{A(2k+1)} = \mathcal{P}_A^{(2k+1)} = 0 \quad \text{при } \sigma = 0, \pi. \quad (12.2.3.6)$$

¹⁾ Предположение, что функции принадлежат C^∞ , конечно, можно ослабить, но здесь это для нас несущественно.

Граничные условия (12.2.3.4) при $\sigma = 0$ в совокупности эквивалентны утверждению, что можно осуществить гладкое продолжение канонических переменных на интервал $[-\pi, 0]$, используя следующие свойства симметрии:

$$X^A(-\sigma) = X^A(\sigma), \quad \mathcal{P}_A(-\sigma) = \mathcal{P}_A(\sigma), \quad (12.2.3.7a)$$

$$N(-\sigma) = N(\sigma), \quad N^1(-\sigma) = -N^1(\sigma). \quad (12.2.3.7b)$$

Граничные условия при $\sigma = \pi$ тогда означают, что эти переменные можно продолжить на всю действительную ось и, таким образом, сделать их гладкими периодическими функциями с периодом 2π .

Упражнение. Покажите, что с учетом приведенных выше граничных условий гамильтониан в том виде, в котором он выписан, имеет хорошо определенные функциональные производные и не требует “улучшения” при $\sigma = 0, \pi$ (см. [13, 14]).

12.2.4. Пуанкаре-заряды в гамильтоновом формализме

Исключив производные по времени \dot{X}^A из выражений для зарядов (12.1.5.4) и (12.1.5.5), получим

$$Q_A = \int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} \mathcal{P}_A(\sigma) d\sigma, \quad (12.2.4.1)$$

$$Q_{AB} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} (\mathcal{P}_A(\sigma) X_B(\sigma) - \mathcal{P}_B(\sigma) X_A(\sigma)) d\sigma. \quad (12.2.4.2)$$

Скобки Пуассона этих зарядов образуют замкнутую алгебру, соответствующую алгебре Пуанкаре.

Упражнение. Проверьте, что заряды являются калибровочно-инвариантными и сохраняются, т. е. $[Q, H] = 0$ при любом допустимом выборе функций хода и сдвига.

12.3. Более подробное описание алгебры связей

12.3.1. Явные вычисления

Основные результаты канонического формализма можно сформулировать в виде следующих положений:

1. Переменными в гамильтоновом формализме являются координаты струны $X^A(\sigma)$, сопряженные импульсы $\mathcal{P}_A(\sigma)$ и лаг-

ранжевы множители $N(\sigma)$, $N^1(\sigma)$. Имеют место скобки Пуассона

$$[X^A(\sigma), \mathcal{P}_B(\sigma')] = \delta_B^A \delta(\sigma, \sigma'). \quad (12.3.1.1)$$

Кроме того, переменные подчиняются граничным условиям (12.2.3.3) в случае открытых струн и условиям периодичности в случае замкнутых струн.

2. Вся динамика струны содержится в связях

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(2\pi\alpha' \mathcal{P}^A \mathcal{P}_A + \frac{1}{2\pi\alpha'} X'^A X'_A \right) \approx 0, \quad (12.3.1.2a)$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_A X'^A \approx 0, \quad (12.3.1.2b)$$

которые ограничивают допустимые начальные условия. Гамильтониан теории имеет вид

$$H = \int d\sigma (N\mathcal{H} + N^1\mathcal{H}_1); \quad (12.3.1.3)$$

он равен нулю в слабом смысле; $\mathcal{H}(\sigma)$ генерирует деформации струны $X^A(\sigma)$, перпендикулярные струне, так как он умножается в выражении (12.3.1.3) на функцию хода; $\mathcal{H}_1(\sigma)$ генерирует сдвиги, касательные к струне. Для получения выражений (12.3.1.2) не требуется никакой фиксации калибровки.

3. Скобки Пуассона связей образуют замкнутую алгебру. Эта алгебра эквивалентна конформной алгебре, или “алгебре Вирасоро”:

$$[\mathcal{H}(\sigma), \mathcal{H}(\sigma')] = (\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (12.3.1.4a)$$

$$[\mathcal{H}(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')] = (\mathcal{H}(\sigma) + \mathcal{H}(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (12.3.1.4b)$$

$$[\mathcal{H}_1(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')] = (\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'). \quad (12.3.1.4в)$$

Вследствие этих соотношений связи оказываются “первого класса” и сохраняются при эволюции во времени.

Явное доказательство соотношений (12.3.1.4b) и (12.3.1.4в), которое мы до сих пор откладывали, облегчается, как только мы поймем, что $\mathcal{H}_1(\sigma)$ генерирует одномерные координатные преобразования $\sigma \rightarrow \sigma' = f(\sigma)$, т. е.

$$\left[F(\sigma), \int \mathcal{H}_1(\sigma') \xi^1(\sigma') d\sigma' \right] = \mathfrak{L}_\xi F, \quad (12.3.1.5)$$

где \mathfrak{L} обозначает оператор дифференцирования Ли. В самом деле, находим, что

$$\left[X^A(\sigma), \int \mathcal{H}_1(\sigma') \xi^1(\sigma') d\sigma' \right] = \xi^1(\sigma) X'^A(\sigma) = \mathfrak{L}_\xi X^A$$

(X^A — скаляры), а также

$$\left[\mathcal{P}_A(\sigma), \int \mathcal{H}_1(\sigma') \xi^1(\sigma') d\sigma' \right] = (\xi^1 \mathcal{P}_A)' = \mathcal{L}_\xi \mathcal{P}_A$$

(\mathcal{P}_A — плотность веса 1).

Отсюда мы получаем

$$\left[\mathcal{H}(\sigma), \int \mathcal{H}_1(\sigma') \xi^1(\sigma') d\sigma' \right] = \mathcal{L}_\xi \mathcal{H} = (\xi^1 \mathcal{H})' + \xi'^1 \mathcal{H} \quad (12.3.1.6a)$$

(\mathcal{H} — плотность веса 2) и

$$\left[\mathcal{H}_1(\sigma), \int \mathcal{H}_1(\sigma') \xi^1(\sigma') d\sigma' \right] = \mathcal{L}_\xi \mathcal{H}_1 = (\xi^1 \mathcal{H}_1)' + \xi'^1 \mathcal{H}_1 \quad (12.3.1.6b)$$

(\mathcal{H}_1 — ковекторная плотность веса 1). Поскольку соотношения (12.3.1.6) выполняются для произвольного одномерного векторного поля $\xi^1(\sigma)$, отсюда легко выводятся скобки Пуассона (12.3.1.4б) и (12.3.1.4в).

Что касается скобок Пуассона (12.3.1.4а), то они получают- ся следующим образом:

$$\left[\mathcal{H}(\sigma), \mathcal{H}(\sigma') \right] = -\mathcal{P}_A(\sigma) X'^A(\sigma') \frac{\partial}{\partial \sigma'} \delta(\sigma, \sigma') +$$

$$+ X'^A(\sigma) \mathcal{P}_A(\sigma') \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma, \sigma') = (\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (12.3.1.7)$$

где использованы свойства δ -функции

$$\frac{\partial}{\partial \sigma'} \delta(\sigma, \sigma') = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma, \sigma'), \quad (12.3.1.8a)$$

$$F(\sigma') \delta'(\sigma, \sigma') = F'(\sigma) \delta(\sigma, \sigma') + F(\sigma) \delta'(\sigma, \sigma'). \quad (12.3.1.8б)$$

12.3.2. Условия Вирасоро

Как мы уже показали, алгебра компонент тензора энергии-импульса (12.3.1.4) является конформной алгеброй в двух измерениях. Удобно работать в светоподобных координатах, в которых явно видна структура прямой суммы конформной алгебры в двух измерениях. Поэтому введем¹⁾

$$Q^\pm(\sigma) = 2\pi (\mathcal{H}(\sigma) \pm \mathcal{H}_1(\sigma)) = \left(\sqrt{2\alpha'} \pi \mathcal{P}_A \pm \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} X'_A \right)^2. \quad (12.3.2.1)$$

Так как $T^{\alpha\beta}$ — бесследовый тензор (в светоподобных координатах это означает, что $T^{+-} = 0$), величины Q^+ , Q^- являются про-

¹⁾ Множитель 2π введен в (12.3.2.1) для согласования с общепринятыми обозначениями.

сто компонентами T^{++} и T^{--} тензора $T^{\alpha\beta}$. Введенные новые генераторы, как и ожидалось, удовлетворяют алгебре

$$[Q^+(\sigma), Q^+(\sigma')] = 4\pi(Q^+(\sigma) + Q^+(\sigma'))\delta'(\sigma, \sigma'), \quad (12.3.2.2a)$$

$$[Q^+(\sigma), Q^-(\sigma')] = 0, \quad (12.3.2.2b)$$

$$[Q^-(\sigma), Q^-(\sigma')] = -4\pi(Q^-(\sigma) + Q^-(\sigma'))\delta'(\sigma, \sigma'). \quad (12.3.2.2b)$$

Для случая открытых струн переменные можно продолжить на интервал $[-\pi, 0]$ с помощью правил симметрии, тогда для связей возникают следующие свойства симметрии по отношению к отражению:

$$\mathcal{H}(-\sigma) = \mathcal{H}(\sigma), \quad \mathcal{H}_1(-\sigma) = -\mathcal{H}_1^1(\sigma), \quad Q^+(-\sigma) = Q^-(\sigma). \quad (12.3.2.3)$$

Таким образом, одно условие

$$Q^+(\sigma) = 0, \quad -\pi \leq \sigma \leq \pi, \quad (12.3.2.4)$$

заданное на всем интервале $[-\pi, \pi]$, заключает в себе все связи [10].

Удобно ввести генераторы Вирасоро $L[f]$, заданные формулой

$$L[f] = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma) Q^+(\sigma) d\sigma. \quad (12.3.2.5)$$

В частности получаем

$$H = L[N + N^1]. \quad (12.3.2.6)$$

Генераторы Вирасоро образуют замкнутую алгебру, соответствующую одномерной алгебре диффеоморфизмов:

$$[L[f], L[g]] = L[fg' - f'g] \quad (12.3.2.7)$$

(здесь $fg' - f'g =$ вронскиан $=$ одномерная скобка Ли).

Из алгебры (12.3.2.7) следует, что коэффициенты Фурье $L_n \equiv L[e^{in\sigma}]$ связи $Q^+(\sigma)$ удовлетворяют алгебре Вирасоро, которая в своей первоначальной форме имеет вид¹⁾

$$[L_m, L_n] = i(n - m)L_{n+m}. \quad (12.3.2.8)$$

Условия

$$L_n = 0 \quad (12.3.2.9)$$

полностью эквивалентны каноническим связям. Они называются условиями Вирасоро для открытой струны. Легко

¹⁾ Появление множителя i объясняется тем, что на классическом уровне мы используем скобки Пуассона, поэтому здесь не возникает также центрального заряда.

установить, что

$$L_{-n} = L_n^* \quad (12.3.2.10)$$

В случае замкнутой струны связи $Q^+(\sigma) = 0$ и $Q^-(\sigma) = 0$ являются независимыми. Соответственно этому появляются два набора генераторов Вирасоро:

$$L[f] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) Q^+(\sigma) d\sigma, \quad (12.3.2.11a)$$

$$\bar{L}[f] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) Q^-(\sigma) d\sigma. \quad (12.3.2.11б)$$

Их компоненты Фурье определяются формулами

$$L_n \equiv L[e^{in\sigma}] = L_n^*, \quad (12.3.2.12a)$$

$$\bar{L}_n \equiv \bar{L}[e^{-in\sigma}] = \bar{L}_{-n} \quad (12.3.2.12б)$$

(знак минус в экспоненте введен для того, чтобы ниже была полная симметрия между генераторами L_n и \bar{L}_n), и они удовлетворяют следующей алгебре:

$$[L_m, L_n] = i(n - m) L_{n+m}, \quad (12.3.2.13a)$$

$$[L_m, \bar{L}_n] = 0, \quad (12.3.2.13б)$$

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = i(n - m) \bar{L}_{n+m}. \quad (12.3.2.13в)$$

В данном случае полный набор условий Вирасоро имеет вид

$$L_m = 0, \quad \bar{L}_m = 0. \quad (12.3.2.14)$$

Соотношения (12.3.2.14) в точности эквивалентны гамильтоновым связям.

Упражнения

1. Открытая струна:

а. Вследствие соотношений $X^A(-\sigma) = X^A(\sigma)$, $\mathcal{P}_A(-\sigma) = -\mathcal{P}_A(\sigma)$ канонические переменные не могут удовлетворять на всем интервале $[-\pi, +\pi]$ скобкам Пуассона $[X^A(\sigma), \mathcal{P}_B(\sigma')] = \delta_B^A \delta(\sigma, \sigma')$. Напишите правильные скобки Пуассона.

б. Покажите, что, несмотря на это, выражение (12.3.2.2a) для $[Q^+(\sigma), Q^+(\sigma')]$ справедливо и на всем интервале $[-\pi, \pi]$.

2. Замкнутая струна. Покажите, что $L_0 - \bar{L}_0$ генерирует сдвиги пространственного параметра σ на постоянную величину вдоль струны $\sigma \rightarrow \sigma + a$.

12.4. Фурье-моды

12.4.1. Открытые струны

Связи являются квадратичными по полям, поэтому для исследования их вполне применим метод Фурье-разложений.

Как следствие граничных условий при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$ в данном случае допускаются только “стоячие волны” типа косинуса. Следовательно, имеем Фурье-разложение полей в виде

$$X^A(\sigma) = X_0^A + \sum_{n>0} X_n^A \cos n\sigma, \quad (12.4.1.1)$$

$$\mathcal{P}^A(\sigma) = \frac{p^A}{\pi} + \sum_{n>0} \mathcal{P}_n^A \cos n\sigma, \quad (12.4.1.2)$$

где

$$X_0^A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X^A(\sigma) d\sigma, \quad X_n^A = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi X^A(\sigma) \cos n\sigma d\sigma, \quad (12.4.1.3)$$

$$p_A = \int_0^\pi \mathcal{P}_A(\sigma) d\sigma = \text{полный импульс струны}, \quad (12.4.1.4)$$

$$\mathcal{P}_n^A = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{P}^A(\sigma) \cos n\sigma d\sigma. \quad (12.4.1.5)$$

В калибровке $N = 1$, $N^I = 0$ координата и импульс центра масс (X_0^A , p_A) (нулевые моды разложения) выступают в качестве координаты и импульса свободной частицы ($X_0^A \sim \tau$, $p_A = \text{const}$), тогда как высшие моды описывают гармонические осцилляторы с частотами n . Это наводит на мысль определить осцилляторные переменные¹⁾

$$a_n^A = \frac{i\pi}{2} \sqrt{\frac{2\alpha'}{n}} \mathcal{P}_n^A + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2\alpha'}} X_n^A, \quad (12.4.1.6a)$$

$$a_n^{A*} = -\frac{i\pi}{2} \sqrt{\frac{2\alpha'}{n}} \mathcal{P}_n^A + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2\alpha'}} X_n^A. \quad (12.4.1.6b)$$

Тогда из (12.3.1.1) получаем

$$[X_0^A, p_B] = \delta_B^A, \quad (12.4.1.7a)$$

$$[a_n^A, a_{n'}^{B*}] = -i\eta^{AB} \delta_{n, n'} \quad (n, n' > 0) \quad (12.4.1.7b)$$

(все остальные скобки Пуассона равны нулю).

¹⁾ Хотя мы и предположили конкретный вид калибровки, переход к новым осцилляторным переменным (12.4.1.6) можно сделать независимо от какой-либо калибровки.

В новых переменных $(X_0^A, p_B, \alpha_n^A, \alpha_n^{B*})$ условия Вирасоро принимают вид

$$L_n = -i\sqrt{2n\alpha'} p_A \alpha_n^A + \sum_{m>0} \sqrt{(m+n)m} a_{Am}^* a_{m+n}^A - \\ - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{(n-m)m} a_{Am} a_{n-m}^A, \quad n > 0, \quad (12.4.1.8a)$$

$$L_n^* = L_{-n}, \quad (12.4.1.8б)$$

$$L_0 = \alpha' p^2 + \sum_{n>0} n a_{An}^* a_n^A. \quad (12.4.1.8в)$$

Эти соотношения являются отправной точкой в квантовой теории. Связи в форме (12.4.1.8) выводятся прямыми вычислениями без привлечения каких-либо новых понятий.

Наконец, приведем выражения для пуанкаре-зарядов в случае фурье-разложений:

$$P_A = p_A, \quad (12.4.1.9a)$$

$$M_{AB} = \frac{1}{2} (p_A X_{B0} - X_{A0} p_B) + \frac{1}{2} \sum_{n>0} i (a_{An}^* a_{Bn} - a_{Bn}^* a_{An}). \quad (12.4.1.9б)$$

Если сравнить соотношения (12.4.1.8в) и (12.4.1.9a), то становится ясно, что связь $L_0 = 0$ является спектральным уравнением, которое связывает квадрат массы струны $m^2 = -P^2 = -p^2$ с возбужденными состояниями струны.

Упражнения

1. Получите связи в виде (12.4.1.8).

2а. Пусть α — переменные, определенные следующим образом:

$$\alpha_0^A = -2\alpha' p^A, \quad \alpha_n^A = i\sqrt{2\alpha'} \sqrt{n} a_n^A \quad (n > 0), \quad \alpha_{-n}^A = (\alpha_n^A)^*.$$

Вычислите скобки Пуассона этих переменных.

2б. Покажите, что функции Вирасоро в новых переменных α_n^A принимают вид

$$L_n = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m} \alpha_m = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-m} \alpha_{n+m}.$$

12.4.2. Замкнутые струны

Случай замкнутых струн рассматривается совершенно аналогично случаю открытых струн. И это не удивительно, поскольку связи и в том, и в другом случае очень похожи.

Имеются только два технических отличия:

1. Так как границ не существует, в данном случае осцилляторов оказывается в два раза больше. Стоячие волны могут возникать обоих типов или, что то же самое, могут возникать независимые бегущие волны, движущиеся вправо и влево. Следовательно, формулы разложения для X^A и \mathcal{P}_A имеют вид

$$X^A(\sigma) = X_0^A + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (c_n^A \exp -in\sigma + \bar{c}_n^A \exp in\sigma + \text{компл. сопр.}), \quad (12.4.2.1a)$$

$$\mathcal{P}^A(\sigma) = \frac{p^A}{2\pi} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi \sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (-ic_n^A \exp -in\sigma - i\bar{c}_n^A \exp in\sigma + \text{компл. сопр.}). \quad (12.4.2.1б)$$

Осцилляторные переменные c_n^A и \bar{c}_n^A являются независимыми. Скобки Пуассона имеют вид

$$[X_0^A, p_B] = \delta_B^A, \quad (12.4.2.2a)$$

$$[c_n^A, c_{n'}^{*B}] = -i\eta^{AB}\delta_{n,n'}, \quad [\bar{c}_n^A, \bar{c}_{n'}^{*B}] = -i\eta^{AB}\delta_{n,n'} \quad (n, n' > 0) \quad (12.4.2.2б)$$

(все остальные скобки Пуассона равны нулю).

2. Число связей в данном случае также удваивается, так как $Q^+(\sigma)$ и $Q^-(\sigma)$ теперь совершенно независимы. Генераторы Вирасоро в новых осцилляторных переменных имеют вид

$$L_n = -\frac{i}{2} \sqrt{2\pi\alpha'} p_A c_n^A + \sum_{m>0} \sqrt{m(m+n)} c_{Am}^* c_{m+n}^A - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{m(n-m)} c_{Am}^* c_{n-m}^A, \quad n > 0, \quad (12.4.2.3a)$$

$$\bar{L}_n \text{ такое же с заменой } c \text{ на } \bar{c}, \quad (12.4.2.3б)$$

$$L_{-n} = L_n^*, \quad \bar{L}_{-n} = \bar{L}_n^*, \quad (12.4.2.3в)$$

$$L_0 + \bar{L}_0 = \frac{1}{2} \alpha' p^2 + \sum_{n>0} n (c_{An}^* c_n^A + \bar{c}_{An}^* \bar{c}_n^A), \quad (12.4.2.3г)$$

$$L_0 - \bar{L}_0 = \sum_{n>0} n (c_{An}^* c_n^A - \bar{c}_{An}^* \bar{c}_n^A). \quad (12.4.2.3д)$$

Отсюда видно, что в связях $L_n = 0$ и $\bar{L}_n = 0$ правобегущие и левобегущие секторы, которые описываются осцилляторами c и \bar{c} соответственно, почти всегда являются независимыми. Исключение составляет лишь условие $L_0 - \bar{L}_0 = 0$ — спектральное соотношение, которое связывает оба сектора, а также тот факт, что нулевая мода p_A не соответствует бегущей волне и является одновременно и правой и левой переменной.

Заметим также, что переход от выражений (12.4.1.8) для открытой струны к выражениям (12.4.2.3) для замкнутой струны осуществляется простой заменой p на $p/2$ и a на c (или \bar{c}).

Так же, как в случае открытой струны, завершим рассмотрение выражениями для пуанкаре-зарядов:

$$P_A = p_A, \quad (12.4.2.4a)$$

$$M_{AB} = \frac{1}{2} (p_A X_{B_0} - p_B X_{A_0}) + \\ + \frac{1}{2} \sum i (c_{An}^* c_{Bn} + c_{An}^* \bar{c}_{Bn} - c_{Bn}^* c_{An} - \bar{c}_{Bn}^* \bar{c}_{An}). \quad (12.4.2.4b)$$

Упражнение. Область изменений σ иногда выбирается равной $[0, \pi]$ и считается, что поля периодичны с периодом π . Предложите правила, которые позволят переписать приведенные выше формулы в этой новой системе обозначений.

12.5. Калибровка светового конуса

Калибровка светового конуса играет очень важную роль в теории струн. Например, только в этой калибровке существует последовательное квантование суперструн.

12.5.1. Конформные калибровки

Калибровка светового конуса принадлежит к семейству так называемых конформных калибровок. Как мы указывали выше, любая двумерная метрика является конформно плоской. Следовательно, существует такая система координат, в которых метрика принимает вид

$$g_{\alpha\beta} = \phi^2 \eta_{\alpha\beta}, \quad (12.5.1.1)$$

или, как мы уже писали,

$$g_{\alpha\beta} = \sqrt{-g} \eta_{\alpha\beta}. \quad (12.5.1.2)$$

Существование такой системы координат легко установить локально [5]. В глобальном смысле этот вопрос был гораздо лучше исследован для случая римановых поверхностей (т. е.

для метрики с евклидовой сигнатурой), и было найдено, что для неодносвязных поверхностей необходимо вводить “модули”. Хотя исследования еще не завершены в полной мере, по-видимому, для случая несингулярной псевдоримановой поверхности, рассматриваемой здесь, такие сложности не возникают¹⁾. Это обусловлено тем, что, как обычно предполагается, причинная структура пространственно-временной поверхности, замечаемой струной, является тривиальной. Теперь мы объясним это подробнее.

Рассмотрим для определенности открытую струну, так как в этом случае возникают более интересные вопросы. Зададимся целью доказать, что можно определить глобальные координаты (τ, σ) , где $0 \leq \sigma \leq \pi$, такие, чтобы выполнялось соотношение (12.5.1.1). Как ясно из проведенного выше обсуждения граничных условий, пространственно-временной вектор $\partial X^A / \partial \sigma$ в конформных координатах обязательно равен нулю в граничных точках. Но кроме этого вырождения в граничных точках координаты (τ, σ) всюду должны быть регулярными.

Предположение о тривиальности причинной структуры поверхности эквивалентно требованию, что любое событие на мировой поверхности струны находится по отношению к границам либо в причинном прошлом, либо в причинном будущем. Точнее, если θ — регулярный “временной параметр” вдоль мировой линии одного из концов струны (в качестве θ можно взять, например, время Минковского t), то предполагается, что каждому событию P на мировой поверхности можно сопоставить пару координат (θ, θ') , таких, что 1) θ — момент времени, когда нужно выпустить световой луч с одного из концов струны, чтобы он достиг заданного события P , и 2) θ' — момент времени, когда световой сигнал, испущенный из P , достигает того же конца струны (рис. 12.3) [15].

Система координат (θ, θ') определена глобально и, очевидно, является изотропной. Эти координаты задают регулярную параметризацию эволюции струны в том смысле, что векторы $\partial X^A / \partial \theta$ и $\partial X^A / \partial \theta'$ являются линейно независимыми всюду, за исключением граничных точек, где

$$\partial X^A / \partial \theta = \partial X^A / \partial \theta'. \quad (12.5.1.3)$$

В последнем условии отражено известное поведение световых лучей в окрестности границ. Световые лучи приближаются к граничным точкам по единственному изотропному направлению,

¹⁾ Предположение несингулярности исключает изменения топологий в лоренцевом случае и соответствует свободным струнам.

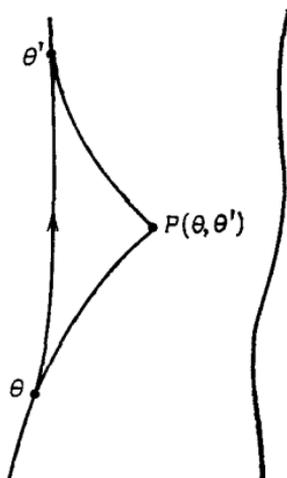


Рис. 12.3. Изотропные координаты (θ, θ') произвольной точки на мировой поверхности струны.

касательному к мировой поверхности в этих точках. Условие (12.5.1.3) эквивалентно соотношению $\partial X^A / \partial \sigma = 0$.

Ясно, что для более сложных причинных структур, содержащих горизонты событий (в случае черных дыр), определить θ и θ' глобально невозможно. Такие структуры естественно возникают в двумерной гравитации [16], но влияние этих структур на теорию свободной струны в плоском пространстве-времени, если оно существует, до сих пор не исследовано. Следовательно, мы не будем их здесь рассматривать.

В координатах (θ, θ') метрика записывается в виде

$$ds^2 = -F^2(\theta, \theta') d\theta d\theta', \quad (12.5.1.4)$$

где $F(\theta, \theta')$ — некоторая регулярная функция. Знак минус обусловлен тем фактом, что ds^2 должно быть отрицательным для положительных $d\theta$ и $d\theta'$, так как событие $(\theta + d\theta, \theta' + d\theta')$ находится в причинном будущем по отношению к событию (θ, θ') .

Область изменений переменной θ есть $[-\infty, +\infty]$, тогда как θ' изменяется от θ до $\theta + 2l(\theta)$. Соотношение $\theta' = \theta$ задает один конец струны, а второй конец струны определяется соотношением $\theta' = \theta + 2l(\theta)$, где $2l(\theta) \neq 0$ — полное время, которое затрачивает световой луч, чтобы, отправившись из одного конца струны в момент времени θ , достигнуть другого конца и вернуться обратно.

При $\theta = \theta'$, а также $\theta' = \theta + 2l(\theta)$ функция F равна нулю в соответствии с тем, что границы мировой поверхности являются изотропными. В этих точках метрика (12.5.1.4) пол-

ностью вырождена, но это частично обусловлено выбором координат.

После того как мы представили метрику в виде (12.5.1.4), оказывается совсем нетрудно ввести конформные координаты (τ, σ) . Они определяются просто как полусумма и полуразность:

$$\tau = \frac{1}{2}(\theta' + \theta), \quad (12.5.1.5a)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\theta' - \theta). \quad (12.5.1.5б)$$

С учетом этих определений соотношение (12.5.1.3) означает, что $\partial X^A / \partial \sigma = 0$ в граничных точках, как мы упоминали.

Менее очевидно, что интервал σ , а именно $[0, l(\theta)]$, является постоянным. Для произвольной параметризации θ мировой линии $\sigma = 0$ это неверно, но этого можно добиться подходящей заменой $\theta \rightarrow f(\theta)$. Ниже будет доказано, что время Минковского t обладает свойством $l(t) = \text{const}$ в том случае, если удовлетворены уравнения движения струны.

Удобство конформной калибровки состоит в том, что уравнения движения струны становятся линейными, если выполнено условие (12.5.1.1). В явном виде имеем

$$\eta^{\lambda\mu} \partial_\lambda \partial_\mu X^A = 0, \quad (12.5.1.6)$$

тогда как условия связи $T_{\alpha\beta} = 0$ принимают вид

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0, \quad \dot{X} \cdot X' = 0 \quad (12.5.1.7)$$

($\dot{X}^2 = \eta_{AB} \dot{X}^A \dot{X}^B$ и т. д.).

Упражнения

1. Покажите, что конформная калибровка эквивалентна условиям $N = 1, N^1 = 0$.

2. Рассмотрите конформную калибровку для случая замкнутых струн.

3а. Рассмотрите двумерную поверхность (в трехмерном пространстве-времени), заданную уравнениями

$$X^0 = \tau,$$

$$X^1 = \cos \alpha + \tau, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

$$X^2 = \sin \alpha.$$

Найдите индуцированную метрику на поверхности.

б. Покажите, что световому лучу, испущенному из точки $\alpha = 0$, потребуется бесконечное время, чтобы достигнуть точки $\alpha = \pi$. Может ли световой луч двигаться в направлении уменьшения α ?

в. Исследуйте возможность введения конформной системы координат на всей мировой поверхности.

г. Рассмотрите эволюцию открытой струны, которая описывается приведенными выше уравнениями для $0 \leq \alpha \leq \pi$. Убедитесь, что концы струны движутся со скоростью света под прямым углом к струне, но условие (12.1.7.8б) не выполняется. Нарисуйте линии, ортогональные линиям $\tau = \text{const}$.

12.5.2. Калибровка светового конуса

Конформная калибровка не полностью фиксирует систему координат. Как мы уже отмечали, остаточной калибровочной группой является конформная группа. Чтобы окончательно фиксировать симметрию, требуется наложить дополнительные условия. Например, можно дать определение “временной координате” τ и тем самым фиксировать ее (так, чтобы это не противоречило условию конформной калибровки).

После того как τ фиксировано, остаются только конформные преобразования вида

$$\tau' = \tau, \quad (12.5.2.1)$$

$$\sigma' = \pm \sigma + b, \quad (12.5.2.2)$$

где b — произвольная постоянная. Если, кроме того, потребовать, чтобы конформные преобразования не нарушали пространственной ориентации, то остаются только преобразования (12.5.2.2) со знаком плюс.

В случае открытой струны новая координата σ' также должна принимать значения от 0 до π (преобразования должны быть тождественны в граничных точках). Следовательно, остаточные преобразования сводятся к тождественным.

В случае замкнутой струны можно лишь потребовать, чтобы не нарушалась периодичность по σ' с периодом 2π . Ясно, что преобразования (12.5.2.2) удовлетворяют этому требованию независимо от того, какое значение принимает постоянная b . Следовательно, наложение конформной калибровки и фиксация τ в случае замкнутых струн не фиксирует полностью систему координат. Остается возможность преобразования нулевой моды (постоянной составляющей) пространственной координаты:

$$\tau' = \tau, \quad (12.5.2.3)$$

$$\sigma' = \sigma + b. \quad (12.5.2.4)$$

В калибровке светового конуса τ выбирается пропорциональным X^+ :

$$\tau = \beta X^+, \quad (12.5.2.5)$$

где

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^{d-1}) \quad (12.5.2.6)$$

являются изотропными координатами в пространстве Минковского. Причина, по которой условие (12.5.2.5) является столь удобным, заключается в следующем: в координатах светового конуса метрика плоского пространства имеет вид

$$ds_{\text{Минк}}^2 = -2dX^+ dX^- + \sum_i (dX^i)^2, \quad i=1, \dots, d-2, \quad (12.5.2.7)$$

и является линейной по dX^+ .

Условия (12.5.1.1) и (12.5.2.5) определяют калибровку светового конуса.

Чтобы установить, является ли условие (12.5.2.5) допустимой параметризацией, необходимо проверить следующие утверждения: 1) X^+ является временной координатой, совместной с конформной калибровкой, и 2) гиперплоскости $X^+ = \text{const}$ пересекают мировую поверхность струны по пространственноподобным линиям. Доказательства этих утверждений приведены в следующем разделе, где также показано, что для траекторий, удовлетворяющих классическим уравнениям движения, не возникает никаких сложностей.

Найдем сначала постоянную β в уравнении (12.5.2.5). Уравнения движения для X дают

$$\dot{X}^+ = 2\pi\alpha' N \mathcal{P}^+ + N^1 (X^+)', \quad (12.5.2.8a)$$

$$\dot{\mathcal{P}}^+ = (N X^+)' + (N^1 \mathcal{P}^+)' \quad (12.5.2.8б)$$

Так как конформная калибровка эквивалентна соотношениям $N=1$ и $N^1=0$, условие (12.5.2.5) вместе с уравнением (12.5.2.8a) означает, что $\mathcal{P}^+(\sigma)$ в разложении не имеет ненулевых мод:

$$\mathcal{P}^+(\sigma) = p^+/\pi \quad (\text{открытая струна}) \quad (12.5.2.9a)$$

или

$$\mathcal{P}^+(\sigma) = p^+/2\pi \quad (\text{замкнутая струна}). \quad (12.5.2.9б)$$

Из соотношения (12.5.2.8a) находим β :

$$\tau = X^+/2p^+\alpha' \quad (\text{открытая струна}) \quad (12.5.2.10a)$$

или

$$\tau = X^+/p^+\alpha' \quad (\text{замкнутая струна}). \quad (12.5.2.10б)$$

Если мы, наоборот, предполагаем, что соотношения (12.5.2.9) и (12.5.2.10) выполнены, то из уравнения (12.5.2.8a)

получаем, что $N = 1$ ($\dot{\mathcal{P}}^+ = 0$, как легко получить, интегрируя уравнение (12.5.2.8б) по σ). Кроме того, из уравнения (12.5.2.8б) находим, что $N' = 0$ (при условии, что $p^+ \neq 0$), поэтому N^1 является функцией только τ . В случае открытой струны эта функция тождественно равна нулю вследствие граничных условий. Система координат должна быть конформной, и соотношения (12.5.2.9) и (12.5.2.10) можно принять в качестве определения калибровки светового конуса.

В случае замкнутой струны $N^1(\tau)$ не определено, поэтому условия (12.5.2.9) и (12.5.2.10) оказываются более слабыми, чем исходные условия калибровки светового конуса. Тем не менее из-за того, что эти условия оказываются более удобными — они выражаются непосредственно в терминах канонических переменных, — мы будем также использовать их в качестве координатных условий для замкнутой струны и будем называть их далее условиями калибровки светового конуса. Важно также понять, что условия (12.5.2.9) и (12.5.2.10) все еще допускают произвольные, зависящие от времени координатные преобразования вида

$$\tau' = \tau, \quad \sigma' = \sigma + f(\tau) \quad (12.5.2.11)$$

(зависящие от времени сдвиги нулевой моды). Эта остаточная калибровочная инвариантность играет важную роль в квантовой теории. Соответствующее условие связи означает, что первое возбужденное состояние в спектре имеет спин 2.

Упражнение

а. Пусть (τ, σ) — конформные (“изотермические”) координаты. Покажите, что уравнение $\partial^2 \tau' / \partial \tau^2 - \partial^2 \tau' / \partial \sigma^2 = 0$ является необходимым условием того, чтобы $\tau'(\tau, \sigma)$ была временной координатой некоторой новой конформной системы координат.

б. Зная координату $\tau'(\tau, \sigma)$, удовлетворяющую условию (а), покажите геометрически, как построить новую конформную систему координат (τ', σ') .

в. Пусть τ' — решение уравнения (а); тогда $\tau' = \frac{1}{2}[f(\tau + \sigma) + g(\tau - \sigma)]$ и $\sigma' = \frac{1}{2}[f(\tau + \sigma) - g(\tau - \sigma)]$. Покажите, что система координат (τ', σ') является допустимой в том и только в том случае, когда функции f и g обратимы.

г. Иногда вместо условия (12.5.2.10а) выбирают $\tau = X^+$. Какой интервал пробегает σ при таком выборе? *Замечание.* В этом случае соотношение (12.5.2.9а) должно иметь вид $\mathcal{P}^+(\sigma) =$

$= p^+ / (\text{интервал } \sigma)$, чтобы иметь $\int \mathcal{P}^+(\sigma) d\sigma = p^+$.

12.5.3. Общее решение классических уравнений движения струны

В конформной калибровке легко получить решение динамических уравнений струны в виде

$$X^A(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [f^A(\tau + \sigma) + g^A(\tau - \sigma)], \quad (12.5.3.1)$$

или в изотропных координатах θ и θ'

$$X^A(\theta, \theta') = \frac{1}{2} [f^A(\theta) + g^A(\theta')]. \quad (12.5.3.2)$$

Калибровка светового конуса допустима и будет хорошо определена глобально только в том случае, если $f^+(\theta)$ и $g^+(\theta')$ являются обратимыми функциями (см. приведенное выше упражнение). При некоторых условиях этого может не быть.

Чтобы найти, в каких случаях невозможно наложить калибровку светового конуса, мы должны прежде всего принять во внимание условия $T_{\alpha\beta}(X) = 0$, а также граничные условия при $\theta' = \theta$ и $\theta' = \theta + 2l(\theta)$. (Далее мы ограничимся рассмотрением только случая открытой струны. Некоторые замечания, касающиеся замкнутой струны, приведены в разд. 12.5.7.)

Условия $T_{\alpha\beta}(X) = 0$ будут удовлетворены, т. е. система координат θ, θ' будет изотропной, только в том случае, если векторы $df^A/d\theta$ и $dg^A/d\theta'$ являются изотропными:

$$\eta_{AB} \frac{df^A}{d\theta} \frac{df^B}{d\theta} = 0, \quad \eta_{AB} \frac{dg^A}{d\theta'} \frac{dg^B}{d\theta'} = 0. \quad (12.5.3.3)$$

Кроме того, граничное условие (12.5.1.3), которое задает поведение струны вблизи границ, будет иметь место в первой граничной точке $\theta = \theta'$, если изотропные векторы $df^A/d\theta$ и $dg^A/d\theta'$ равны при $\theta' = \theta$. Но если $f'^A(\theta) = g'^A(\theta)$, то без потери общности можно считать, что функции f^A и g^A тождественны:

$$f^A(\theta) = g^A(\theta). \quad (12.5.3.4)$$

Тогда условие (12.5.1.3) будет выполнено в другой граничной точке, если

$$f'^A(\theta) = f'^A(\theta + 2l(\theta)).$$

Выбирая подходящую параметризацию для θ , которая приводит к интервалу изменения σ от 0 до π , т. е. $l(\theta) = \pi$, получаем

$$f'^A(\theta) = f'^A(\theta + 2\pi). \quad (12.5.3.5)$$

Периодичность по θ производной f'^A , означает, что

$$f^A(\theta + 2\pi) = f^A(\theta) + 2\pi\alpha' p^A, \quad (12.5.3.6)$$

где p^A — некоторая постоянная “нулевая мода”. Явные вычисления показывают, что p^A есть не что иное, как импульс струны.

В соответствии с этим мы видим, что распространение струны полностью определяется одной функцией $f^A(\theta)$, т. е. задается движением одного из своих концов $\theta = \theta'$, который движется со скоростью света по винтовой траектории:

$$X^A(\theta, \theta') = \frac{1}{2} [f^A(\theta) + f^A(\theta')], \quad (12.5.3.7a)$$

$$\frac{df^A}{d\theta} \frac{df^B}{d\theta} \eta_{AB} = 0, \quad (12.5.3.7b)$$

$$f^A(\theta + 2\pi) = f^A(\theta) + 2\pi\alpha' p^A. \quad (12.5.3.7в)$$

Если p^A — времениподобный вектор, то существует “система покоя”, в которой $p^A = (p, 0, 0, \dots, 0)$; в этой системе отсчета конец струны $\theta = \theta'$ описывает периодическую замкнутую орбиту со скоростью света.

Из уравнений (12.5.3.7) вытекают интересные следствия. Во-первых, из уравнения (12.5.3.7в) получаем, что p^A можно представить в виде суммы направленных в будущее изотропных векторов:

$$p^A = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \frac{df^A}{d\theta} d\theta, \quad (12.5.3.8)$$

и, следовательно, он обязательно должен быть времениподобным или изотропным:

$$p^2 \equiv p^A p_A \leq 0. \quad (12.5.3.9)$$

Другими словами, классическая струна не имеет тахионного состояния движения.

Кроме того, равенство в (12.5.3.9) достигается в том и только в том случае, когда вектор $df^A/d\theta$ параллелен некоторому заданному изотропному направлению μ^A при любых значениях θ , т. е.

$$df^A/d\theta = k(\theta) \mu^A. \quad (12.5.3.10a)$$

Это означает, что для соответствующей функции $\bar{k}(\theta)$ имеем

$$f^A(\theta) = \bar{k}(\theta) \mu^A + f_0^A. \quad (12.5.3.10б)$$

Подставляя уравнения (12.5.3.10) в соотношение (12.5.3.7a), получаем, что изотропный импульс p^A соответствует струне, стянутой в точку, которая движется с постоянной скоростью, равной скорости света. Эти движения соответствуют основному состоянию струны.

Уравнения (12.5.3.7) позволяют рассматривать правомерность калибровки светового конуса на массовой поверхности. Вопрос в сущности сводится к следующему: является ли функция $f^+(\theta)$ обратимой. Из уравнения (12.5.3.7в) видим, что необходимо рассматривать два случая.

1. $p^+ = 0$. Выражение $p^2 = -2p^+p^- + \Sigma (p^i)^2$ является не положительным (соотношение (12.5.3.9)), поэтому оно может иметь место только в том случае, если $p^2 = 0$ и $p^i = 0$ ($|p^-| < < \infty$), т. е. струна коллапсировала в свое основное состояние и движется со скоростью света в “последнем” пространственном направлении. Тогда функция $f^+(\theta)$ оказывается постоянной и, следовательно, необратимой. Калибровка светового конуса не достижима при таком движении.

2. $p^+ \neq 0$. В этом случае ситуация гораздо лучше. В самом деле, предположим, что $f^+(\theta_1) = f^+(\theta_2)$ и $\theta_1 < \theta_2$. Гиперплоскость $X^+ = \text{const}$ является изотропной гиперплоскостью, поэтому она имеет вырожденную метрику и любое направление на ней либо пространственноподобное, либо изотропное:

$$ds^2|_{\text{индуцированная на } X^+ = \text{const}} = \sum_i (dX^i)^2. \quad (12.5.3.11)$$

Изотропные направления заданы условием $X^i = \text{const}$.

Если траектория конца струны дважды пересекает заданную гиперплоскость $X^+ = \text{const}$, точки пересечения должны иметь одинаковые значения X^i , а именно

$$X^i(\theta_1) = X^i(\theta_2). \quad (12.5.3.12)$$

Это единственный случай, когда событие θ_2 находится в будущем по отношению к событию θ_1 . Кроме того, должны иметь место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} X^i(\theta) &= X^i(\theta_1) \\ X^+(\theta) &= X^+(\theta_1) \end{aligned} \right\} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (12.5.3.13)$$

для любых θ между θ_1 и θ_2 , так как это единственная причинная кривая, которая может соединять два заданных события.

Но тогда мы получаем, что индуцированная метрика на мировой поверхности

$$ds^2|_{\text{струна}} = [-X'^+(\theta)X'^-(\theta') - X'^+(\theta')X'^-(\theta) + X'^i(\theta)X'_i(\theta')] d\theta d\theta' \quad (12.5.3.14)$$

является вырожденной для $\theta_1 \leq \theta$, $\theta' \leq \theta_2$. Это находится в противоречии с нашим “предположением конформной калибровки”, которое заключается в том, что координаты θ , θ'

задают регулярную параметризацию струны¹⁾. Следовательно, $\theta_1 = \theta_2$ и $f^+(\theta)$ — обратимая функция.

В дополнение к этому формула (12.5.3.11) позволяет видеть, что пересечения струнной траектории с гиперплоскостью $X^+ = \text{const}$ являются пространственноподобными или изотропными, следовательно, X^+ — временная координата. Поэтому мы заключаем, что в случае $p^+ \neq 0$ калибровка светового конуса является хорошей калибровкой для поверхностей, удовлетворяющих уравнениям движения струны, с тривиальной причинной структурой.

Может возникнуть вопрос, нужно ли беспокоиться о рассмотренных выше трудностях, которые возникают при $p^+ = 0$. Так как это имеет отношение только к точечноподобному движению струны в основном состоянии, некоторые пояснения могут быть получены из рассмотрения свободной безмассовой релятивистской частицы в калибровке светового конуса. Легко видеть, что в квантовой теории не возникает серьезных трудностей. По-видимому, это указывает на то, что трудности с $p^+ = 0$ не должны нас беспокоить. С другой стороны, это согласуется с тем фактом, что квантование струны в калибровке светового конуса дает результаты, совпадающие с аналогичными результатами, полученными другими методами, которые не требуют фиксации калибровки.

Упражнения

1а. Опишите классическое основное состояние струны в осцилляторных переменных.

б. Рассмотрите состояния первого возбужденного уровня и покажите, используя классические условия Вирасоро, что $p^2 \leq 0$. Может ли быть $p^2 = 0$? Что можно сказать о “чисто калибровочной” природе этих мод?

2. Используя соотношение (12.5.3.7а), покажите, что время Минковского, необходимое для того, чтобы световой луч, вышедший из одного конца струны, достиг другого конца и вернулся обратно, не зависит от времени.

3. Параметризация θ , используемая в соотношениях (12.5.3.7) не является единственной. Покажите, что можно наложить условие $f'^A(\theta) p_A = p^A p_A$.

4. Рассмотрите свободную безмассовую релятивистскую частицу.

а. Напишите редуцированное действие в калибровке

$$\tau = mX^+/p^+.$$

¹⁾ Точки $X^A(\theta, \theta')$, $\theta_1 \leq \theta$, $\theta' \leq \theta_2$ в действительности все лежат на одной изотропной кривой.

б. Покажите, что в качестве независимых степеней свободы можно взять X^i , p_i , $u^- \equiv X^- - p^- \tau / m$ и p^+ . Покажите, что эти переменные являются канонически сопряженными.

в. Выведите гамильтониан в калибровке светового конуса.

г. Решите уравнение Шредингера. Докажите, что существуют такие состояния, которые движутся обратно во времени Минковского (т. е. для которых $p^0 < 0$). Существуют ли такие состояния в более привычной калибровке $\tau = X^0$?

д. Выпишите генераторы алгебры Пуанкаре. Проведите для них упорядочение, чтобы они стали формально самосопряженными. Покажите, что даже на квантовом уровне они образуют замкнутую алгебру.

12.5.4. Скобки Дирака как независимые степени свободы

Применим теперь технику канонической фиксации калибровки в гамильтоновых системах со связями [13]. На первом этапе выделим независимые степени свободы, в терминах которых можно выразить “зависимые” переменные путем разрешения условий связи. С самого начала мы будем использовать осцилляторные координаты a_n^A .

Калибровочные условия (12.5.2.9) и (12.5.2.10) эквивалентны следующим условиям¹⁾:

$$a_n^+ = 0, \quad X_0^+ = 2\alpha' p^+ \tau, \quad (12.5.4.1)$$

которые показывают, что a_n^+ и X_0^+ являются зависимыми переменными. Если соотношения (12.5.4.1) окончательно фиксируют калибровку (а мы знаем, что это так, поскольку функции хода N и сдвига N^1 полностью определяются этими соотношениями), то должна существовать возможность разрешить условия Вирасоро $L_n = 0$ и найти, таким образом, сопряженные переменные a_n^- и p^- .

В самом деле, из условия (12.4.1.8) находим

$$a_n^- = iL_n^{\text{tr}} / \sqrt{2\alpha' n} p^+ \quad (n > 0), \quad (12.5.4.2)$$

$$p^- = L_0^{\text{tr}} / 2\alpha' p^+, \quad (12.5.4.3)$$

где L_0^{tr} , L_n^{tr} определяются теми же выражениями (12.4.1.8), что и L_0 , L_n , но суммирование производится только по поперечным индексам. Основное достоинство калибровки светового конуса состоит в том, что условия Вирасоро являются линейными по

¹⁾ Как уже говорилось, здесь и ниже мы рассматриваем открытую струну.

a_n^- и p^- , поэтому в этой калибровке их можно легко разрешить, как это видно из соотношений (12.5.4.2) и (12.5.4.3).

Переменные p^+ , X_0^- , p^i , X_0^i и a_n^i являются совершенно произвольными и выбираются в качестве независимых переменных. Они соответствуют реальным степеням свободы струны ($d-2$ поперечных осцилляторных переменных, а также координаты и импульс центра масс).

Следующий этап состоит в вычислении скобок Дирака независимых переменных. (Скобки Дирака для остальных "зависимых" переменных непосредственно следуют из выражений для этих переменных в терминах независимых переменных, так как связи и калибровочные условия имеют нулевые скобки Дирака с чем бы то ни было в силу определения скобок Дирака. Поэтому связи и калибровочные условия могут накладываться до вычисления скобок.) С этой целью перепишем калибровочные условия и связи (12.5.4.1) — (12.5.4.3) в виде

$$\begin{aligned} \chi_n \equiv a_n^+ = 0, \quad \chi \equiv X_0^+ - 2\alpha' p^+ \tau = 0, \\ \phi_n \equiv a_n^- - \frac{iL_n^{\text{tr}}}{\sqrt{2\alpha' n} p^-}, \quad \phi \equiv p^- - \frac{L_0^{\text{tr}}}{2\alpha' p^+} = 0. \end{aligned} \quad (12.5.4.4)$$

Матрица C скобок Пуассона для системы (12.5.4.4) легко вычисляется: калибровочные условия χ имеют нулевые скобки сами с собой, то же относится и к связям первого класса ϕ . Единственные ненулевые скобки имеют вид $[\chi_n, \phi_{-n'}] = i\delta_{n, n'}$ и $[\chi, \phi] = 1$, поэтому формально матрица C записывается в виде

$$C = \begin{pmatrix} \chi & \phi \\ 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \chi \\ \phi \end{matrix}.$$

Обратная матрица имеет такой же вид, поэтому скобки Дирака определяются соотношением [13]

$$[F, G]_D = [F, G]_P + "[F, \phi]_P [\chi, G]_P - [F, \chi]_P [\phi, G]_P". \quad (12.5.4.5)$$

Интересно, что из определения (12.5.4.5) следует, что $[F, D]_D = [F, G]_P$ всякий раз, когда F и G коммутируют с калибровочными условиями χ (т. е. $[F, \chi_n] = [G, \chi_n] = [F, \chi] = [G, \chi] = 0$). Ясно, что этим условиям удовлетворяют переменные p^+ , p^i , X_0^i и a_n^i . Поэтому для этих переменных скобки Дирака и Пуассона совпадают.

Единственное исключение составляет переменная X_0^- , так как $[X_0^-, \chi] = 2\alpha' \tau \neq 0$. Это наводит на мысль заменить X_0^- переменной u_0^- :

$$u_0^- = X_0^- - 2\alpha' p^- \tau, \quad (12.5.4.6)$$

которая обладает свойством $[u_0^-, \chi] = [u_0^-, \chi_n] = 0$. Если использовать u_0^- в качестве новой независимой переменной, то получаем каноническую форму для скобок Дирака

$$\begin{aligned} [u_0^-, p^+]_D &= -1, & [X_0^i, p^j]_D &= \delta^{ij}, \\ [a_n^i, a_{n'}^{*j}]_D &= -i\delta^{ij}\delta_{nn'}, \end{aligned} \quad (12.5.4.7)$$

(все остальные скобки Дирака равны нулю). Ниже мы будем опускать индекс D в скобках Дирака.

Упражнение. Разрешите связи в непрерывном представлении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = 0$. Покажите, что X_0^- возникает как постоянная интегрирования в общем решении $X^-(\sigma)$ уравнения $\mathcal{H}_1 = 0$.

12.5.5. Действие и гамильтониан в калибровке светового конуса

Калибровочное условие (12.5.4.1) явно содержит время τ , поэтому в калибровке светового конуса эволюция во времени динамических переменных не определяется просто из скобок Дирака этих переменных с каноническим гамильтонианом. Так как последний равен нулю¹⁾, обычная процедура приводила бы к бессмысленному утверждению, что ничто не зависит от времени τ .

Такой способ (использование скобок Дирака в динамических уравнениях) применим только для независимых от времени калибровочных условий [13] и в данном случае явно противоречит требованию сохранения во времени условия $\chi = 0$ (вместо этого получаем $\dot{\chi} = [\chi, H]_D + \partial\chi/\partial\tau = 2\alpha'p^+$).

Чтобы корректно описать эволюцию во времени в калибровке светового конуса, нужно действовать по-другому. Одна из возможностей состоит в том, чтобы провести зависящее от времени каноническое преобразование, которое переводит калибровочные условия в независимые от времени условия и генерирует ненулевой гамильтониан через частную производную по времени от производящей функции S , $H \rightarrow H + \partial S/\partial\tau$. В нашем случае получаем (см. упражнение 1 в конце раздела)

$$\partial S/\partial\tau = 2\alpha'p^+p^-. \quad (12.5.5.1)$$

Следовательно, гамильтониан в калибровке светового конуса имеет вид

$$H^{\text{L. C.}} = 2\alpha'p^+p^- = L_0^{\text{tr}}/2\alpha'. \quad (12.5.5.2)$$

¹⁾ Из выражения (12.2.2.4) видно, что гамильтониан является комбинацией связей.

После того как условия становятся независимыми от времени, можно заменить скобки Пуассона на скобки Дирака в гамильтоновых уравнениях и, таким образом, получить корректное описание эволюции во времени в калибровке светового конуса.

Другой метод состоит в том, чтобы найти редуцированное действие в калибровке светового конуса, которое получается исключением из канонического действия (12.2.2.3) зависимых переменных X_0^+ , a_n^+ , p^- и a_n^- с помощью условий (12.5.4.1) — (12.5.4.3). Эта процедура допустима, другими словами, вариационный принцип для действия в калибровке светового конуса приводит к корректным динамическим уравнениям. В результате получаем

$$\begin{aligned} & S^{L.C.} [a_n^i, a_n^{*i}, p^i, p^+, X_0^i, u_0^-] = \\ & = \int d\tau \left[i \sum_n \int d\sigma (a_{ni}^* \dot{a}_n^i + p_i \dot{X}_0^i - p^+ \dot{u}_0^- - H^{L.C.}) \right], \end{aligned} \quad (12.5.5.3)$$

где гамильтониан $H^{L.C.}$ задан выражением (12.5.5.2).

Исследование действия (12.5.5.3) показывает, что гамильтониан $H^{L.C.}$ действительно является корректным генератором сдвигов во времени и скобки независимых переменных действительно совпадают с (12.5.4.7). Редуцированное действие (12.5.5.3) играет важную роль в теории; например, это действие используется в определении интеграла по траекториям в калибровке светового конуса.

Упражнения

1. Получите явными вычислениями производящую функцию канонических преобразований

$$u^- = X_0^- - 2\alpha' p^- \tau, \quad u^+ = X_0^+ - 2\alpha' p^+ \tau$$

(остальные переменные не меняются). Покажите, что ее частная производная по времени задана выражением (12.5.5.1).

2. Докажите корректность использования редуцированного действия в калибровке светового конуса. Покажите, что вариационный принцип $\delta S^{L.C.} = 0$ порождает все калибровочные условия (для независимых переменных). Найдите общие аргументы, которые доказывают, что скобки, задаваемые действием (12.5.5.3), являются стандартными скобками Дирака.

12.5.6. Генераторы алгебры Пуанкаре

Преобразования Пуанкаре в своей исходной линейной форме выводят систему из калибровки светового конуса. Чтобы калибровочные условия (12.5.2.9) и (12.5.2.10) сохранялись, необходимо также провести калибровочное преобразование.

Легко найти “компенсирующее” репараметризационное преобразование, если заметить, что правильное преобразование (преобразование Пуанкаре + калибровочное преобразование) задается теми же генераторами, что и прежде, но на этот раз посредством скобок Дирака.

В самом деле, правильное преобразование должно отличаться от исходного преобразования Пуанкаре на репараметризацию, так что $\delta\chi_n = \delta\chi = 0$ (условия $\delta\phi_n = \delta\phi = 0$ выполняются автоматически, поскольку генераторы Пуанкаре являются калибровочно-инвариантными). Но это как раз и есть те условия, выполнение которых обеспечивается использованием скобок Дирака, поскольку $[\chi_n, \text{все, что угодно}]_{DB} = [\chi, \text{все что угодно}]_{DB} = 0$ ¹⁾. Тот факт, что χ зависит явно от τ , здесь не существен, так как генераторы Пуанкаре определяют внутренние симметрии, не включающие τ .

Поэтому в калибровке светового конуса генераторы Пуанкаре по-прежнему заданы выражениями (12.4.1.9), т. е. в независимых переменных имеем

$$P^+ = p^+, \quad P^i = p^i, \quad P^- = p^- = L_0^{\text{tr}}/2\alpha' p^+, \quad (12.5.6.1)$$

$$M^{+-} = \frac{1}{2} u_0^- p^+, \quad M^{i+} = -\frac{1}{2} p^+ X_0^i, \quad (12.5.6.2a)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{2} (p^i X_0^j - p^j X_0^i) + \frac{1}{2} \sum_{n>0} i (a_n^{i*} a_n^j - a_n^{*j} a_n^i), \quad (12.5.6.2б)$$

$$M^{i-} = \frac{1}{2} \left(p^i u_0^- - \frac{L_0^{\text{tr}}}{2\alpha' p^+} X_0^i \right) - \frac{1}{2} \sum_{n>0} \frac{a_n^{*i} L_n^{\text{tr}} + L_{-n}^{\text{tr}} a_n^i}{\sqrt{2\alpha' n} p^+}. \quad (12.5.6.2в)$$

Заметим, что эти генераторы не являются линейными или квадратичными по независимым переменным.

При получении выражений (12.5.6.2) мы положили равными нулю слагаемые с явной зависимостью от времени, которая входит через X^+ . Это достигается путем соответствующего канонического преобразования (индуцируемого движением струны). Такое упрощение не меняет алгебры генераторов, заданной скобками Дирака.

Упражнения

1. Используя скобки Дирака, найдите явный вид преобразований, которые генерируются системой (12.5.6.1), (12.5.6.2).

¹⁾ Мы видим также, что скобки Дирака $[F, \text{генераторы Пуанкаре}]_{DB}$ отличаются от скобок Пуассона $[F, \text{генераторы Пуанкаре}]_{PB}$ на калибровочное преобразование, так как генераторы Пуанкаре коммутируют с условиями Вирасоро (а также вследствие (12.5.4.5)).

В полученных преобразованиях выделите обычное преобразование Пуанкаре и репараметризацию.

2. Проверьте явными вычислениями, что система (12.5.6.1), (12.5.6.2) образует замкнутую алгебру по отношению к скобкам Дирака — алгебру Пуанкаре.

12.5.7. Особенности замкнутой струны

Теория замкнутой струны формулируется в калибровке светового конуса аналогично тому, как это было сделано в случае открытой струны. Единственное отличие состоит в том, что калибровочные условия

$$X^+ = \alpha' p^+ \tau, \quad \mathcal{P}^+ = p^+ / 2\pi \quad (12.5.7.1)$$

эквивалентны условиям

$$c_n^+ = \bar{c}_n^+ = 0 \quad (12.5.7.2)$$

и уже не фиксируют полностью калибровку. Имеется одна остаточная калибровочная симметрия (сдвиги нулевой моды вдоль σ), и этой симметрии соответствует одно условие связи — нулевая мода генератора σ -репараметризаций \mathcal{H}_1 должна быть равна нулю.

Таким образом, оказывается, что “независимые” переменные p_i , X_0^i , u_0^- , p^+ и c_n^i , \bar{c}_n^i должны подчиняться условию

$$L_0^{\text{tr}} - \bar{L}_0^{\text{tr}} = 0 \quad (12.5.7.3)$$

($= \int \mathcal{H}_1 d\sigma$). Эти переменные, как и прежде, удовлетворяют условиям

$$[X_0^i, p_j] = \delta_j^i, \quad [p^+, u_0^-] = 1, \quad (12.5.7.4a)$$

$$[c_n^i, c_{n'}^{*j}] = -i\delta^{ij}\delta_{nn'} = [\bar{c}_n^i, \bar{c}_{n'}^{*j}] \quad (12.5.7.4б)$$

(остальные скобки равны нулю).

Величины p^- и c_n^- , \bar{c}_n^- по-прежнему задаются выражениями

$$p^- = \frac{L_0^{\text{tr}} + \bar{L}_0^{\text{tr}}}{\alpha' p^+}, \quad (12.5.7.5)$$

$$c_n^- = \frac{2iL_n^{\text{tr}}}{\sqrt{2\alpha' n} p^+}, \quad \bar{c}_n^- = \frac{2i\bar{L}_n^{\text{tr}}}{\sqrt{2\alpha' n} p^+}. \quad (12.5.7.6)$$

Генераторы Пуанкаре записываются в виде

$$P^i = p^i, \quad P^+ = p^+, \quad P^- = \frac{L_0^{\text{tr}} + \bar{L}_0^{\text{tr}}}{\alpha' p^+}, \quad (12.5.7.7)$$

$$M^{+-} = \frac{1}{2} u_0^- p^+, \quad M^{i+} = -\frac{1}{2} p^+ X_0^i, \quad (12.5.7.8a)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{2} (p^i X_0^j - p^j X_0^i) + \frac{1}{2} \sum_{n>0} i [c_n^{i*} c_n^j + \bar{c}_n^{i*} \bar{c}_n^j - (i \leftrightarrow j)], \quad (12.5.7.8б)$$

$$M^{i-} = \frac{1}{2} \left(p^i u_0^- - \frac{L_0^{\text{tr}} + \bar{L}_0^{\text{tr}}}{\alpha' p^+} X_0^i \right) - \\ - \sum_{n>0} \frac{c_n^{*i} L_n^{\text{tr}} + L_{-n}^{\text{tr}} c_n^i}{\sqrt{2\alpha' n} p^+} - \sum_{n>0} \frac{\bar{c}_n^{*i} \bar{L}_n^{\text{tr}} + \bar{L}_{-n}^{\text{tr}} \bar{c}_n^i}{\sqrt{2\alpha' n} p^+}. \quad (12.5.7.8в)$$

Они образуют алгебру Пуанкаре по отношению к скобкам Дирака. Нетривиальный момент заключается в том, что условие связи остаточной симметрии возникает в коммутаторе $[M^{i-}, M^{j-}]$, точное выражение для которого имеет вид

$$[M^{i-}, M^{j-}] = \frac{i}{2\alpha' (p^+)^2} \sum_{n>0} [c_n^i c_n^{*j} - c_n^j c_n^{*i} - \bar{c}_n^i \bar{c}_n^{*j} + \bar{c}_n^j \bar{c}_n^{*i}] (L_0^{\text{tr}} - \\ - \bar{L}_0^{\text{tr}}) \approx 0. \quad (12.5.7.9)$$

Упражнения

1. Покажите, что связь (12.5.7.3) возникает как условие разрешимости связи $\mathcal{H}_1(\sigma) = 0$ по отношению к периодической функции $X^-(\sigma)$ (нулевая мода в $X^-(\sigma)$ отсутствует).

2. Проверьте выражение для коммутатора (12.5.7.9).

Квантование струны Намбу — Гото

13.1. Алгебра Вирасоро — общее рассмотрение

13.1.1. Введение

Быть может, наиболее впечатляющей чертой моделей квантовых струн является предсказание критической размерности пространства-времени; при другой размерности квантовая теория сталкивается с трудностями. Для бозонной модели эта размерность равна 26.

Существуют по крайней мере три способа определения критической размерности. Первый основан на формулировке теории в калибровке светового конуса; оказывается, что вследствие квантовой некоммутативности операторов квантовые генераторы группы Пуанкаре не образуют замкнутой алгебры Пуанкаре при $d \neq 26$ [17]. Второй подход, называемый “ковариантным”, не использует калибровочных условий и учитывает все (истинные и калибровочные) степени свободы. Можно показать, что состояния с отрицательной нормой исключаются из физического подпространства только при $d \leq 26$ [18]. Наконец, последний подход, вероятно наиболее глубокий, но также и наименее понятный, основывается на симметрии Бекки — Рюэ — Стора — Тютинна. Как выяснилось, эта симметрия может быть реализована квантовомеханически только при $d = 26$ [19].

Все эти методы существенно используют свойство алгебры связей Вирасоро приобретать центральный заряд при квантовании (центральное расширение известно как “алгебра Вирасоро”). Нашей первой задачей является, следовательно, вычисление в рамках ковариантного формализма этого центрального заряда, зависящего от размерности пространства-времени.

13.1.2. Операторы Вирасоро — фоковское представление

Для построения центрального заряда следует уточнить, в каком (псевдо)гильбертовом пространстве и как должны быть определены основные операторы теории. Оказывается, что центральное расширение в действительности зависит от выбора конкретного представления основных коммутационных соотношений —

обстоятельство, по всей вероятности, не достаточно подробно исследованное в литературе.

Поскольку связи квадратичны, а величина L_0 принадлежит к осцилляторному типу, представляется естественным выбрать фоковское представление. Поэтому мы постулируем существование вакуумного состояния $|0, 0\rangle$, которое обращается в нуль при действии всех операторов уничтожения a_n^A (оператор a_n^0 включается для сохранения лоренцевой инвариантности) и обладает нулевым d -импульсом:

$$a_n^A |0, 0\rangle = 0, \quad P^A |0, 0\rangle = 0. \quad (13.1.2.1)$$

Остальные состояния генерируются действием операторов рождения a_n^{A*} и $\exp(ik \cdot X_0)$. Последний оператор порождает состояния с ненулевым импульсом в соответствии с выражениями

$$\exp(ik \cdot X_0) |0, 0\rangle = |0, k\rangle, \quad (13.1.2.2a)$$

$$p^A |0, k\rangle = k^A |0, k\rangle, \quad (13.1.2.2b)$$

где собственные состояния импульса нормированы следующим образом:

$$\langle 0, k' | 0, k\rangle = (2\pi)^d \delta^{(d)}(k - k'). \quad (13.1.2.2b)$$

Произвольное состояние является суперпозицией состояний $|\lambda, k\rangle$, где λ — осцилляторное число заполнения (для каждого осциллятора a_n^A свое λ), а k — d -импульс.

Эти определения придают конкретный смысл операторам X^A , p_B , a_m^A , a_n^{B*} и их коммутационным соотношениям, которые имеют вид

$$[X_0^A, p_B] = i\delta_B^A, \quad (13.1.2.3)$$

$$[a_m^A, a_n^{B*}] = \eta^{AB} \delta_{m,n}. \quad (13.1.2.4)$$

Временная компонента соотношения (13.1.2.4) имеет вид $[a_m^0, a_n^{0*}] = -1$; таким образом, при действии на вакуум нечетного числа операторов рождения a_n^{0*} генерируются состояния с отрицательной нормой. Это неизбежно, если в рамках нашего фоковского представления требуется явная лоренцева инвариантность.

Устранение состояний с отрицательной нормой будет предметом обсуждения разд. 13.4. Здесь же наша цель состоит в том, чтобы выяснить, каким образом проблема упорядочения влияет на алгебру L_n .

Заметим по этому поводу, что операторы Вирасоро при $n \neq 0$ строятся из произведений коммутирующих операторов,

следовательно, неоднозначности упорядочения для них не возникает:

$$L_n = -i \sqrt{2n\alpha'} p_A a_n^A + \sum_{m>0} \sqrt{(m+n)m} a_{Am}^* a_{m+n}^A - \\ - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{(n-m)m} a_{Am} a_{n-m}^A, \quad (13.1.2.5a)$$

$$L_{-n} = L_n^* = i \sqrt{2n\alpha'} p_A a_n^{A*} + \sum_{m>0} \sqrt{(m+n)m} a_{Am+n}^* a_m^A - \\ - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{(n-m)m} a_{An-m}^* a_m^A \quad (13.1.2.5b)$$

($n > 0$). Мы выбрали нормальное упорядочение для L_n и L_{-n} в выражениях (13.1.2.5), но с таким же успехом могли выбрать и “антинормальное”, не меняя L_n или L_{-n} .

Реальная неоднозначность упорядочения содержится в единственной нулевой моде L_0 . Поскольку мы приняли фоковское представление, квантовый аналог L_0 должен быть хорошо определен в пространстве Фока. Это означает, что он может отличаться от своего нормально упорядоченного выражения

$$\alpha' p^2 + \sum_n n a_{An}^* a_n^A \quad (13.1.2.6)$$

самое большое на конечную константу α_0 .

Впредь мы резервируем символ L_0 для нормально упорядоченного выражения (13.1.2.6)

$$L_0 = \alpha' p^2 + \sum_n n a_{An}^* a_n^A \quad (13.1.2.7)$$

и при последующих вычислениях будем помнить, что квантовым аналогом классической величины $L_0^{\text{кл}}$ может являться и $L_0 - \alpha_0$:

$$L_0^{\text{кл}} \rightarrow L_0 - \alpha_0, \quad (13.1.2.8)$$

где величина α_0 конечна. Отметим, что иная процедура упорядочения с бесконечной α_0 (например, антинормальное упорядочение), очевидно, приводит к плохо определенным фоковским операторам.

Упражнение. Охарактеризовать представление коммутационных соотношений (13.1.2.3) и (13.1.2.4) в “другом гильбертовом пространстве”, в котором антинормальное упорядочение имеет смысл. *Замечание:* в таком представлении операторы a_n^0 (a_n^i) рождают состояния с положительной (отрицательной) нормой.

13.1.3. Алгебра Вирасоро

Наша стратегия построения квантовой алгебры операторов Вирасоро состоит в следующем. Единственной причиной, по которой квантовая алгебра отличается от своего классического аналога, умноженного на $i\hbar$, является наличие в выражении $[L_m, L_n] - (m-n)L_{m+n}$ членов, которые сокращают друг друга на классическом уровне, но не делают этого в квантовомеханическом случае вследствие различного упорядочения.

Далее, оператор L_{m+n} квадратичен по основным переменным и приведен к нормальному виду в соответствии с нашим выбором пространства Фока. Поэтому квантовые эффекты могут проявиться только в том случае, когда коммутатор $[L_m, L_n]$, тоже квадратичный по основным переменным, не является нормально упорядоченным. Это означает, что центральный заряд равен члену, возникающему при нормальном упорядочении $[L_m, L_n]$.

Поскольку мы знаем классический вид коммутатора, нам нужно просто найти “аномальный” член. Более того, мы ожидаем — это легко проверить — появления ненулевого центрального заряда только тогда, когда $L_{m+n} = L_0$, т. е. $n = -m$, поскольку неоднозначность упорядочения проявляется только в операторе L_0 .

Следовательно, мы вычисляем $[L_m, L_{-m}]$ при $m > 0$:

$$\begin{aligned}
 & [L_m, L_{-m}] = \\
 = & \text{НУ} + \frac{1}{4} \sum_{k, s=1}^{m-1} (m-k)k(m-s)s (a_k \cdot a_s^* \delta_{k, s} + a_k \cdot a_{m-s}^* \delta_{m-k, s}),
 \end{aligned}
 \tag{13.1.3.1}$$

где НУ — нормально упорядоченное выражение, точный вид которого нас здесь не интересует, поскольку оно не используется при вычислении центрального заряда.

Заметим, что второй член в правой части выражения (13.1.3.1), хотя и не приведен к нормальному виду, тем не менее хорошо определен в пространстве Фока, поскольку сумма содержит лишь конечное число слагаемых. (Важно проводить вычисления таким образом, чтобы появляющиеся на любом этапе выражения были хорошо определены в выбранном пространстве представления. Это гарантируется использованием нормального упорядочения. Если бы мы выбрали другое пространство представления, например соответствующее “антинормальному упорядочению”, то вычисления проводились бы по-другому и мы получили бы другой центральный заряд.)

Нормальное упорядочение уравнения (13.1.3.1) сразу дает

$$[L_m, L_{-m}] = \text{НУ} + \frac{d}{12} (m^3 - m) \quad (13.1.3.2)$$

(мы использовали тождество $6 \sum_{k=1}^{m-1} (m-k)k = m(m-1)(m+1)$ d появляется из следа η_A^4 при суммировании по всем осцилляторам).

Итог этих вычислений состоит в том, что квантовая алгебра Вирасоро действительно приобретает аномальный c -числовой член, пропорциональный размерности пространства-времени:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{d}{12} (m^3 - m) \delta_{m, -n}. \quad (13.1.3.3)$$

Упражнения

1. Вычислите центральный заряд в (простом) представлении, ассоциированном с антинормальным упорядочением. Покажите, что хотя величины L_n и не меняются ($n \neq 0$), получается противоположное значение $(-d/12)(m^3 - m)\delta_{m, -n}$.

2. Можно ли устранить центральный заряд в уравнении (13.1.3.3) путем переопределения величин L_m : $L_m \rightarrow L_m + \alpha_m$, где α_m — постоянные?

3. Докажите, что выражение для центрального заряда, задаваемое уравнением (13.1.3.3), является наиболее общим (с точностью до тривиального переопределения $L_m \rightarrow L_m + \alpha_m$).

Указания. а. Покажите, что путем выбора α_m в выражении $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + k_{mn}$ (при $k_{mn} = -k_{nm}$) можно получить $k_{0m} = 0$; при этом величина α_0 остается неопределенной.

б. Запишите ограничения на k_{mn} , следующие из тождества Якоби.

в. Положите один индекс в тождестве Якоби равным нулю и выведите отсюда, что $k_{mn} = 0$ при $n \neq -m$ (с учетом того, что $k_{0m} = 0$), т. е. $k_{mn} = k(m)\delta_{m, -n}$ ($m > 0$).

г. Покажите, что $k(m)$ удовлетворяет соотношению

$$(n-m)k(m+n) + (2n+m)k(m) - (2m+n)k(n) = 0.$$

Выберите α_0 так, чтобы $k(1) = 0$. Получите искомое значение $k(n) = \frac{1}{6}(n^3 - n)k(2)$.

13.1.4. Сравнение связей Вирасоро с уравнением Уилера — Де Витта

Выше мы подчеркнули тесное сходство условий Вирасоро со связями, возникающими в общей теории относительности; и те, и другие имеют общую причину — репараметризационную инвариантность.

В квантовой гравитации связи для супергамильтониана $\mathcal{H} = 0$ и суперимпульса $\mathcal{H}_i = 0$ налагаются как квантовые условия для физических состояний

$$\mathcal{H}|\psi\rangle = 0, \quad \mathcal{H}_i|\psi\rangle = 0. \quad (13.1.4.1)$$

Эти условия гарантируют калибровочную инвариантность квантовой теории в физическом подпространстве. В “представлении Шредингера”, где пространственная метрика $g_{ij}(x)$ диагональна $\psi = \psi[g_{ij}(x)]$, уравнения (13.1.4.1) известны как уравнения Уилера — Де Витта [20а].

Необходимое условие того, что эти уравнения имеют смысл, состоит в принадлежности квантовых операторов \mathcal{H} и \mathcal{H}_i “первому роду”: $[\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\beta] \sim C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{H}_\gamma$, без “аномального” члена. Если бы такой член присутствовал, из уравнений (13.1.4.1) можно было бы получить дальнейшие условия на физические состояния, которые могли бы совершенно погубить теорию.

Следовательно, важным вопросом квантовой гравитации является поиск представления для полевых операторов и упорядочение связей таким образом, чтобы они оставались принадлежащими “первому роду”. Как мы видели, явное вычисление возможных аномальных членов не может быть проведено — за исключением чисто формального рассмотрения — без определенного выбора гильбертова пространства, в котором представляются основные коммутационные соотношения. Насколько нам известно, эта проблема не решена до сих пор; последние исследования обсуждаются в работах [20б].

Если пытаться квантовать модель струны в соответствии со схемой Уилера — Де Витта, то немедленно возникают серьезные проблемы. Уравнения, аналогичные условиям (13.1.4.1), имеют вид

$$L_n|\psi\rangle = 0 \quad (13.1.4.2)$$

для всех n ; очевидно, что они являются несовместными вследствие наличия неустраняемого центрального заряда в алгебре Вирасоро. Следовательно, нужно ослабить условия (13.1.4.2), требуя, чтобы они выполнялись только для положительных n :

$$L_n|\psi\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (13.1.4.3)$$

(а также $(L_0 - \alpha_0)|\psi\rangle = 0$, см. ниже). Эта ослабленная версия классических связей является теперь явно совместной, поскольку величины L_n с $n > 0$ образуют истинную группу без центрального заряда: центральный заряд появляется в уравнении (13.1.3.3) только тогда, когда один индекс положительный, а другой отрицательный. Полная совместность теории при $d \leq 26$ доказывается в разд. 13.4.

Сравнение уравнений (13.1.4.1) и (13.1.4.3) приводит к ряду концептуальных вопросов, на которые мы попытаемся здесь ответить.

Первый вопрос. Так как в уравнениях (13.1.4.3) мы наложили только половину связей, неясно, использовали ли мы полностью калибровочную инвариантность квантовой теории и не сохранили ли слишком много степеней свободы? Ответ будет в общем случае отрицательным. Оказывается, однако, что критическое значение $d = 26$, ограничивающее сверху значения размерности пространства-времени, при которых решения уравнений (13.1.4.3) обладают неотрицательной нормой, также приводит к существованию в физическом подпространстве остаточной калибровочной инвариантности в смысле, который будет конкретизирован ниже. Эта калибровочная инвариантность устраняет дополнительные степени свободы, так что и классическая, и квантовая струны обладают одинаковым числом степеней свободы. При $d < 26$ это не верно, и не ясно, является ли теория, основанная на уравнении (13.1.4.3), хотя и согласованная, действительно квантовым вариантом рассмотренной выше теории классической струны (существенные черты теряются).

Второй вопрос. Не следует ли несколько ослабить уравнение Уилера — Де Витта в квантовой гравитации, что было бы необходимо, если бы в алгебре связей появлялся (c - или q -числовой) “центральный заряд”? Ответ положительный, но пока работ в этом направлении не проведено.

Третий вопрос. Не следует ли попытаться использовать другое представление для операторов струны, чтобы избежать появления центрального заряда?

Весьма вероятно, что такое представление вполне возможно построить, и полученная в этом случае квантовая теория была бы весьма отличной от той, которая здесь обсуждается. Могло бы оказаться, что эта еще не построенная теория весьма интересна сама по себе (например вследствие появления в ней бесконечномерных представлений алгебры Лоренца). Более того, поскольку эта теория не основывалась бы на использовании осцилляторных переменных, она могла бы оказаться более легко обобщаемой на объекты с большим числом измерений, например, на мембраны.

Однако, насколько известно автору, эта проблема до сих пор не рассматривалась. Соответственно остающаяся часть этой книги будет посвящена общепринятой квантовой теории, которая уходит своими корнями в дуальные модели.

Упражнение. Рассмотрим замкнутую струну, для которой, разумеется, справедливы все изложенные выше соображения (она

имеет две алгебры Вирасоро с одинаковыми центральными зарядами).

а. Уравнение Гамильтона — Якоби в этом случае задается в виде

$$\frac{\delta S}{\delta X^A(\sigma)} \frac{\delta S}{\delta X'_A(\sigma)} + X'^A(\sigma) X'_A(\sigma) = 0, \quad (I)$$

$$X'^A(\sigma) \frac{\delta S}{\delta X^A(\sigma)} = 0. \quad (II)$$

Оно является классическим аналогом уравнения Уилера — Де Витта.

Вид уравнения (I) наводит на мысль искать решение, для которого вариационная производная $\delta S/\delta X^A(\sigma)$ линейна по $X'^A(\sigma)$. Таким образом, положим

$$\frac{\delta S}{\delta X^A(\sigma)} = k_{AB} X'^B(\sigma), \quad (III)$$

где постоянный тензор k_{AB} удовлетворяет соотношению

$$k_{AB} k^A{}_D = -\eta_{BD}. \quad (IV)$$

Покажите, что из уравнения (II) следует, что тензор k_{AB} антисимметричен, а S определяется выражением

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k_{AB} X^A(\sigma) X'^B(\sigma) d\sigma, \quad (V)$$

$$k_{AB} = -k_{BA}. \quad (VI)$$

Покажите также, что уравнения (IV) и (VI) имеют решения в любом четномерном пространстве-времени. Является ли k_{AB} вещественным?

б. Постройте генераторы Пуанкаре для решений $X^A(\sigma)$ и $\mathcal{P}_A(\sigma)$, определяемых посредством S . Обсудите формальное классическое решение, порождаемое в четырех измерениях выражением

$$S = \int X^0(\sigma) X^{1'}(\sigma) d\sigma + i \int X^2(\sigma) X^{3'}(\sigma) d\sigma,$$

$$X^0(\sigma, \tau = 0) = 0, \quad X^1(\sigma, \tau = 0) = a \cos \sigma,$$

$$X^2(\sigma, \tau = 0) = a \sin \sigma, \quad X^3(\sigma, \tau = 0) = 0.$$

в. Рассмотрите затем волновой функционал $\psi[X^A(\sigma)] = \exp iS[X^A(\sigma)]$. Докажите, что он удовлетворяет квантовым

уравнениям Уилера — Де Витта ¹⁾

$$-\frac{\delta^2 \psi}{\delta X^A(\sigma) \delta X_A(\sigma)} + X'^A(\sigma) X'_A(\sigma) \psi = 0, \quad (\text{VII})$$

$$X'^A(\sigma) \frac{\delta \psi}{\delta X^A(\sigma)} = 0 \quad (\text{VIII})$$

(независимо от того, какое регуляризованное значение приписывается $\delta'(0)$). Существование решений уравнений (VII) и (VIII) свидетельствует об отсутствии центрального заряда в том представлении, в котором поле $X^A(\sigma)$ является диагональным; при этом в (VIII) стоит \mathcal{P}_A справа от X'^A (если только можно придать смысл такому представлению).

г. *Скалярное произведение.* Представляется естественным формально определить внутреннее произведение в пространстве $\psi[X^A(\sigma)]$ как

$$\langle \psi, \chi \rangle = \int \mathcal{D}X^A(\sigma) \psi^*[X^A(\sigma)] \chi[X^A(\sigma)] \quad (\text{IX})$$

(или $\langle \psi, \chi \rangle = \int \prod dX_{\mu}^A \psi^*(X_n^A) \chi(X_n^A)$ в терминах фурье-компонент). Это скалярное произведение положительно определено и формально лоренц-инвариантно (таким образом, отрицательные нормы связаны с лоренц-инвариантным представлением Фока). Решения уравнений $L_n |\psi\rangle = 0$, соответствующие физическим состояниям, по-видимому, должны быть ненормируемыми, поскольку в выражении (IX) производится интегрирование также по чисто калибровочным степеням свободы и величина $\psi[X^A(\sigma)]$ действительно содержит осциллирующий множитель и является неограниченной.

Для физических состояний выражение (IX) должно быть модифицировано путем введения калибровочного условия (желательно лоренц-инвариантным способом). Но этого совершенно недостаточно для того, чтобы сделать функционал $\psi[X^A(\sigma)] = \exp iS[X^A(\sigma)]$ нормируемым, как можно видеть из закона преобразования $\psi_{k_{AB}}[X^A(\sigma)] = \exp \frac{1}{2} i \int k_{AB} X^A(\sigma) X'^B(\sigma) d\sigma$ при действии группы Пуанкаре. Покажите, что

$$U(a, \Lambda) \psi_{k_{AB}}[X^A(\sigma)] = \psi_{k'_{AB}}[X^A(\sigma)],$$

где

$$k'_{AB} = \Lambda_A^C \Lambda_B^D k_{CD}.$$

¹⁾ Это решение сообщил автору Л. Мезенческу.

Следовательно, величины $\psi_{k_{AB}}$ принадлежат конечномерному представлению группы Лоренца. Может ли $\psi_{k_{AB}}$ иметь конечную норму (известно, что оператор U унитарен, если скалярное произведение лоренц-инвариантно, и скалярное произведение положительно определено)?

д. Вычислите P_A и $\langle M_{AB} \rangle$.

е. Приведенное выше решение не может быть непосредственно обобщено на случай открытой струны. Докажите, что $S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} k_{AB} X^A(\sigma) X'^B(\sigma) d\sigma = 0$ для открытой струны (и, следовательно, не удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби).

Покажите, что из-за наличия ненулевых поверхностных членов $S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} k_{AB} X^A(\sigma) X'^B(\sigma) d\sigma$ не обладает хорошо определенной функциональной производной.

13.1.5. Алгебра Вирасоро и алгебры Каца — Муди

Алгебра Вирасоро

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m, -n}, \quad (13.1.5.1)$$

которая, как мы видели, непосредственно связана с конформной симметрией, в последнее время нашла много приложений не только в теории струн, но также в статистической механике [21]. Поэтому исследование ее представлений вызвало значительный интерес [22].

Существуют и другие бесконечномерные алгебры, имеющие физические приложения. Среди них алгебры Каца — Муди [23] также играют роль в моделях струн. Они определяются следующим образом. Рассмотрим конечномерную алгебру Ли G со структурными константами C^a_{bc} и (матричными) генераторами T_a . Генераторы M_{am} ассоциированной аффинной алгебры Каца — Муди удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[M_{am}, M_{bn}] = C^c_{ab} M_{cm+n} + ct \delta_{m, -n} g_{ab}, \quad (13.1.5.2)$$

где g_{ab} — тензорный инвариант присоединенного представления, m и n — положительные и отрицательные целые числа.

Алгебры Каца — Муди с нулевым центральным зарядом $c = 0$ легко построить следующим образом. Рассмотрим матрицы $M_{am} = T_a e^{im\theta}$. Они удовлетворяют соотношениям

$$[M_{am}, M_{bn}] = C^c_{ab} M_{cm+n}, \quad (13.1.5.3)$$

определяющим алгебру, которая называется алгеброй петель, поскольку последняя ассоциируется с отображениями окружности

в алгебре Ли G : когда θ пробегает значения от 0 до 2π , M_{am} описывает петлю в G .

Мы уже сталкивались с алгеброй Каца — Муди, когда рассматривали трансляционные токи j_A^a . Действительно, изотропные компоненты j_A^a , определяемые как $j_A^\pm = j_a^0 \pm j_a^1$, равны¹⁾

$$j_A^\pm(\sigma) = -\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2} \left(\mathcal{P}_A(\sigma) \pm \frac{1}{2\pi\alpha'} X'_A(\sigma) \right), \quad (13.1.5.4)$$

где знаки \pm относятся не к координатам светового конуса фонового пространства-времени, а к изотропным направлениям вдоль струны.

Непосредственное вычисление дает

$$[j_A^+(\sigma), j_B^+(\sigma')] = \frac{i}{2\pi} \eta_{AB} \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (13.1.5.5a)$$

$$[j_A^-(\sigma), j_B^-(\sigma')] = -\frac{i}{2\pi} \eta_{AB} \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (13.1.5.5б)$$

$$[j_A^+(\sigma), j_B^-(\sigma')] = 0. \quad (13.1.5.5в)$$

В случае открытой струны²⁾ определяется величина

$$j_A(\sigma) = \begin{cases} j_A^+(\sigma), & 0 \leq \sigma \leq \pi, \\ j_A^-(\sigma), & -\pi \leq \sigma \leq 0, \end{cases} \quad (13.1.5.6)$$

и ее фурье-разложение

$$j_A(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \alpha_{An} \exp -in\sigma. \quad (13.1.5.7)$$

Из уравнений (13.1.5.5) следует

$$[\alpha_{Am}, \alpha_{Bn}] = m\eta_{AB} \delta_{m, -n}. \quad (13.1.5.8)$$

Величины α — фурье-компоненты токов — образуют (при коммутировании) замкнутую алгебру Каца — Муди с нетривиальным центральным зарядом, основанную на группе трансляций.

Величины α_{An} можно связать с осцилляторными переменными посредством соотношений

$$\begin{aligned} \alpha_{A0} &= -\sqrt{2\alpha'} p_A, \\ \alpha_{An} &= i\sqrt{n} a_{An}, \quad \alpha_{A-n} = (\alpha_{An})^* \quad (n > 0). \end{aligned} \quad (13.1.5.9)$$

¹⁾ Для упрощения последующих выкладок мы ввели в выражение (13.1.5.4) подходящие нормирующие множители.

²⁾ Наша общая тактика на последующих страницах снова будет заключаться в рассмотрении открытой струны с последующими краткими замечаниями об особенностях замкнутой струны в тех случаях, когда это необходимо.

Они отличаются от величин α_{An} в упражнении 2 в разд. 12.4.1 простым множителем $\sqrt{2\alpha'}$.

Существует тесная связь между алгеброй Вирасоро компонент энергии-импульса и алгеброй Каца — Муди (13.1.5.8) трансляционных токов. Это объясняется принадлежностью теорий к “типу Сугавары” с тензором энергии-импульса, квадратичным по токам [24].

Действительно, из уравнений (12.3.2.1) и (13.3.2.5) находим

$$L_n = \pi \int_{-\pi}^{+\pi} : j_A(\sigma) j^A(\sigma) : e^{in\sigma} d\sigma, \quad (13.1.5.10)$$

где символ $: \ :$ обозначает нормальное упорядочение. Разложение (13.1.5.7) позволяет представить выражение (13.1.5.10) в виде

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m : \alpha_{An-m} \alpha_m^A : \quad (13.1.5.11)$$

(в соответствии с упражнением 2 в разд. 12.4.1)

Упражнения

1. Исследуйте алгебру лоренцевых токов.
2. Исследуйте алгебру величин L_n вместе с α_m .

13.1.6. Алгебра Вирасоро на искривленном фоне

Точная квантовая теория струн на искривленном фоне построена лишь для весьма частных случаев и поднимает ряд сложных вопросов. Мы остановимся на этом предмете ввиду его важности.

Рассмотренные типы фоновых многообразий являются прямыми произведениями d -мерного пространства Минковского на пространства групп $SO(N)$ или $SU(N)$ [25]:

$$M \times SO(N) \text{ или } M \times SU(N). \quad (13.1.6.1)$$

Кроме того, компактифицированный радиус группового многообразия выбирается квантованным в единицах натяжения струны

$$R^2 = \frac{\alpha'}{2} |K|, \quad (13.1.6.2)$$

где K — целое число.

Действие струны является суммой квадратичной формы действия Намбу — Гото и члена Весса — Зумино с коэффициентами, подобранными так, чтобы была восстановлена конформная

инвариантность; подробности, касающиеся условия квантования (13.1.6.2), можно найти в работах [25, 26] ¹⁾).

Соотношение (13.1.6.2) позволяет показать [26], что алгебра $SU(N)$ - или $SO(N)$ -токов имеет очень простой вид: токи образуют в точности алгебру Каца — Муди, основанную на группах $SU(N)$ или $SO(N)$.

Поскольку компоненты тензора энергии-импульса все еще билинейны по токам, можно определить алгебру нормально упорядоченных операторов L_n [25, 27], которая снова оказывается алгеброй Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n, -m} \quad (13.1.6.3)$$

с центральным зарядом c , задаваемым выражениями

$$c = d + \frac{(N^2 - 1) |K|}{N + |K|} \quad \text{для } SU(N), \quad (13.1.6.4a)$$

$$c = d + \frac{\frac{1}{2} N(N - 1) |K|}{|K| + N - 2} \quad \text{для } SO(N). \quad (13.1.6.4b)$$

Хотя эти модели и интересны, они обладают тем особым свойством, что не могут быть получены непрерывным преобразованием из плоских моделей, поскольку кривизна внутреннего многообразия принимает только квантованные значения.

Упражнение. Является ли величина c целой?

Дополнительное замечание. За время, прошедшее после чтения лекций, на которых основана данная книга, были достигнуты существенные успехи в различных направлениях исследований [28]. В работах [28] струна квантуется по теории возмущений на произвольном фоне. Согласованность квантовой теории налагает условия на фон. Излагать здесь эти интересные работы было бы неуместно.

13.2. Квантование струны методом Бекки — Рюэ — Стора — Тютиня (БРСТ)

13.2.1. БРСТ-квантование — краткий обзор

Наиболее быстрый, но не столь хорошо понятый способ получения критической размерности 26 состоит в применении БРСТ-методов, которые обладают еще и тем дополнительным преимуществом, что они имеют чисто алгебраический характер.

¹⁾ Струна рассматривается как σ -модель.

Мысль о том, что БРСТ-методы могут оказаться полезными в квантовой теории струнных моделей, была впервые высказана в работе Полякова [7а] и воплощена в реальность в работах [19]. БРСТ-подход, по-видимому, также играет важную роль во вторично квантованном варианте теории струн [29], поэтому мы коротко опишем его здесь.

Один из ключевых концептуальных вопросов, возникающих в квантовой теории калибровочных полей, состоит в том, является ли теория в действительности калибровочно-инвариантной. Хорошо известно, что калибровочная инвариантность в квантовой области представляет собой тонкий вопрос, смысл которого зависит от примененной схемы квантования.

Мы рассмотрим здесь такую схему, в которой все компоненты поля, включая те, которые соответствуют чисто калибровочным степеням свободы, трактуются как равноправные динамические операторы. Затем, чтобы компенсировать фиктивные квантовые эффекты, индуцированные чисто калибровочными операторами, вводятся дополнительные локальные поля — “дúхи”.

Этот подход к квантовой теории имеет огромное преимущество, состоящее в сохранении одного важного свойства полевых теорий, а именно пространственно-временной локальности. Более того, все основные поля обладают c -числовыми коммутационными соотношениями, а не q -числовыми (которые, как хорошо известно, приводят к запутанным проблемам упорядочения).

Динамика чисто калибровочных степеней свободы генерируется путем добавления к классическому калибровочно-инвариантному лагранжиану членов, фиксирующих калибровку, и членов Фаддеева — Попова. Различные калибровочные условия порождают различные лагранжианы и, следовательно, различные операторы Гамильтона в квантовом линейном пространстве определения операторов калибровочного поля и дúховых операторов.

Для доказательства калибровочной инвариантности теории нужно показать, что эти различные гамильтонианы обладают одинаковыми матричными элементами между физическими состояниями.

Важная особенность, подмеченная Фрадкиным и др. [30], состоит в том, что различные выборы калибровки в лагранжиане приводят формально к БРСТ-инварианту — эрмитовым гамильтонианам, связанным между собой соотношением¹⁾

$$H' = H + [K, \Omega], \quad (13.2.1.1)$$

¹⁾ Формальным этот вывод является потому, что игнорируются проблемы упорядочения; соотношение (13.2.1.1) было получено с помощью континуального интегрирования.

где оператор K зависит от выбора калибровки, а Ω — (эрмитов) БРСТ-заряд¹⁾. В отличие от K оператор Ω не зависит от калибровки. Позднее многие авторы обнаружили, что $H' - H$ есть “полная Ω -производная”.

Кроме того, Фрадкин и др. [30] дали также общий рецепт построения Ω для *любой* калибровочной теории (с замкнутой алгеброй или без нее) и показали, что БРСТ-генератор является нильпотентным, если пренебречь эффектами квантового упорядочения:

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} [\Omega, \Omega] = 0. \quad (13.2.1.2)$$

Заметим, что из уравнения (13.2.1.2) следует соотношение $[[K, \Omega], \Omega] = 0$, требуемое БРСТ-инвариантностью операторов H и H' . Классические основы и обзор узловых моментов этих замечательных работ [30] можно найти в работе [31], к которой мы и отсылаем читателя.

Ясно, что соотношению

$$\langle \chi | H' | \psi \rangle = \langle \chi | H | \psi \rangle \quad (13.2.1.3)$$

может удовлетворить не любая пара квантовых состояний, поскольку величина $\langle \chi | [K, \Omega] | \psi \rangle$ в общем случае не равна нулю. Это приводит к определению физических состояний как состояний, уничтожаемых БРСТ-зарядом [32]:

$$\Omega | \psi \rangle = 0. \quad (13.2.1.4)$$

Соотношение (13.2.1.3) следует из условия на физические состояния (13.2.1.4) в том случае, если $|\chi\rangle$ и $|\psi\rangle$ являются физическими состояниями. Того, что лишь подмножество полного линейного пространства состояний окажется физическим, разумеется, следовало ожидать, поскольку мы включили в рассмотрение и чисто калибровочные, и духовые степени свободы.

Вследствие условия нильпотентности (13.2.1.2) любое состояние вида $\Omega |\chi\rangle$ для произвольного $|\chi\rangle$ является физическим. Но из-за эрмитовости оператора Ω такое состояние отщепляется от остальных физических состояний, поэтому $|\psi\rangle$ следует отождествить с $|\psi\rangle + \Omega |\chi\rangle$:

$$|\psi\rangle \sim |\psi\rangle + \Omega |\chi\rangle. \quad (13.2.1.5)$$

Состояния вида $\Omega |\chi\rangle$ называются нулевыми состояниями.

Аналогично БРСТ-инвариантные операторы (такие как H) отображают физическое подпространство на себя и называются

¹⁾ Квантовые скобки $[,]$ обозначают антикоммутатор нечетных объектов типа K и Ω .

наблюдаемыми. Такие наблюдаемые, как $[K, \Omega]$, рождают нулевые состояния и должны быть отождествлены с нулем:

$$H \sim H + [K, \Omega]. \quad (13.2.1.6)$$

Преобразования (13.2.1.5) и (13.2.1.6) называются квантовыми калибровочными преобразованиями, поскольку, как мы уже упоминали, различные выборы калибровки в континуальном интеграле приводят к гамильтонианам, связанным посредством (13.2.1.6). Кроме того, отношение эквивалентности (13.2.1.5) редуцирует физическое подпространство (13.2.1.4) таким образом, что в классической и квантовой теориях оказывается одинаковое число степеней свободы. Это свойство, а именно соответствующее сокращение чисто калибровочных степеней свободы, является, конечно, еще одним проявлением принципа калибровочной инвариантности. Оно действительно должно иметь место, если калибровочная инвариантность реализуется квантовомеханически. (Примечательно, что все собственные значения оператора Ω равны нулю, а его нормальная жорданова форма содержит одномерные и двумерные блоки. Условия (13.2.1.4) и (13.2.1.6) “уничтожают” двумерные блоки.)

Необходимо ясно понимать, что квантовая калибровочная инвариантность (13.2.1.5) и (13.2.1.6) не существовала бы, если бы оператор Ω не был нильпотентным. Например, состояние $\Omega|\chi\rangle$ не являлось бы физическим нулевым состоянием, а число истинных квантовых степеней свободы отличалось бы от ожидаемого. Следовательно, можно сказать, что нильпотентность оператора Ω есть квантовое выражение принципа калибровочной инвариантности. Без условия $\Omega^2 = 0$ нельзя было бы переходить от одной калибровки к другой, и калибровочная инвариантность не реализовалась бы на квантовом уровне.

В разд. 13.2.4 мы получим условия, при которых соотношение $\Omega^2 = 0$ выполняется в теории струн. Было показано [19], что значение $d = 26$ следует из нильпотентности.

13.2.2. Классическое выражение для BRST-заряда

Рецепт получения классической величины Ω из калибровочных связей описывается в литературе [30, 31]. Каждой связи G_a сопоставляется пара канонически сопряженных духов η^a и \mathcal{P}_a , удовлетворяющих соотношениям

$$(\eta^a)^* = \eta^a, \quad (\mathcal{P}_a)^* = -\mathcal{P}_a, \quad (13.2.2.1)$$

$$[\eta^a, \mathcal{P}_b] = -\delta_b^a. \quad (13.2.2.2)$$

БРСТ-генератор имеет вид

$$\Omega = G_a \eta^a - \frac{1}{2} \mathcal{P}_c C^c_{ab} \eta^b \eta^a, \quad (13.2.2.3)$$

где $[G_a, G_b] = C^c_{ab} G_c$, C^c_{ab} — структурные константы, и, очевидно, удовлетворяет условию

$$[\Omega, \Omega] = 0. \quad (13.2.2.4)$$

В уравнениях (13.2.2.2) и (13.2.2.4) символ $[,]$ обозначает симметричные скобки Пуассона, соответствующие классическим фермионным переменным.

В нашем случае связями являются $\mathcal{H}(\sigma)$ и $\mathcal{H}_1(\sigma)$. Граничные условия для введенных духовых переменных те же, что и для лагранжевых множителей, а именно

$$\eta^\perp_{(2k+1)}(\sigma) = 0 = \eta^{(2k)}(\sigma), \quad (13.2.2.5a)$$

$$\mathcal{P}_\perp^{(2k+1)}(\sigma) = 0 = \mathcal{P}_1^{(2k)}(\sigma), \quad (13.2.2.5b)$$

при $\sigma = 0, \pi$. Здесь $F^{(2n)}$ — производная по σ порядка $2n$. Следовательно, в ряд Фурье для величин η^\perp и \mathcal{P}_\perp войдут лишь косинусы, а для η^1 и \mathcal{P}_1 — синусы. С учетом условий (13.2.2.5) Ω является хорошо определенным каноническим генератором, поскольку в $\delta\Omega$ не возникает нежелательных граничных членов.

В терминах фурье-компонент L_m и η_m , \mathcal{P}_m связей и духов соответственно выражение (13.2.2.3) имеет вид

$$\Omega = \sum_m L_m \eta_{-m} + \sum_{n,m} m \mathcal{P}_n \eta_m \eta_{-n-m}, \quad (13.2.2.6)$$

где

$$[\eta_m, \mathcal{P}_n] = -i \delta_{m, -n}, \quad (13.2.2.7a)$$

$$\eta_m^* = \eta_{-m}, \quad \mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_{-n}, \quad (13.2.2.7b)$$

где η_m — m -я фурье-компонента величины $\eta^\perp + \eta^1$ (в базисе $\exp i m \sigma$) и т. д. Мы ввели для удобства множитель i в \mathcal{P}_n .

Легко проверить, что величина Ω вещественна и классически нильпотентна:

$$\Omega^* = \Omega, \quad (13.2.2.8a)$$

$$[\Omega, \Omega] = 0. \quad (13.2.2.8b)$$

Упражнения

1. Проверьте соотношения (13.2.2.8a) и (13.2.2.8b) непосредственно, используя выражение (13.2.2.6).

2. Постройте БРСТ-инвариантное расширение генераторов Пуанкаре [31]. Несут ли духи лоренцев индекс?

13.2.3. Фоковское пространство дѹхов

Переходим к квантовой теории. Дѹхи η_m и \mathcal{P}_m становятся операторами и вследствие (13.2.2.7) удовлетворяют соотношениям

$$[\eta_m, \mathcal{P}_n] = \delta_{m, -n} \quad (13.2.3.1)$$

(где символ $[,]$ обозначает теперь антикоммутатор в соответствии с правилом: скобки Пуассона фермиевских переменных \rightarrow антикоммутатор) и

$$\eta_m^* = \eta_{-m}, \quad \mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_{-n}. \quad (13.2.3.2)$$

Из соотношений (13.2.3.1) и (13.2.3.2) видно, что нулевые моды η_0 и \mathcal{P}_0 отличаются от других мод, поскольку они вещественны и удовлетворяют условию

$$[\eta_0, \mathcal{P}_0] = 1. \quad (13.2.3.3)$$

Пространство неприводимого представления для соотношения (13.2.3.3) хорошо известно [33]. Оно двумерно и изоморфно пространству функций от одной грассмановой переменной η^0 :

$$f = a + b\eta^0, \quad (13.2.3.4a)$$

$$\eta^0 - \text{умножение на } \eta^0, \quad (13.2.3.4б)$$

$$\mathcal{P}_0 = \partial/\partial\eta^0, \quad (13.2.3.4в)$$

$$(f, g) = \int f^* g d\eta^0. \quad (13.2.3.4г)$$

Состояния $f_1 = 1$ и $f_2 = \eta^0$ имеют нулевую норму и скалярное произведение, равное $+1$. С другой стороны, можно рассмотреть состояния $(1 \pm \eta^0)/\sqrt{2}$, которые ортогональны друг другу и имеют норму ± 1 .

Пространство дѹховых состояний является прямым произведением пространства (13.2.3.4) на фоковское пространство высших мод η_m и \mathcal{P}_m , построенное следующим образом. Определяются операторы

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_m + \mathcal{P}_m), \quad f_m^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_m^* + \mathcal{P}_m^*), \quad (13.2.3.5)$$

$$g_m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_m - \mathcal{P}_m), \quad g_m^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_m^* - \mathcal{P}_m^*)$$

($m > 0$), удовлетворяющие условию

$$[f_m, f_m^*] = -[g_m, g_m^*] = 1 \quad (13.2.3.6)$$

(другие антикоммутаторы равны нулю).

¹⁾ Чтобы выполнялись равенства $0 = \eta^0 \eta_m + \eta_m \eta^0 = \eta^0 \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_m \eta^0 = \dots = \mathcal{P}^0 \mathcal{P}_m^* + \mathcal{P}_m^* \mathcal{P}^0$, операторы (13.2.3.4б) и (13.2.3.4в) в действительности следует умножить на $(-1)^{N_F}$, где N_F — число дѹховых фермионов, но этот множитель здесь опускается.

Вакуум дѹхов аннигилируется операторами уничтожения f_m и g_m

$$f_m |0\rangle = g_m |0\rangle = 0 \quad (13.2.3.7)$$

и нормируется на единицу: $\langle 0|0\rangle = 1$. Операторы рождения f_m являются операторами обычного типа, а операторы g_m рожают состояния с отрицательной нормой (предполагается существование таких состояний в пространстве дѹхов).

Последующие вычисления будут проводиться так, чтобы быть на каждом этапе осмысленными в рамках определенного выше фоковского пространства. Это будет достигаться путем использования нормальной формы операторов. Заметим, что это равносильно записи всех операторов η_m^* и \mathcal{P}_m^* слева от η_m и \mathcal{P}_m , поскольку η_m^* и \mathcal{P}_m^* содержат только операторы рождения, в то время как η_m и \mathcal{P}_m выражаются только через операторы уничтожения. Для операторов же η_0 и \mathcal{P}_0 будет принято антисимметричное упорядочение.

Упражнение. Что является пространством нулевых мод для замкнутой струны?

13.2.4. Нильпотентность квантового БРСТ-оператора

Квантовый вариант БРСТ-генератора (13.2.2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (L_n - \alpha_0 \delta_{n,0}) \eta_n^* - 2 \sum_{n>0} n \mathcal{P}_0 \eta_n^* \eta_n + \\ &+ \sum_{m>0} m (\mathcal{P}_m^* \eta_m + \eta_m^* \mathcal{P}_m) \eta_0 - \\ &- \sum_{n>0} \sum_{m=1}^{n-1} (n \mathcal{P}_m^* \eta_{n-m}^* \eta_n + n \eta_n^* \eta_{n-m} \mathcal{P}_m + \\ &+ m \mathcal{P}_n^* \eta_{n-m} \eta_m + m \eta_m^* \eta_{n-m}^* \mathcal{P}_n) + \\ &+ \sum_{n>0} \sum_{m>0} m (\eta_{n+m}^* \mathcal{P}_n \eta_m - \mathcal{P}_n^* \eta_m^* \eta_{n+m}) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (L_n - \alpha_0 \delta_{n,0}) \eta_n^* - 2 \sum_{n>0} n \mathcal{P}_0 \eta_n^* \eta_n + \\ &+ \sum_{m>0} m (\mathcal{P}_m^* \eta_m + \eta_m^* \mathcal{P}_m) \eta_0 - \\ &- \sum_{n>0} \sum_{m=1}^{n-1} [(2n-m) (\mathcal{P}_m^* \eta_{n-m}^* \eta_n + \eta_n^* \eta_{n-m} \mathcal{P}_m) + \\ &+ m (\mathcal{P}_n^* \eta_{n-m} \eta_m + \eta_m^* \eta_{n-m}^* \mathcal{P}_n)]. \end{aligned} \quad (13.2.4.1)$$

Неоднозначность упорядочения возникает только для членов L_0 (отсюда появление α_0 в первом слагаемом выражения для Ω) и η_0 . Но неоднозначность для второго члена может быть перенесена на величину α_0 и не дает ничего нового.

Первое условие на Ω , а именно эрмитовость, очевидно, следует из выражения (13.2.4.1). Остается проверить нильпотентность.

Нильпотентность БРСТ-генератора нарушается по двум причинам. Во-первых, благодаря центральному заряду операторы L_n больше не образуют истинной алгебры. Во-вторых, духи тоже вносят аномальные члены. Действительно, антикоммутатор $[\mathcal{P}_a^* \eta_b^* \eta_c, \eta_d^* \eta_e \mathcal{P}_f]$ не имеет нормального вида¹⁾. При приведении его к нормальному виду возникает слагаемое, отсутствующее в классическом пределе:

$$[\mathcal{P}_a^* \eta_b^* \eta_c, \eta_d^* \eta_e \mathcal{P}_f] = -\delta_{ae} \delta_{fb} \eta_d^* \eta_c + \text{НУ}. \quad (13.2.4.2)$$

Уравнение (13.2.4.2) после некоторых вычислений позволяет представить условие $\Omega^2 = 0$ в виде

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \sum_{n>0} \left[n^3 \left(\frac{d}{6} - \frac{13}{3} \right) + n \left(4\alpha_0 - \frac{d}{6} + \frac{1}{3} \right) \right] \eta_n^* \eta_n, \quad (13.2.4.3)$$

где аномальный вклад духов не зависит от размерности пространства-времени и может быть получен из выражения (13.2.4.3), если положить $d = \alpha_0 = 0$. Центральный заряд алгебры Вирасоро генерирует член, пропорциональный d , и существует еще, разумеется, вклад от α_0 .

Требование нильпотентности Ω дает

$$d = 26, \quad \alpha_0 = 1. \quad (13.2.4.4)$$

Калибровочная инвариантность реализуется квантовомеханически только при критической размерности $d = 26$. При $d \neq 26$ эта существенная особенность теряется. (Значение второго условия $\alpha_0 = 1$ обсуждается ниже. К сожалению, оно предполагает наличие тахиона в спектре.)

Упражнения

1. Выведите выражение (13.2.4.3).
2. Какой была бы величина Ω^2 , если использовать “антифоксовское” представление для духов, основанное на вакууме,

¹⁾ Легко видеть, что аномальные духовые члены возникают только из этого антикоммутатора (где η , \mathcal{P} обозначают и нулевые моды). Если нулевые моды подставить в уравнение (13.2.4.2), то символ НУ в этом случае будет обозначать антисимметричное упорядочение (и появится множитель $1/2$ в аномальном члене).

уничтожаемом операторами f_m^* и g_m^* ? Является ли это альтернативное представление априори столь же естественным, как то, которое использовано выше? Обсудите этот вопрос.

3. Введите снова в теорию неконформно-инвариантные степени свободы g_{11} , их импульсы и импульсы, сопряженные функциям N и N^1 . Запишите соответствующий БРСТ-генератор. Докажите, что новая часть в выражении для Ω не дает вклада в аномалию.

4. Выведите критическую размерность для замкнутой струны ($d = 26!$). Что такое α_0 ? (Для любого L_0 $\alpha_0 = 1$; в альтернативных случаях $\alpha_0 [L_0 + \bar{L}_0] = 2$, $\alpha_0 [L_0 - \bar{L}_0] = 0$.)

13.2.5. Критическая размерность на искривленном фоне

БРСТ-методы могут быть применены также к моделям на искривленном фоне (разд. 13.2.6). В действительности для вычисления критической размерности БРСТ-методом нужна лишь алгебра генераторов L_n ; их явный вид несуществен.

БРСТ-оператор по-прежнему задается выражением (13.2.4.1), где L_n — соответствующие генераторы Вирасоро искривленных моделей.

Следовательно, аномальный вклад духов остается тем же самым. Единственное изменение в конечном ответе (13.2.4.3) заключается в замене d новым значением центрального заряда c . Поэтому нильпотентность Ω приводит к условиям

$$d + \frac{(N^2 - 1)|K|}{N + |K|} = 26 \quad \text{для } SU(N), \quad (13.2.5.1a)$$

$$d + \frac{\frac{1}{2}N(N-1)|K|}{|K| + N - 2} = 26 \quad \text{для } SO(N). \quad (13.2.5.1b)$$

Заметим, что критическая размерность d пространства Минковского, вычисленная из системы уравнений (13.2.5.1), не является целой и положительной для всех значений N и K . Следовательно, для таких значений N и K соотношения (13.2.5.1) не могут удовлетворяться. Это обстоятельство делает еще более замечательным полученный выше результат для плоского пространства (13.2.4.4), поскольку аномальные члены можно устранить путем подбора параметра, который должен принимать целые положительные значения.

13.2.6. Физическое подпространство

Физическое подпространство определяется соотношением

$$\Omega |\psi\rangle = 0. \quad (13.2.6.1)$$

Мы хотим охарактеризовать решения этого уравнения. Для этого, следуя работе Като и Огавы [19], мы вводим два новых эрмитовых оператора, играющих важную роль, поскольку они коммутируют с Ω . Первый оператор задается выражением

$$L = \sum_{n \geq 0} n \alpha_n^* A \alpha_{An} + \sum_{n \geq 0} n (\mathcal{P}_n^* \eta_n + \eta_n^* \mathcal{P}_n) = \quad (13.2.6.2a)$$

$$= \sum_{n \geq 0} n (\alpha_n^* A \alpha_{An} + f_n^* f_n - g_n^* g_n), \quad (13.2.6.2b)$$

а второй

$$M = 2 \sum_{n \geq 0} n \eta_n^* \eta_n = \quad (13.2.6.3a)$$

$$= \sum_{n \geq 0} n (f_n^* f_n + g_n^* g_n + f_n^* g_n + g_n^* f_n). \quad (13.2.6.3b)$$

Легко проверить, что L и M БРСТ-инвариантны:

$$[L, \Omega] = [M, \Omega] = 0 \quad (13.2.6.4)$$

(например, $M \sim [\eta^0, \Omega]$). Кроме того,

$$[L, M] = 0. \quad (13.2.6.5)$$

Особенно интересен оператор L , который сводится в бозонном секторе к “оператору уровня” N , задаваемому формулой

$$N = \sum_{n \geq 0} n \alpha_n^* A \alpha_{An}; \quad (13.2.6.6)$$

ниже он встретится нам снова. Оператор L фактически является БРСТ-инвариантным расширением оператора N и может быть представлен в виде

$$L = N + N^f + N^g, \quad (13.2.6.7)$$

где N^f и N^g — операторы уровня для духовых мод f и g соответственно. (Вследствие необычных антикоммутиционных соотношений $[g_n, g_n^*] = -1$ в выражении $N^g = -\sum_{n \geq 0} n g_n^* g_n$ появляется знак минус.) Оператор L может быть диагонализирован и обладает положительными собственными значениями.

Оператор импульса p^A также коммутирует с Ω , L и M :

$$[p^A, \Omega] = [p^A, L] = [p^A, M] = 0. \quad (13.2.6.8)$$

Эти свойства позволяют исследовать решения уравнения (13.2.6.1), диагонализующие одновременно L и p^A ¹⁾. Их собственные значения будут обозначаться одинаковыми буквами.

¹⁾ Жорданова форма оператора M не является тривиальной, и мы не считаем M диагональным.

Теорема 1. Решения уравнения (13.2.6.1) при $L \neq -\alpha' p^2 + \alpha_0$ являются чисто калибровочными, т. е. могут быть представлены в виде

$$|\psi\rangle = \Omega |\chi\rangle. \quad (13.2.6.9)$$

Для доказательства теоремы заметим, что Ω может быть представлен в виде

$$\Omega = \bar{\Omega} + (\alpha' p^2 + L - \alpha_0) \eta^0 - M \mathcal{P}_0, \quad (13.2.6.10)$$

где оператор $\bar{\Omega}$ не содержит нулевых дѹховых мод η^0 и \mathcal{P}_0 ; его явный вид легко получить из выражения (13.2.4.1). Заметим, что $\bar{\Omega}$, η^0 и \mathcal{P}_0 также коммутируют с L и p^A .

Примем, что $L \neq -\alpha' p^2 + \alpha_0$. Представим состояние $|\psi\rangle$ в виде $|\psi\rangle = |a\rangle + |b\rangle \eta^0$, где $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — состояния, не содержащие нулевых дѹховых мод. Поскольку $\alpha' p^2 + L - \alpha_0 \neq 0$, можно добавить к $|\psi\rangle$ состояние $\Omega |\chi\rangle$, чтобы получить $|b\rangle = 0$. Например, выберем $|\chi\rangle = -(\alpha' p^2 + L - \alpha_0)^{-1} |b\rangle$. При $|b\rangle = 0$ БРСТ-условие (13.2.6.1) на $|\psi\rangle$ имеет вид

$$\bar{\Omega} |a\rangle = 0, \quad (\alpha' p^2 + L - \alpha_0) |a\rangle = 0,$$

откуда следует, что $|a\rangle = 0$, как и утверждалось.

Эта теорема позволяет рассматривать только случаи, когда

$$\alpha' p^2 + L - \alpha_0 = 0, \quad (13.2.6.11)$$

к которому мы теперь и переходим¹⁾.

Если соотношение (13.2.6.11) выполняется, то оператор $\bar{\Omega}$ становится нильпотентным, и БРСТ-уравнение (13.2.6.1) с

$$|\psi\rangle = |a\rangle + |b\rangle \eta^0 \quad (13.2.6.12)$$

принимает вид

$$\bar{\Omega} |b\rangle = 0, \quad \bar{\Omega} |a\rangle - M |b\rangle = 0. \quad (13.2.6.13)$$

Ниже мы будем рассматривать только состояния, не зависящие от нулевых мод, такие как $|a\rangle$ и $|b\rangle$, если не оговорено противное.

Теорема 2. а. Общее решение уравнения $\bar{\Omega} |b\rangle = 0$ может быть записано в виде

$$|b\rangle = |P\rangle |0\rangle_{\text{дух}} + \bar{\Omega} |c\rangle, \quad (13.2.6.14)$$

где $|0\rangle_{\text{дух}}$ обозначает вакуум дѹхов (для ненулевых мод),

$$\eta_n |0\rangle_{\text{дух}} = \mathcal{P}_n |0\rangle_{\text{дух}} = 0, \quad (13.2.6.15)$$

¹⁾ Путем подходящего лоренцева вращения можно получить $p^i = 0$ (не равны нулю только p^+ и p^-), но это не столь необходимо здесь. Мы также везде считаем, что $p^A \neq 0$. “Инфракрасный” случай $p^A = 0$ является исключением и легко исследуется, поэтому он здесь не рассматривается.

а $|P\rangle$ — чисто бозонное состояние (существующее в гильбертовом пространстве осцилляторов).

б. Кроме того, $|P\rangle$ удовлетворяет условиям

$$L_n |P\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (13.2.6.16)$$

$$(L_0 - \alpha_0) |P\rangle = 0. \quad (13.2.6.17)$$

Доказательство. а. См. статью Като и Огавы [19], которые фактически доказали более сильный вариант соотношения (13.2.6.14), в котором утверждается, что состояние $|P\rangle$ может быть выбрано чисто поперечным; см. разд. 13.4. Идея их доказательства намечена в приложении А.

б. Поскольку первая часть теоремы доказана, условие (13.2.6.17) становится очевидным, так как в выражении для $|b\rangle$ (13.2.6.14) можно выбрать вектор $|c\rangle$ принадлежащим подпространству $\alpha' p^2 + L - \alpha_0 = 0$ ($\alpha' p^2 + L - \alpha_0$ коммутирует с $\bar{\Omega}$). Следовательно, состояние $|P\rangle|0\rangle_{\text{дух}}$ также аннигилируется оператором $\alpha' p^2 + L - \alpha_0$, что сразу приводит к уравнению (13.2.6.17), так как для вакуума $N_f = N_g = 0$.

Что касается условий (13.2.6.16), то они просто следуют из БРСТ-ограничения $\bar{\Omega}|P\rangle|0\rangle_{\text{дух}} = 0$. Последнее сводится к соотношению

$$\sum_{n>0} L_n \eta_n^* |P\rangle|0\rangle_{\text{дух}} = 0$$

и, следовательно, эквивалентно соотношению (13.2.6.16), поскольку все состояния $\eta_n^* |0\rangle_{\text{дух}}$ являются независимыми.

Теорема 3. Общее решение уравнения $\Omega|\psi\rangle = 0$ может быть записано в виде

$$|\psi\rangle = |P_1\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + |P_2\rangle|0\rangle_{\text{дух}} \eta^0 + \Omega|\chi\rangle, \quad (13.2.6.18)$$

где $|P_1\rangle$ и $|P_2\rangle$ — чисто бозонные состояния, удовлетворяющие условиям

$$L_n |P_1\rangle = (L_0 - \alpha_0) |P_1\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad (13.2.6.19a)$$

$$L_n |P_2\rangle = (L_0 - \alpha_0) |P_2\rangle = 0 \quad (n > 0). \quad (13.2.6.19б)$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что можно привести коэффициент при η^0 в $|\psi\rangle$ к требуемому виду $(\Omega|c\rangle)\eta^0 = \Omega|\chi\rangle +$ члены, которые меняют лишь $|a\rangle$, где $|\chi\rangle = |c\rangle\eta^0$. Но тогда $M|b\rangle = 0$, и из соотношений (13.2.6.13) следует $\bar{\Omega}|a\rangle = 0$. Повторное применение теоремы 2 приводит к соотношению

$$|a\rangle = |P_1\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + \bar{\Omega}|c'\rangle = |P_1\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + \Omega|c'\rangle$$

(здесь $\bar{\Omega}|c'\rangle = \Omega|c'\rangle$), где $|c'\rangle$ не имеет составляющей вдоль η^0 и уничтожается оператором $\alpha'p^2 + L - \alpha_0$. Это демонстрирует справедливость решения (13.2.6.18).

Действуя на выражение (13.2.6.18) оператором Ω и используя условие $\alpha'p^2 + L - \alpha_0 = 0$, получаем условия (13.2.6.19).

Теорема 3 интересна тем, что она полностью соотносит БРСТ-физические состояния с физическими состояниями (13.2.6.19) ковариантного подхода, рассмотренного в разд. 13.4. Мы видим, что вследствие вырождения нулевых дѹховых мод БРСТ-физических состояний оказывается вдвое больше, чем физических состояний в ковариантном подходе¹). Аналогичное явление (удвоение состояний в БРСТ-подходе) недавно было обнаружено в другом контексте [34].

Заметим, наконец, что квантовое “калибровочное условие”, требующее состояния уничтожения $|\psi\rangle$ дѹховыми осцилляторами, не вполне фиксирует БРСТ-калибровку. Можно еще добавлять к $|\psi\rangle$ состояния вида $\Omega|\chi\rangle$, не содержащие дѹхов. Эти состояния являются теми знаменитыми нулевыми состояниями, которые встречаются в ковариантном подходе. Следовательно, их отщепление можно объяснить с помощью БРСТ-симметрии (примеры таких нулевых состояний приведены в упражнениях).

Упражнения

1а. Рассмотрите состояние $|R\rangle \mathcal{P}_1^* |0\rangle_{\text{дух}} = |\chi\rangle$, где $L_n |R\rangle = 0$, $n \geq 0$. Вычислите $\Omega|\chi\rangle$. Выведите, что состояние $L_{-1}|R\rangle|0\rangle_{\text{дух}}$ является нулевым.

1б. Докажите, что состояние $L_{-1}|R\rangle|0\rangle_{\text{дух}}\eta^0$ уничтожается БРСТ-оператором и имеет нулевые скалярные произведения со всеми остальными физическими состояниями. Это означает, что оно равно $\Omega|\chi\rangle$ для некоторого $|\chi\rangle$. *Указание:* такое состояние может быть записано так же, как в выражении (13.2.6.18) с чисто *поперечными* состояниями $|P_1\rangle$ и $|P_2\rangle$, которые должны быть равны нулю вследствие свойств скалярного произведения состояния $L_{-1}|R\rangle|0\rangle_{\text{дух}}\eta^0$.

1в. Покажите, что состояние $|R\rangle\eta_1^*$ равно $\Omega|\chi\rangle$ для некоторого $|\chi\rangle$.

¹) Решение (13.2.6.18) является самым лучшим, которое можно построить, если состояния $|P_1\rangle$ и $|P_2\rangle$ поперечны, т.е. $|P_1\rangle$ или $|P_2\rangle$ нельзя устранить калибровкой, поскольку в общем случае эти состояния неортогональны всем остальным физическим состояниям и, следовательно, не являются тем, что называют “нулевыми” состояниями. В разд. 13.2.7 доказано, что в случае открытой струны удвоение (13.2.6.18) в действительности является фиктивным и возникает вследствие неудачного определения линейного пространства состояний $|\psi\rangle$.

1г. Покажите, что состояние $|R^0\rangle\eta_1^*|0\rangle_{\text{дух}}$ не удовлетворяет уравнению $\Omega|\psi\rangle=0$, если $|R^0\rangle|0\rangle_{\text{дух}}$ — физическое состояние (существует трудность с членом η^0). Поэтому $|R\rangle$ должно удовлетворять соотношению $L_0|R\rangle=0$, а не $L_0|\tilde{R}\rangle=R$.

2. Во что превращается выражение (13.2.6.18) в случае замкнутой струны? Покажите, что в этом случае существует “двойное удвоение”.

13.2.7. Замечания по поводу удвоения

Одна из главных причин применения БРСТ-методов заключается в преимуществе использования (псевдо)гильбертова пространства, в котором все переменные, включая духи и чисто калибровочные степени свободы, реализуются на равных основаниях как эрмитовы операторы. Одно из условий согласованности формализма состоит в принадлежности решений уравнения $\Omega|\psi\rangle=0$ этому гильбертову пространству.

Как мы показали, соответствующее гильбертово пространство является прямым произведением (бозонного и фермионного) фоковского пространства осцилляторов на гильбертово пространство нулевых мод $X_0^A, p_A, \eta^0, \mathcal{P}_0$. Скалярное произведение определяется как

$$\langle\psi|\psi\rangle=\int d^{26}p d\eta^0 (\psi(p, \eta^0)|\psi(p, \eta^0)), \quad (13.2.7.1)$$

где $(\psi(p, \eta^0)|\psi(p, \eta^0))$ — внутреннее произведение в пространстве Фока. (В представлении (p, η^0) состояние $|\psi\rangle$ описывается функцией $\psi(p, \eta^0)$ со значениями в фоковском пространстве.)

Для состояний с определенным импульсом (13.2.6.18) интеграл $\int d^{26}p$ расходится. Способ разрешения этой проблемы хорошо известен: рассматривают просто подходящие волновые пакеты с различными p^A . Но вследствие нулевой связи $(L_0 - 1)|P\rangle=0$ (условие массовой поверхности) можно складывать только плоские волны с определенной массой. Таким образом, в скалярном произведении состояний, принадлежащих одному массовому уровню, при интегрировании по всем массам, содержащимся в уравнении (13.2.7.1), возникает бесконечный множитель $\delta(0)$.

Следовательно, нужно что-то сделать, чтобы получить удовлетворительную теорию: уравнение (13.2.7.1) должно иметь смысл для состояний, удовлетворяющих уравнению $\Omega|\psi\rangle=0$. Мы должны также учесть удвоение БРСТ-состояний, обнаруженное в предыдущем разделе. Этот вопрос связан с регуляризацией уравнения (13.2.7.1).

Существуют различные способы придать смысл уравнению (13.2.7.1), хотя и не схожие внешне, но, по-видимому, эквивалентные. Ни один из них не является строгим.

13.2.7а. Регуляризация импульсного интеграла

Заменяем интеграл $\int d^{26}p$ соответствующим клейн-гордоновским скалярным произведением, которое отличается от него бесконечным множителем $\delta(0)$ [33]. Это скалярное произведение определено только для состояний, лежащих на массовой поверхности. Оператор Ω остается эрмитовым, поскольку он не содержит координат центра масс X_0^A .

Тогда можно использовать волновые пакеты с определенной массой (все они имеют конечную норму), и следует рассмотреть удвоение

$$|\psi\rangle = |P_1\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + |P_2\rangle|0\rangle_{\text{дух}} \eta^0 + \Omega|\chi\rangle. \quad (13.2.7.2)$$

Согласно общепринятой позиции, нужно наложить “правило отбора”, которое ограничивает БРСТ-состояния (13.2.7.2) пределами лишь одного “сектора”, изоморфного пространству состояний ковариантного подхода (“усечение”). Наложение такого правила отбора согласуется с включением взаимодействий, если только отсутствует переход от одного сектора к другому, что будет в том случае, если взаимодействия можно полностью описать в рамках ковариантного, свободного от духов формализма. При выполнении последнего условия выбор правила отбора является в значительной мере делом соглашения.

Существуют по крайней мере два различных способа усечения теории. По-видимому, они эквивалентны (если взаимодействия действительно исчезают в секторе, содержащем нулевую духовую моду).

1. Как отмечалось выше, пространство нулевой духовой моды обладает состояниями с отрицательной нормой. Поэтому естественно сохранять лишь сектор с положительно нормируемыми векторами, как тот, который порождается величиной $1 + \eta^0$ [34]. Такие векторы не диагонализуют оператора числа духов (это касается лишь нулевой моды). При таком правиле отбора разрешенными физическими состояниями являются состояния

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |P\rangle|0\rangle_{\text{дух}} (1 + \eta^0) + \Omega|\chi\rangle. \quad (13.2.7.3)$$

Их норма задается выражением

$$\langle\psi|\psi\rangle = (P|P)_{\text{Клейн-Гордон-Фок}} \quad (13.2.7.4)$$

2. Чтобы диагонализировать оператор числа дѳухов, положим $|P_2\rangle = 0$. Изменим также скалярное произведение в пространстве нулевой дѳуховой моды таким образом, чтобы избежать проблем с нулевой нормой [19]. Этот метод был применен в недавних работах [35]. Мы лишь отметим, что при изменении скалярного произведения η^0 , или \mathcal{P}_0 , или они оба становятся неэрмитовыми операторами в полном пространстве состояний. Это приводит также к неэрмитовости оператора Ω и больше не обеспечивает отщепление всех состояний вида $\Omega|\chi\rangle$.

13.2.7б. Суперсимметричная БРСТ-регуляризация

Обсуждалась [31] необходимость рассмотрения на равных основаниях чисто калибровочных степеней свободы, ответственных за появление множителя $\delta(0)$, и дѳухов, чтобы придать смысл скалярным произведениям типа (13.2.7.1). Калибровочные степени свободы и дѳухи действительно являются “БРСТ-суперсимметричными партнерами”.

Подставим в выражение (13.2.7.1) подходящую регуляризующую функцию $f_\varepsilon(p, \eta^0)$, такую, что 1) интеграл (13.2.7.1) становится конечным и 2) $f_\varepsilon(p, \eta^0) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. С таким множителем норма состояния (13.2.7.2), где $|P_1\rangle$ и $|P_2\rangle$ — нормированные волновые пакеты с определенной массой, в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ задается выражением

$$\langle \psi | \psi \rangle = \delta(0) [(P_1 | P_2) + (P_2 | P_1)] + (P_1 | P_1), \quad (13.2.7.5)$$

где $(P_i | P_j)$ — внутреннее произведение в пространстве Клейна — Гордона — Фока. Конечный член $(P_1 | P_1)$ в этом выражении сохраняется (грубо говоря) потому, что в выражении (13.2.7.1) он умножается на $\delta(0)$ (интеграл по массе) и на 0 (интеграл по η^0). Это плохо определенное произведение $\delta(0) \times 0$ бозонной и фермионной дельта-функций, будучи регуляризованным описанным выше способом, оказывается равным единице.

Чтобы выражение (13.2.7.5) было конечным и нетривиальным, следует положить $|P_2\rangle = 0$. Это устраняет удвоение. Технически эта регуляризация близка к предыдущей. Исчезающее скалярное произведение, которое мы при этом получаем, является лишь одним из сомножителей произведения $\delta(0) \times 0$.

Идея здесь состоит в том, что интеграл $\int d\eta^0$ не может быть отделен от интеграла по массе.

13.2.7в. Является ли удвоение фиктивным?

Из этого обсуждения следует, что явлению удвоения, по-видимому, не нужно придавать слишком большого значения.

Конечно, было бы хорошо иметь строгую с самого начала формулировку теории, в которой это явление никогда бы не возникло. Насколько известно автору, такая формулировка пока отсутствует.

Для подкрепления идеи о фиктивности удвоения в случае открытой струны заметим, что состояние $|P_2\rangle$ может быть исключено добавлением к $|\psi\rangle$ члена вида $\Omega|\chi\rangle$. Действительно, в X_0^A -представлении это равносильно решению уравнения

$$(\square - m^2)\chi(X_0^A) = P_2(X_0^A)$$

(мы опустили осцилляторную зависимость). Здесь $P_2(X_0^A)$ и $\chi(X_0^A)$ — волновые функции состояний $|P\rangle$ и $|\chi\rangle$. Поскольку $P_2(X_0^A)$ является решением волнового уравнения $(\square - m^2)P_2(X_0^A) = 0$, функция $\chi(X_0^A)$ расходится на времениподобной бесконечности, как и ожидалось (резонанс).

По этой причине соответствующее состояние $|\chi\rangle$ ненормируемо даже после регуляризации скалярного произведения. (Соответственно состояние $\Omega|\chi\rangle$ не является в действительности нулевым состоянием и не отщепляется. Как мы видели, $|P_2\rangle\eta^0$ имеет ненулевые скалярные произведения с другими физическими состояниями.) Строго говоря, мы не можем рассматривать состояние $|\chi\rangle$. Но наводит на некоторые мысли тот факт, что нет никаких дифференциальных или топологических препятствий к тому, чтобы записать $|P_2\rangle\eta^0$ как $\Omega|\chi\rangle$ (этому препятствуют лишь возражения, касающиеся скалярного произведения, которые не имеют под собой серьезной основы).

Согласно настоящему рассмотрению, операторы нулевых мод X_0^A , p_A , η^0 и \mathcal{P}_0 следует считать линейными операторами, действующими в некотором “большем” линейном пространстве без скалярного произведения. Это пространство должно включать функции от X_0^A , расходящиеся при $X_0^0 \rightarrow \infty$. В таком пространстве общее решение уравнения $\Omega|\psi\rangle = 0$ имеет вид $|\psi\rangle = |P\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + \Omega|\chi\rangle$ без члена $|P_2\rangle$. Тогда скалярное произведение определяется только для БРСТ-инвариантных состояний как $\langle\psi|\psi\rangle = (P|P)_{\text{Клейн-Гордон-Фок}}$.

Упражнение

а. Исследуйте процедуру БРСТ-квантования для свободной релятивистской частицы. Покажите, что описанные выше проблемы появляются уже в этом простом случае.

б. Покажите, что с помощью примененных выше аргументов в случае замкнутой струны можно устранить лишь половину “двойного удвоения”.

13.2.8. Разное

13.2.8а. Теорема об отсутствии дѳухов в БРСТ-подходе

Теорема Като и Огавы показывает, что в разложении (13.2.6.18) бозонные состояния $|P_1\rangle$ и $|P_2\rangle$ фактически могут считаться “поперечными”: их “продольная” часть, если она вообще существует, может быть устранена путем добавления к $|\psi\rangle$ подходящего состояния вида $\Omega|\chi\rangle$.

Поперечные состояния по определению являются состояниями, рождаемыми из вакуума операторами ДДФ. Эти операторы, которые будут строго определены ниже, соответствующим вирасоро-инвариантным способом обобщают операторы поперечных осцилляций a_n^i, a_n^{i*} и сводятся к ним в калибровке светового конуса. Они удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям. В результате они порождают состояния только с положительной нормой.

Это означает, что нормы состояний $|P_1\rangle$ и $|P_2\rangle$ положительны. Следовательно, норма $|\psi\rangle$ может быть отрицательной только из-за нулевой дѳуховой моды. Если с этой модой поступить так, как это было сделано в предыдущем разделе, величина $\langle\psi|\psi\rangle$ будет положительной — все состояния с отрицательной нормой оказываются устраненными из физического подпространства (“теорема об отсутствии дѳухов”). Квантовой теории можно придать вероятностную интерпретацию.

Это основанное на БРСТ-методах доказательство теоремы об отсутствии дѳухов кратко дано в приложении А. Показано, что оно является следствием квартетного механизма Куго и Одзимы: фермионные дѳухи сокращают изотропные колебательные моды, и остаются лишь моды поперечных колебаний.

Первоначальное доказательство теоремы об отсутствии дѳухов приведено в разд. 13.4.

13.2.8б. Оператор числа дѳухов

Оператор числа дѳухов Q_c определяется следующим образом:

$$[A, Q_c] = gh(A)A. \quad (13.2.8.1)$$

Здесь $gh(A)$ — дѳуховое число оператора A , определяемое уравнениями

$$gh(X^A) = gh(\mathcal{P}_A) = 0, \quad (13.2.8.2a)$$

$$gh(\eta^\perp) = gh(\eta^l) = 1, \quad (13.2.8.2б)$$

$$gh(\mathcal{P}_\perp) = gh(\mathcal{P}_l) = -1, \quad (13.2.8.2в)$$

$$gh(AB) = gh(A) + gh(B), \quad (13.2.8.2r)$$

$$gh(A+B) = gh(A), \quad \text{если } gh(A) = gh(B). \quad (13.2.8.2д)$$

Только духи имеют ненулевое духовое число. Согласно этим определениям, $gh(\Omega) = +1$,

$$[\Omega, Q_c] = \Omega. \quad (13.2.8.3)$$

Коммутационные соотношения (13.2.8.1) определяют оператор Q_c с точностью до произвольной постоянной:

$$Q_c = -i \int (\mathcal{P}_\perp(\sigma) \eta^\perp(\sigma) + \mathcal{P}_\parallel(\sigma) \eta^\parallel(\sigma)) d\sigma + \text{const}, \quad (13.2.8.4)$$

которая может быть выбрана так, чтобы оператор Q_c был антиэрмитовым:

$$Q_c = -\frac{i}{2} \int [\mathcal{P}_\perp(\sigma) \eta^\perp(\sigma) - \eta^\perp(\sigma) \mathcal{P}_\perp(\sigma) + \mathcal{P}_\parallel(\sigma) \eta^\parallel(\sigma) - \eta^\parallel(\sigma) \mathcal{P}_\parallel(\sigma)] d\sigma. \quad (13.2.8.5)$$

(В работе [31] постоянная в выражении (13.2.8.4) положена равной нулю. Такой выбор больше подходит к представлению, в котором q являются диагональными, в то время как форма (13.2.8.5) больше приспособлена к фоковскому представлению.)

Интерес к оператору числа духов вызван тем, что физические наблюдаемые являются операторами с нулевым духовым числом, т. е. коммутируют с Q_c ¹⁾:

$$[A, Q_c] = 0 \quad (\text{и } [A, \Omega] = 0). \quad (13.2.8.6)$$

В осцилляторных переменных выражение (13.2.8.5) принимает вид

$$Q_c = -\frac{i}{2} (\eta^0 \mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_0 \eta^0) - \sum_{n>0} (\eta_n^* \mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^* \eta_n). \quad (13.2.8.7)$$

Оператор числа духов, хотя и является антиэрмитовым, тем не менее обладает вещественными собственными значениями. Это означает, что все его собственные состояния, исключая, возможно, состояния с нулевым собственным значением (если такие существуют), должны иметь нулевую или плохо определенную форму.

Благодаря присутствию нулевой моды в выражении (13.2.8.7) все собственные значения являются полуцелыми²⁾. Это явление известно как «дробление числа духов» [19].

¹⁾ Как было показано [31], любая калибровочно-инвариантная классическая наблюдаемая обладает БРСТ-инвариантным расширением, для которого выполняется уравнение (13.2.8.6). Но обратное может быть и неверно: существуют «БРСТ-наблюдаемые», удовлетворяющие уравнению (13.2.8.6) и не имеющие классического аналога при учете вырождения типа (13.2.6.18) [34].

²⁾ При том же выборе постоянной в выражении (13.2.8.4), что и в соотношении (13.2.8.5).

13.2.8в. Конформная инвариантность в квантовой теории

При критической размерности $d = 26$ БРСТ-инвариантные расширения связей

$$L_n^\Omega = [\Omega, \mathcal{P}_n] = L_n + \text{вклад д\`ухов} \quad (13.2.8.8)$$

замыкаются в соответствии с конформной алгеброй без центрального заряда [35]:

$$[L_n^\Omega, L_m^\Omega] = (n - m) L_{n+m}^\Omega. \quad (13.2.8.9)$$

Это означает, что преобразования, генерируемые при коммутировании величинами L_m^Ω , образуют представление конформной группы.

Это прекрасно соответствует нашей интуиции, поскольку мы знаем, что нильпотентность Ω , имеющая место только при $d = 26$, эквивалентна калибровочной инвариантности на квантовом уровне. Кроме того, из выражения (13.2.8.8) видно, что операторы L_n^Ω при действии на физические состояния порождают нулевые состояния:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle + \varepsilon^n L_n^\Omega |\psi\rangle = |\psi\rangle + \varepsilon^n \Omega \mathcal{P}_n |\psi\rangle \approx |\psi\rangle, \quad (13.2.8.10)$$

так что “калибровочная группа” действует тривиально на классах эквивалентности физических состояний. Таким образом, квантовая теория является калибровочно-инвариантной и в этом более традиционном смысле.

Соотношением (13.2.8.10) можно воспользоваться для наложения “калибровочного условия” в квантовой теории, например потребовать, чтобы представитель $|\psi\rangle$ каждого класса эквивалентности удовлетворял калибровочному условию светового конуса $\langle \psi | \alpha_n^\pm | \psi \rangle = 0$ (см. ниже).

Следует помнить, однако, что соотношение (13.2.8.10) описывает лишь подмножество всех калибровочных преобразований квантовой теории

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle + \Omega |\chi\rangle \quad (13.2.8.11)$$

(где $|\chi\rangle$ — произвольное состояние, зависящее от $|\psi\rangle$). С этой точки зрения соотношение (13.2.8.11) является более фундаментальным, чем соотношение (13.2.8.10).

Легко видеть, что для физических состояний, удовлетворяющих “БРСТ-калибровочному условию”

$$\eta_n |\psi\rangle = \mathcal{P}_n |\psi\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad (13.2.8.12)$$

половина всех преобразований (13.2.8.10) сводится к тождественным, а именно преобразования, генерируемые L_n^Ω при

$n > 0$. Что касается остальных преобразований, то они действуют на состояние $|\psi\rangle$ нетривиально, хотя, конечно, порождают лишь нулевые состояния и в общем случае не сохраняют условия (13.2.8.12).

В некоторых других калибровочных теориях все калибровочные преобразования, аналогичные (13.2.8.10), сводятся к тождественным. Но соотношение (13.2.8.11) все же играет существенную нетривиальную роль. Поэтому мы полагаем, что более уместно сосредоточить внимание на соотношении (13.2.8.11) и на всем аппарате БРСТ-формализма, чем лишь на одном соотношении (13.2.8.10).

Упражнение

- а. Вычислите точно L_n^Ω .
- б. Определите $L_n^\Omega|\psi\rangle$ для физических состояний (13.2.6.18).
- в. Коммутирует ли L_n^Ω с оператором числа д'ухов?

13.3. Квантование в калибровке светового конуса

13.3.1. Пуанкаре-инвариантность квантовой теории

В калибровке светового конуса гильбертово пространство квантовых состояний является действительно гильбертовым, не имеющим состояний с отрицательной нормой. Калибровка полностью фиксирована до квантования, и все состояния являются физическими (исключая случай замкнутой струны, см. разд. 13.3.3).

Не очевидна и, как выясняется, имеет место лишь при критической размерности пуанкаре-инвариантность квантовой теории¹⁾.

Генераторы Пуанкаре в калибровке светового конуса нелинейны, поэтому их алгебра содержит q -числовую аномалию, исчезающую при следующих условиях:

$$d = 26, \quad \alpha_0 = 1. \quad (13.3.1.1)$$

В результате получаются те же условия, что и при других способах квантования. Это свидетельствует в пользу метода калибровки светового конуса (световой калибровки), который, хотя и весьма практичен, является все же, по мнению автора, менее фундаментальным, чем другие методы. Неясно, например, что может заменить требование пуанкаре-инвариантности, воз-

¹⁾ Можно использовать явную положительную определенность физического подпространства вместо явной пуанкаре-инвариантности. Они эквивалентны при критической размерности, когда можно наложить калибровку светового конуса даже квантовомеханически.

никающее в методе световой калибровки, в искривленном пространстве, не обладающем изометрией. Кроме того, световое калибровочное условие есть каноническая калибровка для калибровочной симметрии, отличной от внутренней (репараметризационная инвариантность). Априори не очевидно, что оно может быть наложено квантовомеханически, хотя в случаях бозонной и фермионной струн, как уже было отмечено, это условие все же может быть реализовано.

Классические генераторы Пуанкаре в световой калибровке получены в разд. 12.5.6 (выражения (12.5.6.1) и (12.5.6.2)). Мы определяем соответствующие квантовые операторы, принимая нормальное упорядочение для осцилляторных переменных и симметричное упорядочение для пар (X, p) . Мы также учитываем пока еще не определенную константу α_0 в выражении для L_0 .

На этом этапе следует сделать два замечания:

1. Фактически истинной неоднозначности упорядочения в генераторах Пуанкаре не возникает, исключая член с α_0 , если потребовать, чтобы эти операторы были эрмитовыми.

2. В выражениях для P^- и M^{i-} нужно использовать то же значение α_0 , чтобы выполнялось условие $[P^i, M^{i-}] = 1/2iP^-$.

Легко проверить, что алгебра Пуанкаре реализуется квантовыми операторами Пуанкаре, за исключением, возможно, коммутатора

$$[M^{i-}, M^{j-}] = 0. \quad (13.3.1.2)$$

Все остальное находится в нормально упорядоченной форме. Таким образом, ключевой вопрос состоит в следующем: выполняется ли соотношение (13.3.1.2)?

Для вычисления $[M^{i-}, M^{j-}]$ можно снова использовать классические расчеты, которые показывают, что коммутатор $[M^{i-}, M^{j-}]$ в классическом пределе равен нулю, и сосредоточить внимание на аномальных членах.

Потенциально опасны следующие члены:

1. Вклад, пропорциональный α_0 , отсутствующий в классическом случае.

2. Члены, возникающие при нормальном упорядочении $L_0 [X_0^i, \sum_{n>0} a_n^{*i} L_n^{\text{tr}} + L_{-n}^{\text{tr}} a_n^i]$.

3. Вклады, являющиеся результатом нормального упорядочения коммутаторов кубических членов $[a_{-n} L_n^{\text{tr}}, a_{-m} L_m^{\text{tr}}]$, $[a_{-n} L_n^{\text{tr}}, L_{-m}^{\text{tr}}, a_m]$ и т. д.

Явное вычисление дает для $[M^{i-}, M^{j-}]$ выражение

$$\frac{1}{4(p^+)^2 \alpha'} \sum_{n>0} \left[\alpha_0 + \frac{d-2}{24} (n^2 - 1) - n^2 \right] (a_n^{*i} a_n^j - a_n^{*j} a_n^i). \quad (13.3.1.3)$$

Это выражение обращается в нуль только в том случае, если выполнены условия (13.3.1.1), как и утверждалось. Если эти условия не выполнены, квантовая теория не является пуанкаре-инвариантной.

13.3.2. Описание спектра

Спектр струны состоит из бесконечного числа состояний, лежащих на линейно растущих “траекториях Редже”. Эти траектории дают “спин” состояний в зависимости от квадрата их массы:

$$J = \alpha' M^2 + \text{«отсекаемый отрезок»}. \quad (13.3.2.1)$$

Первая траектория, для которой отсекаемый на оси ординат отрезок (интерсепт) равен $+1$, называется “основной траекторией” (рис. 13.1). Остальные траектории называются “дочерними”.

Это можно представить себе следующим образом. Вследствие пуанкаре-инвариантности квантовой теории состояния распадаются на неприводимые представления группы Пуанкаре. Состояния характеризуются:

- 1) массой,
- 2) представлением малой группы, к которой они принадлежат; соответствующей малой группой является $SO(d-1) = SO(25)$ для массивных состояний и $SO(24)$ для безмассовых состояний.

Масса задается соотношением

$$\alpha' M^2 = -\alpha' P_A P^A = N - \alpha_0, \quad (13.3.2.2)$$

где “номер уровня” N определяется выражением

$$N = \sum_{n>0} n a_n^i a_{in}. \quad (13.3.2.3)$$

Легко проверить, что N коммутирует со всеми генераторами Пуанкаре. Различные состояния, принадлежащие одному и

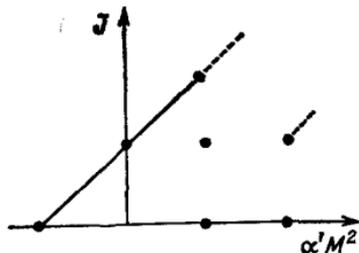


Рис. 13.1. Используя четырехмерное представление и понятие “спина”, можно показать, что состояния бозонной струны ложатся на линейно растущие траектории Редже.

тому же представлению группы Пуанкаре, имеют одинаковый номер уровня.

Определение “спина” состояния немного более сложно. Поперечными индексами являются, очевидно, векторные $SO(24)$ -индексы. Для безмассовых состояний первого возбужденного уровня $N=1$ представление $SO(24)$ определяется непосредственно. В случае массивных состояний оказывается, что различные $SO(24)$ -тензоры объединяются с образованием неприводимого представления $SO(25)$.

Первое состояние является основным состоянием, уничтожаемым всеми осцилляторами:

$$N=0, \quad |0\rangle, \quad \alpha' M^2 = -1. \quad (13.3.2.4)$$

Интерсепт α_0 равен единице, так что это скалярный тахион, что является недостатком бозонной модели.

Первое возбужденное состояние $N=1$ есть безмассовый поперечный вектор (спин 1 — “фотон”):

$$N=1, \quad a_1^i |0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 0, \quad 24 \text{ состояния.} \quad (13.3.2.5)$$

Так как при $N=1$ мы имеем только 24 состояния (а не 25, как требовалось бы в случае массивной малой группы), фактически мы могли бы догадаться, что эти состояния являются безмассовыми в том случае, когда лоренцева инвариантность реализуется на квантовом уровне. Но если первые возбужденные состояния обладают нулевой массой, основное состояние может быть только тахионом. Отсюда понятно, почему мы нашли, что $\alpha_0 = 1$.

Следующие состояния отвечают значению $N=2$; мы имеем

$$N=2, \quad a_2^i |0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 1, \quad 24 \text{ состояния;} \\ a_1^i a_1^j |0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 1, \quad 300 \text{ состояний.} \quad (13.3.2.6)$$

Они объединяются с образованием массивного представления группы Пуанкаре, отвечающего спину 2 (бесследовый симметричный тензор $25 \times 25 = 324$ состояния).

Следующие состояния при $N=3$:

$$N=3, \quad a_3^i |0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 2; \\ a_2^i a_1^j |0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 2; \\ a_1^i a_1^j a_1^k |0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 2. \quad (13.3.2.7)$$

Соответствующее массивное представление группы Пуанкаре уже не является приводимым. Получаем одно представление со “спином 3” и два со “спином 1”: при $N=3$ начинаются

новые “дочерние” траектории (заметим, что на рис. 13.1 имеются “дыры”).

Аналогично производится анализ для высших уровней. Следует упомянуть два пункта. Во-первых, количество состояний экспоненциально растет с увеличением номера N [9]. Во-вторых, состояния полностью определяются не одними осцилляторными числами заполнения, но также, конечно, их импульсами p^i и p^+ . Зная p^i и p^+ , можно вычислить p^- . Результирующая компонента p^0 может быть как положительной, так и отрицательной, поэтому одновременно присутствуют состояния X^0 , движущиеся по времени Минковского вперед (частицы), и состояния, движущиеся вспять (античастицы). Такие состояния обыкновенно идентифицируются для струны без дополнительных квантовых чисел.

13.3.3. Замкнутая струна — пуанкаре-инвариантность

Замкнутая струна рассматривается так же, единственной новой чертой является присутствие (одной) новой связи

$$(L_0^{\text{tr}} - \bar{L}_0^{\text{tr}}) | \psi \rangle = (N - \bar{N}) | \psi \rangle = 0 \quad (13.3.3.1)$$

на физические состояния¹⁾. Здесь $N(\bar{N})$ — номер уровня для право (лево) бегущих мод:

$$N = \sum_n n C_n^{*i} C_{ni}, \quad (13.3.3.2a)$$

$$\bar{N} = \sum_n n \bar{C}_n^{*i} \bar{C}_{ni}. \quad (13.3.3.2b)$$

Выше мы подробно обсудили тот факт, что связь (13.3.3.1) отражает наличие остаточной калибровочной инвариантности в калибровке светового конуса (постоянные трансляции по σ).

Проверка алгебры Пуанкаре снова проводится непосредственно, если исключить $[M^{i-}, M^{j-}]$. Оказывается, что $[M^{i-}, M^{j-}]$ отличается от “слабо исчезающего” оператора (т. е. оператора, в котором разность $L_0 - \bar{L}_0$ стоит справа и который уничтожает физические состояния) аномальным членом. Этот член равен нулю только в том случае, если

$$d = 26, \quad (13.3.3.3a)$$

$$\alpha_0 = 2 \text{ (замкнутая струна)}, \quad (13.3.3.3b)$$

где α_0 обозначает неоднозначность упорядочения в сумме $L_0 + \bar{L}_0$.

¹⁾ Мы считаем, что неоднозначность упорядочения в L_0 такая же, как в \bar{L}_0 . Фактически это предположение не является независимым, оно следует из требования слабого равенства нулю величины $[M^{i-}, M^{j-}]$.

13.3.4. Спектр (замкнутая струна)

Для замкнутой струны массовое уравнение имеет вид

$$\frac{\alpha'}{2} M^2 = N + \bar{N} - 2 \quad (13.3.4.1)$$

(см. гл. 12). Наклон траекторий Редже составляет половину соответствующего значения для открытой струны. Кроме того, физические состояния должны быть такими, что

$$N = \bar{N}. \quad (13.3.4.2)$$

Основное состояние является вакуумом и опять соответствует тахиону. Первые возбужденные состояния соответствуют $N = \bar{N} = 1$:

$$N = \bar{N} = 1, \quad c_1^{i*} \bar{c}_1^{i*} |0\rangle. \quad (13.3.4.3)$$

Они имеют нулевую массу, как это и должно быть, поскольку в противном случае мы имели бы недостаточно состояний для заполнения представлений $SO(25)$.

Состояния (13.3.4.3) распадаются на бесследовую симметричную часть (спин 2, “гравитон” g_{AB}), антисимметричную часть (поле 2-формы B_{AB}) и скаляр (спин 0, дилатон ϕ). Примечательно, что в отсутствие условия $N = \bar{N} = 1$ можно создать векторные состояния в качестве первых возбужденных состояний. Соответственно из условия репараметризационной инвариантности (13.3.4.2) следует, что первое возбужденное состояние является безмассовым “гравитоном” со спином 2.

Следующие состояния массивны и исследуются так же, как в случае открытой струны.

Весь спектр разбивается на часть, симметричную при замене $c \leftrightarrow \bar{c}$ право- и левобегущих мод, и на антисимметричную часть. Замена $c \leftrightarrow \bar{c}$ может быть получена изменением σ на $-\sigma$.

Симметричное усечение (“замкнутые струны типа I”) соответствует модели “Шапиро — Вирасоро” и не несет σ -ориентации, поскольку остается неизменным при замене σ на $-\sigma$. Полный спектр (“замкнутые струны типа II”) соответствует “расширенной модели Шапиро — Вирасоро” и описывает ориентированные струны, поскольку теперь преобразование $\sigma \rightarrow -\sigma$ уже не тривиально действует на состояния (подробнее см. работу [36]). Оказывается, что усечения до одного лишь антисимметричного сектора, согласующегося с включением взаимодействий, не существует.

13.4. Ковариантное квантование

13.4.1. Устранение духов

как основной результат ковариантного подхода

Ковариантное квантование струны обладает интересными математическими приложениями. Кроме того, оно, по-видимому, является более гибким, чем другие методы, поскольку порождает согласованную теорию, по крайней мере на свободном уровне, для большего числа значений d и α_0 , чем только лишь $d=26$ и $\alpha_0=1$. (Но значения $d=26$ и $\alpha_0=1$ выделены даже в ковариантном подходе.)

Выше мы подчеркивали невозможность наложения условий Вирасоро

$$L_n |\psi\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (13.4.1.1)$$

для всех (положительных и отрицательных) значений n , имеющую своей причиной нетривиальный центральный заряд алгебры Вирасоро. Правильнее ослабить условия (13.4.1.1):

$$L_n |\psi\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (13.4.1.2a)$$

$$(L_0 - \alpha_0) |\psi\rangle = 0, \quad (13.4.1.2b)$$

где α_0 обозначает неоднозначность упорядочения в L_0 . Состояние $|\psi\rangle$ становится теперь чисто бозонным состоянием, содержащим только моды a_n^A (без η_n или \mathcal{P}_n). Такое состояние обозначалось символом $|P\rangle$ в БРСТ-разделе.

Ослабленное условие (13.4.1.2) важно как технически, так и концептуально. Оно существенно отклоняется от стандартных рецептов манипулирования со связями типа “закона Гаусса”, проистекающими из калибровочной инвариантности одного действия, в том, что оно затрагивает лишь “половину” из всех условий двумерной репараметризационной инвариантности в квантовой теории. Поэтому не очевидно, что теория, основанная на системе (13.4.1.2), есть квантовая теория геометрической репараметризационно-инвариантной струны.

Оказывается, в ковариантном подходе также весьма тонким образом вновь восстанавливается полная репараметризационная инвариантность при критических значениях $d=26$ и $\alpha_0=1$, снова вследствие присутствия нулевых физических состояний, которые могут быть отфакторизованы.

Но независимо от этих общих вопросов можно еще интересоваться условиями, при которых имеет смысл квантовая теория, определяемая системой (13.4.1.2). Квантовая теория будет иметь смысл, если условий (13.4.1.2) достаточно для исключения из физического подпространства всех состояний с отрица-

тельной нормой. Такие состояния генерируются операторами α_n^{0*} .

Следовательно, центральным вопросом ковариантного подхода является проблема устранения духов. Здесь термин “дух” конкретно относится к состояниям с отрицательной нормой, а не к духам БРСТ-подхода.

Структура подпространства, определяемого системой (13.4.1.2), исследовалась в работах [18, 37], и были получены следующие выводы.

1. При $d > 26$ или $\alpha_0 > 1$ духи не устраняются полностью из физического подпространства.

2. При $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$ справедлива теорема об отсутствии духов. Если $\alpha_0 \neq 1$, духи не устраняются.

3. Наконец, при $d \leq 25$ и $\alpha_0 \leq 1$ духи в физическом подпространстве отсутствуют.

Полное доказательство этих результатов здесь воспроизводиться не будет. Оно может быть найдено в работе [37]. Мы лишь приводим ниже доказательство теоремы об отсутствии духов при $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$, когда имеются особые отличительные черты (“квантовая калибровочная инвариантность”).

Как возникают критические значения $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$, можно приблизительно понять из следующих рассуждений.

Почему $\alpha_0 = 1$? Положим $\alpha_0 > 1$. Рассмотрим состояния первого уровня с $N = 1$:

$$k_A \alpha_1^{*A} |0, p\rangle, \quad (13.4.1.3)$$

где k_A — произвольный d -вектор. Условие массовой поверхности

$$(L_0 - \alpha_0) k_A \alpha_1^{*A} |0, p\rangle = 0 \quad (13.4.1.4)$$

приводит к пространственноподобности d -импульса p^A . Следовательно, состояния (13.4.1.3) на массовой поверхности являются тахионными при $\alpha_0 > 1$. Заметим далее, что в этом случае единственным нетривиальным уравнением из (13.4.1.2а) оказывается уравнение для $n = 1$. Оно сводится к

$$k_A p^A = 0. \quad (13.4.1.5)$$

Вектор k_A ортогонален p^A , так что он может быть времениподобным.

С другой стороны, состояния (13.4.1.3) имеют норму¹⁾

$$k_A k^A. \quad (13.4.1.6)$$

¹⁾ Как мы видели, норма в действительности бесконечна из-за определенной величины d -импульса. Чтобы сделать норму конечной, нужно рассматривать волновые пакеты (и отфакторизовать $\delta(p_A p^A + m^2)$). Впоследствии мы систематически будем забывать проводить интегрирование по импульсам в скалярном произведении.

Следовательно, для времениподобных векторов k_A физические состояния (13.4.1.3) имеют отрицательную норму. Это означает, что при $\alpha_0 > 1$ условия Вирасоро не устраняют из физического подпространства состояния с отрицательной нормой.

При $\alpha_0 = 1$ вектор p^A является нулевым, а вектор k^A с необходимостью оказывается пространственноподобным или изотропным. Если $k_A = \lambda p_A$, соответствующее физическое состояние отщепляется от остальных физических состояний, поэтому вектор k_A эффективно имеет лишь $n - 2$ независимых компонент. Это согласуется с тем фактом, что состояния, отвечающие уровню с $N = 1$, оказываются безмассовыми; малой группой является $O(d - 2)$.

При $\alpha_0 < 1$ вектор p^A времениподобен. Тогда вектор k^A из уравнения (13.4.1.5) оказывается пространственноподобным. Все $d - 1$ направления вектора k_A существенны для этих массивных состояний; следовательно, значение $\alpha_0 = 1$ является критическим (допустимым) с особыми свойствами.

Почему $d = 26$? Чтобы понять, что нарушается при $d > 26$, рассмотрим состояния второго уровня (см. работу [38]):

$$|k\rangle = k_A a_2^{A*} |0, p\rangle + \frac{1}{2} m_{AB} a_1^{A*} a_1^{B*} |0, p\rangle, \quad (13.4.1.7)$$

где $m_{AB} = m_{BA}$ — симметричная матрица $d \times d$. Норма этих состояний задается выражением

$$\langle k | k \rangle = k_A^* k^A + \frac{1}{2} m_{AB}^* m^{AB}. \quad (13.4.1.8)$$

Условия Вирасоро накладывают на p^A ограничение

$$\alpha' p_A p^A + 2 - \alpha_0 = 0 \quad (13.4.1.9)$$

и, кроме того, приводят к соотношениям

$$k_A = i m_{AB} p^B \sqrt{\alpha'}, \quad (13.4.1.10a)$$

$$-i \sqrt{\alpha'} p^A k_A - \frac{1}{4} m_A^A = 0. \quad (13.4.1.10b)$$

Если мы примем, что $\alpha_0 \leq 1$, то вектор p^A будет времениподобным, и можно выбрать его в виде $p^A = (p, 0, 0, \dots, 0)$, где

$$\alpha' p^2 = 2 - \alpha_0. \quad (13.4.1.11)$$

Уравнения (13.4.1.10) могут быть разрешены относительно k_A и m_{0a} как функций независимых компонент m_{0a} и m_{ab} мат-

рицы m_{AB} :

$$k_0 = im_{00\rho} \sqrt{\alpha'} = \frac{im_{a\rho}^a \sqrt{\alpha'}}{4\rho^2\alpha' + 1}, \quad (13.4.1.12a)$$

$$k_a = im_{a0\rho} \sqrt{\alpha'}, \quad (13.4.1.12b)$$

$$m_{00} = \frac{m_a^a}{4\rho^2\alpha' + 1}. \quad (13.4.1.12в)$$

Эти последние соотношения позволяют представить скалярное произведение $\langle k | k \rangle$ в виде

$$\langle k | k \rangle = \frac{|m_a^a|^2}{(9 - 4\alpha_0)^2} \left(\alpha_0 - \frac{3}{2} \right) + (1 - \alpha_0) |m_{0a}|^2 + \frac{1}{2} m_{ab}^* m^{ab}. \quad (13.4.1.13)$$

Член с m_{0a} неотрицателен, если $\alpha_0 \leq 1$, что мы как раз и предполагаем. Единственный отрицательный вклад может происходить от ненулевого следа m_a^a . Если принять, что

$$m_{ab} = \frac{1}{d-1} m^c{}_c \delta_{ab}, \quad (13.4.1.14)$$

то выражение (13.4.1.13) принимает вид

$$\langle k | k \rangle = \frac{|m_a^a|^2}{(9 - 4\alpha_0)^2} \left[\left(\alpha_0 - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2(d-1)} (9 - 4\alpha_0)^2 \right]. \quad (13.4.1.15)$$

Это выражение положительно, если

$$\alpha_0 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2(d-1)} (9 - 4\alpha_0)^2 \geq 0, \quad (13.4.1.16)$$

т. е.

$$\alpha_0 \leq \frac{37 - d - \sqrt{(d-25)(d-1)}}{16} (< 1) \quad (13.4.1.17a)$$

или

$$\alpha_0 \geq \frac{37 - d + \sqrt{(d-25)(d-1)}}{16}, \quad (13.4.1.17b)$$

если $d > 25$. (Для $d \leq 25$ выражение (13.4.1.16) всегда положительно.)

Детальный анализ показывает, что первая возможность (13.4.1.17a) неприемлема, поскольку ведет к состояниям с отрицательной нормой на высших уровнях $N > 2$ [37]. Таким образом, остается только возможность (13.4.1.17b).

Функция (13.4.1.17b) возрастает с ростом d и принимает максимально допустимое значение $\alpha_0 = 1$ при критической размерности $d = 26$. Если $d > 26$, то α_0 , задаваемая выражением (13.4.1.17b), оказывается больше единицы.

Другими словами, если положить $\alpha_0 = 1$, то выражение (13.4.1.16) оказывается отрицательным при $d > 26$ и в физическом подпространстве присутствуют состояния с отрицательной нормой. Эти состояния с отрицательной нормой становятся нулевыми состояниями, отщепляющимися от всех остальных физических состояний в $d = 26$ измерениях (выражение (13.4.1.16) равно нулю)¹⁾, и состояниями с положительной нормой в $d < 26$ измерениях. Таким образом, значение 26 возникает как критическая размерность.

Максимальное число отщепляемых нулевых состояний появляется при критических значениях $\alpha_0 = 1$ и $d = 26$. Оказывается, что размерность эффективного физического подпространства, отвечающего второму массовому уровню, равна $25 + 26 \times \times 25/2$ (число независимых компонент m_{AB}) — $25 - 1$ (числа отщепляемых состояний). Это число также равно $24 + 25 \times 24/2$, т. е. числу состояний в калибровке светового конуса, соответствующих второму массовому уровню ($a_2^{*i} | 0$ и $a_1^{*i} a_1^{*i} | 0$).

Упражнение. Исследуйте физическое подпространство третьего массового уровня.

13.4.2. Вершинный оператор

В ковариантном формализме фундаментальную роль играют следующие две операторные функции [10, 38, 39]:

$$Q^A(\theta) = X_0^A + 2\alpha' p^A \theta + \sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{2\alpha'}{n}} (a_n^A \exp -in\theta + a_n^{A*} \exp in\theta), \quad (13.4.2.1)$$

$$P^A(\theta) = \frac{1}{2\alpha'} \frac{dQ^A}{d\theta} = p^A + \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} (-ia_n^A \exp -in\theta + ia_n^{A*} \exp in\theta). \quad (13.4.2.2)$$

Эти операторы часто представляют как функции комплексной переменной $z = \exp i\theta$.

Функция $Q^A(\theta)$ соответствует положению конечной точки струны $\sigma = 0$ в момент “времени” θ в конформной калибровке; функция $P^A(\theta)$ — двумерная изотропная компонента тока пространственно-временных трансляций $f^A(\theta)$. Выше мы уже встречались с этими функциями (например, отмечалось, что движение конечной точки $\sigma = 0$ полностью определяет классическую исто-

¹⁾ В отсутствие состояний с отрицательной нормой состояния с нулевой нормой с необходимостью отщепляются, т. е. имеют нулевые скалярные произведения со всеми остальными физическими состояниями (в противном случае можно построить состояния с отрицательной нормой).

рию струны; величина $P^A(\theta)$ связывалась с алгеброй Каца — Муди).

Операторы $Q^A(\theta)$ и $P^A(\theta)$ удовлетворяют соотношениям

$$[L_m, Q^A(\theta)] = -ie^{im\theta} \frac{dQ^A}{d\theta}, \quad (13.4.2.3a)$$

$$[L_m, P^A(\theta)] = e^{im\theta} \left(-i \frac{d}{d\theta} + m \right) P^A(\theta). \quad (13.4.2.3b)$$

Говорят, что $Q^A(\theta)$ имеет конформный спин нуль, а $P^A(\theta)$ — конформный спин единица. В более общем виде любой операторной функции $X(\theta)$, такой, что

$$[L_m, X(\theta)] = e^{im\theta} \left(-i \frac{d}{d\theta} + mJ \right) X(\theta), \quad (13.4.2.4)$$

говорят, что она имеет конформный спин J .

Упражнение. Проверьте систему уравнений (13.4.2.3).

Скалярный вершинный оператор определяется выражением

$$V_0(k, \theta) = : \exp ik_A Q^A(\theta) :, \quad (13.4.2.5)$$

где $:$ $:$ обозначает нормальное упорядочение, необходимое здесь, поскольку оператор $ik_A Q^A(\theta)$ плохо определен, за исключением случая $k^2 = 0$, когда нормальный порядок излишен.

Легко получить

$$V_0(k, \theta) = \exp(i\theta L_0) V_0(k) \exp(-i\theta L_0), \quad (13.4.2.6a)$$

где

$$V_0(k) = \exp \left(ik_A \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n^{-1} \alpha'} a_n^A \right) \times \\ \times \exp(ik_A X_0^A) \exp \left(ik_A \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n^{-1} \alpha'} a_n^A \right). \quad (13.4.2.6b)$$

Хотя $Q^A(\theta)$ имеет конформный спин нуль, $V_0(k, \theta)$ не обладает нулевым конформным спином благодаря нормальному упорядочению выражения (13.4.2.5). Вместо этого имеем

$$[L_n, V_0(k, \theta)] = e^{in\theta} \left(-i \frac{d}{d\theta} + n\alpha' k^2 \right) V_0(k, \theta), \quad (13.4.2.7)$$

т. е. $V_0(k, \theta)$ имеет конформный спин $\alpha' k^2$.

Поперечный векторный вершинный оператор $V_A(k, \theta)$, где k — изотропный вектор, задается выражением

$$\epsilon^A V_A(k, \theta) = \epsilon^A P_A(Q) \exp ik_B Q^B(\theta), \quad k^2 = 0. \quad (13.4.2.8)$$

Здесь вектор поляризации ϵ^A поперечен ($\epsilon^A k_A = 0$).

Поперечность приводит к коммутативности величин $\varepsilon^A P_A(\theta)$ и $k_B Q^B(\theta)$:

$$[k_B Q^B(\theta), \varepsilon^A P_A(\theta)] = 4\pi i \alpha' k_A \varepsilon^A \delta(\theta, \theta') = \quad (13.4.2.9a)$$

$$= 0, \quad (13.4.2.9б)$$

в то время как условие $k^2 = 0$ делает излишним нормальное упорядочение экспоненты. Следовательно, конформный спин поперечного векторного оператора равен единице:

$$[L_m, \varepsilon^A V_A(k, \theta)] = e^{im\theta} \left(-i \frac{d}{d\theta} + m \right) \varepsilon^A V_A(k, \theta); \quad (13.4.2.10)$$

величина $\varepsilon^A V_A(k, \theta)$ может быть расширена до полного векторного вершинного оператора, но здесь это не понадобится (см., например, [38]).

Вершинные операторы существенны при обсуждении взаимодействий в теории струн. Но поскольку исследование взаимодействий выходит за рамки данного обзора, мы интересуемся вершинным оператором в другом контексте: поперечный вершинный оператор может использоваться для построения явно положительно нормируемых состояний Дель Гюдиса, Ди Веггиа и Фубини (ДДФ), которые полностью покрывают физическое подпространство, если не считать нулевых состояний.

13.4.3. Состояния ДДФ

Мы ожидаем, что при $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$ физическое пространство изоморфно пространству поперечных возбуждений, не считая нулевых состояний, которые могут быть отфакторизованы. Для первых двух уровней мы проверили это свойство явно в разд. 13.4.1.

Чтобы доказать это свойство для всех уровней, необходимо уточнить, что понимается под термином “поперечные состояния” в ковариантном формализме. В калибровке светового конуса поперечные состояния — это просто состояния, порождаемые поперечными осцилляторами a_n^i . В данном же случае это определение не может быть принято, поскольку операторы a_n^i не коммутируют с операторами Вирасоро:

$$[a_n^{i*}, L_m] \neq 0 \quad (13.4.3.1)$$

и, следовательно, даже не рождают из вакуума физических состояний. В частности, оператор a_n^{i*} увеличивает номер уровня на n единиц, но при этом не изменяет d -импульс, так, что состояние остается на массовой поверхности ($[a_n^{i*}, p^A] = 0$).

Необходимо определить операторы A_n^i , которые коммутируют с L_m :

$$[A_n^i, L_m] = 0, \quad (13.4.3.2)$$

и в калибровке светового конуса сводятся классически к операторам a_n^i :

$$A_n^i \approx a_n^i + k_n^{im} \chi_m, \quad (13.4.3.3)$$

так что они могут быть названы “поперечными”. Здесь χ_m — калибровочные условия светового конуса.

Общее свойство гамильтоновых систем первого рода со связями состоит в том, что подобная проблема всегда имеет решение, по крайней мере тогда, когда равенство в (13.4.3.2) заменяется “слабым” равенством (равенством на связях $L_m = 0$).

Вместо того, чтобы использовать стандартные методы нахождения этого решения, Дель Гьюдис и др. [40] построили операторы A_n^i с помощью векторного вершинного оператора. Их конструкция основана на том факте, что операторная функция $\epsilon^A V_A(k, \theta)$ периодична по θ с периодом 2π , если рассматриваются лишь состояния с импульсом p^A , удовлетворяющим соотношению

$$2\alpha' k_A \cdot p^A = \text{целому числу}. \quad (13.4.3.4)$$

При выполнении этого условия оказывается, что

$$\left[L_m, \int_0^{2\pi} \epsilon^A V_A(k, \theta) d\theta \right] = -i \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} (e^{im\theta} \epsilon^A V_A) = 0, \quad (13.4.3.5)$$

поскольку V_A имеет конформный спин 1.

Выберем основное состояние $|0, p_0\rangle$, d -импульс которого удовлетворяет условию массовой поверхности

$$\alpha' p_0^A p_{0A} = 1 \quad (13.4.3.6)$$

с p_0^A фиксированным раз и навсегда.

Чтобы удовлетворить условию (13.4.3.4), выберем далее, снова раз и навсегда, изотропный вектор k_0 , для которого выполняются условия

$$k_0^A k_{0A} = 0, \quad 2\alpha' k_0^A p_{0A} = 1. \quad (13.4.3.7)$$

Для заданных p_0 и k_0 допустимы лишь значения вектора k , пропорциональные k_0 :

$$k^A = n k_0^A. \quad (13.4.3.8)$$

Например, если выбрать $p_0^A = (0, 0, \dots, 0, 1/\sqrt{\alpha'})$ и $k^A = (-1/\sqrt{2\alpha'}, 0, 0, \dots, 1/2\sqrt{\alpha'})$, то поперечный вектор ϵ_A

принимает вид $(0, \epsilon_i, 0)$. Заметим, что другой выбор k нарушает явную лоренцеву инвариантность.

Из условия (13.4.3.5) следует, что операторы

$$A_{ni} = \int_0^{2\pi} V_i(nk_0, \theta) d\theta = \quad (13.4.3.9)$$

$$= \int_0^{2\pi} P_i(\theta) \exp \frac{in}{\sqrt{2\alpha'}} Q^+(\theta) d\theta \quad (13.4.3.10)$$

коммутируют с L_m при любых n . Это и есть операторы ДДФ.

Если в классическом аналоге оператора (13.4.3.10) положить $a_n^+ = 0$ (световое калибровочное условие)¹⁾, то получим

$$Q^+(\theta) = \sqrt{2\alpha'}\theta, \quad (13.4.3.11a)$$

$$A_{ni} = \sqrt{n}a_{ni}. \quad (13.4.3.11b)$$

Величины A_{ni} удовлетворяют соотношению (13.4.3.3) (с точностью до множителя \sqrt{n}).

Легко проверить, что

$$A_{ni}^* = A_{-ni}. \quad (13.4.3.12)$$

Можно также вывести коммутационные соотношения (см., например, [38])

$$[A_m^i, A_n^j] = m\delta^{ij}\delta_{m, -n}, \quad (13.4.3.13)$$

откуда следует, что 24 поперечных оператора “рождения” A_n^{i*} ($n > 0$) генерируют положительно определенное гильбертово подпространство. Это подпространство изоморфно гильбертову пространству, возникающему при квантовании в световой калибровке.

Упражнение. Вычислите $[P^A, A_n^i]$ и проверьте явно, что A_n^{i*} рождает состояния на массовой поверхности (при действии на такие состояния).

13.4.4. Теорема об отсутствии духов при $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$

При действии операторов A_n^{i*} на вакуум возникают состояния ДДФ. Они удовлетворяют уравнениям

$$K_n|\psi\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (13.4.4.1)$$

¹⁾ Условие $a_n^+ = 0$ не может рассматриваться как операторное уравнение в ковариантном формализме. Поэтому мы и вернулись к классической теории.

вместе с условиями на физические состояния

$$L_n |\psi\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (13.4.4.2)$$

$$(L_0 - 1) |\psi\rangle = 0. \quad (13.4.4.3)$$

Оператор K_n в уравнении (13.4.4.1) является изотропным:

$$K_n = k_A \alpha_n^A = \alpha_n^+ \quad (\alpha_n^A = \sqrt{n} a_n^A \text{ и т. д.}). \quad (13.4.4.4)$$

Свойство (13.4.4.1) просто следует из того факта, что состояния ДДФ не содержат осцилляторов a_n^- и a_n^{*-} .

Операторы K_n обладают следующими свойствами:

$$K_n = K_{-n}^*, \quad [K_m, K_n] = 0, \quad [L_m, K_n] = -n K_{m+n}. \quad (13.4.4.5)$$

Можно показать обратное: уравнения (13.4.4.1) — (13.4.4.3) полностью характеризуют состояния ДДФ — любое решение этих уравнений есть линейная комбинация состояний вида $(A_n^{i_1})^{v_1} (A_n^{i_2})^{v_2} \dots (A_n^{i_n})^{v_n} |0\rangle$ [18].

Иногда удобно рассматривать не только состояния на массовой поверхности, но также состояния, лежащие вне массовой поверхности “на расстоянии”, равном целому числу:

$$(L_0 + l - 1) |\phi\rangle = 0, \quad \text{где } l \text{ — целое число.} \quad (13.4.4.6)$$

Также состояния могут быть получены действием ДДФ-операторов на такое основное состояние, которое не удовлетворяет условию $(L_0 - 1) |0\rangle = 0$, а вместо этого имеет импульс, равный

$$p_0^A + n k_0^A, \quad (13.4.4.7)$$

где n — целое число.

Впоследствии мы будем рассматривать лишь состояния с импульсом, определяемым выражением (13.4.4.7) при некотором n . Эти состояния удовлетворяют условию (13.4.4.6). Легко видеть, что при действии операторов ДДФ, операторов Вирасоро или операторов K_n на состояние (13.4.4.7) мы не выходим за рамки класса, определяемого системой (13.4.4.7) и (13.4.4.6). Кроме того, импульс любого решения уравнения (13.4.4.6) при $l \geq 1$ путем соответствующего преобразования Лоренца может быть представлен в виде (13.4.4.7) с $n < 0$.

Операторы ДДФ являются подходящим расширением поперечных осцилляторов a_n^i . Операторы K_n в точности совпадают с изотропными осцилляторами a_n^+ . Кроме того, поскольку $p \cdot k \neq 0$, вектор p^A содержит компоненту вдоль направления, противоположного изотропному, а это означает, что в первый член L_n входит a_n^- .

Таким образом, не удивительно, что состояния, рождаемые из вакуума операторами A_p^{i*} , K_{-n} и L_{-m} ($n, m, p > 0$), полностью покрывают гильбертово пространство.

Лемма [18]. Любое состояние с импульсом (13.4.4.7) может быть представлено как линейная комбинация состояний вида

$$L_{-1}^{\lambda_1} L_{-2}^{\lambda_2} \dots L_{-n}^{\lambda_n} K_{-1}^{\mu_1} \dots K_{-m}^{\mu_m} |d\rangle, \quad (13.4.4.8)$$

где $|d\rangle$ — состояние, рождаемое операторами ДДФ из вакуума с импульсом (13.4.4.7) (возможно, с другим n).

Доказательство [18]. Из вычислительных соображений доказательство состоит в установлении линейной независимости состояний (13.4.4.8).

Нулевое фиктивное состояние по определению есть физическое состояние, ортогональное всем другим физическим состояниям и, в частности, самому себе. Мы обнаружили такие состояния на первых двух уровнях (для $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$). Как показывает теорема об отсутствии духов, они появляются на всех уровнях.

Теорема об отсутствии духов ($\alpha_0 = 1$, $d = 26$) [18]. Любое физическое состояние $|\psi\rangle$, являющееся решением уравнений $L_n |\psi\rangle = 0$ ($n > 0$) и $(L_0 - 1) |\psi\rangle = 0$, может быть представлено в виде

$$|\psi\rangle = |f\rangle + |ns\rangle, \quad (13.4.4.9)$$

где $|f\rangle$ принадлежит пространству, покрываемому ДДФ-состояниями, а $|ns\rangle$ — нулевое фиктивное состояние.

Доказательство. Предыдущая лемма позволяет записать

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + |s\rangle, \quad (13.4.4.10)$$

где $|\phi\rangle$ — состояние (13.4.4.8) с $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ (входят только операторы K_{-n} , если вообще входят), а $|s\rangle$ — состояние (13.4.4.8) по крайней мере с одним L_{-n} . Поскольку $(L_0 - 1) |\psi\rangle = 0$, оба состояния $|\phi\rangle$ и $|s\rangle$, являющиеся независимыми, принадлежат массовой поверхности.

Ключевой момент доказательства состоит в том, чтобы показать, что $|\phi\rangle$ и $|s\rangle$ — физические состояния:

$$L_n |\phi\rangle = 0 = L_n |s\rangle, \quad n > 0. \quad (13.4.4.11)$$

Величины L_n с положительными n генерируются из L_1 и L_2 , поэтому достаточно показать, что $L_1 |\phi\rangle = L_2 |\phi\rangle = L_1 |s\rangle = L_2 |s\rangle = 0$, или, что то же самое, $L_1 |\phi\rangle = \tilde{L}_2 |\phi\rangle = L_1 |s\rangle =$

$= \tilde{L}_2 |s\rangle = 0$. Здесь \tilde{L}_2 определяется выражением

$$\tilde{L}_2 = L_2 + \frac{3}{2} L_1^2. \quad (13.4.4.12)$$

По построению имеем

$$|s\rangle = L_{-1} |s_0\rangle + \tilde{L}_{-2} |s_{-1}\rangle, \quad (13.4.4.13)$$

поскольку L_{-n} ($n \geq 1$) генерируются из L_{-1} и L_{-2} . Кроме того, из алгебры L_n следует, что

$$L_0 |s_0\rangle = 0, \quad L_0 |s_{-1}\rangle = -|s_{-1}\rangle. \quad (13.4.4.14)$$

Отсюда получаем

$$L_1 |s\rangle = |s'\rangle, \quad (13.4.4.15a)$$

$$\tilde{L}_2 |s\rangle = |s''\rangle + \left(\frac{1}{2}d - 13\right) |s_{-1}\rangle, \quad (13.4.4.15b)$$

где $|s'\rangle$ и $|s''\rangle$ — состояния вида (13.4.4.8) по крайней мере с одним L_{-n} . (Например, $|s'\rangle = L_{-1}L_1 |s_0\rangle + \tilde{L}_{-2}L_1 |s_{-1}\rangle$.) Для $d = 26$ второй член в правой части уравнения (13.4.4.15b) исчезает, и $\tilde{L}_2 |s\rangle$ сводится к $|s''\rangle$.

Но $L_1 |\phi\rangle$ и $\tilde{L}_2 |\phi\rangle$ — состояния вида (13.4.4.8) вообще без L_{-n} . Действительно, L_1 и \tilde{L}_2 можно перемещать вправо от операторов K_{-m} в выражении для $|\phi\rangle$, не порождая при этом L_{-n} ($[L_n, K_m] \sim K_{n+m}$) до тех пор, пока L_1 и \tilde{L}_2 не достигнут состояния $|d\rangle$ и не уничтожат его.

Из этого замечания и линейной независимости состояний (13.4.4.8) с различными степенными показателями следует, что $L_1 |s\rangle$ и $L_1 |\phi\rangle$ линейно независимы, как и $\tilde{L}_2 |s\rangle$ и $\tilde{L}_2 |\phi\rangle$. Однако, поскольку $L_1 |\psi\rangle = \tilde{L}_2 |\psi\rangle = 0$, из уравнения (13.4.4.10) следует, что $|\phi\rangle$ и $|s\rangle$ удовлетворяют тем же уравнениям. Отсюда вытекает соотношение (13.4.4.11).

Зная теперь, что $|\phi\rangle$ и $|s\rangle$ являются физическими состояниями, легко непосредственно довести до конца доказательство теоремы. Состояние $|\phi\rangle$ удовлетворяет соотношению $K_n |\phi\rangle = 0$, поскольку операторы K_n коммутируют. Следовательно, оно является состоянием ДДФ, поскольку последние полностью характеризуются уравнениями (13.4.4.1), (13.4.4.2) и (13.4.4.3) [18]. (Иными словами, в выражении (13.4.4.8) для $|\phi\rangle$ все μ_i и λ_i равны нулю.) Кроме того, вследствие уравнения (13.4.4.13) состояние $|s\rangle$ является физическим состоянием, которое отщепляется от всех физических состояний:

$$\langle s_0 | L_{-1} |\psi\rangle = \langle s_0 | L_1 |\psi\rangle = 0 \text{ и т. д.};$$

следовательно, оно действительно является нулевым фиктивным состоянием.

Поскольку подпространство ДДФ обладает положительно определенным внутренним произведением, из этой теоремы следует, что $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$.

Упражнение. Докажите соотношения (13.4.4.15a) и (13.4.4.15b).

13.4.5. Квантовая калибровочная инвариантность

Теорема об отсутствии духов устанавливает, что фактор-пространство физического подпространства по нулевым фиктивным состояниям изоморфно гильбертову пространству, содержащему только поперечные возбуждения. Следовательно, метод калибровки светового конуса и ковариантный метод эквивалентны.

Дополнение физических состояний нулевыми фиктивными состояниями есть квантовый аналог калибровочной инвариантности классической теории. Оно подразумевает возможность полной формулировки квантовой теории в терминах одних лишь состояний ДДФ, или, что эквивалентно с точки зрения изоморфизма между состояниями ДДФ и состояниями метода световой калибровки, возможность наложения калибровки светового конуса квантовомеханически.

Этот результат имеет место только при $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$. При $d \leq 25$ и $\alpha_0 \leq 1$ физическое подпространство все еще положительно определено, но оно не содержит достаточного количества нулевых фиктивных состояний. Состояния ДДФ больше не характеризуют полностью физическое подпространство. В результате квантовая теория обладает большим числом степеней свободы, чем классическая теория. Условий $L_n |\psi\rangle = 0$ ($n > 0$) и $(L_0 - 1) |\psi\rangle = 0$ не достаточно, чтобы обеспечить полную репараметризационную инвариантность на квантовом уровне.

Таким образом, мы видим, что, несмотря на то, что для других значений размерности пространства-времени и интерсепта духи могут отсутствовать, критические значения $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$ представляют собой особый случай.

Следует отметить, что нулевые физические состояния $|ns\rangle$ ковариантного подхода фактически являются не чем иным, как особыми нулевыми состояниями $\Omega |\chi\rangle$ БРСТ-подхода. Действительно, выше мы подчеркнули, что БРСТ-калибровочные условия $c_n |0\rangle = \mathcal{P}_n |0\rangle = 0$ (вакуум БРСТ-духов) допускают остаточную "калибровочную группу" $|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle + \Omega |\chi\rangle$ с подходящими векторами $|\chi\rangle$. Эти остаточные преобразования соответствуют добавлению нулевых фиктивных состояний. Как было упомянуто, для полной фиксации БРСТ-калибровки необходимо потребо-

вать, чтобы состояния $|P_1\rangle$ и $|P_2\rangle$ в решении (13.2.6.18) были поперечными, а именно состояниями ДДФ.

Заметим, наконец, что лоренцева инвариантность в ковариантном подходе является явной, поскольку ковариантные лоренцевы генераторы удовлетворяют соотношениям алгебры Лоренца и коммутируют с L_n .

Но состояния ДДФ не являются явно лоренц-инвариантными, так как для их определения необходимо выделять определенный d -вектор k_0^A . Поэтому ковариантные лоренцевы генераторы не отображают ДДФ-подпространство на себя; вместо этого они также порождают неисчезающие нулевые состояния. Можно определить “улучшенные” лоренцевы генераторы, действие которых не приводит к этим нулевым состояниям. Эти генераторы, полностью определенные в ДДФ-подпространстве, являются в точности лоренцевыми генераторами метода световой калибровки (где $a_n^i \rightarrow A_n^i$).

Упражнение. Теорема об отсутствии духов при $d \leq 25$, $\alpha_0 = 1$.

а. Покажите, что физическое подпространство при $d \leq 25$, $\alpha_0 = 1$ может быть реализовано как подпространство физического подпространства при $d = 26$, $\alpha_0 = 1$.

б. Покажите, что при $d \leq 25$ и $\alpha_0 = 1$ среди решений уравнений $L_n|\psi\rangle = 0$ ($n > 0$), $(L_0 - 1)|\psi\rangle = 0$ отсутствуют состояния с отрицательной нормой.

Фермионная струна: классический анализ

14.1. Локальная суперсимметрия в двух измерениях

Негативная черта бозонной модели заключается в присутствии в спектре тахиона, нарушающего причинность.

Появление тахиона в спектре вызывается положительностью интерсепта α_0 . Интерсепт связан с неоднозначностью упорядочения в L_0 , т. е. с нулевой энергией [41], поэтому естественно искать суперсимметричные модели с равным числом бозонных и фермионных переменных. Действительно, общим свойством суперсимметрии является тенденция к сокращению нежелательных эффектов суперсимметричными партнерами, так что при подходящем введении антикоммутирующих степеней свободы можно удовлетворить условию $\alpha_0 = 0$.

В настоящее время суперсимметрия представляет собой уже весьма старый раздел теории поля и не нуждается в дополнительной мотивировке.

Существуют априори два различных способа введения суперсимметрии в модели струн.

1. Бозонная струна может рассматриваться как двумерная теория поля, описывающая d скалярных полей, связанных с гравитацией. Эта теория инвариантна при двумерной замене координат. Данную симметрию можно расширить до двумерной локальной суперсимметрии путем введения суперсимметричных партнеров ψ_λ и Γ^A для метрики $g_{\alpha\beta}$ и скалярных полей X^A . Здесь ψ_λ — двумерное поле “спина $3/2$ ”, а Γ^A — d -мерный вектор/ 2 -мерный спинор. Оказывается, что все степени свободы переносятся “материальным супермультиплетом” (X^A, Γ^A). Калибровочное поле супергравитации ($g_{\alpha\beta}, \psi_\lambda$) в двух измерениях является чистой калибровкой. Такой подход приводит к модели Неве — Шварца — Рамона [41, 43] (двумерная суперсимметрия этих моделей исследовалась в работе [43a]).

2. Бозонная струна инвариантна относительно глобальных преобразований Пуанкаре в d измерениях. Можно расширить эту симметрию до глобальной инвариантности относительно действия супергруппы Пуанкаре (т. е. градуированного расширения группы Пуанкаре). Это приводит к суперструне Грина и Шварца [44].

Достаточно неожиданно, что первый подход приводит (при подходящем усечении) к той же теории, что и второй. Но то, что выглядит очевидным в новом формализме Грина и Шварца [44], а именно глобальная суперсимметрия, не кажется столь очевидным в старом формализме. С другой стороны, двумерная локальная суперсимметрия, также играющая ключевую роль, недостаточно очевидна в случае суперструны. Хорошо было бы иметь формализм, в котором оба типа суперсимметрии присутствовали очевидным образом.

В этой и в следующих главах мы исследуем фермионную струну Невё, Шварца и Рамона. Суперструна рассматривается в гл. 16.

Модель Невё — Рамона — Шварца является теорией $N = 1$ -супергравитации; она может быть получена двумя различными способами.

1. Можно применить методы супергравитации [45]. Эти методы естественно приводят к рассмотрению расширенных моделей с $N = 2$ или $N = 4$ [46] (эти модели здесь рассматриваться не будут, так как их критические размерности $d = 2$ ($N = 2$) или $d = -2$ ($N = 4$)).

2. С другой стороны, можно сосредоточиться на рассмотрении связей Вирасоро, играющих, как было показано, важную роль в бозонном случае, и попытаться “извлечь из них квадратный корень”, чтобы получить модель со связями, образующими градуированное расширение алгебры Вирасоро (супералгебру Вирасоро).

Здесь применяется второй подход [47] (процедура “извлечения квадратного корня” применительно к $d = 4$ -супергравитации рассмотрена в работе [47a]). Напомним, что, применяя эту процедуру к условию массовой поверхности $p^2 + m^2 = 0$ для свободной релятивистской частицы, мы получаем уравнение Дирака.

14.2. Суперконформная алгебра

14.2.1. Квадратный корень из бозонных и фермионных связей

Мы показали, что конформная алгебра является первым прямым произведением двух групп одномерных диффеоморфизмов. Структура этого прямого произведения проявляется в виде генераторов $Q^+(\sigma)$ и $Q^-(\sigma)$:

$$Q^+(\sigma) = P_A P^A = 2\pi(\mathcal{H} + \mathcal{H}_1), \quad (14.2.1.1)$$

$$Q^-(\sigma) = S_A S^A = 2\pi(\mathcal{H} - \mathcal{H}_1). \quad (14.2.1.2)$$

Здесь мы положили

$$P_A(\sigma) = \pi \sqrt{2\alpha'} \mathcal{P}_A(\sigma) + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} X'_A(\sigma), \quad (14.2.1.3)$$

$$S_A(\sigma) = \pi \sqrt{2\alpha'} \mathcal{P}_A(\sigma) - \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} X'_A(\sigma). \quad (14.2.1.4)$$

Следовательно,

$$[P_A(\sigma), P_B(\sigma')] = 2\pi\eta_{AB}\delta'(\sigma, \sigma'), \quad (14.2.1.5a)$$

$$[P_A(\sigma), S_B(\sigma')] = 0, \quad (14.2.1.5b)$$

$$[S_A(\sigma), S_B(\sigma')] = -2\pi\eta_{AB}\delta'(\sigma, \sigma'). \quad (14.2.1.5b)$$

(Функция $P_A(\sigma)$, определенная здесь, отличается от функции $P_A(\sigma)$ в разд. 13.4.2 простым численным множителем.)

Введем теперь новые вещественные фермионные (т. е. антикоммутирующие) переменные $\Gamma_i^A(\sigma)$ и новые фермионные генераторы-связи $\mathcal{P}_i(\sigma)$ ($i = 1, 2$ — спинорный индекс в двух измерениях) так, чтобы при антикоммутации $\mathcal{P}_i(\sigma)$ давали гамильтоновы связи $Q^\pm(\sigma)$.

Проще всего выбрать ¹⁾

$$[\Gamma_i^A(\sigma), \Gamma_j^B(\sigma')] = -4\pi i \eta^{AB} \delta_{ij} \delta(\sigma, \sigma') \quad (14.2.1.6)$$

и определить

$$\mathcal{P}_1(\sigma) = \Gamma_1^A(\sigma) P_A(\sigma), \quad (14.2.1.7a)$$

$$\mathcal{P}_2(\sigma) = \Gamma_2^A(\sigma) S_A(\sigma). \quad (14.2.1.7b)$$

Непосредственно вычисление дает

$$[\mathcal{P}_1(\sigma), \mathcal{P}_1(\sigma')] = -4\pi i \left(P_A P^A + \frac{i}{2} \Gamma_1^A \frac{d\Gamma_{1A}}{d\sigma} \right) \delta(\sigma, \sigma'), \quad (14.2.1.8a)$$

$$[\mathcal{P}_2(\sigma), \mathcal{P}_2(\sigma')] = -4\pi i \left(S_A S^A - \frac{i}{2} \Gamma_2^A \frac{d\Gamma_{2A}}{d\sigma} \right) \delta(\sigma, \sigma'), \quad (14.2.1.8b)$$

$$[\mathcal{P}_1(\sigma), \mathcal{P}_2(\sigma')] = 0. \quad (14.2.1.8b)$$

Правая часть системы (14.2.1.8) не принимает желаемый вид, если не переопределить $Q^+(\sigma)$ и $Q^-(\sigma)$ в виде

$$Q^+(\sigma) = P_A P^A + \frac{i}{2} \Gamma_1^A \frac{d\Gamma_{1A}}{d\sigma}, \quad (14.2.1.9a)$$

$$Q^-(\sigma) = S_A S^A - \frac{i}{2} \Gamma_2^A \frac{d\Gamma_{2A}}{d\sigma}. \quad (14.2.1.9b)$$

¹⁾ Скобки Пуассона (14.2.1.6) симметричны, как и должно быть для фермионных переменных. Они мнимы, так как переменные $\Gamma_i^A(\sigma)$ вещественны.

Генераторы $Q^+(\sigma)$ и $Q^-(\sigma)$ принимают корректный вид за счет фермионных переменных. Модифицированная форма выражений (14.2.1.9) выглядит физически оправданной, если вспомнить, что $Q^+(\sigma)$ и $Q^-(\sigma)$ являются изотропными компонентами T^{++} и T^{--} тензора энергии-импульса. Поэтому естественно появление вклада фермионных степеней свободы в $T^{\alpha\beta}$.

Реальный способ установить правильность выражений (14.2.1.9) состоит в проверке того, что $Q^\pm(\sigma)$ и $\mathcal{P}_i(\sigma)$ образуют замкнутую (градуированную) алгебру. (Символы $Q^\pm(\sigma)$ теперь будут обозначать выражения (14.2.1.9).) Легко видеть, что это требование выполнено, так как имеет место не только соотношение

$$[\mathcal{P}_1(\sigma), \mathcal{P}_1(\sigma')] = -4\pi i Q^+(\sigma) \delta(\sigma, \sigma') \quad (14.2.1.10a)$$

(соотношение (14.2.1.8a)), но также соотношения

$$[Q^+(\sigma), \mathcal{P}_1(\sigma')] = 2\pi(2\mathcal{P}_1(\sigma) + \mathcal{P}_1(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (14.2.1.10б)$$

$$[Q^+(\sigma), Q^+(\sigma')] = 4\pi(Q^+(\sigma) + Q^+(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'). \quad (14.2.1.10в)$$

Следовательно, генераторы-связи $\mathcal{P}_1(\sigma)$ и $Q^+(\sigma)$ образуют систему первого рода. Аналогично оказывается, что $\mathcal{P}_1(\sigma)$ и $Q^+(\sigma)$ имеют нулевые скобки с $\mathcal{P}_2(\sigma)$ и $Q^-(\sigma)$ и

$$[\mathcal{P}_2(\sigma), \mathcal{P}_2(\sigma')] = -4\pi i Q^-(\sigma) \delta(\sigma, \sigma'), \quad (14.2.1.11a)$$

$$[Q^-(\sigma), \mathcal{P}_2(\sigma')] = -2\pi(2\mathcal{P}_2(\sigma) + \mathcal{P}_2(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'), \quad (14.2.1.11б)$$

$$[Q^-(\sigma), Q^-(\sigma')] = -4\pi(Q^-(\sigma) + Q^-(\sigma')) \delta'(\sigma, \sigma'). \quad (14.2.1.11в)$$

Заметим, что скобки $[Q^\pm(\sigma), Q^\pm(\sigma')]$ остаются без изменения.

Из этого анализа следует, что можно согласованно наложить условия

$$Q^\pm(\sigma) = 0 = \mathcal{P}_i(\sigma). \quad (14.2.1.12)$$

Соотношения (14.2.1.10) и (14.2.1.11) определяют ($N=1$)-градуированное расширение конформной алгебры, известное также как суперконформная алгебра. Генераторы-связи $\mathcal{P}_i(\sigma)$ и $Q^\pm(\sigma)$ и супералгебра (14.2.1.10) и (14.2.1.11) полностью характеризуют фермионную модель струны.

Метод квадратного корня весьма эффективен при получении гамильтоновых связей, характеризующих фермионную модель струны (в описанном выше "непрерывном" представлении они впервые были получены Ивасаки и Киккавой [48]).

Величины $Q^\pm(\sigma)$ и $\mathcal{P}_i(\sigma)$ можно было бы получить методами супергравитации следующим образом. Лагранжиан $N=1$ -супергравитации, связанный с суперсимметричным материальным

мультиплетом (X^A, Γ^A) , задается выражением [45]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \eta_{\alpha\beta} e \left\{ g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B - e_\alpha^a \bar{\Gamma}^A \rho^a \partial_\alpha \Gamma^B - \right. \\ \left. - 2e_\alpha^a e_b^\beta \bar{\psi}_\alpha \rho^b \rho^a \Gamma^A \left(\partial_\beta X^B + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^B \psi_\beta \right) \right\}, \quad (14.2.1.13)$$

где ρ^a — двумерные γ -матрицы, e_α^a — компоненты двумерной тетрады, e — детерминант $e_\alpha^a (= \sqrt{-g})$, а γ_α — суперсимметричный партнер спина 3/2 для $g_{\alpha\beta}$, d материальных мультиплетов содержат поля спина 0 и спина 1/2 (в двух измерениях).

Действие (14.2.1.13) обладает многими симметриями:

- 1) локальной суперсимметрией и инвариантностью (относительно замены двумерных координат);
- 2) локальной вейлевской и “супервейлевской” инвариантностью¹⁾

$$X^A \rightarrow X^A, \quad \Gamma^A \rightarrow \Lambda^{-1/2} \Gamma^A, \\ e_\alpha^a \rightarrow \Lambda e_\alpha^a, \quad \psi_\alpha \rightarrow \Lambda^{1/2} \psi_\alpha + \rho_\alpha \Phi; \quad (14.2.1.14)$$

- 3) локальными двумерными лоренцевыми вращениями тетрады;

- 4) глобальной пуанкаре-инвариантностью (при этом Γ^A — d -вектор); действие не является глобально суперсимметричным (в d измерениях).

Вследствие калибровочной инвариантности и отсутствия кинетических членов для “гравитона” и “гравитино” преобразование Лежандра сингулярно. Для получения гамильтониана необходимо применять метод Дирака. Эта процедура аналогична той, которая использовалась в случае бозонной струны.

После использования подходящего упрощения формализма (и подхода работы [49]) гамильтониан принимает вид

$$H = \int d\sigma (N \mathcal{H} + N^1 \mathcal{H}_1 + \bar{M} \mathcal{P}), \quad (14.2.1.15)$$

где связи $\mathcal{H} = 0$, $\mathcal{H}_1 = 0$ и $\mathcal{P}_i = 0$ генерируют соответственно репараметризации (\mathcal{H} и \mathcal{H}_1) и локальные преобразования суперсимметрии (\mathcal{P}_i). В выражении (14.2.1.15) локальная лоренцева калибровка фиксирована требованием ортогональности одного из тетрадных направлений линиям $\tau = \text{const}$.

Остаются канонические переменные $X^A(\sigma)$, $\mathcal{P}^A(\sigma)$ и двумерные спиноры $\Gamma^A(\sigma) \equiv (\Gamma_i^A(\sigma))$, удовлетворяющие соотношениям

¹⁾ Вследствие инвариантности (14.2.1.14) связи $T_{\alpha\beta} = 0$ и $J_\alpha = 0$ (нулевой суперток) не являются независимыми. Оказывается, что $T_\alpha^a + 1/2 J_\alpha \psi^a = 0$ (в соответствии с уравнениями движения для Γ^A) и $J_\alpha \rho^a = 0$.

(14.2.1.6)¹⁾. Связи $\mathcal{H}(\sigma)$ и $\mathcal{H}_1(\sigma)$ следующим образом соотносятся с $Q^\pm(\sigma)$:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} (Q^+ + Q^-), \quad (14.2.1.16a)$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{4\pi} (Q^+ - Q^-), \quad (14.2.1.16b)$$

а фермионная связь \mathcal{P} обозначает $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. Наконец, фермионный лагранжев множитель M равен ψ_0 .

Этим завершается все, что следует сказать по поводу вывода гамильтониана из лагранжиана (14.2.1.13). В самом деле, мы уже получали описанный выше гамильтониан путем применения метода извлечения квадратного корня, непосредственно дающего канонические генераторы в терминах только динамических переменных. Подчеркнем также, что нет необходимости фиксировать локальные суперсимметрии или репараметризации, чтобы получить выражения (14.2.1.7) и (14.2.1.9) для генераторов-связей \mathcal{H} , \mathcal{H}_1 и \mathcal{P}_i .

Упражнения

1. Получите связи \mathcal{H} , \mathcal{H}_1 и \mathcal{P}_i из лагранжиана.
2. Сравните спинорные члены в \mathcal{H} и \mathcal{H}_1 с компонентами тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}(\Gamma)$.
3. Вычислите $\left[\Gamma_i^A(\sigma), \int d\sigma' \mathcal{H}_1(\sigma') N^1(\sigma') \right]$ и покажите, что $\Gamma_i^A(\sigma)$ действительно имеет вес $1/2$.
4. Вычислите кинетический член в каноническом действии, воспроизводящем скобки (14.2.1.6).

14.2.2. Граничные условия

Мы примем, что бозонные переменные $X^A(\sigma)$, $\mathcal{P}_A(\sigma)$, $N(\sigma)$ и $N^1(\sigma)$ удовлетворяют тем же граничным условиям, что и ранее. Мы хотим определить поведение $\Gamma_i^A(\sigma)$ на концах струны.

14.2.2a. Открытая струна

Граничные условия для $\Gamma_i^A(\sigma)$ должны быть такими, чтобы функционалы $\int_0^\pi N \mathcal{H} d\sigma$, $\int_0^\pi N^1 \mathcal{H}_1 d\sigma$ и $\int_0^\pi \bar{M} \mathcal{P} d\sigma$ были хорошо определены как генераторы, т. е. не порождали бы при вариациях “поверхностных членов” при $\sigma = 0, \pi$.

¹⁾ Отметим, что в каноническом формализме $\Gamma^A(\sigma)$ входит с множителем $g_{11}^{1/4} \left(\Gamma_{\text{кан}}^A = g_{11}^{1/4} \Gamma_{\text{Лагр}}^A \right)$.

Вычислим $\delta \int_0^\pi N \mathcal{H} d\sigma$. Получается граничный член

$$N (\Gamma_{1A} \delta \Gamma_1^A - \Gamma_{2A} \delta \Gamma_2^A) \Big|_0^\pi. \quad (14.2.2.1)$$

Чтобы уничтожить этот член, можно было бы положить $\Gamma_{iA}(\sigma) = 0$ на концах. Но это условие является слишком сильным. Действительно, можно показать, что для того, чтобы подержать (во времени) условия Γ_{iA} (в конечных точках) $= 0$, должны обращаться в нуль на концах все производные от Γ_{iA} (использование уравнений движения для Γ). Следовательно, нужно сделать что-то другое.

Поскольку $N(0)$ и $N(\pi)$ независимы, единственная возможность состоит в том, чтобы связать Γ_1^A и Γ_2^A на границах. Рассматривались два различных варианта:

$$\Gamma_1^A(0) = \Gamma_2^A(0), \quad \Gamma_1^A(\pi) = \Gamma_2^A(\pi) \quad (\text{Рамон}), \quad (14.2.2.2)$$

и

$$\Gamma_1^A(0) = \Gamma_2^A(0), \quad \Gamma_1^A(\pi) = -\Gamma_2^A(\pi) \quad (\text{Невё — Шварц}). \quad (14.2.2.3)$$

(Легко проверить, что играет роль лишь относительный знак при 0, π .) Первый выбор соответствует модели Рамона, второй — модели Невё — Шварца.

При наложении условий (14.2.2.2) граничный член (14.2.2.1) обращается в нуль. Кроме того, не возникает проблем с генератором $\int_0^\pi N^1 \mathcal{H}_1 d\sigma$, поскольку N^1 обращается в нуль на концах струны. Наконец, из $\delta \int_0^\pi \bar{M} \mathcal{P} d\sigma$ видно, что параметр суперкалибровки должен быть ограничен в соответствии с условиями

$$\begin{aligned} M^1 &= M^2 && \text{при } \sigma = 0, \\ M^1 &= M^2(P) \text{ или } M^1 = -M^2(\text{НШ}) && \text{при } \sigma = \pi. \end{aligned} \quad (14.2.2.4)$$

Можно снова суммировать условия (14.2.2.2) и (14.2.2.3) путем расширения интервала $[0, \pi]$ до $[-\pi, \pi]$. Определим

$$\Gamma^A(\sigma) = \begin{cases} \Gamma_1^A(\sigma), & 0 \leq \sigma \leq \pi, \\ \Gamma_2^A(-\sigma), & -\pi \leq \sigma \leq 0. \end{cases} \quad (14.2.2.5)$$

Поскольку $\Gamma_1^A(0) = \Gamma_2^A(0)$, величина $\Gamma^A(\sigma)$ непрерывна при $\sigma = 0$. (В действительности из сохранения во времени граничных условий за счет уравнений движения следует $\Gamma_1^{A(n)}(0) = (-1)^n \Gamma_2^{A(n)}(0)$ для всех n , так что все производные сшиваются.) Видно далее, что величина $\Gamma^A(\sigma)$, определяемая условиями (14.2.2.5), в случае граничных условий Рамона периодична с периодом 2π .

В случае граничных условий Невё — Шварца $\Gamma^A(\sigma)$ антипериодична ($\Gamma^A(\sigma + 2\pi) = -\Gamma^A(\sigma)$).

Если функции

$$Q^+(\sigma) = P^2 + \frac{1}{2} i \Gamma^A \frac{d\Gamma^A}{d\sigma}, \quad -\pi \leq \sigma \leq \pi, \quad (14.2.2.6a)$$

$$\mathcal{P}(\sigma) = \Gamma^A(\sigma) P_A(\sigma), \quad -\pi \leq \sigma \leq \pi, \quad (14.2.2.6b)$$

ввести на всем интервале $[-\pi, +\pi]$, то условия $Q^+(\sigma) = Q^-(\sigma) = 0 = \mathcal{P}_i(\sigma)$ на интервале $[0, \pi]$ можно заменить условиями

$$Q^+(\sigma) = 0 = \mathcal{P}(\sigma), \quad -\pi \leq \sigma \leq \pi, \quad (14.2.2.7)$$

на интервале $[-\pi, +\pi]$.

14.2.2б. Замкнутая струна

Анализ для случая открытой струны показывает, что следует рассматривать как периодические, так и антипериодические функции $\Gamma_i^A(\sigma)$. Такой подход приводит к следующим трем возможностям [38, 50]:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1^A(\sigma = 0) &= \Gamma_1^A(\sigma = 2\pi), \\ \Gamma_2^A(\sigma = 0) &= \Gamma_2^A(\sigma = 2\pi); \end{aligned} \right\} \quad (14.2.2.8a)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1^A(\sigma = 0) &= -\Gamma_1^A(\sigma = 2\pi), \\ \Gamma_2^A(\sigma = 0) &= \Gamma_2^A(\sigma = 2\pi); \end{aligned} \right\} \quad (14.2.2.8b)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1^A(\sigma = 0) &= -\Gamma_1^A(\sigma = 2\pi), \\ \Gamma_2^A(\sigma = 0) &= -\Gamma_2^A(\sigma = 2\pi). \end{aligned} \right\} \quad (14.2.2.8в)$$

Суперкалибровочные параметры $\varepsilon_1(\sigma)$ и $\varepsilon_2(\sigma)$ должны быть ограничены аналогичным образом. При выполнении этих условий гамильтониан является согласованным генератором (“концевые члены” при $\sigma = 0$ и 2π исчезают).

14.2.3. Суперкалибровочные преобразования — калибровочные условия светового конуса

Связи $\mathcal{P}(\sigma) = 0$ генерируют локальные преобразования суперсимметрии, или, как они еще называются, “суперкалибро-

вочные" преобразования. Эти преобразования имеют вид

$$\delta\Gamma_1^A(\sigma) = \left[\Gamma_1^A(\sigma), \int \varepsilon^1(\sigma') \Gamma_1^B(\sigma') P_B(\sigma') d\sigma' \right] = 4\pi i \varepsilon^1(\sigma) P^A(\sigma), \quad (14.2.3.1)$$

$$\delta\Gamma_2^A(\sigma) = 4\pi i \varepsilon^2(\sigma) S^A(\sigma), \quad (14.2.3.2)$$

$$\delta X^A(\sigma) = \pi \sqrt{2} \alpha' \varepsilon^i(\sigma) \Gamma_i^A(\sigma), \quad (14.2.3.3)$$

$$\delta P_A(\sigma) = 2\pi (-\varepsilon^1 \Gamma_{A1} + \varepsilon^2 \Gamma_{A2})'. \quad (14.2.3.4)$$

Световая калибровка определяется как и ранее условиями $X^+ \sim p^+\tau$, $\mathcal{P}^{+'} = 0$. Нужно фиксировать также суперкалибровку, для которой в качестве калибровочных условий выбирают

$$\Gamma_i^+(\sigma) = 0. \quad (14.2.3.5)$$

В уравнении (14.2.3.5) содержится столько условий, сколько имеется суперкалибровочных параметров. Кроме того, поскольку $\Gamma_i^+ = 0$, нельзя более производить суперкалибровочные преобразования, не нарушая условия (14.2.3.5) (если считать, что $p^+ \neq 0$). Суперкалибровка полностью фиксирована.

Напомним, что условия $X^+ \sim p^+\tau$ и $\mathcal{P}^{+'} = 0$ в случае замкнутой струны все еще допускают наличие нулевой моды трансляций по σ .

Упражнение. Покажите, что на концах имеется достаточно свободы, чтобы удовлетворить уравнению (14.2.3.5).

14.2.4. Генераторы Пуанкаре

Переменные X^A и Γ_i^A являются лоренцевыми векторами, поэтому можно непосредственно записать лоренцевы генераторы:

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} (\mathcal{P}_A X_B - \mathcal{P}_B X_A) d\sigma - \frac{1}{8\pi i} \int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} \sum_i \Gamma_{Ai} \Gamma_{Bi} d\sigma. \quad (14.2.4.1)$$

Легко проверить, что скобки $\{\Gamma_{Ai}(\sigma) M_{BC}\}$ дают правильный закон преобразования для $\Gamma_{Ai}(\sigma)$. Кроме того, генераторы трансляций не изменяются:

$$P^A = \int_0^{\pi \text{ или } 2\pi} \mathcal{P}^A(\sigma) d\sigma, \quad (14.2.4.2)$$

поскольку при пространственно-временных трансляциях меняются только $X^A(\sigma)$ ($\delta\Gamma_i^A = 0$).

14.3. Фурье-моды (открытая струна)

14.3.1. Фурье-разложение полей

Бозонные поля удовлетворяют тем же граничным условиям, что и в бозонной модели. Следовательно, фурье-разложения для них остаются теми же.

Фурье-разложение фермионного поля $\Gamma^A(\sigma)$ зависит от того, является ли $\Gamma^A(\sigma)$ периодичным или антипериодичным.

14.3.1a. Модель Рамона

Функция $\Gamma^A(\sigma)$ периодична, и мы принимаем, что

$$\Gamma^A(\sigma) = \sum_m \Gamma_m^A \exp - im\sigma, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14.3.1.1)$$

Поле $\Gamma^A(\sigma)$ вещественно, поэтому

$$\Gamma_m^{A*} = \Gamma_{-m}^A. \quad (14.3.1.2)$$

Отсюда следует, что нулевая мода является самосопряженной. Кроме того, скобки Пуассона имеют вид

$$[\Gamma_m^A, \Gamma_{m'}^B] = -2i\eta^{AB} \delta_{m, -m'}. \quad (14.3.1.3)$$

14.3.1б. Модель Невё — Шварца

Функция $\Gamma^A(\sigma)$ теперь антипериодична, поэтому фурье-разложение содержит только полуцелые моды:

$$\Gamma^A(\sigma) = \sqrt{2} \sum_s b_s^A \exp - is\sigma, \quad s = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots \quad (14.3.1.4)$$

Оно не включает нулевую моду.

Легко получить соотношения для скобок Пуассона

$$[b_r^A, b_s^B] = -i\eta^{AB} \delta_{r, -s}, \quad (14.3.1.5)$$

$$b_s^{A*} = b_{-s}^A. \quad (14.3.1.6)$$

14.3.2. Супергенераторы Вирасоро

Определим

$$L_n = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\sigma e^{in\sigma} Q^+(\sigma), \quad (14.3.2.1)$$

$$G_s = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{+\pi} d\sigma e^{is\sigma} \mathcal{P}(\sigma) \quad (\text{Невё — Шварц}), \quad (14.3.2.2)$$

$$F_n = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{+\pi} d\sigma e^{in\sigma} \mathcal{P}(\sigma) \quad (\text{Рамон}). \quad (14.3.2.3)$$

В терминах фурье-мод супергенераторы Вирасоро L_n , G_r и F_n задаются выражениями

$$L_n = L_n^{\text{бозоны}} + \frac{1}{2} \sum_{s \geq 1/2} (2s+n) b_s^* b_{A_{n+s}} + \frac{1}{2} \sum_{s=1/2}^{n-1/2} s b_{n-s}^A b_{As} \quad (n > 0), \quad (14.3.2.4a)$$

$$L_{-n} = L_n^*, \quad (14.3.2.4б)$$

$$L_0 = L_0^{\text{бозоны}} + \sum_{s>0} s b_s^* b_{As}, \quad (14.3.2.4в)$$

$$G_r = \sqrt{2\alpha'} b_r^A p_A - i \sum_{0 < n < r} \sqrt{n} b_{r-n}^A a_{An} - \\ - i \sum_{n > r} \sqrt{n} b_{n-r}^{*A} a_{An} + i \sum_{n>0} \sqrt{n} b_{n+r}^A a_{An}^* \quad (r > 0), \quad (14.3.2.5a)$$

$$G_{-r} = G_r^* \quad (14.3.2.5б)$$

для модели Невё — Шварца и выражениями

$$L_n = L_n^{\text{бозоны}} + \frac{1}{4} \sum_{k>0} (2k+n) \Gamma_k^* \Gamma_{A_{n+k}} + \\ + \frac{1}{4} \sum_{k < n} k \Gamma_{n-k}^A \Gamma_{Ak} + \frac{1}{4} n \Gamma_0^A \Gamma_{An} \quad (n > 0), \quad (14.3.2.6a)$$

$$L_{-n} = L_n^*, \quad (14.3.2.6б)$$

$$L_0 = L_0^{\text{бозоны}} + \frac{1}{2} \sum_{k>0} k \Gamma_k^* \Gamma_{Ak}, \quad (14.3.2.6в)$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2\alpha'} \Gamma_n^A p_A - i \sum_{0 < k \leq n} \sqrt{k} \Gamma_{n-k}^A a_{Ak} - \right. \\ \left. - i \sum_{k>n} \sqrt{k} \Gamma_{k-n}^{*A} a_{Ak} + i \sum_{k>0} \sqrt{k} a_{Ak}^* \Gamma_{k+n}^A \right] \quad (n > 0), \quad (14.3.2.7a)$$

$$F_{-n} = F_n^*, \quad (14.3.2.7б)$$

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2\alpha'} \Gamma_0^A p_A - i \sum_{k>0} \sqrt{k} \Gamma_k^* a_{Ak} + i \sum_{k>0} a_{Ak}^* \Gamma_{Ak} \right) \quad (14.3.2.7в)$$

для модели Рамона.

Супергенераторы Вирасоро замыкаются классически в соответствии со следующей (градуированной) алгеброй скобок Пу-

ассона:

$$[G_r, G_s] = -2iL_{r+s}, \quad (14.3.2.8a)$$

$$[L_m, G_r] = i(r - m/2)G_{m+r}, \quad (14.3.2.8б)$$

$$[F_m, F_n] = -2iL_{m+n}, \quad (14.3.2.8в)$$

$$[L_m, F_n] = i(n - m/2)F_{m+n}, \quad (14.3.2.8г)$$

$$[L_m, L_n] = i(n - m)L_{m+n}. \quad (14.3.2.8д)$$

Напомним, что во всех приведенных выше уравнениях индексы r и s принимают полуцелые значения, а индексы m , n и k — целые значения.

14.3.3. Генераторы Пуанкаре

В терминах фурье-мод генераторы Пуанкаре принимают вид

$$P^A = p^A, \quad (14.3.3.1)$$

$$M^{AB} = \frac{1}{2}(p^A X_0^B - p^B X_0^A) + \frac{1}{2} \sum_{n>0} i(a_n^{A*} a_n^B - a_n^{B*} a_n^A) + I^{AB}, \quad (14.3.3.2a)$$

где

$$I^{AB} = \frac{i}{2} \sum_{s>0} (b_s^{A*} b_s^B - b_s^{B*} b_s^A) \quad (\text{Невё — Шварц}), \quad (14.3.3.2б)$$

или

$$I^{AB} = \frac{i}{4} \sum_{m>0} (\Gamma_m^{A*} \Gamma_m^B - \Gamma_m^{B*} \Gamma_m^A) + \frac{i}{4} \Gamma_0^A \Gamma_0^B \quad (\text{Рамон}). \quad (14.3.3.2в)$$

Заметим, что последний член в выражении (14.3.3.2в) антисимметричен по A и B , как и должно быть, поскольку $\Gamma_0^A \Gamma_0^B = -\Gamma_0^B \Gamma_0^A$.

14.3.4. Замечания для случая замкнутой струны

Замкнутая струна снова по существу является «прямым производением» двух открытых струн. В этом случае определяются два набора «связей для открытой струны», которые суть $L_n, \bar{L}_n, F_m, \bar{F}_m$ (если $\Gamma_1^A(\sigma)$ и $\Gamma_2^A(\sigma)$ периодичны), $L_n, \bar{L}_n, G_r, \bar{F}_m$ (если $\Gamma_1^A(\sigma)$ периодичны, а $\Gamma_2^A(\sigma)$ антипериодичны) или $L_n, \bar{L}_n, G_r, \bar{G}_r$ (если как $\Gamma_1^A(\sigma)$, так и $\Gamma_2^A(\sigma)$ антипериодичны).

В выражениях для связей, соответствующих случаю замкнутой струны, импульс p^A заменяется на $p^A/2$, а осцилляторы

a_n^A , b_n^A и Γ_n^A заменяются на право- и левобегущие c_n^A , \bar{c}_n^A , b_n^A , \bar{b}_n^A , Γ_n^A , $\bar{\Gamma}_n^A$.

Правый и левый секторы связаны друг с другом лишь посредством нульмодовых связей.

14.3.5. Супералгебра Вирасоро

В ковариантном методе квантования все динамические величины рассматриваются как операторы в псевдогильбертовом пространстве. Кроме прежних бозонных операторов имеются фермионные операторы рождения и уничтожения b_r^{A*} и b_r^A , удовлетворяющие соотношениям¹⁾

$$[b_r^A, b_s^{B*}] = \eta^{AB} \delta_{r,s} \quad (r, s > 0) \quad (14.3.5.1)$$

в модели Невё — Шварца. Вакуум уничтожается всеми b_r^A ($r > 0$):

$$b_r^A |0, p\rangle = 0 \quad (r > 0). \quad (14.3.5.2)$$

В модели Рамона аналогичную роль играют ненулевые моды Γ_m^A :

$$[\Gamma_m^A, \Gamma_n^{B*}] = 2\eta^{AB} \delta_{m,n} \quad (m, n > 0), \quad (14.3.5.3)$$

$$\Gamma_m^A |0, p\rangle = 0 \quad (m > 0). \quad (14.3.5.4)$$

Следует рассмотреть также нулевые моды Γ_0^A . Они образуют алгебру Клиффорда:

$$\Gamma_0^A \Gamma_0^B + \Gamma_0^B \Gamma_0^A = 2\eta^{AB}. \quad (14.3.5.5)$$

Следовательно, их можно отождествить с Γ -матрицами в d измерениях.

Отсюда видно, что основное состояние в модели Рамона (и все возбужденные состояния) должно принадлежать пространству представления Γ -матриц. Соответственно оно имеет спин $1/2$ (спинор основного состояния). В d измерениях кратность вырождения основного состояния равна $2^{d/2}$ ²⁾. Возбужденные состояния также имеют полуцелый спин.

¹⁾ В соотношениях (14.3.5.1) скобки обозначают антикоммутатор, соответствующий фермиевским переменным.

²⁾ Фермиевские осцилляторы антикоммутируют с Γ_0^A . Если d четно, можно определить новые фермиевские осцилляторы $\Gamma_0^{d+1} \Gamma_m^A$, коммутирующие с Γ -матрицами. (Здесь $\Gamma_0^{d+1} = \Gamma_0^0 \Gamma_0^1 \dots \Gamma_0^{d-1}$.) Далее видно, что рассматриваемое псевдогильбертово пространство есть прямое произведение фоковского пространства, генерируемого бозонными и фермионными осцилляторами, на гильбертово пространство нулевых мод X_0^A , p^A , и на пространство представления алгебры Клиффорда.

Построенное здесь гильбертово пространство содержит много состояний с отрицательной нормой, порождаемых временными компонентами осцилляторов. Кроме того, из соотношения (14.3.5.5) следует, что $(\Gamma_0^0)^2 = -1$, что согласуется с условием $(\Gamma_0^0)^* = \Gamma_0^0$ лишь в том случае, когда внутреннее произведение не положительно определено.

Устранение состояний с отрицательной нормой является центральным вопросом в методе ковариантного квантования. В данном разделе он не рассматривается. Вместо этого мы покажем здесь, что классическая (супер)алгебра в квантовой механике модифицируется в результате появления c -числового аномального члена.

Супероператоры Вирасоро не зависят от неоднозначности упорядочения за исключением оператора L_0 , для которого различные способы упорядочения могут приводить к двум значениям L_0 , отличающимся на c -число. Поэтому мы вводим в квантовый оператор L_0 неопределенную пока константу α_0 :

$$L_0^{к.л} \rightarrow L_0 - \alpha_0, \quad (14.3.5.6)$$

где L_0 — нормально упорядоченное выражение.

Вычисление центрального заряда в супералгебре Вирасоро производится точно так же, как в бозонном случае. Поэтому мы лишь воспроизводим результат. Модифицированные (градуированные) коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{d}{8} (n^3 - n) \delta_{n, -m}, \quad (14.3.5.7a)$$

$$[G_r, G_s] = 2L_{r+s} + \frac{d}{2} \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r, -s} \quad (14.3.5.7b)$$

для модели Невё — Шварца и

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{d}{8} n^3 \delta_{n, -m}, \quad (14.3.5.8a)$$

$$[F_n, F_m] = 2L_{n+m} + \frac{d}{2} n^2 \delta_{n, -m} \quad (14.3.5.8b)$$

для модели Рамона. Коммутаторы $[L_n, G_r]$ и $[L_n, F_m]$ не содержат аномальных членов.

Следует заметить, что в модели Рамона нулевая мода Γ_0^A тоже дает вклад в аномалию (условие $\Gamma_0^A \cdot \Gamma_0^A = 0$ не выполняется на квантовом уровне). Этот вклад нулевой моды может быть выделен путем принятия антисимметричного упорядочения для произведений матриц Γ_0^A .

Благодаря центральному заряду в квантовой теории можно наложить лишь “половину” связей:

$$(L_0 - \alpha_0) |\psi\rangle = 0, \quad L_n |\psi\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad (14.3.5.9a)$$

$$G_s |\psi\rangle = 0 \quad (s > 0) \quad \text{или} \quad F_n |\psi\rangle = 0 \quad (n \geq 0). \quad (14.3.5.9b)$$

Упражнения

1. Вычислите явно центральный заряд в соотношениях (14.3.5.7) и (14.3.5.8).

2. Покажите, что путем прибавления к L_0 соответствующей константы можно привести соотношение (14.3.5.8) к виду (14.3.5.7).

Фермионная струна: квантовый анализ

В этой главе мы покажем, что критическая размерность для фермионной струны равна 10. Кроме того, интерсепт равен $1/2$ для модели Невё — Шварца и обращается в нуль в случае граничных условий Рамона. Эти критические значения определяются как БРСТ-методом, так и методом световой калибровки. Они совпадают со значениями, получаемыми в рамках ковариантного подхода, который здесь не рассматривается.

Как правило, мы рассматриваем вычисления только для случая открытой струны, если не оговорено другое.

15.1. Бекки — Рюэ — Стора — Тютина (БРСТ) квантование модели Невё — Шварца

15.1.1. Фоковское пространство д́ухов

Кроме фермионных д́ухов, встречавшихся выше, д́уховые моды теперь содержат коммутирующие степени свободы, которые мы обозначим символами q_s и π_s . Так как они ассоциируются с фермионными связями $G_s = 0$, то нумеруются полуцелыми числами. Они удовлетворяют соотношениям

$$q_s^* = q_{-s}, \quad \pi_s^* = \pi_{-s}, \quad (15.1.1.1)$$

$$[q_s, \pi_{s'}^*] = i\delta_{ss'} = [q_s^*, \pi_{s'}]. \quad (15.1.1.2)$$

Все остальные коммутаторы равны нулю.

Можно определить

$$\sqrt{2} \mu_s = q_s + i\pi_s, \quad \sqrt{2} \nu_s = q_s - i\pi_s. \quad (15.1.1.3)$$

Эти новые переменные удовлетворяют осцилляторным коммутационным соотношениям. Отметим, что операторы ν_s^* рождают из вакуума состояния с отрицательной нормой, а нульмодовые коммутирующие д́ухи отсутствуют, поскольку нет нульмодовых фермионных связей.

15.1.2. БРСТ-оператор

Согласно общим правилам, приведенным в работах [30, 31], БРСТ-оператор дается выражением

$$\Omega = \Omega^B + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} G_r q_{-r} - \sum_{r,s} \mathcal{P}_{-r-s} q^r q^s - i \sum_{s,m} \pi_{-m-s} \eta^m q^s (s - m/2), \quad (15.1.2.1)$$

где Ω^B — БРСТ-оператор для бозонной струны.

Нормальное упорядочение этого выражения приводит к выражению

$$\begin{aligned} \Omega = & \Omega^B + \sum_{r>0} (q_r^* G_s + G_{-r} q_r) - \sum_{r,s>0} (\mathcal{P}_{r+s}^* q^r q^s + q^{*r} q^{*s} \mathcal{P}_{r+s}) - \\ & - 2 \sum_{r>0} \sum_{0<s<r} (\mathcal{P}_{r-s}^* q_s^* q_r + q_r^* \mathcal{P}_{r-s} q_s) - \\ & - i \sum_{r,m>0} (r - m/2) (\pi_{m+r}^* \eta^m q^r - \eta^{*m} q^{*r} \pi_{m+r}) - \\ & - i \sum_{r>0} \sum_{0<m<r} (r + m/2) (\pi_{r-m}^* \eta_m^* q_r - q_r^* \eta_m \pi_{r-m}) - \\ & - i \sum_{m>0} \sum_{0<r<m} (r + m/2) (\eta_m^* \pi_{m-r} q_r - \pi_{m-r}^* q_r^* \eta_m) - \\ & - 2 \sum_{r>0} q_r^* q_r \mathcal{P}_0 - i \sum_{r>0} r (\pi_r^* q_r - q_r^* \pi_r) \eta^0. \end{aligned} \quad (15.1.2.2)$$

Неоднозначность упорядочения проявляется лишь в члене с η^0 . Два возможных способа упорядочения приводят к коэффициентам перед η^0 , отличающимся на вещественное c -число, которое поглощается константой α_0 .

Упражнение. Проверьте классическую нильпотентность Ω , $[\Omega, \Omega] = 0$.

15.1.3. Критическая размерность

Нильпотентность квантового БРСТ-генератора снова не очевидна вследствие неточной коммутативности (или антикоммутативности) квантовых операторов.

Если не считать члена с α_0 и центрального заряда супералгебры Вирасоро, то ненулевые вклады в Ω^2 возникают лишь благодаря духам. Эти вклады появляются вследствие того, что антикоммутаторы, аналогичные антикоммутаторам (13.2.4.2), не являются нормально упорядоченными.

В явном виде получаем

$$\Omega^2 = \sum_{n>0} \left[n^3 \left(\frac{d}{8} - \frac{5}{4} \right) + n \left(2\alpha_0 - \frac{d}{8} + \frac{1}{4} \right) \right] \eta_n^* \eta_n + \\ + \sum_{s>0} \left[s^2 \left(\frac{d-10}{2} \right) + \frac{1}{8} (16\alpha_0 - d + 2) \right] q_s^* q_s. \quad (15.1.3.1)$$

Если положить $\Omega^2 = 0$, то получаем упомянутые выше условия

$$d = 10, \quad \alpha_0 = 1/2. \quad (15.1.3.2)$$

Интерсепт все еще положителен, и в спектре присутствуют тахионы.

Упражнение. Проверьте соотношение (15.1.3.1).

Критическая размерность для фермионной струны недавно была вычислена теми же методами, которые использовались в работах [35, 51, 52].

15.1.4. Структура физического подпространства

Теперь мы охарактеризуем все решения уравнения $\Omega|\psi\rangle = 0$. Для определенности состояние $|\psi\rangle$ считается вектором, определяемым выражением

$$|\psi\rangle = \sum \lambda_k |\psi_k\rangle, \quad (15.1.4.1)$$

где λ_k — функции только нулевых мод:

$$\lambda_k = \lambda_k(X_0^A, \eta^0), \quad (15.1.4.2)$$

а $|\psi_k\rangle$ — векторы из фоковского пространства. Состояние (15.1.4.1) может быть записано также в виде

$$|\psi\rangle = |a\rangle + |b\rangle \eta^0, \quad (15.1.4.3)$$

чтобы выделить нулевую моду фермионного дұха.

БРСТ-оператор (15.1.2.2) имеет вид

$$\Omega = (\alpha' p^2 + L - \alpha_0) \eta^0 - M\mathcal{P}_0 + \bar{\Omega}, \quad (15.1.4.4)$$

где, как и в случае бозонной струны, L — БРСТ-инвариантное расширение оператора номера уровня, которое включает также дұхи:

$$L = N^a + N^b + N^\eta + N^q, \quad (15.1.4.5)$$

где

$$N^a = \sum_{n>0} n a_n^{*A} a_{An}, \quad N^b = \sum_{s>0} s b_s^{*A} b_{As}, \quad (15.1.4.6)$$

$$N^\eta = \sum_{n>0} n (\mathcal{P}_n^* \eta_n + \eta_n^* \mathcal{P}_n), \quad (15.1.4.7a)$$

$$N^q = -i \sum_{r>0} r (\pi_r^* q_r - q_r^* \pi_r) = \sum_{r>0} r (\mu_r^* \mu_r - \nu_r^* \nu_r). \quad (15.1.4.7b)$$

Оператор M определяется выражением

$$M = 2 \sum_{n>0} n \eta_n^* \eta_n + 2 \sum_{r>0} q_r^* q_r; \quad (15.1.4.8)$$

$\bar{\Omega}$ — остающаяся часть БРСТ-генератора, которая не содержит нулевых дубовых мод.

Легко проверить выполнение следующих коммутационных соотношений:

$$[L, M] = 0 = [L, \bar{\Omega}] = [M, \bar{\Omega}], \quad (15.1.4.9)$$

и, кроме того, нильпотентность оператора $\bar{\Omega}$ в подпространстве $\alpha' p^2 + L - \alpha_0 = 0$.

БРСТ-оператор, действуя на состояние (15.1.4.3), дает

$$\bar{\Omega} |a\rangle - M |b\rangle + [(\alpha' p^2 + L - \alpha_0) |a\rangle + \bar{\Omega} |b\rangle] \eta^0. \quad (15.1.4.10)$$

Из этого факта вытекает следующая теорема.

Теорема. Член с η^0 в любом состоянии $|\psi\rangle$ может быть поглощен состоянием вида $\Omega |\chi\rangle$.

Доказательство. Выберем состояние $|\chi\rangle$ равным $|a'\rangle$ (т. е. η^0 не дает вклада в $|\chi\rangle$), где $|a'\rangle$ — решение уравнения

$$(-\alpha' \square + L - \alpha_0) |a'\rangle = -|b\rangle. \quad (15.1.4.11)$$

Это уравнение всегда имеет решения, как можно видеть, разлагая $|b\rangle$ так же, как в выражении (15.1.4.1):

$$|b\rangle = \sum_k \lambda_k (X_0^A) |b_k\rangle. \quad (15.1.4.12)$$

Здесь можно принять, что фоковский вектор $|b_k\rangle$ имеет определенный номер уровня L_k . Поэтому уравнение (15.1.4.11) принимает вид

$$(-\alpha' \square + L_k - \alpha_0) \mu_k = -\lambda_k, \quad (15.1.4.13)$$

откуда определяются неизвестные коэффициенты $\mu_k (X_0^A)$ в разложении $|a'\rangle = \sum_k \mu_k |a'_k\rangle$. Ясно, что уравнение (15.1.4.13) всегда можно решить, хотя μ_k , а следовательно, $|a'\rangle$ могут расходиться на бесконечности, если $|b\rangle$ имеет ненулевую составляющую вдоль пространства $\alpha' p^2 + L - \alpha_0 = 0$.

При добавлении $\Omega|\chi\rangle$ к $|\psi\rangle$ получаем $|b\rangle = 0$. Это доказывает теорему.

С этого момента мы считаем $|b\rangle = 0$, или, что то же самое, допускаем наличие неограниченных функций, таких как $|\chi\rangle$ в $\Omega|\chi\rangle$, так что состояние $|b\rangle$ может быть устранено.

Кроме того, мы регуляризуем плохо определенное скалярное произведение решений уравнения $\Omega|\psi\rangle = 0$, содержащее (как отмечалось выше) фактор $\delta(0) \cdot 0$, возникающий при интегрировании по массе и по η^0 , полагая $\delta(0) \cdot 0$ равным единице, чтобы восстановить обычную нормировку клейн-гордоновских решений. Как объяснялось в разд. 13.2.7, до сих пор не существует строгого формализма, который позволял бы избежать трудности, связанной со скалярным произведением.

Допущение неограниченных функций $|\chi\rangle$ в $\Omega|\chi\rangle$ дает большое преимущество, состоящее в устранении удвоения состояний, не имеющего существенного физического значения.

Если $|b\rangle = 0$, то физическое условие БРСТ-инвариантности сводится к условиям

$$\bar{\Omega}|a\rangle = 0, \quad (15.1.4.14a)$$

$$(\alpha' p^2 + L - \alpha_0)|a\rangle = 0. \quad (15.1.4.14b)$$

Нулевая дѹховая мода устранена, и состояние $|a\rangle$ должно принадлежать массовой поверхности.

Уравнение (15.1.4.14a) анализируется так же, как в бозонной модели, — путем использования квартетного механизма Куго и Одзимы. Можно показать, что любое состояние, удовлетворяющее уравнениям (15.1.4.14), имеет вид

$$|a\rangle = |P\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + \bar{\Omega}|c\rangle, \quad (15.1.4.15)$$

где $|0\rangle_{\text{дух}}$ — вакуум дѹхов (для ненулевых мод), а $|P\rangle$ — физическое состояние ковариантного подхода:

$$\begin{aligned} (L_0 - \alpha_0)|P\rangle &= 0, \\ L_n|P\rangle &= 0 \quad (n > 0), \\ G_r|P\rangle &= 0 \quad (r > 0). \end{aligned} \quad (15.1.4.16)$$

Фактически состояние $|P\rangle$ в решении можно считать “поперечным” [51—53]. Это приводит к доказательству теоремы об отсутствии дѹхов, основанному на БРСТ-методах. Рассмотрение “поперечных”, т. е. обобщенных состояний ДДФ в модели фермионной струны можно найти в работах, цитируемых в [54] (см. также [18, 54a]).

Соотношения (15.1.4.15), (15.1.4.16) и предыдущая теорема приводят вместе к следующему выводу.

Теорема. Любое состояние, удовлетворяющее уравнению $\Omega|\psi\rangle = 0$, может быть записано в виде

$$|\psi\rangle = |P\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + \Omega|\chi\rangle, \quad (15.1.4.17)$$

где $|P\rangle$ — не содержащее дѳухов физическое состояние:

$$\begin{aligned} (L_0 - 1/2)|P\rangle &= 0, \\ L_n|P\rangle &= 0 \quad (n > 0), \\ G_r|P\rangle &= 0 \quad (r > 0). \end{aligned} \quad (15.1.4.18)$$

Заметим, наконец, что если ограничить асимптотическое поведение $|\chi\rangle$ на бесконечности, то возникнет удвоение. При этом уравнение (15.1.4.17) заменяется уравнением

$$|\psi\rangle = |P_1\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + |P_2\rangle|0\rangle_{\text{дух}} \eta^0 + \Omega|\chi\rangle. \quad (15.1.4.19)$$

Кроме того, в случае замкнутой струны имеет место более сложный вариант удвоения, связанный с нулевой модой $L_0 - \bar{L}_0$.

15.2. Бекки — Рюэ — Стора — Тютин (БРСТ) квантование модели Рамона

15.2.1. Фоковское пространство дѳухов

Главное отличие от модели Невѳе — Шварца состоит в том, что теперь коммутирующие дѳухи, ассоциированные с фермионными связями F_n , несут целочисленные индексы и содержат нулевую моду. Имеем

$$q_n^* = q_{-n}, \quad \pi_n^* = \pi_{-n}, \quad (15.2.1.1)$$

$$[q_n, \pi_{n'}] = i\delta_{n, -n'}. \quad (15.2.1.2)$$

Можно определить фоковское пространство для ненулевых мод q_n, π_n ($n \neq 0$):

$$q_n|0\rangle = \pi_n|0\rangle = 0 \quad (n > 0). \quad (15.2.1.3)$$

Псевдогильбертово пространство коммутирующих дѳухов получается путем образования прямого произведения этого фоковского пространства и пространства, соответствующего нулевой моде q^0 . Практически это пространство реализуется обычным способом как пространство функций от q^0 :

$$f(q^0), \quad (15.2.1.4a)$$

$$\langle f, q \rangle = \int dq^0 f^*(q^0) q(g^0), \quad (15.2.1.4б)$$

$$q^0: \text{умножение на } q^0, \quad (15.2.1.4в)$$

$$\pi_0 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q^0}. \quad (15.2.1.4г)$$

15.2.2. БРСТ-оператор

Нормально упорядоченный БРСТ-оператор задается выражением

$$\begin{aligned}
 \Omega = & \Omega^B + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n q_{-n} - \sum_{m, n > 0} (\mathcal{P}_{m+n}^* q_m q_n + q_m^* q_n^* \mathcal{P}_{m+n}) - \\
 & - 2 \sum_{m > 0} \sum_{0 < n < m} (\mathcal{P}_{m-n}^* - \overset{\textcircled{1}}{q_n^*} q_m + q_m^* \overset{\textcircled{3}}{\mathcal{P}_{m-n}} q_n) - \\
 & - i \sum_{n, m > 0} (n - m/2) (\pi_{m+n}^* \eta^m q^n - \eta^{*m} q^{*n} \pi_{m+n}) - \\
 & - i \sum_{n > 0} \sum_{0 < m < n} (n + m/2) (\pi_{n-m}^* \overset{\textcircled{4}}{\eta_m^*} q_n - q_n^* \overset{\textcircled{2}}{\eta_m} \pi_{n-m}) - \\
 & - i \sum_{m > 0} \sum_{0 < n < m} (n + m/2) (\overset{\textcircled{5}}{\eta_m^*} \pi_{m-n} q_n - \pi_{m-n}^* \overset{\textcircled{6}}{q_n^*} \eta_m) - \\
 & - 2 \sum_{n > 0} \overset{\textcircled{7}}{q_n^*} q_n \mathcal{P}_0 - i \sum_{n > 0} n (\pi_n^* q_n - \overset{\textcircled{8}}{q_n^*} \pi_n) \eta^0 - \\
 & - \mathcal{P}_0 (q^0)^2 - 2 \sum_{n > 0} (\overset{\textcircled{9}}{\mathcal{P}_n^*} q_n + q_n^* \mathcal{P}_n) q_0 - \\
 & - \frac{3i}{2} \sum_{n > 0} n (\eta_n^* q_n - \overset{\textcircled{10}}{q_n^*} \eta_n) \pi_0 + \frac{i}{2} \sum_{n > 0} n (\pi_n^* \eta_n - \overset{\textcircled{11}}{\eta_n^*} \pi_n) q^0.
 \end{aligned} \tag{15.2.2.1}$$

Это выражение отличается от БРСТ-оператора Невё—Шварца наличием нулевых мод q^0 и π_0 .

15.2.3. Критическая размерность

Значения критической размерности и интерсепта снова следуют из требования нильпотентности Ω на квантовом уровне. В общем случае нильпотентность Ω нарушается вследствие наличия членов трех типов.

1. Члены, пропорциональные α_0 . Они (в Ω^2) определяются выражением

$$2\alpha_0 \sum_{n > 0} n \eta_n^* \eta_n + 2\alpha_0 \sum_{n > 0} q_n^* q_n + \alpha_0 (q^0)^2. \tag{15.2.3.1}$$

2. Члены, пропорциональные центральному заряду, и, следовательно, размерности пространства-времени. Они имеют вид

$$\sum_{n>0} n^3 \frac{d}{8} \eta_n^* \eta_n + \sum_{n>0} n^2 \frac{d}{2} q_n^* q_n. \quad (15.2.3.2)$$

3. Вклады, возникающие вследствие переупорядочения биквадратичных духовых членов. Они (в $(\Omega^B)^2$) даются выражением

$$-\frac{13}{6} \sum_{n>0} n^3 \eta_n^* \eta_n + \frac{1}{6} \sum_{n>0} n \eta_n^* \eta_n. \quad (15.2.3.3)$$

В перекрестных членах $\Omega^B \Omega^F + \Omega^F \Omega^B$ они равны нулю (здесь Ω^F — “фермионная часть” Ω , явно задаваемая выражением (15.2.2.1)).

Для иллюстрации вычислений мы выпишем сейчас неисчисляющие члены в $(\Omega^F)^2$.

“Аномальные” члены возникают из антикоммутаторов, аналогичных выражению (13.2.4.2), возможно содержащих нулевые моды. Первый такой аномальный антикоммутатор возникает из [①, ②] и равен (в $(\Omega^F)^2 = 1/2 [\Omega^F, \Omega^F]$)

$$\begin{aligned} & -2i \sum_{m, n>0} \sum_{\substack{0 < k < m \\ 0 < l < n}} [\mathcal{P}_{m-k}^* q_k^* q_m, q_n^* \eta_l \pi_{n-l}] (n + 1/2) = \\ & = \text{НУ} - 2 \sum_{m>0} \left(\sum_{0 < k < m} (m + k/2) \right) q_m^* q_m = \\ & = \text{НУ} - \sum_{m>0} \frac{5}{2} m(m-1) q_m^* q_m, \end{aligned} \quad (15.2.3.4)$$

где НУ — неаномальное (нормально упорядоченное) выражение. Следующий аномальный член [③, ④] имеет вид

$$\begin{aligned} & 2i \sum_{m, n>0} \sum_{\substack{0 < k < m \\ 0 < l < n}} [q_m^* \mathcal{P}_{m-n} q_n, \pi_{n-m}^* \eta_m^* q_n] = \\ & = \text{НУ} - \frac{5}{2} \sum_{m>0} m(m-1) q_m^* q_m. \end{aligned} \quad (15.2.3.5)$$

Легко проверить, что в [①, ⑤] и [③, ⑥] аномальные члены не входят, поэтому остается рассмотреть, кроме вклада нулевых

мод, рассматриваемого отдельно, член [⑤, ⑥], который дает

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m>0 \\ n>0}} \sum_{\substack{0<k<m \\ 0<l<n}} \left(k + \frac{m}{2}\right) \left(l + \frac{n}{2}\right) [\eta_m^* \pi_{m-k} q_k, \pi_{n-l}^* q_l^* \eta_n] = \\ & = \text{НУ} + \sum_{m>0} \eta_m^* \eta_m \left(\sum_{0<k<m} \left(k + \frac{m}{2}\right) \left(\frac{3m}{2} - k\right) \right) = \\ & = \text{НУ} + \sum_{m>0} \eta_m^* \eta_m \left(\frac{11}{12} m^3 - \frac{3}{4} m^2 - \frac{m}{6} \right). \end{aligned} \quad (15.2.3.6)$$

Рассмотрим теперь нульмодовые аномальные члены, которые возникают в [⑦, ⑧], [⑨, ⑩] и [⑩, ⑪]:

$$\begin{aligned} [\textcircled{7}, \textcircled{8}] & \rightarrow 2i \sum_{m, n>0} n [q_m^* q_m \mathcal{P}_0, (\pi_n^* q_n - q_n^* \pi_n) \eta^0] = \\ & = \text{НУ} - 2 \sum_{n>0} n q_n^* q_n, \end{aligned} \quad (15.2.3.7)$$

$$\begin{aligned} [\textcircled{9}, \textcircled{10}] & \rightarrow 3i \sum_{n, m>0} n [(\mathcal{P}_m^* q_m + q_m^* \mathcal{P}_m) q^0, (\eta_n^* q_n - q_n^* \eta_n) \pi_0] = \\ & = -3 \sum_{n>0} n q_n^* q_n + \text{НУ}, \end{aligned} \quad (15.2.3.8)$$

$$\begin{aligned} [\textcircled{10}, \textcircled{11}] & \rightarrow \frac{3}{4} \sum_{n, m>0} mn [(\eta_m^* q_m - q_m^* \eta_m) \pi_0, (\pi_n^* \eta_n - \eta_n^* \pi_n) q_0] = \\ & = \text{НУ} + \frac{3}{4} \sum_{n>0} n^2 \eta_n^* \eta_n. \end{aligned} \quad (15.2.3.9)$$

Комбинируя соотношения (15.2.3.1)–(15.2.3.8), получаем

$$\begin{aligned} \Omega^2 & = \sum_{n>0} \left[n^3 \left(\frac{d}{8} - \frac{5}{4} \right) + 2\alpha_0 n \right] \eta_n^* \eta_n + \\ & + \sum_{n>0} \left[n^2 \left(\frac{d}{2} - 5 \right) + 2\alpha_0 \right] q_n^* q_n + \alpha_0 (q^0)^2. \end{aligned} \quad (15.2.3.10)$$

Условие $\Omega^2 = 0$ дает

$$d = 10, \quad (15.2.3.11a)$$

как в модели Невё — Шварца, но

$$\alpha_0 = 0. \quad (15.2.3.11b)$$

Теперь интерсепт равен нулю, и тахион не возникает.

15.2.4. Структура физического подпространства

БРСТ-оператор можно снова разложить по величинам η^0 и \mathcal{P}_0 ; это дает

$$\Omega = (\alpha' p^2 + L - \alpha_0) \eta^0 - M \mathcal{P}_0 + \bar{\Omega}, \quad (15.2.4.1)$$

где L , M и $\bar{\Omega}$ не зависят от η^0 и \mathcal{P}_0 , поэтому мы не будем их здесь выписывать. Те же аргументы, что и в случае Невё — Шварца, позволяют устранить из физических состояний часть с η^0 , поэтому мы полагаем $|b\rangle = 0$ в выражении $|\psi\rangle = |a\rangle + |b\rangle \eta^0$. Для таких состояний условие массовой поверхности, разумеется, должно выполняться.

Можно далее расщепить $\bar{\Omega}$, выделив явно зависимость от коммутирующих нулевых д'уховых мод:

$$\bar{\Omega} = F q^0 + G \pi_0 + \bar{\bar{\Omega}}, \quad (15.2.4.2)$$

где операторы F , G и $\bar{\bar{\Omega}}$ не зависят от всех нулевых д'уховых мод. Их вид легко может быть найден из выражения (15.2.2.1). В соответствии с операторным разложением (15.2.4.2) состояния могут быть представлены в виде

$$|a\rangle = \sum_{n \geq 0} |a_n\rangle q_0^n. \quad (15.2.4.3)$$

Мы считаем всюду, что в выражении (15.2.4.3) содержится лишь конечное число членов (формы конечной степени). Это предположение и уравнение $\Omega |a\rangle = 0$ приводят к условию, которому должен удовлетворять коэффициент наивысшей степени $|a_N\rangle$:

$$F |a_N\rangle = 0. \quad (15.2.4.4)$$

Но отсюда следует, что $|a_N\rangle = F |a'_{N-1}\rangle$ для некоторого $|a'_{N-1}\rangle$. Поэтому из выражения (15.2.4.3) можно исключить наивысшую степень $|a_N\rangle$, а затем последовательно все степени $n \leq N$, кроме нулевой. После того как это сделано, мы получаем физическое состояние $|a\rangle$, не содержащее ни η^0 , ни q^0 . Для такого состояния БРСТ-условие $\Omega |a_0\rangle = 0$ принимает вид

$$(\alpha' p^2 + L - \alpha_0) |a_0\rangle = 0, \quad (15.2.4.5a)$$

$$F |a_0\rangle = 0, \quad (15.2.4.5б)$$

$$\bar{\bar{\Omega}} |a_0\rangle = 0. \quad (15.2.4.5в)$$

Оператор $\bar{\bar{\Omega}}$ нильпотентен на подпространстве (15.2.4.5a) и (15.2.4.5б) и, как отмечалось ранее, не зависит от всех д'уховых мод. Кроме того, можно показать, что он является "возмущением" (в смысле Като и Огавы) линейного нильпотентного оператора, к которому непосредственно применим квартетный ме-

ханизм Куго и Одзимы. Поэтому из $|a_0\rangle$ можно исключить все остальные дұхи [53].

Мы не будем здесь вдаваться в детали этого вопроса. Мы также опускаем проблему регуляризации скалярного произведения, которое содержит еще одно плохо определенное произведение $\delta(0) \cdot 0$, возникающее из расходящегося интеграла по нулевой моде $\int dq^0$ и равного нулю скалярного произведения, ассоциированного с нулевыми модами Γ_0^A . Дальнейшую информацию по этому вопросу читатель может найти в работе [53].

Беглый анализ этого раздела можно суммировать в следующей теореме.

Теорема. Любое физическое состояние $|\psi\rangle$, удовлетворяющее условию $\Omega|\psi\rangle = 0$, может быть представлено в виде

$$|\psi\rangle = |P\rangle|0\rangle_{\text{дух}} + \Omega|\chi\rangle, \quad (15.2.4.6)$$

где $|P\rangle$ — физическое состояние ковариантного подхода, удовлетворяющее соотношениям

$$L_0|P\rangle = L_n|P\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad (15.2.4.7a)$$

$$F_0|P\rangle = F_n|P\rangle = 0 \quad (n > 0). \quad (15.2.4.7б)$$

Доказательство [53]. Разумеется, эта теорема не утверждает, что состояние $|\chi\rangle$ нормируемо.

Замечания. 1) Если ограничить $|\chi\rangle$ асимптотическими условиями, то возникает удвоение, ассоциированное с антикоммутирующей нулевой дұховой модой. Благодаря коммутирующему духу q^0 можно получить также дополнительное умножение, если наложить условия при $q^0 \rightarrow \pm\infty$. 2) Дұховое число для состояний (15.2.4.6) (с $|\chi\rangle = 0$) равно нулю.

Упражнение. Покажите, что любое решение уравнения (15.2.4.4) $F|a_N\rangle = 0$ может быть представлено в виде $|a_N\rangle = F|a'_{N-1}\rangle$.

Указания. Как обычно, импульс и массу можно считать c -числами. Вычислите $[F(p), F(k)]$, где k^A — произвольный d -вектор. Подберите k^A так, чтобы выполнялось условие $[F(p), F(k)]|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Заключите отсюда, что если $F(p)|\psi\rangle = 0$, то $|\psi\rangle = F(p)|\psi'\rangle$, где $|\psi'\rangle = F(k)|\psi\rangle$. Здесь

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2\alpha'} \Gamma_0^A k_A + i \sum_{k>0} \sqrt{k} (a_k^{*A} \Gamma_{Ak} - \Gamma_{Ak}^* a_k^A) \right] - \\ - 2 \sum_{n>0} (\mathcal{P}_n^* q_n + q_n^* \mathcal{P}_n) + \frac{i}{2} \sum_n n (\pi_n^* \eta_n - \eta_n^* \pi_n),$$

где $F(p) \equiv F$.

15.2.5. Замечания для случая замкнутой струны

Применение БРСТ-методов к замкнутой струне проводится непосредственно. Замкнутая струна в действительности есть прямое произведение левобегущего и правобегущего секторов, каждый из которых изоморфен либо (открытой) модели Невё — Шварца, либо модели Рамона.

В соответствии с этим оказывается, что БРСТ-генератор нильпотентен только в десяти измерениях. Кроме того, интерсепт равен либо 1 (лево- и правобегущие секторы изоморфны модели Невё — Шварца), либо 1/2 (левый — модель Невё — Шварца, правый — модель Рамона), либо нулю (левый и правый — модель Рамона).

15.3. Квантование модели Невё — Шварца в калибровке светового конуса

15.3.1. Пуанкаре-инвариантность

При квантовании в калибровке светового конуса нетривиальный вопрос состоит в том, является ли квантовая алгебра Пуанкаре свободной от аномалий.

К трудностям приводит лоренцев генератор M^{i-} , не являющийся больше квадратичным по осцилляторным переменным. При применении тех же методов, что и в случае бозонной струны, M^{i-} определяется выражением

$$M^{i-} = \frac{1}{2} \left(p^i u_0^- - \frac{L_0^{\text{tr}} - \alpha_0}{2\alpha' p^+} X_0^i \right) - \frac{1}{2} \sum_{n>2} \frac{a_n^{*i} L_n^{\text{tr}} + L_{-n}^{\text{tr}} a_n^i}{\sqrt{2\alpha' n} p^+} + \frac{i}{2} \sum_{r>0} \left(b_r^{i*} \frac{G_r^{\text{tr}}}{\sqrt{2\alpha' r} p^+} - \frac{G_{-r}^{\text{tr}}}{\sqrt{2\alpha' r} p^+} b_r^i \right). \quad (15.3.1.1)$$

В этом выражении величина G_r^{tr} отличается от ковариантной величины G_r суммированием только по поперечным степеням свободы. Другие генераторы здесь не приводятся, поскольку в явном виде они не нужны.

Алгебра Пуанкаре выполняется тривиально, если не считать коммутатора $[M^{i-}, M^{j-}]$, который в общем случае оказывается не равным нулю. Длинные, но непосредственные вычисления показывают, что $[M^{i-}, M^{j-}]$ содержит не только член с α_0 , но также аномальные вклады, возникающие при нормальном упорядочении величины $L_0 [X_0^i, \sum a_n^* L_n + L_{-n} a_n]$ и коммутаторов кубических членов. Квантовомеханический коммутатор $[M^{i-}, M^{j-}]$

имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned}
 [M^{i-}, M^{j-}] = & \frac{1}{4\alpha' (p^+)^2} \sum_{n>0} \left[n^2 \left(\frac{d-2}{16} - \frac{1}{2} \right) + \alpha_0 - \frac{d-2}{16} \right] \times \\
 & \times (a_n^{*i} a_n^j - a_n^{*j} a_n^i) + \\
 & + \frac{1}{4\alpha' (p^+)^2} \sum_{r>0} \left[r^2 \left(\frac{d-2}{4} - 2 \right) + \alpha_0 - \frac{d-2}{16} \right] \times \\
 & \times (b_r^{*i} b_r^j - b_r^{*j} b_r^i)
 \end{aligned} \tag{15.3.1.2}$$

и обращается в нуль только в том случае, если

$$d = 10, \quad \alpha_0 = 1/2. \tag{15.3.1.3}$$

Эти критические значения совпадают с теми, которые найдены БРСТ-методами.

15.3.2. Спектр Невё — Шварца

Рассмотрение спектра Невё — Шварца следует соответствующей схеме для бозонной модели. Состояния данного массового уровня принадлежат представлению малой группы, которой является группа $SO(8)$ для безмассовых состояний и группа $SO(9)$ для массивных состояний. В последнем случае различные определенные представления группы $SO(8)$ объединяются с образованием представления группы $SO(9)$.

Так как $\alpha_0 = 1/2$, основное состояние есть тахшон с квадратом массы, равным $-(2\alpha')^{-1}$:

$$|0\rangle, a_n^i |0\rangle = b_r^i |0\rangle = 0, \quad \alpha' M^2 = -1/2. \tag{15.3.2.1}$$

Масса произвольного состояния определяется выражением

$$\alpha' M^2 = \sum_{n>0} n a_n^{*i} a_{ni} + \sum_{s>0} s b_s^{*i} b_{si} - \alpha_0 = N - \frac{1}{2}. \tag{15.3.2.2}$$

Осцилляторы b^* увеличивают массу на полуцелые числа, а осцилляторы a^* — на целые числа. Состояния с нечетным количеством осцилляторов b^* соответственно имеют целые массы. Говорят, что они имеют G -четность, равную $+1$, где оператор G определяется выражением

$$G = (-)^{(\sum b_s^{*i} b_{si} - 1)}. \tag{15.3.2.3}$$

Состояния с четным количеством осцилляторов b^* имеют целую массу и G -четность, равную -1 . Основное состояние (тахшон) имеет $G = -1$.

Следующие возбужденные состояния являются безмассовыми $SO(8)$ -векторами:

$$b_{1/2}^{*i}|0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 0, \quad G = 1, \quad 8 \text{ состояний (спин 1)}. \quad (15.3.2.4)$$

Они также должны быть безмассовыми, чтобы образовывать представление группы Пуанкаре (в противном случае количество состояний было бы недостаточным).

На следующем уровне с $G = -1$ имеем

$$(b_{1/2}^{*i} b_{1/2}^{*j} - b_{1/2}^{*j} b_{1/2}^{*i})|0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 1/2, \quad G = -1, \quad 28 \text{ состояний}, \quad (15.3.2.5)$$

$$\underline{\alpha}_1^{*i}|0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 1/2, \quad G = -1, \quad 8 \text{ состояний}.$$

Затем идут массивные состояния с $\alpha' M^2 = 1$:

$$b_{1/2}^{*i} b_{1/2}^{*j} b_{1/2}^{*k}|0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 1, \quad G = 1, \quad 56 \text{ состояний},$$

$$b_{1/2}^{*i} \alpha_1^{*j}|0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 1, \quad G = 1, \quad 64 \text{ состояния}, \quad (15.3.2.6)$$

$$b_{3/2}^{*i}|0\rangle, \quad \alpha' M^2 = 1, \quad G = 1, \quad 8 \text{ состояний}$$

и т. д. Все состояния в спектре имеют целый спин.

Напомним, наконец, что состояния характеризуются также компонентами их d -импульса p^+ , p^i (они определяют p^-), хотя мы и не выписывали эту зависимость в соотношениях (15.3.2.1) — (15.3.2.6) ¹⁾.

15.3.3. Спектр замкнутой струны Невё — Шварца

Если и право- и левобегущие секторы описываются антипериодическими полями, то спектр замкнутой струны близок к описанному выше.

Основные уравнения представляют собой условие массовой поверхности

$$\frac{1}{2} \alpha' M^2 = N_R + N_L - 1 \quad (15.3.3.1)$$

и условие “равенства правого и левого”

$$N_R = N_L. \quad (15.3.3.2)$$

¹⁾ Следует также подчеркнуть здесь тот факт, что возбужденные состояния струны являются одночастичными состояниями, как можно видеть, например, из того обстоятельства, что спектр масс дискретный. Поэтому между спином и статистикой нет противоречия, несмотря на то, что мы имеем фермионные осцилляторы с векторным индексом. (Статистика имеет дело со многими частицами одновременно.)

Первое состояние является основным — тахион:

$$|0\rangle, \quad \alpha' M^2 = -2, \quad \text{спин } 0. \quad (15.3.3.3)$$

Оно имеет G_p -четность -1 , где

$$G_p = (-)^{\sum_s b_s^{*i} b_{si}^{-1}} = (-)^{\sum_s \bar{b}_s^{*i} \bar{b}_{si}^{-1}}. \quad (15.3.3.4)$$

(Последнее равенство имеет место для состояний на массовой поверхности, удовлетворяющих соотношению (15.3.3.2).)

Следующие состояния безмассовые:

$$b_1^{*i} \bar{b}_1^{*j} |0\rangle, \quad G_p = 1, \quad \alpha' M^2 = 0. \quad (15.3.3.5)$$

Эти состояния могут быть расщеплены на бесследовый симметричный тензор (“гравитон”, спин 2), антисимметричный тензор второго ранга и скаляр спина 0.

Остальная часть спектра строится аналогично. Она содержит состояния только с целым спином.

15.4. Квантование модели Рамона в калибровке светового конуса

15.4.1. Пуанкаре-инвариантность

Лоренцев генератор M^{i-} задается выражением

$$\begin{aligned} M^{i-} = & \frac{1}{2} \left(p^i u_0^- - \frac{L_0^{\text{tr}} - \alpha_0}{2\alpha' p^+} X_0^i \right) - \frac{1}{2} \sum_{n>0} \frac{a_n^{*i} L_n^{\text{tr}} + L_{-n}^{\text{tr}} a_n^i}{\sqrt{2\alpha' n} p^+} + \\ & + \frac{i}{4} \sum_{m>0} \sqrt{2} \frac{\Gamma_m^{*i} F_m - F_{-m} \Gamma_m^i}{\sqrt{2\alpha' m} p^+} + \frac{i}{8} \sqrt{2} \frac{\Gamma_0^i F_0 - F_0 \Gamma_0^i}{\sqrt{2\alpha' p^+}}. \end{aligned} \quad (15.4.1.1)$$

В последнем члене этого выражения мы приняли антисимметричное упорядочение для нулевых Γ_0^i -мод. Любое другое реальное упорядочение должно также приводить к выражению (15.4.1.1).

Коммутатор $[M^i, M^j]$ в общем случае не равен нулю. Для него получаем

$$\begin{aligned} [M^{i-}, M^{j-}] = & \frac{1}{4\alpha' (p^+)^2} \sum_{n>0} \left[n^2 \left(\frac{d-2}{16} - \frac{1}{2} \right) + \alpha_0 \right] (a_n^{*i} a_n^j - a_n^{*j} a_n^i) + \\ & + \frac{1}{8\alpha' (p^+)^2} \sum_{n>0} \left[n^2 \left(\frac{d-2}{4} - 2 \right) + \alpha_0 \right] (\Gamma_n^{*i} \Gamma_n^j - \Gamma_n^{*j} \Gamma_n^i) + \\ & + \frac{1}{16\alpha' (p^+)^2} \alpha_0 (\Gamma_0^i \Gamma_0^j - \Gamma_0^j \Gamma_0^i). \end{aligned} \quad (15.4.1.2)$$

Требую обращения в нуль выражения (15.4.1.2), получаем опять критические значения для d и α_0 :

$$d = 10, \quad \alpha_0 = 0. \quad (15.4.1.3)$$

15.4.2. Спектр Рамона

Новая черта модели Рамона состоит в присутствии фермионных нулевых мод Γ_0^A . На квантовом уровне они образуют алгебру Клиффорда.

В подходе световой калибровки независимыми являются только поперечные матрицы Γ_0^i и выполняется условие

$$\Gamma_0^i \Gamma_0^j + \Gamma_0^j \Gamma_0^i = 2\delta^{ij}. \quad (15.4.2.1)$$

Пространство неприводимого представления этих соотношений 16-мерно (8 независимых Γ_0^i -матриц)¹⁾. Элементы этого пространства преобразуются как спиноры при $SO(8)$ -вращениях, генерируемых соответствующими произведениями $\Gamma_0^i \Gamma_0^j$. Именно поэтому все состояния спектра Рамона имеют полуцелый спин.

Хорошо известно, что в пространстве-времени четной размерности дираковское представление группы вращений приводимо. Оно сводится к двум неприводимым представлениям, получаемым при фиксировании определенной ориентации (при наложении вейлевского условия). В нашем случае 16-мерное пространство сводится к двум 8-мерным подпространствам.

Первое состояние в спектре является основным состоянием $|0\rangle$; оно безмассово и обладает спином $1/2$. Поскольку $\alpha_0 = 0$, тахион не возникает:

$$|0\rangle u(p^i, p^+), \quad 16 \text{ состояний}, \quad 2 \text{ спин } 1/2, \quad \alpha' M^2 = 0. \quad (15.4.2.2)$$

Мы явно выделили зависимость основного состояния от всех переменных задачи. Состояние $|0\rangle u(p^i, p^+)$ есть прямое произведение фоковского вакуума $|0\rangle$

$$\alpha_n^i |0\rangle = \Gamma_n^i |0\rangle = 0 \quad (15.4.2.3)$$

¹⁾ В световой калибровке изотропные Γ -матрицы Γ_0^\pm являются функциями остальных переменных. Они не могут рассматриваться независимо. Заметим, что скалярное произведение $u^* u$ (где u — элемент пространства представления соотношения (15.4.2.1)), очевидно, положительно определено и приводит к эрмитовости всех Γ_0^i . В световой калибровке нет состояний с отрицательной нормой.

на спинор u , принадлежащий 16-мерному пространству представления соотношения (15.4.2.1). Состояние (15.4.2.2) также характеризуется своим d -импульсом p^i, p^+ .

В свете наших замечаний относительно приводимости спинорного представления основное состояние (15.4.2.2) без всякого усечения фактически содержит два представления группы Пуанкаре со спином $1/2$ ¹⁾.

Следующие состояния получаются при действии на вакуум осцилляторами a_i^{*i} или Γ_i^{*i} , имеющими $SO(8)$ -векторный индекс:

$$a_i^{*i}|0\rangle u(p^+, p^-), \quad \Gamma_i^{*i}|0\rangle u(p^+, p^-) \quad (256 \text{ состояний}). \quad (15.4.2.4)$$

Они массивны, $\alpha' M^2 = 1$, и имеют спин $3/2$ и $1/2$. Масса для всех состояний снова задается массовой формулой

$$\alpha' M^2 = N - \alpha_0 = N. \quad (15.4.2.5)$$

Высшие состояния рассматриваются аналогично.

15.4.3. Замкнутая струна

Здесь мы рассмотрим любопытную комбинацию правобегущего сектора модели Невё — Шварца с левобегущим сектором модели Рамона [50]. Произведение двух моделей Рамона рассматриваться не будет.

Нульмодовые связи имеют вид

$$L_0 - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{L}_0 = 0. \quad (15.4.3.1)$$

Отсюда уравнение массовой поверхности и условие “равенства правого и левого” имеют вид соответственно

$$\frac{1}{2} \alpha' M^2 = \left(N_R - \frac{1}{2} \right) + N_L, \quad (15.4.3.2)$$

$$N_R - \frac{1}{2} = N_L. \quad (15.4.3.3)$$

¹⁾ Поскольку p^+ и p^i не ограничены, оказывается также, что p^0 может быть положительным и отрицательным, как в предыдущих моделях. Состояния с отрицательным p^0 могут интерпретироваться как античастицы. Их можно отождествить с состояниями обладающими положительным p^0 (частицы основного состояния = античастицы основного состояния), что равносильно выбору лишь значений $p^0 > 0$ (в свободном спектре). Это и сделано здесь. Но в принципе на данном этапе можно не проводить этого отождествления, удваивающего спектр.

Уравнение (15.4.3.3) можно использовать для преобразования уравнения (15.4.3.2) к виду

$$\frac{1}{2} \alpha' M^2 = 2N_L. \quad (15.4.3.4)$$

В спектре отсутствует тахион, так как $N_L \geq 0$.

Чтобы понять этот результат, заметим, что основное состояние $|0\rangle$ не удовлетворяет условию (15.4.3.3), так как имеет $N_R = 0 = N_L$. Следовательно, оно исключено из физического подпространства, определяемого связью замкнутой струны (15.4.3.3).

Суть состоит в том, что тахион из одного сектора струны может уничтожиться в моделях замкнутой струны, когда этот сектор связывается, как в условии (15.4.3.3), с другим сектором, свободным от тахионов. Сходный механизм имеет место в случае гетеротической струны.

Из условия (15.4.3.3) следует, что N_R должно быть полуцелым. Возникают только состояния Невё—Шварца с G -четностью $+1$.

Первое состояние имеет вид

$$b_{1/2}^{i*} |0\rangle u(p^+, p^-) \quad (15.4.3.5)$$

и описывает две безмассовые частицы спина $3/2$ и $1/2$ [50]¹⁾. Построение высших возбужденных состояний мы оставляем читателю; все они обладают полуцелым спином.

15.5. Суперсимметрия в десяти измерениях

15.5.1. Открытая струна

Как оказалось, модели фермионных струн обладают следующим замечательным свойством: при подходящем усечении моделей Невё—Шварца и Рамона получаются соответственно бозонный и фермионный спектры, образующие при объединении десятимерные суперсимметричные мультиплеты на каждом массовом уровне [50] (см. также [50a]).

Усечение сектора Невё—Шварца заключается в удержании только части спектра с $G = 1$. Это исключает тахион. Все состояния имеют целую массу. Усечение сектора Рамона состоит в выборе спинорного вакуума с определенной ориентацией.

После этих усечений значения масс в обоих секторах становятся равными. Кроме того, Глиозци и др. [50] показали, что и количества состояний на каждом массовом уровне одинаковы,

¹⁾ Если спинор u не удовлетворяет вейлевскому условию, таких состояний имеется в два раза больше.

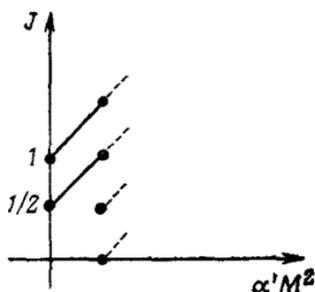


Рис. 15.1. Основное состояние суперсимметричного усечения комбинированной модели Невё — Шварца — Рамона есть безмассовый калибровочный мультиплет суперянг-миллсовской теории.

т. е. выполняется необходимое условие суперсимметрии (равные числа бозонов и фермионов).

Доказательство здесь не приводится, мы просто проверим верность этого утверждения для первых двух уровней.

Безмассовые состояния в модели Невё — Шварца образуют $SO(8)$ -вектор с восемью спиральностями. Безмассовое спинорное основное состояние в модели Рамона также имеет восемь “поляризаций” для определенной ориентации.

Таким образом, имеется 128 бозонных состояний при $\alpha' M^2 = 1$ (см. уравнение (15.3.2.6)). Имеется также 128 фермионных состояний, если основное спинорное состояние ограничено вейлевским условием (см. уравнение (15.4.2.4)). Следовательно, равенство чисел состояний выполняется при $\alpha' M^2 = 0, 1$ и, как легко видеть, также при $\alpha' M^2 = 2$.

Вид комбинированного суперсимметричного спектра Невё — Шварца — Рамона показан на рис. 15.1 [50].

Основное состояние открытой суперсимметричной струны Невё — Шварца — Рамона содержит безмассовые частицы спина $1/2$ и 1 . Это те же частицы, которые входят в калибровочный супермультиплет суперянг-миллсовской теории (точнее, суперэлектромагнетизма, поскольку мы не включаем здесь внутренние квантовые числа).

Напомним, что калибровочное поле суперэлектромагнетизма состоит из вещественного векторного поля A_A и вещественного (т. е. майорановского) спинорного поля ψ . Условие вещественности выражает тот факт, что частицы в калибровочном мультиплете являются своими античастицами. Кроме того, поле ψ есть вейлевский спинор. Это эквивалентно определенной ориентации основного состояния струны. Майорановское и вейлевское условия не являются совместными в произвольном числе измерений. Оказывается, что майорана-вейлевские спиноры существуют в $2 \bmod 8$ измерениях, а следовательно, в 10 измерениях.

Для завершения доказательства суперсимметрии необходимо определить закон преобразования суперсимметрии внутри супермультиплетов. Глиоцци и др. [50] этого не сделали. Генераторы суперсимметрии были определены Грином и Шварцем [55] путем использования их нового формализма.

15.5.2. Замкнутая струна

Глиоцци и др. [50] показали также равенство как масс, так и чисел состояний для бозонного спектра замкнутой струны, приведенного в разд. 15.3.3 (усеченного условием $G_p = 1$), и фермионного спектра замкнутой струны, приведенного в разд. 15.4.3 (усеченного вейлевским условием).

Основное состояние этой комбинированной замкнутой модели Невё — Шварца — Рамона содержит 64 фермионных и 64 бозонных состояния. Соответствующие частицы могут быть описаны следующими десятимерными локальными полями: ϕ , $B_{AB} = -B_{BA}$, $g_{AB} = g_{BA}$ (бозонные поля) и χ , ψ_A (майорана-вейлевские поля спина $1/2$ и $3/2$). Это калибровочный мультиплет $N = 1$, $d = 10$ -супергравитации.

Глава 16

Суперструна

16.1. Ковариантное действие

Десятимерная суперсимметрия спектра Невё—Шварца—Рамона весьма неожиданна и неясна в рамках развиваемого до сих пор формализма. Грин и Шварц открыли новое действие, инвариантное относительно десятимерной глобальной суперсимметрии, генераторы суперсимметрии для которого могут быть построены как нётеровские заряды. При квантовании это действие порождает суперсимметричную часть спектра Невё—Шварца—Рамона без нежелательного тахиона. Это и есть суперструна.

Действие для суперструны впервые было открыто в световой калибровке [44, 45]. Его ковариантная форма была найдена позднее [56].

Следуя недавней работе [57], мы выведем ковариантное действие суперструны как действие σ -модели с членом Весса—Зумино.

16.1.1. $SUSY(N)/SO(d-1, 1)$ как пространство объектов

σ -Модели наследуют свои внутренние симметрии из пространства объектов. Например, струна Намбу—Гото глобально пуанкаре-инвариантна, поскольку пространством объектов в этом случае является обычное пространство Минковского.

Для построения σ -модели, инвариантной относительно градуированного расширения группы Пуанкаре, необходимо иметь пространство объектов, на котором действует эта супергруппа. Подходящим пространством оказывается фактор-пространство $SUSY$ супергруппы с N суперсимметриями по лоренцевой подгруппе $SO(d-1, 1)$. Это многообразие изоморфно подгруппе $SUSY(N)$, получаемой выбором только трансляций и N преобразований суперсимметрии.

На этом этапе мы оставляем N и d произвольными. Ограничения на эти параметры скоро появятся уже на классическом уровне.

Супермногообразию $SUSY(N)/SO(d-1, 1)$ можно параметризовать d коммутирующими координатами X^A ($A = 0, \dots$

..., $d-1$) и N антикоммутирующими спинорами θ^α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), которые для простоты мы считаем удовлетворяющими майорановскому условию. Координаты X^A являются координатами пространства Минковского.

Действие $SUSY(N)$ супергруппы на супермногообразии $SUSY(N)/SO(d-1, 1)$ задается выражениями

$$X^A \rightarrow X^A + \varepsilon^A, \quad \theta^\alpha \rightarrow \theta^\alpha \quad (16.1.1.1)$$

(трансляции) и

$$X^A \rightarrow X^A + i \sum_{\alpha=1}^N \bar{\varepsilon}^\alpha \gamma^A \theta^\alpha, \quad \theta^\alpha \rightarrow \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha \quad (16.1.1.2)$$

(суперсимметрии), где ε^α — N произвольных вещественных спинорных параметров, а γ^A — γ -матрицы в d измерениях (наши обозначения приведены в приложении Б). Кроме того, переменные X^A и θ^α при лоренцевых вращениях преобразуются как вектор и спиноры соответственно.

Для преобразований (16.1.1.1) и (16.1.1.2) легко построить инвариантные формы. Они имеют вид

$$\omega^A = dX^A - i\bar{\theta}^\alpha \gamma^A d\theta^\alpha, \quad (16.1.1.3a)$$

$$d\theta^\alpha. \quad (16.1.1.3b)$$

Ниже мы всегда будем подразумевать суммирование по суперсимметричным индексам в выражениях типа (16.1.1.3a).

Явное вычисление вариации $\delta\omega^A$ показывает, что ω^A действительно инвариантна относительно суперсимметрий:

$$\begin{aligned} \delta\omega^A &= \delta(dX^A) - i\delta\bar{\theta}^\alpha \gamma^A d\theta^\alpha - i\bar{\theta}^\alpha \gamma^A \delta d\theta^\alpha = \\ &= d\delta X^A - i\delta\bar{\theta}^\alpha \gamma^A d\theta^\alpha - i\bar{\theta}^\alpha \gamma^A d\delta\theta^\alpha = \end{aligned}$$

(используем условие $[\delta, d] = 0$)

$$= i\bar{\varepsilon}^\alpha \gamma^A d\theta^\alpha - i\bar{\varepsilon}^\alpha \gamma^A d\theta^\alpha = 0$$

(поскольку $d\varepsilon = 0$). Аналогично $\delta d\theta^\alpha = d\delta\theta^\alpha = 0$. Легко проверить также инвариантность $d\theta^\alpha$ и ω^A при трансляциях.

Далее нам понадобятся некоторые свойства дифференциальных форм на супермногообразиях, которые мы кратко здесь изложим.

Дифференциальный оператор d удовлетворяет соотношениям, очень похожим на аналогичные соотношения для оператора внешней производной на обычном многообразии. Важную роль играет свойство

$$dy \wedge dz = (-)^{e_y e_z + 1} dz \wedge dy, \quad (16.1.1.4)$$

где ε_y и ε_z — грассманы четности y и z соответственно ($\varepsilon_y = 0$, если y четно, $\varepsilon_y = 1$, если y нечетно). Если y и z оба антикоммутируют, свойство (16.1.1.4) принимает вид

$$dy \wedge dz = dz \wedge dy \quad (\varepsilon_y = \varepsilon_z = 1).$$

Имеем также

$$dyz = (-)^{\varepsilon_y \varepsilon_z} z dy, \quad (16.1.1.5)$$

$$d(\omega \wedge \nu) = d\omega \wedge \nu + (-)^{k_\omega} \omega \wedge d\nu, \quad (16.1.1.6)$$

где k_ω — степень ω как формы. Из этих правил следует, что оператор d нильпотентен:

$$d^2 = 0. \quad (16.1.1.7)$$

Наконец, отображение двумерного пространства $x^\lambda = (\tau, \sigma)$ ($\lambda = 0, 1$) в супермногообразии $SUSY(N)/SO(d-1, 1)$ определяется заданием X^A и θ^α как функций от x^λ :

$$X^A = X^A(\tau, \sigma), \quad \theta^\alpha = \theta^\alpha(\tau, \sigma). \quad (16.1.1.8)$$

Обратное отображение (pullback) $SUSY(N)/SO(d-1, 1)$ дифференциальных форм на двумерное пространство-время (x^λ) возникает при замене dX^A на $X^A_{,\lambda} dx^\lambda$ и $d\theta^\alpha$ на $\theta^\alpha_{,\lambda} dx^\lambda$. Обратное отображение коммутирует с d . Подробнее о дифференциальных формах на супермногообразиях см. книгу Весса и Беггера [58].

16.1.2. Инвариантное действие

Чтобы построить инвариантное действие, рассмотрим сначала кинетический член; он квадратичен по производным:

$$L_1 = - \frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{-^{(2)}g} g^{\lambda\mu} \omega_\lambda^A \omega_{A\mu}, \quad (16.1.2.1)$$

где мы положили

$$\omega_\lambda^A = X^A_{,\lambda} - i\bar{\theta}^\alpha \gamma^A \theta^\alpha_{,\lambda} \quad (16.1.2.2)$$

($\omega^A = \omega_\lambda^A dx^\lambda$). Форма ω^A инвариантна при трансляциях и преобразованиях суперсимметрии и преобразуется как вектор при лоренцевых вращениях, так что лагранжиан L_1 , очевидно, является $SUSY$ -инвариантным.

В течение некоторого времени лагранжиан (16.1.2.1) считался искомым суперсимметричным лагранжианом. Но он даже не обладает калибровочной свободой, достаточной для того, чтобы быть линейризованным, и инвариантен только относительно двумерных репараметризаций. Его нелинейности не

позволяют строить разумную квантовую теорию. Можно лишь сказать, что он не соответствует свободной суперструне. Это означает, что выражение (16.1.2.1) составляет лишь одну часть полного лагранжиана.

К выражению (16.1.2.1) можно добавить члены, квадратичные по $\theta^{\alpha}_{\lambda}$, такие как $b_{\alpha\beta}\bar{\theta}^{\alpha}_{\lambda}\theta^{\beta}_{\mu}\sqrt{-g}g^{\lambda\mu}$. Но такие члены приводят к спинорным уравнениям второго порядка и, по-видимому, предполагают существование в спектре состояний с отрицательной нормой. Поэтому их следует отвергнуть.

Остается так называемый член Весса — Зумино [59], который всегда необходимо рассматривать в σ -моделях. Этот член $SUSY$ -инвариантен с точностью до полной дивергенции, следовательно, уравнения движения инвариантны. Кроме того, он квадратичен по производным полей и, таким образом, “конкурирует” с кинетическим членом L_1 .

Для построения лагранжиана Весса — Зумино L_2 сначала определяют замкнутые три формы Ω_3 на фактор-пространстве $SUSY(N)/SO(d-1, 1)$, инвариантные при преобразованиях $SUSY$. Эти замкнутые три-формы задаются путем образования внешних произведений инвариантных форм (16.1.1.3):

$$\Omega_3 = f_{\Gamma\Delta\Lambda}\omega^{\Gamma} \wedge \omega^{\Delta} \wedge \omega^{\Lambda}, \quad (16.1.2.3)$$

где прописные греческие индексы пробегает по всем один-формам (16.1.1.3), а $f_{\Gamma\Delta\Lambda}$ — константы.

Три-формы (16.1.2.3) лоренц-инвариантны, если константы $f_{\Gamma\Delta\Lambda}$ являются компонентами соответствующей лоренц-инвариантной величины. Единственная такая величина¹⁾ с подходящими индексами это $(\gamma_A C^{-1})_{ab} a_{\alpha\beta}$, где C — матрица зарядового сопряжения, а $a_{\alpha\beta}$ — чисто мнимая симметричная матрица²⁾ во внутреннем пространстве. Здесь a и b — спинорные индексы.

Матрица $a_{\alpha\beta}$ может быть диагонализирована вращениями во внутреннем пространстве координат θ . Поэтому без потери общности можно считать, что $a_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Следующий этап построения заключается в наложении на Ω_3 условия замкнутости: $d\Omega_3 = 0$. В явном виде $d\Omega_3$ задается

¹⁾ Если $d=3$, то имеется другой кандидат — форма $\varepsilon_{ABC}\omega^A \wedge \omega^B \wedge \omega^C$, которая, однако, не замкнута в суперпространстве. Кроме того, случай $f \sim \gamma_A \gamma_5 C^{-1} b_{\alpha\beta}$ может быть устранен переопределением θ^{α} .

²⁾ Матрица $a_{\alpha\beta}$ симметрична, поскольку матрица $(\gamma_A C^{-1})_{ab}$ также симметрична и $d\theta^{aa} \wedge d\theta^{bb} = d\theta^{bb} \wedge d\theta^{aa}$

выражением

$$d\Omega_3 = a_{11} (d\bar{\theta}^1 \wedge \gamma^A d\theta^1) \wedge (d\bar{\theta}^1 \wedge \gamma_A d\theta^1) + \\ + (a_{11} + a_{22}) (d\bar{\theta}^1 \wedge \gamma^A d\theta^1) \wedge (d\bar{\theta}^2 \wedge \gamma_A d\theta^2) + \\ + \text{аналогичные члены с } (\alpha, \beta) = (2, 2), (3, 3), (1, 3) \text{ и т. д.} \quad (16.1.2.4)$$

Диагональные члены в этом выражении исчезают вследствие тождества

$$\gamma_A \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma^A \psi_3 + \gamma_A \psi_2 \bar{\psi}_3 \gamma^A \psi_1 + \gamma_A \psi_3 \bar{\psi}_1 \gamma^A \psi_2 = 0, \quad (16.1.2.5)$$

которое выполняется для майорана-вейлевских спиноров при $d = 10$ и майорановских спиноров при $d = 4$ и 3 (а также для вейлевских спиноров при $d = 6$, для которых применим подобный анализ).

Без тождества (16.1.2.5) член

$$(d\bar{\theta}^1 \gamma^A \wedge d\theta^1) \wedge (d\bar{\theta}^1 \wedge \gamma_A d\theta^1) \quad (16.1.2.6)$$

не обращается в нуль. Тогда условие $d\Omega_3 = 0$ потребовало бы $a_{11} = 0$ (и $a_{22} = a_{33} = \dots = 0$), что уничтожило бы Ω_3 . Поэтому возможность построения нетривиальных действий Веса — Зумино существует только для отдельных значений размерности пространства-времени со спинорами определенного вида. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие ситуации, когда выполняется тождество (16.1.2.5).

Если существует только одна суперсимметрия ($N = 1$), то тождества (16.1.2.5) достаточно, чтобы обеспечить условие $d\Omega_3 = 0$, и условий на $a_{\alpha\beta}$ не возникает. Для $N \geq 2$ смешанные члены в выражении (16.1.2.4) сокращаются только в том случае, если

$$a_{\alpha\alpha} + a_{\beta\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (16.1.2.7)$$

Это исключает случаи $N > 2$, для которых это условие приводит к требованию равенства величин $a_{\alpha\beta}$ нулю. Остается единственная возможность $N = 2$ и

$$a_{11} = -a_{22} \Leftrightarrow \text{tr } a_{\alpha\beta} = 0. \quad (16.1.2.8)$$

Таким образом, исследование замкнутых инвариантных триформ приводит к следующим двум случаям:

$$N = 1, \quad \Omega_3 = i\omega^A \wedge d\bar{\theta}^1 \gamma_A \wedge d\theta, \quad (16.1.2.9)$$

$$N = 2, \quad \Omega_3 = ia(\omega^A \wedge d\bar{\theta}^1 \wedge \gamma_A d\theta^1 - \omega^A \wedge d\bar{\theta}^2 \wedge \gamma_A d\theta^2) \quad (16.1.2.10)$$

вместе с упомянутыми выше определенными значениями размерности пространства-времени.

Форма Ω_3 не только замкнутая, но также точная:

$$\Omega_3 = d\Omega_2, \quad (16.1.2.11a)$$

где

$$a^{-1}\Omega_2 = -i dX^A \wedge (\bar{\theta}^1 \gamma_A d\theta^1 - \bar{\theta}^2 \gamma_A d\theta^2) + \bar{\theta}^1 \gamma^A d\theta^1 \wedge \bar{\theta}^2 \gamma_A d\theta^2 \quad (16.1.2.11b)$$

для $N = 2$. (Для $N = 1$ просто опускаем в последнем выражении члены с θ^2 .)

Хотя Ω_3 $SUSY$ -инвариантна, два-форма Ω_2 , содержащая неинвариантные один-формы dX^A , инвариантна лишь с точностью до полной дивергенции (из $\delta\Omega_3 = 0$ следует, что $\delta\Omega_2 = d$ (что-нибудь)). Это и есть член Весса — Зумино. Обратное отображение в $(\tau - \sigma)$ -пространство дает лагранжиан L_2 :

$$a^{-1}L_2 = -i\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^A (\bar{\theta}^1 \gamma_A \partial_\beta \theta^1 - \bar{\theta}^2 \gamma_A \partial_\beta \theta^2) + \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}^1 \gamma^A \partial_\alpha \theta_1 \bar{\theta}^2 \gamma_A \partial_\beta \theta^2 \quad (16.1.2.12)$$

(для $N = 2$), который $SUSY$ -инвариантен с точностью до полной дивергенции.

Поскольку $N = 1$ -теория может рассматриваться как усечение $N = 2$ -теории, мы сосредоточим внимание здесь только на более сложном случае $N = 2$.

Заметим, что в десяти пространственно-временных измерениях можно выбрать майорана-вейлевские спиноры θ^1 и θ^2 с одинаковой или противоположными киральностями, поскольку в обоих случаях получаем $d\Omega_3 = 0$.

Обобщение выражения (16.1.2.12) на искривленное суперпространство обсуждается в работе [60].

16.1.3. Локальная суперсимметрия

Лагранжиан $L_1 + L_2$ при $a = \pm 1/2(\pi\alpha')^{-1}$ обладает замечательными свойствами. Он не только инвариантен при двумерных преобразованиях координат, но также обладает локальной симметрией нового типа [56]. Эта симметрия связана с произвольными функциями, являющимися одновременно d -мерными спинорами и 2-мерными векторами.

Для ее описания удобно ввести проекционные операторы

$$P_{\pm}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left(g^{\lambda\mu} \pm \frac{\varepsilon^{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}} \right), \quad (16.1.3.1)$$

которые проектируют двумерный вектор v^λ на его изотропные компоненты v_{\pm}^λ :

$$v_{\pm}^\lambda = P_{\pm}^{\lambda\mu} v^\mu, \quad (16.1.3.2)$$

где знаки \pm относятся к двум измерениям. Операторы $P_{\pm\mu}^\lambda$ удовлетворяют соотношениям

$$P_{+\mu}^\lambda P_{+\nu}^\mu = P_{+\nu}^\lambda, \quad (16.1.3.3a)$$

$$P_{-\mu}^\lambda P_{-\nu}^\mu = P_{-\nu}^\lambda, \quad (16.1.3.3б)$$

$$P_{+\mu}^\lambda P_{-\nu}^\mu = P_{-\mu}^\lambda P_{+\nu}^\mu = 0, \quad (16.1.3.3в)$$

$$(P_{+\mu}^\lambda)^T = P_{-\mu}^\lambda \quad (16.1.3.3г)$$

и не столь очевидному тождеству

$$P_{\pm}^{\lambda\rho} P_{\pm}^{\mu\sigma} = P_{\pm}^{\mu\rho} P_{\pm}^{\lambda\sigma}. \quad (16.1.3.4)$$

Если двумерный вектор удовлетворяет условию $v^\lambda = v_{\pm}^\lambda$, то он касателен к одному из изотропных направлений¹⁾.

Локальные преобразования суперсимметрии, относительно которых действие инвариантно, имеют следующий явный вид:

$$\delta_\kappa \theta^1 = 2i\omega_\lambda^A \gamma_A P_-^{\lambda\mu} \kappa_\mu^1, \quad (16.1.3.5a)$$

$$\delta_\kappa \theta^2 = 2i\omega_\lambda^A \gamma_A P_+^{\lambda\mu} \kappa_\mu^2, \quad (16.1.3.5б)$$

$$\delta_\kappa X^A = i(\bar{\theta}^1 \gamma^A \delta_\kappa \theta^1 + \bar{\theta}^2 \gamma^A \delta_\kappa \theta^2), \quad (16.1.3.5в)$$

$$\delta_\kappa (\sqrt{-g} g^{\lambda\mu}) = -16 \sqrt{-g} (P_-^{\lambda\rho} P_-^{\mu\sigma} \bar{\kappa}_\sigma^1 \partial_\rho \theta^1 + P_+^{\lambda\rho} P_+^{\mu\sigma} \bar{\kappa}_\sigma^2 \partial_\rho \theta^2), \quad (16.1.3.5г)$$

где κ_μ^1 и κ_μ^2 — инфинитезимальные параметры²⁾. Как отмечалось выше, эти параметры представляют собой двумерные векторы и чисто мнимые десятимерные спиноры с киральностью, противоположной той, которую имеют θ^1 или θ^2 (так что $\delta_\kappa \theta^\alpha$ имеет ту же киральность, что и θ^α).

Из системы (16.1.3.5) можно видеть, что в законы преобразования входят только спроецированные компоненты $\kappa_-^{1\lambda}$ и $\kappa_+^{2\lambda}$. Кроме того, поскольку двумерные изотропные компоненты ω_λ^A определяют десятимерные изотропные векторы

$$\eta_{AB} \omega_-^{A\mu} \omega_-^{B\nu} = \eta_{AB} \omega_+^{A\mu} \omega_+^{B\nu} = 0 \quad (16.1.3.6)$$

¹⁾ Если k^λ и n^λ — два ненулевых изотропных вектора, удовлетворяющих условиям $k^\lambda = k_+^\lambda$ и $n^\lambda = n_-^\lambda$ ($\Rightarrow k^\lambda k_\lambda = n^\lambda n_\lambda = 0$ и $k^\lambda n_\lambda \neq 0$ обычно нормируется на минус единицу), то легко видеть, что $v^\lambda = v_+^\lambda + v_-^\lambda$, $v_+^\lambda = v_+ k^\lambda$ и $v_-^\lambda = v_- n^\lambda$, где v_+ и v_- — компоненты v^λ в изотропной системе отсчета $\{k^\lambda, n^\lambda\}$.

²⁾ Нет нужды выписывать вариацию $g_{\lambda\mu}$, поскольку в действие входит только унимодулярная комбинация $\sqrt{-g} g^{\lambda\mu}$.

в результате полевых уравнений для метрики (см. следующий раздел), матрицы $\omega_{\pm}^{A\mu}\gamma_A$ необратимы (они нильпотентны). Таким образом, в соотношениях (16.1.3.5а)—(16.1.3.5в) содержится дополнительное проецирование пространственно-временных спиноров $\kappa_{\pm}^{1\lambda}$ и $\kappa_{\pm}^{2\lambda}$ на одну из их изотропных спинорных компонент. Поэтому количество действительных калибровочных параметров в этих соотношениях равно $2 \times 8 = 16$ (8 — количество компонент изотропного кирального спинора). Это верно также для преобразования (16.1.3.5г), если принять во внимание спинорные уравнения движения.

Для проверки инвариантности действия $S_1 + S_2$ (в котором $a = 1/2(\pi\alpha')^{-1}$) — объекта преобразований (16.1.3.5), заметим, что если вариация $\delta_{\kappa} X^A$ связана с $\delta_{\kappa}\theta^1$ и $\delta_{\kappa}\theta^2$ посредством уравнения (16.1.3.5в), то вариация действия дается выражением

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \delta(\sqrt{-g} g^{\lambda\mu}) \omega_{\lambda}^A \omega_{A\mu} - \\ & -\frac{i}{\pi\alpha'} \int \sqrt{-g} g^{\lambda\mu} \omega_{A\mu} (\bar{\theta}^1_{,\lambda} \gamma^A \delta\theta^1 + \bar{\theta}^2_{,\lambda} \gamma^A \delta\theta^2) - \\ & -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int \varepsilon^{\lambda\mu} \bar{\theta}^1 \gamma^A \delta\theta^1 \partial_{\lambda} \bar{\theta}^1 \gamma_A \partial_{\mu} \theta^1 + \\ & +\frac{1}{2\pi\alpha'} \int \varepsilon^{\nu\mu} \bar{\theta}^2 \gamma^A \delta\theta^2 \partial_{\lambda} \bar{\theta}^2 \gamma_A \partial_{\mu} \theta^2 + \\ & +\frac{i}{\pi\alpha'} \int \varepsilon^{\lambda\mu} \partial_{\lambda} X_A (\bar{\theta}^1_{,\mu} \gamma^A \delta\theta^1 - \bar{\theta}^2_{,\mu} \gamma^A \delta\theta^2) - \\ & -\frac{1}{\pi\alpha'} \int \varepsilon^{\lambda\mu} \partial_{\lambda} \bar{\theta}^1 \gamma^A \delta\theta^1 \bar{\theta}^2 \gamma_A \partial_{\mu} \theta^2 - \\ & -\frac{1}{\pi\alpha'} \int \varepsilon^{\lambda\mu} \bar{\theta}^1 \gamma^A \partial_{\lambda} \theta^1 \partial_{\mu} \bar{\theta}^2 \gamma_A \delta\theta^2, \end{aligned} \quad (16.1.3.7)$$

где мы проинтегрировали по частям, чтобы исключить производные от $\delta\theta^1$ и $\delta\theta^2$ (заметим, что они сокращаются в $\delta\omega_{\lambda}^A$).

Если теперь к членам $\partial_{\lambda} \bar{\theta}^1 \gamma_A \partial_{\mu} \theta^1$ и $\partial_{\lambda} \bar{\theta}^2 \gamma_A \partial_{\mu} \theta^2$ применить преобразование Фирца с помощью тождества (16.1.2.5), то в результате получим

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \delta(\sqrt{-g} g^{\lambda\mu}) \omega_{\lambda}^A \omega_{A\mu} - \\ & -\frac{2i}{\pi\alpha'} \int \sqrt{-g} (P_{-}^{\mu\lambda} \bar{\theta}^1_{,\lambda} \gamma^A \delta\theta^1 + P_{+}^{\mu\lambda} \bar{\theta}^2_{,\lambda} \gamma^A \delta\theta^2) \omega_{A\mu}. \end{aligned} \quad (16.1.3.8)$$

Дальнейшее использование уравнений (16.1.3.5) и (16.1.3.4) приводит к искомому результату $\delta S = 0$.

Поскольку параметры калибровочных преобразований антикоммутируют, данные преобразования можно называть “локаль-

ными суперсимметриями". Следует, однако, помнить, что эти параметры являются двумерными векторами. Новые калибровочные преобразования не вполне поняты (об этом подробнее см. ниже), неясно также их отношение к двумерной супергравитации¹⁾. Это является, вероятно, одной из причин того, что ковариантное квантование суперструны до сих пор не проведено до конца.

Добавочная калибровочная инвариантность дает достаточно свободы для фиксации калибровки, в которой теория может быть полностью разрешена как на классическом, так и на квантовом уровне. Без этой калибровочной инвариантности о квантовой теории, по-видимому, ничего нельзя сказать, так что мы отвергаем случаи $a \neq -1/2\pi\alpha'^2$) из соображений простоты.

Таким образом, окончательно ковариантное действие суперструны имеет вид

$$L = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{-g} g^{\lambda\mu} \omega_\lambda^A \omega_{A\mu} - \frac{i}{2\pi\alpha'} \varepsilon^{\lambda\mu} \partial_\lambda X^A (\bar{\theta}^1 \gamma_A \partial_\mu \theta^1 - \bar{\theta}^2 \gamma_A \partial_\mu \theta^2) + \frac{\varepsilon^{\lambda\mu}}{2\pi\alpha'} \bar{\theta}^1 \gamma^A \partial_\lambda \theta^1 \bar{\theta}^2 \gamma_A \partial_\mu \theta^2. \quad (16.1.3.9)$$

Это действие найдено Грином и Шварцем [56].

16.1.4. Уравнения движения и граничные условия

Уравнения движения, определяемые из лагранжиана (16.1.3.9), имеют вид

$$\omega_\lambda^A \omega_{A\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} g^{\rho\sigma} \omega_\rho^A \omega_{A\sigma} = 0, \quad (16.1.4.1)$$

$$\partial_\lambda [\sqrt{-g} (g^{\lambda\mu} \partial_\mu X^A - 2iP_-^{\lambda\mu} \bar{\theta}^1 \gamma^A \partial_\mu \theta^1 - 2iP_+^{\lambda\mu} \bar{\theta}^2 \gamma^A \partial_\mu \theta^2)] = 0 \quad (16.1.4.2)$$

и

$$\gamma_A \omega_\lambda^A P_-^{\lambda\mu} \partial_\mu \theta^1 = 0, \quad (16.1.4.3a)$$

$$\gamma_A \omega_\mu^A P_+^{\lambda\mu} \partial_\mu \theta^2 = 0. \quad (16.1.4.3б)$$

Первое уравнение получается при варьировании действия по компонентам метрики $g_{\lambda\mu}$, которые входят в L_1 только посредством унимодулярной комбинации $\sqrt{-g} g^{\lambda\mu}$ (действие вейль-

¹⁾ По этой причине потребовалось некоторое время, чтобы осознать, что эти калибровочные преобразования присутствуют даже в простейшем случае суперчастицы (см. работу [61]).

²⁾ Значение $a = -1/2\pi\alpha'$ получается из $a = 1/2\pi\alpha'$ перестановкой θ^1 и θ^2 .

инвариантно), так что среди уравнений (16.1.4.1) независимых только два: след уравнений (16.1.4.1) тождественно обращается в нуль.

Смысл уравнений (16.1.4.1) снова состоит в том, что метрика на мировой поверхности струны (в суперпространстве) вейлевским преобразованием может быть приведена к соответствующей индуцированной метрике $\omega_\lambda^A \omega_{A\mu}$. Следовательно, изотропные направления для $g_{\lambda\mu}$ совпадают с изотропными направлениями для $\omega_\lambda^A \omega_{A\mu}$, что и утверждалось ранее в уравнении (16.1.3.6). (Непосредственное доказательство уравнения (16.1.3.6) из (16.1.4.1) проводится следующим образом. Введем два изотропных вектора k^λ , n^λ , таких что $g_{\lambda\mu} = -k_\lambda n_\mu - k_\mu n_\lambda$. Запишем $\omega_\lambda^A = \omega_+^A k_\lambda + \omega_-^A n_\lambda$. Покажем, что уравнения (16.1.4.1) подразумевают $\omega_+^A \omega_{A+} = 0$, $\omega_-^A \omega_{A-} = 0$, т. е. $\omega_{+\lambda}^A \omega_{A+\mu} = \omega_+^A \omega_{A+} k_\lambda k_\mu = 0$, $\omega_{-\lambda}^A \omega_{A-\mu} = 0$.)

Уравнение (16.1.4.2) получается варьированием по X^A . Что же касается уравнений (16.1.4.3а) и (16.1.4.3б), то они эквивалентны уравнениям для θ -поля и могут быть из них легко получены с помощью X^A -полевых уравнений (16.1.4.2) (и некоторых преобразований Фирца).

В случае замкнутой струны поля естественно выбираются периодичными по σ , так как все они являются двумерными скалярами. В случае же открытой струны уравнения движения (16.1.4.1)—(16.1.4.3) должны быть дополнены граничными условиями, которые мы теперь определим.

Граничные условия для открытой суперструны должны быть таковы, чтобы при варьировании действия не возникало нежелательных поверхностных членов. Это будет иметь место, если на концах наложить условие [56]

$$\theta^1 = \theta^2 \quad (16.1.4.4)$$

вместе с условием

$$\omega^{A1} = 0. \quad (16.1.4.5)$$

При выполнении последнего условия варьирование $\int L_1 d^2x$ не приводит к появлению поверхностного члена при $\sigma = 0, \pi$. Следовательно, нужно проверить лишь $\int L_2 d^2x$.

Легко видеть, что условие (16.1.4.4) гарантирует отсутствие граничных членов при варьировании $\int L_2 d^2x$ по X^A . Проверка этого факта для случая варьирования по θ^1 и θ^2 непосредственна и не будет здесь воспроизводиться.

Граничные условия для замкнутой струны (16.1.4.4) предполагают, что θ^1 и θ^2 имеют одинаковую киральность. Кроме того, две глобальные суперсимметрии должны быть соотнесены так, чтобы сохранить условие (16.1.4.4). Поэтому остается только одна глобальная суперсимметрия, а это означает, что открытая суперструна является $N = 1$ -киральной теорией.

В случае замкнутой струны существуют две возможности в соответствии с тем, обладают ли θ^1 и θ^2 одинаковыми (теория Б) или противоположными (теория А) киральностями. Без каких-либо дальнейших ограничений эти теории имеют две суперсимметрии ($N = 2$).

16.1.5. Структура калибровочных симметрий

Как отмечалось выше, суперструна обладает тремя различными типами калибровочной инвариантности: репараметризационной инвариантностью, вейлевской инвариантностью и локальной фермионной симметрией. В то время как первые два типа инвариантности образуют истинные группы преобразований, последний обладает более сложной структурой. Вычисление антикоммутатора двух “суперкалибровочных” преобразований приводит к преобразованию очевидно нового типа (плюс члены, исчезающие на связях). Это “новое” преобразование имеет вид [56]

$$\delta_\Lambda \theta^1 = \sqrt{-g} P_-^{\lambda\mu} \partial_\mu \theta^1 \Lambda_\lambda, \quad (16.1.5.1a)$$

$$\delta_\Lambda \theta^2 = \sqrt{-g} P_+^{\lambda\mu} \partial_\mu \theta^2 \Lambda_\lambda, \quad (16.1.5.1б)$$

$$\delta_\Lambda X^A = i\bar{\theta}^1 \gamma^A \delta_\Lambda \theta^1 + i\bar{\theta}^2 \gamma^A \delta_\Lambda \theta^2, \quad (16.1.5.1в)$$

$$\delta_\Lambda (\sqrt{-g} g^{\lambda\mu}) = 0. \quad (16.1.5.1г)$$

Является ли это преобразование действительно новой калибровочной инвариантностью, подразумевающей дальнейшее вырождение кинетического члена в действии (и необходимость в собственных дұхах Фаддеева — Попова и т. д.), или это калибровочное преобразование тривиального типа?

Легко видеть, что любое действие $S[q^i]$ всегда обладает инвариантностью

$$\delta q^i = \frac{\delta S}{\delta q^i} \epsilon^{ij}, \quad (16.1.5.2)$$

где величина $\epsilon^{ij} = (-)^{\epsilon_i \epsilon_j + 1} \epsilon^{ji}$ совершенно произвольна. В самом деле, имеем

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta q^i} \delta q^i = \frac{\delta S}{\delta q^i} \frac{\delta S}{\delta q^j} \epsilon^{ij} = 0, \quad (16.1.5.3)$$

где ϵ_i — грассманова четность q^i .

Но это преобразование тривиально, поскольку исчезает на связях и не означает само по себе наличия какого-либо вырождения в действии или неоднозначности в задаче Коши. Поэтому важно установить, является ли (16.1.5.1) действительным калибровочным преобразованием или же преобразованием тривиального типа (16.1.5.2).

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что преобразование (16.1.5.1) сводится к соответствующему суперкалибровочному преобразованию (16.1.3.5), если использовать уравнения движения. Соответственно ничего нового не возникает.

Упражнение. Рассмотрите действие $S[q^i]$, инвариантное относительно преобразований, исчезающих на связях. Покажите, что эта инвариантность с необходимостью должна быть вида (16.1.5.12), где $\epsilon^{ij} = (-)^{\epsilon_i \epsilon_j + 1} \epsilon^{ji}$, если уравнения движения независимы. (Если они не являются независимыми, то использование их зависимости опять-таки позволяет записать инвариантность в виде (16.1.5.2).)

Уравнения движения для θ можно переписать в виде

$$\gamma_A \omega_+^A \partial_- \theta^1 = 0, \quad (16.1.5.4a)$$

$$\gamma_A \omega_-^A \partial_+ \theta^2 = 0. \quad (16.1.5.4b)$$

Вместе с уравнениями для метрики $(\omega_+^A)^2 = (\omega_-^A)^2 = 0$ соотношения (16.1.5.4) предполагают, что

$$\partial_- \theta^1 = \gamma_A \omega_+^A S^1, \quad (16.1.5.5a)$$

$$\partial_+ \theta^2 = \gamma_A \omega_-^A S^2. \quad (16.1.5.5b)$$

Упражнение. Выведите уравнения (16.1.5.5).

Далее, уравнения (16.1.5.5) позволяют представить преобразования (16.1.5.1a) и (16.1.5.1b) в виде

$$\delta_\Lambda \theta^1 = \sqrt{-g} \partial_- \theta^1 \Lambda_+ = \sqrt{-g} \gamma_A \omega_+^A S^1 \Lambda_+,$$

$$\delta_\Lambda \theta^2 = \sqrt{-g} \gamma_A \omega_-^A S^2 \Lambda_-,$$

что согласуется с (16.1.3.5a) и (16.1.3.5b) при $2i\kappa_-^1 = \sqrt{-g} S^1 \Lambda_+$ и $2i\kappa_-^2 = \sqrt{-g} S^2 \Lambda_-$. После того, как это установлено, эквивалентность соотношений (16.1.5.1b) и (16.1.3.5b) следует немедленно. Остается проверить, что преобразование (16.1.3.5g) исчезает на связях, когда κ^1 и κ^2 задаются приведенными выше

выражениями. Это можно сделать так:

$$\delta_x (\sqrt{-g} g^{\rho\sigma}) = -8ig (n^0 n^\sigma \Lambda_+ \bar{S}^1 \gamma_A \omega_+^A S^1 + k^0 k^\sigma \Lambda_- \bar{S}^2 \gamma_A \omega_+^A S^2) = 0,$$

поскольку матрица $S\gamma_A$ симметрична; здесь n^ρ и k^ρ — введенные выше изотропные векторы.

Можно сделать заключение, что преобразование (16.1.5.1) не есть дополнительная локальная инвариантность, а сводится к (16.1.3.5) на связях. Поэтому система координатных и суперкалибровочных преобразований при использовании уравнений движения замкнута.

16.1.6. Суперзаряды Пуанкаре

Суперзаряды Пуанкаре вычисляются путем применения теоремы Нётер. При этом имеется одна тонкость. Действительно, действие при преобразованиях суперсимметрии инвариантно только с точностью до полной дивергенции, поэтому сохраняющийся суперсимметричный ток содержит дополнительный вклад от этой дивергенции.

Трансляционный ток задается выражением

$$j_A^\mu = -\frac{1}{i2\pi\alpha'} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} X_{A,\nu} + \frac{i}{\pi\alpha'} \sqrt{-g} (P_-^{\mu\nu} \bar{\theta}^1 \gamma_A \partial_\nu \theta^1 + P_+^{\mu\nu} \bar{\theta}^2 \gamma_A \partial_\nu \theta^2), \quad (16.1.6.1)$$

а лоренцевы токи — выражением

$$j_{AB}^\mu = j_{[A}^\mu X_{B]} - \frac{i}{4\pi\alpha'} \bar{\theta}^1 \gamma_{ABC} \theta^1 (P_+^{\mu\nu} \omega_\nu^C + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \bar{\theta}^1 \gamma^C \partial_\nu \theta^1) - \frac{i}{4\pi\alpha'} \bar{\theta}^2 \gamma_{ABC} \theta^2 (P_-^{\mu\nu} \omega_\nu^C - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \bar{\theta}^2 \gamma^C \partial_\nu \theta^2). \quad (16.1.6.2)$$

Выражение для суперсимметричных токов может быть получено из уравнений

$$Q^{1\mu} = i\gamma^A \theta^1 \frac{\partial L}{\partial X_{,\mu}^A} + \frac{\partial L}{\partial \bar{\theta}^1_{,\mu}} - Y^{1\mu}, \quad (16.1.6.3a)$$

$$Q^{2\mu} = i\gamma^A \theta^2 \frac{\partial L}{\partial X_{,\mu}^A} + \frac{\partial L}{\partial \bar{\theta}^2_{,\mu}} - Y^{2\mu}, \quad (16.1.6.3b)$$

где $Y^{1\mu}$ и $Y^{2\mu}$ — полные дивергенции, на которые преобразуется действие при суперсимметриях. Свойство Фирца (16.1.2.5) позволяет записать

$$Y^{1\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \gamma_A \theta^1 \varepsilon^{\mu\nu} (i\partial_\nu X^A + \frac{1}{3} \bar{\theta}^1 \gamma^A \partial_\nu \theta^1), \quad (16.1.6.4a)$$

$$Y^{2\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \gamma_A \theta^2 \varepsilon^{\mu\nu} (-i\partial_\nu X^A - \frac{1}{3} \bar{\theta}^2 \gamma^A \partial_\nu \theta^2), \quad (16.1.6.4b)$$

поэтому

$$Q^{1\mu} = -\frac{2i}{\pi\alpha'} \gamma_A \theta^1 \left(\sqrt{-g} P_+^{\mu\nu} \omega_\nu^A + \frac{2i}{3} \varepsilon^{\mu\nu} \bar{\theta}^1 \gamma^A \partial_\nu \theta^1 \right), \quad (16.1.6.5a)$$

$$Q^{2\mu} = -\frac{2i}{\pi\alpha'} \gamma_A \theta^2 \left(\sqrt{-g} P_-^{\mu\nu} \omega_\nu^A - \frac{2i}{3} \varepsilon^{\mu\nu} \bar{\theta}^2 \gamma^A \partial_\nu \theta^2 \right). \quad (16.1.6.5б)$$

В случае замкнутой струны соответствующие заряды, получаемые интегрированием по пространству временных компонент токов, автоматически сохраняются как следствие уравнения непрерывности.

В случае открытой струны поток энергии-импульса или углового момента через концы струны равен нулю вследствие граничных условий. Для суперзарядов это не имеет места. Оказывается, что сохраняется лишь сумма $Q^1 + Q^2$. Одна из двух глобальных суперсимметрий нарушена граничными условиями.

16.1.7. Гамильтонов формализм

Полный и удовлетворительный гамильтонов формализм для суперструны до сих пор не построен из-за следующих трудностей:

1. Действие (16.1.3.9) приводит к связям в каноническом формализме. Некоторые из этих связей принадлежат первому роду и генерируют калибровочные инвариантности теории. Но существуют также связи второго рода, возникающие вследствие отсутствия независимого кинетического члена для спиноров. Для перехода к квантовой теории необходимо устранить все связи второго рода и заменить скобки Пуассона скобками Дирака. Основная проблема состоит в том, что это нельзя сделать приемлемым образом: трудно разделить связи первого и второго рода, не нарушив при этом явную суперпуанкаре-инвариантность [62, 63]. Главная причина применения метода связей заключается в сохранении глобальных инвариантностей.

2. “Алгебра” связей первого рода не есть супералгебра Вирасоро в соответствии с тем обстоятельством, что теория не есть $2d$ -супергравитация. Фактически алгебра связей есть открытая алгебра со структурными функциями, содержащими поля. Это соответствует тому факту, что калибровочные преобразования замкнуты только на связях, и означает, что для построения БРСТ-заряда необходимо применять весь аппарат, развитый школой Фрадкина [30, 31]. Кроме того, неясно, как придать квантовый смысл нелинейным членам, которые возникнут в Ω .

3. Суперкалибровочные спинорные параметры κ_-^1 и κ_+^2 являются избыточными на связях. Если $\omega_+^A \gamma_A \kappa_-^1 = 0$ и $\omega_-^A \gamma_A \kappa_+^2 = 0$, то правые части преобразований (16.1.3.5a) — (16.1.3.5г) обра-

щаются в нуль. Это ведет к дальнейшему усложнению БРСТ-формализма.

Это все, что мы намеревались сказать по поводу гамильтонова формализма, поскольку ко времени написания данной книги существует не слишком много сведений на эту тему. Для иллюстрации трудностей мы обсудим ниже в деталях суперчастицу, являющуюся нульмодовым усечением суперструны.

16.1.8. Калибровка светового конуса

Гораздо более просто проводится квантование суперструны в калибровке светового конуса. Используя координатную свободу, можно перейти к “конформной калибровке”

$$\sqrt{-g} g^{\lambda\mu} = \eta^{\lambda\mu}. \quad (16.1.8.1)$$

В общем случае допустимость конформной калибровки определяется теми же условиями, что и в чисто бозонном случае. Однако в отличие от ситуации в модели бозонной струны выбор конформной калибровки не линеаризует уравнения движения. Для достижения этой цели необходимо фиксировать также локальную фермионную инвариантность.

Основное отличие от модели спиновой струны Невё — Шварца — Рамона состоит в том, что этот второй шаг не может быть проделан ковариантно, по крайней мере простым способом. Причину этого эвристически можно понять так. Спинорные параметры κ_-^1 и κ_+^2 являются избыточными на связях, т. е. не все они определяют независимые калибровочные преобразования. Истинное число калибровочных инвариантностей, содержащихся в κ_-^1 , равно не 16 (т. е. числу независимых компонент майорана-вейлевского спинора), как может показаться на первый взгляд, а только половине этого числа, а именно 8; если $\kappa_-^1 = \omega_+^A \gamma_A \epsilon$, то соответствующие вариации полей обращаются в нуль. Это число 8 не соответствует представлению лоренцевой группы $SO(9, 1)$, поэтому трудно найти 8 независимых лоренц-ковариантных условий, фиксирующих фермионную калибровочную симметрию, описываемую κ_-^1 .

Ввиду этой трудности вместе с конформной калибровкой (16.1.8.1) наложим лучше на спиноры простые, нековариантные условия, а именно

$$\gamma^+\theta^1 = 0 = \gamma^+\theta^2, \quad (16.1.8.2)$$

где $\gamma^+ = (\gamma^0 + \gamma^9)$; индекс “+” относится к десяти измерениям¹⁾. Условия (16.1.8.2) содержат только $8 + 8$ независимых уравнений, как и требуется для вымораживания $(8 + 8)$ -кратной калибровочной свободы.

Эти условия полностью фиксируют неизбыточную свободу, содержащуюся в $\kappa_-^1 \equiv \kappa^1$ и $\kappa_+^2 \equiv \kappa^2$. Действительно, всегда можно записать²⁾

$$\kappa^1 = \varepsilon + \omega_A^+ \gamma_A \eta, \quad (16.1.8.3)$$

где $\gamma^+ \varepsilon = \gamma^+ \eta = 0$. Чтобы показать это, умножим (16.1.8.3) на γ^+ и получим

$$\gamma^+ \kappa^1 = \gamma^+ \omega_+^A \gamma_A \eta = \frac{1}{2} \omega_+^A (\gamma^+ \gamma_A + \gamma_A \gamma^+) \eta = \frac{1}{2} \omega_+^+ \eta, \quad (16.1.8.4)$$

где верхний индекс + в ω_+^+ относится к десяти измерениям, а нижний — к двум. Если $\omega_+^+ \neq 0$, как мы приняли³⁾, это уравнение определяет η и ε . Следовательно,

$$\kappa^1 = \left(\kappa^1 - \frac{2\omega_+^A \gamma_A \gamma^+ \kappa^1}{\omega_+^+} \right) + 2 \frac{\omega_+^A \gamma_A \gamma^+}{\omega_+^+} \kappa^1, \quad (16.1.8.5)$$

что доказывает уравнение (16.1.8.3).

κ^1 -Калибровочная свобода полностью фиксируется калибровочным условием (16.1.8.2) только в том случае, если κ^1 -калибровочные преобразования, оставляющие $\gamma^+ \theta^1$ равным нулю, характеризуются условием $\varepsilon = 0$, т. е. на связях они на поля не действуют. Это условие выполнено, поскольку $\delta \theta^1$ задается выражением

$$\delta \theta^1 = 2i \omega_+^A \gamma_A \kappa^1.$$

Следовательно, вариация калибровочных условий (16.1.8.2) дает

$$0 = \delta (\gamma^+ \theta^1) = 2i \gamma^+ \omega_+^A \gamma_A \kappa^1 = 2i \gamma^+ \omega_+^A \gamma_A \varepsilon. \quad (16.1.8.6)$$

Используя антикоммутационное соотношение для γ -матриц и условие $\gamma^+ \varepsilon = 0$, получаем отсюда $\varepsilon = 0$, как и требовалось.

Аналогично доказывается, что условие $\gamma^+ \theta^2 = 0$ фиксирует неизбыточную часть κ^2 -калибровочной свободы.

¹⁾ Для сохранения лоренцевой инвариантности можно было бы вместо этого принять условие $\omega_-^A \gamma_A \theta^1 = \omega_+^A \gamma_A \theta^2 = 0$, где ω_\pm^A — изотропные направления вдоль мировой поверхности струны. Но это приводит к сложным уравнениям. Кроме того, эта схема не прошла бы для основного состояния (суперчастицы).

²⁾ Некоторые приемы работы в калибровке светового конуса изложены в приложении В.

³⁾ Случай $\omega_+^+ = 0$ есть обычная инфракрасная сингулярность световой калибровки.

При выполнении условия (16.1.8.2) уравнения движения для полей существенно упрощаются. Билинейные члены $\bar{\theta}^1 \gamma^+ \partial_\mu \theta^1$, $\bar{\theta}^2 \gamma^+ \partial_\mu \theta^2$, $\bar{\theta}^1 \gamma^i \partial_\mu \theta^1$ и $\bar{\theta}^2 \gamma^i \partial_\mu \theta^2$ обращаются в нуль:

$$\bar{\theta}^1 \gamma^+ \partial_\mu \theta^1 = \bar{\theta}^2 \gamma^+ \partial_\mu \theta^2 = 0, \quad (16.1.8.7a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^1 \gamma^i \partial_\mu \theta^1 &= -\frac{1}{2} \bar{\theta}^1 (\gamma^+ \gamma^- + \gamma^- \gamma^+) \gamma^i \partial_\mu \theta^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\theta}^1 \gamma^- \gamma^+ \gamma^i \partial_\mu \theta^1 = \frac{1}{2} \bar{\theta}^1 \gamma^- \gamma^i \gamma^+ \partial_\mu \theta^1 = 0, \end{aligned} \quad (16.1.8.7б)$$

$$\bar{\theta}^2 \gamma^i \partial_\mu \theta^2 = 0, \quad (16.1.8.7в)$$

так что уравнения для X^+ и X^i становятся обычными уравнениями Даламбера в двух измерениях:

$$\square X^+ = \square X^i = 0. \quad (16.1.8.8)$$

Одновременно спинорные уравнения $\gamma_A \omega_+^A \partial_- \theta^1 = 0$ и $\gamma_A \omega_-^A \partial_+ \theta^2 = 0$ можно заменить уравнениями

$$\partial_- \theta^1 = 0, \quad (16.1.8.9a)$$

$$\partial_+ \theta^2 = 0, \quad (16.1.8.9б)$$

как легко видеть после умножения на γ^+ .

Условие гармоничности X^+ (16.1.8.8) можно использовать, чтобы провести конформное преобразование координат, в котором новое время определяется величиной X^+ :

$$X^+ = 2\rho^+ \alpha' \tau \quad (\text{открытая струна}), \quad (16.1.8.10)$$

где ρ^+ — полный пространственно-временной импульс в $+$ -направлении.

Это полностью аналогично бозонному случаю, и мы находим также, что плотность импульса в $+$ -направлении постоянна:

$$j^{+0}(\sigma) = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_+} = \frac{\rho^+}{\pi} \quad (\text{открытая струна}). \quad (16.1.8.11)$$

Условия (16.1.8.10), (16.1.8.11) и (16.1.8.2) определяют калибровку светового конуса для открытой суперструны. При их выполнении остаточная калибровочная инвариантность отсутствует. Световая калибровка для замкнутой суперструны определяется аналогичными уравнениями с заменой π на 2π в соответствии с нашими соглашениями. В последнем случае условия (16.1.8.10) и (16.1.8.11) также не полностью фиксируют систему координат. Остаточная калибровочная инвариантность заключается в независимых от σ трансляциях вдоль σ -направления.

Соответствующая связь соотносит количество право- и левобегущих мод.

Для описания динамики в световой калибровке удобно ввести действие световой калибровки, которое получается просто подстановкой калибровочных условий в ковариантное действие. Получаем

$$S^{L.C.} = \int d\tau d\sigma \left[- (4\pi\alpha')^{-1} \sum_{i=1}^8 \eta^{\lambda\mu} \partial_\lambda X^i \partial_\mu X^i + i \frac{p^+}{\pi} \bar{\theta} \gamma^- \rho^\lambda \partial_\lambda \theta \right], \quad (16.1.8.12)$$

где

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta} = \begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \end{pmatrix} \rho^0, \quad (16.1.8.13)$$

а ρ^λ — двумерные матрицы Дирака:

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.1.8.14)$$

При выводе выражения (16.1.8.12) мы использовали условие $\dot{p}^+ = 0$ (которое является следствием уравнений движения для X^-) и опустили соответствующие полные производные по времени¹⁾.

Легко проверить, то уравнения Эйлера — Лагранжа, следующие из выражения (16.1.8.12), являются правильными светокалибровочными уравнениями (16.1.8.8) и (16.1.8.9) для физических поперечных мод X^i , θ^1 и θ^2 . В частности, мы видим, что уравнения (16.1.8.9) включают двумерные уравнения Дирака.

Действие световой калибровки полностью описывает открытую суперструну в калибровке светового конуса. В случае замкнутой струны к действию необходимо добавить связь на равенство номеров уровней в правобегущем и левобегущем секторах.

Наконец, для завершения светокалибровочного анализа суперструны необходимо построить супергенераторы Пуанкаре. Это делается так же, как в предыдущих моделях, путем выражения зависимых переменных через независимые. Непосредственную запись суперзарядов Пуанкаре в калибровке светового конуса мы оставляем читателю [55]. Для этого тре-

¹⁾ Мы не совсем строго рассматриваем нулевые моды p^+ и X_0^- , так как используем их уравнения движения внутри действия. Более строгий анализ, в котором эти моды последовательно рассматриваются как динамические переменные, читатель найдет в разделах, посвященных бозонной струне и суперчастице.

буются лишь выражения для \dot{X}^- и X'^- , которые следуют из связи

$$(16.1.4.1) \quad \eta_{AB} \omega_\lambda^A \omega_\mu^B = \phi g_{\lambda\mu}:$$

$$\dot{X}^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^{i2} + X'^{i2}) + i\bar{\theta}^1 \gamma^- \dot{\theta}^1 + i\bar{\theta}^2 \gamma^- \dot{\theta}^2, \quad (16.1.8.15a)$$

$$X'^- = \frac{1}{2\alpha' p^+} \dot{X}^i X'^i + i\bar{\theta}^1 \gamma^- \theta^{1'} + i\bar{\theta}^2 \gamma^- \theta^{2'}. \quad (16.1.8.15b)$$

Величина X^- квадратична по другим переменным, поэтому супергенераторы Пуанкаре приобретают кубические вклады.

16.2. Квантовая теория

По причинам, изложенным выше, до сих пор развито только квантование суперструны в калибровке светового конуса. На этом этапе читатель уже должен быть способен провести квантовый светокалибровочный анализ суперструны, который аналогичен анализу в бозонном случае [36]. Поэтому мы лишь воспроизведем результаты.

Оказывается, что квантовая супералгебра Пуанкаре не имеет аномалии только в десяти измерениях [36, 44, 55]. Спектр открытой $d=10$ -суперструны соответствует суперсимметричному усечению открытой фермионной струны Невё — Шварца — Рамона, которая обладает $N=1$ -суперсимметрией. Частицы основного состояния образуют суперянг-миллсовский калибровочный мультиплет.

Спектр замкнутой суперструны может быть снова усечен путем удержания только таких состояний, которые симметричны при замене $\sigma \rightarrow -\sigma$ (неориентированная суперструна \equiv замкнутая суперструна типа I). Это симметричное усечение не инвариантно при обеих суперсимметриях, а обладает лишь $N=1$ -суперсимметрией. Основным состоянием является калибровочный мультиплет $d=10$, $N=1$ -супергравитации. Спектр совпадает с суперсимметричным усечением замкнутой фермионной струны Невё — Шварца — Рамона. Можно показать, что взаимодействия открытых суперструн могут породить замкнутую суперструну типа I, так что они вместе образуют единую "теорию типа I".

Полный спектр замкнутой суперструны не инвариантен при замене $\sigma \rightarrow -\sigma$, поэтому он соответствует ориентированной струне ("типа II"). Он обладает $N=2$ -суперсимметрией. В зависимости от относительных киральностей θ^1 и θ^2 теория называется теорией типа IIa или типа IIb. Основные состояния этих теорий являются калибровочными мультиплетами двух различных моделей $d=10$, $N=2$ -супергравитации (тип IIa

соответствует размерной редукции $d = 11$, $N = 1$ -супергравитации; тип IIb — $d = 10$, $N = 2$ -киральной супергравитации). Подробнее об этом см. работу [36].

16.3. Суперчастица

16.3.1. Действие — калибровочные симметрии

Действие, описывающее безмассовую суперчастицу, определяется выражением [64]

$$S[V, X^A, \theta] = -\frac{1}{2} \int V^{-1} \omega^A \omega_A d\tau, \quad (16.3.1.1)$$

где

$$\omega^A = \dot{X}^A - i\bar{\theta}\gamma^A\dot{\theta}. \quad (16.3.1.2)$$

Оно является очевидным расширением действия безмассовой бесспиновой релятивистской частицы. Здесь V — “айнбайн”, X^A ($A = 0, 1, \dots, 9$) — координаты частицы и θ — внутренняя степень свободы, для простоты удовлетворяющая майорана-вейлевскому условию.

При усечении суперструны в нульмодовый сектор путем отбрасывания высших мод получаем действие (16.3.1.1). Поэтому это действие представляет основное состояние суперструны, и очевидна важность понимания его динамики.

Интересной чертой суперчастицы является иллюстрация на примере этой простой модели основных затруднений, возникающих при ковариантном квантовании суперструны.

Действие (16.3.1.1) инвариантно при репараметризациях

$$\delta X^A = \epsilon \dot{X}^A, \quad \delta \theta = \epsilon \dot{\theta}, \quad (16.3.1.3a)$$

$$\delta V = \epsilon \dot{V} + \dot{\epsilon} V = (\epsilon V)^{\cdot}, \quad (16.3.1.3b)$$

а также при калибровочных фермионных преобразованиях, аналогичных (16.1.3.5) [61]:

$$\delta_{\kappa} \theta = i \hat{\omega} \kappa, \quad (16.3.1.4a)$$

$$\delta_{\kappa} X^A = i \bar{\theta} \gamma^A \delta_{\kappa} \theta, \quad (16.3.1.4b)$$

$$\delta_{\kappa} V = 4V \dot{\theta} \kappa, \quad (16.3.1.4в)$$

где мы положили $\hat{\omega} = \omega_A \gamma^A$.

Уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\omega^A \omega_A = 0, \quad (16.3.1.5a)$$

$$(V^{-1} \omega^A)^{\cdot} = 0, \quad (16.3.1.5b)$$

$$\hat{\omega}\dot{\theta} = 0. \quad (16.3.1.5в)$$

Из уравнения (16.3.1.5а) видно, что ω^A — изотропный вектор. Следовательно, матрица $\hat{\omega}$ нильпотентна и не может быть обращена, что полностью аналогично соответствующему факту для суперструны.

Уравнение (16.3.1.5в) означает, что

$$\dot{\theta} = \hat{\omega}s, \quad (16.3.1.6)$$

поскольку ядро оператора $\hat{\omega}$ совпадает с его образом, если вектор ω^A изотропен; это свойство мы уже использовали. Интегрирование уравнения (16.3.1.6) дает

$$\theta(\tau) = \theta_0 + \hat{\omega}\phi(\tau), \quad (16.3.1.7)$$

где $\dot{\phi} + (\dot{V}/V)\phi = s$. Спинор $\phi(\tau)$ не определяется уравнениями движения, что согласуется с калибровочной инвариантностью (16.3.1.4).

Из уравнений (16.3.1.6) и (16.3.1.5а) следует, что фермионные калибровочные преобразования (16.3.1.4) являются избыточными на связях. Если $\kappa = \hat{\omega}\epsilon$, то $\delta_\kappa\theta$ и $\delta_\kappa X^A$, очевидно, обращаются в нуль, а $\delta_\kappa V$ принимает вид

$$\delta_\kappa V = -4V\bar{s}\hat{\omega}\kappa = 0.$$

Как указали Грин и Шварц [56], действие обладает также бозонной инвариантностью:

$$\delta_\lambda\theta = \lambda\dot{\theta}, \quad (16.3.1.8а)$$

$$\delta_\lambda X^A = i\bar{\theta}\gamma^A\delta_\lambda\theta, \quad (16.3.1.8б)$$

$$\delta_\lambda V = 0, \quad (16.3.1.8в)$$

возникающей при попытке замкнуть алгебру преобразований (16.3.1.3) и (16.3.1.4). Но преобразования (16.3.1.8) отличаются от (16.3.1.4) лишь членами, обращающимися в нуль при использовании уравнений поля. Это можно показать тем же способом, что и в случае суперструны. Поэтому система (16.3.1.8) не дает ничего нового.

16.3.2. Суперзаряды Пуанкаре

Действие инвариантно при глобальных суперпреобразованиях Пуанкаре

$$\delta\theta = \frac{1}{4}\omega_{AB}\gamma^{AB}\theta + \epsilon, \quad (16.3.2.1а)$$

$$\delta X^A = \omega^A_B X^B + i\bar{\epsilon}\gamma^A\theta + a^A. \quad (16.3.2.1б)$$

Непосредственное применение теоремы Нётер дает суперзаряды Пуанкаре

$$P^A = -V^{-1}\omega^A, \quad (16.3.2.2a)$$

$$M^{AB} = P^{[A}X^{B]} - \frac{i}{4}P_C\bar{\theta}\gamma^{ABC}\theta, \quad (16.3.2.2б)$$

$$Q = 2iP_A\gamma^A\theta. \quad (16.3.2.2в)$$

16.3.3. Гамильтонов формализм

Поскольку теория обладает калибровочными инвариантностями, следует ожидать появления связей в гамильтоновом формализме.

Импульсы, сопряженные V , X^A и θ , имеют вид

$$p_V = 0, \quad (16.3.3.1)$$

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^A} = -V^{-1}\omega_A = P_A, \quad (16.3.3.2)$$

$$\bar{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -i\bar{\theta}\hat{p}. \quad (16.3.3.3)$$

Выражения (16.3.3.1) и (16.3.3.3) определяют первичные связи:

$$p_V = 0, \quad (16.3.3.4a)$$

$$\bar{\chi} \equiv \bar{p}_\theta + i\bar{\theta}\hat{p} = 0. \quad (16.3.3.4б)$$

Гамильтониан определяется выражением

$$\begin{aligned} H &= \dot{V}p_V + \dot{X}^A p_A + \bar{p}_\theta \dot{\theta} - L + \lambda p_V + (\bar{p}_\theta + i\bar{\theta}\hat{p})\mu = \\ &= -\frac{1}{2}V p_A p^A + \lambda p_V + (\bar{p}_\theta + i\bar{\theta}\hat{p})\mu, \end{aligned} \quad (16.3.3.5)$$

где λ и μ — лагранжевы множители (λ — скаляр, а μ — майорана-вейлевский спинор).

Сохранение во времени первичной связи $p_V = 0$ приводит к вторичной связи

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2}p_A p^A = 0 \quad (16.3.3.6)$$

(условие массовой поверхности).

Сохранение во времени связи (16.3.3.4б) налагает условие на множитель μ :

$$S\hat{p}\mu = 0 \rightarrow \hat{p}\mu = 0 \rightarrow \mu = \hat{p}\nu. \quad (16.3.3.7)$$

Гамильтониан сохраняет во времени вторичную связь (16.3.3.6), поэтому “алгоритм согласованности” заканчивается.

Так как пара (p_V, V) есть чистая калибровка, импульс p_V можно опустить и рассматривать V как лагранжев множитель для связи (16.3.3.6). Поэтому суперчастица описывается каноническими парами (X^A, p_A) и (θ, \bar{p}_θ) , удовлетворяющими соотношениям

$$[X^A, p_B] = \delta^A_B, \quad (16.3.3.8a)$$

$$[\theta^\alpha, \bar{p}_{\theta\beta}] = [\bar{p}_{\theta\beta}, \theta^\alpha] = \delta^\alpha_\beta \quad (16.3.3.8b)$$

(где теперь α — спинорный индекс), связями (16.3.3.6) и (16.3.3.4b) и гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} V p_A p^A + \bar{p}_\theta \hat{p} v. \quad (16.3.3.9)$$

В последнем выражении множитель V переопределен, чтобы получить более простой вид для H .

Гамильтониан слабо обращается в нуль, что соответствует общековариантным системам.

16.3.4. Смысл связей

Среди связей некоторые соответствуют калибровочным инвариантностям теории, другие же возникают как следствие отсутствия независимого кинетического члена, квадратичного по фермионам.

Связи, соответствующие калибровочным инвариантностям, называются связями первого рода и характеризуются свойством слабо коммутировать с остальными связями. Чтобы отождествить их, вычислим алгебру связей

$$[\mathcal{H}, \bar{\chi}_\alpha] = 0, \quad (16.3.4.1a)$$

$$[\bar{\chi}_\alpha, \bar{\chi}_\beta] = 2i (\gamma_0 \hat{p})_{\alpha\beta}. \quad (16.3.4.1b)$$

Связь \mathcal{H} , очевидно, принадлежит первому роду. Она является генератором локальных репараметризаций, сопровождаемых соответствующим преобразованием (16.3.1.8), таким, что $\delta\theta = 0$.

Но поскольку матрица в правой части соотношения (16.3.4.1b) не обращается в нуль, связи $\bar{\chi}$ не все принадлежат первому роду. Как следствие условия массовой поверхности ранг матрицы $(\gamma_0 \hat{p})_{\alpha\beta}$ равен 8 (в подпространстве вейлевских спиноров), так что из 16 майорана-вейлевских связей $\bar{\chi}_\alpha = 0$ 8 принадлежат первому роду и 8 второму.

Связи первого рода могут быть отделены ковариантным, но избыточным способом путем действия \hat{p} на $\bar{\chi}$:

$$\bar{\chi} \hat{p} = \bar{p}_\theta \hat{p} + i \bar{\theta} p^2 \approx \bar{\phi} \equiv \bar{p}_\theta \hat{p}. \quad (16.3.4.2)$$

Имеем

$$[\bar{\phi}_\alpha, \mathcal{H}] = 0, \quad (16.3.4.3a)$$

$$[\bar{\phi}_\alpha, \bar{\chi}_\beta] = 2i(\gamma_0)_{\alpha\beta} \mathcal{H} \approx 0, \quad (16.3.4.3b)$$

а также

$$[\bar{\phi}_\alpha, \bar{\phi}_\beta] = 0. \quad (16.3.4.4)$$

Замена $\bar{\chi}\hat{p}$ на $\bar{\phi}$ основана на последнем соотношении, которое делает алгебру связей первого рода абелевой.

Легко проверить, что $\bar{\phi}_\alpha$ (слабо) генерирует фермионную калибровочную симметрию (16.3.1.4) (плюс соответствующая репараметризация):

$$[\theta, \bar{\phi}_\nu] = \hat{p}_\nu, \quad (16.3.4.5a)$$

$$[X^A, \bar{\phi}_\nu] = \bar{p}_0 \gamma^A \nu \approx -i\bar{\theta} \hat{p} \gamma^A \nu = i\bar{\theta} \gamma^A \hat{p} \nu - 2i\bar{\theta} \nu \rho^A. \quad (16.3.4.5b)$$

Последний член в правой части соотношения (16.3.4.5b) есть генерируемая \mathcal{H} частная репараметризация, соответствующая приведенному выше переопределению $\bar{\chi}\hat{p} \rightarrow \bar{\phi}$.

На данном этапе нашего рассмотрения следует выделить два момента: согласование между калибровочными преобразованиями в лагранжевой и гамильтоновой формах выполняется только на связях, как это в общем случае имеет место для внутренних калибровочных симметрий; кроме того, не существует независимых гамильтоновых связей первого рода, ассоциированных с “фальшивой” калибровочной инвариантностью (16.3.1.8). Фактически одно из преимуществ гамильтонова формализма состоит в том, что лишь “истинные” калибровочные инвариантности приводят к связям первого рода, а это позволяет выделить и пересчитать их непосредственно.

Хотя содержащиеся в соотношении $\bar{\chi} \approx 0$ связи первого рода и выделены ковариантно, ценой за поддержание явной ковариантности является избыточность связей $\bar{\phi}$. Действительно, мы находим следующее сильное соотношение между $\bar{\phi}$ и \mathcal{H} :

$$\bar{\phi}\hat{p} - 2\bar{p}_0 \mathcal{H} = 0. \quad (16.3.4.6)$$

Оно отражает избыточность калибровочных параметров преобразований (16.3.1.4) и приводит к усложнениям БРСТ-процедуры. Заметим, что простого ковариантного способа выделить $(8+1)$ независимых связей из $(16+1)$ избыточных связей первого рода $\bar{\phi}$, \mathcal{H} , по-видимому, не существует.

Аналогично не существует простого ковариантного способа отождествить 8 связей второго рода, содержащихся в $\bar{\chi}$. Ниже будет показано, что связи второго рода играют важную роль

в обеспечении корректных антикоммутиационных соотношений для спиноров, так что не учитывать их нельзя. Необходимо их сохранить, поэтому приходится столкнуться с только что упомянутой проблемой явной ковариантности.

16.3.5. Модель Сиджела

Мы показали, что связи первого рода, содержащиеся в $\bar{\chi}$, можно отождествить ковариантно, хотя и избыточным способом.

Сиджел [65] предложил новую теорию, в которой удерживаются только связи первого рода $\bar{\phi}$ и \mathcal{H} и не учитываются связи второго рода, содержащиеся в $\bar{\chi}$. Каноническое действие для этой теории имеет вид

$$S = \int (\rho_A \dot{X}^A + \bar{p}_\theta \dot{\theta} - H) d\tau, \quad (16.3.5.1)$$

а единственные связи

$$\mathcal{H} = 0, \quad \bar{\phi} = 0. \quad (16.3.5.2)$$

В этой новой модели возникает проблема, связанная с тем, что она содержит состояния с отрицательной нормой, поскольку эти нежелательные состояния необходимы для представления канонических фермионных антикоммутиационных соотношений, следующих из выражения (16.3.5.1) без связей второго рода.

Чтобы понять это, рассмотрим световую калибровку

$$\gamma^+ \theta = 0, \quad X^+ \sim \tau. \quad (16.3.5.3)$$

Кинетический член для фермионов принимает вид

$$\int \bar{p}_\theta^a \dot{\theta}^a d\tau, \quad (16.3.5.4)$$

где a — $SO(8)$ -спинорный индекс. Кроме того, θ^a — $SO(8)$ -световой спинор, удовлетворяющий соотношению (16.3.5.3). Он содержит 8 независимых вещественных компонент, если учесть майорана-вейлевское условие (см. приложение В).

Из выражения (16.3.5.4) следует, что θ^a и \bar{p}_θ^a , не связанные в модели Сиджела, удовлетворяют соотношениям со скобками Пуассона:

$$[\theta^a, \theta^b] = 0, \quad [\theta^a, \bar{p}_\theta^b] = \delta^{ab}, \quad [p_\theta^a, p_\theta^b] = 0. \quad (16.3.5.5)$$

Соответствующие антикоммутиаторы имеют вид

$$\theta^a \theta^b + \theta^b \theta^a = 0, \quad \theta^a \bar{p}_\theta^b + \bar{p}_\theta^b \theta^a = i\delta^{ab}, \quad (16.3.5.6a)$$

$$\bar{p}_\theta^a \bar{p}_\theta^b + \bar{p}_\theta^b \bar{p}_\theta^a = 0. \quad (16.3.5.6b)$$

Поскольку спинор θ^a вещественный, единственный способ удовлетворить условию $(\theta^a)^2 = 0$ состоит в использовании гильбертова пространства с индефинитной метрикой. (В истинном гильбертовом пространстве условия $(\theta^a)^2 = 0$ и $\theta^a = (\theta^a)^*$ означали бы, что $\theta^a = 0$, что противоречит соотношениям (16.3.5.6а).) Назначение связей второго рода в первоначальной модели суперчастицы как раз и состоит в избежании этой проблемы путем придания фермионам корректного кинетического члена $\theta^a \dot{\theta}^a$.

Хотя модель Сиджела имеет тот недостаток, что присутствуют состояния с отрицательной нормой, тем не менее интересно провести квантование ее БРСТ-методами. С этой целью можно провести усечение теории в положительно определенный сектор. Эта процедура, вероятно, должна быть эквивалентна модели суперчастицы.

Примечательное свойство модели Сиджела в БРСТ-контексте состоит в том, что это первый пример теории, которая нуждается в бесконечной последовательности компенсационных дубов для дубов, чтобы сохранить явную ковариантность. Такая теория является приводимой теорией "бесконечного каскада" [66]. Это свойство присутствует и в первоначальной модели (16.3.1.1).

Мы уже подчеркивали неоднократно, что связи $\bar{\phi}$ и \mathcal{H} не независимы, но удовлетворяют соотношению

$$\bar{\phi} \hat{p} - 2\mathcal{H} \bar{p}_\theta = 0 \quad (16.3.5.7)$$

(тождественно).

Но в БРСТ-формализме на одну независимую связь должна вводиться только одна пара канонически сопряженных дубов. Но поскольку не существует простого ковариантного способа выделить независимые связи из $\bar{\phi}$ и \mathcal{H} , по-видимому, такое ортодоксальное применение БРСТ-методов столкнулось бы с теми же трудностями неявной ковариантности, которых мы хотели избежать, опустив связи второго рода.

Способ решения этой проблемы хорошо известен [66]; он описан в работе [31]. С каждой связью ассоциируется пара канонически сопряженных дубов, после чего вводятся следующие "дубы для дубов", компенсирующие неправильный счет. Следовательно, сначала вводят "первичные" дубы (η, π) и $(C, \bar{\mathcal{P}}^{(1)})$, удовлетворяющие соотношениям

$$[\eta, \pi] = 1 = [\pi, \eta], \quad (16.3.5.8a)$$

$$[C^a, \bar{\mathcal{P}}_\beta^{(1)}] = \delta_\beta^a = -[\bar{\mathcal{P}}_\beta^{(1)}, C^a]. \quad (16.3.5.8b)$$

Духи $[\eta, \pi]$ являются антикоммутирующими скалярами, а духи $(\overset{(1)}{C}, \bar{\mathcal{F}}^{(1)})$ — коммутирующими майорана-вейлевскими спинорами соответствующей киральности. Они обладают следующими духовыми числами:

$$\text{gh}(\eta) = \text{gh}(\overset{(1)}{C}) = -\text{gh}(\pi) = -\text{gh}(\bar{\mathcal{F}}^{(1)}) = 1. \quad (16.3.5.9)$$

На этом первом этапе БРСТ-генератор имеет вид [66, 31]

$$\overset{(1)}{\Omega} = \frac{1}{2} p^2 \eta + \bar{p}_\theta \hat{p} \overset{(1)}{C} \quad (16.3.5.10)$$

и, очевидно, является нильпотентным.

Затем вводят вторичные духи, компенсирующие избыточный счет связей. Как объясняется в работах [66, 31], на каждое независимое соотношение между связями должна вводиться одна пара канонически сопряженных духов.

Каково число независимых соотношений (16.3.5.7), которым удовлетворяют связи? Конечно, не 16, как может показаться из того факта, что условие (16.3.5.7) есть майорана-вейлевский спинор, а лишь 8. Действительно, коэффициенты $\overset{(1)}{X}$ перед связями в соотношении (16.3.5.7) удовлетворяют условиям

$$\overset{(1)}{X}^\alpha_\beta (\hat{p})^\beta_\rho \approx 0, \quad X^{(1)}_\beta (\hat{p})^\beta_\rho \approx 0, \quad (16.3.5.11)$$

где $\overset{(1)}{X}^\alpha_\beta$ и $\overset{(1)}{X}_\beta$ определяются соотношениями

$$\bar{\phi}_\alpha \overset{(1)}{X}^\alpha_\beta + \mathcal{H} \overset{(1)}{X}_\beta = 0 \Leftrightarrow \overset{(1)}{X}^\alpha_\beta = (\hat{p})^\alpha_\beta, \quad \overset{(1)}{X}_\beta = -2(\hat{p}_\theta)_\beta. \quad (16.3.5.12)$$

Следовательно, они не могут быть независимыми.

Можно ли ковариантно выделить из соотношений (16.3.5.7) 8 независимых? Здесь мы наталкиваемся на трудности того же типа, что и выше (соотношение (16.3.5.7) определяет неприводимое представление группы $SO(9, 1)$). Соответственно лучше не разделять соотношения (16.3.5.7) на зависимые и независимые, а ввести столько канонически сопряженных пар вторичных духов, сколько имеется соотношений (16.3.5.7), и компенсировать последние духи путем введения “духов для духов”.

Вторичные духи, обозначаемые $\overset{(2)}{C}$ и $\bar{\mathcal{F}}^{(2)}$, являются антикоммутирующими спинорами и удовлетворяют соотношениям

$$[\overset{(2)}{C}^\alpha, \bar{\mathcal{F}}^{(2)}_\beta] = \delta^\alpha_\beta = [\bar{\mathcal{F}}^{(2)}_\beta, \overset{(2)}{C}^\alpha], \quad \text{gh}(\overset{(2)}{C}) = -\text{gh}(\bar{\mathcal{F}}^{(2)}) = 2. \quad (16.3.5.13)$$

На этом втором этапе БРСТ-генератор имеет вид [66, 31]

$$\Omega = \overset{(1)}{\Omega} + \overset{(2)}{\Omega}, \quad (16.3.5.14a)$$

$$\overset{(2)}{\Omega} = \overline{\mathcal{P}}^{(1)} \overset{(2)}{\rho} C - 2\pi \overline{\rho}_0 \overset{(2)}{C}, \quad (16.3.5.14b)$$

и все еще, очевидно, является нильпотентным.

Следующий шаг состоит во введении третичных духов, которые учитывают то обстоятельство, что уравнения (16.3.5.11) для $\overset{(1)}{X}^\alpha_\beta$ и $\overset{(1)}{X}_\beta$ не все являются независимыми, как мы уже подчеркивали. Вместо этого имеем

$$\overset{(2)}{X}^\alpha_\beta \overset{(2)}{\rho}^\beta \approx 0, \quad (16.3.5.15)$$

где $\overset{(2)}{X}^\alpha_\beta$ определяются как коэффициенты перед $\overset{(1)}{X}^\alpha_\beta$ и $\overset{(1)}{X}_\beta$ в уравнении (16.3.5.11):

$$\overset{(1)}{X}^\alpha_\beta \overset{(2)}{X}^\beta_\rho \approx 0, \quad \overset{(1)}{X}_\beta \overset{(2)}{X}^\beta_\rho \approx 0 \Leftrightarrow \overset{(2)}{X}^\beta_\rho = \overset{(2)}{\rho}^\beta_\rho. \quad (16.3.5.16)$$

Уравнения (16.3.5.15) можно переписать в виде

$$\overset{(2)}{X}^\alpha_\beta \overset{(3)}{X}^\beta_\rho \approx 0, \quad \overset{(3)}{X}^\beta_\rho = \overset{(3)}{\rho}^\beta_\rho. \quad (16.3.5.17)$$

Используемый прием [66, 31] состоит в введении такого количества пар духов, сколько имеется независимых уравнений для $\overset{(2)}{X}^\alpha_\beta$. Каково же это число? Оно снова равно 8, так как коэффициенты $\overset{(3)}{X}^\beta_\rho$ не являются независимыми:

$$\overset{(3)}{X}^\alpha_\beta \overset{(4)}{X}^\beta_\rho \approx 0, \quad \text{где } \overset{(4)}{X}^\beta_\rho = \overset{(4)}{\rho}^\beta_\rho. \quad (16.3.5.18)$$

Кроме того, нельзя ковариантно разделить $\overset{(3)}{X}^\beta_\rho$ на зависимые и независимые компоненты. Следовательно, мы вводим больше третичных духов, чем это в действительности нужно, и учитываем соотношения (16.3.5.18) путем введения "духов для духов для духов".

На третичной стадии БРСТ-генератор имеет вид [66, 31]

$$\Omega = \overset{(1)}{\Omega} + \overset{(2)}{\Omega} + \overset{(3)}{\Omega}, \quad (16.3.5.19a)$$

$$\overset{(3)}{\Omega} = \overline{\mathcal{P}}^{(2)} \overset{(3)}{\rho} C - 2\pi \overline{\mathcal{P}}^{(1)} \overset{(3)}{C}; \quad (16.3.5.19b)$$

он снова, очевидно, нильпотентен. Здесь $C^{(3)}$ и $\bar{\mathcal{P}}^{(3)}$ — коммутирующие майорана-вейлевские спиноры, удовлетворяющие условиям

$$[C^{\alpha}, \bar{\mathcal{P}}_{\beta}^{(3)}] = -[\bar{\mathcal{P}}_{\beta}^{(3)}, C^{\alpha}] = \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (16.3.5.20a)$$

$$\text{gh}(C^{(3)}) = -\text{gh}(\bar{\mathcal{P}}^{(3)}) = 3. \quad (16.3.5.20b)$$

Эта процедура далее повторяется бесконечно по тому же образцу, если мы не желаем на некотором этапе нарушить явную ковариантность. При этом требуется бесконечная последовательность духов для духов. Соответствующий БРСТ-генератор имеет вид

$$\Omega = \frac{1}{2} p^2 \eta + \bar{p}_{\theta} \hat{p} C^{(1)} + (\bar{\mathcal{P}}^{(1)} \hat{p} - 2\pi \bar{p}_{\theta}) C^{(2)} + \sum_{n \geq 2} (\bar{\mathcal{P}}^{(n)} \hat{p} - 2\pi \bar{\mathcal{P}}^{(n-1)}) C^{(n+1)}. \quad (16.3.5.21)$$

Но автору не очевидно, что эта бесконечная последовательность может представлять смысл. Число истинных фермионных степеней свободы, которое должно быть равно 8 (16 минус 8 независимых связей первого рода), задается бесконечной суммой $16 - 16 + 16 - 16 + \dots$ (коммутирующие и антикоммутирующие духи дают вклады с противоположными знаками), не имеющей очевидного смысла. Было бы интересно исследовать в деталях кохомологию БРСТ-оператора (16.3.5.21) и посмотреть, можно ли определить функциональное пространство, на котором генератор Ω действует таким образом, что БРСТ-когомология воспроизводит желаемые результаты.

Этот вопрос не входит в сферу нашего обсуждения, главной целью которого было представить первый известный явный пример теории, являющейся бесконечно приводимой.

Упражнение. Рассмотрите теорию с одной коммутирующей степенью свободы (q, p) , характеризуемой избыточными связями $\phi_1 = p, \phi_2 = p$.

а. Обсудите дираковское квантование.

б. Вычислите БРСТ-когомологию, ассоциированную с неверным БРСТ-оператором $\Omega^w = p\eta^1 + p\eta^2$.

в. Запишите правильный БРСТ-оператор и вычислите его кохомологию. Покажите, что в подходящем функциональном пространстве она совпадает с физическим пространством п. а. (В частности, если C — “дух для духа” с духовым числом 2, то нужно работать с формальной последовательностью положительной степени по C .)

16.3.6. Калибровка светового конуса

Поскольку модель Сиджела сталкивается с трудностями, мы возвращаемся к обсуждению первоначального действия суперчастицы.

Связями второго рода можно выбрать $\bar{\chi}\gamma^+$, поскольку

$$[(\bar{\chi}\gamma^+)_{\alpha}, (\bar{\chi}\gamma^+)_{\beta}] = 2\sqrt{2} i p^+ (\gamma^-\gamma^+)_{\alpha\beta}. \quad (16.3.6.1)$$

Мы считаем, что $p^+ \neq 0$, как в обычном светокалибровочном анализе (хотя до сих пор калибровка не фиксирована, мы просто нековариантным образом выделяем связи второго рода).

В представлении γ -матриц приложения В матрица $(\bar{\chi}\gamma^+)_{\alpha}$ имеет ненулевые компоненты только для $16 < \alpha \leq 32$. Кроме того, определитель 16×16 -матрицы $(\gamma^-\gamma^+)_{\alpha\beta}$, $16 < \alpha, \beta \leq 32$, равен $(-2)^{16}$, поэтому он не равен нулю (конечно, значения 16 и 32 эффективно делятся пополам вейлевским условием).

На этом этапе можно воспользоваться стандартной процедурой вычисления скобок Дирака, соответствующих связям второго рода (16.3.6.1), и затем попытаться переопределить новые переменные, которые придадут им канонический вид. Но более эффективно работать с действием. Дираковские скобки при этом получаются путем введения связей второго рода в действие. Они “диагонализуются” при переопределении новых переменных, таких, что кинетический член принимает стандартный вид $\int p\dot{q} + \frac{1}{2}\theta\dot{\theta}$.

Мы воспользуемся вторым путем и примем немного отличные обозначения. Вместо изотропных $+$ - и $-$ -направлений мы будем использовать два произвольных изотропных вектора, удовлетворяющих условиям [61]

$$n^2 = r^2 = 0, \quad n \cdot r = -1. \quad (16.3.6.2)$$

Действие суперчастицы эквивалентно действию первого порядка

$$S[X, p, \theta, V] = \int d\tau \left[p_A (\dot{X}^A - i\bar{\theta}\gamma^A\dot{\theta}) + \frac{1}{2} V p^A p_A \right]. \quad (16.3.6.3)$$

Это выражение получается путем применения преобразования Лежандра лишь к переменным (\dot{X}^A, p_A) .

Мы производим следующую замену переменных в уравнении (16.3.6.3) [61, 64]:

$$X^A = q^A - \frac{i}{2} (n \cdot p)^{-1} n_B p_C \bar{\theta} \gamma^{ABC} \theta, \quad (16.3.6.4a)$$

$$\theta = \eta + \beta\zeta, \quad (16.3.6.4b)$$

где световые майорана-вейлевские спиноры η и ζ обладают лишь 8 независимыми компонентами, поскольку имеются

условия

$$\hat{n}\eta = 0 = \hat{n}\zeta. \quad (16.3.6.4в)$$

Заметим, что ζ и θ имеют противоположные киральности.

В приложении В содержатся полезные соотношения, удобные для расщепления (16.3.6.4б) и (16.3.6.4в). Используя их, получаем

$$S[q, p, \eta, \zeta, V] = \int d\tau \left[p_A \dot{q}^A + i(n \cdot p) \bar{\eta} \hat{r} \eta - i(n \cdot p) p^2 \bar{\zeta} \hat{r} \zeta + \frac{1}{2} V p^A p_A \right]. \quad (16.3.6.5)$$

Это выражение можно упростить путем элементарного изменения масштаба η и ζ , чтобы поглотить множитель $(n \cdot p)^{-1}$. В новых переменных η и ζ (которые мы обозначаем теми же буквами) действие принимает вид $(\bar{\eta} \hat{r} \eta = \bar{\zeta} \hat{r} \zeta = 0)$

$$S[q, p, \eta, \zeta, V] = \int d\tau \left[p_A \dot{q}^A + i \bar{\eta} \hat{r} \eta - i p \bar{\zeta} \hat{r} \zeta + \frac{1}{2} V p^2 \right]. \quad (16.3.6.6)$$

Дальнейшая замена переменных

$$V \rightarrow V - 2i \bar{\zeta} \hat{r} \zeta \quad (16.3.6.7)$$

приводит к выражению

$$S[q, p, \eta, \zeta, V] = \int d\tau \left[p_A \dot{q}^A + i \bar{\eta} \hat{r} \eta + \frac{1}{2} V p^2 \right]. \quad (16.3.6.8)$$

Это действие явно не зависит от ζ , что является следствием фермионной калибровочной инвариантности теории (ζ произвольно и не определяется уравнениями движения).

Чтобы полностью привести действие к каноническому виду, необходимо ввести импульс \bar{p}_ζ , сопряженный ζ , который удовлетворяет первичным связям первого рода:

$$\bar{p}_\zeta \equiv \partial L / \partial \dot{\zeta} = 0, \quad (16.3.6.9)$$

и добавить выражение (16.3.6.9) к S с лагранжевым множителем v :

$$S = \int d\tau \left[p_A \dot{q}^A + i \bar{\eta} \hat{r} \eta + \bar{p}_\zeta \dot{\zeta} + \frac{1}{2} V p^2 + \bar{p}_\zeta v \right]. \quad (16.3.6.10)$$

Связи (16.3.6.9), разумеется, являются генераторами фермионных калибровочных преобразований и в точности эквивалентны $\bar{\phi} = 0$ ($\bar{p}_\zeta = \bar{p}_\theta \hat{\rho}$). Одно из достоинств проведенных выше замен переменных состоит в том, что q^A и η калибровочно-инвариантны при локальных фермионных преобразованиях в гамильтоновой форме, иначе говоря, они коммутируют с \bar{p}_ζ .

Действие (16.3.6.10) есть то, что мы получили бы, если последовали стандартной дираковской процедуре устранения

связей второго рода с помощью скобок Дирака (в отсутствие фиксации калибровки остаются только связи первого рода $\bar{p}_\zeta = 0$). Дираковские скобки для p, q, η, ζ и \bar{p}_ζ можно получить из вида кинетического члена в выражении (16.3.6.10). В явном виде находим

$$[q^A, p_B] = \delta_B^A, \quad (16.3.6.11a)$$

$$[\eta, \bar{\eta}] = \frac{i}{4} \hat{n}, \quad (16.3.6.11б)$$

$$[\zeta^a, \bar{p}_{\zeta b}] = \delta_b^a; \quad (16.3.6.11в)$$

все остальные скобки Дирака обращаются в нуль. Вторым преимуществом проведенного переопределения X^A и θ является то, что в новых переменных скобки Дирака имеют канонический вид. (В соотношении (6.3.6.11в) a и b — $SO(8)$ -индексы, соответствующие световым майорана-вейлевским спинорам. Отметим, что η также имеет лишь 8 независимых компонент. Скобки Дирака для него могут быть записаны в виде (16.3.6.11б), поскольку $\hat{n}\eta$ тождественно коммутирует со всем остальным.)

Теперь мы готовы к тому, чтобы наложить калибровочное условие светового конуса и ограничить теорию ее истинными физическими степенями свободы. На этом этапе мы возвращаемся к более традиционным обозначениям $\hat{n} \rightarrow \gamma^+$ и $\hat{r} \rightarrow \gamma^-$.

Световые калибровочные условия имеют вид

$$X^+ = p^+ \tau, \quad \gamma^+ \theta = 0. \quad (16.3.6.12)$$

Первое условие фиксирует репараметризацию. Второе замораживает фермионную калибровочную инвариантность; оно эквивалентно условию

$$\zeta = 0. \quad (16.3.6.13)$$

Это допустимое калибровочное условие, так как $\det[\zeta, \bar{p}_\zeta] \neq 0$.

Связь $p_A p^A = 0$ можно разрешить и выразить p^- как функцию p^+ и p^i :

$$p^- = \frac{1}{2p^+} \sum_i (p^i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (16.3.6.14)$$

Действие в световой калибровке получается при подстановке уравнений (16.3.6.12), (16.3.6.14) и $\bar{p}_\zeta = 0$ в выражение (16.3.6.10), что дает

$$S[q^i, p_i, p^+, u^-, \eta^a] = \int d\tau \left[p_i \dot{q}^i - p^+ \dot{u}^- + i \sqrt{2} \sum_a \eta^a \dot{\eta}^a - H \right], \quad (16.3.6.15a)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (p^i)^2, \quad (16.3.6.156)$$

$$u^- = X^- - p^- \tau. \quad (16.3.6.15в)$$

В выражении (16.3.6.15а) a — $SO(8)$ -спинорный индекс, ассоциированный с представлением 8_s (см. приложение В). Для удобства в дальнейшем отметим, что в световой калибровке η связан с θ следующим образом:

$$\eta = \sqrt{p^+} \theta. \quad (16.3.6.16)$$

Множитель $\sqrt{p^+}$ возникает вследствие изменения масштаба $\eta \rightarrow \eta(n \cdot p)^{1/2}$.

Вид скобок Дирака в световой калибровке определяется из кинетического члена выражения (16.3.6.15а):

$$[q^i, p_j] = \delta^i_j, \quad [u^-, p^+] = -1, \quad [\eta^a, \eta^b] = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \delta^{ab} \quad (16.3.6.17)$$

(все остальные скобки равны нулю).

Упражнение. Исключите импульсы p_i из выражения (16.3.6.15а) путем использования уравнений движения для них. Результат сравните со светокалибровочным действием второго порядка для суперструны, полученным в разд. 16.1.8, в предположении эффективного вымораживания степеней свободы ($p^+ u^-$).

Заряды Пуанкаре в световой калибровке получаются при подстановке световых калибровочных условий и связей в выражения (16.3.2.2а) и (16.3.2.2б):

$$P^+ = p^+, \quad P^i = p^i, \quad P^- = p^-, \quad (16.3.6.18а)$$

$$M^{ij} = p^{[i} X^{j]} + \frac{i\sqrt{2}}{4} \eta^T \gamma^{ij} \eta, \quad (16.3.6.18б)$$

$$M^{i-} = \frac{1}{2} (p^i u^- - p^- X^i) + \frac{i\sqrt{2}}{4p^+} p_j \eta^T \gamma^{ij} \eta, \quad (16.3.6.18в)$$

$$M^{i+} = -\frac{1}{2} p^+ X^i, \quad (16.3.6.18г)$$

$$M^{-+} = -\frac{1}{2} p^+ u^-, \quad (16.3.6.18д)$$

где p^- определяется разложением (16.3.6.14). Выражение (16.3.6.18б) выведено с использованием соотношения

$$\bar{\theta} \gamma^{ijk} \theta = 0, \quad (16.3.6.19)$$

справедливого в калибровке светового конуса.

Матрицы γ^{ij} в выражениях (16.3.6.18б) и (16.3.6.18в) являются 8×8 -генераторами представления 8_s группы $SO(8)$, индуцированного на восьмимерном пространстве светокалибровочных майорана-вейлевских спиноров 32×32 -матрицами γ^{ij} . Они, разумеется, антисимметричны. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе [67].

Чтобы записать выражение для суперзаряда, удобно разбить его на две неприводимых $SO(8)$ -компоненты в соответствии с выражением

$$Q = Q_+ + Q_-, \quad (16.3.6.20a)$$

где

$$Q_+ = -\frac{1}{2} \gamma^- \gamma^+ Q, \quad Q_- = -\frac{1}{2} \gamma^+ \gamma^- Q; \quad (16.3.6.20б)$$

Q_+ принадлежит спинорному представлению 8_s группы $SO(8)$, а Q_- — представлению 8_c (см. приложение В; отметим, что Q обладает киральностью, противоположной киральности θ).

После соответствующей перенормировки получаем

$$Q_+^a = 2^{5/4} \sqrt{p^+} \eta^a, \quad (16.3.6.21a)$$

$$Q_-^a = \frac{2^{3/4}}{\sqrt{p^+}} p_i (\gamma^i \eta)^a; \quad (16.3.6.21б)$$

8×8 -матрицы $(\gamma^i)^{ab}$ приведены в работе [67]. Из соотношения (16.3.6.21a) видно, что спинорная переменная η^a по существу является суперзарядом.

Светокалибровочные компоненты суперзаряда удовлетворяют классическим соотношениям со скобками Пуассона, соответствующим суперсимметрии светового конуса [67]:

$$[Q_+^a, Q_+^b] = -2ip^+ \delta^{ab}, \quad (16.3.6.22a)$$

$$[Q_-^a, Q_-^b] = -2ip^- \delta^{ab}, \quad (16.3.6.22б)$$

$$[Q_+^a, Q_-^b] = -i\sqrt{2} (\gamma^i)^{ab} p_i. \quad (16.3.6.22в)$$

К квантовой теории переходят путем замены переменных X^i, p_i, u^-, p^+ и η^a операторами, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$X^i p_j - p_j X^i = i\delta_j^i, \quad u^- p^+ - p^+ u^- = -i, \quad (16.3.6.23a)$$

$$\eta^a \eta^b + \eta^b \eta^a = \delta^{ab}, \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad (16.3.6.23б)$$

($=i$ дираковские скобки; остальные коммутаторы равны нулю).

Эти коммутационные соотношения реализуются в положительно определенном гильбертовом пространстве, получаемом

путем образования прямого произведения гильбертова пространства для соотношений (16.3.6.23а) на гильбертово пространство для соотношений (16.3.6.23б).

Система (16.3.6.23б) представляет собой клиффордову алгебру с восемью генераторами; таким образом, пространство ее неприводимого представления 16-мерно. Следовательно, для заданного импульса суперчастица может находиться в одном из 16 различных состояний. Можно показать, что эти состояния соответствуют определенной спиральности и распадаются на представления $8_c + 8_v$ группы $SO(8)$ [67]. Имеется восемь спинорных и восемь векторных состояний, как требует десяти-мерная суперсимметрия [58, 67, 68]. Трансформационные свойства состояний при действии группы симметрии $SO(8)$ следуют, разумеется, из вида $SO(8)$ -генераторов M^{ij} , выраженных через основные канонические переменные.

В случае суперструны супергенераторы Пуанкаре тоже содержат вклад от возбужденных мод. Но последние аннигилируют основное состояние, которое соответственно описывается тем же квантовым пространством, что и суперчастица.

Упражнение. Запишите действие $SO(8)$ -генераторов на 16 клиффордовых состояний. Разложите $SO(8)$ -представление, которое они образуют, на его неприводимые компоненты.

Гетеротическая струна

Краткое введение в теорию гетеротической струны читатель может найти в следующих опубликованных материалах.

1. Бозонные струны в пространствах с компактифицированными размерностями (случай тора):

общий формализм и число обходов замкнутой струны — [69];

особые торы и симметрии Каца — Муди — [22, 23, 70, 71].

2. Гетеротическая струна — [72] и гл. 5.

Замечательным свойством гетеротической струны является включение в спектр струны янг-миллсовских симметрий (с калибровочной группой $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$).

Доказательство теоремы об отсутствии дѳухов для бозонной струны, основанное на БРСТ-методах

В своей статье Като и Огава [19] показали, что любое физическое БРСТ-состояние $|b\rangle$, удовлетворяющее условию $\bar{Q}|b\rangle = 0$, где \bar{Q} — ограничение БРСТ-заряда на данный нульмодовый сектор, может быть записано в виде

$$|b\rangle = |P\rangle|0\rangle_{\text{дѳух}} + \bar{Q}|c\rangle, \quad (\text{A.1})$$

где $|P\rangle$ — чисто поперечное ДДФ-состояние (получаемое из вакуума действием ДДФ-осцилляторов). Этот результат использован в разд. 13.2.6. Мы кратко наметим здесь идею их доказательства.

Основным моментом является то, что \bar{Q} может рассматриваться как “возмущение” оператора

$$\bar{Q}' = i \sum_{n>0} (a_n^{+*} \eta_n - \eta_n^* a_n^+), \quad (\text{A.2})$$

для которого отсутствие дѳухов есть простое следствие “квартетного механизма” Куго и Одзимы. Далее Като и Огава показали, что теорема об отсутствии дѳухов распространяется на весь оператор \bar{Q} .

В выражении (A.2) a_n^+ и a_n^{+*} — операторы рождения и уничтожения соответствующим образом нормированных изотропных мод. Они коммутируют:

$$[a_n^+, a_n^{+*}] = \eta^{++} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Коммутационно-сопряженные операторы суть a_n^{-*} и a_n^- . (Мы не фиксируем здесь калибровку, но работаем в заданной лоренцевой системе отсчета.)

Главные качественные черты теоремы об отсутствии дѳухов уже содержатся в более простой модели, основанной на операторе (A.2), поэтому мы доказываем ее только для этого случая. Аналогами ДДФ-осцилляторов для выражения (A.2) в точности являются поперечные осцилляторы a_n^i , поскольку они коммутируют с \bar{Q}' . Соответственно поперечное состояние

в теории, основанной на выражении (А.2), есть состояние, содержащее лишь поперечные возбуждения.

Чтобы показать, что из $\bar{\Omega}'|b\rangle = 0$ следует

$$|b\rangle = |P'\rangle|0\rangle_{\text{двух}} + \bar{\Omega}'|c\rangle, \quad (\text{А.4})$$

где $|P'\rangle$ — поперечное состояние, содержащее лишь поперечные осцилляции a_n^{i*} , достаточно рассмотреть последовательно моду за модой. Мы примем, что

$$\eta_n|b\rangle = \mathcal{P}_n|b\rangle = 0, \quad a_n^+|b\rangle = a_n^-|b\rangle = 0 \quad (\text{А.5})$$

для $n > M$; это должно быть верно для некоторого M , поскольку N_i , N_g и N ограничены величиной $-\alpha'p^2 + \alpha_0$. Условия (А.5), очевидно, совместны с условием $\bar{\Omega}'|b\rangle = 0$.

Мы хотим устранить M -ю моду из $|b\rangle$, т. е. преобразовать уравнения (А.5) в такие же уравнения, в которых M заменено на $M-1$. Для этого запишем

$$|b\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle\eta_M^* + |\gamma\rangle\mathcal{P}_M^* + |\delta\rangle\eta_M^*\mathcal{P}_M^*, \quad (\text{А.6})$$

где $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, $|\gamma\rangle$ и $|\delta\rangle$ — состояния, не содержащие нулевых дѳуховых мод ($n \geq M$) и тоже уничтожаемые операторами a_n^+ и a_n^- ($n > M$). Легко вычислить $\bar{\Omega}'|b\rangle$:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}'|b\rangle = & \bar{\Omega}'_{M-1}|b\rangle + ia_M^{+*}|\gamma\rangle - ia_M^{+*}|\delta\rangle\eta_M^* - \\ & - ia_M^+|\alpha\rangle\eta_M^* - ia_M^*|\gamma\rangle\eta_M^*\mathcal{P}_M^*, \end{aligned} \quad (\text{А.7})$$

где $\bar{\Omega}'_{M-1} = i \sum_{0 < n < M} (a_n^{+*}\eta_n - \eta_n^*a_n^+)$.

Из выражения (А.7) видно, что можно положить $|\delta\rangle = 0$, а затем $|\beta\rangle = 0$ путем добавления к $|b\rangle$ соответствующего состояния вида $\Omega|\chi\rangle$ (выбираем $ia_M^+|\gamma\rangle = |\delta\rangle$ и т. д.). Сделав это, из $\bar{\Omega}'|b\rangle = 0$ находим, что $a_M^+|\alpha\rangle = a_M^+|\gamma\rangle = 0$, так что фактически, добавляя снова к $|b\rangle$ соответствующее состояние вида $\Omega|\chi\rangle$, можно получить даже независимость $|\alpha\rangle$ от a_M^{+*} , т. е. $a_M^-|\alpha\rangle = 0$ ¹⁾. При выполнении этих условий дальнейшее применение БРСТ-оператора дает

$$\bar{\Omega}'_{M-1}|\gamma\rangle = 0, \quad \bar{\Omega}'_{M-1}|\alpha\rangle + a_M^{+*}|\gamma\rangle = 0,$$

откуда, в частности, следует, что $|\gamma\rangle = 0$ (в $|\alpha\rangle$ не содержится a_M^{+*}). Это доказывает соотношение (А.4) и теорему об отсут-

¹⁾ Заметим, что оператор a_M^{+*} является коммутационно-сопряженным оператору a_M^- . Чтобы удовлетворить условию $a_M^-|\alpha\rangle = 0$, подбирают соответствующим образом $|\tilde{\gamma}\rangle$ в $|\chi\rangle = |\tilde{\gamma}\rangle\mathcal{P}_M^*$.

ствии дѳухов (т. е. об отсутствии состояний с отрицательной нормой) для простого квадратичного оператора (А.2), поскольку поперечные состояния образуют положительно определенное подпространство.

Механизм, с помощью которого могут быть устранены дѳухи (для квадратичного в фоковском пространстве БРСТ-заряда), называется квартетным механизмом Куго — Одзимы [32]. Его можно сравнить с описанным в работе [31] аналогичным механизмом для систем, определенных в (q, p) -представлении.

Квартетный механизм устраняет не только дѳухи η_n и \mathcal{P}_n , но также и изотропные осцилляторы a_n^+ и a_n^- . Иногда удобно не полностью фиксировать БРСТ-калибровку, как это делалось выше, а сохранить возможность добавлять нулевые состояния, порождаемые оператором a_n^{+*} . Это делается путем наложения на $|b\rangle$ только условия духового вакуума:

$$\eta_n |b\rangle = \mathcal{P}_n |b\rangle = 0 \quad (n > 0). \quad (\text{A.8a})$$

Это условие согласуется с условием $\bar{\Omega}' |b\rangle = 0$, если

$$a_n^+ |b\rangle = 0 \quad (n > 0). \quad (\text{A.8б})$$

Чисто поперечные состояния, очевидно, удовлетворяют системе (А.8), а также калибровочному условию

$$a_n^- |b\rangle = 0 \quad \text{для } n > 0. \quad (\text{A.9})$$

Наконец, чтобы провести сравнение с методом световой калибровки, операторы a_n^+ и a_n^- , используемые в этом приложении, следует заменить на a_n^- и a_n^+ соответственно.

Упражнение. Какие преобразования $|b\rangle \rightarrow |b\rangle + \bar{\Omega}' |c\rangle$ сохраняют условия (А.8)?

Матрицы γ в десяти измерениях

Мы кратко суммируем здесь представляющие особый интерес в настоящем контексте свойства γ -матриц в десяти измерениях. Матрицы γ удовлетворяют соотношению

$$\gamma_A \gamma_B + \gamma_B \gamma_A = 2\eta_{AB} \quad (\text{Б.1})$$

и выбираются вещественными (майорановское представление). Девять пространственных матриц γ_k симметричны, а матрица $\gamma_0 = C$ (матрица зарядового сопряжения) антисимметрична. Матрицы $C\gamma_A$ симметричны.

Матрица $\gamma_{11} = \gamma_0 \dots \gamma_9$ вещественна и симметрична, так что наложение вейлевского условия киральности

$$(1 \pm \gamma_{11})\theta = 0 \quad (\text{Б.2})$$

совместимо с условием вещественности (майорановским условием). Эти условия определяют майорана-вейлевские спиноры.

Б.1. Свойства симметрии

Базис матриц 32×32 задается $(32)^2$ матрицами B_Λ :

$$\{I, \gamma_A, \gamma_{AB}, \gamma_{ABC}, \gamma_{ABCD}, \gamma_{ABCDE}, \gamma_{ABCD}\gamma_{11}, \gamma_{ABC}\gamma_{11}, \gamma_{AB}\gamma_{11}, \gamma_A\gamma_{11}, \gamma_{11}\}, \quad A < B < C \dots, \quad (\text{Б.3})$$

удовлетворяющими условию

$$\text{tr } B_\Lambda B^\Delta = 32\delta_\Lambda^\Delta (-)^{\varepsilon_\Lambda}. \quad (\text{Б.4})$$

Мы определили

$$\gamma_{A_1 \dots A_k} = \gamma_{[A_1 \dots A_k]} = \frac{1}{k!} (\gamma_{A_1} \dots \gamma_{A_k} - \gamma_{A_2} \gamma_{A_1} \dots \gamma_{A_k} + \dots), \quad (\text{Б.5})$$

$$B^\Delta = \{I, \gamma^A, \gamma^{AB}, \dots, \gamma^{ABCD}\gamma_{11}, \dots, \gamma_{11}\}. \quad (\text{Б.6})$$

В уравнении (Б.4) фаза $(-)^{\varepsilon_\Lambda}$ определяется следующим образом:

$$\varepsilon_\Lambda = 0 \quad \text{для } I, \gamma_A, \gamma_{ABCD}, \gamma_{ABCDE}, \gamma_{ABCD}\gamma_{11}, \gamma_{ABC}\gamma_{11}, \gamma_{11}, \quad (\text{Б.7})$$

$$\varepsilon_\Lambda = 1 \quad \text{для } \gamma_{AB}, \gamma_{ABC}, \gamma_{AB}\gamma_{11}, \gamma_A\gamma_{11};$$

она такова, что $B_\Lambda B^\Delta = (-)^{\varepsilon_\Lambda} I$ (без суммирования по Λ).

Матрицы CB_Λ имеют определенные свойства симметрии, которые легко выводятся из их определения. Эти свойства обуславливают следующие тождества:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\chi &= \bar{\chi}\psi, & \bar{\psi}\gamma_A\chi &= -\bar{\chi}\gamma_A\psi, \\ \bar{\psi}\gamma_{AB}\chi &= -\bar{\chi}\gamma_{AB}\psi, & \bar{\psi}\gamma_{ABC}\chi &= \bar{\chi}\gamma_{ABC}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma_{ABCD}\chi &= \bar{\chi}\gamma_{ABCD}\psi, & \bar{\psi}\gamma_{ABCDE}\chi &= -\bar{\chi}\gamma_{ABCDE}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma_{ABCD}\gamma_{11}\chi &= -\bar{\chi}\gamma_{ABCD}\gamma_{11}\psi, & \bar{\psi}\gamma_{ABC}\gamma_{11}\chi &= \bar{\chi}\gamma_{ABC}\gamma_{11}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma_{AB}\gamma_{11}\chi &= \bar{\chi}\gamma_{AB}\gamma_{11}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma_A\gamma_{11}\chi &= -\bar{\chi}\gamma_A\gamma_{11}\psi, & \bar{\psi}\gamma_{11}\chi &= -\bar{\chi}\gamma_{11}\psi,\end{aligned}\tag{Б.8}$$

где ψ и χ — (антикоммутирующие) майорановские спиноры, а $\bar{\psi}$ обозначает $\psi^T\gamma_0$.

Если ψ и χ являются также вейлевскими спинорами одной киральности, то единственными ненулевыми билинейными комбинациями, как легко видеть из соотношений (Б.8), являются $\bar{\psi}\gamma_A\chi$, $\bar{\psi}\gamma_{ABC}\chi$ и $\bar{\psi}\gamma_{ABCDE}\chi$. Если же ψ и χ имеют противоположные ориентации, то отличными от нуля могут быть лишь четные билинейные инварианты $\bar{\psi}\chi$, $\bar{\psi}\gamma_{AB}\chi$ и $\bar{\psi}\gamma_{ABCD}\chi$.

Б.2. Преобразования Фирца

Поскольку матрицы B образуют базис, любая матрица M типа 32×32 может быть представлена в виде

$$M = a^\Lambda B_\Lambda.\tag{Б.9}$$

Коэффициенты a^Λ легко найти с помощью соотношения (Б.4):

$$a^\Lambda = \frac{1}{32} (-)^{\epsilon_\Lambda} \text{tr} (B^\Lambda M).\tag{Б.10}$$

Рассмотрим теперь четыре спинора: λ , χ , ψ и ϕ . Тождества Фирца позволяют выразить выражение

$$\bar{\lambda}M\chi \cdot \bar{\psi}N\phi \equiv \bar{\lambda}_i M^i_j \chi^j \cdot \bar{\psi}_k N^k_l \phi^l,$$

где M и N — матрицы 32×32 , через 32^2 “фундаментальных” билинейных функций $\bar{\psi}B_\Lambda\chi$. Для этого нужно лишь заметить, что числа $M^i_j N^k_l$ для фиксированных i и l можно рассматривать как компоненты матрицы 32×32 ; поэтому

$$M^i_j N^k_l = \sum_\Lambda a^{\Lambda i} (B_\Lambda)^k_l,\tag{Б.11a}$$

где $a_i^{\Lambda i}$ определяются выражением

$$a^{\Lambda i}_i = \frac{1}{32} (-)^{\varepsilon_\Lambda} (M B^\Lambda N)^i_i. \quad (\text{Б.11б})$$

Это дает

$$\bar{\lambda} M \chi \cdot \bar{\psi} N \phi = -\frac{1}{32} \sum_{\Lambda} (-)^{\varepsilon_\Lambda} \bar{\lambda} M B^\Lambda N \phi \cdot \bar{\psi} B_\Lambda \chi, \quad (\text{Б.12})$$

где знак минус появляется вследствие антикоммутируемости $\bar{\psi}_k$ и χ^j .

Преобразование Фирца (Б.12) для майорана-вейлевских спиноров с одинаковой киральностью играет огромную роль при выводе ковариантной формы действия суперструны. Получаем

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} M \chi \cdot \bar{\psi} N \phi = & -\frac{1}{32} (\bar{\lambda} M \gamma^A N \phi - \bar{\lambda} M \gamma^A \gamma_{11} N \phi) \bar{\psi} \gamma_A \chi + \\ & + \frac{1}{32} (\bar{\lambda} M \gamma^{ABC} N \phi - \bar{\lambda} M \gamma^{ABC} \gamma_{11} N \phi) \bar{\psi} \gamma_{ABC} \chi - \\ & - \frac{1}{32} \bar{\lambda} M \gamma^{ABCDE} N \phi \bar{\psi} \gamma_{ABCDE} \chi, \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

где принято, что $(1 - \gamma_{11})\lambda = 0 = (1 - \gamma_{11})\chi = \dots$, и суммирование снова ограничено условием $A < B < C \dots$.

Если положить $\bar{\lambda} = \bar{\psi}_1$, $M = \gamma^A$, $\chi = \psi_2$, $\psi = \alpha$, $N = \gamma_A$ и $\phi = \psi_3$, то соотношение (Б.13) сводится к виду

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_1 \gamma^A \psi_2 \cdot \bar{\alpha} \gamma_A \psi_3 = \\ = & -\frac{1}{16} \bar{\psi}_1 \gamma^C \gamma^A \gamma_C \psi_3 \bar{\alpha} \gamma_A \psi_2 + \frac{1}{16} \bar{\psi}_1 \gamma^C \gamma^{ABD} \gamma_C \psi_3 \bar{\alpha} \gamma_{ABD} \psi_2 - \\ & - \frac{1}{32} \bar{\psi}_1 \gamma^C \gamma^{ABDEF} \gamma_C \psi_3 \bar{\alpha} \gamma_{ABDEF} \psi_2. \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

Это соотношение может быть преобразовано с помощью тождеств

$$\gamma^C \gamma^A \gamma_C = -8\gamma^A, \quad (\text{Б.15а})$$

$$\gamma^C \gamma^{ABD} \gamma_C = -4\gamma^{ABD}, \quad (\text{Б.15б})$$

$$\gamma^C \gamma^{ABDEF} \gamma_C = 0, \quad (\text{Б.15в})$$

которые легко выводятся из антикоммутационных соотношений для γ -матриц. (Аналогичные тождества для четных $\gamma^{A_i \dots A_k}$ имеют вид $\gamma^C \gamma^{AB} \gamma_C = 6\gamma^{AB}$ и $\gamma^C \gamma^{ABDE} \gamma_C = 2\gamma^{ABDE} \dots$). Тождества (Б.15) позволяют преобразовать соотношение (Б.14) к виду

$$\bar{\psi}_1 \gamma^A \psi_2 \cdot \bar{\alpha} \gamma_A \psi_3 = \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \gamma^A \psi_3 \cdot \bar{\alpha} \gamma_A \psi_2 - \frac{1}{4} \bar{\psi}_1 \gamma^{ABD} \psi_3 \cdot \bar{\alpha} \gamma_{ABD} \psi_2. \quad (\text{Б.16})$$

Наконец, антисимметризуем полностью последнее соотношение по ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 . Поскольку α произвольно, это дает

$$\gamma_A \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma^A \psi_3 + \gamma_A \psi_2 \bar{\psi}_3 \gamma^A \psi_1 + \gamma_A \psi_3 \bar{\psi}_1 \gamma^A \psi_2 = 0, \quad (\text{Б.17})$$

что является тождеством, используемым в тексте для установления замкнутости 3-форм Ω_3 (разд. 16.1.2). Член (16.1.2.6), найденный там, а именно

$$\begin{aligned} & (d\bar{\theta} \gamma^A \wedge d\theta^1) \wedge (d\bar{\theta}^1 \wedge \gamma_A d\theta^1) = \\ & = \bar{\theta}^1_{,\lambda} \gamma^A \theta^1_{,\mu} \bar{\theta}^1_{,\nu} \gamma_A \theta^1_{,\rho} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \end{aligned}$$

обращается в нуль, поскольку действие внешнего произведения $dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$ состоит в антисимметризации спиноров, как в уравнении (Б.17).

Тождество (Б.17), как было установлено в работе [73], играет ключевую роль при исследовании суперянг-миллсовской теории.

Разложение десятимерных спиноров в калибровке светового конуса

Световые γ -матрицы γ^+ и γ^- удовлетворяют соотношениям

$$(\gamma^+)^2 = (\gamma^-)^2 = 0 \quad \text{и} \quad \gamma^+ \gamma^- + \gamma^- \gamma^+ = 2\eta^{+-} = -2. \quad (\text{B.1})$$

Из этих соотношений видно, что P^+ и P^- являются проекторами:

$$P^- = -\frac{1}{2} \gamma^+ \gamma^-, \quad P^+ = -\frac{1}{2} \gamma^- \gamma^+, \quad (\text{B.2a})$$

$$(P^+)^2 = P^+, \quad (P^-)^2 = P^-, \quad P^+ + P^- = 1. \quad (\text{B.2б})$$

Кроме того,

$$(P^+)^T = P^+, \quad (P^-)^T = P^-, \quad (\text{B.3})$$

поскольку $(\gamma^+)^T = -\gamma^-$ и $(\gamma^-)^T = -\gamma^+$.

Любой спинор можно разложить на его $+$ - и $-$ -компоненты:

$$\psi = \psi^+ + \psi^-, \quad (\text{B.4a})$$

$$\psi^+ = P^+ \psi, \quad \psi^- = P^- \psi. \quad (\text{B.4б})$$

По определению имеем

$$\gamma^- \psi^+ = \gamma^+ \psi^- = 0. \quad (\text{B.5})$$

Разложение (B.4) не ковариантно при лоренцевых вращениях, которые в общем случае перемешивают $+$ - и $-$ -части спинора ψ . Но система (B.4) ковариантна при действии подгруппы $SO(8)$ группы $SO(9, 1)$, содержащей вращения в поперечных направлениях. Иными словами, спинорное представление группы $SO(9, 1)$ является приводимым для группы $SO(8)$.

Удобно выбрать такие γ -матрицы в десяти измерениях, которые ясно отражают это свойство. Мы полагаем

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^i & 0 \\ 0 & -\tilde{\gamma}^i \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7.a})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7.б})$$

Величины $\tilde{\gamma}^i$ являются поперечными γ -матрицами в восьми пространственных измерениях. Они 16-мерны, поскольку в десяти измерениях γ -матрицы имеют размерность 32×32 . В выражении (B.76) символ 1 обозначает 16-мерную единичную матрицу.

Проекторы P^+ и P^- определяются выражениями

$$P^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

а матрица γ^{11} принимает вид

$$\gamma^{11} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^9 & 0 \\ 0 & -\tilde{\gamma}^9 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

где $\tilde{\gamma}^9 = \tilde{\gamma}^1 \dots \tilde{\gamma}^8$.

Спинор, удовлетворяющий соотношению $\gamma^+\psi = 0$, такой как ψ^- , имеет только верхнюю компоненту, тогда как спинор, удовлетворяющий соотношению $\gamma^-\psi = 0$, такой как ψ^+ , обладает лишь нижней компонентой:

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \psi^- = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Если ψ — вейлевский спинор определенной киральности, например

$$\gamma_{11}\psi = \psi, \quad (\text{B.11a})$$

его $SO(8)$ -компоненты u и v также обладают определенной 8-мерной киральностью (γ_{11} коммутирует с P^+ и P^-). Конкретнее, находим

$$\tilde{\gamma}^9 u = u, \quad \tilde{\gamma}^9 v = -v. \quad (\text{B.11б})$$

Можно показать, что u и v образуют неэквивалентные неприводимые восьмимерные представления группы $SO(8)$ (спинорного характера). Они обозначаются символами 8_s и 8_c соответственно. Другое восьмимерное представление группы $SO(8)$ 8_v является векторным.

Из нашего обсуждения следует, что вейлевский спинор, удовлетворяющий световому калибровочному условию $\gamma^+\theta = 0$, принадлежит представлению 8_s группы $SO(8)$ (с нашими обозначениями).

При работе со светокалибровочными спинорами удобно использовать $SO(8)$ -терминологию и записывать все с помощью $SO(8)$ -инвариантных скалярных произведений

$$\sum_{a=1}^8 \theta^a \psi^a \quad (\text{B.12})$$

(= $\sum_{a=1}^8 \theta^a \psi^a$ для майорановских спиноров).

Соответствующие правила имеют вид

$$\theta^a, \quad a=1, \dots, 32 \rightarrow \theta^a, \quad a=1, \dots, 8, \quad (\text{B.13a})$$

$$\bar{\theta}\psi \rightarrow \sum_a \theta^a \psi^a, \quad a=1, \dots, 8, \quad (\text{B.13б})$$

$$\bar{\eta}_1 \gamma^- \eta_2 \rightarrow \sqrt{2} \sum_a \eta_1^a \eta_2^a \quad (\text{B.13в})$$

и т. д. (В (B.13б) ψ — вейлевский спинор со спиральностью, противоположной спиральности θ , удовлетворяющий условию $\gamma^- \psi = 0$; η_1 и η_2 подобны θ .)

Описанное выше светокалибровочное разложение, разумеется, может быть проведено для любой пары изотропных векторов n^A и r^A , удовлетворяющих соотношениям

$$n^2 = r^2 = 0, \quad n^A r_A = -1. \quad (\text{B.14})$$

Нужно просто заменить γ^+ и γ^- на \hat{n} и \hat{r} соответственно, где $\hat{r} = r^A \gamma_A$ и $\hat{n} = n^A \gamma_A$.

Предположим, что θ — произвольный майорана-вейлевский спинор. Вместо разложения его на θ^+ и θ^- удобно также представить его в виде

$$\theta = \eta + \hat{p}\zeta, \quad (\text{B.15a})$$

где η и ζ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^+ \eta = \gamma^+ \zeta = 0 \quad (\text{B.15б})$$

(η и θ обладают одинаковыми киральностями, а ζ — противоположной). Вектор p^A в уравнении (B.15a) изотропен (например, им может быть вектор ω_+^A для суперструны, или p^A для суперчастицы).

Теперь мы выведем некоторые уравнения, связанные с разложением (B.15), в обозначениях, примененных в соотношениях (B.14):

$$\theta = \eta + \hat{p}\zeta, \quad (\text{B.16a})$$

$$\hat{n}\eta = \hat{n}\zeta = 0 \quad (\text{B.16б})$$

вместо системы (B.15a) и (B.15б). Во-первых, легко проверить, что преобразование (B.16) несингулярно и обратимо, если $p^A n_A \neq 0$, как мы принимаем. Конкретно имеем

$$\zeta = \frac{1}{2(n \cdot p)} \hat{n}\theta, \quad (\text{B.17a})$$

$$\eta = \theta - \frac{1}{2(n \cdot p)} \hat{p}\hat{n}\theta. \quad (\text{B.17б})$$

Далее имеют место следующие тождества, справедливые для любых майорановских спиноров, удовлетворяющих условиям

$$\hat{n}\xi_1 = \hat{n}\xi_2 = 0:$$

$$\bar{\xi}_1 \xi_2 = 0, \quad (\text{B.18})$$

$$\bar{\xi}_1 \gamma_A \xi_2 = -n_A \bar{\xi}_1 \hat{r} \xi_2, \quad (\text{B.19})$$

$$n_A \bar{\xi}_1 \gamma^{ABC} \xi_1 = 0. \quad (\text{B.20})$$

Уравнения (B.18) и (B.19) получаются подстановкой соотношения $(\hat{r}\hat{n} + \hat{n}\hat{r})(-1/2) = 1$ в $\bar{\xi}_1 \xi_2$ или $\bar{\xi}_1 \gamma_A \xi_2$ и использованием соотношения

$$\overline{\hat{k}\xi} = -\bar{\xi}\hat{k} \quad (\text{B.21})$$

($\Rightarrow \hat{n}\xi_1 = 0 \Leftrightarrow \bar{\xi}_1 \hat{n} = 0$). Соотношение (B.20) есть прямое следствие соотношений $\bar{\xi}_1 \gamma^A \xi_1 = -\bar{\xi}_1 \gamma^A \xi_1 = 0$ и $\hat{n}\xi_1 = 0$.

Из уравнений (B.16), (B.20) и (B.21) следует

$$n_B \bar{\theta} \gamma^{ABC} \theta = 2n_B \bar{\eta} \gamma^{ABC} \hat{\rho} \zeta, \quad (\text{B.22})$$

а соотношения (B.18) и (B.19) легко дают

$$\bar{\theta} \hat{\rho} \theta = (n \cdot \rho) [-\bar{\eta} \hat{r} \eta + \rho^2 \bar{\zeta} \hat{r} \zeta] + \bar{\eta} \hat{\rho} \hat{\rho} \zeta. \quad (\text{B.23})$$

Последний член этого уравнения может быть преобразован следующим образом:

$$\bar{\eta} \hat{\rho} \hat{\rho} \zeta = \bar{\eta} \gamma^{ABC} \hat{\rho} \zeta \rho_A \hat{\rho}_B n_C (n \cdot \rho)^{-1} \quad (\text{B.24})$$

путем подстановки $(\hat{n}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{n})(2n \cdot \rho)^{-1} = 1$ и использования хорошо известного тождества:

$$\gamma^A \gamma^B \gamma^C = \gamma^{ABC} + \eta^{AB} \gamma^C + \eta^{BC} \gamma^A - \eta^{AC} \gamma^B \quad (\text{B.25})$$

(и тождества (B.18)). Подстановка выражения (B.24) в уравнение (B.23) дает

$$\bar{\theta} \hat{\rho} \theta = (n \cdot \rho) [-\bar{\eta} \hat{r} \eta + \rho^2 \bar{\zeta} \hat{r} \zeta] + \bar{\eta} \gamma^{ABC} \hat{\rho} \zeta \rho_A \hat{\rho}_B n_C (n \cdot \rho)^{-1}. \quad (\text{B.26})$$

Это соотношение используется в основном тексте (разд. 16.3.6).

Литература

1. *Nambu Y.*, Lectures for the Copenhagen Summer Symposium, 1970; *Veneziano G.*, Nuovo Cimento. **57A**, 190 (1968).
2. *Goto T.*, Prog. Theor. Phys. **46**, 1560 (1971); *Hara O.*, Prog. Theor. Phys., **46**, 1549 (1971).
3. *Scherk J.*, *Schwarz J. H.*, Nucl. Phys. **B81**, 118 (1974); Phys. Lett., **52B**, 347 (1974).
4. *Dirac P. A. M.*, Proc. R. Soc. (London), **A268**, 57 (1962); *Teitelboim C.*, *Regge T.* — In: Proceedings of the First Marsel Grossmann Meeting on General Relativity, North-Holland, Amsterdam, 1977.
5. *Eisenhart L. P.*, Riemannian Geometry, Princeton University Press, Princeton, 1964. [Имеется перевод: *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. Пер. с англ./Под ред. А. М. Лопшица. — М.: ИЛ, 1948.]
6. *Henneaux M.*, Ann. Phys. (N. Y.), **140**, 45 (1982); J. Phys. **A17**, 75 (1984). *Henneaux M.*, *Shepley L. C.*, J. Math. Phys., **23**, 2101 (1982).
7. *Polyakov A. M.*, Phys. Lett., **103B**, 207, 211 (1981); *Misner C. W.*, Phys. Rev., **D18**, 4510 (1978).
8. *Fubini S.*, *Hanson A. J.*, *Jackiw R.*, Phys. Rev., **D7**, 1732 (1973).
9. *Mandelstam S.*, Phys. Rep., **13**, 259 (1974).
10. *Rebbi C.*, Phys. Rep., **12**, 1 (1974).
11. *Dirac P. A. M.*, Can. J. Math., **2**, 129 (1950); Proc. R. Soc. (London), **A246**, 326 (1958); Lectures on Quantum Mechanics, Academic Press, New York, 1967. [Имеется перевод: *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой механике. Пер. с англ. А. Г. Миронова. — М.: Мир, 1968.]
12. *Chang L. N.*, *Mansouri F.*, Phys. Rev., **D5**, 2535 (1972); *Mansouri F.*, *Nambu Y.*, Phys. Lett., **39B**, 375 (1972).
13. *Hanson A. J.*, *Regge T.*, *Teitelboim C.*, Constrained Hamiltonian Systems, Academia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976.
14. *Regge T.*, *Teitelboim C.*, Ann. Phys. (N. Y.), **88**, 286 (1974).
15. *Segal G.*, Commun. Math. Phys., **80**, 301 (1981).
16. *Brown J. D.*, *Henneaux M.*, *Teitelboim C.*, Phys. Rev., **D33**, 319 (1986).
17. *Goddard P.*, *Goldstone J.*, *Rebbi C.*, *Thorn C. B.*, Nucl. Phys., **B56**, 109 (1973).
18. *Browder R. C.*, Phys. Rev., **D6**, 1655 (1972); *Goddard P.*, *Thorn C. B.*, Phys. Lett., **40B**, 235 (1972);
- 18a. *Scherk J.*, Rev. Mod. Phys., **47**, 123 (1975).
19. *Fujikawa K.*, Phys. Rev., **D25**, 2584 (1982); *Kato M.*, *Ogawa K.*, Nucl. Phys., **B212**, 443 (1983); *Hwang S.*, Phys. Rev., **D28**, 2614 (1983).
20. *Wheeler J. A.* — In: Batelle Rencontres (C. M. De Witt, J. A. Wheeler, eds.), Benjamin, New York (1967); *De Witt B. S.*, Phys. Rev., **160**, 1113 (1967); *Pilati M.*, Ph. D. Thesis, Princeton (1980); Phys. Rev. **D26**, 2645 (1982); **D28**, 729 (1983); *Isham C. J.*, *Kakas A. C.*, Class. Quant. Grav., **1**, 621, 633 (1984).

21. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.*, Nucl. Phys. **B241**, 339 (1984);
Friedan D., Qiu Z., Shenker S., Phys. Rev. Lett., **52**, 1575 (1984); Chicago preprint EFI, 84-35, 1984;
Goddard P., Olive D., Nucl. Phys., **B257**, 226 (1985).
22. *Virasoro M. A.*, Phys. Rev., **D1**, 2933 (1970).
- 22a. *Kac V. G.* — In: Proceedings of the International Congress of Mathematics, Helsinki (1978) (O. Lehto, ed.), Vol. 1, p. 299, Academia Scientiarum Fennica, Helsinki (1980);
Feigin B. L., Fuks D. B., Funct. Anal. Appl., **16**, 144 (1982);
Goddard P., Kent A., Olive D., Phys. Lett., **152B**, 88 (1985);
Gervais J. L., Neveu A., Commun. Math. Phys., **100**, 15 (1985).
23. *Kac V. G.*, Math. USSR Izv., **2**, 1271 (1968);
Moody R., J. Algebra, **10**, 211 (1968);
Kac V. G., Infinite Dimensional Lie Algebras, Birkhäuser, Cambridge, Massachusetts, 1983.
- 23a. *Frenkel I. B., Kac V. G.*, Invent. Math., **62**, 23 (1980);
Goddard P., Olive D. I. — In: Algebras, Lattices and Strings (J. Lepowskij, ed.), MSRI publication No. 3, p. 419, Springer, Berlin, 1984.
24. *Sugawara H.*, Phys. Rev., **170**, 1659 (1968).
25. *Nemeschansky D., Yankielowicz S.*, Phys. Rev. Lett., **54**, 620, 1736 (1985).
- 25a. *Altshuler D., Nilles H. P.*, Phys. Lett., **154B**, 135 (1985).
26. *Witten E.*, Commun. Math. Phys., **92**, 455 (1984).
27. *Dashen R., Frishman Y.*, Phys. Rev., **D11**, 1781 (1975).
28. *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.*, Phys. Lett., **158B**, 316; **160B**, 69 (1985);
Callan C. G., Friedan D., Martinec E. J., Perry M. J., Nucl. Phys., **B262**, 593 (1985).
29. *Siegel W.*, Phys. Lett., **149B**, 157, 162 (1984); **151B**, 391, 396 (1985);
Siegel W., Zwiebach B., Nucl. Phys., **B263**, 105 (1986);
Banks T., Peskin M., SLAC preprint, 1985;
Friedan D., Shenker S., Martinec E., Phys. Lett., **160B**, 55 (1985);
Witten E., Princeton preprint, 1985.
- 29a. *Neveu A., Schwarz J., West P.*, Phys. Lett., **164B**, 51 (1985);
Neveu A., Nicolai H., West P., CERN preprint TH 4297/85.
30. *Fradkin E. S., Vilkovisky G. A.*, Phys. Lett., **55B**, 224 (1975); CERN report TH2332, 1977;
Batalin T. A., Vilkovisky G. A., Phys. Lett., **69B**, 309 (1977);
Fradkin E. S., Fradkina T. E., Phys. Lett., **72B**, 343 (1978);
Баталин И. А., Фрадкин Е. С. — В сб.: Теоретико-групповые методы в физике. Том II. — Москва, 1980.
31. *Henneaux M.*, Phys. Rev. Lett., **55**, 769 (1985); Phys. Rep., **1261**, 1 (1985); Bull. Cl. Sci. Acad. R. Belg. **LXXI**, 198 (1985); Quantum Mechanics of Fundamental Systems (C. Teitelboim, ed.), Plenum Press, New York, 1988.
32. *Curci G., Ferrari R.*, Nuovo Cimento, **35A**, 273 (1976);
Kugo T., Ojima I., Suppl. Prog. Theor. Phys., **66**, 1 (1979).
33. *Henneaux M., Teitelboim C.*, Ann. Phys. (N. Y.), **143**, 127 (1982).
34. *Henneaux M., Teitelboim C.* — In: Quantum Field Theories and Quantum Statistics, Fradkin Festschrift (I. A. Batalin, C. J. Isham, G. A. Vilkovisky, eds.), Adam Hilger, Bristol, 1987.
35. *Schwarz J. H.*, Caltech preprint CALT-68-1304.
36. *Schwarz J. H.*, Phys. Rep., **89**, 223 (1982).
37. *Brower R. C., Thorn C. B.*, Nucl. Phys., **B31**, 163 (1971);
Thorn C. B., Nucl. Phys., **B248**, 551 (1984).
38. *Schwarz J. H.*, Phys. Rep., **8**, 269 (1973).

39. *Fubini S., Veneziano G.*, Nuovo Cimento, **67A**, 29 (1970); Ann. Phys. (N. Y.), **63**, 12 (1971);
Gervois J. L., Nucl. Phys. **B21**, 192 (1970).
40. *Del Giudice E., Di Vecchia P., Fubini S.*, Ann. Phys. (N. Y.), **70**, 378 (1972).
41. *Brink L.*, Supersymmetry (K. Dietz, R. Flume, G. V. Gehlen, V. Rittenberg, eds.), p. 89, Plenum Press, New York, 1984.
- 41a. *Brink L., Nielsen H. B.*, Phys. Lett., **45B**, 332 (1973).
42. *Neveu A., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys. **B31**, 86 (1971).
43. *Ramond P.*, Phys. Rev., **D3**, 2415 (1971).
- 43a. *Gervois J. L., Sakita B.*, Nucl. Phys., **B34**, 477 (1971).
44. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Phys. Lett., **109B**, 444 (1982).
45. *Brink L., Di Vecchia P., Howe P.*, Phys. Lett., **65B**, 471 (1976);
Deser S., Zumino B., Phys. Lett., **65B**, 369 (1976).
46. *Brink L., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B121**, 285 (1977);
Ademollo M., Brink L., D'Adda A., D'Auria R., Napolitano E., Sciuto S., Del Giudice E., Di Vecchia P., Ferrara S., Gliozzi F., Musto R., Pettorino R., Phys. Lett., **62B**, 105 (1976); Nucl. Phys., **B114**, 297 (1976);
Ademollo M., Brink L., D'Adda A., D'Auria R., Napolitano E., Sciuto S., Del Giudice E., Di Vecchia P., Ferrara S., Gliozzi F., Musto R., Pettorino R., Schwarz J. H., Nucl. Phys., **B111**, 77 (1976); *Pernici M., van Nieuwenhuizen P.*, Stony Brook preprint ITP-85-84, 1985.
47. *Teitelboim C.*, не опубликовано.
- 47a. *Tabensky R., Teitelboim C.*, Phys. Lett., **69B**, 453 (1977);
Teitelboim C., Phys. Rev. Lett., **38**, 1106 (1977).
48. *Iwasaki Y., Kikkawa K.*, Phys. Rev., **D8**, 440 (1973).
49. *Pilati M.*, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1980.
50. *Gliozzi F., Scherk J., Olive D.*, Nucl. Phys., **B122**, 253 (1977); Phys. Lett., **65B**, 282 (1976).
51. *Fisch J.*, Quantification BRST des Théories de cordes, Mémoire de licence, Université Libre de Bruxelles, 1985—1986.
52. *Ohta N.*, Covariant Quantization of Superstrings Based on BRST Invariance, University of Texas preprint, 1985;
Terao H., Uehara S., Covariant Second Quantization of Free Superstring, Kyoto preprint RKK85-32, 1985.
53. *Henneaux M.*, Phys. Lett., **177B**, 35 (1986); **183B**, 59 (1987).
54. *Corrigan E. F., Goddard P.*, Nucl. Phys. **B68**, 189 (1974);
Brower R. C., Friedman K. A., Phys. Rev., **D7**, 535 (1973);
Schwarz J. H., Nucl. Phys., **B46**, 61 (1972).
- 54a. *Scherk J.*, Rev. Mod. Phys., **47**, 123 (1975).
55. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Nucl. Phys., **B181**, 502 (1981); **B198**, 252, 441 (1982).
56. *Green M. B., Schwarz J. H.*, Phys. Lett., **136B**, 367 (1984).
57. *Henneaux M., Mezincescu L.*, Phys. Lett., **152B**, 340 (1985).
58. *Wess J., Bagger J.*, Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press, Princeton, 1983. [Имеется перевод. Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. Пер. с англ./Под ред. В. И. Огиевского.— М.: Мир, 1986.]
59. *Wess J., Zumino B.*, Phys. Lett., **37B**, 95 (1971);
Witten E., Nucl. Phys., **B223**, 422 (1983).
60. *Curtright T. L., Mezincescu L., Zachos C. K.*, Phys. Lett., **161B**, 79 (1985);
Grisaru M. T., Howe P., Mezincescu L., Nilsson B. E. W., Townsend P. K., Phys. Lett., **162B**, 116 (1985);
Witten E., Nucl. Phys., **B266**, 245 (1986).
61. *Siegel W.*, Phys. Lett., **128B**, 397 (1983).
62. *Bengtsson I., Cederwall M.*, Göteborg preprint 84-21, 1984.

63. *Hori T., Kamimura K.*, Prog. Theor. Phys., **73**, 476 (1985).
64. *Brink L., Schwarz J. H.*, Phys. Lett., **100B**, 310 (1981).
65. *Siegel W.*, Class. Quant. Grav., **2**, L95 (1985); Nucl. Phys., **B263**, 93 (1986).
66. *Batalin I. A., Fradkin E. S.*, Phys. Lett., **122B**, 157 (1983).
67. *Brink L., Lindgren O., Nilsson B. E. W.*, Nucl. Phys., **B212**, 401 (1983); *Mandelstam S.*, Nucl. Phys., **B213**, 149 (1983); *Brink L.* — In: Unified String Theories (M. B. Green, D. J. Gross, eds.), p. 244, World Scientific Publishing Company, Singapore (1986).
68. *Nahm W.*, Nucl. Phys., **B135**, 149 (1978).
69. *Gremmer E., Scherk J.*, Nucl. Phys., **B103**, 399 (1976).
70. *Dolan L., Slansky R.*, Phys. Rev. Lett., **54**, 2075 (1985).
71. *Englert F., Neveu A.*, Phys. Lett., **163B**, 349 (1985).
72. *Gross D. J., Harvey J. A., Martinec E., Rohm R.*, Phys. Rev. Lett., **54**, 502 (1985); Nucl. Phys., **B256**, 253 (1985); **B267**, 75 (1986); *Gross D. J.* — In: Quantum Mechanics of Fundamental Systems (C. Teitelboim, ed.), Plenum Press, New York, 1988.
73. *Brink L., Schwarz J. H., Scherk J.*, Nucl. Phys. **B121**, 77 (1977).

- Амплитуды рассеяния в теории струн 59, 60
 — — для точечных частиц 55
 Аномалии БРСТ 171, 226, 227
 — калибровочные 84
- Бейкера — Хаусдорфа формула 56
 Бесконечная приводимость 267
 БРСТ заряд 167
 — метод квантования 164
 — нильпотентность квантовая, бозонная струна 170, 171
 — — спиновая струна 220
 — — классическая 166
 — оператор 170
- Вейлевская инвариантность 20, 103
 Вейля преобразования 120
 Венециано модель 12, 24, 59
 Вершинный оператор 58, 63, 66, 195
 Весса — Зумино член 242
 Взаимодействие между струнами 75
 Виковский поворот 57
 Вирасоро алгебра 23, 108, 127, 155
 — супералгебра 216, 217
 — условия 61, 116, 128
 Вложение 99
 Возбужденные состояния бозонной струны 187, 189
 — — спиновой струны 231, 232
 — — суперструны 43
 Вторичные связи 21, 119, 260
- Гамильтоновы связи 207
 Гармонические отображения 104
 Гаусса закон 116
 Генераторы алгебры Пуанкаре 25, 184—187, 212
 Гравитон 189, 233
 Граничные условия для бозонной струны 22, 25, 111, 125
 — — — спиновой струны 30, 34, 209
 — — — суперструны 247, 248
 Группа E_8 52
 — $E_8 \times E_8$ 53, 274
 — $SO(8)$ 41, 43, 90
- — восьмимерное представление 90
 — — ковариантность 41
 — $SO(24)$ 186, 187
 — $SO(25)$ 186, 187
 — $SO(32)$ 52, 274
 — $SO(d-2)$ 37
 — $SO(n)$ 43, 46, 163, 164
 — $Spin(32)/Z_2$ 52
 — $SU(4) \times U(1)$ 72, 73
 — $SU(N)$ 163, 164
 G-четность 231
- ДДФ операторы 181, 196—203
 — состояния 196—203
 Действие бозонной струны 20, 99
 — гетеротической струны 49
 — классической точечной частицы 19, 98
 — спиновой струны 30, 32, 33
 — суперструны 37, 246, 256
 — суперчастицы 258
 Дилатон 189
 Дирака скобки 146—150
 Диффеоморфизмы 108, 122
 Дуальность 62
 Духи 169, 264
 — фоковское пространство 169, 219, 224
 — для духов 264
- Индукцированная метрика 99
- Калаби — Яу пространства 87
 Калибровка светового конуса для бозонной струны 24, 138—140
 — — — спиновой струны 33, 211, 212
 — — — суперструны 253—256
 — — — суперчастицы 270
 Каца — Муди алгебра 161—163
 Квадратичная форма действия 101
 Квантование БРСТ 164
 — с ограничениями 22, 35
 Квантовая калибровочная инвариантность 167, 183, 202
 — теория калибровочных полей 165

- Квартетный механизм 181, 223, 228, 275
 Киральность в 10 измерениях 43, 249
Клебша — Гордана коэффициенты 90
Клиффорда алгебра 41, 90, 216
Коба — Нильсена формула 60
 Ковариантное квантование бозонной струны 22, 190—203
 — спиновой струны 32, 216
 Компактификация на гипертор 50
 Компонентные поля струны 72
 Конечность 84
 Контрчлены 70, 73
 Конформная алгебра 108
 — инвариантность 182
 — калибровка 107, 134—137
 Конформные преобразования 107—111
 Конформный вектор *Киллинга* 109
 — спин 61, 195
 — фактор 103
 Космологическая постоянная 88
Коши — Римана условия 107, 111
 Критическая размерность 152
 — — бозонной струны 172, 190
 — — спиновой струны 220, 225
 — — суперструны 257
- Лагранжевы множители 119, 121, 209
- Майорана-вейлевский спинор 237, 243, 244, 280
 Малая группа 186, 231
Мебиуса подалгебра (1, 1) 35
 — преобразования 60
 Мембраны 100, 104
 Метод континуального интеграла 55
- Натяжение струны 114
Невё — Шварца модель 213, 230
 — — сектор 34, 35
 — — спектр 231, 232
 Неоднозначность упорядочения 154, 217
 Неориентируемые струны 46
 Нормальное упорядочение 23, 154
 Нулевые состояния 166, 176, 192, 201
 — — отщепление 166, 176, 201
- Обратное отображение 241
 Однопетлевые диаграммы 64—66, 83
 — — конечные 83, 84
- Оператор внешней производной 240
 — твиста 63
 — числа дұхов 181, 182
 Ориентируемые струны 46
 Ортогональная калибровка 22
- Первичные связи 21, 117, 119, 260
 Перенормировка скорости света 27
 Площадь поверхности 20, 99
 Полевая теория струн 67—74
 Представления группы *Пуанкаре* 28, 29, 186
 Проектор на физические состояния 64
Пуанкаре суперзаряды 259, 260
Пуанкаре-заряды 126, 132, 134
Пуанкаре-инвариантность 20, 106, 184, 208, 230, 233
- Разложение *S*-матрицы по теории возмущений 55
Рамона модель 217, 235
 — сектор 34, 236
 — — граничные условия 34, 210
 — спектр 234, 235
Рариты — Швингера мультиплет 43
 — — поле 32
 — — состояния 44, 45
Редже наклон траектории 26
 — полюса 12
 — траектории 12, 186
 Репараметризационная инвариантность 20, 98, 121, 156
 Решетка дуальная 51
 — самодуальная 52
 — четная 51
 — Γ_8 52
 — Γ_{16} 52
 — $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ 52
Римана ζ -функция 27
- Связи второго рода 252, 261
 — первого рода 252, 261
Сигма-модель 104, 105, 239
 Состояния с отрицательной нормой 22, 153, 170, 181
 Спектр бозонной струны 186
 — — — замкнутой 189
 — гетеротической струны 52
 — спиновой струны *Невё — Шварца* 231
 — — — — — замкнутой 232
 — — — *Рамона* 234, 235
 — суперструны 45

- Супервейлевская инвариантность 208
 Супергравитация 207, 238, 258
 Суперзаряд 252, 272
 Суперконформная алгебра 36, 207
 — симметрия 34—36
 Супермногообразия
 $SUSY(N)/SO(d-1,1)$ 239
 Суперпуанкаре-алгебра 38, 49,
 67
 — инвариантность 259
 Суперсимметрия 38
 — в 10 измерениях 236, 239
 Суперструна типа I 40, 42, 257
 — — IIa 40, 44, 257
 — — IIb 40, 43, 257
 Суперянг-миллсова теория 237
- Тахион 27, 50, 58, 64, 187, 189, 231,
 239
 Теневой мир 88
 Тензор энергии-импульса 102, 109,
 164
 Теорема об отсутствии духов 181, 198
 Теория типа *Сугавары* 163
- Удвоение 177, 224
 Уилера — Де Витта уравнение 156
 Уравнения движения бозонной стру-
 ны 22, 33
 — — — — решения 141
- — суперструны 247
 Усечение 178, 236
- Фейнмана** правила 57
 Фейнмановское правило обхода по-
 люсов 57
 Фермионная симметрия для супер-
 струны 245
 — — — суперчастицы 258
Фирца преобразование 246
 — формула 91
 Флуктуации вакуумные 26, 50
Фока пространство 154, 155
 Фоковское представление 152—154
 Формализм суперполей 72
 Функционал энергии 104
 Функциональная мера 71
 Функция сдвига 117, 121
 — хода 117—119
- Центральный заряд** в алгебре *Вира-
 соро* 23, 156
 — — — супералгебре *Вирасоро* 217
 Циклическая симметрия 62
- Чана и Патона** способ 42
 — переменные 61
- Шапиро — Вирасоро** модель 189
 — — — расширенная 189

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	9

Часть I

Лекции по теории суперструн. Ларс Бринк

Глава 1. Введение	12
Глава 2. Бозонные струны	19
Глава 3. Спиновые струны	29
Глава 4. Суперструны	37
Глава 5. Гетеротическая струна	48
Глава 6. Операторный формализм	55
Глава 7. Полевая теория свободных суперструн	67
Глава 8. Полевая теория взаимодействующих суперструн типа IIb	75
Глава 9. Другие примеры струнных взаимодействий и возможное появление аномалий	81
Глава 10. Дальнейшие перспективы	86
Приложение. Некоторые обозначения и формулы	90
Литература	92

Часть II

Лекции по теории струн с применением гамильтоновых и БРСТ-методов. Марк Энно

Глава 11. Введение	95
Глава 12. Струна Намбу — Гото: классический анализ	98
12.1. Принцип действия	98
12.1.1. Действие Намбу — Гото	98
12.1.2. Действие в квадратичной форме	101
12.1.3. Интерпретация действия в терминах σ -модели	104
12.1.4. Калибровочные симметрии	105
12.1.5. Глобальные симметрии	106
12.1.6. Конформная симметрия	106
12.1.7. Граничные условия	111
12.2. Гамильтонов формализм	116
12.2.1. Связи	116
12.2.2. Смысл условий связи — упрощение формализма	120
12.2.3. Гамильтонова форма граничных условий (случай открытой струны)	124
12.2.4. Пуанкаре-заряды в гамильтоновом формализме	126
12.3. Более подробное описание алгебры связей	126
12.3.1. Явные вычисления	126
12.3.2. Условия Вирасоро	128
12.4. Фурье-моды	131
12.4.1. Открытые струны	131
12.4.2. Замкнутые струны	132
12.5. Калибровка светового конуса	134
12.5.1. Конформные калибровки	134
12.5.2. Калибровка светового конуса	138

	12.5.3. Общее решение классических уравнений движения струны	141
	12.5.4. Скобки Дирака как независимые степени свободы	145
	12.5.5. Действие и гамильтониан в калибровке светового конуса	147
	12.5.6. Генераторы алгебры Пуанкаре	148
	12.5.7. Особенности замкнутой струны	150
Глава 13.	Квантование струны Намбу — Гото	152
	13.1. Алгебра Вирасоро — общее рассмотрение	152
	13.1.1. Введение	152
	13.1.2. Операторы Вирасоро — фоковское представление	152
	13.1.3. Алгебра Вирасоро	155
	13.1.4. Сравнение связей Вирасоро с уравнением Уилера — Де Витта	156
	13.1.5. Алгебра Вирасоро и алгебры Каца — Муди	161
	13.1.6. Алгебра Вирасоро на искривленном фоне	163
	13.2. Квантование струны методом Бекки — Рюэ — Стора — Тютина (БРСТ)	164
	13.2.1. БРСТ-квантование — краткий обзор	164
	13.2.2. Классические выражения для БРСТ-заряда	167
	13.2.3. Фоковское пространство духов	169
	13.2.4. Нильпотентность квантового БРСТ-оператора	170
	13.2.5. Критическая размерность на искривленном фоне	172
	13.2.6. Физическое подпространство	172
	13.2.7. Замечания по поводу удвоения	177
	13.2.8. Разное	181
	13.3. Квантование в калибровке светового конуса	184
	13.3.1. Пуанкаре-инвариантность квантовой теории	184
	13.3.2. Описание спектра	186
	13.3.3. Замкнутая струна — пуанкаре-инвариантность	188
	13.3.4. Спектр (замкнутая струна)	189
	13.4. Ковариантное квантование	190
	13.4.1. Устранение духов как основной результат ковариантного подхода	190
	13.4.2. Вершинный оператор	194
	13.4.3. Состояния ДДФ	196
	13.4.4. Теорема об отсутствии духов при $d = 26$ и $\alpha_0 = 1$	198
	13.4.5. Квантовая калибровочная инвариантность	202
Глава 14.	Фермионная струна: классический анализ	204
	14.1. Локальная суперсимметрия в двух измерениях	204
	14.2. Суперконформная алгебра	205
	14.2.1. Квадратный корень из бозонных и фермионных связей	205
	14.2.2. Граничные условия	209
	14.2.3. Суперкалибровочные преобразования — калибровочные условия светового конуса	211
	14.2.4. Генераторы Пуанкаре	212
	14.3. Фурье-моды (открытая струна)	213
	14.3.1. Фурье-разложение полей	213
	14.3.2. Супергенераторы Вирасоро	213
	14.3.3. Генераторы Пуанкаре	215
	14.3.4. Замечания для случая замкнутой струны	215
	14.3.5. Супералгебра Вирасоро	216
Глава 15.	Фермионная струна: квантовый анализ	219
	15.1. Бекки — Рюэ — Стора — Тютина (БРСТ) квантование модели Невё — Шварца	219

15.1.1.	Фоковское пространство д μ хов	219
15.1.2.	БРСТ-оператор	220
15.1.3.	Критическая размерность	220
15.1.4.	Структура физического подпространства	221
15.2.	Бекки — Рюэ — Стора — Тютина (БРСТ) квантование модели Рамона	224
15.2.1.	Фоковское пространство д μ хов	224
15.2.2.	БРСТ-оператор	225
15.2.3.	Критическая размерность	225
15.2.4.	Структура физического подпространства	228
15.2.5.	Замечания для случая замкнутой струны	230
15.3.	Квантование модели Нев \acute{e} — Шварца в калибровке светового конуса	230
15.3.1.	Пуанкаре-инвариантность	230
15.3.2.	Спектр Нев \acute{e} — Шварца	231
15.3.3.	Спектр замкнутой струны Нев \acute{e} — Шварца	232
15.4.	Квантование модели Рамона в калибровке светового конуса	233
15.4.1.	Пуанкаре-инвариантность	233
15.4.2.	Спектр Рамона	234
15.4.3.	Замкнутая струна	235
15.5.	Суперсимметрия в десяти измерениях	236
15.5.1.	Открытая струна	236
15.5.2.	Замкнутая струна	238
Глава 16.	Суперструна	239
16.1.	Ковариантное действие	239
16.1.1.	$SUSY(N)/SO(d - 1, 1)$ как пространство объектов	239
16.1.2.	Инвариантное действие	241
16.1.3.	Локальная суперсимметрия	244
16.1.4.	Уравнения движения и граничные условия	247
16.1.5.	Структура калибровочных симметрий	249
16.1.6.	Суперзаряды Пуанкаре	251
16.1.7.	Гамильтонов формализм	252
16.1.8.	Калибровка светового конуса	253
16.2.	Квантовая теория	257
16.3.	Суперчастица	258
16.3.1.	Действие — калибровочные симметрии	258
16.3.2.	Суперзаряды Пуанкаре	259
16.3.3.	Гамильтонов формализм	260
16.3.4.	Смысл связей	261
16.3.5.	Модель Сиджела	263
16.3.6.	Калибровка светового конуса	268
Глава 17.	Гетеротическая струна	274
Приложение А.	Доказательство теоремы об отсутствии д μ хов для бозонной струны, основанное на БРСТ-методах	275
Приложение Б.	Матрицы γ в десяти измерениях	278
	Б.1. Свойства симметрии	278
	Б.2. Преобразования Фирца	279
Приложение В.	Разложение десятимерных спиноров в калибровке светового конуса	282
Литература		286
Предметный указатель		290