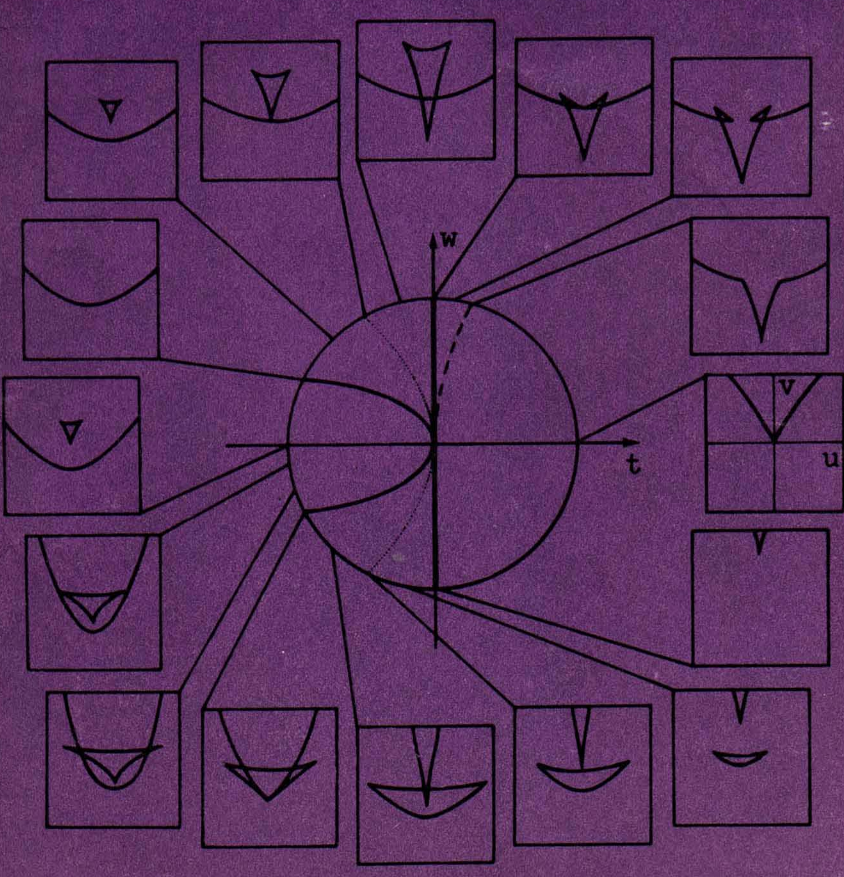
Т. БРЁКЕР
Л. ЛАНДЕР

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ВВОДНЫЕ КУРСЫ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ РОСТКИ И КАТАСТРОФЫ



Differentiable Germs and Catastrophes

Th. Bröcker
Universität Regensburg
Fachbereich Mathematik
L. Lander

Cambridge University Press
1975

Т. Брёкер
Л. Ландер

Дифференцируемые ростки и катастрофы

Перевод с английского
А.Г.Кушниренко
Под редакцией
В.И.Арнольда

ПЛАТОН
1997

Т.Брёкер, Л.Ландер
Дифференцируемые ростки и катастрофы

Научное издание
Лицензия ЛР №024851 от 17.07.93 г.
Подписано к печати 21.01.97 г. Формат 60x88/16
Печ.л.13. Заказ № 318.
Издательство "ПЛАТОН"
400062, г.Волгоград, ул.Кирова, 71/15

ISBN 5-80100-174-3

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предметом книги Брёкера и Ландера являются критические точки семейств гладких функций, зависящих от параметров. Исследование таких семейств часто встречается в различных приложениях. Книга Брёкера и Ландера является первым в мировой литературе учебником по этим вопросам, написанным с большим вниманием к читателю, у которого предполагаются лишь очень небольшие математические познания. Для более глубокого изучения общей теории особенностей гладких отображений Уитни — Тома — Мезера следует обратиться к учебнику М. Голубицкого и В. Гийемина «Устойчивые отображения и их особенности», недавно вышедшему в русском переводе.

В. Арнольд

Жил некогда Чжу,
Который учился убивать драконов,
И отдал все, что имел,
Чтобы овладеть этим искусством.

Через три года
Он достиг мастерства,
Но, увы, ему ни разу не представился случай
Применить свое уменье.

Чжуан-цзы [1])

И тогда он начал учить других
Искусству убивать драконов.

Рене Том

---

[1]) Подстрочный перевод с китайского см. в книге: Атеисты, материалисты, диалектики Древнего Китая, М., 1967, стр 310. — *Прим. ред.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В летнем семестре 1972 г. я прочитал во Фрейбургском университете курс лекций по локальной теории дифференцируемых отображений. Эти лекции составили основу первых тринадцати глав настоящей книги. Следующие три главы были написаны для летней школы, организованной обществом The Studienstiftung des deutschen Volkes. Мои студенты помогли мне избавить первый вариант рукописи от многих ошибок, после чего Л. Ландер перевел ее на английский. Он сделал также большое число улучшений и исправлений и написал последнюю главу вместе со всеми ее рисунками и библиографией. В последних главах обсуждается тема, ради которой, собственно говоря, и была написана эта книга: классическая теория катастроф.

Мы оба широко использовали материал из курса лекций по теории катастроф, прочитанного К. Енихом в Регенсбурге в зимнем семестре 1971/72 г. Эти лекции содержали большую часть информации и рисунков, представленных в гл. 17.

Небольшое число экземпляров немецкого текста настоящей книги было напечатано для наших студентов под названием: Дифференцируемые отображения (Der Regensburger Trichter, Band 3, Differenzierbare Abbildungen).

Ниже читатель не найдет никаких новых результатов или методов. Мы задались целью облегчить студентам, хорошо освоившим основные курсы алгебры и анализа, изучение недавних работ по дифференцируемым отображениям и, в частности, помочь им овладеть тайнами теории катастроф.

О чем же эта книга?

Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ — дифференцируемое отображение. Что можно сказать о множестве $f^{-1}\{0\}$, т. е. о множестве решений нелинейной системы уравнений? Мы начинаем с одной теоремы Уитни и теоремы Сарда, приведенных в 2.1 и 3.3, и, в частности, обнаруживаем, что интересные структуры могут быть найдены только для отображений «общего положения». Особый интерес представляют так называемые устойчивые отображения. Отображение $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ называется устойчивым, если для любого малого возмущения $\delta\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ существуют обратимые преобразования h_1 и h_2, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^k \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_2} \\ \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f+\delta} & \mathbf{R}^k \end{array}$$

коммутативна. Естественно ожидать, что формы, существующие в природе, должны описываться устойчивыми отображениями, поскольку все в природе подвергается малым возмущениям. Является ли «почти всякое» отображение устойчивым? Как нужно интерпретировать понятие устойчивости?

Во всяком введении в анализ объясняется, что любой дифференцируемый росток $f\colon (\mathbf{R}, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ с ненулевым рядом Тейлора в нуле можно преобразовать в первый ненулевой член этого ряда с помощью подходящей замены координат. Что происходит в высших размерностях? Когда росток дифференцируемого отображения определяется (с точностью до замен координат) конечным отрезком своего разложения Тейлора?

Таковы некоторые из вопросов, обсуждаемых в этой книге. Быть может, они побудят читателя серьезно заняться изучением и развитием некоторых идей Р. Тома.

Регенсбург, весна 1974 г.

Теодор Брёкер

1. РОСТКИ ПОСТОЯННОГО РАНГА

Литература: Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, «Мир», М., 1964.

1.1. Пусть A — произвольное подмножество в $\mathbf{R}^n$. Отображение f: $A \to \mathbf{R}^k$ называется *дифференцируемым*, если существуют открытое множество $U \subset \mathbf{R}^n$ и отображение F: $U \to \mathbf{R}^k$, такие, что $A \subset U$, $F \mid A = f$ и все частные производные F всех порядков существуют и непрерывны.

Ниже мы будем в основном интересоваться *локальными* свойствами отображений. Для того чтобы сделать более точным это понятие, дадим следующее определение. Пусть $x \in A \subset \mathbf{R}^n$, V — некоторое множество и $\mathcal{F}$ — множество пар вида (U, f), где U — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, содержащее точку x, а f: $A \cap U \to V$ — некоторое (произвольное, непрерывное, дифференцируемое, аналитическое,...) отображение. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на множестве $\mathcal{F}$: пары $(U_1, f_1) \in \mathcal{F}$ и $(U_2, f_2) \in \in \mathcal{F}$ эквивалентны, $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$, тогда и только тогда, когда в $U_1 \cap U_2$ содержится открытое множество $U \subset \mathbf{R}^n$, содержащее точку x и такое, что $f_1 \mid U = f_2 \mid U$. Класс эквивалентности по этому отношению называется (произвольным, непрерывным, дифференцируемым, аналитическим,...) *ростком* $\tilde{f}$: $(A, x) \to V$ в точке x (тильда часто опускается). Так, можно говорить о ростках дифференцируемых или аналитических отображений. Далее, поскольку всякое подмножество $\mathbf{R}^n$ определяется отображением $\mathbf{R}^n \to \{0, 1\}$, можно говорить о ростках в точке x подмножеств $\mathbf{R}^n$. Ростки ведут себя в основном так же, как отображения. В частности, можно взять композицию ростка $\tilde{g}$ в точке y и ростка $\tilde{f}$ в точке x и получить росток $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ (если $y = f(x)$):

$$(\mathbf{R}^n, x) \xrightarrow{\tilde{f}} (\mathbf{R}^m, y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbf{R}^k,$$
$$y = f(x),$$
$$\tilde{g} \circ \tilde{f}\colon\ (\mathbf{R}^n, x) \to \mathbf{R}^k.$$

Если $f\colon U \to \mathbf{R}^m$ и $g\colon V \to \mathbf{R}^k$ — представители ростков $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$, то $f \mid f^{-1}(V)\colon f^{-1}(V) \to \mathbf{R}^m$ — представитель $\tilde{f}$. На $f^{-1}(V) \subset U$ определена обычная композиция отображений $g \circ f$; это отображение есть представитель ростка $\tilde{g} \circ \tilde{f}$. Для дифференцируемого ростка $\tilde{f}\colon (\mathbf{R}^n, x) \to \mathbf{R}^k$ определена матрица Якоби $Df(x)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ (линейное отображение). Росток $\tilde{f}$ обладает обратным ростком (по отношению к операции $\circ$) тогда и только тогда, когда для $\tilde{f}$ найдется представитель f, обладающий локальным обратным отображением в некоторой достаточно малой окрестности точки x. А это имеет место в том и только том случае, когда невырожденна матрица Якоби $Df(x)$.

1.2. Теорема об обратной функции (см. Дьедонне). *Росток $\tilde{f}\colon (\mathbf{R}^n, x) \to (\mathbf{R}^n, y)$ обладает обратным ростком $\tilde{f}^{-1}\colon (\mathbf{R}^n, y) \to (\mathbf{R}^n, x)$ тогда и только тогда, когда невырожденна матрица Якоби $Df(x)$.*

Если $U \subset \mathbf{R}^n$ и отображение $f\colon U \to \mathbf{R}^k$ дифференцируемо, то отображение $Df\colon U \to \mathbf{R}^{kn} = \{$множество всех $(k \times n)$-матриц$\}$ также дифференцируемо. ***Ранг отображения f в точке x*** определяется как ранг матрицы $Df(x)$ и обозначается через $\mathrm{Rk}_x f$. Если $\mathrm{Rk}_x f \geqslant s$, то некоторый $(s \times s)$-минор матрицы $Df(x)$ отличен от нуля. Этот минор будет отличен от нуля и в некоторой окрестности точки x, поскольку отображение Df непрерывно, а определитель $(s \times s)$-матрицы — непрерывная функция ее элементов. Следовательно, ранг f не меньше s в некоторой окрестности точки x, т. е. ранг f локально не может падать, и, значит, отображение $U \to \mathbf{Z}$, задаваемое формулой $x \mapsto \mathrm{Rk}_x f$, полунепрерывно снизу. Таким образом, для любого ростка $\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n, x) \to \mathbf{R}^k$ имеется соответствующий ему полунепрерывный снизу росток $\mathrm{Rk}\,\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n, x) \to \mathbf{Z}$, $y \mapsto \mathrm{Rk}_y f$.

Теорема об обратной функции имеет важное следствие.

1.3. Теорема о ранге (см. Дьедонне). *Пусть $\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n, x) \to (\mathbf{R}^m, y)$ — росток постоянного ранга (это означает, что росток $\mathrm{Rk}\,\bar{f}$ — росток постоянного отображения). Тогда существуют обратимые ростки $\bar{\varphi}$: $(\mathbf{R}^n, x) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ и $\bar{\psi}$: $(\mathbf{R}^m, y) \to (\mathbf{R}^m, 0)$, такие, что представителем ростка*

$$\bar{\psi} \circ \bar{f} \circ \bar{\varphi}^{-1}: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^m, 0)$$

является отображение, определяемое формулой $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, где $k = \mathrm{Rk}_x f$.

Забудем про ростки. Тогда этот результат просто означает, что если отображение f: $U_1 \to \mathbf{R}^m$, определенное в окрестности U_1 точки x, имеет постоянный ранг в некоторой, быть может меньшей, окрестности U_2 точки x, то в некоторой, возможно, еще меньшей окрестности U_3 точки x отображение f запишется в указанном выше виде относительно подходящих систем координат на $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $x = y = 0$. Пусть f — представитель ростка $\bar{f}$, имеющий постоянный ранг k. Тогда найдется $(k \times k)$-минор матрицы Df, отличный от нуля в начале координат. Сделав замены координат, т. е. применив локальные диффеоморфизмы (обратимые дифференцируемые отображения), можно считать, что этот минор есть

$$(\partial f_i / \partial x_j), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant k.$$

Так как этот минор отличен от нуля в начале координат, то он отличен от нуля и в некоторой окрестности начала координат.

Определим росток $\bar{\varphi}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ формулой

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x), \ldots, f_k(x), x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

(мы обозначаем компоненты f через $(f_1, \ldots, f_m)$).

Тогда

$$D\varphi = \begin{array}{c}\left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\partial f_i/\partial x_j} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} n-k \end{array} \\ \quad\; \underbrace{\hphantom{000}}_{k} \quad \underbrace{\hphantom{00000}}_{n-k} \end{array}$$

и

$$\det(D\varphi) = \det(\partial f_i/\partial x_j)_{1 \leqslant i, j \leqslant k} \neq 0.$$

Следовательно, росток $\tilde{\varphi}$ обратим и диаграмма

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{R}^n, 0) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & (\mathbf{R}^m, 0) \\ & (\mathbf{R}^n, 0) \arrow[ur, "g = f \circ \varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x_1, \ldots, x_n) \arrow[rr, mapsto, "f"] \arrow[dr] & & (f_1, \ldots, f_m) \\ & (f_1, \ldots, f_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} (f_1, \ldots, f_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ \| \\ (z_1, \ldots, z_n) \end{gathered}$$

показывает, что представителем ростка $\tilde{g} = \tilde{f} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ является отображение g, определяемое формулой

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \underset{g}{\longmapsto} (z_1, \ldots, z_k, g_{k+1}(z), \ldots, g_m(z)).$$

Его матрица Якоби имеет вид

$$Dg = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline ? & A(z) \end{array}\right],$$

где

$$A(z) = (\partial g_j/\partial z_i), \qquad k+1 \leqslant j \leqslant m, \qquad k+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Так как в некоторой окрестности начала координат выполнено равенство $\mathrm{Rk}(g) = \mathrm{Rk}(Dg) = k$, то *в этой окрестности матрица $A(z)$ должна обращаться в нуль.* Следовательно, без ограничения общности можно считать, что

$$(*)\quad \partial g_j/\partial z_i = 0 \quad \text{при} \quad k+1 \leqslant j \leqslant m, \quad k+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Выполним теперь локальное преобразование в области значений отображения f, т. е. в $\mathbf{R}^m$, а именно, определим росток $\bar{\psi}$: $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^m, 0)$ формулой

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} - g_{k+1}(y_1, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ y_m - g_m(y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) \end{bmatrix}.$$

Матрица Якоби ростка $\bar{\psi}$ имеет вид

$$D\bar{\psi} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{k} & \overbrace{\begin{matrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{matrix}}^{m-k} \\ \hline \begin{matrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right],$$

поскольку $g_{k+1}(y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ и т. д. не зависят от $y_{k+1}, \ldots, y_m$. Следовательно, росток $\bar{\psi}$ обратим, а представителем ростка $\bar{\psi} \circ \bar{g}$ является композиция отображений, заданных формулами

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k \\ z_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k \\ g_{k+1}(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m(z) \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k \\ g_{k+1}(z) - g_{k+1}(z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m(z) - g_m(z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0) \end{bmatrix}.$$

Из соотношений (*) вытекает, что последние $m-k$ компонент этой композиции, т. е. $g_{k+j}(z_1, \ldots, z_n) - g_{k+j}(z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$ обращаются в нуль на n-мерном кубе $|z_j| < \varepsilon$. Следовательно, представителем ростка $\bar{\psi} \circ \bar{g}$ является отображение, заданное формулой

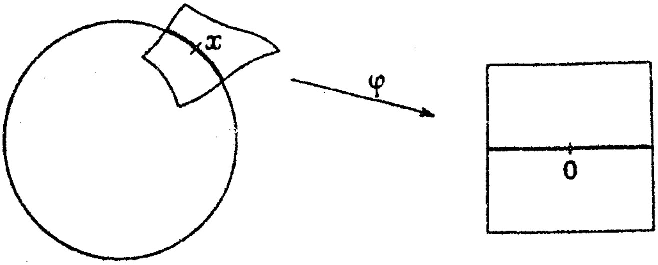
$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0).$$

1.4. Приложение теоремы о ранге. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$. Отображение $f\colon U \to \mathbf{R}^k$ называется *субмерсией*, если $\operatorname{Rk}_x f = k$ (и *иммерсией*, если $\operatorname{Rk}_x f = n$) для любого $x \in U$. По теореме о ранге, в подходящих системах координат субмерсия (иммерсия) локально записывается в виде

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$$
$$((x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)).$$

1.5. Определение. Подмножество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется ***дифференцируемым подмногообразием в*** $\mathbf{R}^n$

размерности $m \leqslant n$, если для каждой точки $x \in M$ найдется обратимый росток $\tilde{\varphi}$: $(\mathbf{R}^n, x) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, такой, что $\tilde{\varphi}(M, x) = (\mathbf{R}^m, 0) \subset (\mathbf{R}^n, 0)$ (имеется в виду $\mathbf{R}^m$, линейно вложенное в $\mathbf{R}^n$ при $m \leqslant n$).



1.6. Пример. Множество $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = 1\}$ — дифференцируемое подмногообразие в $\mathbf{R}^{n+1}$. Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

1.7. Упражнение. Обозначим через $LA(n, m) = \mathbf{R}^{nm}$ множество всех $(m \times n)$-матриц, а через $LA(n, m; k)$ — его подмножество, состоящее из всех $(m \times n)$-матриц ранга k. Докажите, что $LA(n, m; k)$ — дифференцируемое подмногообразие в $LA(n, m)$, и найдите его размерность.

1.8. Определение. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — дифференцируемое отображение. Точка $y \in \mathbf{R}^m$ называется *регулярным значением* отображения f, если для любой точки $x \in \mathbf{R}^n$, такой, что $f(x) = y$, выполнено равенство $\mathrm{Rk}_x f = m$, т. е. ранг f в этой точке равен m. Всякое значение f, которое не является регулярным, называется *критическим значением* f. В частности, если $y \notin f(\mathbf{R}^n)$, то, согласно этому определению, y — регулярное значение f.

1.9. Теорема. *Если y — регулярное значение отображения f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, то множество $f^{-1}\{y\} \subset \mathbf{R}^n$ является дифференцируемым подмногообразием в $\mathbf{R}^n$ размерности $n - m$ (либо пусто).*

Доказательство. Пусть $x \in f^{-1}\{y\}$, т. е. $f(x) = y$ и $\mathrm{Rk}_x f = m$. Это означает, что ранг f локально постоянен в точке x. По теореме о ранге, существуют локальные преобразования φ: $(\mathbf{R}^n, x) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ и ψ: $(\mathbf{R}^m, y) \to (\mathbf{R}^m, 0)$, такие, что росток $\bar\psi \circ \bar f \circ \bar\varphi^{-1} = \bar f_1$ имеет вид

$$f_1(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Отсюда видно, что росток $\bar f_1^{-1}\{0\} = \bar\varphi \bar f^{-1} \bar\psi^{-1}\{0\} = \bar\varphi \bar f^{-1}\{y\}$ является ростком в начале координат множества $\{(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)\}$.

1.10. Упражнения. 1. Предположим, что A — симметрическая $(n \times n)$-матрица и $0 \neq b \in \mathbf{R}$. Докажите, что множество $M = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^t A x = b\}$ либо является подмногообразием размерности $(n-1)$ в $\mathbf{R}^n$, либо пусто.

2. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — дифференцируемое отображение, удовлетворяющее условию $f \circ f = f$. Докажите, что множество $f(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}^n$ — дифференцируемое подмногообразие.

3. Вообще говоря, множество $f^{-1}\{y\}$ может и не быть подмногообразием. Приведите пример.

Пусть $M^m \subset \mathbf{R}^{m+k}$ — дифференцируемое подмногообразие. Выберем обратимый представитель для каждого ростка $\bar\varphi$ из определения дифференцируемого подмногообразия; тогда:

каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью U_λ, на которой определено дифференцируемое отображение φ_λ: $U_\lambda \xrightarrow{\cong} U'_\lambda \subset \mathbf{R}^m$, где U'_λ — некоторое открытое подмножество в $\mathbf{R}^m$.

Если мы хотим дать определение дифференцируемого многообразия, не используя вложение в $\mathbf{R}^{m+k}$, то напрашивается следующая конструкция:

1.11. *Дифференцируемым многообразием* называется топологическое пространство M вместе с открытым покрытием $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ и гомеоморфизмами $U_\lambda \to$

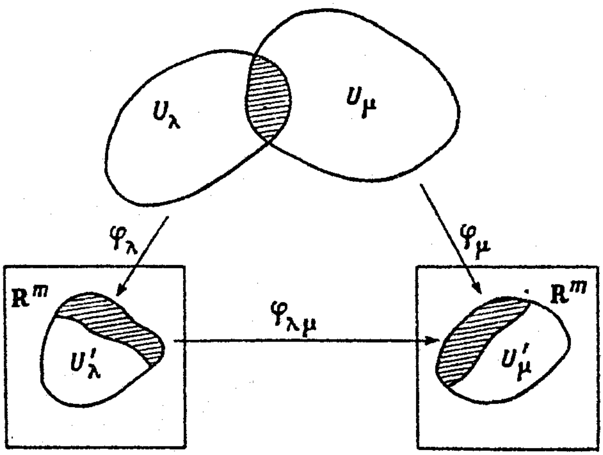
$\to U'_\lambda \subset \mathbf{R}^m$ (U'_λ открыто), обладающими такими свойствами:

(i)

$$\begin{tikzcd}
& U_\lambda \cap U_\mu \arrow[dl, "\varphi_\lambda"'] \arrow[dr, "\varphi_\mu"] & \\
\mathbf{R}^m \supset U'_{\lambda\mu} \arrow[rr, dashed, "\varphi_{\lambda\mu}"'] & & U'_{\mu\lambda} \subset \mathbf{R}^m
\end{tikzcd}$$

если $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$, то существует дифференцируемое отображение $\varphi_{\lambda\mu}$, делающее диаграмму коммутативной. Поскольку $\varphi_{\lambda\mu} \circ \varphi_{\mu\lambda} = \mathrm{id}$, отображение $\varphi_{\lambda\mu}$ — диффеоморфизм (обратимо). Очевидно, что $U'_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$, и т. д.

(ii) M — хаусдорфово топологическое пространство, обладающее счетной базой.



Многие понятия, определяемые для евклидова пространства, переносятся на подмногообразия в $\mathbf{R}^n$ (и на многообразия). Например, пусть $x \in M^m \subset \mathbf{R}^{m+k}$. Тогда функция $f\colon M \to \mathbf{R}$ называется *дифференцируемой* в точке x, если существует обратимый росток $\tilde{\psi}\colon (\mathbf{R}^{m+k}, x) \to (\mathbf{R}^{m+k}, 0)$, такой, что

$$\tilde{\psi}\colon (M^m, x) \xrightarrow{\cong} (\mathbf{R}^m, 0)$$

и росток $\tilde{f} \circ \tilde{\psi}^{-1}$ дифференцируем в точке $0 \in \mathbf{R}^m \subset \subset \mathbf{R}^{m+k}$.

Другими словами, M покрывается открытыми множествами U_λ, каждое из которых можно отождествить с открытым подмножеством в $\mathbf{R}^m$ при помощи преобразования координат, и определенное на M отображение называется дифференцируемым (имеющим ранг r, и т. д.), если после сужения на такие открытые подмножества — которые после замены координат можно рассматривать как подмножества в $\mathbf{R}^m$ — оно становится дифференцируемым (имеющим ранг r, и т. д.).

2. РЕГУЛЯРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Литература: Дж. Милнор, Топология с дифференциальной точки зрения, в книге: Дж. Милнор и А. Уоллес, Дифференциальная топология, начальный курс, «Мир», М., 1972, стр. 177-267.
Р. Нарасимхан, Анализ на действительных и комплексных многообразиях, «Мир», М., 1971.
С. Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии, «Мир», М., 1970.

Цель настоящей главы — доказать следующую теорему:

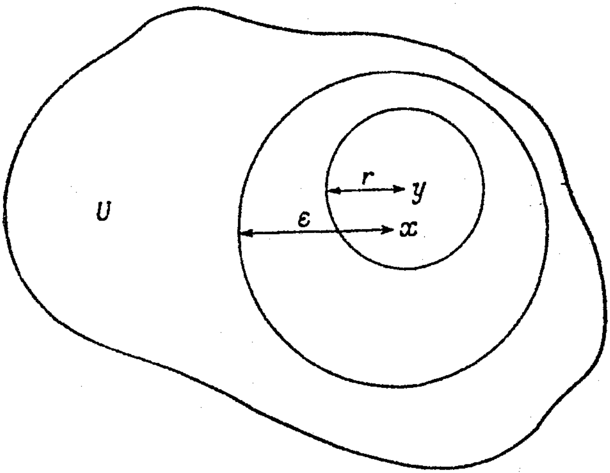
2.1. Теорема Сарда. *Мера Лебега множества критических значений дифференцируемого отображения равна нулю.*

Определение множества нулевой меры Лебега будет дано ниже. А сейчас выведем некоторые следствия из сформулированной теоремы. Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — дифференцируемое отображение. Тогда для почти всех точек $b \in \mathbf{R}^m$ (т. е. всюду, кроме множества меры нуль) верно следующее утверждение: множество $f^{-1}\{b\} \subset \mathbf{R}^n$ — дифференцируемое подмногообразие размерности $n-m$. Иными словами:

При заданном $f=(f_1, \ldots, f_m)$ для почти всех $b_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, система нелинейных уравнений $f_i(x)=b_i$, $x \in \mathbf{R}^n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, имеет в качестве множества решений $(n-m)$-мерное многообразие.

2.2. Вспомогательное утверждение. Пусть $\{K_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ — множество всех шаров в $\mathbf{R}^m$, имеющих рациональный радиус и рациональные координаты центра (таких шаров счетное число!). Тогда *если $U \subset \mathbf{R}^m$ — открытое подмножество, то $U = \bigcup_{i \in T} K_i$ для некоторого подмножества $T \subset \mathbf{N}$.*

Доказательство. Пусть $x \in U$ и $\varepsilon > 0$ столь мало, что ε-окрестность точки x содержится в U. Возьмем шар K_i с рациональным центром y, удовлетворяющим условию $|x-y|<\varepsilon/3$, и рациональным радиусом r, удовлетворяющим условию $|x-y|<r<2\varepsilon/3$. ∎



Вот следствие из этого утверждения.

2.3. Замечание. *Пусть X — произвольное подмножество в $\mathbf{R}^n$ и $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство открытых множеств в $\mathbf{R}^n$, такое, что $X\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$. Тогда существует счетное множество $\Gamma\subset\Lambda$, такое, что $X\subset\bigcup_{\lambda\in\Gamma}U_\lambda$.*

Доказательство. Множество X содержится в объединении тех шаров K_p, каждый из которых содержится по меньшей мере в одном из множеств U_λ. Таких K_p — счетное число. Выберем для каждого из них множество $U_{\lambda(p)}$, удовлетворяющее условию $K_p\subset U_{\lambda(p)}$. Тогда X содержится в объединении таких $U_{\lambda(p)}$.

2.4. Определение. Множество $C\subset\mathbf{R}^n$ имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon>0$ существует последовательность кубов $W_i\subset\mathbf{R}^n$, такая, что

$$C\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}W_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty}|W_i|<\varepsilon.$$

Здесь через $|W_l|$ обозначен объем куба W_l, т. е. $|W_l| = a^n$, где a — длина ребра W_l.

2.5. Ясно, что *если* $C = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$ *и каждое из множеств* C_ν *имеет меру нуль, то и множество* C *имеет меру нуль*. Действительно,

$$C_\nu \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} W_l^\nu, \qquad \text{где} \quad \sum_{l=1}^{\infty} |W_l^\nu| < \frac{\varepsilon}{2^\nu},$$

откуда следует, что

$$C \subset \bigcup_{l,\,\nu} W_l^\nu, \qquad \text{где} \quad \sum_{l,\,\nu} |W_l^\nu| < \sum_{\nu} \frac{\varepsilon}{2^\nu} = \varepsilon.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что для определения множеств меры нуль годятся как открытые, так и замкнутые W_l, а вместо кубов можно брать шары, параллелепипеды и т. д.

2.6. Лемма. *Если множество* $C \subset \mathbf{R}^n$ *имеет меру нуль и* $f\colon C \to \mathbf{R}^n$ *— дифференцируемое отображение, то множество* $f(C)$ *имеет меру нуль.*

Доказательство. Выберем открытое множество U, содержащее C, и дифференцируемое отображение $F\colon U \to \mathbf{R}^n$, такое, что $F \mid C = f$. Поскольку U является объединением счетного числа замкнутых шаров, без ограничения общности можно считать, что C содержится в некотором компактном шаре и что покрывающие C кубы также содержатся в (несколько большем) компактном шаре K, который в свою очередь содержится в U.

Положим теперь

$$b = \max\left\{\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\right| \,\middle|\, x \in K\right\}.$$

Если длина ребра куба W равна a, то $|x_i - x_i^0| \leqslant a$ для $x \in W$, откуда

$$|F_i(x) - F_i(x^0)| \leqslant b \cdot n \cdot a.$$

Значит, множество $F(W)$ содержится в кубе с длиной ребра $(bn)\cdot a$. Следовательно, из равенства $|W|=a^n$ вытекает, что $F(W)$ содержится в кубе объема

$$(bn)^n \cdot a^n = (bn)^n \cdot |W|,$$

причем константа $(bn)^n$ не зависит от W. Если $\Sigma|W_i| < \varepsilon/(bn)^n$, то все $F(W_i)$ содержатся в объединении кубов, сумма объемов которых меньше ε.

Из сказанного вытекает, в частности, следующее утверждение.

2.7. Свойство множества $C \subset \mathbf{R}^n$ иметь меру нуль является *локальным дифференциально-топологическим* свойством.

Локальность означает здесь, что C имеет меру нуль в том и только том случае, когда для каждой точки $x \in \mathbf{R}^n$ найдется такая окрестность U, что множество $C \cap U$ имеет меру нуль.

Часть «$\Rightarrow$» доказывается тривиально: положим $U=\mathbf{R}^n$.

$\Leftarrow$. Покроем $\mathbf{R}^n$ счетным числом таких окрестностей U_p. Тогда $C = C \cap \left(\bigcup_{p \in \mathbf{N}} U_p\right) = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} (C \cap U_p)$, а последнее множество имеет меру нуль.

Термин *дифференциально-топологическое* свойство означает, что диффеоморфизмы переводят множества меры нуль в множества меры нуль. Более общо, тем же свойством обладают произвольные дифференцируемые отображения $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Предостережение. Свойство иметь меру нуль не является топологическим свойством. Существуют гомеоморфизмы плоскости в плоскость, переводящие единичный интервал на одной из осей в множество положительной меры.

Доказательство? Мы оставляем его читателю в качестве упражнения (см. Mayrhofer K., Inhalt und Mass, Springer, 1952, и примените теорему Жордана о плоской кривой).

2.8. Теорема (Фубини). *Пусть* $\mathbf{R}_t^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_n = t\} \subset \mathbf{R}^n$. *Пусть C — компактное множество в* $\mathbf{R}^n$, *и* *пусть для любого* $t \in \mathbf{R}$ *множество* $C \cap \mathbf{R}_t^{n-1}$ *имеет меру нуль в* $\mathbf{R}_t^{n-1} \cong \mathbf{R}^{n-1}$. *Тогда* C *имеет меру нуль в* $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Мы используем следующую лемму.

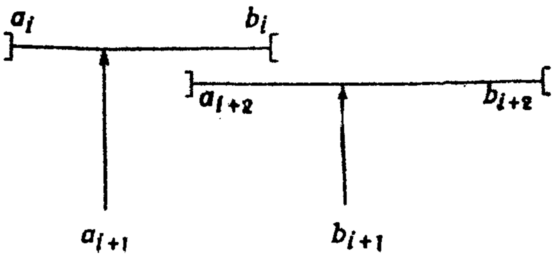
2.9. Лемма. *Из любого покрытия отрезка* $[0, 1]$ *открытыми интервалами можно выбрать конечное подпокрытие* $\{I_j\}_{1 \leqslant j \leqslant k}$, *удовлетворяющее условию* $\Sigma |I_j| \leqslant 2$.

Доказательство леммы. Выберем из данного покрытия открытыми интервалами минимальное конечное подпокрытие, т. е. подпокрытие, из которого ни один интервал нельзя выбросить. Обозначим это покрытие через $\{I_j\}_{1 \leqslant j \leqslant k}$, и пусть a_j и b_j — концы интервала I_j. Перенумеруем интервалы так, чтобы числа a_j возрастали с ростом индекса j. Это можно сделать, так как если $a_l = a_j$, то либо $b_l \leqslant b_j$, и тогда интервал (a_l, b_l) излишний, либо $b_j < b_l$, и тогда можно выбросить интервал (a_j, b_j) (мы исключаем тривиальный случай $k \leqslant 2$). Далее,

$$a_l < a_{l+1} < b_l \leqslant a_{l+2}.$$

Действительно, если бы нарушалось второе неравенство, то в покрытии была бы дырка. Для доказательства третьего неравенства заметим, что $b_l < b_{l+1}$, так как в противном случае мы имели бы $(a_l, b_l) \supset (a_{l+1}, b_{l+1})$. Поэтому если бы третье неравенство нарушалось, то мы имели бы

$$(a_l, b_l) \cup (a_{l+2}, b_{l+2}) \supset (a_{l+1}, b_{l+1}).$$



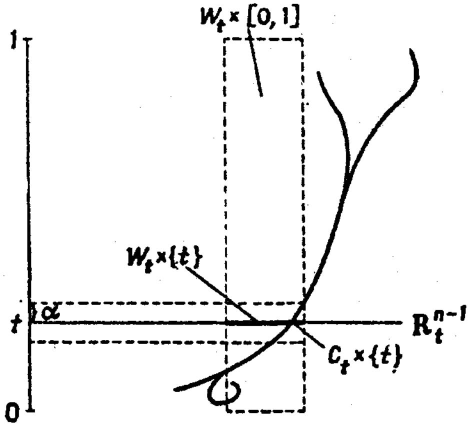
Отсюда следует, что

$$\sum (b_l - a_l) = \sum (a_{l+1} - a_l) + \sum (b_l - a_{l+1}) < \\ < \sum (a_{l+1} - a_l) + \sum (a_{l+2} - a_{l+1}) < \\ < 2.$$

Это доказывает лемму. ∎

Приступим теперь к доказательству теоремы Фубини. Определим C_t равенством $C_t \times \{t\} = C \cap (\mathbf{R}^{n-1} \times \{t\})$. Без ограничения общности можно считать, что $C \subset \subset \mathbf{R}^{n-1} \times [0, 1]$ и что C_t имеет меру нуль для любого $t \in [0, 1]$. *Фиксируем* $\varepsilon > 0$. Найдем покрытие C_t *открытыми* кубами $\{W_t^i \mid i \in \mathbf{N}\}$, сумма объемов которых меньше ε. Положим $W_t = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} W_t^i \subset \mathbf{R}^{n-1}$.

Если x_n — последняя координата в $\mathbf{R}^n$, то при фиксированном t функция $|x_n - t|$ непрерывна на C и обращается в нуль только на $C_t \times \{t\}$. Поскольку множество $C - (W_t \times [0, 1])$ компактно, ограничение функции $|x_n - t|$ на C достигает своего минимального значения α.



Следовательно,

$$C \cap \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x_n - t| < \alpha\} \subset W_t \times I_t^\alpha,$$

где $I_t^\alpha = (t - \alpha, \; t + \alpha)$.

Семейство интервалов I_i^α покрывает отрезок $[0, 1]$. Применив лемму, найдем конечное подпокрытие интервалами I_i^α, скажем $\{I_{i_j}^\alpha\}_{1\leqslant j\leqslant k}$, удовлетворяющее условию $\sum |I_{i_j}^\alpha| \leqslant 2$. Параллелепипеды $\{W_{i_j}^l \times I_{i_j}^\alpha \mid j = 1, \ldots, k, i \in \mathbf{N}\}$ покрывают C, и сумма их объемов меньше 2ε.]

2.10. Обобщение теоремы Фубини. Вместо компактности C достаточно предположить, что C есть объединение счетного числа компактных множеств. Вот несколько примеров множеств такого типа:

(i) замкнутые множества: $C = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} C \cap \{|x| \leqslant n\}$;
(ii) открытые множества (объединения счетного числа замкнутых шаров);
(iii) образы множеств вида (i) и (ii) при непрерывных отображениях $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (компактные множества переходят в компактные множества);
(iv) счетные объединения конечных пересечений множеств типов (i) — (iii).

Теперь мы докажем теорему Сарда.

2.11. *Пусть U — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $f: U \to \mathbf{R}^p$ — дифференцируемое отображение и $D = \{x \in U \mid \mathrm{Rk}_x f < p\}$ — множество критических точек f. Тогда множество $f(D)$ имеет меру нуль.*

Доказательство. Индукция по n.

При $n = 0$ пространство $\mathbf{R}^n$ состоит из одной точки и $f(U)$ состоит не более чем из одной точки, следовательно, теорема верна.

Шаг индукции. Обозначим через $D_i \subset U$ множество таких точек $x \in U$, в которых все частные производные f порядка $\leqslant i$ обращаются в нуль. Такие D_i образуют убывающую последовательность замкнутых множеств

$$D \supset D_1 \supset D_2 \supset \ldots.$$

Мы докажем три утверждения:

(a) множество $f(D - D_1)$ имеет меру нуль;

(b) множество $f(D_i - D_{i+1})$ имеет меру нуль при любом i;

(c) множество $f(D_k)$ имеет меру нуль при достаточно большом k.

Замечание 1. Все эти множества попадают в одну из четырех категорий множеств (i)—(iv), рассмотренных нами при обобщении теоремы Фубини.

Замечание 2. В случае (a) (и аналогично в случаях (b) и (c)) достаточно доказать, что каждая точка $x \in D - D_1$ обладает такой окрестностью V, что множество $f(V \cap (D - D_1))$ имеет меру нуль. Это вытекает из того, что $D - D_1$ покрывается счетным числом таких V.

Доказательство (a). Предположим, что $p \geqslant 2$, поскольку для $p = 1$ мы имеем $D = D_1$. Пусть $d \in D - D_1$. Так как $d \notin D_1$, то существует частная производная, скажем $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, такая, что $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(d) \neq 0$. Следовательно, отображение

$$h\colon U \to \mathbf{R}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x), x_2, \ldots, x_n)$$

имеет в качестве матрицы Якоби матрицу

$$D(h) = \left[\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \cdots & \\ \hline 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right].$$

Отсюда следует, что матрица $D(h)(d)$ невырожденна. Таким образом, в некоторой окрестности V точки d отображение h является заменой координат.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} D\cap V \arrow[rr, "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & & D' \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] \\ V \arrow[rr, "h", "\cong"'] \arrow[dr, "f"'] & & V' \arrow[dl, "g=fh^{-1}"] \\ & \mathbf{R}^p & \end{tikzcd}$$

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, g_2(x), \ldots, g_p(x)).$$

Очевидно, что g переводит гиперплоскость $\{x_1 = t\}$ в гиперплоскость $\{y_1 = t\}$. Определим отображение

$$g^t\colon (\{t\}\times\mathbf{R}^{n-1})\cap V' \to \{t\}\times\mathbf{R}^{p-1}$$

как ограничение отображения g.

Точка множества $(\{t\}\times\mathbf{R}^{n-1})\cap V'$ будет критической т0чкой отображения g в том и только в том случае, когда она является критической точкой отображения g^t. Это вытекает из того, что матрица Якоби отображения g имеет вид

$$Dg = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ldots 0 \\ \hline ? & \dfrac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \end{array}\right].$$

По индуктивному предположению множество критических значений отображения g^t имеет меру нуль в $\{t\}\times\mathbf{R}^{n-1}$. Поэтому множество $g(D')$ имеет пересечение меры нуль с каждой гиперплоскостью $\{x \mid x_1 = t\}\subset\mathbf{R}^p$. По теореме Фубини, множество $g(D')$ имеет меру нуль.

Доказательство (b). Как и в случае (a), если $d\in D_k - D_{k+1}$, то одна из производных порядка $k+1$ не обращается в нуль в точке d. Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial x_1\, \partial x_{s_2} \ldots \partial x_{s_{k+1}}}(d) \neq 0.$$

Введем функцию $w: U \to \mathbf{R}$ следующим образом:

$$w(x) = \frac{\partial^k f_1}{\partial x_{s_2} \ldots \partial x_{s_{k+1}}}(x).$$

Тогда $w(d) = 0$ и $\frac{\partial w}{\partial x_1}(d) \neq 0$, поскольку $d \in D_k$ и $d \notin D_{k+1}$. Как и выше, отображение $h: U \to \mathbf{R}^n$

$$h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_n)$$

является преобразованием координат в некоторой окрестности V точки d и $h(D_k \cap V) \subset \{0\} \times \mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$. Снова положим

$$g = f \circ h^{-1}: V' = h(V) \to \mathbf{R}^p$$

и

$$g^0 = g|\ldots: (\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1}) \cap V' \to \mathbf{R}^p.$$

По индуктивному предположению множество критических значений отображения g^0 имеет меру нуль. Но всякая точка множества $h(D_k \cap V)$ есть критическая точка отображения g^0, поскольку все частные производные g (а, следовательно, и g^0) порядка $\leqslant k$ (в частности, порядка 1) обращаются в нуль. Следовательно, множество $gh(D_k \cap V)$ имеет меру нуль.

Доказательство (с). Пусть $W \subset U$ — куб с длиной ребра a. Мы покажем, что при $k > \frac{n}{p} - 1$ множество $f(W \cap D_k)$ имеет меру нуль. Этого будет достаточно, поскольку U — счетное объединение кубов. По теореме Тейлора получаем, что

$$\text{(T)} \quad \left.\begin{aligned} &f(x+h) = f(x) + R(x, h), \\ &|R(x, h)| \leqslant c \cdot |h|^{k+1} \end{aligned}\right\} \text{для } x \in D_k \cap W,\ x+h \in W,$$

где c зависит от W и f.

Разложим W в объединение r^n кубов с длиной ребра a/r. Если W_1 — один из этих кубов, содержащий точку $x \in D_k$, то каждую точку из W_1 можно записать как $x + h$, причем

$$|h| \leqslant \frac{a\sqrt{n}}{r}.$$

Следовательно, используя (Т), мы получаем, что множество $f(W_1)$ содержится в кубе с длиной ребра, равной

$$2 \cdot c \cdot (a\sqrt{n})^{k+1}/r^{k+1} = b/r^{k+1},$$

где b — некоторая константа, зависящая от W и f.

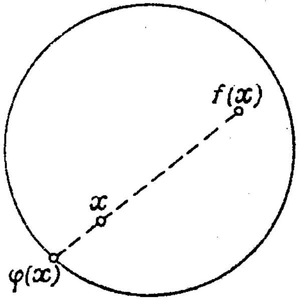
Сумма объемов всех таких кубов не превосходит $r^n \cdot b^p/r^{p(k+1)}$. Если выполнено условие $p(k+1) > n$, то эта сумма стремится к нулю с ростом r. Следовательно, суммарный объем может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора достаточно мелкого разбиения. ∎

2.12. Упражнения. 1. Обобщите теорему Сарда на отображения дифференцируемых многообразий.

2. Пусть $M^m \subset \mathbf{R}^n$ — дифференцируемое подмногообразие и $L^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ — линейное подпространство. Тогда существует аффинное подпространство $A \subset \mathbf{R}^n$, параллельное L^{n-1} и такое, что множество $A \cap M^m$ является $(m-1)$-мерным подмногообразием.

2.13. Типичное приложение. *Пусть* $D^n = \{x \mid |x| \leqslant 1\} \subset \subset \mathbf{R}^n$. *Пусть* f: $D^n \to \mathbf{R}^n$ — *непрерывное отображение, такое, что* $f(S^{n-1}) \subset D^n$. *Тогда* f *имеет неподвижную точку.* (Теорема Брауэра.)

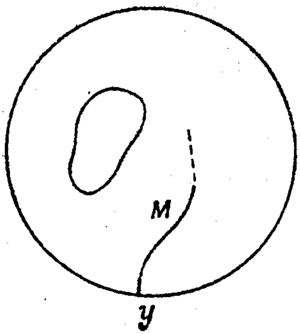
Набросок доказательства. Предположим противное. Тогда существует такое δ, что для всех $x \in D^n$: $|x - f(x)| \geqslant \delta > 0$. Аппроксимируем f дифференцируемым отображением f_1, не имеющим неподвижных точек (это можно сделать, так как если для всех $x \in D^n$: $|f_1(x) - f(x)| < \delta/2$, то f_1 не имеет неподвижных точек). Определим отображение $\varphi\colon D^n \to S^{n-1}$ так, как показано на рисунке:



Ясно, что это отображение дифференцируемо и тождественно на S^{n-1}, т. е. $\varphi | S^{n-1} = \mathrm{id}$. Пусть $y \in S^{n-1}$ — регулярное значение отображения φ (такое y существует по теореме Сарда). Рассмотрим множество $M = \varphi^{-1}\{y\} \subset D^n$. Пересечение M с внутренностью D° диска D является дифференцируемым подмногообразием размерности 1. По теореме о ранге существуют координаты в окрестности точки y, в которых φ локально записывается в виде

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0),$$

причем в этих координатах, тоже локально, S^{n-1} совпадает с множеством $\{y_n = 0\}$. Следовательно, точка y обладает в M окрестностью, изоморфной $[0, 1)$.



M компактно и, следовательно, является одномерным многообразием с краем. Каждое одномерное многообразие с краем есть объединение конечного числа отрезков и окружностей (с точностью до диффеоморфизма). Однако M имеет только одну граничную точку y. Противоречие. ∎

2.14. Второе приложение. *Пусть $p \geqslant 2n$ и $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ — дифференцируемое отображение. Тогда существует линейное отображение $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ со сколь угодно малой нормой, такое, что отображение $f + A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ — иммерсия.*

Доказательство. Отображение f — иммерсия, если векторы $\{(\partial f/\partial x_i(x)) \mid i = 1, \ldots, n\}$ линейно независимы в каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$.

Предположим, что векторы $\{\partial f/\partial x_i \mid i = 1, \ldots, s\}$ всюду линейно независимы, $s < n$. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p,$$

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_s, x) = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}}(x).$$

Поскольку $s + n < p$, множество $\varphi(\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^n)$ имеет меру нуль. Пусть $a \in \mathbf{R}^p$, a мало и $a \notin \varphi(\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^n)$. Положим $g(x) = f(x) + a x_{s+1}$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial x_l} = \frac{\partial f}{\partial x_l} \qquad \text{при } l \leqslant s,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_{s+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}} + a,$$

и, значит, ни для какого $x \in \mathbf{R}^n$ не выполняется равенство

$$\sum_{l=1}^{s} \lambda_l \frac{\partial g}{\partial x_l}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_{s+1}}(x).$$

Следовательно, векторы $\partial g/\partial x_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s + 1$ всюду линейно независимы. Из этого утверждения теорема следует по индукции. ∎

Мы сможем дать гораздо лучшую интерпретацию этого результата, если введем понятие окрестности в множестве дифференцируемых отображений. Опишем это понятие таким способом, который вполне достаточен для локальных рассмотрений.

Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$, $K \subset U$, K компактно. В множестве $C_K^k(U)$ дифференцируемых отображений $f\colon U \to \mathbf{R}$ введем следующую полунорму: $|f|_K^k =$ (максимальное значение на K всех производных f порядков $\leqslant k$).

Множество всех $g \in C_K^k(U)$, удовлетворяющих условию $|g-f|_K^k < \varepsilon$, назовем ε-окрестностью точки f в $C_K^k(U)$. Введение ε-окрестностей наделяет $C_K^k(U)$ топологией, и, следовательно, можно говорить об открытости, замкнутости, плотности и т. д. Положим

$$C_K^k(U, \mathbf{R}^p) = \underbrace{C_K^k(U) \times \ldots \times C_K^k(U)}_{p \text{ сомножителей}}$$

и определим норму в этом пространстве как максимум норм компонент. Теперь доказанное нами утверждение можно сформулировать следующим образом:

2.15. *Пусть $K \subset U \subset \mathbf{R}^n$, K компактно, U открыто и $p \geqslant 2n$. Тогда множество $\mathfrak{D}$ дифференцируемых отображений $f\colon U \to \mathbf{R}^p$, таких, что $\mathrm{Rk}_x f = n$ для всех $x \in K$, открыто и плотно в $C_K^k(U, \mathbf{R}^p)$ при любом k.*

Доказательство. Пусть $f\colon U \to \mathbf{R}^p$ — иммерсия, $K \subset U$. Рассмотрим отображение

$$U \xrightarrow{Df} \mathbf{R}^{n \cdot p} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R},$$

где $\varphi(A)$ — сумма квадратов всех $(n \times n)$-миноров матрицы A.

По предположению композиция отображений $\varphi \circ Df$ нигде не обращается в нуль на K. Если отображение $f_1\colon U \to \mathbf{R}^p$ дифференцируемо и Df_1 достаточно близко к Df на K, то $\varphi \circ Df_1 \neq 0$ всюду на K. Следовательно, множество $\mathfrak{D}$ открыто. Кроме того, оно плотно, ибо можно найти линейное отображение A со сколь угодно малой нормой на K, такое, что отображение $f + A$ будет иммерсией. ∎

Тополог сформулировал бы этот результат так: отображение $\mathbf{R}^n \supset U \to \mathbf{R}^p$ при *$p \geqslant 2n$ почти всегда* является иммерсией.

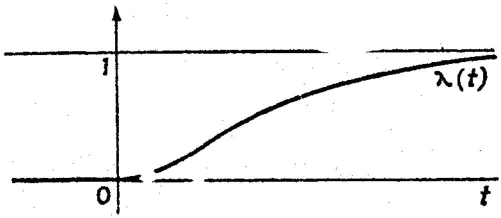
3. ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Большая свобода, которой мы располагаем при построении дифференцируемых отображений с заранее предписанными свойствами, основывается на следующем факте.

3.1. Лемма. *Определим функцию* $\lambda\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *формулами*

$$\lambda(t)=0 \quad \text{при } t\leqslant 0,$$
$$\lambda(t)=e^{-1/t} \quad \text{при } t>0.$$

Тогда $0\leqslant\lambda(t)\leqslant 1$ *и функция* λ *(бесконечно) дифференцируема на всей прямой.*

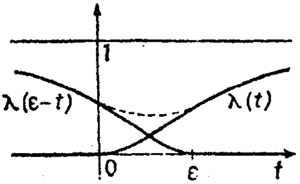


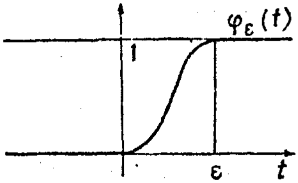
Доказательство. Производная порядка n от λ при $t>0$ имеет вид $q(1/t)\,e^{-1/t}$, где q — многочлен степени $2n$. Поэтому при $t\to 0$ производная порядка n также стремится к нулю. Следовательно (по теореме о конечном приращении), функция λ бесконечно дифференцируема в точке 0 и имеет нулевой ряд Тейлора в этой точке. ∎

Пусть теперь $\varepsilon>0$. Определим функцию $\varphi_\varepsilon\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ формулой

$$\varphi_\varepsilon(t)=\frac{\lambda(t)}{\lambda(t)+\lambda(\varepsilon-t)}.$$

Тогда φ_ε дифференцируема, $0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1$, $\varphi_\varepsilon(t) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow t \leqslant 0$, $\varphi_\varepsilon(t) = 1$ для $t \geqslant \varepsilon$.

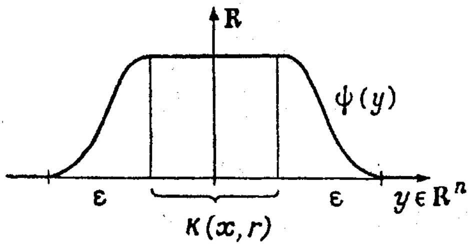




Положим $K(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid |y - x| \leqslant r\}$. Это шар радиуса r с центром в точке x. Для фиксированных x, $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ функция

$$\psi\colon \quad \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},$$
$$y \mapsto 1 - \varphi_\varepsilon(|y - x| - r)$$

обладает следующими свойствами: ψ дифференцируема, $0 \leqslant \psi(y) \leqslant 1$ и $\psi(y) = 1$ при $y \in K(x, r)$. Дифференцируемость вытекает из того, что там, где не дифференцируема функция $|y - x|$, функция ψ локально постоянна. Итак, $\psi(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y \notin K^\circ(x, r + \varepsilon)$.



Вот первое приложение полученных результатов:

3.2. *Обозначим через $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ множество всех дифференцируемых функций $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, через $\mathscr{E}_x(n)$ — множество ростков функций $(\mathbf{R}^n, x) \to \mathbf{R}$ и через $\rho_x\colon C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{E}_x(n)$ — отображение, сопоставляющее каждой функции f ее росток в точке x. Тогда отображение ρ_x сюръективно.*

Доказательство. Пусть росток $\tilde{\varphi}$: $(\mathbf{R}^n, x) \to \mathbf{R}$ представлен отображением φ: $U \to \mathbf{R}$. Выберем r и $\varepsilon > 0$ так, чтобы $K(x, r+\varepsilon) \subset U$, и возьмем описанную выше функцию ψ. Тогда $\tilde{\varphi} = p_x(\varphi \cdot \psi)$ и $(\varphi \cdot \psi)(y) = 0$ вне $K(x, r+\varepsilon)$. Поэтому функцию $\varphi \cdot \psi$ можно продолжить тождественным нулем вне $K(x, r+\varepsilon)$ до функции, определенной на всем $\mathbf{R}^n$. ∎

Разумеется, соответствующий результат верен не только на $\mathbf{R}^n$, но и на произвольном дифференцируемом многообразии M^n.

3.3. Теорема (Уитни). *Всякое замкнутое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$ (или дифференцируемого многообразия) есть множество нулей некоторой дифференцируемой функции.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, $U = \mathbf{R}^n - A$ — его открытое дополнение. Можно считать, что $U \neq \varnothing$, и, значит, $U = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} K^\circ(x_m, r_m)$. Пусть ψ_m: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — неотрицательная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\psi_m(y) \neq 0 \Leftrightarrow y \in K^\circ(x_m, r_m).$$

Определим тогда функцию ψ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ формулой

$$\psi(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(y) \cdot \varepsilon_m,$$

где $\{\varepsilon_m \mid m \in \mathbf{N}\}$ — последовательность положительных целых чисел, выбранная так, чтобы всякая производная функции $\varepsilon_m\psi_m$ порядка $\leqslant m$ по абсолютной величине не превосходила $1/2^m$ (заметим, что при фиксированном m таких производных конечное число). Так как функция ψ_m и все ее производные отличны от нуля только на компактном множестве $K(x_m, r_m)$, то такую последовательность действительно можно построить. Следовательно, ряд, с помощью которого определяется функция ψ, равномерно сходится на всем $\mathbf{R}^n$. То же верно и для всех рядов, которые получаются из него почленным дифференцированием, поскольку в каждой точке $\mathbf{R}^n$ любой такой ряд почленно мажорируется по абсолютной величине числовым рядом $\sum(1/2^m)$. Значит, функция ψ дифференцируема и $\psi(x)=0$ при $x\in A$, так как каждая из функций ψ_m обращается в нуль на всем A. С другой стороны, $\psi(x)\neq 0$ при $x\notin A$, ибо по меньшей мере одна из функций ψ_m отлична от нуля в точке x. ∎

Стоит сравнить этот результат с теоремой Сарда. Всякое множество, определяемое непрерывными уравнениями, замкнуто, и всякое замкнутое множество может быть определено дифференцируемыми уравнениями. Теорема Сарда утверждает, однако, что для дифференцируемого отображения f большинство множеств вида $f(x)=b$ не являются патологическими.

3.4. Упражнения. 1. Пусть A_0 и A_1 — непересекающиеся замкнутые множества в $\mathbf{R}^n$. Докажите, что существует дифференцируемая функция $\varphi\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, такая, что $A_0=\varphi^{-1}\{0\}$, $A_1=\varphi^{-1}\{1\}$ и $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$.

2. Пусть A — замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$. Докажите, что существует дифференцируемое отображение $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, такое, что A является множеством критических точек f.

3. Существует дифференцируемое отображение $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, такое, что множество $f(\mathbf{R})$ плотно в $\mathbf{R}^n$.

3.5. Определение. Пусть $\mathbf{R}^n\supset A\xrightarrow{f}\mathbf{R}^k$. Тогда множество $\operatorname{supp}(f)=\overline{\{x\in A\mid f(x)\neq 0\}}$ называется *носителем* f (черта обозначает замыкание в A). Иными словами, $x\notin\operatorname{supp}(f)\Leftrightarrow$ росток $\bar f\colon (A,x)\to\mathbf{R}^k$ — нулевой.

3.6. Теорема (о разбиении единицы). *Пусть M — дифференцируемое многообразие и $\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует последовательность дифференцируемых функций $\{\varphi_n\mid n\in\mathbf{N}\}$, обладающая следующими свойствами:*

$$\varphi_n\colon M\to\mathbf{R},\qquad 0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant 1,$$

$$\operatorname{supp}(\varphi_n)\subset U_{\lambda(n)}\ \textit{для некоторого}\ \lambda(n)\in\Lambda,$$

покрытие $\{\operatorname{supp}(\varphi_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ *локально конечно,*

для любого $x \in M$ *имеем* $\sum_{n \in \mathbf{N}} \varphi_n(x) = 1$.

3.7. *Локальная конечность* означает, что каждая точка $x \in M$ обладает такой окрестностью V, что множество $V \cap \operatorname{supp}(\varphi_n)$ непусто лишь для конечного числа натуральных n.

Множество $\{\varphi_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Сумма $\sum_{n \in \mathbf{N}} \varphi_n$ корректно определена, поскольку в окрестности любой точки только конечное число ее членов отлично от нуля.

Типичное приложение теоремы о разбиении единицы. Возьмем в качестве U_λ шары, определяемые с помощью координатных систем на M. Замыкания $\bar{U}_\lambda$ компактны, и, значит, носитель $\operatorname{supp}(\varphi_n)$ тоже компактен. Если $f\colon M \to \mathbf{R}^k$ — произвольное дифференцируемое отображение, то сумма $f = \sum_{n \in \mathbf{N}} f \cdot \varphi_n$ локально конечна, так как слагаемое $f \cdot \varphi_n$ обращается в нуль вне компактного множества $\operatorname{supp}(\varphi_n)$.

Доказательство теоремы. Многообразие M локально компактно и имеет счетную базу. Поэтому (Schubert, Topologie, p. 90) можно найти такое покрытие $\{V_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, что $\bar{V}_n \subset U_{\lambda(n)}$, и тогда покрытие $\{\bar{V}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ локально конечно. Без ограничения общности можно считать, что каждое $\bar{V}_n$ содержится в некоторой координатной окрестности. Применяя теорему Уитни, получаем положительную дифференцируемую функцию $\tau_n\colon M \to \mathbf{R}$, такую, что $\tau_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin V_n$. Ясно, что $\operatorname{supp}(\tau_n) = \bar{V}_n$. Положим

$$\tau(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \tau_n(x).$$

Тогда $\tau(x) > 0$ при всех x и функция τ дифференцируема, ибо определяющая ее сумма локально конечна. Следовательно, мы можем положить $\varphi_n = \tau_n/\tau$. ∎

Ниже мы будем часто говорить, например, так:

«без ограничения общности можно считать, что множество $\mathrm{supp}(f)$ компактно и содержится в шаре радиуса $< \varepsilon, \ldots$».

Такие замечания всегда обоснованы тем, что всякая функция f является локально конечной суммой функций, обладающих этим свойством.

4. РОСТКИ И СТРУИ

Литература: Р. Нарасимхан, Анализ на действительных и комплексных многообразиях, «Мир», М., 1971.
С. Ленг, Алгебра, «Мир», М., 1968.
Дж. Мезер, Конечно определенные ростки отображений, сб. *Математика*, 14 : 1 (1970), 145—175.
Н. Бурбаки, Алгебра, гл. IV, «Наука», М., 1965.

Введем обозначения:

$\mathscr{E}(n)$ = кольцо дифференцируемых ростков $(\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$;
$C^\infty(n)$ = кольцо дифференцируемых функций $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Имеется сюръективное отображение $C^\infty(n) \to \mathscr{E}(n)$, $f \longmapsto \bar{f}$. В $C^\infty(n)$ есть идеал

$\mathfrak{a} = \{f \in C^\infty(n) \mid f$ обращается в нуль в некоторой окрестности начала координат$\}$.

Равенство $\mathscr{E}(n) = C^\infty(n)/\mathfrak{a}$ можно использовать для определения кольцевой структуры на множестве $\mathscr{E}(n)$.

Положим

$$\mathfrak{m}(n) = \{f \in \mathscr{E}(n) \mid f(0) = 0\}.$$

Тогда $\mathfrak{m}(n)$ — максимальный идеал в $\mathscr{E}(n)$, и отображение $\bar{f} \longmapsto \bar{f}(0)$ определяет изоморфизм $\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n) \cong \cong \mathbf{R}$. Более того, $\mathfrak{m}(n)$ — единственный максимальный идеал в $\mathscr{E}(n)$. Действительно, пусть $\bar{f} \notin \mathfrak{m}(n)$. Тогда $\bar{f}(0) \neq 0$ и, значит, никакой представитель f ростка $\bar{f}$ не обращается в нуль в некоторой окрестности начала координат. Отсюда следует, что определен росток $1/\bar{f}$, т. е. росток $\bar{f}$ обратим и не содержится ни в каком собственном идеале кольца $\mathscr{E}(n)$.

Положим $C^\infty(M) = \{f\colon M \to \mathbf{R} \mid$ функция f дифференцируема$\}$.

4.1. Упражнения. 1. Пусть M — дифференцируемое многообразие. Докажите, что множество $\mathfrak{a}_x = \{f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0\}$ — максимальный идеал в $C^\infty(M)$.

2. Пусть M — компактное дифференцируемое многообразие и $\mathfrak{a}$ — максимальный идеал в $C^\infty(M)$. Покажите, что существует такая точка $x \in M$, что $\mathfrak{a} = \{f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0\}$.

3. Для некомпактного многообразия M постройте максимальный идеал $\mathfrak{a} \subset C^\infty(M)$, такой, что для любой точки $x \in M$ найдется функция $f \in \mathfrak{a}$, не обращающаяся в нуль в точке x.

4. Пусть α: $\mathscr{E}(n) \to \mathscr{E}(k)$ — гомоморфизм колец. Покажите, что либо $\alpha = 0$, либо $\alpha(1) = 1$. Покажите также, что $\alpha(\mathfrak{m}(n)) \subset \mathfrak{m}(k)$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координатные функции на $\mathbf{R}^n$. Тогда идеал $\mathfrak{m}(n)$ порожден ростками $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Верно и более общее утверждение:

4.2. Теорема. *Пусть $\mathfrak{m}(k)$ — идеал в $\mathscr{E}(n+k)$, состоящий из ростков в нуле $\bar{f}$: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию $\bar{f} \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} = 0$. Пусть $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ — координаты в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$. Тогда идеал $\mathfrak{m}(k)$ порожден ростками $\bar{y}_i$ (т. е. ростками функций, переводящих (x, y) в y_i). Следовательно,*

$$\bar{f} \in \mathfrak{m}(k) \Leftrightarrow \bar{f} = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i \bar{f}_i, \qquad \text{где } \bar{f}_i \in \mathscr{E}(n+k).$$

Доказательство. Для ростка $\bar{f} \in \mathscr{E}(n+k)$ выберем представитель f: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$, удовлетворяющий условию $f \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} = 0$. Тогда

$$f(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x, ty)\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, ty) \cdot y_i \right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} y_i \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, ty)\, dt}_{f_i(x, y)} = \sum_{i=1}^{k} y_i \cdot f_i(x, y),$$

где $f_1, \ldots, f_k$ — дифференцируемые функции.

Эта теорема имеет большое число приложений. Кольцо $\mathscr{E}(n)$ обладает структурой $\mathbf{R}$-алгебры. *Дифференцированием* $\mathscr{E}(n)$ называется *линейное* отображение X: $\mathscr{E}(n)\to\mathbf{R}$, удовлетворяющее условию

$$X(f\cdot g)=X(f)\cdot g(0)+f(0)\cdot X(g).$$

В частности, $X(1)=X(1\cdot 1)=X(1)+X(1)$, следовательно, $X(1)=0$ и $X(c)=0$ для любой постоянной функции.

Дифференцирования образуют векторное пространство. Далее, справедливо следующее утверждение.

4.3. Теорема. *Отображения $\partial/\partial x_i|_0$: $\mathscr{E}(n)\to\mathbf{R}$, $\tilde{f}\mapsto\partial f/\partial x_i(0)$ образуют базис векторного пространства дифференцирований $\mathscr{E}(n)$.*

Доказательство. Сначала установим линейную независимость. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0=0;$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial\tilde{x}_j}{\partial x_i}\Big|_0=\lambda_j=0.$$

Теперь докажем, что векторы $\partial/\partial x_i|_0$ порождают все пространство дифференцирований $\mathscr{E}(n)$. Пусть X—некоторое дифференцирование и $X(x_i)=\lambda_i$. Тогда $Y=X-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0$ также является дифференцированием и $Y(x_i)=0$. Всякий росток $\tilde{f}\in\mathscr{E}(n)$ можно записать в виде $\tilde{f}=f(0)+\sum\tilde{x}_i\tilde{f}_i$. Отсюда

$$Y(\tilde{f})=Y(f(0))+\sum_i Y(\tilde{x}_i\cdot f_i)=$$
$$=0+\sum Y(\tilde{x}_i)\cdot\tilde{f}_i(0)+\sum\tilde{x}_i(0)\cdot Y(\tilde{f}_i)=0,$$

Следовательно,

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0. \blacksquare$$

4.4. Обозначения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (соответственно $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_k)$), $\alpha_i, \beta_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Положим

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!,$$
$$0! = 1,$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$
$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$
$$D^{\alpha, \beta} f = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_k^{\beta_k}} f,$$
$$|\alpha| = \text{порядок } D^\alpha,$$
$$(x, y)^{\alpha, \beta} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \cdot y_1^{\beta_1} \ldots y_k^{\beta_k}.$$

4.5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{m}(k) \subset \mathscr{E}(n+k)$ — тот же идеал, что и в теореме 4.2. Тогда $\mathfrak{m}(k)^s = \{f \in \mathscr{E}(n+k) \mid D^{\alpha, \beta} f \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} = 0$ для всех α и всех β, удовлетворяющих условию $|\beta| < s\}$. Кроме того, идеал $\mathfrak{m}(k)^s$ порожден мономами*

$$y_1^{\beta_1} \ldots y_k^{\beta_k}, \qquad |\beta| = s.$$

Доказательство. По определению, $\mathfrak{m}(k)^s = \left\{ f \in \mathscr{E}(n+k) \,\middle|\, f = \sum_\lambda f_{\lambda_1} \ldots f_{\lambda_s}, \text{ где } f_{\lambda_i} \in \mathfrak{m}(k) \right\}$, откуда немедленно следует второе утверждение. Применяя правило дифференцирования произведения, получаем, что

$$f \in \mathfrak{m}(k)^s \Rightarrow D^{\alpha, \beta} f \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} = 0 \quad \text{при} \quad |\beta| < s.$$

С другой стороны, если $D^{0, \beta} f \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} = 0$ для всех β, удовлетворяющих условию $|\beta| < s$, то $f \in \mathfrak{m}(k)^{s-1}$ (это доказывается по индукции) и $f = \sum_{|\beta|=s-1} f_\beta y^\beta$. Достаточно показать, что $f_\beta \in \mathfrak{m}(k)$, т. е. $f_\beta | R^n \times \{0\} = 0$ для всех таких β, что $|\beta| = s-1$. Если для некоторого β_0 имеем $f_{\beta_0} | R^n \times \{0\} \neq 0$, то $D^{0,\beta_0} f = \sum_\beta D^{0,\beta_0} f_\beta \cdot y^\beta = \beta_0! \cdot f_{\beta_0} \neq 0$ на $R^n \times \{0\}$. ∎

4.6. Заметим, что $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}^l$ для $k \geqslant l$, и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & \mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^k \\ & \nearrow^{j^{k-1}} & \downarrow \pi_l^k \\ \mathscr{E}(n) & & \\ & \searrow_{j^{l-1}} & \mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^l \\ & & \downarrow \\ & & \vdots \\ & & \mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n) = R \end{array}$$

Образ $j^{k-1}(f)$ ростка $\bar{f} \in \mathscr{E}(n)$ при отображении j^{k-1} называется $(k-1)$-*струей* ростка $\bar{f}$ и иногда обозначается через $\hat{f}$. Факторалгебра $\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^k$ называется R-*алгеброй* $(k-1)$-*струй*.

Два ростка определяют (имеют) одну и ту же k-струю в начале координат в R^n тогда и только тогда, когда в начале координат совпадают значения всех их частных производных до порядка k включительно. Ясно, что $j^k(f) = j^k\left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha\right)$ (в скобках стоит многочлен Тейлора f порядка k, в нуле) и два многочлена степени $\leqslant k$ имеют одну и ту же k-струю в том и только том случае, когда они совпадают.

4.7. Если $\bar{f} \in \mathfrak{m}(n)^k$, то говорят, что росток $\bar{f}$ имеет *нуль порядка* k (такой росток имеет нулевую $(k-1)$-струю). Для обозначения ростка, имеющего нуль порядка k, иногда будет употребляться символ $o(k)$.

Мы видели, что всякая k-струя представляется многочленом степени $\leqslant k$. Такие многочлены можно складывать и перемножать по обычным правилам, с той только разницей, что из произведения следует выбрасывать все члены степени $> k$. В частности,

$$\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1} = \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1, \ldots, x_n\rangle^{k+1},$$

где $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle^{k+1}$ — идеал, полученный возведением в $(k+1)$-ю степень идеала, порожденного $x_1, \ldots, x_n$.

Итак, $j^k(f)$ — многочлен Тейлора f порядка k в нуле.

4.8. Более общим образом, отображение

$$f \mapsto \sum_{|\beta| \leqslant s} (D^{0,\beta} f \,|\, \mathbf{R}^n \times \{0\}) \cdot \frac{y^\beta}{\beta!}$$

индуцирует изоморфизм

$$\mathscr{E}(n+k)/\mathfrak{m}(k)^{s+1} \cong \mathscr{E}(n)[y_1, \ldots, y_k]/\langle y_1, \ldots, y_k]^{s+1},$$

где через $\langle y_1, \ldots, y_k\rangle$ обозначен идеал в $\mathscr{E}(n)$-алгебре $\mathscr{E}(n)[y_1, \ldots, y_k]$, порожденный $y_1, \ldots, y_k$.

До сих пор мы не сталкивались с проблемами сходимости. Положим

$$\mathfrak{m}(k)^\infty = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathfrak{m}(k)^s \subset \mathscr{E}(n+k).$$

По теореме 4.5, росток $f\colon (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, 0) \to \mathbf{R}$ лежит в $\mathfrak{m}(k)^\infty$ в том и только том случае, когда для любого $s \in \mathbf{N}$ существует представление $f = \sum_{|\beta|=s} f_\beta y^\beta$, т. е. в том и только том случае, когда все ростки $D^{\alpha,\beta} f$ обращаются в нуль на $\mathbf{R}^n \times \{0\}$.

4.9. Теорема (Борель). *Пусть $\mathfrak{m}(k)^\infty \subset \mathscr{E}(n+k)$ — идеал, определенный выше. Тогда отображение*

$$f \mapsto \sum_{\beta} (D^{0,\beta} f \,|\, \mathbf{R}^n \times \{0\}) \cdot \frac{y^\beta}{\beta!}$$

индуцирует изоморфизм

$$\mathscr{E}(n+k)/\mathfrak{m}(k)^\infty \cong \mathscr{E}(n)[[y_1, \ldots, y_k]].$$

Кольцо в правой части этого равенства называется *кольцом формальных степенных рядов* от переменных $y_1, \ldots, y_k$ с коэффициентами в кольце $\mathscr{E}(n)$. При $n=0$ получаем изоморфизм

$$\mathscr{E}(k)/\mathfrak{m}(k)^\infty \cong \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_k]].$$

Иными словами, для всякого степенного ряда (необязательно сходящегося) существует функция, ряд Тейлора которой в нуле совпадает с этим степенным рядом.

Доказательство. Отображение $\mathscr{E}(n+k)/\mathfrak{m}(k)^\infty \to \mathscr{E}(n)[[y_1, \ldots, y_k]]$ инъективно. Действительно, если $f \in \mathscr{E}(n+k)$ и $D^{0,\beta}f \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} = 0$ для всех β, то, по теореме 4.5, $f \in \mathfrak{m}(k)^s$ для всех s. Остается доказать следующее утверждение

4.10. *Пусть для каждого* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ *задан росток* $\bar{f}_\beta$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$. *Тогда существует такой росток* $\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, 0) \to \mathbf{R}$, *что* $(D^{0,\beta}\bar{f} \mid \mathbf{R}^n \times \{0\}) = \bar{f}_\beta$.

Для каждого $\bar{f}_\beta$ выберем представитель f_β: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ с компактным носителем, лежащим в $K(0, 1)$. Возьмем функцию φ: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, удовлетворяющую условиям: $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(y) = 1$ при $|y| \leqslant 1/2$ и $\varphi(y) = 0$ при $|y| \geqslant 1$. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Положим

$$(*) \quad f(x, y) = \sum_\beta \frac{f_\beta(x)}{\beta!} y^\beta \cdot \varphi(t_\beta \cdot y), \qquad 1 < t_\beta \in \mathbf{R}.$$

Предположим, что последовательность $t_\beta = t_{|\beta|}$ можно выбрать так, чтобы ряд

$$(**) \qquad \sum_\beta D^\alpha \left(\frac{f_\beta(x)}{\beta!} \cdot y^\beta \cdot \varphi(t_\beta \cdot y) \right)$$

равномерно сходился при каждом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+k})$. Тогда f была бы корректно определена и дифференцируема и равенство $(*)$ можно было бы дифференцировать почленно. Поскольку росток функции $\varphi(t_\beta \cdot y)$ равен 1, мы получили бы

$$D^{0,\beta}f \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} = \bar{f}_\beta,$$

что и требуется доказать. Таким образом, осталось только показать, что найдется достаточно быстро возрастающая последовательность $\{t_{|\beta|}\}$, для которой ряд (**) равномерно сходится при каждом α.

Для этого запишем β-й член ряда (*) в следующем виде ($t_{|\beta|} > 1$):

$$(1/t_{|\beta|})^{|\beta|} \cdot \frac{f_\beta(x)}{\beta!} \cdot (t_{|\beta|} \cdot y)^\beta \cdot \varphi(t_{|\beta|} \cdot y) = \\ = (1/t_{|\beta|})^{|\beta|} \cdot f_\beta(x) \cdot \psi_\beta(t_{|\beta|} \cdot y).$$

Функции ψ_β обращаются в нуль вне множества $\{|t_{|\beta|} \cdot y| \leqslant 1\}$. Положим теперь

$$M_\beta = \max\{|D^\alpha(f_\beta(x) \cdot \psi_\beta(y))|,\quad |\alpha| < |\beta|\}.$$

Заметим, что $\operatorname{supp}(f_\beta \cdot \psi_\beta) \subset \{(x, y) \,||x|, |y| \leqslant 1\}$ и что существует лишь конечное число таких α, для которых $|\alpha| < |\beta|$. Следовательно, число M_β корректно определено.

Так как $t_{|\beta|} > 1$, то из $|\alpha| < |\beta|$ следует, что

$$|\beta\text{-й член в } (**)| \leqslant (t_{|\beta|})^{|\alpha|} \cdot (1/t_{|\beta|})^{|\beta|} \cdot M_\beta < M_\beta/t_{|\beta|}$$

(напоминаем, что $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+k})$). Найдем теперь такую последовательность чисел $\varepsilon_\beta > 0$, что сходится ряд $\sum_\beta \varepsilon_\beta$, и возьмем $t_{|\beta|} > M_\beta/\varepsilon_\beta$. Окончательно получаем, что при $|\beta| > |\alpha|$ β-й член ряда (**) мажорируется числом ε_β. ■

Как уже было сказано, формальные степенные ряды образуют кольцо, которое мы обозначили через $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Это кольцо будет также обозначаться через $\hat{\mathscr{E}}(n)$, а его элементы — через $\hat{f}, \hat{g}, \ldots$.

В этих обозначениях отображение из теоремы Бореля:

$$\mathscr{E}(n) \xrightarrow{f \mapsto \hat{f}} \mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^\infty = \hat{\mathscr{E}}(n)$$

задается формулой $\bar{f} \mapsto \hat{f}$. Если

$$\hat{f} = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha, \quad \hat{g} = \sum_\alpha g_\alpha x^\alpha, \quad \text{где} \quad f_\alpha, g_\alpha \in \mathbb{R},$$

то

$$\hat{f} + \hat{g} = \sum_\alpha (f_\alpha + g_\alpha) x^\alpha,$$

$$\hat{f} \cdot \hat{g} = \sum_\alpha \Big(\sum_{\beta+\gamma=\alpha} f_\beta \cdot g_\gamma \Big) x^\alpha.$$

Если $\hat{f} \in \mathscr{E}(n)$, то $j(f) = j^\infty(f) = \hat{f}$ называется *струей* (или *∞-струей*) ростка $\hat{f}$ в нуле.

4.11. *Отображение* $\mathscr{E}(n) \to \hat{\mathscr{E}}(n)$ — *гомоморфизм алгебр.*

Докажем, например, что

$$(f \cdot g)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Для любого k мы можем написать

$$\hat{f} = p + m, \qquad \hat{g} = q + r,$$

где p и q — многочлены и $m, r \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$.

Отсюда $\hat{f} \cdot \hat{g} = p \cdot q + m_1$, где $m_1 \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Следовательно,

$$(f \cdot g)\hat{} = (p \cdot q)\hat{} = p \cdot q \bmod \mathfrak{m}(n)^{k+1},$$

поскольку при разложении в ряд Тейлора любого многочлена мы получаем тот же многочлен.

4.12. *Кольцо* $\hat{\mathscr{E}}(n)$ *обладает единственным максимальным идеалом* $\hat{\mathfrak{m}}(n)$, *где*

$$\hat{\mathfrak{m}}(n) = \{\hat{f} \in \hat{\mathscr{E}}(n) \mid \hat{f}(0) = 0\}.$$

Если $\hat{f} \notin \hat{\mathfrak{m}}(n)$, то $\hat{f} = f_0 \cdot (1 - f_1)$, где $f_1 \in \hat{\mathfrak{m}}(n)$ и $0 \neq f_0 \in \mathbf{R}$, что дает возможность написать следующий степенной ряд:

$$\frac{1}{\hat{f}} = \frac{1}{f_0} \cdot (1 + f_1 + f_1^2 + \ldots)$$

(который еще нужно упорядочить по возрастанию степеней мономов).

Следовательно, $\hat{f} \notin \hat{\mathfrak{m}}(n) \Rightarrow \hat{f}$ — обратимый элемент $\hat{\mathscr{E}}(n)$ ($\Rightarrow \bar{f}$ — обратимый элемент $\mathscr{E}(n)$).

4.13. *Идеал* $\widehat{\mathfrak{m}}(n)$ *порожден элементами* $x_1, \ldots, x_n$ (каждый моном делится на некоторый из элементов $x_1, \ldots, x_n$). Наконец,

$$\widehat{\mathfrak{m}}(n)^{\infty} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \widehat{\mathfrak{m}}(n)^s = \{0\},$$

поскольку всякий отличный от нуля степенной ряд имеет *порядок*, определяемый как наименьшее из $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, таких, что в разложении $\hat{f} = \sum_{\beta} f_{\beta} x^{\beta}$

$$f_{\beta} \neq 0 \quad \text{при} \quad |\beta| = k.$$

Ясно, что

$$\text{порядок } (\hat{f} \cdot \hat{g}) = \text{порядок } (\hat{f}) + \text{порядок } (\hat{g})$$

(по определению, порядок $(0) = \infty$).

Если $\hat{f} \in \widehat{\mathfrak{m}}(n)^k$, то порядок $(\hat{f}) \geqslant k$. Поэтому если $\hat{f} \in \widehat{\mathfrak{m}}(n)^{\infty}$, то для любого k порядок $(\hat{f}) \geqslant k$, т. е. $\hat{f} = 0$.

Следующий результат менее тривиален.

4.14. *Кольцо* $\hat{\mathscr{E}}(n)$ *нётерово и факториально* (последнее означает, что в $\hat{\mathscr{E}}(n)$ нет делителей нуля и однозначно разложение на простые множители) (см. Бурбаки!).

Для $\mathscr{E}(n)$ ни одно из этих свойств не выполняется. Действительно, идеал $\mathfrak{m}(n)^{\infty} \subset \mathscr{E}(n)$ не является конечно порожденным. (Доказательство этого факта мы предоставляем читателю в качестве упражнения, которое не совсем тривиально, поскольку идеал $\widehat{\mathfrak{m}}(n)^{\infty}$ равен нулю и, следовательно, конечно порожден. Однако это доказательство легко получить, воспользовавшись следующей теоремой.)

4.15. Теорема (лемма Накаямы). *Пусть $\mathfrak{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, обладающее единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Пусть A — конечно порожденный $\mathfrak{R}$-модуль. Тогда из равенства $\mathfrak{m}A = A$ вытекает что $A = 0$.*

Следствие. *Пусть выполнены те же предположения о кольце $\mathfrak{R}$ и модуле A, и пусть B и C — такие $\mathfrak{R}$-модули, что A, $B \subset C$ и*

$$A \subset B + \mathfrak{m}A.$$

Тогда $A \subset B$.

Доказательство следствия. Из $A \subset B + \mathfrak{m}A$ вытекает, что

$$A/(A \cap B) \subset (B + \mathfrak{m}A)/B = \mathfrak{m}(A/(A \cap B)).$$

По лемме Накаямы $A/(A \cap B) = 0$, значит,

$$A = A \cap B, \qquad \text{т. е. } A \subset B. \blacksquare$$

Доказательство теоремы. Докажем, что если $z \in \mathfrak{m}$, то элемент $1 + z$ обратим (это все, что мы будем использовать). Действительно, в противном случае $1 + z \in \mathfrak{m}$ (так как элемент $1 + z$, будучи необратимым, должен лежать в каком-нибудь максимальном идеале), откуда $1 \in \mathfrak{m}$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — образующие A над $\mathfrak{R}$. Тогда, по условию теоремы, существуют такие $z_{ij} \in \mathfrak{m}$, что

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} a_j.$$

Обозначим $(n \times n)$-матрицу (z_{ij}) через Z. Тогда наши соотношения примут вид $a = Za$, т. е. $(Z - 1)\,a = 0$, где 1 — единичная $(n \times n)$-матрица.

Далее, $\det(Z - 1)$ есть значение характеристического многочлена матрицы Z в точке 1 и, следовательно, равно ($\pm 1 +$ сумма произведений элементов матрицы Z), т. е. равно $\pm 1 + \bar{z}$, где $\bar{z} \in \mathfrak{m}$. Следовательно, элемент $\det(Z - 1)$ обратим, матрица $(Z - 1)$ также обратима (правило Крамера), откуда $a = (a_1, \ldots, a_n) = 0$ и $A = 0$. $\blacksquare$

Если $\mathfrak{R} = \hat{\mathscr{E}}(n)$, то условию леммы Накаямы удовлетворяет любой идеал A, ибо кольцо $\hat{\mathscr{E}}(n)$ нётерово. Однако в $\mathscr{E}(n)$ не всякий идеал конечно порожден.

Возвращаясь к кольцам, которые мы изучали, положим

$$\mathscr{E}(n, p) = (\text{кольцо ростков } (\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}^p) =$$
$$= \mathscr{E}(n) \times \mathscr{E}(n) \times \ldots \times \mathscr{E}(n) \ (p \text{ сомножителей.})$$

Аналогично положим

$$\hat{\mathscr{E}}(n, p) = \hat{\mathscr{E}}(n) \times \hat{\mathscr{E}}(n) \times \ldots \times \hat{\mathscr{E}}(n).$$

Имеется отображение j: $\mathscr{E}(n, p) \to \hat{\mathscr{E}}(n, p)$, определяемое формулой

$$j(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p) = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p).$$

Для ростков

$$(\mathbf{R}^n, 0) \xrightarrow{\tilde{f}} (\mathbf{R}^p, 0) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbf{R}^q$$

можно определить композицию $\tilde{g} \circ \tilde{f}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}^q$. То же верно и для формальных степенных рядов: если

$$\hat{f} = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p), \qquad \hat{f}_i \in \hat{\mathfrak{m}}(n),$$
$$\hat{g} = (\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_q), \qquad \hat{g}_j \in \hat{\mathscr{E}}(p),$$

то композиция $\hat{g} \circ \hat{f} \in \hat{\mathscr{E}}(n, q)$ определяется формулой

$$(\hat{g} \circ \hat{f})_i = \hat{g}_i(\hat{f}_1(x), \ldots, \hat{f}_p(x)).$$

Равенство $(g \circ f)^{\wedge} = \hat{g} \circ \hat{f}$ есть *обобщенное цепное правило* (обобщенное правило дифференцирования композиции отображений). (Доказательство этого правила подобно доказательству формулы $(f \cdot g)^{\wedge} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.)

Всякий элемент $\hat{f} \in \hat{\mathscr{E}}(n, p)$ можно почленно дифференцировать по любой из переменных. *Матрица Якоби* $D\hat{f}(0)$ определяется *линейной частью* $\hat{f}$. Справедлива теорема об обратной функции.

4.16. Теорема. *Элемент $\hat{f} \in \hat{\mathscr{E}}(n, p)$, удовлетворяющий условию $\hat{f}(0) = 0$, обратим относительно операции $\circ$ в том и только в том случае, когда обратима матрица $D\hat{f}(0)$ (в частности, $n = p$). Нейтральным элементом в $\hat{\mathscr{E}}(n, n)$ относительно этой операции яв-*

ляется следующая строка из формальных степенных рядов: $(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Если $\hat{f} \circ \hat{g}(x) = x$, то $D\hat{f}(0) \cdot D\hat{g}(0) = 1$, следовательно,

элемент $\hat{f}$ обратим $\Rightarrow$ матрица $D\hat{f}(0)$ обратима

(функториальность матрицы Якоби!).

Предположим, что матрица $D\hat{f}(0)$ обратима. Выберем $\bar{f} \in \mathscr{E}(n, n)$ так, что $j(\bar{f}) = \hat{f}$. Тогда $\bar{f}^{-1} \circ \bar{f}(x) = x$, $\bar{f} \circ \bar{f}^{-1}(y) = y$. Следовательно,

$$\hat{f}^{-1} \circ \hat{f}(x) = x, \qquad \hat{f} \circ \hat{f}^{-1}(y) = y. \blacksquare$$

Не следует принимать это доказательство слишком всерьез: эта теорема справедлива над любым полем и гораздо проще, чем теорема об обратной функции (см. Бурбаки).

Дифференцируемый росток $\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ определяет гомоморфизм алгебр

$$f^*: \mathscr{E}(p) \to \mathscr{E}(n),$$
$$\bar{\varphi} \mapsto \bar{\varphi} \circ \bar{f},$$

и ∞-струя $\hat{f} \in \hat{\mathscr{E}}(n, p)$, такая, что $\hat{f}(0) = 0$, определяет соответствующий гомоморфизм

$$\hat{f}^*: \hat{\mathscr{E}}(p) \to \hat{\mathscr{E}}(n),$$
$$\hat{\varphi}(y_1, \ldots, y_p) \mapsto \hat{\varphi}(\hat{f}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \hat{f}_p(x_1, \ldots, x_n)).$$

Гомоморфизм колец f^* позволяет превратить $\mathscr{E}(n)$ в модуль над $\mathscr{E}(p)$: для $\bar{\varphi} \in \mathscr{E}(p)$ и $\bar{\psi} \in \mathscr{E}(n)$ положим

$$\bar{\varphi} \cdot \bar{\psi} = f^*(\bar{\varphi}) \cdot \bar{\psi} = (\bar{\varphi} \circ \bar{f}) \cdot \bar{\psi} \in \mathscr{E}(n).$$

То же верно и для $\hat{f}^*$.

Следующие две главы будут посвящены изучению этих структур модулей. В частности, нас будет интересовать связь между f^* и $\hat{f}^*$, а также решение такого вопроса: для каких f модуль $\mathscr{E}(n)$ конечно порожден над $\mathscr{E}(p)$?

Вот простой предварительный результат в этом направлении.

4.17. Замечание. *Пусть* $\bar{f}\colon (\mathbf{R}^n, 0)\to(\mathbf{R}^p, 0)$ — *дифференцируемый росток. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(i) $\bar{f}$ *обратим*,
(ii) f^* — *изоморфизм*,
(iii) $\hat{f}^*$ — *изоморфизм*.

Доказательство. Ясно, что $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$ и $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, поэтому * является функтором, переводящим изоморфизмы в изоморфизмы. Следовательно, (i)$\Rightarrow$(ii), (iii).

Обратно, гомоморфизм алгебр $f^*\colon \mathscr{E}(p)\to\mathscr{E}(n)$ определяет гомоморфизм $d(f)$ векторного пространства дифференцирований $\mathscr{E}(n)$ в векторное пространство дифференцирований $\mathscr{E}(p)$, действующий по формуле

$$d(f)(X) = X\circ f^*\colon \mathscr{E}(p)\to\mathbf{R}.$$

Посмотрим, как действует $d(f)$ на канонический базис в пространстве дифференцирований:

$$\begin{aligned} d(f)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0\right)(\tilde{\varphi}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 (f^*\tilde{\varphi}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 (\tilde{\varphi}\circ\bar{f}) = \\ &= \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0). \end{aligned}$$

Таким образом, $d(f)\colon \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 \mapsto \sum_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\cdot\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big|_0$.

Следовательно, матрица $d(f)$ в каноническом базисе совпадает с матрицей Якоби $\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\right)$. Так как f^* — изоморфизм, то и $d(f)$ — изоморфизм. Значит, матрица $D\bar{f}$ обратима, и, следовательно, росток $\bar{f}$ обратим. Аналогично доказывается (iii)$\Rightarrow$(i). ∎

4.18. Упражнения. 1. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — дифференцируемая функция, такая, что росток $\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ принадлежит $\mathfrak{m}(n)^\infty$. Докажите, что функция g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, равная нулю в точке 0 и определяемая формулой $g(x) = f(x)/|x|$ при $x \neq 0$, дифференцируема.

2. Пусть f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — дифференцируемая функция, такая, что $f(x) = f(-x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Докажите, что существует и единственна дифференцируемая функция g: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, такая, что $f(x) = g(x^2)$.

3. Пусть f: $(\mathbf{R}, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ — дифференцируемый росток. Покажите, что $f \in \mathfrak{m}(1)^k$, $f \notin \mathfrak{m}(1)^{k+1}$ в том и только том случае, когда найдется обратимый росток h: $(\mathbf{R}, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$, такой, что

$$f \circ h(x) = \pm x^k.$$

(Этот результат дает полную классификацию ростков с ненулевой струей относительно правой эквивалентности! См. 11.1.)

4. Докажите, что если $\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ — такой росток, что гомоморфизм f^*: $\mathcal{E}(p) \to \mathcal{E}(n)$ сюръективен, то $\bar{f}$ — иммерсия.

5. ТЕОРЕМА ДЕЛЕНИЯ

Литература: Л. Хёрмандер, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, «Мир», М., 1968.

Дж. Мезер, Теорема деления для бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций, в сб. «Особенности дифференцируемых отображений», «Мир», М., 1968, стр. 198—215.

L. Nirenberg, A proof of the Malgrange—Mather preparation theorem, Proc. of Liverpool Singularities, Symposium I, Springer Lecture Notes 192 (1971), 97 — 105.

Б. Мальгранж, Подготовительная теорема для дифференцируемых функций, в сб. «Особенности дифференцируемых отображений», «Мир», М., 1968, стр. 183—189.

Для того чтобы ниже нам не приходилось прерывать ход изложения для всевозможных пояснений, мы начнем эту главу с нескольких не связанных друг с другом предварительных замечаний.

Первое из них относится к *алгебре*.

Пусть $\{\alpha_i \mid i=1, \ldots, n\}$ — независимые переменные. Определим $\{\sigma_i \mid i=1, \ldots, n\}$ с помощью равенства

$$\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)=\sum_{i=0}^{n}\sigma_i x^{n-i}, \qquad \text{где} \quad \sigma_0=1.$$

Выражение $(-1)^i\sigma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется *i-й элементарной симметрической функцией.*

Рассмотрим отображение

$$\sigma\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n,$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

5.1. Лемма. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что из $|\sigma_i|<\delta$, $i=1, \ldots, n$ и $\sum_{i=0}^{n}\sigma_i x^{n-i}=0$*

вытекает, что $|x| < \varepsilon$. Иными словами, если коэффициенты некоторого многочлена стремятся к нулю (кроме старшего, равного 1), то все его корни также стремятся к нулю.

Доказательство. Положим $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i x^{n-i} = x^n\left(1 + \frac{\sigma_1}{x} + \ldots + \frac{\sigma_n}{x^n}\right)$ (для $x \neq 0$). Если $|x| \geqslant \varepsilon$ и σ_i достаточно малы (меньше, чем $\delta(\varepsilon)$), то сумма $\frac{\sigma_1}{x} + \ldots + \frac{\sigma_n}{x^n}$ мала и $(1 + \ldots) \neq 0$. Следовательно, $p(x) \neq 0$. Таким образом, если $p(x) = 0$ и σ_i достаточно малы, то $|x| < \varepsilon$. ∎

Другими словами, если мы сопоставим каждому многочлену какой-нибудь его корень, то отображение, сопоставляющее коэффициентам многочлена (кроме старшего) этот корень, непрерывно в нуле независимо от того, как мы выбирали корень многочлена.

5.2. Отступление. Связь между корнями многочлена и его коэффициентами можно описать следующим образом. Для любого топологического пространства X определим n-кратное *симметрическое произведение*

$$\mathrm{SP}^n(X) = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ сомножителей}}/\sim,$$

где $(x_1, \ldots, x_n) \sim (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ для всякой перестановки π чисел $(1, \ldots, n)$. Обозначим класс эквивалентности через $\prod_{i=1}^{n} x_i$.

Основная теорема алгебры (для топологов). *Пусть* SP^n — *симметрическое произведение и* $S^2 = \mathrm{CP}^1$ *с одно-*

родными комплексными координатами $[a_i, b_i]$. *Отображение*

$$\mathrm{SP}^n(S^2) \to \mathbf{CP}^n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \mapsto [c_0, \ldots, c_n],$$

задаваемое формулой

$$\prod_{i=1}^{n} (xa_i - yb_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i y^i \cdot x^{n-i},$$

корректно определено и является гомеоморфизмом.

Доказательство. Непрерывность очевидна, так как c_i — многочлены от a_j, b_i. Это отображение можно также определить формулой

$$\prod_{i=1}^{n} (xa_i - b_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i}.$$

Инъективность означает, что коэффициенты многочлена определяют его корни. Сюръективность означает, что каждый многочлен над $\mathbf{C}$ разлагается на линейные множители. Поскольку $S^2 \times \ldots \times S^2$ компактно, а $\mathbf{CP}^n$ хаусдорфово, отображение факторпространства $\mathrm{SP}^n(S^2)$ в $\mathbf{CP}^n$ — гомеоморфизм. Действительно, это отображение непрерывно и биективно. ∎ Конец отступления.

■ 5.3. Упражнение. Докажите, что множество таких точек $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbf{C}^n$, что многочлен $\sum_{i=0}^{n} \sigma_i x^{n-i}$, $\sigma_0 = 1$, имеет меньше n различных комплексных корней, замкнуто и имеет меру нуль. (Это множество называется *дискриминантным множеством*.)

5.4. Если точка $\sigma \in \mathbf{C}^n$ не лежит в дискриминантном множестве и α — корень многочлена $\sum_{i=0}^{n} \sigma_i x^{n-i} = p_\sigma(x)$, то $p_\sigma(x) = (x-\alpha) g(x)$ и

$$\frac{\partial p_\sigma}{\partial x}(\alpha) = g(\alpha) \neq 0.$$

Следовательно, из уравнения $\sum_{i=0}^{n} s_i x^{n-i} = 0$ можно в окрестности точки $s = \sigma$, $x = \alpha$ выразить x как аналитическую функцию от s. Действительно, отображение

$$\tau\colon (s_1, \ldots, s_n, x) \mapsto (s_1, \ldots, s_n, p_s(x))$$

локально в окрестности точки $s = \sigma$, $x = \alpha$ является заменой координат и определяет функцию

$$(s_1, \ldots, s_n) \mapsto (\tau^{-1}(s_1, \ldots, s_n, 0))_{n+1}.$$

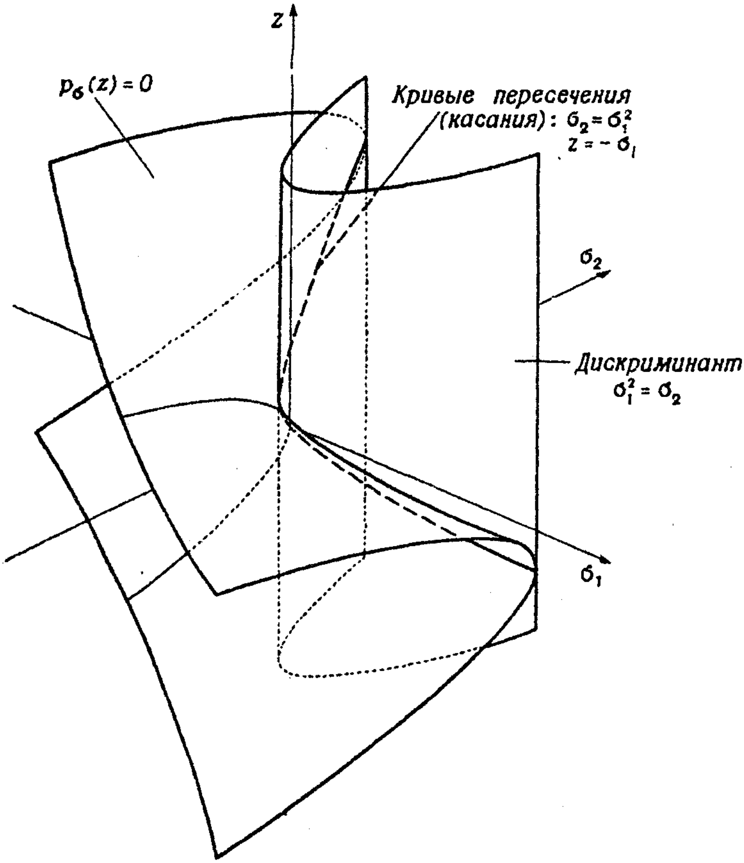
Эта функция выражает корень многочлена p_s через его коэффициенты s. (Выше мы использовали теорему об обратной функции для комплексных пространств.)

5.5. Множество $\{(\sigma, z) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \mid p_\sigma(z) = 0\} \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ всегда является подмногообразием комплексной коразмерности 1 и, следовательно, вещественной коразмерности 2 (соответствующий результат верен и в вещественном случае). Это вытекает из того, что рассматриваемое множество есть график функции $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, заданной формулой

$$\sigma_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, z) = -\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i z^{n-i}.$$

Следующий пример иллюстрирует вещественный случай в размерности 2 (или, если угодно, вещественную часть комплексного случая).

5.6. Пример: $n = 2$, $p_\sigma(z) = z^2 + 2\sigma_1 z + \sigma_2$ (двойка перед σ_1 добавлена для удобства). Дискриминантное множество и множество $\{p_\sigma(z)=0\}$ содержат начало координат в $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$.



5.7. Теперь нам понадобится немного *комплексного анализа*. Как вещественное векторное пространство $\mathbf{C}$ изоморфно $\mathbf{R}^2$. Пусть f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ — отображение, дифференцируемое как отображение $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Введем обычные координаты $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$:

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \qquad y=-\frac{i}{2}(z-\bar{z}).$$

Дифференциал f можно записать в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

где, по определению,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

В частности: (df пропорционален dz)$\Leftrightarrow$(f голоморфна (аналитична))$\Leftrightarrow$($\partial f/\partial\bar{z} = 0$)$\Leftrightarrow$(выполняются уравнения Коши — Римана).

Из теоремы Стокса вытекает, что если отображение f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ дифференцируемо и $D \subset \mathbf{C}$ — область, ограниченная гладкой кривой, то

$$\int_{\partial D} f\,dz = \int_D df \wedge dz =$$

$$= \underbrace{\int_D \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz \wedge dz}_{0} + \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz.$$

Следовательно, если $f\,|\,D$ аналитична, то $\int_{\partial D} f\,dz = 0$.

Воспользуемся этим, чтобы доказать следующий вариант *интегральной формулы Коши.*

5.8. *Пусть f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ — дифференцируемое отображение, D — замкнутый единичный круг и $\zeta \in D^\circ$. Тогда*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial f/\partial\bar{z}}{(z-\zeta)} dz \wedge d\bar{z}.$$

Доказательство. Пусть D_ε — круг радиуса ε с центром в точке ζ, содержащийся в D°. Функция $1/(z-\zeta)$ аналитична вне D_ε, поэтому к функции $f(z)/(z-\zeta)$ применима теорема Стокса:

$$\int_{D-D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (z-\zeta)^{-1} dz \wedge d\bar{z} = \int_{\partial D} f(z)(z-\zeta)^{-1} dz -$$

$$- \int_0^{2\pi} f(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\, i\, d\theta$$

($\partial/\partial z$ и $\partial/\partial\bar{z}$ удовлетворяют правилу дифференцирования произведения, чего и следовало ожидать).

При $\varepsilon \to 0$ последний интеграл сходится к $2\pi i f(\zeta)$. Тот интеграл, который «выброшен» в левой части, а именно $\int\limits_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot (z-\zeta)^{-1} dz \wedge d\bar{z}$, стремится к нулю, поскольку $dz \wedge d\bar{z} = -2i\, dx \wedge dy = -2ir\, dr\, d\theta$ и $|z-\zeta|^{-1} = r^{-1}$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{D_\varepsilon} \ldots\right| \leqslant c \int\limits_0^\varepsilon dr, \qquad \text{где} \qquad \left| 2i \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\zeta + re^{i\theta})\, d\theta \right| < c. \ \blacksquare$$

Наша цель — научиться доказывать утверждения следующего типа:

Пусть $f\colon (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \to \mathbf{R}$ — росток с ненулевой струей. Тогда на $\mathbf{R}^{n+1}$ можно выбрать такие координаты $(t, x_1, \ldots, x_n)$, что

$$\tilde{f}(t, x) = \tilde{Q}(t, x) \cdot \tilde{P}(t, x),$$

где

$$\tilde{Q}(0, 0) \neq 0, \qquad \text{т. е. росток } \tilde{Q} \text{ обратим в } \mathscr{E}(n+1),$$

$$\tilde{P}(t, x) = t^p + \sum_{j=1}^{p} \tilde{\lambda}_j(x)\, t^{p-j}, \qquad \tilde{\lambda}_j(0) = 0,$$

следовательно, $\tilde{P} \in \mathscr{E}(n)[t]$.

Таким образом, если росток из $\mathscr{E}(n+1)$ имеет ненулевой ряд Тейлора, то, с точностью до умножения на обратимый элемент, он в подходящих координатах может быть записан как многочлен $P \in \mathscr{E}(n)[t]$, коэффициенты которого (кроме старшего, равного 1) лежат в $\mathfrak{m}(n)$. (Такой многочлен $P \in \mathscr{E}(n)$, у которого старший коэффициент равен 1, а остальные коэффициенты λ_j лежат в $\mathfrak{m}(n)$, в дальнейшем будет называться *отмеченным*.) В аналитическом случае этот факт можно использовать для того, чтобы индуктивно выводить различные утверждения, относящиеся к $\mathscr{E}(n)$, из соответствующих утверждений для многочленов.

Доказательство сделанного выше утверждения, которое мы позже сформулируем как теорему, начинается следующим образом. Мы показываем, что произвольный росток $\tilde{f} \in \mathscr{E}(n+1)$ можно *разделить* на росток произвольного отмеченного многочлена $\tilde{P} \in \mathscr{E}(n)[t]$ с *остатком* вида

$$\tilde{R}(t, x) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{h}_j(x)\, t^{p-j},$$

т. е. $\tilde{f} = \tilde{Q} \cdot \tilde{P} + \tilde{R}$.

Далее мы показываем, что найдутся такие координаты и такой многочлен $\tilde{P}$, что росток $\tilde{Q}$ обратим, а $\tilde{R} \equiv 0$. Чтобы упростить доказательство, мы рассматриваем «общий» многочлен P с коэффициентами λ_j, которые сначала вводятся как новые переменные, не зависящие от x. Функция f не зависит от этих новых переменных, которые могут принимать комплексные значения. После деления на «общий» многочлен вместо λ_j подставляются подходящие ростки $\lambda_j(x)$ из $\mathscr{E}(n)$.

Следуя этому плану, мы должны доказать такую теорему.

5.9. Специальная лемма деления. *Пусть* $\tilde{f}$: $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{C}$ — *дифференцируемый росток и* $\tilde{P}$: $(\mathbf{R} \times \mathbf{C}^p, 0) \to \mathbf{C}$ — *росток «общего» многочлена*

$$P(t, \lambda) = t^p + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j t^{p-j}.$$

Тогда существуют такие дифференцируемые ростки $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$: $(\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{C}^p, 0) \to \mathbf{C}$, *где*

$$\tilde{R}(t, x, \lambda) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{h}_j(x, \lambda) \cdot t^{p-j},$$

что возможно следующее деление с остатком:

$$\tilde{f}(t, x) = \tilde{Q}(t, x, \lambda) \cdot \tilde{P}(t, \lambda) + \tilde{R}(t, x, \lambda).$$

При этом если $\tilde{f}$ *и* λ *вещественны, то* $\tilde{Q}$ *и* $\tilde{R}$ *можно выбрать вещественными.*

Начнем доказательство с разбора классического случая. А именно, предположим, что при любом фиксированном x функция $f(t, x)$ аналитически зависит от $t \in \mathbf{C}$ (как обычно, мы считаем, что f — представитель $\tilde{f}$).

Интегральная формула Коши дает

$$f(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z, x)}{z - t}\, dz. \tag{1}$$

Здесь и ниже через D обозначается стандартный диск, содержащий точку 0 и все корни многочлена $P(t, \lambda)$ при достаточно малых λ. Такой диск существует по доказанной ранее лемме 5.1.

Многочлен $r(z, t, \lambda)$ от переменных z, t, определяемый формулой

$$\frac{P(z, \lambda) - P(t, \lambda)}{z - t} = r(z, t, \lambda),$$

аналитичен по совокупности переменных и как многочлен от t имеет степень $< p$.

Из формулы для $r(z, t, \lambda)$ получаем тождество между рациональными функциями:

$$\frac{1}{z - t} = \frac{P(t, \lambda)}{(z - t)\cdot P(z, \lambda)} + \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) (знаменатель не обращается в нуль на ∂D, если t и λ достаточно малы). Получим голоморфную (аналитическую) лемму деления:

$$f(t, x) = \underbrace{P(t, \lambda)\cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z, x)}{(z - t)\, P(z, \lambda)}\, dz}_{Q(t, x, \lambda)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z, x)}{P(z, \lambda)}\, r(t, z, \lambda)\, dz}_{R(t, x, \lambda)}.$$

Действительно, R — многочлен от t степени $< p$ (подынтегральное выражение — многочлен от t, коэффициенты которого интегрируются по z). Доказательство голоморфной леммы деления окончено. ∎

Чтобы доказать аналогичный результат в дифференцируемом случае, воспользуемся приведенным выше вариантом интегральной формулы Коши и следующим утверждением.

5.10. Лемма о продолжении. *Пусть* $f\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ — *дифференцируемое отображение с носителем в единичном шаре. Тогда существует дифференцируемое отображение*

$$F\colon \mathbf{C}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{C}^p\to\mathbf{C},$$

такое, что

(i) $F(t, x, \lambda)=f(t, x)$ *для* $(t, x)\in\mathbf{R}^{n+1}\subset\mathbf{C}\times\mathbf{R}^n$,

(ii) $\partial F/\partial\bar z$ *имеет нуль бесконечного порядка на множестве* $\{(z, x, \lambda)\mid \operatorname{Im} z=0\}$ *и на множестве* $\{(z, x, \lambda)\mid P(z, \lambda)=0\}$.

Последнее условие означает, что в точках этих множеств отображение $\partial F/\partial\bar z$ имеет нулевой ряд Тейлора.

Предположим, что лемма о продолжении справедлива, и вернемся к доказательству леммы деления. По интегральной формуле Коши

$$f(t, x)=F(t, x, \lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{F(z, x, \lambda)}{z-t}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{F_{\bar z}(z, x, \lambda)}{z-t}\,dz\wedge d\bar z,$$

где $F_{\bar z}=\partial F/\partial\bar z$, а D описано выше. Заменив $1/(z-t)$ его выражением из формулы (2), получим $f=\tilde Q\cdot\tilde P+\tilde R$, где

$$Q(t, x, \lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{F(z, x, \lambda)}{(z-t)P(z, \lambda)}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{F_{\bar z}(z, x, \lambda)}{(z-t)P(z, \lambda)}\,dz\wedge d\bar z,$$

$$R(t, x, \lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}F(z, x, \lambda)\frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}F_{\bar z}(z, x, \lambda)\frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)}\,dz\wedge d\bar z.$$

Знаменатели не обращаются в нуль на ∂D, и нужно показать, что вторые интегралы определяют дифференцируемые отображения. Для этого достаточно показать, что функция

$$g(z, t, x, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } (z-t)P(z, \lambda) = 0, \\ \dfrac{F_{\bar{z}}(z, x, \lambda)}{(z-t)P(z, \lambda)} & \text{при } (z-t)P(z, \lambda) \neq 0 \end{cases}$$

дифференцируема. *В тех точках, где знаменатель не обращается в нуль,* каждая частная производная функции g является суммой функций вида $F_0(z, x, \lambda)/[(z-t)P(z, \lambda)]^k$, где F_0 имеет нуль бесконечного порядка там, где $\operatorname{Im} z = 0$ или $P(z, \lambda) = 0$. (Используйте тот факт, что знаменатель комплексно аналитичен по всем переменным, и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Re} z}\left(\frac{1}{(z-t)P(z, \lambda)}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(z-t)P(z, \lambda)}\right),$$

а правило дифференцирования дроби можно применять формально. Аналогичные формулы верны и для других переменных.) Поскольку F_0 имеет нуль сколь угодно высокого порядка на множестве $\{\operatorname{Im} z = 0\}$, то для сколь угодно большого l можно написать $F_0(z, x, \lambda) = (\operatorname{Im} z)^l F_1(z, x, \lambda)$. Теперь F_1 имеет нуль бесконечного порядка на множестве $\{\operatorname{Re} P(z, \lambda) = \operatorname{Im} P(z, \lambda) = 0\}$, и, следовательно, можно написать

$$F_1 = (\operatorname{Re} P(z, \lambda))^l F_2(z, x, \lambda) + (\operatorname{Im} P(z, \lambda))^l F_3(z, x, \lambda)$$

для сколь угодно большого l. (Заметим, что $(\operatorname{Re} P, \operatorname{Im} P)$ могут служить локальными координатами, см. 5.4.)

Ясно, что если (z, t, x, λ) стремится к точке, где $P \cdot (z-t) = 0$, то

$$\frac{F_2 \cdot (\operatorname{Re} P)^l \cdot (\operatorname{Im} z)^l}{((z-t) \cdot P)^k} \to 0 \qquad \text{при} \quad l > k.$$

То же самое верно и для второго слагаемого

$$\frac{F_3 \cdot (\operatorname{Im} P)^l \cdot (\operatorname{Im} z)^l}{((z-t) \cdot P)^k}.$$

Следовательно, при стремлении знаменателя к нулю все производные g стремятся к нулю. Отсюда видно, что g дифференцируема и ее производные равны нулю в тех точках, где знаменатель равен нулю (см. задачу в конце этой главы). Таким образом, мы доказали дифференцируемость Q и R. Если λ вещественно, а функция f вещественнозначна, то можно взять вещественную часть равенства

$$f(t, x) = Q(t, x, \lambda) \cdot P(t, \lambda) + R(t, x, \lambda)$$

и получить формулу деления с вещественными частным и остатком:

$$f = \frac{1}{2}(Q + \overline{Q}) P + \frac{1}{2}(R + \overline{R}).$$

Остается доказать лемму о продолжении. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы Бореля и проводится в два этапа.

5.11. Лемма. *Пусть $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ — стандартное вложение и f: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ — дифференцируемое отображение (с носителем в единичном шаре). Тогда существует дифференцируемая функция F: $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, такая, что $F \mid \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n = f$ и $\partial F/\partial \bar{z}$: $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ имеет нуль бесконечного порядка на множестве $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $z = x + iy$. Положим

$$F(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^l f(x) \cdot \frac{y^l}{l!} \cdot \varphi(t_l \cdot y),$$

где $\varphi(y) = 1$ при $|y| \leqslant 1/2$, $\varphi(y) = 0$ при $|y| \geqslant 1$ и последовательность $\{t_l\}$ возрастает столь быстро, что ряд почленно дифференцируем. Тогда $F(x) = f(x)$ при вещественных x. Так как

$$2\partial/\partial\bar{z} = \partial/\partial x + i\,\partial/\partial y = i(-i\,\partial/\partial x + \partial/\partial y),$$

то

$$\frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial\bar z}F(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j+1}f(x)\cdot\frac{y^j}{j!}\cdot[\varphi(t_{j+1}\cdot y)-\varphi(t_j\cdot y)]+$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j}f(x)\cdot\frac{y^j}{j!}\cdot\varphi'(t_j\cdot y),$$

и в каждом из этих двух рядов каждый член обращается в нуль в некоторой окрестности точки $y=0$, поскольку $\varphi(t_j\cdot y)$ локально принимает постоянное значение 1. ∎

Доказательство леммы о продолжении. Пусть заданы дифференцируемая функция с компактным носителем $f\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ и многочлен $P\colon \mathbf{C}\times\mathbf{C}^p\to\mathbf{C}$ вида

$$P(z,\lambda)=z^p+\sum_j \lambda_j z^{p-j}.$$

Мы хотим продолжить f до функции $F\colon \mathbf{C}\times\mathbf{R}^n\times\times\mathbf{C}^p\to\mathbf{C}$, такой, что $\partial F/\partial\bar z$ имеет нуль бесконечного порядка на множествах $\{\operatorname{Im} z=0\}$ и $\{P=0\}$.

Проведем индукцию по степени p многочлена P.

При $p=0$ нужно продолжить f так, чтобы $F_{\bar z}$ имела нуль бесконечного порядка на вещественной оси. Это возможно согласно лемме 5.11.

Предположим теперь, что лемма о продолжении верна для $p-1$. Сделаем в $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^p$ замену координат таким же образом, как и раньше:

$$(z,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\mapsto(z,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1},P(z,\lambda)).$$

Обозначим новые координаты через (z,λ',μ). В новых координатах оператор $\partial/\partial\bar z$ принимает вид

$$L=\frac{\partial}{\partial\bar z}+\overline{P'(z,\lambda)}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\mu},$$

где P' — производная P (P' не зависит от λ_p).

Используя теперь индуктивное предположение (примененное к P'), можно найти дифференцируемую комплекснозначную функцию $v(z, x, \lambda')$, обладающую следующими свойствами:

(i) $v(t, x, \lambda') = f(t, x)$ при $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $\partial v/\partial \bar{z}$ имеет нуль бесконечного порядка на множестве $\{\operatorname{Im} z = 0\}$ и на множестве $\{P'(z, \lambda') = 0\}$.

Положим теперь

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\overline{P'}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^j v(z, \lambda') \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \varphi(t_j \mu); \qquad t_0 = 0.$$

Здесь φ — функция, определенная в (5.11), а последовательность (t_j) возрастает столь быстро, что ряд можно дифференцировать почленно (заметим, однако, что $t_0 = 0$). Продолжим члены ряда дифференцируемым образом на множество $\{P' = 0\}$, положив их там равными нулю. На множестве $\{\operatorname{Im} z = 0\}$ член ряда с индексом $j = 0$ равен v, а все остальные имеют нуль бесконечного порядка. Из (ii) и тождества $\partial v/\partial \bar{\mu} \equiv 0$ вытекает, что LF имеет нуль бесконечного порядка на множестве $\{\operatorname{Im} z = 0\}$ и что справедливо равенство $v \mid \{\operatorname{Im} z = 0\} = f$.

Вычислять LF в общем случае можно почленно:

$$LF = \overline{P'}\left(\frac{1}{\overline{P'}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}}\right) F =$$

$$= -\overline{P'} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\overline{P'}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{j+1} \cdot v \cdot \frac{\bar{\mu}^j}{j!} [\varphi(\mu t_j) - \varphi(\mu t_{j+1})] +$$

$$+ \overline{P'} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\overline{P'}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^j \cdot v \cdot \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \cdot t_j \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mu}}(\mu t_j).$$

Заметим теперь, что функция φ локально постоянна в окрестности множества $\{\mu = 0\}$, поэтому все члены ряда локально обращаются в нуль и, значит, LF имеет нуль бесконечного порядка там, где $\mu = 0$. Доказательство специальной леммы деления окончено. ∎

5.12. Упражнение. Пусть A — замкнутое подмножество в $\mathbf{R}^n$ и f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — отображение, обладающее следующими свойствами:

(i) $f \mid A = 0$,

(ii) отображение $f \mid (\mathbf{R}^n - A)$ дифференцируемо,

(iii) если a — граничная точка A, то

$$\lim_{x \to a,\ x \notin A} D^{\alpha} f(x) = 0$$

при любом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Докажите, что f дифференцируемо.

6. ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Литература: та же, что к гл. 5.

6.1. Определение. Дифференцируемый росток $\tilde{f}: (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}: (t, x)\mapsto \tilde{f}(t, x)$ называется *p-регулярным относительно координаты* t, если $\tilde{f}\,|\,\mathbb{R}\times\{0\}\in\mathfrak{m}(1)^p$ и $\notin\mathfrak{m}(1)^{p+1}$. Другими словами,

$$\tilde{f}(0, 0)=\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(0, 0)=\ldots=\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}}\tilde{f}(0, 0)=0,$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}\tilde{f}(0, 0)\neq 0.$$

В терминах струи ростка $\tilde{f}$ это условие означает, что $\tilde{f}(t, 0)=at^p+$ (члены более высокого порядка), $a\neq 0$.

6.2. Замечание. *Если $\tilde{f}\in\mathscr{E}(n+1)$ и $\hat{f}=j(\tilde{f})\neq 0$, то существуют линейный автоморфизм h пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ и целое число p, такие, что росток $\tilde{f}\circ\tilde{h}$ p-регулярен. В качестве p можно выбрать число, определяемое условиями $\tilde{f}\in\mathfrak{m}(n+1)^p$, $\tilde{f}\notin\mathfrak{m}(n+1)^{p+1}$, причем такое p — наименьшее из возможных.*

Доказательство. Имеем $\hat{f}=\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})+\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$, где $\varphi\neq 0$ — однородный многочлен степени p и $\psi\in\hat{\mathfrak{m}}(n+1)^{p+1}$. Выберем такое $a=(a_1, \ldots, a_{n+1})\neq 0$, что $\varphi(a)\neq 0$. Возьмем линейный автоморфизм h: $\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющий условию $h(1, 0, \ldots, 0)=a$. Тогда

$$\hat{f}\circ\hat{h}(t, 0, \ldots, 0)=\hat{f}(ta_1, \ldots, ta_{n+1})=$$
$$=t^p\cdot\underbrace{\varphi(a_1, \ldots, a_{n+1})}_{\neq 0}+\underbrace{\psi(ta).}_{\in\mathfrak{m}(1)^{p+1}}\ \blacksquare$$

Теперь мы обратимся к утверждению, сформулированному в предыдущей главе.

6.3. Теорема деления (Мальгранж). *Пусть* $\tilde{f}\colon (\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n, 0)\to\mathbf{R}$ — *росток, р-регулярный относительно первой координаты; тогда существуют такие ростки* $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_p\in\mathfrak{m}(n)$ *и такой обратимый элемент* $\tilde{Q}\in\mathscr{E}(n+1)$, *что*

$$\tilde{f}=\tilde{Q}\cdot\tilde{P}_u, \qquad \text{где} \quad \tilde{P}_u(t, x)=t^p+\sum_{j=1}^{p}\tilde{u}_j(x)t^{p-j}.$$

Как было замечено раньше, это означает, что с точностью до умножения на обратимый элемент всякий росток из $\mathscr{E}(n+1)$, имеющий ненулевую струю, в подходящей системе координат превращается в отмеченный многочлен с коэффициентами из $\mathscr{E}(n)$. Здесь $\mathscr{E}(n)\subset\mathscr{E}(n+1)$ — подкольцо ростков, не зависящих от первой координаты.

6.4. Следствие (обобщенная лемма деления). *Пусть* $\tilde{f}, \tilde{g}\in\mathscr{E}(n+1)$, *причем* $\tilde{f}$ *р-регулярен. Тогда существуют обратимый элемент* $\tilde{Q}\in\mathscr{E}(n+1)$ *и ростки* $\tilde{h}_j\in\mathscr{E}(n)$, $j=1, \ldots, p$, *такие, что*

$$\tilde{g}=\tilde{Q}\cdot\tilde{f}+\tilde{R}_h, \qquad \text{где} \quad \tilde{R}_h(t, x)=\sum_{j=1}^{p}\tilde{h}_j(x)t^{p-j}.$$

Итак, вместо того, чтобы делить на многочлен, можно делить на произвольный p-регулярный росток таким образом, чтобы получать в остатке многочлен степени $<p$ с коэффициентами из $\mathscr{E}(n)$.

Доказательство следствия. По теореме деления $\tilde{f}=\tilde{Q}_1\cdot\tilde{P}_u$, где $\tilde{Q}_1\in\mathscr{E}(n+1)$ — некоторый обратимый элемент и $P_u\in\mathscr{E}(n)[t]$ — некоторый отмеченный многочлен. По специальной лемме деления

$$\tilde{g}=\tilde{Q}_2\cdot\tilde{P}_u+\tilde{R}_h, \qquad \text{где} \quad \tilde{R}_h(t, x)=\sum_{j=1}^{p}\tilde{h}_j(x)t^{p-j}$$

(мы положили в специальной лемме деления $\lambda_j = \tilde{u}_j(x)$). Следовательно,

$$\tilde{g} = (\tilde{Q}_2/\tilde{Q}_1) \cdot \bar{f} + \tilde{R}_h. \blacksquare$$

Доказательство теоремы деления. Рассмотрим снова коэффициенты $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$ «общего» многочлена как независимые переменные. По специальной лемме деления (деление с остатком), получаем

$$\bar{f}(t, x) = \tilde{Q}_1(t, x, \lambda) \cdot \tilde{P}(t, \lambda) + \tilde{R}(t, x, \lambda), \tag{1}$$

$$\tilde{P}(t, \lambda) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j t^{p-j}, \quad \text{где} \quad \lambda_0 = 1,$$

$$\tilde{R}(t, x, \lambda) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{h}_j(x, \lambda) t^{p-j}.$$

Задача теперь состоит в том, чтобы подставить вместо λ_j специально подобранные ростки $\tilde{u}_j(x)$, так чтобы ростки $\tilde{h}_j(x, \tilde{u}_j(x)) \in \mathscr{E}(n)$ стали нулевыми. Заметим, что росток f p-регулярен относительно t. Из этого вытекает, что

$$\tilde{Q}_1(0, 0, 0) \neq 0, \qquad \tilde{h}_j(0, 0) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial \lambda_i}(0, 0) = 0 \quad \text{при} \quad i < j, \tag{3}$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial \lambda_j}(0, 0) \neq 0. \tag{4}$$

Доказательство. (2) Подставим в (1) $x = \lambda = 0$; получим

$$\bar{f}(t, 0) = \tilde{Q}(t, 0, 0) \cdot t^p + \sum_{j=1}^{p} \tilde{h}_j(0, 0) t^{p-j}.$$

Поскольку эта функция имеет нуль в точности порядка p, из этого равенства следует (2).

(3) и (4). Продифференцируем (1) по λ_i при $x = \lambda = 0$. Получим

$$0 = t^{p-i} \cdot \tilde{Q}_1(t, 0, 0) + t^p \cdot \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \lambda_i}(t, 0, 0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \tilde{h}_j}{\partial \lambda_i}(0, 0) t^{p-j}.$$

По модулю членов порядка p это равенство принимает вид

$$0 = t^{p-i} \cdot q(t) + \sum_{l=1}^{p} h_{jl} t^{p-l}, \tag{5}$$

где $q(0) \neq 0$ согласно (2). Мы получили уравнение, связывающее ростки от одной переменной t и рассматриваемое в $\mathscr{E}(1)/\mathfrak{m}(1)^p \cong \mathbf{R}[t]/(t^p)$.

Случай $i < j$. Рассмотрим последнее уравнение по модулю t^{p-i} для фиксированного i. Получим

$$0 = \sum_{l=i+1}^{p} h_{jl} t^{p-l}, \qquad \text{т. е.} \quad h_{jl} = \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_l}(0, 0) = 0.$$

Случай $i = j$. Уравнение (5) по модулю t^{p-i+1} превращается в уравнение

$$0 = t^{p-i} \cdot q(0) + h_{ii} t^{p-i},$$

откуда $h_{ii} \neq 0$.

Приступим теперь к доказательству теоремы деления. Уравнение (2) показывает, что росток $Q_1 \in \mathscr{E}(n+1)$ обратим. Далее, матрица $(h_{jl}) = (\partial h_j/\partial \lambda_l(0, 0))$ имеет треугольный вид с ненулевыми элементами на диагонали. Следовательно, уравнение $\tilde{h}(x, \lambda) = 0$ можно разрешить относительно λ_j, где мы использовали обозначение

$$\tilde{h}\colon (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, 0) \to \mathbf{R}^p,$$
$$(x, \lambda) \mapsto (\tilde{h}_1(x, \lambda), \ldots, \tilde{h}_p(x, \lambda)).$$

Это означает, что существует такой росток

$$\tilde{u} = (u_1, \ldots, u_p)\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0),$$

что $\tilde{h}(x, \tilde{u}(x)) = 0$. Действительно, по теореме об обратной функции росток

$$\varphi\colon (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, 0) \to (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, 0),$$
$$(x, \lambda) \mapsto (x, h(x, \lambda))$$

обратим, так как его матрица Якоби в начале координат имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & ? & & h_{jl} \end{array}\right],$$

а u является композицией

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{R}^n, 0) = (\mathbf{R}^n \times \{0\}, 0) \subset (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, 0) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\ \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{R}^n, 0) \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "u"'] & (\mathbf{R}^n \times \{0\}, 0) \arrow[r, phantom, "\subset"] & (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, 0) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
(\mathbf{R}^p, 0) & & (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, 0) \arrow[ll, "\mathrm{proj}_2"]
\end{tikzcd}$$

Если подставить $\tilde{u}$ вместо λ в (1), то из равенств (2) и $\tilde{h}(x, \tilde{u}(x)) = 0$ вытекает теорема деления. ∎

Из теоремы деления выводится один из основных результатов этой книги:

6.5. Подготовительная теорема Мальгранжа (в форме Дж. Мезера). *Пусть f: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ — дифференцируемый росток, индуцирующий гомоморфизм колец f^*: $\mathscr{E}(p) \to \mathscr{E}(n)$. Пусть A — конечно порожденный $\mathscr{E}(n)$-модуль. Тогда A является конечно порожденным $\mathscr{E}(p)$-модулем ($\mathscr{E}(p)$ действует на A с помощью f^*) в том и только том случае, когда вещественное векторное пространство $A/(f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A)$ конечномерно.*

Доказательство. Заметим, что в наших обозначениях $(f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A)$ не отличается от $\mathfrak{m}(p) \cdot A$, так как $\mathscr{E}(p)$ действует на A с помощью f^*.

Доказательство теоремы в одну сторону тривиально: если A конечно порожден над $\mathscr{E}(p)$, то существует эпиморфизм $\mathscr{E}(p)$-модулей

$$\bigoplus_{j=1}^{k} \mathscr{E}(p) = \underbrace{\mathscr{E}(p) \oplus \ldots \oplus \mathscr{E}(p)}_{k \text{ слагаемых}} \to A$$

и, следовательно, существует эпиморфизм тех же модулей, профакторизованных по действию $\mathfrak{m}(p)$:

$$\mathbf{R}^k = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathscr{E}(p)/\mathfrak{m}(p) \to A/(f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A).$$

Другими словами, образующие A над $\mathscr{E}(p)$ одновременно являются и образующими факторпространства $A/(f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A)$ над $\mathscr{E}(p)/\mathfrak{m}(p) = \mathbf{R}$ [1].

Обратное утверждение весьма нетривиально и составляет, в сущности, содержание теоремы. Однако мы уже проделали трудную часть работы, и сделать оставшиеся три шага — чистое удовольствие.

Шаг 1. Пусть $n = p + 1$ и

$$\tilde{f}\colon (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0),$$
$$(t, x) \mapsto x$$

— росток проекции на второй сомножитель (частный случай). Выберем конечное число элементов $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k \in A$, порождающих как A над $\mathscr{E}(p+1)$, так и $A/(f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A)$ над $\mathbf{R}$. Тогда всякий элемент $a \in A$ может быть записан в виде

$$a = \sum_{j=1}^{k} c_j a_j + \sum_{j=1}^{k} z_j a_j, \quad \text{где } c_j \in \mathbf{R},\ z_j \in f^*\mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(p+1).$$

Действительно, $a = \sum c_j a_j + b$, где $b \in (f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A)$. В свою очередь $b = \sum y_i b_i$, где $y_i \in f^*\mathfrak{m}(p)$. Так как $b_i = \sum r_{ij} a_j$, где $r_{ij} \in \mathscr{E}(p+1)$, то мы можем положить $z_j = \sum y_i r_{ij}$.

В частности, представляя в таком виде $a = ta_i$, получаем

$$ta_i = \sum_{j=1}^{k} (c_{ij} + z_{ij}) a_j,$$

где

$$c_{ij} \in \mathbf{R}, \qquad z_{ij} \in f^*\mathfrak{m}(d) \cdot \mathscr{E}(p+1).$$

[1] Здесь и ниже авторы часто пишут, что элементы $a_1, \ldots, a_n$ некоторого модуля A порождают фактормодуль A/B, понимая под этим что смежные классы $a_1 + B, \ldots, a_n + B$ порождают A/B. — *Прим. перев.*

Обозначим через (δ_{ij}) единичную матрицу и перепишем эти уравнения в виде

$$(t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij}) \cdot \mathrm{a} = 0, \qquad \text{где} \quad \mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_k).$$

Положим $b_{ij} = t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij}$. В линейной алгебре доказывается существование такой матрицы (B_{ij}), что

$$(B_{ij}) \cdot (b_{ij}) = \det (b_{ij}) \cdot (\delta_{ij}).$$

(В качестве (B_{ij}) нужно взять транспонированную матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы (b_{ij}).) Положим $\Delta(t, x) = \det(t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij})$. Тогда $\Delta \cdot \mathrm{a} = 0$. Определитель Δ есть функция от $(t, x) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^p$; при $x = 0$ он превращается в многочлен от t со старшим коэффициентом ± 1. (Так как $z_{ij}(t, 0) = 0$, то при $x = 0$ это есть характеристический многочлен числовой матрицы (c_{ij}).) Отсюда получаем, что Δ q-регулярен относительно t в точке $(t, 0)$ при некотором $q \leqslant k$.

Равенство $\Delta\mathrm{a} = 0$ означает, что $\Delta A = 0$, и потому A есть модуль над $\mathscr{E}(p+1)/\Delta \cdot \mathscr{E}(p+1)$. Поскольку функция Δ q-регулярна, из обобщенной леммы деления следует, что $\mathscr{E}(p)$-модуль $\mathscr{E}(p+1)/\Delta \cdot \mathscr{E}(p+1)$ порожден конечным числом элементов, а именно элементами $1, t, \ldots, t^{q-1}$. Далее, так как модуль A конечно порожден над кольцом $\mathscr{E}(p+1)/\Delta \cdot \mathscr{E}(p+1)$, которое в свою очередь является конечно порожденным $\mathscr{E}(p)$-модулем, то модуль A конечно порожден над $\mathscr{E}(p)$.

Шаг 2. Пусть $\tilde{f}$: $(\mathrm{R}^n, 0) \to (\mathrm{R}^p, 0)$ — росток ранга n. По теореме о ранге, существуют координаты, в которых $\tilde{f}$ задается формулой $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$. Для канонического вложения $\mathrm{R}^n \subset \mathrm{R}^p$ всякий дифференцируемый росток $\tilde{\varphi}$: $(\mathrm{R}^n, 0) \to \mathrm{R}$ может быть продолжен на $(\mathrm{R}^p, 0)$. Поэтому отображение f^*: $\mathscr{E}(p) \to \mathscr{E}(n)$ в этом случае сюръективно. Отсюда вытекает, что если конечное число образующих порождает модуль A над $\mathscr{E}(n)$, то эти же образующие порождают модуль A над $\mathscr{E}(p)$.

Представим теперь произвольный росток $\bar{f}\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ как композицию

$$(\mathbf{R}^n, 0) \xrightarrow{(\mathrm{id}, \bar{f})} (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, 0) \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} (\mathbf{R}^p, 0).$$

Первый росток является иммерсией, а второй разлагается в композицию n проекций, подобных исследованной нами на шаге 1. Обозначим через $M(\bar{f})$ следующее свойство ростка $\bar{f}$:

векторное пространство $A/(f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A)$ конечномерно $\Rightarrow$ модуль A конечно порожден над $\mathscr{E}(p)$.

Тогда нам остается доказать следующее утверждение:

Шаг 3. Если заданы дифференцируемые ростки

$$(\mathbf{R}^n, 0) \xrightarrow{\bar{f}} (\mathbf{R}^p, 0) \xrightarrow{\bar{g}} (\mathbf{R}^q, 0),$$

то из $M(\bar{f})$ и $M(\bar{g})$ следует $M(\bar{g} \circ \bar{f})$. Итак, предположим, что A — конечно порожденный $\mathscr{E}(n)$-модуль и пространство

$$A/(\bar{g} \circ \bar{f})^* \mathfrak{m}(q) \cdot A = A/f^*(g^*\mathfrak{m}(q)) \cdot A$$

конечномерно над $\mathbf{R}$. Так как $g^*\mathfrak{m}(q) \subset \mathfrak{m}(p)$, то $f^*g^*\mathfrak{m}(q) \subset f^*\mathfrak{m}(p)$ и, следовательно, линейное пространство $A/f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A$ конечномерно. Из $M(\bar{f})$ вытекает, что модуль A, рассматриваемый как $\mathscr{E}(p)$-модуль с помощью отображения f^*, конечно порожден.

Далее, по определению, $A/g^*\mathfrak{m}(q) \cdot A = A/f^*g^*\mathfrak{m}(q) \cdot A$ и это пространство имеет конечную размерность. Из $M(\bar{g})$ следует, что $\mathscr{E}(p)$-модуль A, рассматриваемый как $\mathscr{E}(q)$-модуль с помощью отображения g^*, конечно порожден. Но это и означает, что $\mathscr{E}(n)$-модуль A, рассматриваемый как $\mathscr{E}(q)$-модуль с помощью отображения $(\bar{g} \circ \bar{f})^*$, конечно порожден. ∎

Подготовительная теорема полностью доказана. Полученный результат можно слегка усилить.

6.6. Следствие подготовительной теоремы. *В предположениях подготовительной теоремы элементы $\{a_1, \ldots, a_k\}$ порождают A как $\mathscr{E}(p)$-модуль в том и только* *том случае, когда их классы смежности порождают векторное пространство $A/(f^*\mathfrak{m}(p)\cdot A)$.*

Доказательство. Как мы заметили выше, в одном направлении доказательство тривиально. Пусть классы элементов $a_1, \ldots, a_k \in A$ порождают векторное пространство $A/(f^*\mathfrak{m}(p)\cdot A)$. Тогда из подготовительной теоремы вытекает, что модуль A конечно порожден над $\mathscr{E}(p)$. Далее,

$$A = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle_{\mathscr{E}(p)} + \mathfrak{m}(p)\cdot A,$$

где первое слагаемое в правой части — это подмодуль $\mathscr{E}(p)$-модуля A, порожденный элементами $a_1, \ldots, a_k$. Таким образом, применима лемма Накаямы, и, значит, $A = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle_{\mathscr{E}(p)}$. ∎

Особенно важен частный случай $A = \mathscr{E}(n)$.

6.7. Подготовительная теорема (в форме Мальгранжа). *Пусть $f\colon (\mathbf{R}^n, 0)\to(\mathbf{R}^p, 0)$ — дифференцируемый росток, индуцирующий гомоморфизмы колец $f^*\colon \mathscr{E}(p)\to\mathscr{E}(n)$ и $\hat{f}^*\colon \hat{\mathscr{E}}(p)\to\hat{\mathscr{E}}(n)$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathscr{E}(n)$ *порождают* $\mathscr{E}(n)$ *как* $\mathscr{E}(p)$-*модуль,*

(ii) $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k \in \hat{\mathscr{E}}(n)$ *порождают* $\hat{\mathscr{E}}(n)$ *как* $\hat{\mathscr{E}}(p)$-*модуль,*

(iii) $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *порождают вещественное векторное пространство* $\mathscr{E}(n)/f^*\mathfrak{m}(p)\cdot\mathscr{E}(n)$,

(iv) $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k$ *порождают вещественное векторное пространство* $\hat{\mathscr{E}}(n)/\hat{f}^*\hat{\mathfrak{m}}(p)\cdot\hat{\mathscr{E}}(n)$.

(Как обычно, структура $\mathscr{E}(p)$-модуля в $\mathscr{E}(n)$ вводится с помощью гомоморфизма f^*, а структура $\hat{\mathscr{E}}(p)$-модуля в $\hat{\mathscr{E}}(n)$ — с помощью гомоморфизма $\hat{f}^*$.)

Доказательство. Эквивалентность (i) и (iii) вытекает из подготовительной теоремы в расширенной форме, если положить $\mathscr{E}(n) = A$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Из равенства

$$\varphi_1\cdot\mathbf{R} + \ldots + \varphi_k\cdot\mathbf{R} + f^*\mathfrak{m}(p)\cdot\mathscr{E}(n) = \mathscr{E}(n),$$

используя отображение j: $\mathscr{E}(n) \to \hat{\mathscr{E}}(n)$, получаем

$$\hat{\varphi}_1 \cdot \mathbf{R} + \ldots + \hat{\varphi}_k \cdot \mathbf{R} + f^*\hat{\mathfrak{m}}(p) \cdot \hat{\mathscr{E}}(n) = \hat{\mathscr{E}}(n).$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Из (iv) следует, что пространство $\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(n) + \mathfrak{m}(n)^\infty)$ конечномерно. Поэтому при некотором k подпространства $\mathfrak{m}(n)^k/(\ldots) \supset \mathfrak{m}(n)^{k+1}/(\ldots)$ этого конечномерного пространства совпадают (здесь через $(\ldots)$ обозначен подмодуль $(\mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(n) + \mathfrak{m}(n)^\infty)$). Лемма Накаямы, примененная к конечно порожденному $\mathscr{E}(n)$-модулю (см. 4.5) $\mathfrak{m}(n)^k/(\ldots)$, показывает, что этот модуль нулевой. Это означает, что

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(n) + \mathfrak{m}(n)^\infty \subset \mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(n) + \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

По лемме Накаямы, $\mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(n)$, значит, пространство $\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(n)$ совпадает с пространством $\mathscr{E}(n)/(\mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(n) + \mathfrak{m}(n)^k)$.

Последнее пространство есть образ пространства $\mathscr{E}(n)/(\mathfrak{m}(p)\mathscr{E}(n) + \mathfrak{m}(n)^\infty)$ при естественной проекции и, следовательно, порождено над $\mathbf{R}$ элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) - тривиально получается после перехода к струям.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) доказывается так же, как соответствующая часть дифференцируемой подготовительной теоремы. ∎

Равносильность утверждений (ii) и (iv) — это формальная подготовительная теорема, которая получается в качестве побочного результата при доказательстве вещественного случая. Однако, как и в случае формальной теоремы об обратной функции из гл. 4 ($D\hat{f}(0)$ обратим $\Leftrightarrow \hat{f}$ обратим), этот результат можно доказать гораздо более простым путем, причем в гораздо более общей ситуации.

Идеал $\mathfrak{m}(p)$ порожден ростками координатных функций на $\mathbf{R}^p$, а именно ростками $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_p$. Следовательно, если $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p)$, то $f^*\tilde{y}_l = \tilde{y}_l \circ \tilde{f} = \tilde{f}_l$ и, значит,

$$\mathscr{E}(n) \cdot \mathfrak{m}(p) = \langle \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p \rangle_{\mathscr{E}(n)},$$

где в правой части стоит идеал в кольце $\mathscr{E}(n)$, порожденный компонентами $\tilde{f}$.

6.8. Определение. Дифференцируемый росток $\tilde{f}: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ называется *конечным*, если пространство $\mathscr{E}(n)/\tilde{f}^*\mathfrak{m}(p) \cdot \mathscr{E}(n)$ конечномерно.

6.9. Упражнение. Докажите, что у конечного ростка $\tilde{f}: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ найдется такой представитель f, что полный прообраз каждой точки $\mathbf{R}^p$ при отображении f состоит не более чем из конечного числа точек. *Указание*: сначала покажите, что конечно множество $f^{-1}(0)$. Затем используйте тот факт, что росток, «близкий» к $\tilde{f}$, также конечен (см. гл. 13).

6.10. Из подготовительной теоремы в форме Мальгранжа легко вывести обобщенную лемму деления. Пусть росток $E(t, x_1, \ldots, x_n)$ p-регулярен относительно t. Рассмотрим росток $\tilde{f}(t, x_1, \ldots, x_n) = (\tilde{F}(t, x), x_1, \ldots, x_n)$. Из p-регулярности F следует, что

$$\langle F, x_1, \ldots, x_n \rangle_{\mathscr{E}(n+1)} = \langle t^p, x_1, \ldots, x_n \rangle_{\mathscr{E}(n+1)}.$$

Если ввести на $\mathscr{E}(n+1)$ структуру $\mathscr{E}(n+1)$-модуля с помощью отображения f^*, то, согласно подготовительной теореме, полученный модуль будет конечно порожден, а именно ростками $1, t, t^2, \ldots, t^{p-1}$. Таким образом, для любого $g \in \mathscr{E}(n+1)$ имеем

$$\tilde{g}(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{p} \tilde{g}_i(F(t, x), x_1, \ldots, x_n)\, t^{p-i},$$

где $\tilde{g}_i$ — некоторые ростки из $\mathscr{E}(n+1)$. Если мы теперь обозначим $\tilde{g}_i(0, x)$ через $\tilde{h}_i(x)$, то $\tilde{g}_i(\tau, x) - \tilde{h}_i(x) = \tau \cdot \tilde{k}_i(\tau, x)$, и поэтому, заменяя τ на F, получаем

$$\tilde{g}(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{p} \tilde{h}_i(x)\, t^{p-i} + \tilde{F}(t, x) \cdot \tilde{Q}(t, x),$$

где $\tilde{Q}(t, x) = \sum_{i=1}^{p} \tilde{k}_i(F(t, x), x)\, t^{p-i}$.

Для любого $\mathscr{E}(n)$-модуля A легко определить $\hat{\mathscr{E}}(n)$-модуль $\hat{A}$, и тогда можно будет сформулировать теорему типа теоремы Мальгранжа даже в более общей ситуации, рассмотренной Мезером.

6.11. Упражнение. Пусть $\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ — дифференцируемый росток и $\dim(\mathscr{E}(n)/f^*\mathfrak{m}(p)\cdot\mathscr{E}(n))=k$. Докажите, что $\mathscr{E}(p)$-модуль $\mathscr{E}(n)$ порожден мономами степени $< k$ от координат на $\mathbf{R}^n$. (*Указание*: лемма Накаямы.)

7. СИММЕТРИЧЕСКИЕ РОСТКИ

Цель этой главы — продемонстрировать в одном простом случае, как работает подготовительная теорема.

Напомним, что в гл. 5 мы определили элементарные симметрические функции $(-1)^i \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, с помощью формулы

$$\prod_{i=1}^{n}(t - x_i) = \sum_{i=0}^{n} t^i \sigma_{n-i}(x), \qquad \sigma_0 = 1.$$

В частности, $\sum_{i=0}^{n} x_j^i \sigma_{n-i}(x) = 0$, или

$$x_j^n = -\sum_{i=1}^{n} x_j^i \sigma_{n-i}(x).$$

Обозначим через $\sigma\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ отображение, координатными функциями которого являются функции σ_i для $i = 1, \ldots, n$. Из написанного выше равенства следует, что $x_j^n \in \sigma^*\mathfrak{m}(n) \cdot \mathscr{E}(n)$. Следовательно, всякий моном от переменных x_j, хотя бы один показатель которого $\geqslant n$, лежит в $\sigma^*\mathfrak{m}(n) \cdot \mathscr{E}(n)$. Отсюда следует, что для $k \geqslant n^2$

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \sigma^*\mathfrak{m}(n) \cdot \mathscr{E}(n).$$

Поскольку мономы степени $< k$ порождают векторное пространство $\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^k$, из подготовительной теоремы вытекает следующая лемма.

7.1. Лемма. *Мономы степени $\leqslant n^2$ порождают $\mathscr{E}(n)$ как модуль над кольцом ростков вида $\bar{f}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.* ∎

Эта лемма приводит к такому определению и следствию.

7.2. Определение. Росток $\bar{f} \in \mathscr{E}(n)$ называется *симметрическим*, если для любой перестановки π множества $\{1, \ldots, n\}$ справедливо следующее равенство, понимаемое как равенство ростков:

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{f}(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

7.3. **Теорема** (Глезер). *Всякий симметрический росток может быть записан как дифференцируемый росток от элементарных симметрических функций.*

Следовательно, росток $\tilde{f}$ симметричен в том и только том случае, если найдется дифференцируемый росток $\tilde{g} \in \mathscr{E}(n)$, такой, что $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \tilde{\sigma}$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — мономы степени $< n^2$ от координатных функций x_i. Пусть f симметрична. По лемме,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r} \varphi_j(x) \cdot g_j(\sigma(x)).$$

Обозначим через $\mathfrak{S}(n)$ группу перестановок множества $\{1, \ldots, n\}$. Тогда, поскольку f и σ_i симметричны,

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{r} \Bigl(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}(n)} \varphi_j(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) \Bigr) g_j(\sigma(x))$$

и многочлены $p_j(x) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(n)} \varphi_j(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ очевидно являются симметрическими. По основной теореме о симметрических многочленах (Ленг, Алгебра, «Мир», М., 1968, гл. V, § 9), получаем отсюда, что

$$p_j(x) = q_j(\sigma(x))$$

для некоторых (однозначно определенных) многочленов q_j. Следовательно,

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{r} q_j(\sigma(x)) \cdot q_j(\sigma(x)). \blacksquare$$

7.4. Упражнения. 1. Пусть $f \in \mathscr{E}(n)$ и при $1 \leqslant i \leqslant n$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Покажите, что $f(x) = g(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ для некоторого $g \in \mathscr{E}(n)$.

2. Найдите базис кольца многочленов от n переменных, рассматриваемого как модуль над кольцом симметрических многочленов. (См. Artin, Galois theory.)

8. ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ

Литература: H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces I, mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math.*, 62 (1955), 374-410.

Б. Мальгранж, Идеалы дифференцируемых функций, «Мир», М., 1968.

Дж. Милнор, Теория Морса, «Мир», М., 1965.

Р. Нарасимхан, Анализ на действительных и комплексных многообразиях, «Мир», М., 1971.

Обозначим множество дифференцируемых отображений $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ через $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ и введем в этом множестве топологию, задав базу окрестностей $\{U(\varepsilon, k)\}$ нулевого отображения. Для каждого $k \in \mathbf{N}$ и каждой непрерывной строго положительной функции ε: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ определим множество $U(\varepsilon, k)$ следующим образом:

$$f \in U(\varepsilon, k) \Leftrightarrow |D^\alpha f_j(x)| < \varepsilon(x) \text{ при } j = 1, \ldots, p$$
$$\text{для всех } |\alpha| \leqslant k, \ x \in \mathbf{R}^n.$$

Такую топологию можно ввести также и в множестве $C^\infty(M, N)$, где M, N — диференцируемые многообразия, вложив M и N в евклидово пространство. Мы не будем вдаваться в детали (см. книгу Нарасимхана).

Говоря «f близко к g» или «f мало», мы будем иметь в виду только что описанную топологию. Если K — компактное множество в $\mathbf{R}^n$, то множество $C^\infty(K, \mathbf{R}^p)$ наделено фактортопологией, индуцированной из $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ с помощью отображения ограничения $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p) \to C^\infty(K, \mathbf{R}^p)$. Это придает смысл выражению «f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ мало на K».

Теперь мы приступим к изучению следующих понятий.

8.1. Определение. Пусть M, N — дифференцируемые многообразия. Два дифференцируемых отображения f_0, f_1: $M \to N$ называются *C^∞-эквивалентными* (соотв. *топологически эквивалентными*), если существуют диффеоморфизмы (соотв. гомеоморфизмы) h: $M \to M$, k: $N \to N$, такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[d, "k"] \\ M \arrow[r, "f_1"] & N \end{tikzcd}$$

Вопрос об описании всех классов эквивалентности по этому отношению слишком сложен для того, чтобы на него можно было полностью ответить. Например, задача 2 в гл. 3 показывает, что всякое замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$ является множеством особых точек некоторого отображения f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Таким образом, классификация дифференцируемых отображений с точностью до введенного выше отношения эквивалентности является необъятной задачей, более сложной даже, чем задача классификации всех замкнутых подмножеств в $\mathbf{R}^n$.

Вот максимум того, на что мы можем надеяться: описать классы эквивалентности для некоторого открытого и плотного подмножества во множестве дифференцируемых отображений (т.е. описать классы эквивалентности для «почти всех» в топологическом смысле дифференцируемых отображений). Совсем хорошо было бы доказать существование открытого и плотного множества отображений, обладающих следующим свойством.

8.2. Определение. Дифференцируемое отображение f: $M \to N$ называется *C^∞-устойчивым* (соотв. *топологически устойчивым*), если найдется такая окрестность U точки f в $C^\infty(M, N)$, что каждое отображение $f_1 \in U$ C^∞-эквивалентно (соотв. топологически эквивалентно) f.

Устойчивые отображения действительно образуют открытое множество в $C^\infty(M, N)$, но вопрос заключается в том, плотно ли это множество и можно ли классифицировать устойчивые отображения. Последняя часть вопроса является очень глубокой. Мы можем определить отношение эквивалентности на множестве ростков отображений подобно тому, как это было сделано в определении 8.1, и спросить:

Существует ли конечное множество ростков $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, такое, что если отображение $f: M^m \to N^n$ устойчиво, то каждый росток $\bar{f}: (M, x) \to (N, f(x))$, определяемый отображением f, эквивалентен одному из элементов этого конечного множества?

Можно предполагать, что природные геометрические формы описываются устойчивыми отображениями (инвариантны относительно малых возмущений). Следовательно, классификация ростков устойчивых отображений есть в то же время локальная классификация природных геометрических форм.

Первый результат в этом направлении дается теорией Морса. Почти всякая дифференцируемая функция $f: M \to \mathbf{R}$ устойчива, и каждый росток устойчивой функции эквивалентен ростку одного из следующих типов:

A) $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1$ (регулярная точка),

B) $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \ldots + x_k^2 - (x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2)$ (критическая точка индекса $n - k$).

Это легко получить из результатов книги Милнора «Теория Морса».

Следующий результат был впервые доказан Уитни и описывает дифференцируемые отображения $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

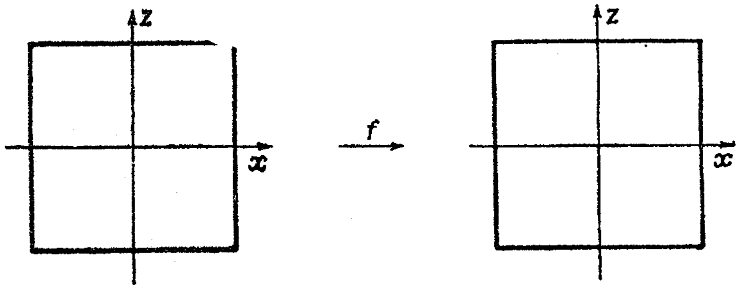
Из этого описания, в частности, получается, что есть только три класса эквивалентности устойчивых ростков отображений $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Представьте себе смятый кусок эластичной материи, прилегающий к ровной поверхности. Картина, которая у вас при этом возникла, и есть типичный образ устойчивого отображения плоскости в плоскость. Как выглядит такое отображение локально (в подходящих системах координат)?

8.3. Могут представиться три возможности:

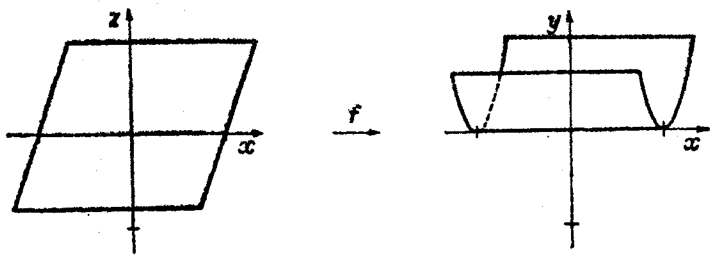
(i) Окрестность точки $x \in \mathbb{R}^2$ отображается регулярно.
(ii) Точка x лежит на складке.
(iii) Точка x лежит там, где складка начинается или кончается.

В каждом из этих случаев легко привести соответствующий аналитический пример:

(i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, z) \mapsto (x, z)$ — *регулярная точка.*

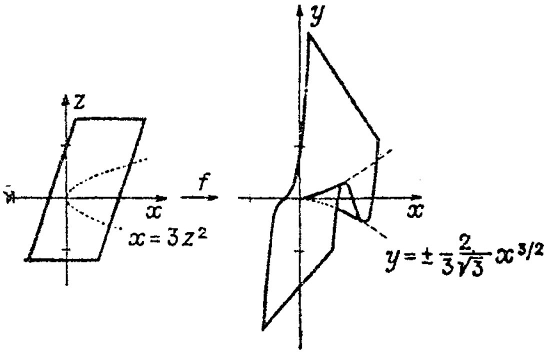


(ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, z) \mapsto (x, z^2) = (x, y)$ — *складка.*



(iii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, z) \mapsto (x, z^3 - xz) = (x, y)$ — *сборка.*

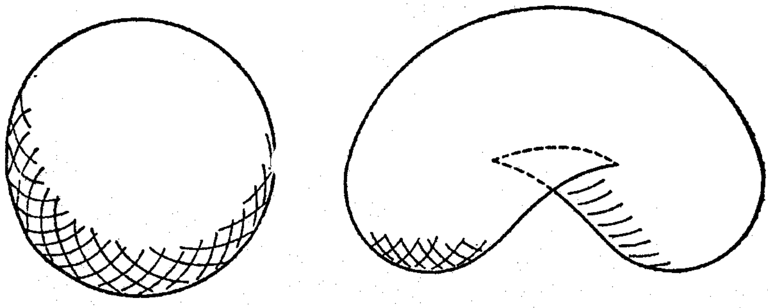
Вторая координата $y = z^3 - xz$ при фиксированном x является многочленом третьей степени с производной $\partial y/\partial z = 3z^2 - x$. Точки экстремума этого многочлена задаются уравнением $x = 3z^2$, а сами экстремальные значения равны $y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{3/2}$. Это приводит к следующей картине:



Мы хотим доказать такой результат:

8.4. Теорема (Х. Уитни). *Существует открытое и плотное подмножество* $T \subset C^\infty(\mathrm{R}^2, \mathrm{R}^2)$, *такое, что для* $x \in \mathrm{R}^2$ *и* $f \in T$ *росток* $\tilde{f}\colon (\mathrm{R}^2, x) \to (\mathrm{R}^2, f(x))$ *дифференцируемо эквивалентен одному из трех ростков* (i), (ii) *или* (iii).

На самом деле отображения из T, удовлетворяющие некоторым слабым дополнительным глобальным условиям, устойчивы. Эти дополнительные условия таковы: (1) образы складок (являющиеся дифференцируемыми кривыми в R^2) должны пересекаться трансверсально (т. е. иметь линейно независимые касательные); (2) в каждой точке должно пересекаться не более двух образов складок, и (3) две точки сборки или точка сборки и точка складки не должны иметь один и тот же образ. Эта теорема легко обобщается на отображения одной поверхности в другую (см. рисунок).



Доказательству этой теоремы и будет посвящена оставшаяся часть главы.

8.5. Лемма. *Пусть* $X = Y = \mathbf{R}^2$, $X = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbf{R}\}$, $Y = \{(y_1, y_2) \mid y_j \in \mathbf{R}\}$, *и пусть* $f = (f_1, f_2)\colon X \to Y$ — *дифференцируемое отображение. Тогда в каждой окрестности отображения* f *существует дифференцируемое отображение* $g = (g_1, g_2)$, *такое, что* $\operatorname{Rk}_x g = \operatorname{Rk}(\partial g_i/\partial x_j)(x) \neq 0$.

Доказательство. Фиксируем некоторую окрестность отображения f. Рассмотрим отображение

$$(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1,2}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4.$$

Это отображение дифференцируемо, н по теореме Сарда (тривиальный случай) его образ имеет меру нуль. Сколь угодно близко к точке $0 \in \mathbf{R}^4$ найдется точка $\lambda = (\lambda_{ij})$, не принадлежащая образу этого отображения. Следовательно, матрица Якоби отображения

$$\bar{g}_i(x_1, x_2) = f_i(x_1, x_2) - \lambda_{i1}x_1 - \lambda_{i2}x_2$$

нигде не обращается в нуль.

Обозначим через $K(0, n)$ круг в $\mathbf{R}^2$ радиуса n с центром в начале координат. Построим теперь дифференцируемую функцию $\varphi_n\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, такую, что $\varphi_n \mid K(0, n) = 1$ и $\varphi_n \mid \mathbf{R}^2 - K(0, n+1) = 0$. Положим

$$g^1 = \varphi_1 \bar{g} + (1 - \varphi_1) f.$$

Тогда g^1 близко к f при малых λ и удовлетворяет условию $(\partial g_1^1/\partial x_1) \neq 0$ на $K(0, 1)$ для почти всех λ. Построим отображение g^n индуктивно, полагая
$g^n = (\varphi_n - \varphi_{n-2})\tilde{g} + (1 - (\varphi_n - \varphi_{n-2}))\, g^{n-1}$, где $\varphi_{-1} = 0$.
Из этой формулы видно, что g^n и g^{n-1} отличаются только на множестве $K(0, n+1) - K(0, n-2)$. Отображение $\tilde{g}$ выбирается так же, как выше, причем λ берется столь малым, чтобы g^n было достаточно близко к g^{n-1}, а именно, чтобы были выполнены следующие два условия:

(1) g^n лежит в предписанной окрестности отображения f;

(2) матрица Якоби g^n не обращается в нуль на $K(0, n-1)$ (матрица Якоби g^{n-1} не обращается в нуль на $K(0, n-1)$ и, следовательно, тем же свойством обладает всякое близкое к g^{n-1} отображение; заметьте, что $g^n = \tilde{g}$ на $K(0, n) - K(0, n-1)$).

Положим $g = \lim\limits_{n\to\infty} g^n$. В окрестности всякой точки отображения g и g^n локально совпадают при всех достаточно больших n. Следовательно, отображение g дифференцируемо и его матрица Якоби ни в одной точке не равна нулю. Кроме того, g лежит в заданной окрестности отображения f. ∎

8.6. Характерные особенности этой конструкции, которая постоянно встречается в дифференциальной топологии, таковы:

(1) свойство, которое мы желаем получить (в данном случае: $\mathrm{Rk}_x g \neq 0$ всюду), выполняется на открытом множестве отображений;

(2) каждое отображение *локально* может быть *аппроксимировано* отображением, обладающим этим свойством.

Без ограничения общности можно считать, что для ростка g: $(\mathbf{R}^2, 0) \to (\mathbf{R}^2, 0)$ с ненулевой матрицей Якоби выполнено неравенство $\partial g_1/\partial x_1(0) \neq 0$. Сделав замену $(x_1, x_2) \mapsto (g_1(x), x_2)$ в области определения g, мы приведем росток g к виду $(x, z) \mapsto (x, \varphi(x, z))$.

Предыдущая лемма показывает, что почти всякое отображение имеет только что описанный вид в подходящей системе координат. Кроме того, если отображение имеет такой вид в некоторой компактной окрестности, то всякое близкое отображение может быть приведено к такому виду в этой окрестности.

Другие изменения ростка, нужные для того, чтобы получить основную теорему, нам удастся сделать, изменяя лишь определенную выше функцию φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Мы будем работать с отображениями $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и по образцу леммы 8.5 докажем такое утверждение:

8.7. Лемма. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^2 = \{(x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ — *открытое множество. Пусть* $f: U \to \mathbb{R}$ — *дифференцируемая функция и* K — *компактное подмножество в* U. *Тогда существуют сколь угодно близкие к* f *на* K *функции* $g: U \to \mathbb{R}$, *такие, что в любой точке* $a \in U$

(i) *либо* $\partial g/\partial z(a) \neq 0$,

(ii) *либо* $\partial g/\partial z(a) = 0$, *но* $\partial^2 g/\partial z^2(a) \neq 0$;

(iii) *либо* $\partial g/\partial z(a) = 0, \partial^2 g/\partial z^2(a) = 0$, *но* $\partial^2 g/\partial x\, \partial z(a) \neq 0$ *и* $\partial^3 g/\partial z^3(a) \neq 0$.

Доказательство. Положим

$$g(x, z) = f(x, z) + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 xz + \lambda_4 z^3.$$

Требуется показать, что найдется достаточно малое $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$, для которого всюду будет выполнено одно из условий (i), (ii), (iii). Имеем

$$\partial g/\partial z = (\partial f/\partial z) + \lambda_1 + 2\lambda_2 z + \lambda_3 x + 3\lambda_4 z^2,$$
$$\partial^2 g/\partial z^2 = (\partial^2 f/\partial z^2) + 2\lambda_2 + 6\lambda_4 z,$$
$$\partial^2 g/\partial x \partial z = (\partial^2 f/\partial x \partial z) + \lambda_3,$$
$$\partial^3 g/\partial z^3 = (\partial^3 f/\partial z^3) + 6\lambda_4.$$

Отсюда следует, что если $\partial g/\partial z(a) = \partial^2 g/\partial z^2(a) = 0$, то

$$\partial^2 g/\partial x \partial z(a) = 0 \Leftrightarrow A(a) \cdot \lambda = b(a),$$

где

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 2z & x & 3z^2 \\ 0 & 2 & 0 & 6z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad b(a) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right).$$

Аналогичное условие имеется и для равенства $\partial^3 g/\partial z^3(a)=0$, отличающееся только видом матрицы. В этом случае

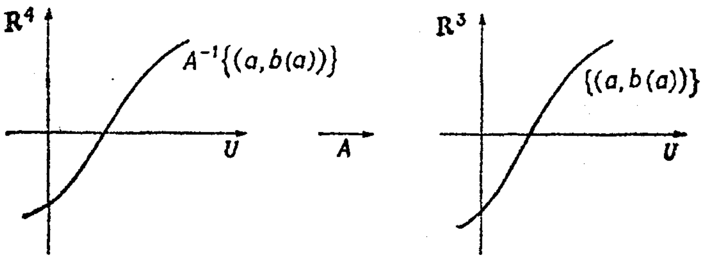
$$\bar{A}(a)=\begin{bmatrix}1 & 2z & x & 3z\\ 0 & 2 & 0 & 6z\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Матрицы A и $\bar{A}$ в каждой точке имеют ранг 3, поэтому достаточно показать, что те $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$, для которых $A(a)\cdot\lambda=b(a)$ для некоторого a, образуют множество меры нуль (и что это же верно для матрицы $\bar{A}$).

Матрица A определяет отображение

$$U\times\mathbf{R}^4\to U\times\mathbf{R}^3,$$
$$(a, \lambda)\mapsto(a, A(a)\cdot\lambda).$$

Поскольку A имеет ранг 3, это отображение — субмерсия. Оно имеет всюду ранг 5.



Точки $\{(a, b(a))\,|\,a\in U\}$ образуют в $U\times\mathbf{R}^3$ подмногообразие коразмерности 3. Следовательно, прообраз этого многообразия в $U\times\mathbf{R}^4$ есть подмногообразие коразмерности (а значит, и размерности) 3. Спроектировав это многообразие на $\mathbf{R}^4$, мы получим множество меры нуль, состоящее из тех $\lambda\in\mathbf{R}^4$, которые удовлетворяют условию $A(a)\cdot\lambda=b(a)$ при некотором $a\in U$. ∎

Стандартное рассуждение с использованием локально конечного покрытия дает открытое и плотное множество $T\subset C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$, такое, что каждое отображение из T в каждой точке имеет локальное координатное представление

$$(x, z) \longmapsto (x, f(x, z)),$$

в котором функция f удовлетворяет одному из условий (i), (ii), (iii) леммы 8.7.

Мы только коротко поясним, как это делается. По лемме 8.5, существует открытое и плотное множество отображений $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, для каждого из которых можно найти счетное семейство компактных множеств $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и окрестность U_n каждого множества K_n, обладающие следующими свойствами:

внутренности множеств K_n покрывают $\mathbb{R}^2$,

каждая окрестность U_n имеет компактное замыкание,

семейство $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ локально конечно,

и, если $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)\}$,

для каждого n найдется такая пара (i, j) $(i, j \in \{1, 2\})$, что в любой точке $a \in K_n$ имеем $\partial F_i/\partial x_j(a) \neq 0$.

Теперь мы можем определить на всем K_n отображение $(x_1, x_2) \longmapsto (x_k, F_i)$, которое локально, в каждой точке K_n, является заменой координат. Это отображение переводит первоначальный росток в росток вида $(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, f(x_1, x_2))$.

Заметим, что из последнего условия на K_n следует, что для любого отображения G, достаточно близкого к F, $\partial G_i/\partial x_j(a) \neq 0$ при всех $a \in K_n$. Для таких G существует замена координат, соответствующая аналогичной замене координат для F, приводящая G к виду $(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, g(x_1, x_2))$. Если G близко к F, то g близко к f.

Будем теперь менять исходное отображение индуктивно на каждом U_n таким образом, чтобы после n шагов условия леммы 8.7 выполнялись на множестве $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Предположим, что мы уже сделали n шагов и что полученное отображение F столь мало отличается от исходного отображения, что $\partial F_i/\partial x_j(a)$ по-прежнему отлично от нуля для всех $a \in K_m$ и для всех m, где для каждого m рассматривается соответствующая пара (i, j). Будем теперь менять отображение F на U_{n+1} так, чтобы условия леммы 8.7 выполнялись на K_{n+1} и чтобы были выполнены следующие три условия: (1) отображение остается в предписанной окрестности исходного отображения, 2) условия леммы 8.7 по-прежнему выполняются на множестве $\bigcup_{i=1}^{n} K_n \cap U_{n+1}$, (3) для любого m и подходящей пары (i, j) неравенство $\partial F_i/\partial x_j(a) \neq 0$ выполняется для всех $a \in K_m$.

Поскольку семейство $\{U_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ локально конечно, мы будем менять отображение F в окрестности каждой точки лишь конечное число раз. Следовательно, предел описанных выше отображений существует и является дифференцируемым отображением, которое локально можно привести к виду $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$, где f удовлетворяет условиям леммы 8.7.

Второй шаг доказательства теоремы Уитни — показать, что любое отображение из множества T локально можно привести к одной из трех рассмотренных выше форм: регулярная точка, складка или сборка. Итак, мы рассматриваем росток

$$\tilde{F}\colon (\mathbf{R}^2, 0) \to (\mathbf{R}^2, 0),$$
$$(x, z) \mapsto (x, \tilde{f}(x, z)),$$

где

(i) либо $\partial f/\partial z(0) \neq 0$,

(ii) либо $\partial f/\partial z(0) = 0$ и $\partial^2 f/\partial z^2(0) \neq 0$,

(iii) либо $\partial f/\partial z(0) = \partial^2 f/\partial z^2(0) = 0$ и
$\partial^2 f/\partial x\,\partial z(0) \neq 0, \quad \partial^3 f/\partial z^3(0) \neq 0.$

8.8. Случай (i). Росток $\tilde{F}$ регулярен. Сделав в образе замену координат с помощью F^{-1}, мы превратим F в тождественное отображение.

8.9. Случай (ii). $f(0, z) = z^2 \cdot q(z)$, где $q(0) \neq 0$. В этом случае идеалы $\langle x, f\rangle_{\mathscr{E}(2)}$, $\langle x, z^2\rangle_{\mathscr{E}(2)}$ совпадают и, согласно подготовительной теореме, функции 1, z порождают $\mathscr{E}(2)$ как $\mathscr{E}(2)$-модуль со структурой модуля, определенной с помощью отображения F^*.

В частности, росток z^2 можно записать в виде

$$z^2 = \Phi(x, f(x, z)) + 2\psi(x, f(x, z)) \cdot z,$$

где $\Phi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — некоторые ростки.

Взяв разложение Тейлора до членов второго порядка от обеих частей этого тождества, получим два многочлена второй степени с совпадающими коэффициентами:

$$\Phi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0; \qquad \partial\Phi/\partial y(0) \neq 0;$$
$$\partial\psi(x, f(x, z))/\partial z(0) = \partial\psi/\partial y(0) \cdot \partial f/\partial z(0) = 0.$$

Это означает, что отображения

$$h(x, z) = (x, z - \psi(x, f(x, z))),$$
$$k(x, y) = (x, \Phi(x, y) + \psi^2(x, y))$$

являются заменами координат. Таким образом, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (x, z) & \xrightarrow{h} & (x, z - \psi(x, f(x, z))) \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}^2)} \\ (x, f(x, z)) & \xrightarrow{k} & (x, \Phi(x, f(x, z)) + \psi^2(x, f(x, z))) \end{array}$$

поскольку $z^2 + \psi^2 - 2\psi z = \Phi + 2\psi z + \psi^2 - 2\psi z = \Phi + \psi^2$. Следовательно, F эквивалентно отображению $(x, z) \mapsto (x, z^2)$.

8.10. Случай (iii). В этом случае $\partial f/\partial z(0) = \partial^2 f/\partial z^2(0) = 0$ и $\partial^2 f/\partial x\,\partial z(0) \neq 0$, $\partial^3 f/\partial z^3(0) \neq 0$. Как и выше, мы выводим из подготовительной теоремы, что существуют ростки $\bar{\Phi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, для которых

$$z^3 = \bar{\Phi}(x, f(x, z)) + \bar{\psi}(x, f(x, z))\, z + 3\bar{\theta}(x, f(x, z))\, z^2.$$

Из этого тождества вытекает тождество между струями в начале координат. Сравнивая коэффициенты при 1, z, z^2, находим, что $\tilde{\Phi}(0)=\tilde{\psi}(0)=\tilde{\theta}(0)=0$ и что функция $\theta(0, f(0, z))$ имеет нуль по меньшей мере третьего порядка по z (напомним, что это означает, что эта функция лежит в $\mathfrak{m}(1)^3$). Следовательно, преобразование

$$(x, z) \mapsto (x, z-\tilde{\theta}(x, \tilde{f}(x, z)))$$

является допустимой заменой координат.

Эта замена координат переводит функцию f в функцию f_T, определяемую с помощью следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
(x, z) \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, mapsto] & (x, z-\tilde{\theta}(x, \tilde{f}(x, z))) = (x, \bar{z}) \arrow[d, "f_T"] \\
 & f(x, z) = f_T(x, \bar{z})
\end{tikzcd}$$

Функция f_T удовлетворяет в случае (iii) тому же условию, что и f: функция $f_T(0, \bar{z}) = f(0, z-\theta(0, f(0, z)))$ имеет нуль в точности третьего порядка, а $\partial f_T/\partial x(0, \bar{z})$ имеет нуль в точности первого порядка, в чем можно убедиться путем сравнения коэффицнентов 2-струй:

$\hat{f}(x, z) = f_1x + f_2x^2 + f_3xz \mod \hat{\mathfrak{m}}(2)^3$,

$\hat{\bar{z}}(x, z) = z + c_1x + c_2x^2 + c_3xz \mod \hat{\mathfrak{m}}(2)^3$, следовательно,

$\hat{z}(x, \bar{z}) = \bar{z} - c_1x - (c_2 - c_1c_3)x^2 - c_3x\bar{z} \mod \hat{\mathfrak{m}}(2)^3$, следовательно,

$$\hat{f}_T(x, \bar{z}) = \hat{f}(x, \hat{z}(x, \bar{z})) =$$
$$= f_1x + (f_2 - f_3c_1)x^2 + f_3x\bar{z} \mod \hat{\mathfrak{m}}(2)^3,$$

где f_3 отлично от нуля по предположению.

Заметим теперь, что в новых координатах

$$\bar{z}^3 = (z-\theta)^3 = z^3 - 3z^2\theta + 3z\theta^2 - \theta^3 =$$
$$= \Phi + \psi z + 3\theta z^2 - 3z^2\theta + 3z\theta^2 - \theta^3 =$$
$$= (\psi + 3\theta^2)(z-\theta) + (\Phi + 2\theta^3 + \psi\cdot\theta) = \psi_1\bar{z} + \Phi_1,$$

где ψ_1 и Φ — некоторые ростки. Это показывает, что мы могли с самого начала предполагать, что $\theta=0$, т. е.

$$z^3=\Phi(x, f)+\psi(x, f)z,$$
$$\Phi(0, 0)=\psi(0, 0)=0.$$

Сделаем теперь замену координат в прообразе $\{(x_1, x_2)\}$ и в образе $\{(y_1, y_2)\}$ по формулам

$$\text{(A)}\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \psi(x_1, f(x_1, x_2)) \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{(B)}\qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \psi(y_1, y_2) \\ \Phi(y_1, y_2) \end{bmatrix}.$$

Прежде всего мы должны проверить, что эти формулы действительно задают допустимые замены координат. Проделаем некоторые вычисления в 3-струях:

$$\hat{f}(x_1, x_2)=f_1x_1+f_2x_1^2+f_3x_1x_2+f_4x_2^3+x_1\cdot o(2)\operatorname{mod}\hat{\mathfrak{m}}^4,$$

где $f_3, f_4\neq 0$ (напомним, что обозначение $o(\ )$ вводилось в 4.7),

$$\hat{\Phi}(x_1, y)=b_1x_1+b_2y\operatorname{mod}\hat{\mathfrak{m}}^2,$$
$$\hat{\psi}(x_1, y)=c_1x_1+c_2y\operatorname{mod}\hat{\mathfrak{m}}^2,$$
$$\text{(C)}\qquad x_2^3=\hat{\Phi}(x_1, \hat{f}(x_1, x_2))+\hat{\psi}(x_1, \hat{f}(x_1, x_2))\cdot x_2.$$

Для замены (A) мы должны показать, что $c_1+c_2f_1\neq 0$, а для замены (B) — что $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$. Из формулы (C), которая представляет собой тождество между степенными рядами, вытекает, что $b_2\neq 0$, поскольку b_2f_4 — коэффициент при x_2^3 в правой части. С другой стороны, коэффициент при x_1x_2, а именно $(c_1+c_2f_1)+b_2f_3$, равен нулю, и, так как $f_3\neq 0$, $b_2\neq 0$, имеем $c_1+c_2f_1\neq 0$. Коэффициент при x_1 равен $b_1+b_2f_1$, т. е. нулю, поэтому $b_1c_2-b_2c_1=-b_2(f_1c_2+c_1)\neq 0$, что и требовалось доказать.

Чтобы завершить доказательство теоремы Уитни об отображениях плоскости в плоскость, мы должны проверить коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2) & \overset{(A)}{\longmapsto} & (\psi(x_1, f(x_1, x_2)), x_2) = (\bar{x}, \bar{y}) \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow \\ (x_1, f(x_1, x_2)) & \overset{(B)}{\longmapsto} & (\psi(x_1, f(x_1, x_2)), \ \Phi(x_1, f(x_1, x_2))) = \\ & & = (\bar{x}, \bar{y}^3 - \bar{x}\bar{y}) \end{array}$$

которая эквивалентна нашему уравнению

$$x_2^3 - \psi(x_1, f(x_1, x_2))\, x_2 = \Phi(x_1, f(x_1, x_2)). \ \blacksquare$$

9. ОСОБЕННОСТИ БОРДМАНА—ТОМА

Литература: Р. Том, Г. Левин, Особенности дифференцируемых отображений, в сб. «Особенности дифференцируемых отображений», «Мир», М., 1968, стр. 9—101.
Дж. М. Бордман, Особенности дифференцируемых отображений, в сб. «Особенности дифференцируемых отображений», «Мир», М., 1968, стр. 102—152 (см. также IHES Publ. Math., 33 (1967), 21—57).
J. Mather, On Thom — Boardman singularities, Internat. Sympos. in Dynamical Systems (Salvador 1971), Academic Press, New York, 1973.
J. Milnor, Differential topology, lecture notes, Princeton, 1958.

Пусть $f\colon M \to N$ — дифференцируемое отображение. Мы уже видели в упражнениях, что множество

$$\Sigma^i(f) = \{x \in M \mid \dim(M) - \mathrm{Rk}_x f = i\} \subset M$$

может быть очень сложным, в некоторых случаях это может быть любое замкнутое подмножество в M. С другой стороны, для отображения поверхности в поверхность множество $\Sigma^i(f)$ для почти всех f является многообразием. Для отображений Уитни могут появиться только множества $\Sigma^0(f)$ и $\Sigma^1(f)$. Первое из них открыто, а второе состоит из дифференцируемых кривых.

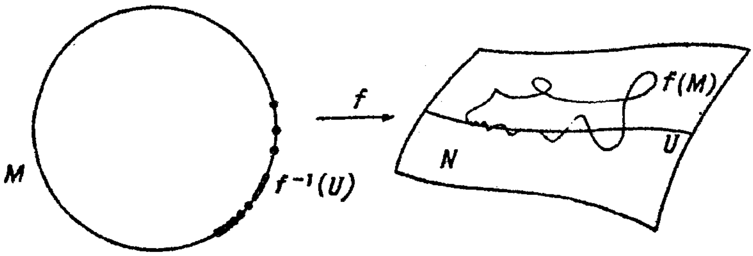
Если $\Sigma^i(f)$ оказывается многообразием, то можно определить множество $\Sigma^{i,j}(f) = \Sigma^j(f \mid \Sigma^i(f))$. В случае отображений Уитни единственным интересным множеством такого вида является $\Sigma^{1,1}(f)$, которое состоит из точек сборки f. До тех пор, пока на каждом шаге получаются многообразия, эту конструкцию можно продолжать, определяя индуктивно множество $\Sigma^{i_1, i_2, \ldots, i_n}(f)$. Р. Том поставил следующий вопрос: существует ли открытое плотное подмножество $T \subset C^\infty(M, N)$, такое, что для любого $f \in T$ все подмножества $\Sigma^{i_1, i_2, \ldots, i_n}(f)$ могут быть определены описанным выше способом и являются многообразиями? Утвердительный ответ на него получил Бордман, который нашел *массивное подмножество* T (т. е. счетное пересечение открытых плотных множеств).

Мезер заметил, что если M компактно, то это множество T содержит открытое плотное множество с теми же свойствами — см. предложение 2 в § 6 указанной выше работы Мезера.

Для того чтобы эта книга осталась введением в теорию дифференцируемых отображений и не превратилась в изложение результатов Бордмана, мы изучим только подмножества особенностей $\Sigma^i(f)$. Этот случай был рассмотрен еще Томом.

Почти всякая теорема о «почти всех» отображениях опирается на рассуждения, связанные с «общим положением» некоторых подмногообразий. В дифференциальной топологии понятие «общего положения» описывается с помощью *трансверсальности*. Поэтому сначала мы введем это последнее понятие.

Пусть $f\colon M^m \to N^n$ — дифференцируемое отображение и U^{n-k} — подмногообразие коразмерности k в N^n:



Вообще говоря, множество $f^{-1}(U) \subset M$ может и не быть подмногообразием. Как мы уже знаем, если $U = \{0\} \subset \mathbf{R}^1$, то $f^{-1}(U)$ может быть произвольным замкнутым подмножеством. То же самое может случиться и в более общей ситуации.

9.1. Определение. Отображение $f\colon M^m \to N^n$ называется *трансверсальным* подмногообразию $U^{n-k} \subset N^n$, если для каждой точки $x \in M$, такой, что $f(x) \in U$, выполнено следующее условие:

Пусть $(y_1, \ldots, y_n)$ — локальные координаты в окрестности точки $f(x)$, такие, что вблизи этой точки подмногообразие U задается уравнениями $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = 0$ (см. определение подмногообразия). Тогда матрица

$$(\partial f_i / \partial x_j), \qquad 1 \leqslant i \leqslant k, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

где $(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторая система координат в окрестности точки $x \in M$, имеет ранг k в точке x.

Заметим, что это условие затрагивает только те $x \in M$, для которых $f(x) \in U$. Следовательно, если $m < k$, то трансверсальность означает просто, что $f(M) \cap U = \varnothing$.

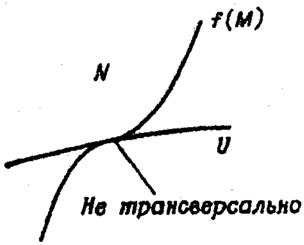
Используя касательные пространства и касательное отображение, это условие можно сформулировать следующим образом:

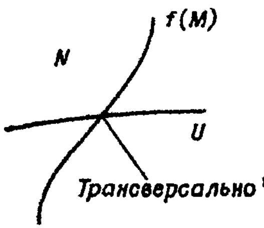
Если $x \in M$ и $f(x) \in U$, то отображение

$$T_x M \xrightarrow{T_x f} T_{f(x)} N \to T_{f(x)} N / T_{f(x)} U$$

сюръективно. Иначе говоря,

$$T_x f (T_x M) + T_{f(x)} U = T_{f(x)} N.$$





[1]).

[1]) Трансверсальность — это свойство отображения f, а не множества $f(M)$. Поэтому если нарисовано множество $f(M)$, то иногда из этого рисунка можно понять, что f не трансверсально U, но никогда нельзя гарантировать, что f трансверсально U. Пример: $M = \mathbb{R} = \{t\}$, $N = \mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$, $U = \{x_2 = 0\}$, $f(t) = (0, t^3)$. — *Прим. перев.*

9.2. Замечание. *Если отображение $f\colon M^m \to N^n$ трансверсально подмногообразию $U^{n-k} \subset N^n$, то множество $f^{-1}(U) \subset M$ либо является подмногообразием коразмерности k, либо пусто.*

Доказательство. Выберем системы координат $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$, как в определении трансверсальности. Вблизи точки $x \in f^{-1}(U)$ множество $f^{-1}(U)$ локально является прообразом нуля при композиции отображений

$$(x_1, \ldots, x_m) \overset{f}{\longmapsto} (y_1, \ldots, y_n) \overset{\text{proj}}{\longmapsto} (y_1, \ldots, y_k).$$

Это отображение имеет ранг k по определению трансверсальности. ∎

Если $U \subset N$ — замкнутое множество, то множество отображений, трансверсальных U, является открытым подмножеством в $C^\infty(M, N)$. Это вытекает из того, что трансверсальность локально выражается необращением в нуль некоторого непрерывного отображения $\varphi_f\colon M \to \mathbf{R}$, а именно суммы квадрата расстояния $(f(x), U)$ и квадратов детерминантов $(\partial f_i/\partial x_j)$, $i \leqslant k$. Если f меняется мало, то и φ_f меняется мало.

С другой стороны, теорема трансверсальности Тома (см. лекции Милнора по дифференциальной топологии) утверждает, что множество отображений, трансверсальных U, плотно в $C^\infty(M, N)$.

Локальная часть этой теоремы следует непосредственно из теоремы Сарда. Если $f\colon M \to \mathbf{R}^n$ — дифференцируемое отображение, то возьмем регулярное значение $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ композиции

$$M \xrightarrow{f} \mathbf{R}^n \xrightarrow{p} \mathbf{R}^k,$$

где $p(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_k)$. Тогда отображение $M \to \mathbf{R}^n$, определяемое формулой

$$x \longmapsto f(x) - (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0),$$

близко к f при малых λ и трансверсально подмногообразию

$$\mathbb{R}^{n-k}=\{(y_1, \ldots, y_n)\in\mathbb{R}^n \mid y_1=\ldots=y_k=0\}.$$

Вывод глобального случая из локального мы не будем повторять, так как он опирается на рассуждения с локально конечными покрытиями, которые мы уже проводили в конце доказательств лемм 8.5 и 8.7.

После этих предварительных разговоров об общем положении вернемся к множеству особенностей. Начнем с того, что решим задачу, сформулированную раньше в качестве упражнения.

9.3. Лемма. *Пусть $LA(n, m)=\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — векторное пространство вещественных $(m\times n)$-матриц, а $LA(n, m; r)\subset LA(n, m)$ — подпространство матриц ранга r. Тогда множество $LA(n, m; r)$ есть дифференцируемое подмногообразие в $LA(n, m)$ коразмерности $(n-r)\cdot(m-r)$ при $r\leqslant\min(m, n)$.*

Доказательство. Пусть $U\subset LA(n, m)$ — открытое множество матриц вида

$$\begin{array}{rc} & \qquad\overbrace{}^{r}\quad\overbrace{}^{n-r} \\ \begin{array}{r} r\,\{ \\ m-r\,\{ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A & ? \\ \hline D & ? \end{array}\right] \end{array}, \qquad \det A\neq 0.$$

Произвольную точку множества $LA(n, m; r)$ можно считать лежащей в U (в противном случае переставим строки и столбцы). Множество $U\cap LA(n, m; r)$ состоит из таких матриц, у которых последние $n-r$ столбцов линейно выражаются через первые r. Выберем следующие матрицы A, B, C, D:

A: $(r\times r)$-матрица, $\det A\neq 0$,
B: $(r\times(n-r))$-матрица,
C: $((m-r)\times(n-r))$-матрица,
D: $((m-r)\times r)$-матрица

и рассмотрим отображение

$$(A, B, C, D) \mapsto \begin{array}{cc} \overbrace{}^{r} & \overbrace{}^{m-r} \end{array} \left[\begin{array}{c|ccc} A & & 0 & \\ \hline & 1 & & 0 \\ D & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{array}{cc} \overbrace{}^{r} & \overbrace{}^{n-r} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline D & DB + C \end{array}\right].$$

Образ этого отображения лежит в U, и первый сомножитель является обратимой матрицей, поскольку $\det A \neq 0$. Очевидно, это отображение обратимо, поскольку существует матрица A^{-1}. Образ (A, B, C, D) лежит в $LA(n, m; r)$ тогда и только тогда, когда $C = 0$. Следовательно, множество $U \cap LA(n, m; r)$ есть подмногообразие коразмерности $(m - r) \cdot (n - r)$ в множестве всех матриц. ∎

9.4. Лемма. *Пусть f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое отображение и $U \subset LA(n, m)$ — дифференцируемое подмногообразие; тогда для почти всякого линейного отображения A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (т. е. для почти всякой матрицы) отображение*

$$\mathbb{R}^n \to LA(n, m), \quad x \mapsto D(f + A)(x) = Df(x) + A$$

трансверсально U.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times U \to LA(n, m), \quad (x, u) \mapsto u - Df(x).$$

Пусть $A \subset LA(n, m)$ — регулярное значение φ. Мы утверждаем, что тогда отображение $\mathbb{R}^n \to LA(n, m)$, $x \mapsto Df(x) + A$, трансверсально U. Если $u \in U$ и $u = Df(x) + A$, то точка $u - Df(x) = A$ лежит в образе φ и является регулярным значением φ. Поэтому вблизи точки (x, u) отображение φ является субмерсией (оно имеет ранг $n \cdot m$ и касательное отображение $T\varphi$ — эпиморфизм). Это означает, что образ отображения, касательного к Df, и касательное пространство к U в точке u порождают касательное пространство к $LA(n, m)$ в точке A. Заметим, что дифференциал отображения Df: $\mathbb{R}^n \to LA(n, m)$ совпадает с дифференциалом отображения $Df + A$, поскольку A—константа, принадлежащая векторному пространству $LA(n, m)$. ∎

Из этих лемм вытекает следующая теорема:

9.5. Теорема (Р. Том). *Для дифференцируемого отображения* f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *положим*

$$\Sigma^r(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{Rk}_x f = n - r\}.$$

Тогда для почти всякого линейного отображения A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *множество* $\Sigma^r(f + A)$ *является дифференцируемым подмногообразием в* $\mathbb{R}^n$ *коразмерности* $(m - n + r) \cdot r$ *при каждом* r [1])

Доказательство. Имеем $\Sigma^r(f) = Df^{-1}(LA(n, m; n - r))$. По лемме 9.3 множество $LA(n, m; n - r)$ является подмногообразием в $LA(n, m)$ коразмерности $(m-(n-r)) \cdot (n - (n - r)) = (m - n + r) \cdot r$. Согласно лемме 9.4, путем прибавления почти любого отображения A можно продеформировать f так, чтобы отображение $D(f + A)$ стало трансверсально каждому подмногообразию $LA(n, m; n - r)$. По сделанному ранее замечанию 9.2, множество $\Sigma^r(f + A)$ есть подмногообразие той же коразмерности, что и $LA(n, m; n - r)$. ∎

Стандартным рассуждением с локально конечными покрытиями можно получить отсюда более общий результат: для некоторого открытого и плотного множества отображений $f \in C^\infty(M^m, N^n)$ все множества $\Sigma^r(f) = \{x \in M \mid \mathrm{Rk}_x f = n - r\}$ являются подмногообразиями. Дополнительная трудность состоит в том, что

---

[1]) Здесь и ниже не исключается возможность того, что это подмногообразие может быть пустым. — *Прим. перев.*

многообразия $LA(n, m; r)$ не замкнуты. Однако наша цель здесь — лишь пробудить у читателя интерес к этим вопросам и указать подходящую литературу.

Подход Бордмана к общему случаю, т. е. к случаю множеств особенностей $\Sigma^{i_1, \ldots, i_r}(f)$, опирается на построение некоторых регулярных алгебраических многообразий $\Sigma(i_1, \ldots, i_r)$ в пространстве струй $\hat{\mathscr{E}}(n, m)$ (вместо пространства $LA(n, m)$ 1-струй). Затем Бордман деформирует немного данное отображение $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ так, чтобы отображение

$$\begin{aligned} jf\colon\ & \mathbf{R}^n \to \hat{\mathscr{E}}(n, m), \\ & x \longmapsto (\text{струя ростка } f\colon\ (\mathbf{R}^n, x) \to \mathbf{R}^m \text{ в точке } x) \end{aligned}$$

стало трансверсальным ко всем подмногообразиям $\Sigma(i_1, \ldots, i_r)$. Для отображений, обладающих этим свойством, он доказывает совпадение множеств

$$\Sigma^{i_1, \ldots, i_r}(f) \qquad \text{и} \qquad jf^{-1}\Sigma(i_1, \ldots, i_r)$$

и то, что все они являются подмногообразиями.

10. КВАДРАТИЧНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Литература: В. И. Арнольд, Особенности гладких отображений, *УМН*, 23 (1968), 3—44.
S. Lang, Analysis I, Addison-Wesley, 1968.
I. R. Porteous, Simple singularities of maps, lectures, Columbia 1962, Liverpool Singularities — Symposium I, Lecture notes 192, Springer, 1971, pp. 286—307.
R. Thom, La stabilité topologique des applications polynomiales, *l'Enseignement Math.*, 8 (1962), 24—33.

В случае отображений поверхности в поверхность устойчивые дифференцируемые отображения образуют открытое и плотное множество в пространстве всех отображений. Для многообразий достаточно высоких размерностей соответствующий результат не имеет места. Множество отображений, устойчивых относительно дифференцируемой эквивалентности, не плотно.

Чтобы доказать это, мы определим инварианты, которые помогут нам различать неэквивалентные ростки.

Грубо говоря, эти инварианты (введенные Портеусом) определяются квадратичной частью разложения Тейлора там, где его линейная часть обращается в нуль.

Эта квадратичная часть ряда Тейлора ростка определяет некоторые линейные семейства квадратичных форм. Алгебраическими средствами эти формы разбиваются на классы эквивалентности. Отсюда мы получаем инварианты линейных семейств, а тем самым — инварианты ростков.

Начнем с определения квадратичного дифференциала.

Пусть f: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^m, 0)$ — дифференцируемый росток. Дифференциалом f называется линейное отображение $Df(0)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ канонически отождествляются со своими касательными пространствами в начале координат.

10.1. *Квадратичным дифференциалом* называется квадратичное отображение

$$d^2f_0\colon \operatorname{Ker}(Df(0)) \to \operatorname{Coker}(Df(0)),$$

определенное формулой

$$d^2f_0(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cdot v)}{t^2} \mod Df(0)(\mathbf{R}^n)$$

для любого $v \in \operatorname{Ker}(Df(0))$.

Мы должны показать, что этот предел существует и что отображение d^2f_0 является корректно определенным квадратичным отображением

$$\operatorname{Ker}(Df(0)) \to \operatorname{Coker} Df(0)),$$

где эти векторные пространства рассматриваются как подпространства касательных пространств соответственно к $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ в начале координат. Для этого нужно показать, что отображение d^2f_0 не зависит от выбора дифференцируемой системы координат.

Рассмотрим разложение Тейлора

$$(1)\qquad f(tv) = t\,Df(0)\cdot v + \frac{1}{2}t^2 \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v_j\,\partial v_k}\cdot v_jv_k + o(3).$$

Пусть $v \in \operatorname{Ker}(Df(0))$. Первый член обращается в нуль, и поэтому требуемый предел существует и равен

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v_j\,\partial v_k}\cdot v_jv_k.$$

Если $\varphi\colon (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^m, 0)$ — диффеоморфизм, то, используя разложение Тейлора (1), получаем

$$d^2(\varphi\circ f)_0(v) = D\varphi(0)\cdot \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v_j\,\partial v_k}\cdot v_jv_k.$$

Следовательно, отображение d^2f_0 преобразуется матрицей Якоби точно так же, как касательное пространство к $\mathbf{R}^m$ в начале координат. Значит, это отображение не зависит от выбора системы координат на $\mathbf{R}^m$.

Рассмотрим теперь замену координат ψ: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, удовлетворяющую условию $D\psi(0) = \mathrm{id}$. Тогда $\psi(tv) = tv + t^2 w(t)$ и

$$f(\psi(tv)) = t^2 Df(0) \cdot w(t) + \frac{1}{2} t^2 \sum_{l,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v_l \partial v_k} v_l v_k + o(3),$$

откуда

$$\lim_{t\to 0} \frac{f \cdot \psi(tv)}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv)}{t^2} + Df(0) \cdot w(0).$$

Последний член принадлежит $Df(0)(\mathbf{R}^n)$.

Мы показали, что отображение $d^2 f_0$ однозначно определяется уравнением (2), если только выбран базис в подпространстве $\operatorname{Ker} Df(0)$ касательного пространства к $\mathbf{R}^n$ в начале координат.

10.2. Пример. Отображение f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3^2 - x_4^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4, x_3 x_4)$$

имеет квадратичным дифференциалом отображение

$$(x_3, x_4) \mapsto (x_3^2 - x_4^2, x_3 x_4).$$

В частности, ясно, что любое квадратичное отображение служит квадратичным дифференциалом подходящего полиномиального отображения f для подходящих значений m, n и $\dim(\operatorname{Ker} Df(0))$.

Квадратичному дифференциалу можно сопоставить инвариантным образом пучок квадратичных форм. Пусть

F — векторное пространство квадратичных форм на $\operatorname{Ker} Df(0)$,

C — сопряженное пространство к $\operatorname{Coker} Df(0)$,

L_f: $C \to F$, $L_f(\alpha) = \alpha \circ d^2 f_0$.

10.3. Определение. Отображение L_f: $C \to F$ называется *пучком квадратичных форм* отображения $d^2 f_0$.

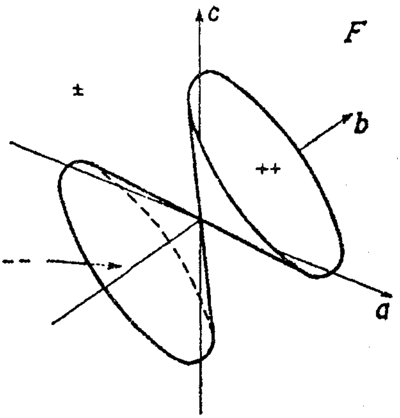
10.4. Пример. Предположим, что $\operatorname{Ker} Df(0)$ и $\operatorname{Coker} Df(0)$ имеют размерность 2. Тогда размерность F

равна 3, и базисом в этом пространстве служит $\{x^2, 2xy, y^2\}$, где x, y — координаты в $\operatorname{Ker} Df(0)$. Форма $ax^2 + 2bxy + cy^2$ соответствует точке $(a, b, c) \in F$ и как отображение пространства $\operatorname{Ker} Df(0)$ в сопряженное пространство имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Матрица $A = 0$ соответствует нулевой квадратичной форме. Если $A \neq 0$, то матрица A, для которой $ac - b^2 = 0$, соответствует форме ранга 1. Такие квадратичные формы имеют нормальный вид $\pm x^2$. Если $\det A \neq 0$, то формы имеют нормальный вид $x^2 \pm y^2$ и $-(x^2 + y^2)$.

Множество $\{\det A = 0\}$ — конус в F. Вершина конуса — это нулевая форма. Точки, лежащие на поверхности конуса, — параболические формы. Области, помеченные знаками $++$, $--$, — эллиптические формы. Область, помеченная знаком $\pm$, — гиперболические формы.



Тип квадратичной формы с точностью до изоморфизма определяется ее положением по отношению к этому конусу.

Если $L_f\colon C \to F$ — пучок квадратичных форм, то для размерности пространства $L_f(C)$ и его положения в F имеется семь различных возможностей:

1) плоскость вне конуса;
2) плоскость, пересекающая конус;
3) плоскость, касающаяся конуса;
4) прямая внутри конуса;
5) прямая вне конуса;
6) прямая, касающаяся конуса;
7) вершина конуса.

Предположим, что два дифференцируемых ростка имеют пучки квадратичных форм, для которых положения пространства $L_f(C)$ различны в смысле проведенной классификации. Тогда такие ростки не могут быть эквивалентными, поскольку преобразования координат в прообразе и образе приводят к замене координат для пучка L_f, а такая замена не может изменить положение $L_f(C)$ относительно конуса $\{\det A=0\}$. Именно таким образом пучок квадратичных форм порождает алгебраический инвариант ростка (относительно дифференцируемой эквивалентности).

10.5. Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть $F(k)$ — векторное пространство квадратичных форм на $\mathbf{R}^k$ и $H(c, k)=LA(\mathbf{R}^c, F(k))$ — векторное пространство c-мерных пучков квадратичных форм на $\mathbf{R}^k$.

Для того чтобы найти инварианты элементов $H(c, k)$, мы должны исследовать действие общих линейных групп (линейных замен координат в $\mathbf{R}^c$ и $\mathbf{R}^k$) на такие пучки квадратичных форм. Группа $GL(c, \mathbf{R})\times GL(k, \mathbf{R})$ координатных преобразований в $\mathbf{R}^c$ и $\mathbf{R}^k$ действует на $H(c, k)$ по формуле

$$g_c\times g_k(L_c(v_c)(v_k))=L\left(g_c^{-1}v_c\right)\left(g_k^{-1}v_k\right).$$

Например, мы только что убедились в том, что $H(2, 2)$ имеет размерность 6 (поскольку $\dim F(2)=3$) и разбивается на 7 *орбит* относительно действия группы $GL(2, \mathbf{R})\times GL(2, \mathbf{R})$. Орбита — это класс эквивалентности относительно действия группы. Ясно, кроме того, что $\dim(GL(2, \mathbf{R})\times GL(2, \mathbf{R}))=8$.

В определении 10.3 мы сопоставили каждому ростку f: $(M^m, x)\to(N^n, y)$ пучок квадратичных форм $L\in LA(C, F)$, используя квадратичный дифференциал d^2f_0. Выбрав координаты на C и F, мы получим однозначно определенный элемент пространства $H(c, k)$. Если мы выберем на C и F новые координаты, то придем к новому элементу пространства $H(c, k)$, который получается из исходного действием некоторого элемента группы $GL(c, \mathbf{R})\times GL(k, \mathbf{R})$. Следовательно, орбита пучка L в $H(c, k)$ — это корректно определенный инвариант ростка f (относительно дифференцируемой эквивалентности). Эти рассмотрения приводят к следующему результату.

10.6. Теорема (Р. Том). *Множество устойчивых дифференцируемых отображений $M^{n^2} \to N^{n^2}$ не плотно в множестве всех дифференцируемых отображений при $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Размерность группы $GL(n, \mathbf{R}) \times \times GL(n, \mathbf{R})$ равна $2n^2$. Размерность $F(n)$ совпадает с размерностью пространства симметрических $(n \times n)$-матриц, т. е. равна $\frac{1}{2} n(n+1)$. Следовательно, $\dim(H(n, n)) = \frac{1}{2} n^2 (n+1)$. При $n \geqslant 3$ имеем $\frac{1}{2}(n+1) \geqslant \geqslant 2$, следовательно,

$$\dim(GL(n, \mathbf{R}) \times GL(n, \mathbf{R})) \leqslant \dim(H(n, n)).$$

Равенство достигается только в случае $n = 3$, однако в этом случае существует однопараметрическая группа пар (α, α^{-1}) скалярных матриц, которая действует на пучки тождественно. Отсюда выводим, что *при $n \geqslant 3$ размерность любой орбиты действия группы $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(n, \mathbf{R})$ на $H(n, n)$ меньше размерности $H(n, n)$, т. е. коразмерность любой орбиты $\geqslant 1$.*

Теперь рассмотрим отображение $f: M^{n^2} \to N^{n^2}$, имеющее особенность типа Σ^n в точке $0 \in M$ (это означает, что $0 \in \Sigma^n(f)$). Предположим также, что после введения локальных евклидовых координат дифференциал f определяет отображение, трансверсальное к $LA(n^2, n^2; n^2 - n)$ в некоторой окрестности точки 0.

Эти два условия, наложенные на f, относятся к первым и вторым производным. Поэтому можно найти удовлетворяющие им многочлены второго порядка. Как и в доказательстве теоремы Тома в гл. 9, мы знаем, что локально, после выбора системы координат, выполняется равенство $\Sigma^n(f) = Df^{-1}(LA(n^2, n^2; n^2 - n))$. По лемме 9.3, $\operatorname{codim} LA(n^2, n^2; n^2 - n) = n^2$, и, следовательно, из трансверсальности f вытекает, что $\dim \Sigma^n(f) = 0$.

Выберем координаты $(y_1, \ldots, y_{n^4})$ вокруг $Df(0)$ на многообразии $LA(n^2, n^2)$ так, чтобы подмногообразие $LA(n^2, n^2; n^2-n)$ задавалось уравнениями $y_1 = \ldots$ $\ldots = y_{n^2} = 0$. Пусть U — координатная окрестность точки 0. Из трансверсальности вытекает, что производная в нуле следующей композиции отображений является изоморфизмом:

$$U \xrightarrow{Df} \{(y_1, \ldots, y_{n^4})\} \xrightarrow{\text{proj}} \{(y_1, \ldots, y_{n^2})\}.$$

Следовательно, если окрестность U достаточно мала, то эта композиция — диффеоморфизм и $0 = \Sigma^n(f) \cap U =$ $= (\text{proj} \circ Df)^{-1}(0) \cap U$.

Если мы слегка деформируем f, композиция останется диффеоморфизмом в некоторой меньшей окрестности $U' \subset U$ точки 0. (Воспользуйтесь леммой из § 3 гл. XIII книги Ленга и убедитесь в том, что окрестность U' не зависит от аппроксимации f, если только рассматривается достаточно хорошая аппроксимация.) Если h — аппроксимация f, которая отличается от f на однородный многочлен степени 2, то $0 \in \Sigma^n(h)$. В любом случае пересечение $\Sigma^n(h)$ с U' состоит из единственной точки, которая близка к точке 0. Следовательно, *если бы устойчивые отображения были плотны, то мы нашли бы устойчивое отображение, которое обладало бы только что описанными свойствами.* Далее, так как 0 — изолированная точка множества $\Sigma^n(f)$, то путем изменения членов второго порядка мы можем получить сколь угодно близкое к f отображение h, обладающее тем свойством, что d^2h_0 и d^2f_0 лежат в различных орбитах действия группы $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(n, \mathbf{R})$ на $H(n, n)$, ибо коразмерность любой орбиты $\geqslant 1$. Следовательно, отображение $f|U$ не устойчиво.

Чтобы провести те же рассуждения глобально, найдем сначала дифференцируемое отображение f, дифференциал которого всюду трансверсален $LA(n^2, n^2; n^2-n)$ и которое локально, в окрестности некоторой точки $0 \in M$, подобно рассмотренному выше отображению $f|U$. Построим аппроксимацию h отображения f так, чтобы h и f отличались только на U и чтобы орбита точки d^2h_0 отличалась от всех орбит квадратичных дифференциалов f во всех точках множества $\Sigma^n(f)$. Поскольку $\Sigma^n(f)$ — многообразие размерности 0, таких орбит конечное или счетное число.

На первый взгляд кажется, что этот результат разрушает все надежды, которые возлагались на понятие устойчивости. Однако Том открыл (или, быть может, высказал гипотезу), что топологически устойчивые отображения всегда образуют плотное подмножество $C^\infty(M, N)$ при условии, что M компактно. Мезер не то дал, не то анонсировал доказательство этого и соответствующего локального результата. Есть надежда, что эти результаты появятся в какой-нибудь работе о «топологической устойчивости» — быть может, в Шпрингеровской серии Ergebnisse der Mathematik.

Теория топологической устойчивости опирается на теорию стратифицированных множеств (стратификация — разложение множества в объединение дифференцируемых многообразий). Мы не будем здесь углубляться в эту теорию, и, к сожалению, по этой тематике нет литературы, доступной студентам. Однако несколько появившихся работ показывают, что эта область будет интересна и аналитикам, и топологам.

11. КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ РОСТКИ

Литература: Дж. Мезер, Конечно определенные ростки отображений, сб. *Математика*, 14 : 1 (1970), 145 — 175.
J. C. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables I, *Ann. Inst. Fourier*, 18 (1968), 177 — 240.
Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1969.
Дж. Милнор, Особые точки комплексных гиперповерхностей, «Мир», М., 1971.

Пусть, как и выше, $\mathscr{E}(n, m)$ — векторное пространство ростков $(\mathrm{R}^n, 0) \to \mathrm{R}^m$. Обозначим через $\mathscr{B}(n) \subset \mathscr{E}(n, n)$ подмножество обратимых относительно композиции ростков, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$. Тогда пара $(\mathscr{B}(n), \circ)$ есть группа и росток $\bar{f} \in \mathscr{E}(n, n)$, удовлетворяющий условию $f(0) = 0$, принадлежит $\mathscr{B}(n)$ в том и только том случае, когда матрица $Df(0)$ невырожденна. Группа $\mathscr{B}(n)$ действует на $\mathscr{E}(n, m)$ с помощью композиции: если $\bar{f} \in \mathscr{E}(n, m)$ и $\bar{h} \in \mathscr{B}(n)$, то $\bar{f} \circ \bar{h} \in \mathscr{E}(n, m)$.

11.1. Определение. Ростки $\bar{f}_0, \bar{f}_1 \in \mathscr{E}(n, m)$ называются *правоэквивалентными* (или *r-эквивалентными*), если существует такой росток $\bar{h} \in \mathscr{B}(n)$, что $\bar{f}_0 \circ \bar{h} = \bar{f}_1$.

Пусть $j^k: \mathscr{E}(n) \to \mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1} = \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1, \ldots, x_n\rangle^{k+1}$ — отображение, сопоставляющее каждому ростку его струю. Для удобства обозначим $\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1}$ через $\hat{\mathscr{E}}_k(n)$. Каждому ростку $\bar{f}$ отображение j^k сопоставляет соответствующую k-струю, т. е. многочлен Тейлора $\bar{f}$ порядка k в начале координат.

11.2. Определение. Росток $\tilde{f} \in \mathscr{E}(n)$ называется *k-определенным* (*достаточным*), если каждый росток $\tilde{g} \in \mathscr{E}(n)$, имеющий такую же k-струю, что и $\tilde{f}$, правоэквивалентен $\tilde{f}$.

Иными словами: если $j^k\tilde{f} = j^k\tilde{g}$, то существует росток $\tilde{h} \in \mathscr{B}(n)$, такой, что $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \tilde{h}$.

Можно дать соответствующее определение и для ростков из $\mathscr{E}(n, m)$, но это не приведет ни к каким дополнительным разумным результатам. Это выяснится ниже, после того как мы познакомимся с простейшими видами k-определенности.

k-определенность ростка $\tilde{f}$ — это скорее свойство многочлена j^kf, чем самого ростка $\tilde{f}$. Каждый росток, k-струя которого есть k-определенный многочлен, превращается в этот многочлен в подходящей системе координат. Таким образом, в этой ситуации k-струя определяет соответствующий росток.

В этой главе изучается следующий вопрос: какие струи из $\hat{\mathscr{E}}_k(n)$ определяют соответствующие им ростки? Рассмотрим несколько примеров.

1. Никакая 0-струя не определяет росток.

2. $\hat{\mathscr{E}}_1(n) = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, поскольку $j^1\tilde{f} = f_0 + \sum_i f_1^i x_i$, и росток $\tilde{f}$ 1-определен в том и только том случае, когда хотя бы одна из первых производных $\tilde{f}$ в начале координат отлична от 0 (или, эквивалентно, $Df(0) \neq 0$). Это объясняется тем, что тогда f можно привести к виду $(x_1, \ldots, x_n) \to f_0 + x_1$.

3. Лемма Морса утверждает, что если $f \in \mathscr{E}(n)$ и $Df(0) = 0$, то росток f 2-определен в том и только том случае, когда

$$\det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(0)) \neq 0.$$

Эти примеры показывают, что недостаточные струи встречаются тем реже, чем выше степень многочлена. Недостаточные 1-струи образуют прямую $\mathbf{R} \times \{0\}$ в $\mathbf{R}^{n+1}$. Определена проекция пространства 2-струй в пространство 1-струй, и слой над каждой 1-струей —

это пространство симметрических матриц, т. е. пространство всевозможных коэффициентов мономов степени 2. Над каждой точкой линии недостаточных 1-струй недостаточные 2-струи также образуют множество меры нуль, заданное условием $\{\det(a_{ij})=0\}$ в пространстве симметрических матриц $\{(a_{ij})\}$.

Цель этой главы — доказать приведенный ниже результат. Это один из многих результатов, полученных Мезером в этой области, причем большинство из них значительно сильнее.

11.3. Теорема. *Пусть $\bar{f}\in\mathscr{E}(n)$, и пусть*

$$\mathfrak{m}(n)^k\subset\mathfrak{m}(n)\cdot\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle_{\mathscr{E}(n)}+\mathfrak{m}(n)^{k+1};$$

тогда росток $\bar{f}$ k-определен.

Начнем с нескольких замечаний.

Условие теоремы можно переписать в виде

$$\mathfrak{m}(n)^k\subset\mathfrak{m}(n)\cdot\langle\partial f/\partial x_i\rangle\operatorname{mod}\mathfrak{m}(n)^{k+1}$$

($\langle\partial f/\partial x_i\rangle$ — сокращение для $\langle\partial f/\partial x_1,\ \ldots,\ \partial f/\partial x_n\rangle_{\mathscr{E}(n)}$), и это условие есть условие на k-струю ростка f, как и должно быть.

Из условия

$$\mathfrak{m}(n)^k\subset\mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle+\mathfrak{m}(n)\cdot\mathfrak{m}(n)^k$$

по лемме Накаямы вытекает, что

$$\mathfrak{m}(n)^k\subset\mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle_{\mathscr{E}(n)}.$$

Следовательно, это условие эквивалентно предположениям теоремы. Однако формулировка теоремы имеет то преимущество, что в ней участвуют только конечномерные векторные пространства. Это вытекает из первого замечания. Для каждого явно заданного ростка эти конечномерные пространства могут быть явно вычислены.

Последняя формулировка условия теоремы показывает, что пространство

$$\mathscr{E}(n)/(\mathfrak{m}(n)\cdot\langle\partial f/\partial x_i\rangle)$$

конечномерно и порождено мономами степени $\leqslant k$. Обратно, предположим, что пространство $\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)\cdot\langle\partial f/\partial x_i\rangle$ имеет размерность k. Положим $A=\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle$. По лемме Накаямы

$$0=\mathfrak{m}(n)^l A \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{m}(n)^{l-1}_i A \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{m}(n) A \underset{\neq}{\subset} A,$$

где $l\leqslant k$, поскольку $\dim A=k$. Следовательно,

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n)^l \subset \mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle.$$

Далее, $\mathscr{E}(n)$ изоморфно $\mathfrak{m}(n)\oplus\mathbf{R}$ (f переходит при этом изоморфизме в $(f-f(0))\oplus f(0)$). Следовательно,

$$\mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle+\langle\partial f/\partial x_i\rangle_{\mathbf{R}}=\langle\partial f/\partial x_i\rangle_{\mathscr{E}(n)}$$

и конечномерность пространства $\mathscr{E}(n)/\mathfrak{m}(n)\cdot\langle\partial f/\partial x_i\rangle$ эквивалентна конечномерности пространства $\mathscr{E}(n)/\langle\partial f/\partial x_i\rangle_{\mathscr{E}(n)}$. Следовательно,

11.4. *Если росток* $D\tilde{f}\colon(\mathbf{R}^n, 0)\to\mathbf{R}^n$ *конечен* (определение 6.8), *то росток* $\tilde{f}$ *конечно определен* (k-*определен для некоторого* k).

Повторяя приведенные выше рассуждения, использующие лемму Накаямы, но положив на этот раз $A=\mathscr{E}(n)/\langle\partial f/\partial x_i\rangle$, находим, что если $\dim(\mathscr{E}(n)/(Df)^*\cdot\mathfrak{m}(n)\mathscr{E}(n))=k$, то росток f $(k+1)$-определен.

Теперь приведем *доказательство теоремы.*

Пусть $\tilde{f}$, $\tilde{g}\in\mathscr{E}(n)$ — два ростка с одной и той же k-струей. Мы должны показать, что существует росток $\tilde{h}\in\mathscr{B}(n)$, для которого $\tilde{f}\circ\tilde{h}=\tilde{g}$. Для этого мы включим ростки $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ в однопараметрическое семейство ростков $\tilde{F}$:

$$F(x, t)=(1-t)f(x)+tg(x), \qquad t\in\mathbf{R}, \qquad x\in\mathbf{R}^n.$$

Определим росток $\tilde{F}_t\in\mathscr{E}(n)$ формулой $F_t(x)=F(x, t)$. Мы хотим доказать, что для каждого $t_0\in\mathbf{R}$ найдется некоторое $\varepsilon>0$, такое, что любой росток $\tilde{F}_t$ с $|t-t_0|<\varepsilon$ r-эквивалентен $\tilde{F}_{t_0}$. Отсюда ввиду связности $\mathbf{R}$ будет следовать теорема. Для того чтобы доказать это утверждение относительно $\tilde{F}$, рассмотрим росток

$$\tilde{H}\colon (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, (0, t_0)) \to \mathbf{R}^n.$$

Обозначим росток $\tilde{H}(x, t)$ через $\tilde{H}_t(x)$. Мы будем искать росток $H_t(x)$, обладающий такими свойствами:

(i) $\tilde{H}_{t_0} = \mathrm{id} \in \mathscr{B}(n)$,

(ii) $\tilde{H}_t(0) = 0 \in \mathbf{R}^n$;

(iii) $\tilde{F}_t \circ \tilde{H}_t = \tilde{F}_{t_0}$, т. е. $F(H(x, t), t) = F(x, t_0)$.

Для t, близких к t_0, росток $\tilde{H}_t$ автоматически обратим, поскольку росток $\tilde{H}_{t_0}$ обратим и $\det(DH_t(0))$ непрерывно зависит от t. Условие (iii) автоматически выполняется при $t = t_0$, и, следовательно, достаточно заменить условие (iii) дифференциальным уравнением, которое выражает тот факт, что $F_t \circ H_t$ не зависит от t, т. е.

(iii′) $$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x, t), t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0.$$

Мы хотим решить уравнения (i), (ii), (iii′) относительно H. Для этого сделаем такое утверждение.

11.5. *Если существует росток* $\xi\colon (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, (0, t_0)) \to \mathbf{R}^n$, *обладающий свойствами*

(a) $$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) \cdot \xi_i(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0,$$

(b) $\xi_i(0, t) = 0$ *для всех* i,

то существует росток $\tilde{H}$, *удовлетворяющий условиям* (i), (ii) *и* (iii′).

Для того чтобы доказать это утверждение, нужно решить дифференциальное уравнение относительно H:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \xi(H(x, t), t)$$

с начальным условием $H_{t_0} = \mathrm{id}$. Существование решения этого уравнения следует из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Подставляя H вместо x в (a), мы получаем (iii′), а используя (b), мы видим, что уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0, t) = \xi(H(0, t), t)$$

имеет единственное решение $H(0, t) = 0$. Отсюда следует (ii), а (i) есть не что иное, как приведенное выше начальное условие.

Итак, остается только найти ростки $\tilde{\xi}_i$, удовлетворяющие условиям (a) и (b).

Мы будем сейчас работать с кольцом ростков $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, t_0)) \to \mathbb{R}$, которое обозначим через $\mathscr{E}(n+1)$. Пусть $\mathscr{E}(n)$ — подкольцо в $\mathscr{E}(n+1)$, состоящее из ростков, не зависящих от t, и $\mathfrak{m}(n)$ — максимальный идеал в $\mathscr{E}(n)$. Мы будем искать элементы $\tilde{\xi}_i$ в $\mathscr{E}(n+1)$. Условие (b) означает, что

(b) $\tilde{\xi}_i \in \mathfrak{m}(n) \cdot \mathscr{E}(n+1)$ для каждого i.

Согласно 4.2, отсюда вытекает, что для каждого i существует росток $\tilde{\gamma}_j \in \mathscr{E}(n+1)$, $j = 1, \ldots, n$, такой, что

$$\xi_i(x, t) = \sum_j x_j \gamma_j(x, t).$$

Следовательно, существование ростков $\tilde{\xi}_i$, удовлетворяющих условиям (a) и (b), эквивалентно следующему утверждению о ростках в $\mathscr{E}(n+1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathfrak{m}(n) \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathscr{E}(n+1)}.$$

Однако $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}((1-t)f + tg) = g - f \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$, так как, по предположению, f и g имеют одну и ту же k-струю. Таким образом, достаточно показать, что

(a, b) $\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n) \cdot \left\langle \dfrac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathscr{E}(n+1)}.$

Из условий теоремы получаем

$$(*)\quad \mathfrak{m}(n)^k\cdot\mathscr{E}(n+1)\subset\mathfrak{m}(n)\cdot\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathscr{E}(n+1)}+$$
$$+\mathfrak{m}(n)^{k+1}\cdot\mathscr{E}(n+1)\subset$$
$$\subset\mathfrak{m}(n)\left\langle\frac{\partial F}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathscr{E}(n+1)}+\mathfrak{m}(n+1)\cdot\mathfrak{m}(n)^k\mathscr{E}(n+1).$$

Второе включение вытекает из того, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_i}=t\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(g-f)\in\mathfrak{m}(n)^k$$
$$\text{и}\quad \mathfrak{m}(n)\subset\mathfrak{m}(n+1).$$

Заметим теперь, что $\mathscr{E}(n+1)$-модуль $\mathfrak{m}(n)^k\cdot\mathscr{E}(n+1)$ конечно порожден, а именно порожден мономами от x_i степени k. Применим следующую форму леммы Накаямы:

$$A\subset B+\mathfrak{m}\cdot A\Rightarrow A\subset B$$

к включению $(*)$. Мы получим (a, b):

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1}\subset\mathfrak{m}(n)^k\cdot\mathscr{E}(n+1)\subset\mathfrak{m}(n)\left\langle\frac{\partial F}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathscr{E}(n+1)}$$

11.6. Правые преобразования (r-преобразования) и r-эквивалентность можно определить и для струй, т. е. для формальных степенных рядов, а также для формальных степенных рядов по модулю $\hat{\mathfrak{m}}(n)^k$ (т. е. элементов из $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1, \ldots, x_n\rangle^k$).

Положим

$$\hat{\mathscr{R}}_k(n)=\text{группа } k\text{-струй ростков из } \mathscr{R}(n)=$$
$$=\text{группа ростков } n\text{-строк многочленов степени } k:$$
$$f(x)=(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

причем матрица $Df(0)=(\partial f_i/\partial x_j(0))$ обратима и $f(0)=0$. Групповая операция индуцирована композицией отображений.

Положим

$$\hat{\mathscr{E}}_k(n, n)=\left(\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1, \ldots, x_n\rangle^{k+1}\right)^n.$$

Это евклидово пространство размерности $n \cdot \binom{n+k}{k}$.

Поскольку $\hat{\mathscr{B}}_k(n)$ представляет собой подмножество в $\hat{\mathscr{E}}_k(n, n)$, определенное условиями $\det(\partial f_i/\partial x_j(0)) \neq 0$ и $f(0)=0$, то $\hat{\mathscr{B}}_k(n)$ — дифференцируемое многообразие.

Групповая операция в $\hat{\mathscr{B}}_k(n)$:

$$\hat{\mathscr{B}}_k(n) \times \hat{\mathscr{B}}_k(n) \to \hat{\mathscr{B}}_k(n),$$
$$(f(x),\ g(x)) \mapsto f(g(x)) \bmod \langle x_1, \ldots, x_n\rangle^{k+1}$$

является дифференцируемым отображением. Коэффициенты композиции $\hat{f} \circ \hat{g}$ получаются при подстановке коэффициентов $\hat{f}$ и $\hat{g}$ в некоторые канонические многочлены. Отображение

$$\hat{\mathscr{B}}_k(n) \to \hat{\mathscr{B}}_k(n),$$

определяемое формулой

$$\hat{f}(x) \mapsto \hat{f}^{-1}(x) \bmod \langle x_1, \ldots, x_n\rangle^{k+1},$$

также дифференцируемо.

Дифференцируемое многообразие, на котором введена структура группы так, что групповые операции дифференцируемы, называется *группой Ли*.

11.7. Упражнение. Докажите, что $\dim \hat{\mathscr{E}}_k(n, m) = m \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i-1}{i} = m\binom{n+k}{k}$.

Группа Ли $\hat{\mathscr{B}}_k(n)$ действует на $\hat{\mathscr{E}}_k(n, m)$ с помощью композиции $\hat{\mathscr{E}}_k(n, m) \times \hat{\mathscr{B}}_k(n) \to \hat{\mathscr{E}}_k(n, m)$: $(\hat{f}, \hat{g}) \to \hat{f} \circ \hat{g}$.

Это действие совместимо с композицией действия $\mathscr{B}(n)$ на $\mathscr{E}(n, m)$ и взятия струи, т. е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}(n, m) \times \mathscr{B}(n) & \to & \mathscr{E}(n, m) \\ {\scriptstyle j^k \times j^k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^k} \\ \hat{\mathscr{E}}_k(n, m) \times \hat{\mathscr{B}}_k(n) & \to & \hat{\mathscr{E}}_k(n, m) \end{array}$$

Классы правоэквивалентных отображений в $\mathscr{E}(n, m)$ — это орбиты действия $\mathscr{B}(n)$, а классы эквивалентности их k-струй — орбиты действия $\hat{\mathscr{B}}_k(n)$ на $\hat{\mathscr{E}}_k(n, m)$. Следовательно, если ростки $f, g \in \mathscr{E}(n)$ правоэквивалентны, то $\hat{f}$ и $\hat{g}$ лежат в одной и той же орбите действия $\hat{\mathscr{B}}_k(n)$ на $\hat{\mathscr{E}}_k(n)$. Рассматривая эти *конечномерные* орбиты в конечномерном евклидовом пространстве, мы получаем необходимое условие r-эквивалентности:

11.8. Лемма. *Пусть $f \in \mathscr{E}(n)$ — росток с k-струей $\hat{f} \in \hat{\mathscr{E}}_k(n)$. Обозначим через $\hat{f}\hat{\mathscr{B}}_k(n)$ орбиту $\hat{f}$ при действии $\hat{\mathscr{E}}_k(n) \times \hat{\mathscr{B}}_k(n) \to \hat{\mathscr{E}}_k(n)$. Обозначим через $T_f\hat{f}\hat{\mathscr{B}}_k(n)$ касательное пространство к этой орбите в точке $\hat{f}$, рассматриваемое как подпространство евклидова пространства $\hat{\mathscr{E}}_k(n)$. Тогда*

$$T_f\hat{f}\hat{\mathscr{B}}_k(n) = \mathfrak{m}(n)\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \operatorname{mod} \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим росток $\tilde{\delta}$: $(\mathbf{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, $(x, t) \mapsto \delta(x, t) = \delta_t(x)$, где $\tilde{\delta}_0 = \mathrm{id}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$.

Это росток дифференцируемого однопараметрического семейства преобразований из $\mathscr{B}(n)$, имеющего тождественный росток при нулевом значении параметра. Такой росток индуцирует росток пути $(\mathbf{R}, 0) \to (\hat{\mathscr{E}}_k(n), \hat{f})$, $t \mapsto \hat{f} \circ \hat{\delta}_t$. «Векторы скорости таких путей в момент времени 0» образуют касательное пространство $T_f\hat{f}\hat{\mathscr{B}}_k(n)$. Если мы запишем $\delta(t, x)$ в виде $x + \varepsilon(t, x)$, то на росток $\tilde{\varepsilon} \in \mathscr{E}(r+1, n)$ налагаются только ограничения $\varepsilon(0, x) = 0$, $\varepsilon(t, 0) = 0$. Таким образом, следующие векторы, приведенные по модулю $\mathfrak{m}(n)^{k+1}$, исчерпывают все касательные векторы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(x + \varepsilon(t, x)))|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}\bigg|_{t=0}.$$

Поскольку на e нет других ограничений, кроме указанных выше, производная $\partial e_i/\partial t|_{t=0}$ может быть любым элементом из $\mathfrak{m}(n)$. Это означает, что касательное пространство есть $\mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle \bmod \mathfrak{m}(n)^{k+1}$

Мы уже отметили выше, что достаточность ростка на самом деле есть свойство его струи, и теперь поясним это более подробно. По аналогии с 11.3 r-струя $\hat{f} \in \hat{\mathscr{E}}_r(n)$ называется *k-определенной* (для некоторого $k \leqslant r$), если для любого $\hat{g} \in \hat{\mathscr{E}}_r(n)$, удовлетворяющего условию $\pi^r_k\hat{f} = \pi^r_k\hat{g} \in \hat{\mathscr{E}}_k(n)$, существует элемент $\hat{h} \in \hat{\mathscr{B}}_r(n)$, такой, что $\hat{f} = \hat{g} \circ \hat{h}$.

11.9. Следствие (теоремы Мезера 11.3). *Если $f \in \mathscr{E}(n)$ и струя $j^{k+1}(f)$ k-определена, то росток f k-определен.*

Доказательство. Положим

$$U = \{\hat{g} \in \hat{\mathscr{E}}_{k+1}(n) \mid \pi^{k+1}_k\hat{g} = j^k f\}.$$

Обозначим через $V = j^{k+1}(f)\hat{\mathscr{B}}_{k+1}(n)$ орбиту струи $j^{k+1}(f)$ под действием правых преобразований.

Если струя $j^{k+1}(f)$ k-определена, то множество $(k+1)$-струй с той же k-струей, что и у f, содержится в орбите струи $j^{k+1}(f)$, т. е. $U \subset V$. Следовательно, $T_fU \subset T_fV$. Однако $T_fU = \mathfrak{m}^{k+1}(n) \bmod \mathfrak{m}^{k+2}(n)$, поскольку всякая струя $g \in U$ отличается от $j^{k+1}(f)$ только в членах порядка $k+1$. По лемме 11.8, $\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle \bmod \mathfrak{m}(n)^{k+2}$, значит, по теореме Мезера, росток f $(k+1)$-определен. Но струя $j^{k+1}(f)$ k-определена, поэтому росток f также k-определен.

Это доказательство можно обобщить и получить такой результат.

11.10. Следствие.

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle \Rightarrow \text{росток } f\ k\text{-определен} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle.$$

В частности, росток $\tilde{f} \in \mathscr{E}(n)$ является конечно определенным в том и только в том случае, когда росток $D\tilde{f}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}^n$ конечен.

Доказательство. Первая импликация следует из теоремы Мезера. Если росток $\tilde{f}$ k-определен, то струя $j^{k+1}(f)$ k-определена и из доказательства первого следствия получаем, что

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+2}.$$

Отсюда, по лемме Накаямы, $\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle$ (см. второе замечание после 11.3).

Наконец, в 11.4 и предшествовавших замечаниях мы видели, что условие $\mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n)\langle\partial f/\partial x_i\rangle$ эквивалентно конечности ростка $D\tilde{f}$.

Утверждение о том, что конечная определенность ростка $\tilde{f}$ равносильна конечности Df, — это *теорема, принадлежащая Тужрону.* Из предыдущего вытекает, что верно более точное утверждение:

Если $\dim \mathscr{E}(n)/\langle\partial f/\partial x_i\rangle = k$, *то росток* $\tilde{f}$ $(k+1)$-*определен.*

11.11. Определение. Росток $\tilde{f} \in \mathscr{E}(n)$, удовлетворяющий условию $\tilde{f}(0) = D\tilde{f}(0) = 0$, называется *особым ростком*, или просто *особенностью*. Особенность называется *изолированной*, если росток множества $\Sigma(\tilde{f}) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = Df(x) = 0\}^{\sim}$ совпадает с ростком множества $\{0\}^{\sim}$. Особенность $\tilde{f}$ называется *алгебраически изолированной*, если росток $D\tilde{f}$ конечен (т. е. росток $\tilde{f}$ конечно определен).

11.12. Замечание. *Алгебраически изолированная особенность изолирована, но существуют изолированные особенности, не являющиеся алгебраически изолированными.*

Доказательство. Если $\mathfrak{m}(n)^k \subset \langle\partial f/\partial x_i\rangle_{\mathscr{E}(n)}$ и, в частности, $x_j^k \in \langle\partial f/\partial x_i\rangle_{\mathscr{E}(n)}$ для всех j, то из равенства

$Df(x)=0$ следует, что $x_i^k=0$, откуда $x_i=0$. Следовательно, алгебраически изолированная особенность изолирована.

С другой стороны, $\exp(-1/x^2)$ — это пример изолированной особенности с нулевой струей. Следовательно, эта особенность алгебраически не изолирована.

Вот еще один интересный пример.

11.13. Упражнение. Покажите, что особенность $(x^2+y^2)^2 \in \mathscr{E}(2)$ изолирована, но алгебраически не изолирована.

11.14. Замечание. Росток $(x^2+y^2)^2$ не является конечно определенным, но он определен своей бесконечной струей. Это верно для всякого вещественно аналитического ростка с изолированной в вещественном смысле особенностью. Такие ростки, кроме того, конечно определены относительно группы преобразований класса C^k для любого фиксированного $k<\infty$. Это утверждение вытекает из неравенства Лоясевича (см. Мальгранж, Идеалы дифференцируемых функций, стр. 73) и работы: Takens F., A note on sufficiency of Jets, *Invent. Math.*, **13** (1971), 225—231.

Как это часто бывает, в комплексном случае вся ситуация становится более приемлемой. Введем обозначения:

$\mathscr{A}(n)$ — кольцо вещественно аналитических ростков $(\mathbf{R}^n, 0)\to\mathbf{R}$;

$\mathscr{O}(n)$ — кольцо комплексно аналитических ростков $(\mathbf{C}^n, 0)\to\mathbf{C}$.

Имеются канонические вложения $\mathscr{A}(n)\subset\mathscr{E}(n)$ и $\mathscr{A}(n)\subset\mathscr{O}(n)$.

11.15. Лемма. *Пусть* $f\in\mathscr{A}(n)$. *Тогда*

$$\dim_{\mathbf{R}}\mathscr{E}(n)/\langle\partial f/\partial x_i\rangle_{\mathscr{E}(n)}<\infty$$

в том и только том случае, когда

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathscr{O}(n)/\langle\partial f/\partial z_i\rangle_{\mathscr{O}(n)}<\infty.$$

Доказательство. Обозначим максимальные идеалы в $\mathscr{A}(n)$ и $\mathcal{O}(n)$ через $\mathfrak{m}_{\mathscr{A}}(n)$ и $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}(n)$.

$\Rightarrow$. Из $\mathfrak{m}(n)^k \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathscr{E}(n)}$ следует включение $\mathfrak{m}(n)^k \subset \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathscr{E}(n)} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Кроме того,

$$(*) \qquad \mathfrak{m}_{\mathscr{A}}(n)^k \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathscr{A}(n)} + \mathfrak{m}_{\mathscr{A}}(n)^{k+1}.$$

Действительно, моном $\varphi \in \mathfrak{m}_{\mathscr{A}}(n)^k$ степени k может быть записан в виде

$$\varphi(x) = \sum \lambda_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \bmod \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Заменим каждое λ_i его многочленом Тейлора порядка k. Остаток лежит в $\mathfrak{m}(n)^{k+1}$ и аналитичен, следовательно, выполняется $(*)$.

По лемме Накаямы,

$$\mathfrak{m}_{\mathscr{A}}(n)^k \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathscr{A}(n)}.$$

В частности, всякий моном φ степени k принадлежит идеалу $\langle \partial f/\partial x_i \rangle_{\mathscr{A}(n)}$, а этот идеал содержится в $\langle \partial f/\partial x_i \rangle_{\mathcal{O}(n)}$. Но такие мономы порождают $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}(n)^k$, значит,

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}(n)^k \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_i} \right\rangle_{\mathcal{O}(n)}.$$

$\Leftarrow$. Производные $\partial f/\partial z_i(z)$ принимают вещественные значения при вещественных z. Это означает, что, взяв вещественные части в $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}(n)^k \subset \langle \partial f/\partial z_i \rangle_{\mathcal{O}(n)}$, мы получим $\mathfrak{m}_{\mathscr{A}}(n)^k \subset \langle \partial f/\partial z_i \rangle_{\mathscr{A}(n)}$ и, следовательно,

$$\mathfrak{m}_{\mathscr{A}}(n)^k \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_i} \right\rangle_{\mathscr{E}(n)}$$

Эта лемма показывает, что если росток f вещественно аналитичен и комплексный росток $f \in \mathcal{O}(n)$

алгебраически изолирован, то $\tilde{f}$ алгебраически изолирован как вещественный росток.

11.16. Теорема. *Комплексно аналитическая особенность алгебраически изолирована в том и только том случае, когда она изолирована.*

Доказательство. Пусть росток $\tilde{f} \in \mathcal{O}(n)$ алгебраически изолирован; тогда $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}(n)^k \subset \langle \partial f/\partial z_i \rangle$. В частности, $z_i^k \in \langle \partial f/\partial z_i \rangle$, поэтому

$$\Sigma(\tilde{f}) \subset \{z \mid Df(z) = 0\}^{\sim} \subset \{z \ z_i^k = 0\}^{\sim} = \{0\}^{\sim}.$$

Обратно, предположим, что $\{0\}^{\sim} = (\Sigma(f))^{\sim}$. Тогда $\{0\}^{\sim} = \{z \mid Df(z) = 0\}^{\sim}$, поскольку в противном случае нашлась бы содержащаяся в $\{z \mid Df(z) = 0\}$ вещественно аналитическая кривая $\varphi(t)$, такая, что $\varphi(0) = 0$ (см. лемму об отборе кривых в книге Милнора). Вдоль этой кривой мы имели бы $Df = 0$ и, следовательно, $f = 0$, поскольку $f(0) = 0$. Но это означало бы, что кривая $\varphi(t)$ лежит в $\Sigma(f)$, т. е. начало координат — неизолированная особенность.

Росток множества нулей идеала $\langle \partial f/\partial z_i \rangle$ состоит только из начала координат. Идеал всех ростков, обращающихся в нуль в начале координат, — это идеал $\langle z_i \rangle$. Теорема о нулях для голоморфных ростков (см. Ганнинг и Росси) утверждает, что в таком случае второй идеал является радикалом первого. Радикал — это множество таких ростков $\tilde{g}$, некоторая степень которых лежит в $\langle \partial f/\partial z_i \rangle$. Следовательно, $(z_i)^{kl} \in \langle \partial f/\partial z_i \rangle$, и отсюда вытекает, что $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}(n)^k \subset \langle \partial f/\partial z_i \rangle$ для достаточно большого k.

Вот одно из следствий предыдущих теорем: *голоморфный росток с изолированной особенностью в начале координат всегда можно преобразовать в полиномиальный росток с помощью голоморфной замены координат*. Это вытекает из того, что для аналитических ростков все описанные выше преобразования могут быть выбраны аналитическими.

Вопрос о том, является ли росток $\bar{f} \in \mathscr{E}(n, m)$ конечно определенным при $m > 1$, можно решать точно таким же образом, как и при $m = 1$. Однако при $m > 1$ росток конечно определен в том и только том случае, когда он имеет ранг m. Поэтому в общем случае мы поступим более разумно, если разрешим делать преобразования образа, т. е. $\mathbf{R}^m$, и будем изучать орбиты действия группы $\mathscr{B}(n) \times \mathscr{B}(m)$ на $\mathscr{E}(n, m)$. В этом случае тоже имеются явные условия конечной определенности, которые формулируются в терминах вложения конечномерных векторных пространств. Эти условия анологичны тем, которые приводились выше, и мы не будем их больше обсуждать в этой книге. Метод доказательства тот же, что представленный выше для теоремы Мезера. Однако в том месте, где мы воспользовались леммой Накаямы, приходится применять подготовительную теорему Мальгранжа

12. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Литература: С. Ленг, Алгебра, «Мир», М., 1968.
S. Lang, Introduction to algebraic geometry, Wiley, 1964.
В. Ходж, Д. Пидо, Методы алгебраической геометрии, т. 1—3, ИЛ, М., 1954, 1955.
H. Whitney, Elementary structure of real algebraic varieties, *Ann. of Math.*, 66 (1957), 545—556.

В этой главе собраны вместе несколько фактов из алгебраической геометрии, которые понадобятся нам в следующей главе. Материал этой главы не был бы столь обширен, если бы нам не пришлось еще ввести некоторую технику, необходимую для разложения алгебраических множеств. Эта техника — первый шаг к теории стратификации, играющей важную роль в изучении особенностей.

Пусть K — некоторое поле (обычно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$), и пусть K^n — векторное пространство n-строк над K.

12.1. Определение. Подмножество $A \subset K^n$ называется *алгебраическим*, если существуют такие многочлены $f_1, \ldots, f_r \in K[x] = K[x_1, \ldots, x_n]$, что

$$A = \{x \in K^n \mid f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0\}$$

(мы пишем $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

Пусть A — произвольное подмножество в K^n. Обозначим идеал, состоящий из всех многочленов, обращающихся в 0 на A, через $\mathfrak{n}(A)$. Таким образом,

$$\mathfrak{n}(A) = \{f \in K[x] \mid f(a) = 0 \text{ для всех } a \in A\}.$$

Обратно, всякий идеал $\mathfrak{a} \subset K[x]$ позволяет определить подмножество $V(\mathfrak{a}) \subset K^n$, называемое *множеством нулей идеала* $\mathfrak{a}$:

$$V(\mathfrak{a}) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \text{ для всех } f \in \mathfrak{a}\}.$$

Следующая теорема устанавливает, что подмножество $V(\mathfrak{a})$ алгебраическое.

12.2. Теорема Гильберта о базисе. *Кольцо многочленов $K[x]$ нётерово, т. е. всякий идеал в нем конечно порожден* (см. Ленг, Алгебра). ∎

Согласно этой теореме, $V(\mathfrak{a})$ — это множество общих нулей образующих $\{f_1, \ldots, f_r\}$ идеала $\mathfrak{a}$. По определению, множество A является алгебраическим, если справедливо равенство $V(\mathfrak{n}(A)) = A$. Для всякого подмножества $A \subset K^n$ выполняется включение $V(\mathfrak{n}(A)) \supset A$. Следовательно, $V(\mathfrak{n}(A))$ — это наименьшее алгебраическое подмножество, содержащее A.

Если A и B — алгебраические множества, то

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathfrak{n}(A) \supset \mathfrak{n}(B).$$

Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы в $K[x]$, то

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Leftrightarrow V(\mathfrak{a}) \supset V(\mathfrak{b}).$$

Всякой убывающей последовательности алгебраических множеств

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

соответствует возрастающая последовательность идеалов, обращающихся в нуль на этих множествах:

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \ldots \qquad (\mathfrak{a}_i = \mathfrak{n}(A_i)).$$

Поскольку кольцо $K[x]$ нётерово, существует такое n, что все образующие идеала $\mathfrak{a} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i$ содержатся в $\mathfrak{a}_n$, следовательно, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_n$. Таким образом, последовательность идеалов перестает возрастать, начиная с номера n, а значит, последовательность алгебраических множеств перестает убывать, начиная с номера n. Итак, справедливо утверждение:

12.3. *Всякая строго убывающая последовательность алгебраических множеств конечна* (теорема о базисе).

Отсюда следует, что K^n можно наделить топологией, в которой роль замкнутых множеств будут играть алгебраические множества. Это так называемая *топология Зарисского.* В случае, когда $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, она гораздо слабее, чем обычная топология.

Объеднненне двух алгебраических множеств очевидно является алгебраическим множеством, поскольку $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. Всякое пересечение алгебраических множеств на самом деле, как мы видели, сводится к конечному пересеченню. В качестве множества многочленов, определяющих $A \cap B$, можно взять объеднненне множества многочленов, определяющих A, и множества многочленов, определяющих B.

Всякое алгебраическое множество можно наделить топологней, индуцированной топологией Зарисского на K^n, и для произвольного подмножества $A \subset K^n$ множество $V(\mathfrak{n}(A))$ является замыканием A в топологии Зарисского.

Из определений следует, что идеал $\mathfrak{n}(V(\mathfrak{a}))$ всегда содержит $\mathfrak{a}$, но равенство в общем случае может не иметь места.

12.4. Теорема о нулях (Гильберт). *Если поле K алгебраически замкнуто, то идеал $\mathfrak{n}(V(\mathfrak{a}))$ является радикалом идеала $\mathfrak{a}$, т. е.*

$$\mathfrak{n}(V(\mathfrak{a})) = \{f \in K[x] \mid f^r \in \mathfrak{a} \text{ для некоторого } r\}$$

(см. Ленг, Алгебра). ∎

Очевидно, что радикал идеала $\mathfrak{a}$ содержится в $\mathfrak{n}(V(\mathfrak{a}))$, поскольку

$$f^r \in \mathfrak{a} \Rightarrow f^r \mid V(\mathfrak{a}) = 0 \Rightarrow f \mid V(\mathfrak{a}) = 0 \Rightarrow f \in \mathfrak{n}(V(\mathfrak{a})).$$

12.5. Определенне. Алгебраическое множество A называется *неприводимым*, если для любых двух алгебраических множеств A_1 и A_2, удовлетворяющих условию $A = A_1 \cup A_2$, либо $A = A_1$, либо $A = A_2$. Неприводимое алгебраическое множество называют также (алгебраическим) *многообразием.*

Многообразие не может быть разложено в объединение двух меньших алгебраических множеств. Взяв дополнения в топологии Зарисского, можно перефразировать это определение: алгебраическое множество A

называется многообразием, если пересечение любых двух его непустых открытых подмножеств непусто.

Произвольное алгебраическое множество A, не являющееся неприводимым, можно разложить в объединение алгебраических множеств: $A = A_1 \cup A_2$. Итерируя этот процесс, мы придем в конце концов к разложению $A = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ на неприводимые множества (по теореме о базисе). В случае, когда между членами этого разложения нет включений $A_i \subset A_j$ при $i \neq j$, это разложение единственно с точностью до перемены порядка его членов. Действительно, если $A = B_1 \cup \ldots \cup B_s$ — второе разложение без включений, то для каждого i существуют такие j и k, что $A_i \subset B_j \subset A_k$; это вытекает из неприводимости множеств A_i и B_j. Поскольку между членами обоих разложений нет включений, то $i = k$ и $A_i = B_j$.

Неприводимые множества в таком разложении A называются *неприводимыми компонентами* A.

12.6. *Алгебраическое множество V неприводимо в том и только том случае, когда идеал $\mathfrak{n}(V)$ простой.*

(Идеал $\mathfrak{n}$ называется *простым*, если $f \circ g \in \mathfrak{n} \Rightarrow f \in \mathfrak{n}$ либо $g \in \mathfrak{n}$.)

Доказательство. Если множество V неприводимо и $f \cdot g \in \mathfrak{n}(V)$, то $V \subset V(\langle f\rangle) \cup V(\langle g\rangle)$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $V \subset V(\langle f\rangle)$ и, следовательно, $f \in \mathfrak{n}(V)$.

Обратно, предположим, что V приводимо, а именно $V \subset A \cup B$, $V \not\subset A$ и $V \not\subset B$. Возьмем такие $f \in \mathfrak{n}(A)$ и $g \in \mathfrak{n}(B)$, что $f \notin \mathfrak{n}(B)$ и $g \notin \mathfrak{n}(A)$. Тогда

$$f \cdot g \in \mathfrak{n}(A \cup B) \subset \mathfrak{n}(V), \text{ но } f \notin \mathfrak{n}(V) \text{ и } g \notin \mathfrak{n}(V). \ \blacksquare$$

Пусть $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал в $K[x]$. *Рангом* идеала $\mathfrak{a}$ называется число

$$\rho(\mathfrak{a}) = \max_{x \in V(\mathfrak{a})} \operatorname{Rk}_x(f_1, \ldots, f_k),$$

где $f_1, \ldots, f_k$ — любая система образующих идеала $\mathfrak{a}$ и

$$\operatorname{Rk}_x(f_1, \ldots, f_k) = \text{ранг}\left(\frac{\partial_i}{\partial x_j}(x)\right).$$

Ранг ρ идеала $\mathfrak{a}$ действительно не зависит от выбора системы образующих, так как если $g_1, \ldots, g_m$ — другая система образующих, то $g_i = \sum_j a_{ij} f_j$ для некоторых $a_{ij} \in K[x]$. Поскольку $f_l(x) = 0$ для $x \in V$, получаем, что на V

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_r}\right) = (a_{ij}) \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_r}\right).$$

Следовательно, $\mathrm{Rk}_x(g_1, \ldots, g_m) \leqslant \mathrm{Rk}_x(f_1, \ldots, f_k)$ для $x \in V$; соответствующее рассуждение в другом направлении дает равенство.

Для простоты мы будем, начиная с этого места, предполагать, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Пусть $V \neq \varnothing$ — многообразие (неприводимое). Поскольку $\mathfrak{n}(V)$ — простой идеал, $K[x]/\mathfrak{n}(V)$ — кольцо без делителей нуля. Рассмотрим его поле частных:

$$K(V) = Q(K[x]/\mathfrak{n}(V)).$$

Векторное пространство $(K(V))^n$ n-строк над полем $K(V)$ содержит точку $x = (x_1, \ldots, x_n)$, координатами которой являются переменные x_i по модулю $\mathfrak{n}(V)$. Эта точка называется *общей точкой* многообразия V. Далее, имеется каноническое вложение $K \subset K(V)$, и, значит, мы можем подставить точку из $(K(V))^n$ в любой многочлен $f \in K[x]$. По определению общей точки получаем:

12.7. *Многочлен $f \in K[x]$ обращается в нуль на V в том и только том случае, когда f обращается в нуль в общей точке:*

$$f \in \mathfrak{n}(V) \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ в } K(V).$$

В частности, ранг идеала $\mathfrak{n}(V)$ равен рангу системы образующих $(f_1, \ldots, f_k)$ идеала $\mathfrak{n}(V)$ в общей точке. Это вытекает из того, что любой минор Φ матрицы $(\partial f_i/\partial x_j)$ удовлетворяет условию $\Phi(V) = 0$ в том и только том случае, когда $\Phi(x) = 0$ для общей точки $x \in K(V)$.

12.8. Определение. *Размерностью* многообразия V называется степень трансцендентности поля $K(V)$ над полем K.

12.9. Теорема. *Размерность многообразия* $V \subset K^n$ *равна корангу идеала* $\mathfrak{n}(V)$, *т. е.* $\dim V = n - \rho(\mathfrak{n}(V))$.

Доказательство. Пусть $\dim V = d =$ степень трансцендентности $K(V)$ над K. Сделав подходящую перестановку координат, можно считать, что элементы $x_{d+i} \in K(V)$ алгебраичны над полем $K(x_1, \ldots, x_d)$. Следовательно, существует неприводимый многочлен g_i (многочлен наименьшей степени), такой, что $g_i(x_1, \ldots, x_d, x_{d+i}) = 0$ в $K(V)$, или, эквивалентно, $g_i \in \mathfrak{n}(V)$. В частности, $\partial g_i/\partial x_{d+i}(x) \neq 0$ в $K(V)$. (Если $\partial g_i/\partial x_{d+i} \equiv 0$, то g_i как многочлен от переменной x_{d+i} есть константа. Тогда $(x_1, \ldots, x_d)$ алгебраически зависимы. Если $\partial g_i/\partial x_{d+i} \not\equiv 0$, то равенство $\partial g_i/\partial x_{d+i} = 0$ было бы алгебраическим соотношением для x_d, степень которого меньше, чем степень соотношения $g_i(x) = 0$.)

Отсюда вытекает, что матрица $(\partial g_i/\partial x_j(x))$ имеет ранг $n - d$ в общей точке и $g_i \in \mathfrak{n}(V)$ для любого i. Поэтому $\rho(\mathfrak{n}(V)) \geqslant n - d$.

Теперь покажем, что $\rho \leqslant n - d$.

Для этого мы используем два факта. Во-первых, дифференцирования D_i поля $K(x_1, \ldots, x_n)$, обладающие тем свойством, что $D_i \mid K = 0$, однозначно определяются уравнением $D_i x_j = \delta_{ij}$. Во-вторых, всякое дифференцирование поля (в данном случае $K(x_1, \ldots, x_d)$) можно единственным образом продолжить на алгебраическое расширение этого поля (в данном случае — поле $K(V)$).

См. Ленг, Алгебра, X, § 7, предл. 10. Определение D_i на рациональных функциях из $K(x)$ использует обычные правила дифференциального исчисления. Расширение D с поля K на поле $K(y)$, где y — алгебраический элемент, определяется минимальным многочленом элемента y. Пусть $p(y) = \sum p_j y^j$ — минимальный многочлен. Положим $p^D(y) = \sum D(p_j) y^j$. Тогда

$$D(p(y)) = 0 = p^D(y) + p'(y) \cdot D(y).$$

Поскольку многочлен p минимален, $p'(y) \neq 0$, и мы получаем формулу, из которой определяется $D(y)$. Тем самым дифференцирование задается на $K(y)$.

Векторное пространство дифференцирований поля $K(V)$, обращающихся в нуль на K, в нашем случае имеет размерность d. Базисом этого пространства является $\{D_i \mid i=1, \ldots, d\}$, где $D_i(x_j)=\delta_{ij}$ для $j \leqslant d$. Если $\{f_1, \ldots, f_k\}$ — система образующих идеала $\mathfrak{n}(V)$, то в общей точке x мы имеем $f_j(x)=0$. Следовательно,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}+\sum_{\nu=1}^{n-d} \frac{\partial f_j}{\partial x_{d+\nu}} \cdot D_i(x_{d+\nu})=0, \qquad i=1, \ldots, d.$$

Итак, для минимальных многочленов g_ν элементов $x_{d+\nu}$ имеем

$$\frac{\partial g_\nu}{\partial x_i}+\frac{\partial g_\nu}{\partial x_{d+\nu}} \cdot D_i(x_{d+\nu})=0, \qquad \nu=1, \ldots, n-d.$$

Подставляя это равенство в предыдущие, находим, что в общей точке

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=\sum_{\nu=1}^{n-d} \frac{\partial f_j}{\partial x_{d+\nu}} \cdot \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \cdot\left(\frac{\partial g_\nu}{\partial x_{d+\nu}}\right)^{-1} \quad \text{для } i=1, \ldots, d.$$

Тем самым показано, что первые d столбцов матрицы $Df(x)$, $x \in K(V)^n$, суть линейные комбинации последних $n-d$ столбцов. Следовательно, $\rho \leqslant n-d$. ∎

12.10. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ — *простые идеалы в* $K[x]$. *Обозначим через* $d(\mathfrak{a})$ *степень трансцендентности* $K(\mathfrak{a})$ *над* K, *где* $K(\mathfrak{a})=Q(K[x]/\mathfrak{a})$. *Определим аналогично* $d(\mathfrak{b})$. *Тогда* $d(\mathfrak{a}) \geqslant d(\mathfrak{b})$, *и если* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, *то* $d(\mathfrak{a})>d(\mathfrak{b})$.

Доказательство. Предположим, что $x_1, \ldots, x_d$ алгебраически независимы в $K(\mathfrak{b})$, но связаны алгебраическим соотношением $f(x_1, \ldots, x_d)=0$ в $K(\mathfrak{a})$. Это означает, что $f(x_1, \ldots, x_d)$ принадлежит $\mathfrak{a}$, но не принадлежит $\mathfrak{b}$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $d(\mathfrak{a}) \geqslant d(\mathfrak{b})$.

Предположим теперь, что $d(\mathfrak{a})=d(\mathfrak{b})$. Пусть $\{x_1, \ldots, x_d\}$ — базис трансцендентности для $K(\mathfrak{b})$. Мы предположим, что $f \in \mathfrak{b}$, и выведем отсюда, что $f \in \mathfrak{a}$. Пусть f представляет элемент из $K(\mathfrak{a})$, алгебраический над $K(x_1, \ldots, x_d)$. Тогда существует многочлен $g \in K(x_1, \ldots, x_d)[t]$, такой, что

$$g(x_1, \ldots, x_d, f)=0 \quad \text{в} \quad K(\mathfrak{a}).$$

Обозначим произведение знаменателей коэффициентов g в $K(x_1, \ldots, x_d)$ через $q(x_1, \ldots, x_d) \neq 0$. Умножим g на это произведение. Получим

$$h(x, t) = q(x) \cdot g(x, t) \in K[x_1, \ldots, x_d, t].$$

Отсюда $h(x_1, \ldots, x_d, f) = 0$ в $K(\mathfrak{a})$ и, значит, $h(x_1, \ldots$ $\ldots, x_d, f) \in \mathfrak{a}$. Выбрав g минимальным по отношению к t, мы можем считать, что $h(x_1, \ldots, x_d, 0) \neq 0$ в $K(\mathfrak{a})$, так как в противном случае $f = 0$ в $K(\mathfrak{a})$, т. е. $f \in \mathfrak{a}$.

Рассмотрим теперь проекцию

$$\varphi: K[x]/\mathfrak{a} \to K[x]/\mathfrak{b};$$

поскольку $\varphi(f) = 0$, $\varphi(h(x_1, \ldots, x_d, f))$ равно $h(x_1, \ldots$ $\ldots, x_d, 0)$ (в зависимости от контекста рассматриваемые многочлены берутся либо по модулю идеала $\mathfrak{a}$, либо по модулю идеала $\mathfrak{b}$). По построению, $h(x_1, \ldots$ $\ldots, x_d, f) = 0$ в $K[x]/\mathfrak{a}$ и, значит, $h(x_1, \ldots, x_d, 0) = 0$ в $K(\mathfrak{b})$. Отсюда следует, что многочлен $h(x_1, \ldots, x_d, 0)$ нулевой, ибо $x_1, \ldots, x_d$ алгебраически независимы. Это противоречит сделанному ранее предположению, если только $f \notin \mathfrak{a}$; значит, $f \in \mathfrak{a}$, что и требовалось доказать. ∎

В частности, если $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}(W)$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}(V)$, то мы получаем

12.11. Следствие. *Если $V \subset W$ — два многообразия, то* $\dim V \leqslant \dim W$, *причем* $\dim V = \dim W$ *в том и только том случае, когда* $V = W$. ∎

Размерностью произвольного алгебраического множества A (обозначается $\dim A$) называется наибольшая из размерностей его неприводимых компонент. Число $(n - \dim A)$ называется *коразмерностью* A. Следовательно, для произвольных алгебраических множеств из включения $A \subset B$ следует, что $\dim A \leqslant \dim B$. Если же B неприводимо, то из соотношений $A \subset B$ и $\dim A = \dim B$ следует, что $A = B$.

Если A — алгебраическое множество, определенное многочленами $\{f_1, \ldots, f_k\}$, то его *множество особых точек* определяется равенством

$$\Sigma A = \{x \in A \mid \mathrm{Rk}_x(f_1, \ldots, f_k) \text{ не равен своему максимальному значению на } A\}.$$

Множество $A - \Sigma A$ называется *множеством регулярных точек* A, а его точки — *регулярными точками*. Таким образом, x является регулярной точкой A, если $\mathrm{Rk}_x(f_1, \ldots, f_k) = \rho(\mathfrak{n}(A)) = n - \dim A$. По определению ранга идеала, множество регулярных точек A не пусто. Следовательно, множество ΣA строго меньше, чем A. Кроме того, множество ΣA алгебраическое, поскольку оно определяется как множество таких точек A, у которых обращаются в нуль все $(\rho \times \rho)$-миноры матрицы $(\partial f_i/\partial x_j)$.

Связь между приведенным выше определением размерности алгебраического множества и топологическим определением размерности устанавливается следующей теоремой.

12.12. Теорема. *Если $V \subset K^n$ — алгебраическое многообразие, то множество регулярных точек $V - \Sigma V$ — аналитическое многообразие вещественной или комплексной (в зависимости от контекста) размерности* $\dim V$.

Предположим на некоторое время, что этот результат имеет место, и разложим алгебраическое множество A на неприводимые подмножества: $A = V_1 \cup \ldots \cup V_r$. Тогда множество

$$A - \Big(\bigcup_{i \neq j} (V_i \cap V_j) \cup \bigcup_i \Sigma V_i\Big)$$

можно разложить в объединение r непустых аналитических многообразий:

$$V_i - \Big(\Big(V_i \cap \bigcup_{j \neq i} V_j\Big) \cup \Sigma V_i\Big).$$

Подмножества, которые мы отбросили, являются алгебраическими, поэтому к ним можно применить ту же процедуру. Размерность $\Big(V_i \cap \bigcup_{j \neq i} V_j\Big) \cup \Sigma V_i$, вычисленная по алгебраическому определению, меньше размерности V_i. Следовательно, итерации этого процесса оборвутся после $(\dim A)$ шагов. В результате этой конструкции мы разложим A в дизъюнктное объединение аналитических многообразий, размерности которых $\leqslant \dim A$ (и по крайней мере одно из них имеет ту же размерность, что и A).

Доказательство теоремы. Пусть $x \in V - \Sigma V$, скажем $x = 0$, и $f_1, \ldots, f_\rho \in \mathfrak{n}(V)$ — такие многочлены, что $\mathrm{Rk}_0(f_1, \ldots, f_\rho) = \rho = n - \dim V$. Тогда $V \subset W = \{x \mid f_1(x) = \ldots = f_\rho(x) = 0\}$. Поскольку множество V неприводимо, оно содержится в некоторой неприводимой компоненте, скажем W_0, множества W, и мы имеем $\rho = \mathrm{Rk}\,\mathfrak{n}(V) \geqslant \mathrm{Rk}\,\mathfrak{n}(W_0) \geqslant \rho$, где первое неравенство следует из теоремы 12.10, а второе вытекает из того, что $f_1, \ldots, f_\rho \in \mathfrak{n}(W_0)$ и $0 \in V \subset W_0$. Следовательно, $\mathrm{Rk}\,\mathfrak{n}(V) = \mathrm{Rk}\,\mathfrak{n}(W_0)$, и так как, по теореме 12.10, $V = W_0$, то V — неприводимая компонента W. Теперь нужно доказать, что множество W локально (в смысле топологии Зарисского) неприводимо (т. е. локально $W = V$). Это завершит доказательство теоремы, поскольку локально W является аналитическим многообразием. Но локальная неприводимость W означает, что функции $\{f_1, \ldots, f_\rho\}$ порождают простой идеал $\langle f \rangle$ в локальном кольце

$$K[x]_0 = \{g/h \mid g,\ h \in K[x],\ h(0) \neq 0\}.$$

Ясно, что эти функции порождают простой идеал в кольце формальных степенных рядов $K[[x]]$. Действительно, по теореме о неявной функции можно преобразовать эти функции в первые ρ координатных функций. Остается только показать, что если

$$g \in K[x]_0, \quad g = \sum a_\nu f_\nu, \quad \text{где } a_\nu \in K[[x]], \quad \text{то } g \in \langle f \rangle.$$

Но это равносильно равенству $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} (\langle f \rangle + \mathfrak{m}^r) = \langle f \rangle$, где через $\mathfrak{m}$ обозначен максимальный идеал в $K[x]_0$. Вычисляя по модулю идеала $\langle f \rangle$, мы видим, что остается доказать следующее утверждение:

Теорема Крулля. *Пусть R — нётерово локальное кольцо и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Тогда $\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}^r = 0$.*

Доказательство. Пусть идеал $\mathfrak{m}$ порожден элементами $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через $R[\mathfrak{m}t]$ «кольцо Риса»: $R[\mathfrak{m}t] = \coprod_{r=0}^{\infty} \mathfrak{m}^r t^r$ (т. е. множество многочленов от t, у которых коэффициент при t^r лежит в $\mathfrak{m}^r$, с очевидной кольцевой структурой). Тогда элементы $x_1 t, \ldots, x_n t$ порождают $R[\mathfrak{m}t]$ над R, и, значит, по теореме Гильберта о базисе кольцо $R[\mathfrak{m}t]$ нётерово. Положим $D = \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}^r$. Тогда идеал $D[t] \subset R[\mathfrak{m}t]$ конечно порожден. Предположим, что все его образующие имеют степень $\leqslant s$. Тогда $D[t] \subset R[\mathfrak{m}t] \cdot \coprod_{r=0}^{s} t^r D$, и, сравнивая коэффициенты при t^{s+1}, находим, что $D \subset \mathfrak{m}D$. Значит, $D = 0$ по лемме Накаямы. ∎

Для подготовки к доказательству теоремы 12.14 докажем такое утверждение.

12.13. Лемма. *Проекция $\pi\colon K^{n+1} \to K^n$, определяемая формулой $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$, является открытым отображением относительно топологии Зарисского.*

Доказательство. Пусть U — открытое в топологии Зарисского множество в K^{n+1}, т. е. множество $A = (K^{n+1} - U)$ алгебраическое. Тогда

$$x \notin \pi(U) \Leftrightarrow \pi^{-1}(x) \cap U = \varnothing \Leftrightarrow \pi^{-1}(x) \subset A.$$

Таким образом, нужно показать, что множество $V = \{x \in K^n \mid \pi^{-1}(x) \subset A\}$ алгебраическое. Предположим, что идеал $\mathfrak{n}(A)$ порожден элементами $\{f_1, \ldots, f_k\}$, $f_i \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, и

$$f_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_j a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_{n+1}^j,$$
$$a_{ij} \in K[x_1, \ldots, x_n].$$

Ясно, что $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ в том и только том случае, когда $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$ при любом значении x_{n+1}, т. е. в том и только том случае, когда $a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Следовательно,

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ для всех } (i, j)\}. \blacksquare$$

12.14. Теорема. *Пусть V — неприводимое алгебраическое множество в K^n. Тогда множество $\pi^{-1}(V) \subset K^{n+1}$ также неприводимо и* $\operatorname{codim} V = \operatorname{codim} \pi^{-1}(V)$.

Доказательство. Если множество V состоит из одной точки, т. е. $V = \{a\}$, то множество $\pi^{-1}\{a\}$ неприводимо. Это вытекает из того, что идеал $\langle (x_i - a_i) \mid i = 1, \ldots, n \rangle$, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на $\pi^{-1}\{a\}$, есть ядро отображения

$$\begin{aligned} K[x_1, \ldots, x_{n+1}] &\to K[x_{n+1}], \\ x_i &\mapsto a_i \text{ для } i \leqslant n, \\ x_{n+1} &\mapsto x_{n+1}. \end{aligned}$$

Так как $K[x_{n+1}]$ — кольцо без делителей нуля, то ядро этого отображения является простым идеалом.

Перейдем теперь к общему случаю. Мы должны показать, что если множества $U_1, U_2 \subset \pi^{-1}(V)$ открыты и непусты, то $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Если множество U_i непусто и открыто, то же верно и для множества $\pi(U_i)$. Поскольку множество V неприводимо, должен существовать элемент $a \in \pi(U_1) \cap \pi(U_2)$. Отсюда получаем, что $\pi^{-1}\{a\} \cap U_i \neq \varnothing$. Далее, поскольку множество $\pi^{-1}\{a\}$ неприводимо, множества $\pi^{-1}\{a\} \cap U_1$ и $\pi^{-1}\{a\} \cap \cap U_2$ имеют общую точку и, значит, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

Ясно, что $\mathfrak{n}(V) \subset \mathfrak{n}(\pi^{-1}(V))$, и потому $\rho(\mathfrak{n}(V)) \leqslant \rho(\mathfrak{n}(\pi^{-1}(V)))$. Обратно, если $f_1, \ldots, f_k \in \mathfrak{n}(\pi^{-1}(V))$, то $f_i(x_1, \ldots, x_n, a) \in \mathfrak{n}(V)$ для любой константы $a \in K$. Кроме того, $\partial f_i / \partial x_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, a) = 0$ для $(x_1, \ldots, x_n) \in V$. Выберем некоторую точку $(x_1, \ldots, x_n, a) \in \pi^{-1}(V)$. Тогда

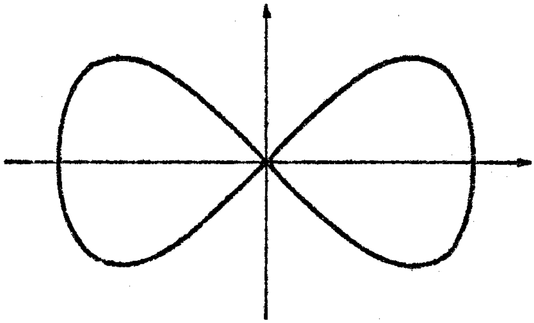
$$\operatorname{Rk}_{(x, a)}(f_1, \ldots, f_k) = \operatorname{Rk}_x(f_1(x, a), \ldots, f_k(x, a))$$

и $f_i(x, a) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, откуда $\rho(\mathfrak{n}(\pi^{-1}(V))) \leqslant \rho(\mathfrak{n}(V))$. $\blacksquare$

Последнее рассуждение показывает также, что $\pi^{-1}(V - \Sigma V) = \pi^{-1}(V) - \Sigma\pi^{-1}(V)$; это равенство согласуется с нашими интуитивными представлениями, когда мы интерпретируем размерность топологически.

12.15. Единственный пример в этой главе:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2(1 - x^2) = 0\},$$
$$\Sigma V = \{0\}.$$



13. ТЕОРИЯ ТУЖРОНА

Литература: J. C. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables I, *Ann. Inst. Fourier*, 18 (1968), 177—240.

В условиях различных доказанных нами утверждений о ростках часто встречалось требование конечности ростка $\bar{f}$: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, т. е. требование о том, что пространство $\mathscr{E}(n)/\langle f_1, \ldots, f_p\rangle$ имеет конечную размерность. Как велико (неприятное) множество таких ростков $\bar{f}$, для которых $\dim \mathscr{E}(n)/\langle f_1, \ldots, f_p\rangle = \infty$? Рассмотрим импликации

(i) $\dim \mathscr{E}(n)/\langle f_1, \ldots, f_p\rangle = k \Rightarrow$

(ii) $\dim \mathscr{E}(n)/(\langle f_1, \ldots, f_p\rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}) =$

$\dim \hat{\mathscr{E}}_k(n)/\langle \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p\rangle \leqslant k \Rightarrow$

(лемма Накаямы)

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \langle f_1, \ldots, f_p\rangle_{\mathscr{E}(n)} + \mathfrak{m}(n)^{k+1} \Rightarrow$$

(лемма Накаямы)

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n)^k \subset \langle f_1, \ldots, f_p\rangle_{\mathscr{E}(n)}.$$

При одновременном выполнении последнего условия и условия (ii) имеем $\dim \mathscr{E}(n)/\langle f_1, \ldots, f_p\rangle \leqslant k$. Это доказывает, в частности, такое утверждение.

13.1. Замечание. $\dim \mathscr{E}(n)/\langle f_1, \ldots, f_p\rangle < \infty$ *в том и только том случае, когда* $\dim \hat{\mathscr{E}}_k(n)/\langle \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p\rangle \leqslant k$ *для некоторого* k.

Это условие полезно, поскольку оно формулируется в терминах последовательности конечномерных пространств струй. Сейчас мы введем несколько новых понятий, для того чтобы изложить более элегантно оставшуюся часть главы. Рассмотрим последовательность евклидовых пространств и проекций:

$$\hat{\mathscr{E}}(n, p) \xrightarrow{\pi^\infty} \ldots \to \hat{\mathscr{E}}_{k+1}(n, p) \xrightarrow{\pi_k^{k+1}}$$
$$\to \hat{\mathscr{E}}_k(n, p) \xrightarrow{\pi_{k-1}^k} \hat{\mathscr{E}}_{k-1}(n, p) \to \ldots .$$

13.2. Определение. Подмножество $A \subset \hat{\mathscr{E}}(n, p)$ называется *проалгебраическим*, если существуют алгебраические множества $A_k \subset \hat{\mathscr{E}}_k(n, p)$, такие, что

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\pi_k^\infty)^{-1}(A_k).$$

Легко видеть, что это определение не изменится, если мы потребуем, чтобы $\pi_k^{k+1}(A_{k+1}) \subset A_k$. Предполагая выполненным это условие, назовем *коразмерностью* множества A верхнюю грань коразмерностей множеств A_k. Обозначим через π_k^∞ каноническую проекцию

$$\pi_k^\infty\colon \hat{\mathscr{E}}(n, p) \to \hat{\mathscr{E}}_k(n, p) = \mathscr{E}(n, p)/\mathfrak{m}(n, p)^{k+1}.$$

13.3. Упражнение. Введем на $\hat{\mathscr{E}}(n, p)$ слабейшую топологию, обладающую тем свойством, что все проекции π_k^∞ непрерывны относительно топологии Зарисского на $\hat{\mathscr{E}}_k(n, p)$. Покажите, что проалгебраические множества образуют совокупность замкнутых множеств этой топологии.

Введя эти новые понятия, вернемся к не конечным росткам. Положим

$$Y_k = \{\hat{f} = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p) \mid \dim \hat{\mathscr{E}}_k(n)/\langle \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p \rangle > k\}.$$

Множество Y_k есть подмножество в $\hat{\mathscr{E}}_k(n, p)$, и замечание 13.1 показывает, что росток f не конечен в том и только том случае, когда $j^k(f) \in Y_k$ для всех k.

Положим $\bigcap_{k=1}^{\infty} (\pi_k^\infty)^{-1} Y_k = Y$. Тогда совокупность условий на f можно записать в виде $j(f) \in Y$. Заметим, что $Y_{k+1} \subset \pi^{-1} Y_k$. Действительно, если $f \notin \pi^{-1} Y_k$, то $\dim \mathscr{E}(n)/\langle f_1, \ldots, f_p\rangle \leqslant k$ и, следовательно, $f \notin Y_{k+1}$ (здесь мы использовали обозначение $\pi = \pi_k^{k+1}$).

Сформулируем теперь важный результат этой главы.

13.4. Теорема (Тужрон). *Множества Y_k — алгебраические. Кроме того, если $n \leqslant p$, то Y — проалгебраическое множество бесконечной коразмерности.*

Доказательство первой части теоремы. $f \in Y_k \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dim (\hat{\mathscr{E}}_k(n)/\langle f_1, \ldots, f_p\rangle) > k \Leftrightarrow \dim (\langle f_1, \ldots, f_p\rangle \cdot \cdot \hat{\mathscr{E}}_k(n)) < \dim \hat{\mathscr{E}}_k(n) - k$.

Обозначим $(\dim \hat{\mathscr{E}}_k(n) - k)$ через $r(k)$.

Пусть $\{\varphi_j\}$ — множество всех мономов степени $\leqslant k$ в $\mathscr{E}(n)$; тогда $(f_1, \ldots, f_p) \in Y_k$ в том и только том случае, когда ранг линейного отображения

$$\mathbf{R}^p \otimes \langle \varphi_j \rangle_{\mathbf{R}} \to \hat{\mathscr{E}}_k(n),$$
$$e_i \otimes \varphi_j \longmapsto j^k (f_i \cdot \varphi_j)$$

меньше $r(k)$. Это условие определяется обращением в нуль некоторых определителей, являющихся многочленами от коэффициентов k-струй ростков f_i. ∎

Для доказательства второй части теоремы нам понадобится следующая лемма.

13.5. Лемма. $\operatorname{codim} Y = \infty$ *в том и только том случае, когда для каждой k-струи f_k найдутся такие $l > k$ и l-струя f_l, что $\pi_k^l f_l = f_k$ и $f_l \notin Y_l$.*

Второе условие можно выразить, сказав, что для каждой струи найдется проектирующаяся в нее конечная струя.

Доказательство леммы. Предположим, что верхняя грань коразмерностей множеств Y_k равна бесконечности, и что не существует конечной струи, лежащей над $f_k \in \hat{\mathscr{E}}_k(n)$. Тогда $(\pi_k^l)^{-1} f_k \subset Y_l$ для всех $l > k$ и, значит, Y_l имеет самое большее ту же коразмерность, что и $(\pi_k^l)^{-1} f_k$. Но эта коразмерность не превосходит $\dim(\hat{\mathscr{E}}_k(n))$, а последнее число не зависит от l.

Обратно, предположим, что над каждой k-струей найдется конечная струя. Положим $d_l = \operatorname{codim} Y_l$; тогда

$$d_k \leqslant d_{k+1} \leqslant d_{k+2} \leqslant \ldots .$$

Если в этой последовательности бесконечное число строгих неравенств, то доказательство окончено. В противном случае без ограничения общности можно считать, что

$$d_k = d_{k+1} = d_{k+2} = \ldots .$$

Обозначим через X_k неприводимую компоненту множества Y_k, имеющую наибольшую размерность. Мы знаем, что при $l > k$ множество $(\pi_k^l)^{-1}(X_k)$ неприводимо. Поэтому для любого $l > k$ либо

$$(*) \qquad Y_l \cap (\pi_k^l)^{-1}(X_k) = (\pi_k^l)^{-1}(X_k),$$

либо левая часть имеет более высокую коразмерность (используйте замечание после 12.11).

Обозначим через b_k число неприводимых компонент множества Y_k, имеющих наибольшую коразмерность. Мы утверждаем, что $b_k \geqslant b_{k+1} \geqslant b_{k+2} \geqslant \ldots$. Всякая неприводимая компонента Y_{k+1} содержится в прообразе Y_k относительно $(\pi_k^{k+1})^{-1}$ и, значит, содержится в прообразе некоторой неприводимой компоненты множества Y_k. Так как $d_k = d_{k+1}$, то неприводимая компонента Y_{k+1} наибольшей размерности содержится в $(\pi_k^{k+1})^{-1}(X_k)$ и, значит, совпадает с $(\pi_k^{k+1})^{-1}(X_k)$, где X_k — неприводимая компонента Y_k, имеющая наибольшую размерность.

Поскольку b_k конечно, мы получим в конце концов, что $b_k = b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots$. Это означает, что всегда выполняется соотношение $(*)$, т. е. ни одна неприводимая компонента наибольшей размерности не пропадает. Отсюда вытекает, что $(\pi_k^l)^{-1}(X_k) \subset Y_l$ для каждого l. Следовательно, если $f \in X_k$, то для каждого l l-струя $f_l \in (\pi_k^l)^{-1}\{f\}$ лежит в Y_l, и мы пришли к противоречию. ∎

Доказательство второй части теоремы. Достаточно показать, что если f есть p-строка многочленов степени k, то существует p-строка, скажем h, однородных многочленов степени $k+1$, такая, что $(f+h)\notin Y_l$ для некоторого $l>k$.

Положим $g=(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}, 0, \ldots, 0)$ (напомним, что $n\leqslant p$). Положим $h_t=(1-t)f+tg$. Множество

$$A=\{t\in \mathbf{R}\mid \hat{h}_t\in Y_l\}\subset \mathbf{R}$$

является алгебраическим. Действительно, множество Y_l алгебраическое, и отображение

$$t\longmapsto (1-t)\hat{f}+t\hat{g}$$

линейно отображает t в коэффициенты $\hat{h}_t$ (а линейное отображение полиномиально). Таким образом, множество A либо конечно, либо есть все $\mathbf{R}$.

Однако $1\notin A$ для достаточно больших l, поскольку $\hat{h}_1=\hat{g}$ и пространство $\mathscr{E}(n)/\langle x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}\rangle$ имеет конечную размерность.

Следовательно, множество A конечно для достаточно больших l. Найдем отличную от единицы константу $t\in\mathbf{R}$, такую, что $t\notin A$. Тогда $\hat{h}_t=(1-t)\hat{f}+t\hat{g}\notin Y_l$ для некоторого l. Поскольку компоненты h_t и $h_t/(1-t)$ порождают один и тот же идеал, для некоторого l

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)\cdot \hat{h}_t=\hat{f}+\left(\frac{t}{1-t}\right)\cdot \hat{g}\notin Y_l,$$

что и требовалось доказать. ∎

13.6. Замечание. Те ростки $f\in\mathscr{E}(n)$, для которых росток Df не является конечным, также образуют подмножество бесконечной коразмерности. Чтобы это доказать, нужно повторить все предыдущие рассуждения, а в конце доказательства заметить, что n-строку $g=(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ можно представить в виде $g=Dq$, где $q=(x_1^{k+2}+\ldots+x_n^{k+2})/(k+2)$.

14. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОСОБЕННОСТИ

Литература: G. Wassermann, Stability of unfoldings, Dissertation, Regensburg, 1973, Springer Lecture Notes, 393 (1974).
J. Mather, Right equivalence, manuscript.

Для изучения особенности $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$, т. е. для изучения ростка η: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$, $D\eta(0) = 0$, мы вкладываем этот росток в r-параметрическое семейство ростков следующим образом. Пусть $\mathbf{R}^n$ — подпространство в $\mathbf{R}^{n+r}$, определяемое приравниванием нулю r последних координат. Точку пространства $\mathbf{R}^{n+r}$ будем обозначать через $(x, u) = (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$.

14.1. Определение. Пусть $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ — особенность; r-параметрической *разверткой* [1]) или *деформацией* ростка η называется такой росток $\bar{f} \in \mathfrak{m}(n+r)$, что $\bar{f} \mid \mathbf{R}^n = \eta$. Эта деформация будет обозначаться через $(r, \bar{f})$.

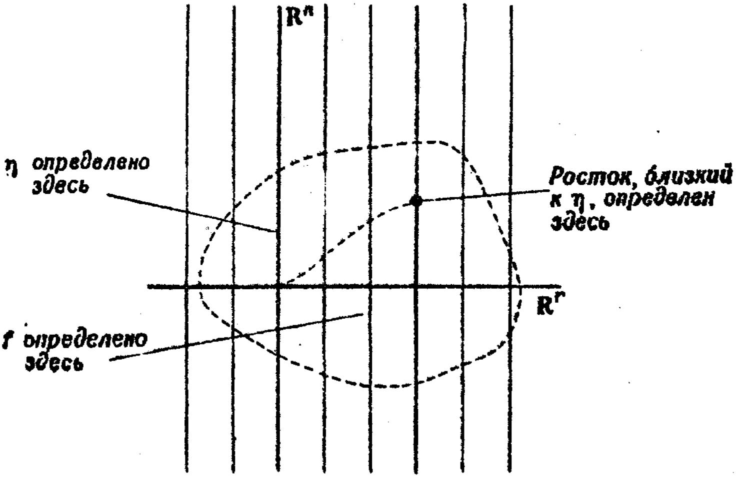
Если f — представитель ростка $\bar{f}$ и (x_0, u_0) — точка, близкая к началу координат, то $f \mid (\mathbf{R}^n \times \{u_0\}, (x_0, u_0))$ определяет росток, близкий к ростку η. Если мы движемся по пути, соединяющему начало координат с точкой (x_0, u_0), то вдоль этого пути росток η деформируется в описанный выше росток.

Между некоторыми деформациями особенности η можно определить отображения и получить таким способом *категорию деформаций* (фиксированной особенности). Объектами этой категории являются деформации особенности η. Чтобы пояснить определение морфизма, заметим сначала, что $\mathbf{R}^{n+r}$ расслоено

---

[1]) В оригинале: unfolding. — *Прим. перев.*

над $\mathbf{R}^r$ при помощи проекции π_r: $\mathbf{R}^{n+r} \to \mathbf{R}^r$. Всякое отображение деформаций должно быть согласовано с этой структурой расслоения, поскольку именно на слоях этого расслоения определены построенные выше ростки, «близкие к η». В семействе всех таких ростков, определенных на слоях вида $\pi_r^{-1}(u) = \mathbf{R}^n \times \{u\}$, близких к слою $\pi_r^{-1}(0) = \mathbf{R}^n \times \{0\} = \mathbf{R}^n$,



мы находим некоторые из особенностей, «скрывающихся» в η, а также деформации этих особенностей. Эта структура должна сохраняться.

Морфизм может произвольным образом действовать на пространстве параметров $\mathbf{R}^r$ и на слоях вида $\mathbf{R}^n \times \{u_0\}$, где $u_0 \neq 0$. В образе, т. е. в пространстве $\mathbf{R}$, тоже можно было бы допустить произвольные преобразования. Однако мы ограничим наши рассмотрения простейшим случаем, когда разрешаются только трансляции (параллельные переносы). Учитывая все сказанное, мы даем следующее определение морфизма.

14.2. Определение. Пусть (r, f) и (s, g) — две деформации ростка η. Морфизм

$$(\varphi, \alpha)\colon (r, f) \to (s, g)$$

определяется заданием следующих объектов:

(i) ростка $\varphi \in \mathscr{E}(n+r, n+s)$, удовлетворяющего условию $\varphi | \mathbf{R}^n \times \{0\} = \mathrm{id}$,

(ii) ростка $\Phi \in \mathscr{E}(r, s)$, удовлетворяющего условию $\pi_s \varphi = \Phi \pi_r$,

(iii) ростка $\alpha \in \mathfrak{m}(r)$, удовлетворяющего условию

$$f = g \circ \varphi + \alpha \circ \pi_r.$$

Взятые вместе, условия (i) и (ii) выражают тот факт, что φ — послойное отображение:

$$\varphi(x, u) = (\varphi_1(x, u), \Phi(u))$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^{n+r} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_r"'] & \mathbf{R}^{n+s} \arrow[d, "\pi_s"] \\
\mathbf{R}^r \arrow[r, "\Phi"] & \mathbf{R}^s
\end{tikzcd}$$

Выбрав представитель ростка α, мы можем сопоставить каждому $u \in \mathbf{R}^r$, близкому к началу координат, параллельный перенос a_u. Этот перенос a_u: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ задается формулой $a_u(t) = t + \alpha(u)$. Условие (iii) нашего определения выражает тот факт, что ростки f и g связаны соотношением

$$f(x, u) = a_u \circ g \circ \varphi(x, u).$$

Это определение понятно, хотя было бы более естественно рассматривать семейство произвольных преобразований a_u, а не только трансляций (или, наоборот, вовсе не делать преобразований в образе). Определение, которое мы дали, принадлежит Мезеру и является сравнительно простым. Во всяком случае это определение позволяет смещать начало координат для каждого u с помощью трансляции. Общий случай разобран Вассерманом.

Композиция морфизмов определяется очевидным образом:

$$(\varphi, \alpha)(\psi, \beta) = (\varphi \circ \psi, \beta + \alpha \circ \Psi).$$

При фиксированном $u \in \mathbf{R}^r$, где $\mathbf{R}^r$ — второе пространство параметров, выражение $\beta(u) + \alpha\Psi(u)$ описывает композицию трансляций, а именно $a_{\Psi(u)} \circ b_u$

Ясно, что морфизм (φ, α) обратим (является изоморфизмом) в том и только том случае, когда обратим росток φ. В частности, обратим морфизм

$$(\mathrm{id}, \alpha)\colon (r, f) \cong (r, f + \alpha).$$

Функция α позволяет нам добавлять к ростку в слое над u константу $\alpha(u)$.

14.3. Введем *сложение деформаций*:

$$(r, f) + (s, g) = (r + s, f + g - \eta),$$

где последний член определяется формулой

$$(f + g - \eta)(x, u, v) = f(x, u) + g(x, v) - \eta(x).$$

14.4. *Постоянная деформация* (r, η) определяется формулой

$$\eta(x, u) = \eta(x).$$

Ясно, что

$$(r, f) + (s, \eta) = (r + s, f).$$

Формула в пункте (iii) определения морфизма показывает, что деформация (r, f) определяется морфизмом (φ, α) и деформацией (s, g). Следовательно, мы можем дать такое определение.

14.5. Определение. Пусть (s, g) — деформация ростка η. Предположим, что ростки $\varphi \in \mathscr{E}(n + r, n + s)$ и $\Phi \in \mathscr{E}(r, s)$ удовлетворяют условиям (i) и (ii) из 14.2. Пусть $\alpha \in \mathfrak{m}(r)$. Деформация (r, f), определяемая формулой (iii), называется *деформацией ростка* η, *индуцированной деформацией* (s, g) *с помощью морфизма* (φ, α).

Деформация (r, f) ростка η называется *версальной*, если всякая деформация ростка η индуцируется деформацией (r, f) с помощью подходящего морфизма.

14.6. Пример деформации. Пусть $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ — некоторая особенность, и пусть $b_1, \ldots, b_r \in \mathfrak{m}(n)$; тогда

$$f(x, u) = \eta(x) + b_1(x) u_1 + \ldots + b_r(x) u_r$$

является деформацией ростка η.

Эта деформация есть сумма однопараметрических деформаций

$$f(x, u_i) = \eta(x) + b_i(x) u_i.$$

14.7. Определение. *Коразмерностью* особенности η называется число $\operatorname{codim} \eta = \dim_{\mathbb{R}} (\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{E}(n)})$.

Версальная деформация (r, f) с минимальным значением r называется *универсальной деформацией.*

Важность понятий универсальной деформации и коразмерности демонстрирует основная теорема о деформациях.

14.8. Теорема (Мезер). *Особенность $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ обладает версальной деформацией в том и только том случае, когда коразмерность η конечна.*

Любые две r-параметрические версальные деформации ростка η изоморфны.

Всякая версальная деформация изоморфна сумме $(r, f) + \mathrm{const}$, где (r, f) — универсальная деформация.

Если $\{b_1, \ldots, b_r\} \subset \mathfrak{m}(n)$ — произвольный набор представителей элементов базиса векторного пространства $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{E}(n)}$, то деформация f ростка η, определяемая формулой

$$f(x, u) = \eta(x) + b_1(x) u_1 + \ldots + b_r(x) u_r,$$

является универсальной.

(Доказательство этой теоремы займет всю гл. 16.)

14.9. Пример. Для сокращения обозначений будем далее вместо $\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{E}(n)}$ писать просто $\langle \partial\eta \rangle$. Пусть $n = 1$ и $\eta(x) = x^N$. Тогда $\langle \partial\eta \rangle = \langle x^{N-1} \rangle$ и базисом пространства $\mathfrak{m}/\langle \partial\eta \rangle$ служат смежные классы элементов $x, x^2, \ldots, x^{N-2}$. Следовательно, деформация

$$f(x, u) = x^N + u_{N-2} x^{N-2} + u_{N-3} x^{N-3} + \ldots + u_1 x$$

является универсальной деформацией ростка x^N.

Более общо, пусть

$$\eta(x) = x_1^N \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm \ldots \pm x_n^2;$$

тогда $\langle \partial\eta \rangle = \langle x_1^{N-1}, x_2, \ldots, x_n \rangle$, поэтому деформация

$$f(x, u) = \eta(x) + u_{N-2}x_1^{N-2} + \ldots + u_1 x_1$$

ростка η является универсальной.

Последнее замечание можно сформулировать и в общем случае.

14.10. Замечание. Если $\eta(x_1, \ldots, x_k)$ имеет универсальную деформацию $\eta + f(x_1, \ldots, x_k, u)$ и если $q(x_{k+1}, \ldots, x_n)$—невырожденная квадратичная форма от (других) переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$, то в качестве универсальной деформации ростка $\eta+q$ можно взять $\eta + q + f(x_1, \ldots, x_k, u)$. Это утверждение вытекает из того, что подходящей линейной заменой координат можно привести q к виду $\pm x_{k+1}^2 \pm \ldots \pm x_n^2$ и, следовательно, $\langle \partial(\eta+q) \rangle = \langle \partial\eta, x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle$. В этих координатах пространства $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial(\eta + q) \rangle$ и $\mathfrak{m}(k)/\langle \partial\eta \rangle$ имеют «один и тот же базис».

Итак, при вычислении универсальной деформации удобно прежде всего преобразовать особенность так, чтобы как можно больше независимых переменных входило только в квадратичные члены, не зависящие от остальных переменных.

14.11. Определение. *Корангом* особенности $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ называется коранг гессиана $(\partial^2\eta/\partial x_i \partial x_j(0))$, т. е. коранг квадратичной формы, заданной 2-струей.

14.12. Лемма о разложении[1]). *Всякая особенность $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ коранга $n - r$ правоэквивалентна особенности вида*

$$q(x_1, \ldots, x_r) + \zeta(x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

где $j^2\zeta = 0$ и q — невырожденная квадратичная форма.

Доказательство. Сделав линейное преобразование, мы всегда можем привести 2-струю ростка η к виду $q(x_1, \ldots, x_r) = \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_r^2$. Положим $\theta = \eta \mid \mathbf{R}^r$; тогда q является 2-струей θ. Отсюда следует, что росток θ 2-определен (11.3) и, следовательно, r-экви-

---

[1]) В оригинале: splitting lemma. — *Прим. перев.*

валентен q. Таким образом, можно считать, что $\eta \mid \mathbf{R}^r = q$. Очевидно, что универсальной деформацией ростка q служит деформация $(0, q)$, так как $\langle \partial q \rangle = \langle x_i, \ldots, x_r \rangle$. Значит, росток η можно рассматривать как версальную деформацию ростка q, поскольку деформация η содержит универсальную деформацию. Согласно основной теореме, версальные деформации данной размерности изоморфны, поэтому $(n-r, q)$ изоморфно $(n-r, \eta)$, т. е. существуют росток $(-\zeta) \in \in \mathfrak{m}(n-r)$ и обратимый росток φ, такие, что

$$q(x_1, \ldots, x_r) = \eta\varphi(x_1, \ldots, x_n) - \zeta(x_{r+1}, \ldots, x_n).$$

Доказательство леммы о разложении окончено. ∎

Напомним, что коразмерностью ростка η называется число $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle$. Наибольший интерес представляют такие ростки, у которых универсальная деформация зависит не более чем от четырех параметров, т. е. $\operatorname{codim} \eta \leqslant 4$.

14.13. Замечание. *Если* $\operatorname{corank} \eta = r$, *то* $\operatorname{codim} \eta \geqslant \geqslant \binom{r+1}{2}$. *В частности*, $\operatorname{corank} \eta \geqslant 3 \Rightarrow \operatorname{codim} \eta \geqslant 6$.

Доказательство. Если $\operatorname{corank} \eta = r$, то по лемме о разложении росток η в подходящих координатах принимает вид

$$\eta(x) = \zeta(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r) + q(x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

где $j^2\zeta = 0$.

Рассмотрим векторное пространство, получаемое из $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle$ взятием 2-струи и приравниванием 0 всех координат, кроме первых r, т. е. пространство $j^2\mathfrak{m}(r)/j^2\langle \partial\zeta \rangle$. Ясно, что размерность этого пространства меньше, чем $\operatorname{codim} \eta$. Далее, $\dim j^2\mathfrak{m}(r) = r + \binom{r+1}{2}$ и $\dim j^2(\partial\zeta) \leqslant r$. Действительно, элементы $\partial\zeta/\partial x_i$ сами порождают вещественное векторное пространство $j^2\langle \partial\zeta \rangle$, поскольку каждый элемент $\partial\zeta/\partial x_i$ принадлежит $\mathfrak{m}(r)^2$. Следовательно,

$$\operatorname{codim} \eta \geqslant \dim j^2\mathfrak{m}(r)/j \langle \partial\zeta \rangle \geqslant \binom{r+1}{2}. \ ∎$$

Итак, если мы интересуемся универсальными деформациями, имеющими не более 4 параметров, то мы можем ограничиться рассмотрением особенностей $\eta(x, y)$ от двух переменных, которые имеют коразмерность $\leqslant 4$ (невырожденную квадратичную форму q можно не принимать во внимание). Эти особенности автоматически оказываются конечно определенными, точнее 6-определенными. В подходящих координатах они записываются как многочлены от двух переменных степени $\leqslant 6$.

При изучении конечно определенных ростков мы использовали число $\dim \mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle$ и заметили в гл. 11, что

$$\mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle + \langle\partial\eta\rangle_{\mathbf{R}} = \langle\partial\eta\rangle_{\mathcal{E}(n)}.$$

Отсюда вытекает такое утверждение.

14.14. $\dim(\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle) \leqslant \dim(\mathfrak{m}(n)/\langle d\eta\rangle) + n$, причем равенство достигается, если элементы $\partial\eta/\partial x_i \bmod \mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle$ линейно независимы. В частности, росток η конечно определен ($\dim(\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle) < \infty$) в том и только том случае, когда $\operatorname{codim}\eta < \infty$ (см. 11.10).

14.15. Лемма. *Если коразмерность ростка* η *конечна* (η *конечно определен*), *то* $\dim(\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle) = \operatorname{codim}\eta + n$.

Как мы знаем из леммы 11.8, левая часть последнего равенства есть коразмерность орбиты ростка η под действием группы правых преобразований в пространстве $\mathfrak{m}(n)$. В гл. 16 мы увидим, что r-параметрическое семейство функций определяет росток отображения $(\mathbf{R}^{n+r}, 0) \to \mathfrak{m}(n)$. Если r-параметрическое семейство общего положения содержит росток η, то соответствующий росток $(\mathbf{R}^{n+r}, 0) \to \mathfrak{m}(n)$ трансверсален орбите, проходящей через η. Лемма показывает, что в случае, когда росток η обладает r-параметрической деформацией общего положения, коразмерность η не превосходит r.

Доказательство леммы. Мы должны доказать, что элементы $\partial\eta/\partial x_i$ линейно независимы $\operatorname{mod} \mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle$. Если это не так, то найдутся такие константы $a_i \in \mathbf{R}$ и ростки $u_i \in \mathfrak{m}(n)$, что

$$\sum a_i \frac{\partial\eta}{\partial x_i} = \sum u_i \frac{\partial\eta}{\partial x_i},$$

т. е.

$$\sum (a_i - u_i) \frac{\partial\eta}{\partial x_i} = 0,$$

$$a_i - u_i(0) \neq 0 \qquad \text{для некоторого } i.$$

Проинтегрируем векторное поле $\sum (a_i - u_i)\,\partial/\partial x_i$ и выберем координаты так, чтобы его интегральные кривые задавались уравнениями $x_i = c_i$, где $i > 1$ и $c_i \in \mathbf{R}$. В этих координатах векторное поле принимает вид $\rho(x)\,\partial/\partial x_1$, где $\rho(x) \neq 0$. Поэтому $\partial\eta/\partial x_1 \equiv 0$. Другими словами, η не зависит от x_1 и, следовательно, элементы $x_1, x_1^2, x_1^3, \ldots$ линейно независимы в $\mathfrak{m}(n)/\langle\partial\eta\rangle$. Отсюда мы получаем, что коразмерность η равна ∞, и приходим к противоречию. ∎

Остаются нерешенными две задачи: во-первых, дать полную классификацию особенностей коразмерности $\leqslant 4$ и их универсальных деформаций (гл. 15) и, во-вторых, доказать основную теорему о деформациях (гл. 16).

15. СЕМЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КАТАСТРОФ

Литература: та же, что к гл. 14.

Пусть η — особенность коразмерности $\leqslant 4$. Мы знаем, что

$$\operatorname{codim}\eta \leqslant 4 \Leftrightarrow \dim(\mathfrak{m}(n)/\langle\partial\eta\rangle) \leqslant 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathfrak{m}(n)^5 \subset \langle\partial\eta/\partial x_i\rangle \Rightarrow \mathfrak{m}(n)^6 \subset \mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{особенность } \eta \text{ 6-определена.}$$

Следовательно, в некоторой системе координат η записывается в виде суммы многочлена степени $\leqslant 6$ от двух переменных и невырожденной квадратичной формы от остальных переменных (см. 14.13). Мы собираемся с помощью еще одной замены координат привести такой многочлен к нормальной форме. Результат состоит в следующем.

15.1. Теорема (правило семи особенностей (Том)). *С точностью до прибавления невырожденной квадратичной формы от остальных переменных и с точностью до умножения на* ± 1 *особенности коразмерности* $\leqslant 4$ *и* $\geqslant 1$ *правоэквивалентны одной из следующих:*

Codim	η	Универсальная деформация	Название
1	x^3	$x^3 + ux$	Складка (Fold)
2	x^4	$x^4 - ux^2 + vx$	Сборка (Cusp) (Риман — Гюгонио)
3	x^5	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	Ласточкин хвост (Swallowtail или Dovetail)

Codim	η	Универсальная деформация	Название
3	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	Гиперболическая омбилическая точка (Hyperbolic Umbilic)
3	$x^3 - xy^2$	$x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$	Эллиптическая омбилическая точка (Elliptic Umbilic)
4	x^6	$x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$	Бабочка (Butterfly)
4	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy$	Параболическая омбилическая точка (Parabolic Umbilic)

Доказательство. Из основной теоремы непосредственно следует, что универсальные деформации имеют именно такой вид, как указано в таблице. Мы должны показать, что здесь действительно перечислены все возможные случаи.

1. Коранг η равен 1.

В этом случае росток η правоэквивалентен $\pm x^n$ с точностью до прибавления квадратичной формы. А так как коразмерность $\leqslant 4$, возможны только случаи x^3, x^4, x^5 и x^6 (с точностью до умножения на ± 1).

2. Коранг η равен 2.

Из этого условия следует, что $\operatorname{codim} \eta \geqslant 3$ (14.13), поэтому коразмерность η равна либо 3, либо 4. Положим $P(x, y) = j^3(\eta)$.

Ясно, что P — однородный многочлен третьей степени и, следовательно, P разлагается над $\mathbf{C}$ в поризведение трех линейных множителей:

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y).$$

Таким образом, возможны четыре различных случая, которые мы обсудим по отдельности.

(A) Три вектора $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2$ попарно линейно независимы над $\mathbb{C}$.

(B) Два вектора (без ограничения общности можно считать, что это два первых вектора) линейно независимы, а третий вектор кратен второму. В этом случае можно считать, что $P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2$, где векторы (a_1, b_1), (a_2, b_2) линейно независимы. Поскольку разложение на множители единственно с точностью до умножения на константы и многочлен P вещественный, эти множители, а значит, и векторы (a_i, b_i) могут быть выбраны вещественными (рассмотрите сопряженное разложение).

(C) Все три вектора (a_i, b_i) пропорциональны, но отличны от нуля. В этом случае $P(x, y) = (ax + by)^3$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(D) $P(x, y) = 0$

Случай (*A*). (α) Предположим, что все векторы (a_i, b_i) вещественны. Возьмем $(a_1x + b_1y)$, $(a_2x + b_2y)$ в качестве новых координат. Символом $\sim$ будем обозначать правую эквивалентность. Тогда

$$P(x, y) \sim xy(ax + by), \text{ где } a, b \neq 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} xy(ax+by) &\sim (ab)^{-1}xy(x + y) \text{ (замена } (x, y) \mapsto (ax, by)) \\ &\sim xy(x + y) \text{ (замена } (x, y) \mapsto (ab)^{-1/3}(x, y)) \\ &\sim x(x^2 - y^2) \text{ (замена } (x, y) \mapsto 2^{-1/3}(x + y, x - y)) \\ &= x^3 - xy^2. \end{aligned}$$

Этот многочлен 3-определен согласно 11.3. Поэтому $\eta \sim x^3 - xy^2$ (эллиптическая омбилическая точка).

(β) Предположим, что два вектора (a_i, b_i) комплексно сопряжены. Тогда

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(\bar{a}_2x + \bar{b}_2y).$$

Произведение двух последних множителей — это положительно определенная квадратичная форма от x, y. Заменой переменных можем привести ее к виду x^2+y^2 и, следовательно, $P(x, y)\sim(ax+by)(x^2+y^2)$. С помощью поворота координатных осей множитель $(ax+by)$ можно привести к виду cx, где $c\neq 0$. Тогда

$$P\sim cx(x^2+y^2)\sim x(x^2+y^2)\sim x^3+xy^2\sim x^3+y^3.$$

Последняя эквивалентность следует из того, что

$$(x+y)^3+(x-y)^3=2x^3+6xy^2\sim x^3+xy^2.$$

Многочлен x^3+y^3 также 3-определен. Следовательно, $\eta\sim x^3+y^3$ (гиперболическая омбилическая точка). Доказательство в случае (А) окончено. ∎

Случай (*B*).

$$P(x, y)=(a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)^2\sim x^2y.$$

Заметим, что многочлен x^2y не является конечно определенным, поскольку $\partial/\partial x(x^2y)=2xy$, $\partial/\partial y(x^2y)=x^2$ и идеал $\langle xy, x^2\rangle$ не содержат никакой степени y. Однако росток η конечно определен, поэтому его струя (бесконечного порядка) не эквивалентна x^2y. Обозначим через k наибольшее число, при котором $j^k\eta\sim x^2y$. Без ограничения общности можно считать, что $j^k\eta=x^2y$ и $j^{k+1}\eta=x^2y+h(x, y)$, где h — однородный многочлен степени $k+1$, $k\geqslant 3$. Преобразуем росток η с помощью диффеоморфизма вида Φ: $(x, y)\to(x+\varphi, y+\psi)$, где φ, ψ — однородные многочлены степени $k-1\geqslant 2$. Матрицей Якоби Φ в начале координат служит единичная матрица. Поэтому

$$j^{k+1}\eta\circ\Phi=x^2y+x^2\psi+2xy\varphi+h(x, y).$$

При подходящем выборе φ, ψ мы можем уничтожить в h все члены, которые делятся на xy или x^2. Таким образом, мы можем считать, что

$$j^{k+1}\eta\circ\Phi=x^2y+ay^{k+1},\qquad a\neq 0.$$

Легко проверить, что многочлен в правой части $(k+1)$-определен и, следовательно, $\eta\sim x^2y+ay^{k+1}\sim$

$\sim x^2y \pm y^{k+1}$. Если $k \geqslant 4$, то $\operatorname{codim} \eta \geqslant 5$. Следовательно, $k = 3$ и $x^2y + y^4 \sim x^2y - y^4$ (умножьте на -1 и замените y на $-y$). Конец доказательства в случае (B). ∎

Случай (*C*). $P = (ax + by)^3 \sim x^3$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $j^3\eta = x^3$. Отсюда $j^4\eta = x^3 + h$, где h имеет степень 4. Непосредственно проверяем, что

$$\dim j^3\mathfrak{m}(2) = 9,$$

$$\dim j^3\langle\partial\eta\rangle = \dim j^3\langle x^2 + h_1, h_2\rangle \leqslant 4,$$

$$\text{степень } h_1 \geqslant 3, \qquad \text{степень } h_2 \geqslant 3.$$

Следовательно, $\dim j^3\mathfrak{m}(2)/\langle\partial\eta\rangle \geqslant 5 > 4$. Этот случай невозможен, поскольку $\operatorname{codim} \eta \leqslant 4$. ∎

Случай (*D*). Если $P = 0$, то $\eta \in \mathfrak{m}(2)^4$. Следовательно, $\langle\partial\eta\rangle \subset \mathfrak{m}(2)^3$ и $\dim(\mathfrak{m}(2)/\mathfrak{m}(2)^3) = 5$. Этот случай также невозможен. ∎

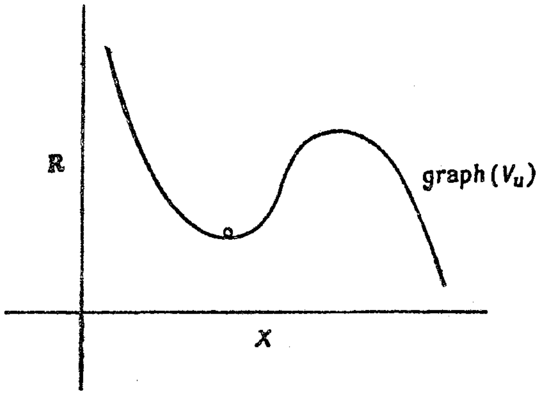
Тем самым доказательство теоремы о семи катастрофах окончено. ∎

Важность этого результата демонстрирует следующий пример.

Представим себе какую-нибудь химическую систему, описываемую например, n переменными, т. е. точкой $x \in \mathbb{R}^n$. Эволюция системы описывается фазовым потоком, который определяется некоторой потенциальной функцией $\widetilde{V}: X \to \mathbb{R}$, если «внешние условия» предполагаются фиксированными. Допустим теперь, что внешние условия меняются в зависимости от времени и точки в пространстве. Изменение внешних условий сопровождается изменением потенциальной функции. Для каждой точки u некоторого открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^4$ (пространство-время) определена потенциальная функция $V_u: X \to \mathbb{R}$. Следовательно, определено дифференцируемое отображение

$$V: X \times U \to \mathbb{R},$$

т. е. семейство потенциальных функций на X, зависящих от параметра $u \in U$. При фиксированных внешних условиях, в фиксированной точке $u \in U$, система находится в минимуме соответствующей функции V_u. Обычно этот минимум является невырожденной особой точкой.



Разумеется, существуют потенциальные функции с вырожденными критическими точками, но они «имеют вероятность 0». Довольно легко доказать, что так называемые функции Морса образуют открытое плотное подмножество в множестве всех функций. Функции Морса V определяются следующими двумя условиями:

(i) В каждой особой точке x_0 функции V невырожденна квадратичная форма вторых производных

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right).$$

В частности, отсюда следует, что росток V в точке x_0 2-определен, и его можно заменой координат привести к виду

$$V(x) = V(0) + \sum (\pm x_i^2).$$

Кроме того, отсюда следует, что особые точки функции V изолированы.

(ii) Если $x \neq y$ — две особые точки, то $V(x) \neq V(y)$.

В общем положении потенциальная функция V_u является функцией Морса. Предположим, однако, что u меняется, например пробегает одномерную кривую в пространстве-времени. Тогда мы можем спросить, какого рода особенности будет иметь в общем положении это *семейство функций* V_u.

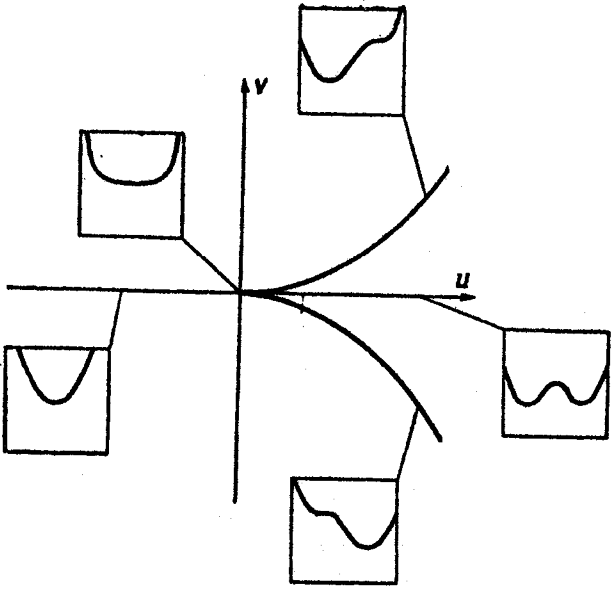
Выбрав локальные координаты на X в окрестности точки $x_0 \in X$ и локальные координаты на U в окрестности $u_0 \in U$, мы получим деформацию ростка в точке x_0 функции V_{u_0}.

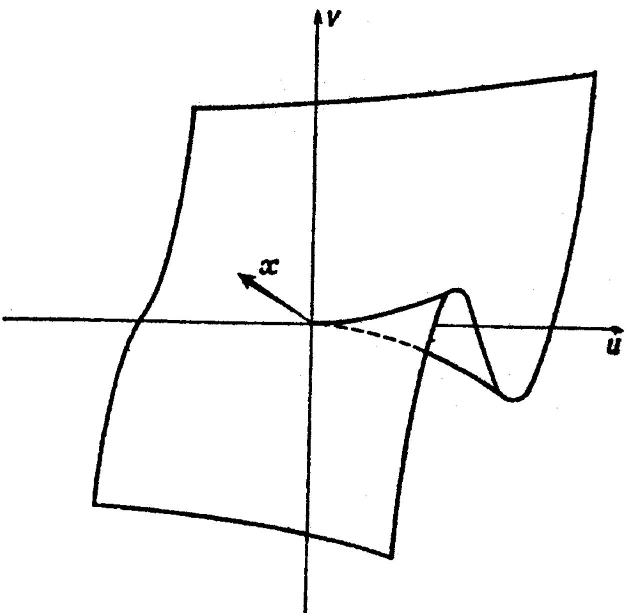
Описание всех возможных деформаций содержат версальные деформации. Наконец, если определить некоторым естественным (но достаточно сложным) способом понятие «устойчивой» деформации, то окажется, что семь перечисленных нами катастроф исчерпывают все возможные устойчивые деформации ростков коразмерности $\leqslant 4$ (см. Вассерман).

С точки зрения приложений интересно более подробно описать геометрический вид семи универсальных деформаций коразмерности $\leqslant 4$. В частности, нас интересует, какие точки пространства внешних параметров модели, т. е. пространства параметров деформации, наиболее важны для описания катастроф. Такими точками оказываются те точки пространства U, в которых функция V_u имеет особенность порядка >2. Другими словами, наш интерес концентрируется на множестве тех точек, в которых локальный минимум (или максимум) исчезает.

Для сборки мы получаем рисунок, приведенный ниже (потенциальная функция нарисована в пяти точках пространства U).

Если мы направим x-координату перпендикулярно плоскости координат (u, v), то увидим, что локальные экстремумы лежат на поверхности $\{(x, u, v) \mid 4x^3 - 2ux + v = 0\}$. Проекция на плоскость (u, v) показывает, что множество критических значений — это хорошо известная сборка. Всякое состояние, (u, v)-параметр которого пересекает верхнюю ветвь сборки снизу вверх, внезапно перескакивает в минимум, принадлежащий более далекой от нас части поверхности. При пересечении нижней ветви сборки снизу


v
u


v
x
u

вверх происходит обратный процесс.

Замечание: u в тексте соответствует паре (u, v) в примере.

Подробнее этот пример и другие элементарные катастрофы обсуждаются в гл. 17.

16. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Литература: та же, что к гл. 14.

На протяжении этой главы буква η будет обозначать особенность. Версальные деформации особенности η характеризуются условиями трансверсальности, которые мы сейчас опишем в явном виде.

Пусть $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$ — некоторый росток и $(r, \tilde{f})$ — его r-параметрическая деформация. Пусть f — представитель $\tilde{f}$. Обозначим через $J_0^k(n, 1)$ пространство k-струй с нулевым свободным членом. Определим росток отображения

$$j_1^k f\colon (\mathbf{R}^{n+r}, 0) \to J_0^k(n, 1)$$

следующим образом: представителем $j_1^k f$ служит отображение, переводящее пару (x, u) в k-струю отображения $(y \mapsto f(x+y, u) - f(x, u))$.

Тогда $j_1^k f$ можно рассматривать как обобщение частной производной: это частичное (взятое по переменным x) разложение Тейлора в точке (x, u).

16.1. Определение. Отображение f называется *k-трансверсальным*, если росток $j_1^k f$ в начале координат трансверсален орбите $\hat{\eta}\hat{\mathscr{B}}_k(n)$ точки $\hat{\eta}$ (т. е. k-струи ростка η) относительно группы правых преобразований.

Очевидно, что $j_1^k f(0) = j^k\eta(0) = \hat{\eta} \in \hat{\eta}\hat{\mathscr{B}}_k(n)$.

Теперь мы можем добавить к основной теореме следующий критерий версальности деформаций.

16.2. Теорема (версальность $\Leftrightarrow$ k-трансверсальность). *Если росток η k-определен, то его деформация версальна тогда и только тогда, когда она k-трансверсальна.*

Самой трудной частью этой главы будет доказательство следующей леммы.

16.3. Основная лемма. *Если росток η k-определен и (r, f), (r, g) — две k-трансверсальные деформации, то $(r, f) \cong (r, g)$.*

Прежде всего сформулируем по-другому определение k-трансверсальности, используя явную формулу. На этом пути мы сможем вывести как основную теорему 14.8, так и теорему 16.2 из основной леммы. Доказательство основной леммы отложим на конец главы.

16.4. Лемма. *Отображение f k-трансверсально тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{m}(n) = \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1},$$

где $V_f = \langle \partial f/\partial u_j \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} - \partial f/\partial u_j(0) \rangle_{\mathbf{R}}$ — вещественное векторное пространство, порожденное указанными элементами.

Доказательство. Из (11.8) мы знаем, что касательное пространство к $\eta\mathscr{B}_k$ есть

$$\mathfrak{m}(n) \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Нужно вычислить образ $Dj_1^k f(0)$. Касательное пространство $T_0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r)$ порождено векторами $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial u_j}$, и поэтому искомый образ порожден векторами

$$\frac{\partial}{\partial x_i} j_1^k f(0) = j_1^k \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) \quad \text{и} \quad j_1^k \frac{\partial}{\partial u_j} f(0).$$

Далее,

$$j_1^k \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) = j_1^k \frac{\partial}{\partial x_i} \eta(0).$$

Теперь лемма следует из равенств

$$\mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle+\mathfrak{m}(n)^{k+1}+\left\langle j^k\frac{\partial\eta}{\partial x_i}(0)\right\rangle_{\mathbb{R}}=\langle\partial\eta\rangle+\mathfrak{m}(n)^{k+1}$$

и

$$\left\langle j_1^k\frac{\partial}{\partial u_j}f(0)\right\rangle_{\mathbb{R}}+\mathfrak{m}(n)^{k+1}=$$
$$=\left\langle\frac{\partial f}{\partial u_j}\,\Big|\,\mathbb{R}^n\times\{0\}-\frac{\partial f}{\partial u_j}(0)\right\rangle_{\mathbb{R}}+\mathfrak{m}(n)^{k+1}. \blacksquare$$

16.5. Следствие. *Если $b_1, \ldots, b_r$ — базис векторного пространства $\mathfrak{m}(n)/(\langle\partial\eta\rangle+\mathfrak{m}(n)^{k+1})$, то отображение $\eta+\sum u_jb_j$ k-трансверсально.* ■

16.6. Следствие. *Если (r, f) — версальная деформация ростка η, то деформация f k-трансверсальна для любого k.*

Доказательство. Возьмем k-трансверсальную деформацию (s, g); ее легко построить при помощи следствия 16.5. По определению версальной деформации, существует морфизм

$$(\varphi, \alpha)\colon (s, g)\to(r, f).$$

Таким образом, $g=f\circ\varphi+\alpha$ и так как α не зависит от x, то $V_g=V_{f\varphi}$. Далее,

$$V_{f\varphi}\subset\langle\partial\eta\rangle+V_f,$$

поскольку

$$\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial v_\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial u_j}.$$

Ограничивая это равенство на $\mathbb{R}^n\times\{0\}$, получаем

$$\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial v_\nu}\cdot a_{\nu j},$$

где $a_{\nu j}=\dfrac{\partial\varphi_\nu}{\partial u_j}(0)$.

По лемме 16.4, деформация f является k-трансверсальной. ■

Итак, версальные деформации k-трансверсальны. Обратное еще проще — достаточно воспользоваться основной леммой.

Доказательство теоремы 16.2 (версальность $\Leftrightarrow$ k-трансверсальность). Пусть η есть k-определенный росток, (r, f) есть k-трансверсальная деформация и (s, g) — произвольная деформация. Мы должны найти морфизм $(s, g) \to (r, f)$. Построим его так. Существует очевидный морфизм $(s, g) \to (s, g) + (r, f)$. Последняя деформация k-трансверсальна, поскольку трансверсальна деформация (r, f). По основной лемме, существует морфизм этой деформации в k-трансверсальную деформацию $\mathrm{const} + (r, f)$, для которой, очевидно, существует морфизм в (r, f). ∎

16.7. Следствие (ср. с леммой 14.15). *Если* (r, f) — *версальная деформация ростка* η, *то* $\operatorname{codim} \eta \leqslant r$.

Доказательство. Деформация (r, f) k-трансверсальна и, значит, $\mathfrak{m}(n) = \langle \partial\eta \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Следовательно, $\dim \left(\mathfrak{m}(n) / (\langle \partial\eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1})\right) \leqslant \dim V_f \leqslant r$. Это неравенство верно при любом k, поэтому, согласно лемме Накаямы,

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \langle \partial\eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1} \quad \text{при} \quad k > r.$$

Еще одно применение леммы Накаямы дает $\mathfrak{m}(n)^k \subset \langle \partial\eta \rangle$ и, значит, $\dim \mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle \leqslant r$. ∎

Доказательство основной теоремы 14.8. Теперь мы можем дать полное доказательство основной теоремы о деформациях (по-прежнему предполагая справедливость основной леммы).

Если росток η k-определен, то обе его r-параметрические версальные деформации являются k-трансверсальными. Следовательно, эти две деформации изоморфны. Если (r, f) — версальная деформация наименьшей размерности, то как (r, f), так и $(r, f) + \mathrm{const}$ являются k-трансверсальными. Отсюда выводим, что все k-трансверсальные деформации могут быть получены из деформации (r, f). Следствие 16.7 показывает, что минимальное возможное число параметров версальной деформации равно $\operatorname{codim}\eta$. Если коразмерность ростка η конечна (скажем, равна r), то росток η конечно определен (см. 11.4). Следствие 16.5 дает r-параметрическую k-трансверсальную, а, следовательно, универсальную деформацию ростка η, имеющую требуемый вид. ∎

Теперь мы переходим к самой трудной части наших рассуждений.

Доказательство основной леммы 16.3. Пусть η есть k-определенная особенность, а (r, f), (r, g) — две ее k-трансверсальные деформации. Нужно построить изоморфизм $(r, f) \cong (r, g)$. Мы знаем, что деформация (r, f) k-трансверсальна, если выполнено условие

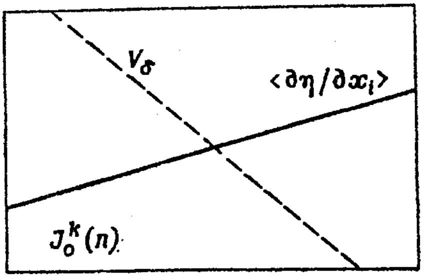
$$\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1} = \mathfrak{m}(n),$$

где пространство V_f порождено над $\mathbf{R}$ элементами

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|\mathbf{R}^n \times \{0\} - \frac{\partial f}{\partial u_i}(0)\right).$$

Задача. Найти гомотопию F_t, состоящую из трансверсальных деформаций и удовлетворяющую условиям $F_0 = f$ и $F_1 = g$. (Затем мы покажем, что с точностью до изоморфизма деформаций гомотопия F_t локально постоянна.)

Решение задачи. r-параметрическая деформация ростка η сама является ростком, лежащим в $\eta + \mathfrak{m}(r) \cdot \mathscr{E}(n + r) \subset \mathfrak{m}(n + r)$, где через $\mathfrak{m}(r)$ обозначен идеал, порожденный элементами $u_1, \ldots, u_r$, поэтому ее можно записать в виде $\eta + \delta$, где $\delta \in \mathfrak{m}(r) \cdot \mathscr{E}(n + r)$. Ясно, что $V_{\eta+\delta} = V_\delta$. В пространстве $J_0^k(n)$, состоящем из k-струй с нулевым свободным членом, имеется подпространство $\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle / \mathfrak{m}(n)^{k+1}$, и мы интересуемся такими δ, для которых V_δ трансверсально этому подпространству.



Определим отображение

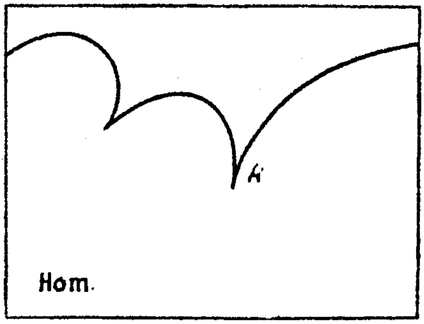
$$\mathfrak{m}(r)\,\mathscr{E}(n+r)\to \operatorname{Hom}\left(\mathbf{R}^r,\ J_0^k(n)\right)$$

формулой

$$\delta\mapsto\left(e_i\mapsto j^k\left(\frac{\partial\delta}{\partial u_i}\bigg|\mathbf{R}^n\times\{0\}-\frac{\partial\delta}{\partial u_i}(0)\right)\right),$$

где e_i — элементы базиса в $\mathbf{R}^r$. Очевидно, что это отображение сюръективно, поскольку в качестве δ можно взять подходящие многочлены.

Рассмотрим исключительное подмножество $A\subset\subset\operatorname{Hom}$, состоящее из таких гомоморфизмов, для которых образ $\mathbf{R}^r$ не трансверсален $\langle\partial\eta/\partial x_i\rangle\,\mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Ясно, что A — алгебраическое множество.



Если $\operatorname{codim}\eta=s=\operatorname{codim}\langle\partial\eta/\partial x_i\rangle$ в J_0^k, то, как мы знаем, $s\leqslant r$ согласно следствию 16.7, которое фактически было доказано для k-трансверсальных деформаций.

Случай 1. Пусть $r > s$. Легко убедиться, что в этом случае $\operatorname{codim} A > 1$ и, следовательно, множество $\mathrm{Hom} - A$ связно (используйте 9.3).

Случай 2. Если $r = s$, то множество $\mathrm{Hom} - A$ разбивается на две компоненты, отличающиеся ориентацией образа пространства $\mathbf{R}^r$ по отношению к $\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle \mathfrak{m}(n)^{k+1}$. Однако если $\varphi \in \mathscr{B}(r)$ — обращающее ориентацию преобразование, то $\eta + \delta$ и $(\eta + \delta)\varphi$ дают точки, которые лежат в разных компонентах множества $\mathrm{Hom} - A$. Значит, можно предположить, что f и g отображаются в одну и ту же компоненту множества $\mathrm{Hom} - A$.

Отсюда следует, что образы f и g можно соединить в $\mathrm{Hom} - A$ кусочно-линейным путем. Очевидно, что *линейный* путь в $\mathrm{Hom} - A$ можно поднять до линейного пути в $\mathfrak{m}(r)\mathscr{E}(n+r)/\mathfrak{m}(n+r)^{k+1}$ (поскольку последнее пространство линейно и сюръективно отображается на Hom). Этот путь поднимается до линейного пути в $\eta + \mathfrak{m}(r)\mathscr{E}(n+r)$. Следовательно, f и g можно соединить кусочно-линейной кривой, состоящей из k-трансверсальных деформаций, и без ограничения общности можно считать, что деформация

$$F_t = (1-t)f + tg \ k\text{-трансверсальна при } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Остается теперь доказать, что *с точностью до изоморфизма деформаций гомотопия F_t локально постоянна.*

Без ограничения общности можно считать, что $f \mid \{0\} \times \mathbf{R}^r = g \mid \{0\} \times \mathbf{R}^r = 0$. Действительно, положив $\alpha_t(u) = (1-t)f(0, u) + tg(0, u)$, мы получим изоморфизм (id, α_t) между F_t и деформацией

$$(1-t)(f(x, u) - f(0, u)) + t(g(x, u) - g(0, u)).$$

Наше утверждение означает, что мы должны уметь находить росток $\Phi \in \mathscr{E}(n+r+1, n+r)$ в точке $(0, 0, t_0)$ и росток $\alpha \in \mathscr{E}(r+1)$ в точке $(0, t_0)$, такие, что $\Phi(x, u, t) = \Phi_t(x, u)$ имеет вид $(\varphi_t(x, u), \psi_t(u)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$ и выполнены следующие условия (мы пользуемся обозначением $\alpha_t(u) = \alpha(u, t)$):

(a) $\Phi_{t_0} = \mathrm{id} \in \mathscr{B}(n+r)$, $\alpha_{t_0} = 0$,

(b) $\Phi_t \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} = \mathrm{id} \in \mathscr{B}(n)$, $\alpha_t(0) = 0$,

(c) $F_t \circ \Phi_t + \alpha_t = F_{t_0}$.

Эти условия означают, что пара (Φ_t, α_t) представляет собой морфизм $(r, F_{t_0}) \to (r, F_t)$, который, кроме того, является изоморфизмом согласно (a).

При помощи условия (a) можно заменить условие (c) дифференциальным условием $\frac{\partial}{\partial t}(F_t \circ \Phi_t + \alpha_t) = 0$, которое можно записать в виде

$$\text{(d)} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\Phi, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x, u, t) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial F}{\partial u_j}(\Phi, t) \frac{\partial \psi_j}{\partial t}(u, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\Phi, t) + \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t) = 0.$$

Заметим, что (Φ, t) — это сокращение для $(\Phi(x, u, t), t)$.

Итак, мы заменили (c) на (d) и должны попытаться решить эти уравнения относительно $\partial\varphi/\partial t$, $\partial\psi/\partial t$, $\partial\alpha/\partial t$. Мы ищем ростки

$$\xi_i \in \mathscr{E}(n+r+1), \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$\zeta_j \in \mathscr{E}(r+1), \qquad j = 1, \ldots, r+1,$$

удовлетворяющие условию

$$\text{(e)} \quad \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \xi_i + \sum_j \frac{\partial F}{\partial u_j} \zeta_j + \zeta_{r+1} =$$
$$= -\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathscr{E}(n+r+1),$$

$\xi_i \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} \times \mathbf{R} = 0$, т. е. $\xi_i \in \mathfrak{m}(r) \cdot \mathscr{E}(n+r+1)$,

$\zeta_j \mid \{0\} \times \mathbf{R} = 0$, т. е. $\zeta_j \in \mathfrak{m}(r) \cdot \mathscr{E}(r+1)$.

Убедимся, что это именно то, что нам нужно. Предположим, что ξ_i и ζ_j уже найдены. Пусть Φ и α — решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \partial\varphi_i/\partial t &= \xi_i(\varphi, \psi, t), \\ \partial\psi_j/\partial t &= \zeta_j(\psi, t), \qquad j \leqslant r, \\ \partial\alpha/\partial t &= \zeta_{r+1}(\psi, t) \end{aligned}$$

с начальными условиями $\Phi_{t_0} = \mathrm{id}$ и $\alpha_{t_0} = 0$; тогда Φ и α удовлетворяют условиям (a), (b) и (d).

Далее, поскольку $\partial F/\partial t = g - f \in \mathfrak{m}(r)\,\mathscr{E}(n + r + 1)$, для доказательства (e) достаточно показать, что

$$\mathfrak{m}(r)\,\mathscr{E}(n + r + 1) \subset \langle \partial F/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{m}(r)\,\mathscr{E}(n+r+1)} + \\ + \langle \partial F/\partial u_j, 1 \rangle_{\mathfrak{m}(r)\,\mathscr{E}(r+1)},$$

где $\langle b_1, \ldots, b_k \rangle_A$, как обычно, определяется формулой $\left\{ \sum_i a_i b_i \mid a_i \in A \right\}$.

Для доказательства этого включения остается только показать, что

$$(*) \quad \mathscr{E}(n + r + 1) + \langle \partial F/\partial x_i \rangle_{\mathscr{E}(n+r+1)} + \langle \partial F/\partial u_j \rangle_{\mathscr{E}(r+1)} + \\ + \mathscr{E}(r + 1).$$

Мы хотим воспользоваться тем, что гомотопия F_t есть k-трансверсальная деформация ростка η. По лемме 16.4 получаем

$$\mathfrak{m}(n) = \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathscr{E}(n)} + \langle \partial F_t/\partial u_j \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} \rangle_{\mathbf{R}} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Средний член в правой части упростился, потому что мы предположили, что $F_t \mid \{0\} \times \mathbf{R}^r = 0$. Так как росток η k-определен, т. е. $\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle$, можно опустить последний член. Полагая $\partial\eta/\partial x_i = \partial F_t/\partial x_i \mid \mathbf{R}^n \times \{0\}$, получаем

$$\mathfrak{m}(n) = \langle \partial F_t/\partial x_i \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} \rangle_{\mathscr{E}(n)} + \langle \partial F_t/\partial u_j \mid \mathbf{R}^n \times \{0\} \rangle_{\mathbf{R}}.$$

Чтобы доказать равенство $(*)$, рассмотрим уравнение

$$\mathscr{E}(n + r + 1) = \mathfrak{m}(n)\,\mathscr{E}(n + r + 1) + \mathscr{E}(r + 1).$$

Если $g \in \mathfrak{m}(n)\mathscr{E}(n+r+1)$, то мы только что показали, что в

$$\langle \partial F/\partial x_i \rangle_{\mathscr{E}(n+r+1)} + \langle \partial F/\partial u_j \rangle_{\mathscr{E}(r+1)}$$

существует элемент, который совпадает с g по крайней мере на множестве $\mathbf{R}^n \times \{0\} \times \{t_0\}$. Элементы пространства $\mathscr{E}(n+r+1)$, которые обращаются в нуль на $\mathbf{R}^n \times \{0\} \times \{t_0\}$, лежат в $\mathfrak{m}(r+1) \cdot \mathscr{E}(n+r+1)$. Собирая все вместе, получаем

$$(**) \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathscr{E}(n+r+1)} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle_{\mathscr{E}(r+1)} +$$
$$+ \mathscr{E}(r+1) + \mathfrak{m}(r+1)\mathscr{E}(n+r+1) = \mathscr{E}(n+r+1).$$

Пусть $C = \mathscr{E}(n+r+1)$ — конечно порожденный $\mathscr{E}(n+r+1)$-модуль. Пусть $A = \langle \partial F/\partial x_i \rangle_{\mathscr{E}(n+r+1)}$ — подмодуль в C и

$$B = \langle \partial F/\partial u_j \rangle_{\mathscr{E}(r+1)} + \mathscr{E}(r+1).$$

Введем на C структуру $\mathscr{E}(r+1)$-модуля с помощью вложения $\mathscr{E}(r+1) \subset \mathscr{E}(n+r+1)$. Тогда для $\mathscr{E}(r+1)$-модулей B и C выполнено включение $B \subset C$. Заметим, что B конечно порожден над $\mathscr{E}(r+1)$. Мы знаем, что

$$(**) \qquad A + B + \mathfrak{m}(r+1)C = C,$$

и хотим показать, что

$$(*) \qquad A + B = C.$$

Чтобы вывести это из имеющейся информации относительно A, B и C, достаточно рассмотреть случай $A = 0$ (т. е. вычислять по модулю A). Рассмотрим индуцированное проекцией отображение $\mathscr{E}(r+1) \to \mathscr{E}(n+r+1)$. Это отображение позволяет рассматривать каждый $\mathscr{E}(n+r+1)$-модуль как $\mathscr{E}(r+1)$-модуль. Про наши модули мы знаем, что

B конечно порожден над $\mathscr{E}(r+1)$,

C конечно порожден над $\mathscr{E}(n+r+1)$,

$B + \mathfrak{m}(r+1)C = C$.

Образующие $b_1, \ldots, b_s$ модуля B порождают векторное пространство $C/\mathfrak{m}(r+1)C$. Из следствия 6.6 подготовительной теоремы вытекает, что эти образующие порождают C как $\mathcal{E}(r+1)$-модуль. Следовательно, $B=C$.

Итак, мы закончили последний шаг доказательства теоремы Мезера об универсальных деформациях. ∎

17. РИСУНКИ СЕМИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КАТАСТРОФ

Литература: A. N. Godwin, Three dimensional pictures for Thom's parabolic umbilic, IHES Publ. Math., 40 (1971), 117—138.
G. Wassermann, Stability of unfoldings, Dissertation, Regensburg 1973, Springer Lecture Notes, 393 (1974).
G. Wassermann, (r, s)-stability of unfoldings, preprint.

Напомним, что теория элементарных катастроф по самой своей природе локальна. Эта теория рассматривает семейство потенциальных функций V_u: $X \to \mathbb{R}$, где X — подмножество в $\mathbb{R}^n$, содержащее некоторую окрестность начала координат, а параметр u пробегает открытое множество $U \subset \mathbb{R}^r$. Можно считать, что $X = \mathbb{R}^n$. Каждая отдельная катастрофа определяется ростком $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$, который включается в росток деформации (r, f), $f \in \mathfrak{m}(n+r)$.

Координаты в $\mathbb{R}^r$ будут попеременно называться либо *параметрами деформации* η, либо *внешними параметрами* модели.

Определения. *Локальным режимом* в точке $u \in U$ называется любая из точек локального минимума функции $f \mid \mathbb{R}^n \times \{u\}$.

Процессом (простейшая интерпретация), связанным с ростком η (или f), называется такое сечение s расслоения $\mathbb{R}^n \times U \to U$, что точка $(s(u), u)$ есть либо локальный режим, либо бесконечность. Это сечение должно быть определено на открытом плотном подмножестве.

Правилом называется способ сопоставления деформации f некоторого процесса, связанного с f.

Регулярной точкой процесса s называется такая точка $u \in U$, в которой сечение s определено и непрерывно в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Эквивалентное определение регулярной точки: существует сохраняющий слои гомеоморфизм прообраза некоторой окрестности такой точки, переводящий s в постоянное сечение.

Точкой катастрофы называется любая нерегулярная точка в U.

Морфологией катастрофы или *множеством катастроф* называется множество всех точек катастрофы. При изучении геометрии особенности η с помощью ее деформации f первое важное множество — это

$$\Sigma_f = \{(x, u) \in \mathbf{R}^n \times U \mid d_x f(x, u) = 0\},$$

где

$$d_x f(-, u) = D(f \mid \mathbf{R}^n \times \{u\}).$$

При каждом фиксированном u среди точек Σ_f, лежащих в $\mathbf{R}^n \times \{u\}$, находятся как локальные минимумы функции $f \mid \mathbf{R}^n \times \{u\}$ (т. е. режимы), так и ее локальные максимумы. Рассмотрим далее множество

$$\Delta_f = \{(x, u) \in \Sigma_f \mid \text{форма } d_x^2 f(x, u) \text{ вырожденна}\}$$

и его образ $D_f = \pi(\Delta_f)$ при проекции π: $\mathbf{R}^n \times U \to U$. Точки множества D_f — важные кандидаты на роль точек катастрофы.

Что же касается правил, то рассмотрим два основных из них. *Правило Максвелла* предписывает взять в качестве $s(u)$ такую точку, в которой $f \mid \mathbf{R}^n \times \{u\}$ достигает наименьшего из минимумов. Поскольку одним из значений этого минимума может оказаться $-\infty$, правилом Максвелла лучше пользоваться тогда, когда f имеет конечные минимумы. Ясно, что точки катастрофы возникают тогда, когда $f \mid \mathbf{R}^n \times \{u\}$ достигает абсолютного минимума в двух различных местах.

В случае когда U — подмножество в многообразии пространство-время, мы сформулируем еще одно правило при следующем дополнительном предположении: U расслоено на неособые одномерные подмногообразия, называемые *временными кривыми*. Каждая из них занимает в пространстве фиксированное положение и параметризована временем. Координаты локальной модели вовсе не должны быть локальными декартовыми координатами в многообразии пространство-время.

Правило минимального отставания[1]) предписывает сечению s оставаться непрерывным столь долго, сколь это будет возможно. Это означает, что вдоль временных кривых $s(u)$ должно быть непрерывным семейством точек минимума до тех пор, пока эти минимумы не исчезнут. Только в этот момент s должно перескочить к другому семейству точек минимума.

Существуют и другие, более тонкие определения процесса. Одно из них, весьма обычное в работе Зимана, состоит в том, что каждому гладкому пути τ, лежащему в U, сопоставляется сечение s_τ расслоения $\mathbb{R}^n \times \tau \to \tau$, такое, что точка $(s_\tau(u), u)$ есть либо локальный режим, либо бесконечность. При такой схеме каждый путь имеет направление, в котором возрастает параметр, и правило минимального отставания действует вдоль каждого пути: s_τ остается вдоль каждого пути непрерывным столь долго, сколь это возможно. При этом описании мы столь же вольно обращались с моделями Зимана, сколь в предыдущем — с моделями Тома.

Теперь мы опишем семь элементарных катастроф.

Складка

Деформация: $f(x, u) = x^3 + ux,$

$$\Sigma_f = \{(x, u) \mid 3x^2 + u = 0\},$$

$$\Delta_f = \{(0, 0)\},$$

$$D_f = \{0\}.$$

Нарисуем график f. При отрицательных значениях u функция f имеет один локальный минимум, а при

[1]) В оригинале: perfect-delay convention. — *Прим. перев.*

положительных u вовсе не имеет локальных минимумов (рис. 1). Множество Σ_f в (x, u)-плоскости изо-

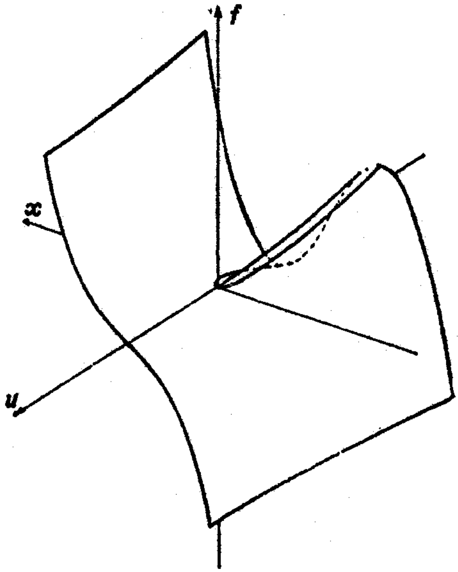


Рис. 1.

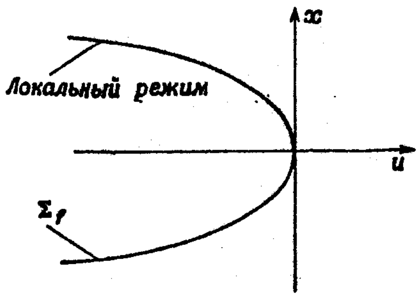


Рис. 2.

бражено на рис. 2. Ясно, что при положительных значениях u процесс s может быть только в бесконечности, а при отрицательных u значение $s(u)$ равно либо $-\sqrt{-u/3}$, либо бесконечности. Таким образом, если u — временна́я координата, то мы можем представлять себе некое явление, описываемое параметром x, которое до момента $u=0$ находится в состоянии, задаваемом формулой $x=-\sqrt{-u/3}$, а в момент $u=0$ скачком переходит в некоторое другое состояние, не описываемое рассматриваемой локальной моделью (отсюда, конечно, не следует, что это явление вообще исчезает).

Характерная особенность этой модели — быстрое изменение параметра x в моменты, предшествующие исчезновению локального режима.

Сборка

Деформация: $f(x, u, v) = x^4 - ux^2 + vx,$

$$\Sigma_f = \{(x, u, v) \mid 4x^3 - 2ux + v = 0\},$$

$$\Delta_f = \{(x, u, v) \in \Sigma_f \mid 12x^2 - 2u = 0\},$$

$$D_f = \{(u, v) \mid 27v^2 = 8u^3\}.$$

В этом случае мы нарисуем Σ_f (рис. 3, по Зиману). Каждой точке (u, v)-плоскости соответствует график, изображающий зависимость f только от x. Различные возможности представлены на рис. 4 (замена v на $-v$ отражает каждую маленькую картинку относительно вертикальной оси). На рис. 4 положительный луч оси u — это так называемое *множество Максвелла*, на котором происходит переключение в ту точку минимума, в которой значение функции меньше. Исчезновение точек минимума происходит в момент пересечения линий сборки. График процесса, построенного по правилу Максвелла, изображен на рис. 5.

Один из процессов, построенных по правилу минимального отставания, показан на рис. 6. Множество катастроф совпадает с линией сборки, пока временна́я кривая не коснется кривой сборки.

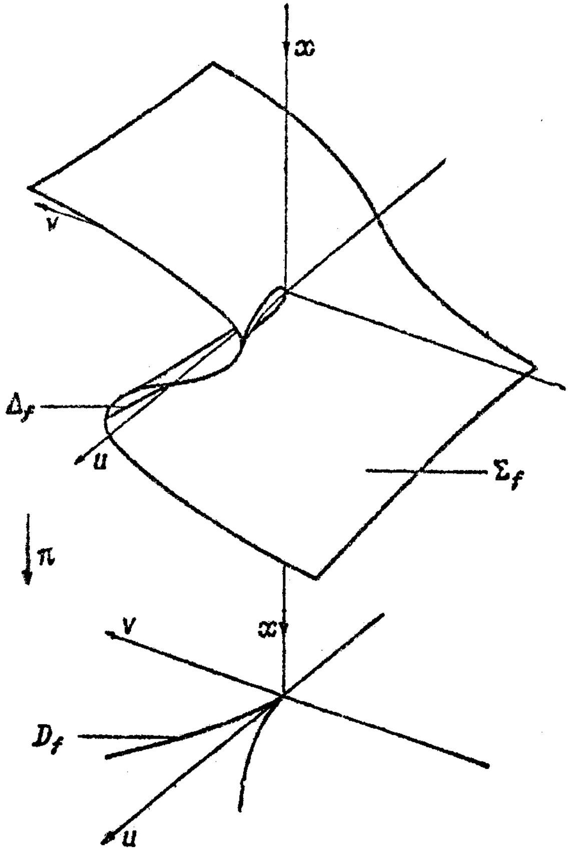


Рис. 3.

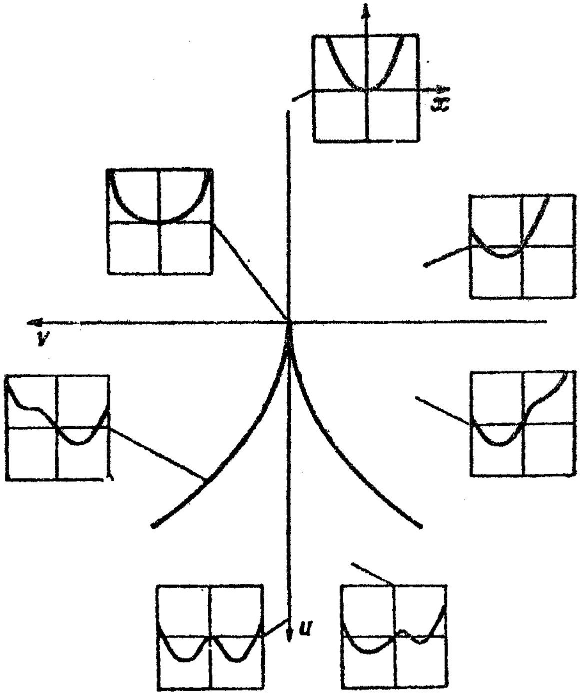


Рис. 4.

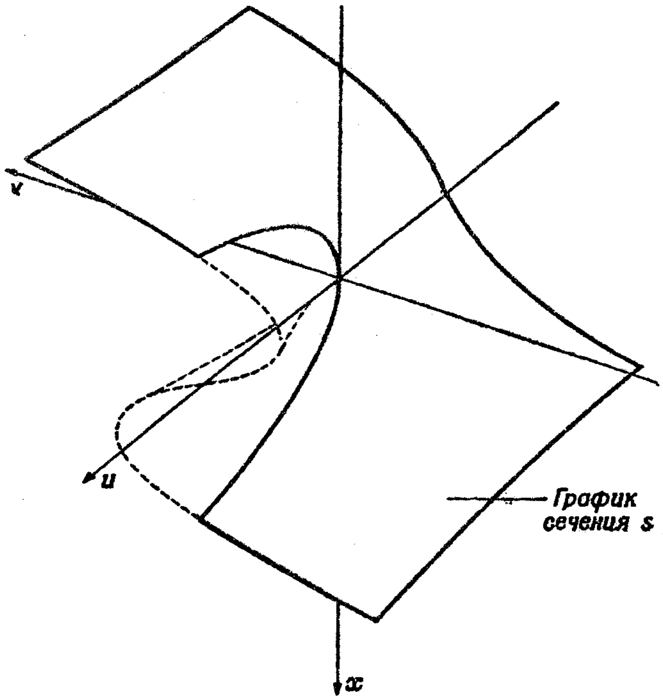


Рис. 5.

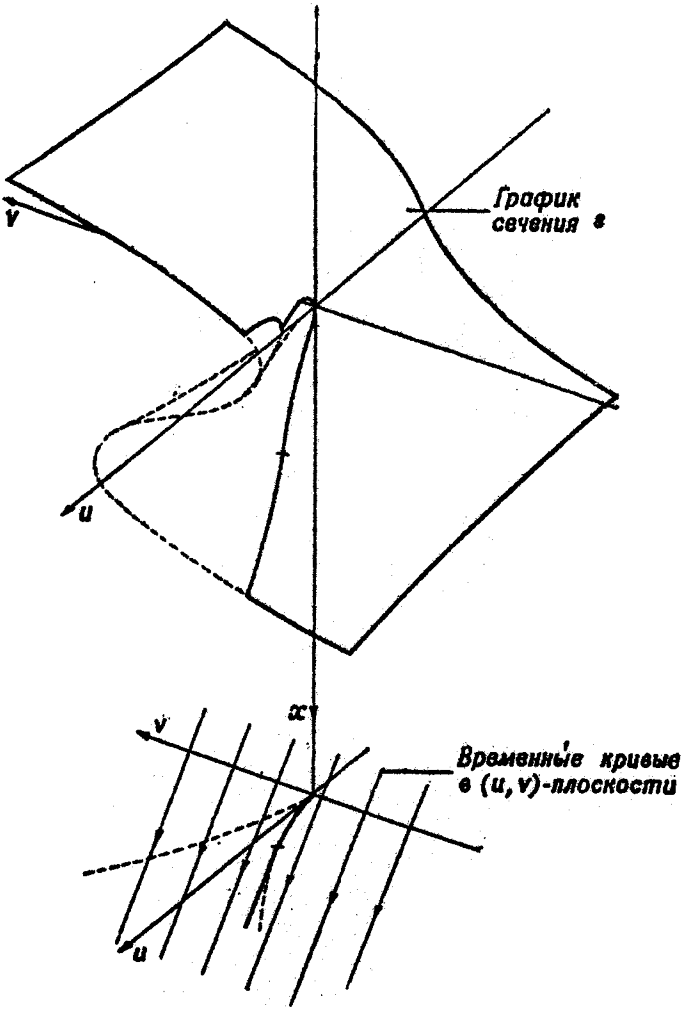


Рис. 6.

На рис. 7 показаны две модели, которые возможны, если понимать «процесс» как сопоставление каждому

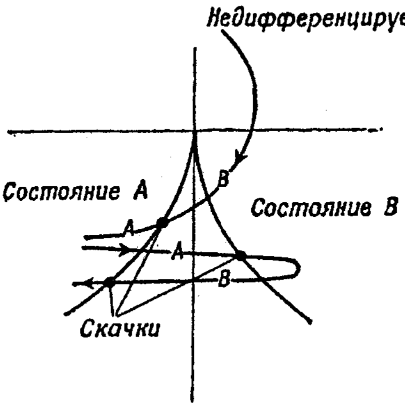


Рис. 7.

гладкому пути сечения над этим путем, удовлетворяющего правилу минимального отставания.

Ласточкин хвост

Деформация: $f(x, u, v, w) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx,$

$$\Sigma_f = \{(x, u, v, w) \mid 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0\},$$

$$\Delta_f = \{(x, u, v, w) \in \Sigma_f \mid 20x^3 + 6ux + 2v = 0\},$$

$$D_f = \{(u, v, w) \mid \exists x\colon\ 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0 \text{ и } 20x^3 + 6ux + 2v = 0\}.$$

В этом случае D_f имеет вид, показанный на рис. 8. Распределение режимов для положительных и отрицательных значений u показано на рис. 9 и 10. Для отрицательных u ситуацию проясняет рис. 11 в (x, v, w)-пространстве.

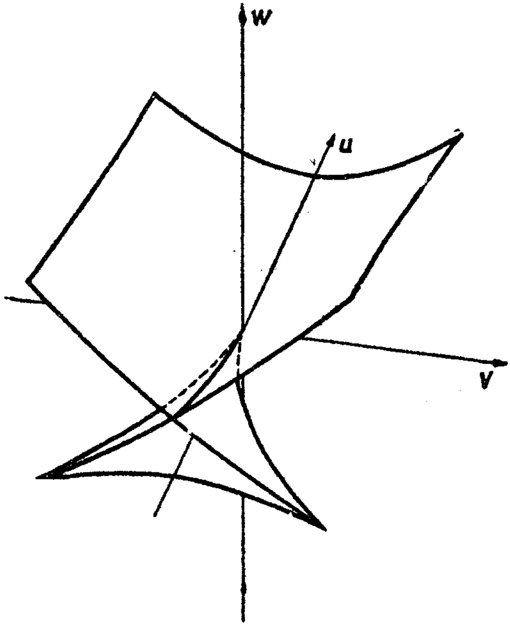
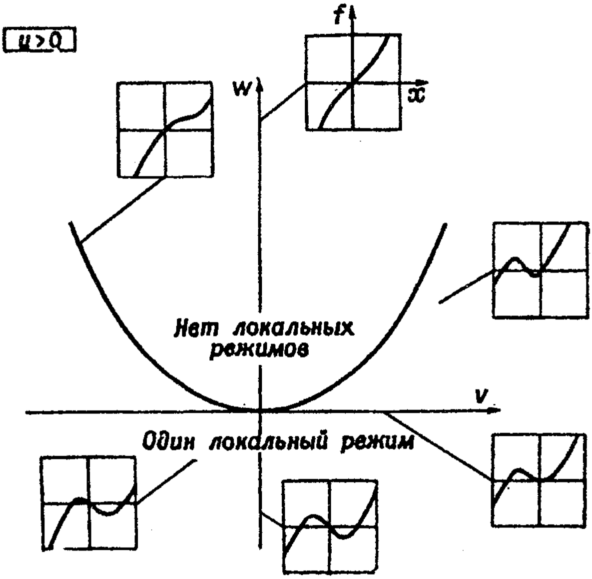


Рис. 8.



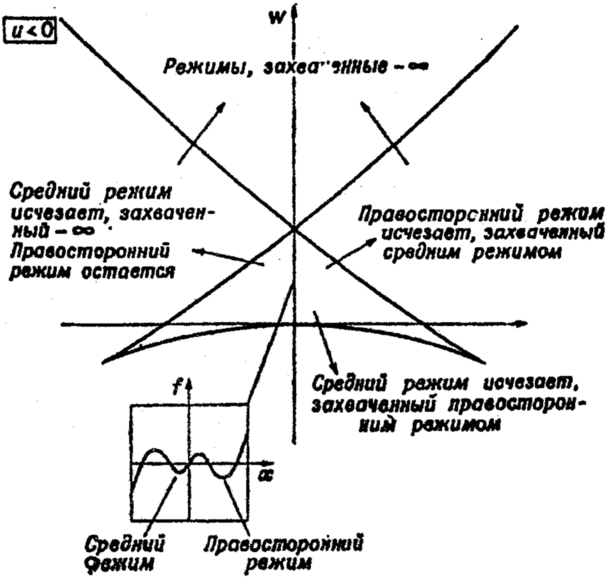

u<0
w
Режимы, захва"энные -∞
Средний режим исчезает, захваченный -∞
Правосторонний режим остается
Правосторсннии режим исчезает, захваченный средним режимом
Средний режим исчезает, захваченный правосторонний режимом
f
x
Средний режим
Правосторонний режим

Рис. 10.

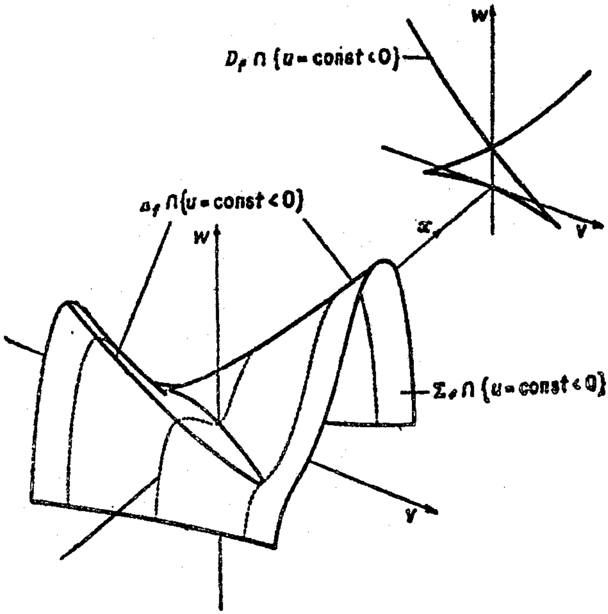

w
$D_f \cap \{u = \text{const} < 0\}$
x
v
$\Delta_f \cap \{u = \text{const} < 0\}$
w
$\Sigma_f \cap \{u = \text{const} < 0\}$
v

Рис. 11.

Если время течет параллельно оси w, то правило минимального отставания дает множество катастроф, показанное на рис. 12. Мы предполагаем, что система

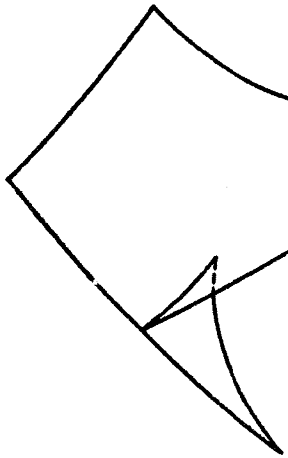


Рис. 12.

начинает свое существование с локального режима, а не с $-\infty$.

Гиперболическая омбилическая точка

Деформация: $f(x, y, u, v, w) = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$,

$$\Sigma_f = \{(x, y, u, v, w) \mid 3x^2 + wy - u = 3y^2 + wx - v = 0\},$$

$$\Delta_f = \left\{ (x, y, u, v, w) \in \Sigma_f \mid \det \begin{bmatrix} 6x & w \\ w & 6y \end{bmatrix} = 0 \right\},$$

$$D_f = \{(u, v, w) \mid \exists\, (x, y)\colon\ u = 3x^2 + wy,\ \ v = 3y^2 + wx \text{ и } w^2 = 36xy\}.$$

При фиксированном w множество Σ_f определяет отображение $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$: $(x, y) \mapsto (u, v) = (3x^2 + wy, 3y^2 + wx)$, и пересечение множества D_f с плоскостью $\{w = \text{const}\}$ совпадает с множеством критических значений этого отображения.

При $w=0$ это отображение похоже на сложенный носовой платок (рис. 13), а при $w\neq 0$ оно становится менее вырожденным (рис. 14).

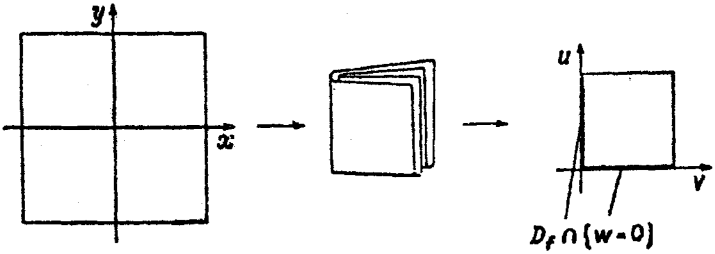


Рис. 13.

В (u, v, w)-пространстве множество D_f симметрично относительно (u, v)-плоскости. Половина D_f изображена на рис. 15.

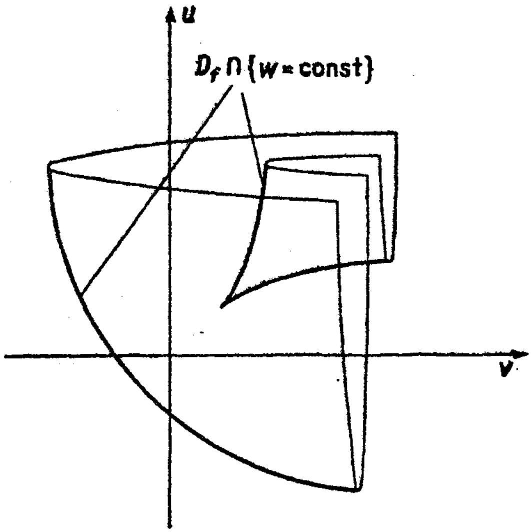


Рис. 14.

При $w=0$ мы даем на рис. 16 график f для положительных $u=v$ и для отрицательных $u=v$. При $w\neq 0$ картина меняется не очень сильно. Более

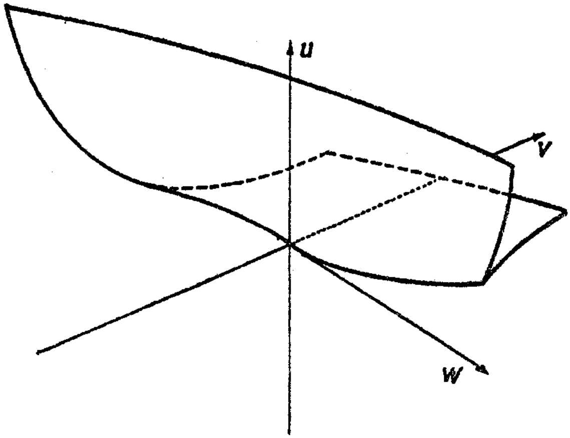


Рис. 15.

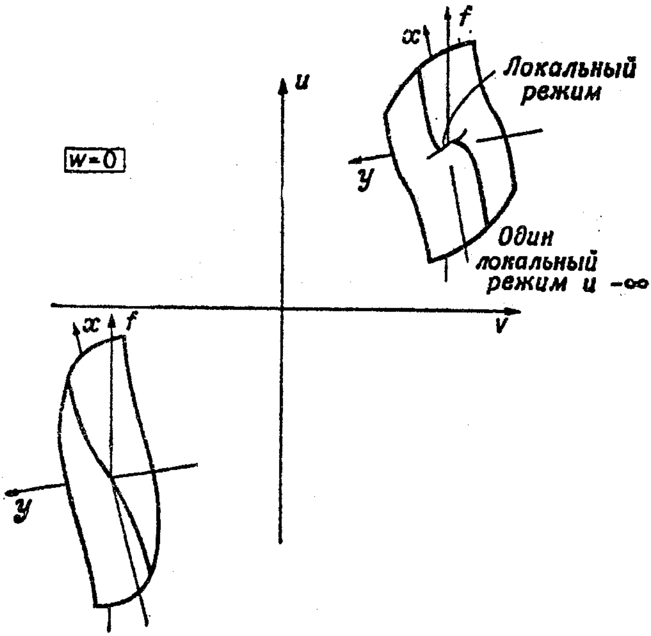


Рис. 16.

тщательное изучение показывает, что всегда есть по меньшей мере один конечный локальный режим, который находится на той стороне поверхности рис. 15, которая содержит квадрант $w=0,\ u,\ v>0$.

Эллиптическая омбилическая точка

Деформация: $f(x, y, u, v, w)=\frac{x^3}{3}-xy^2+w(x^2+y^2)-ux-vy$. Эта замена координат упрощает уравнение D_f:

$$D_f=\{(u, v, w)\mid\exists (x, y)\colon\ u=x^2-y^2+2wx,\quad v=-2xy+2wy,\ x^2+y^2=w^2\}.$$

Если мы рассмотрим в $\mathbb{C}$ координаты $z=x+iy$ и $u+iv$, то увидим, что при фиксированном w множество

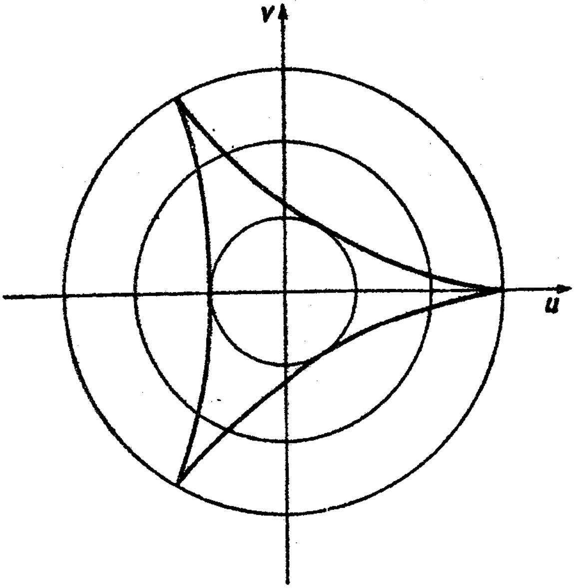


Рис. 17.

$D_f\cap\{w=\text{const}\}$ есть образ окружности $|z|=|w|$ при отображении $(x, y)\to(u, v)=(x^2+y^2+2wx,\ 2wy-2xy)$, которое можно записать в виде $z=\bar z^2+2wz$,

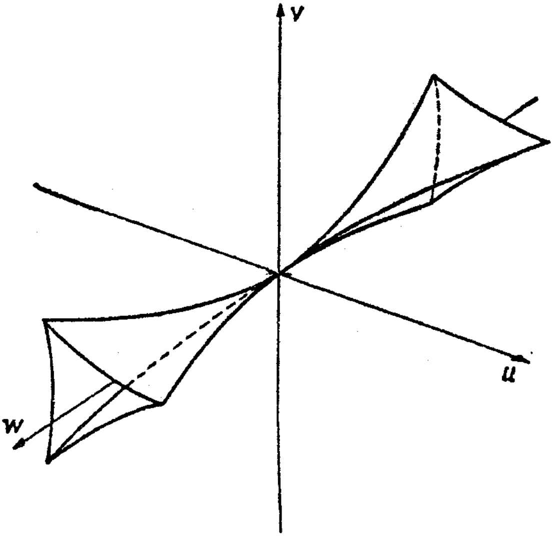


Рис. 18.

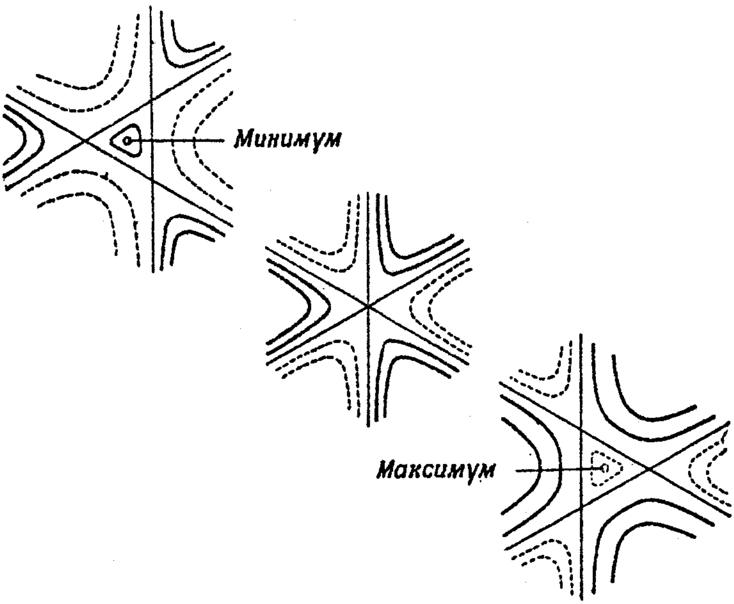


Рис. 19.

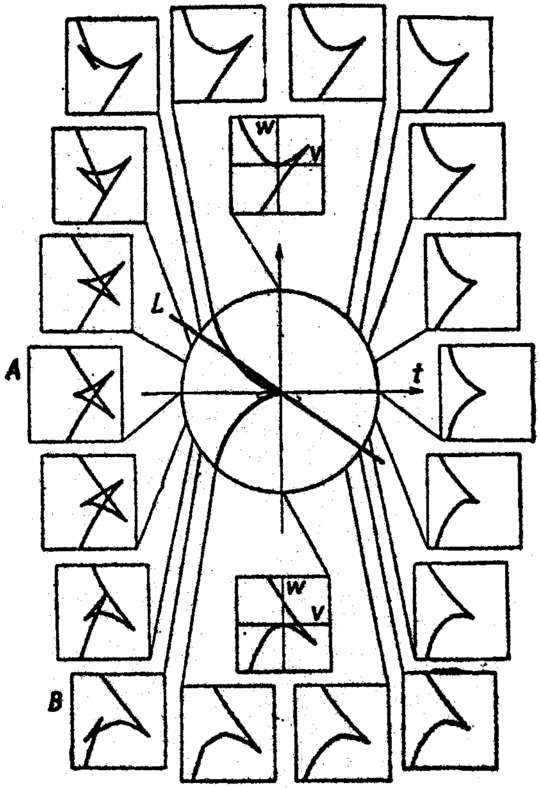


Рис. 20.

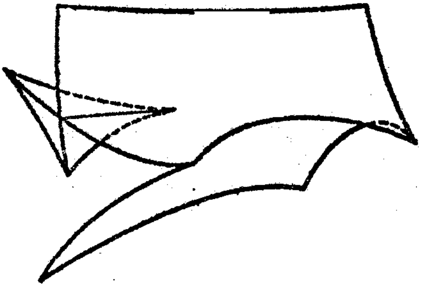


Рис. 21.

При $w=1$ мы получаем кривую $2e^{i\theta}+e^{-2i\theta}$ (рис. 17) Следовательно, D_f выглядит так, как показано на рис. 18.

Мы видим, что есть только один локальный режим, и он лежит внутри D_f при $w>0$. При $u=v=w=0$ график $f(x, y)$ — это так называемое «обезьянье седло». Вдоль должным образом выбранной линии, близкой к оси w и лежащей внутри D_f, это седло деформируется так, как показано на рис. 19, где изображены линии уровня (пунктирные линии соответствуют положительным значениям, сплошные — отрицательным или нулю).

Бабочка

Деформация: $f(x, u, v, w, t)=x^6+tx^4+ux^3+vx^2+wx$. Рисунок, на котором мы изобразим множество D_f, будет похож на часы. При фиксированных (u, t) пере-

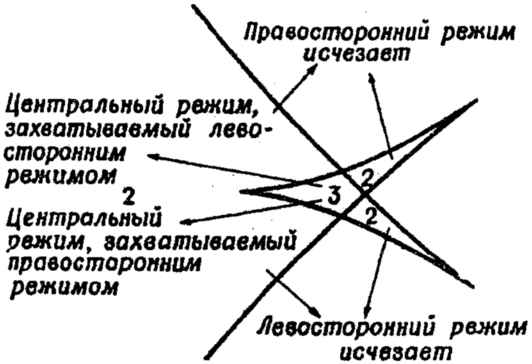


Рис. 22.

сечение D_f с плоскостью (v, w) образует кривую. Нарисовав эти кривые при значениях параметров (u, t), пробегающих единичный круг, мы получим рис. 20.

Кривая с точкой возврата в плоскости (u, t) — это линия ласточкиных хвостов, т. е. геометрическое место точек, в которых происходит катастрофа «ласточкин хвост». Поверхность D_f, соответствующая линии L, показана на рис. 21.

Распределение локальных режимов для картинки A показано на рис. 22. Этот рисунок полностью описывает ситуацию; например, распределение режимов для картинки B показано на рис. 23.

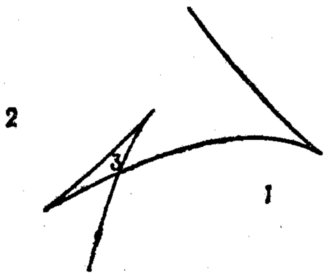


Рис. 23.

Параболическая омбилическая точка

Деформация: $f(x, y, u, v, w, t) =$
$$= x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy.$$

«Часы» показаны на рис. 24. По-видимому, этот рисунок впервые сделал Шансине (Chenciner A.). Подробное изложение с большим количеством дополнительной информации и рисунков можно найти в статье Годвина.

Вот объяснение различных кривых в (w, t)-плоскости:

линия изолированных точек:	появляется изолированная точка;
линия пересечения:	пересекаются различные части D_f;
гиперболическая линия:	центры гиперболических омбилических точек;
эллиптическая линия:	центры эллиптических омбилических точек;
линия «клюв к клюву»:	раздвоение точек сборки двух ласточкиных хвостов;
линия ласточкиных хвостов:	центры появления двух ласточкиных хвостов.

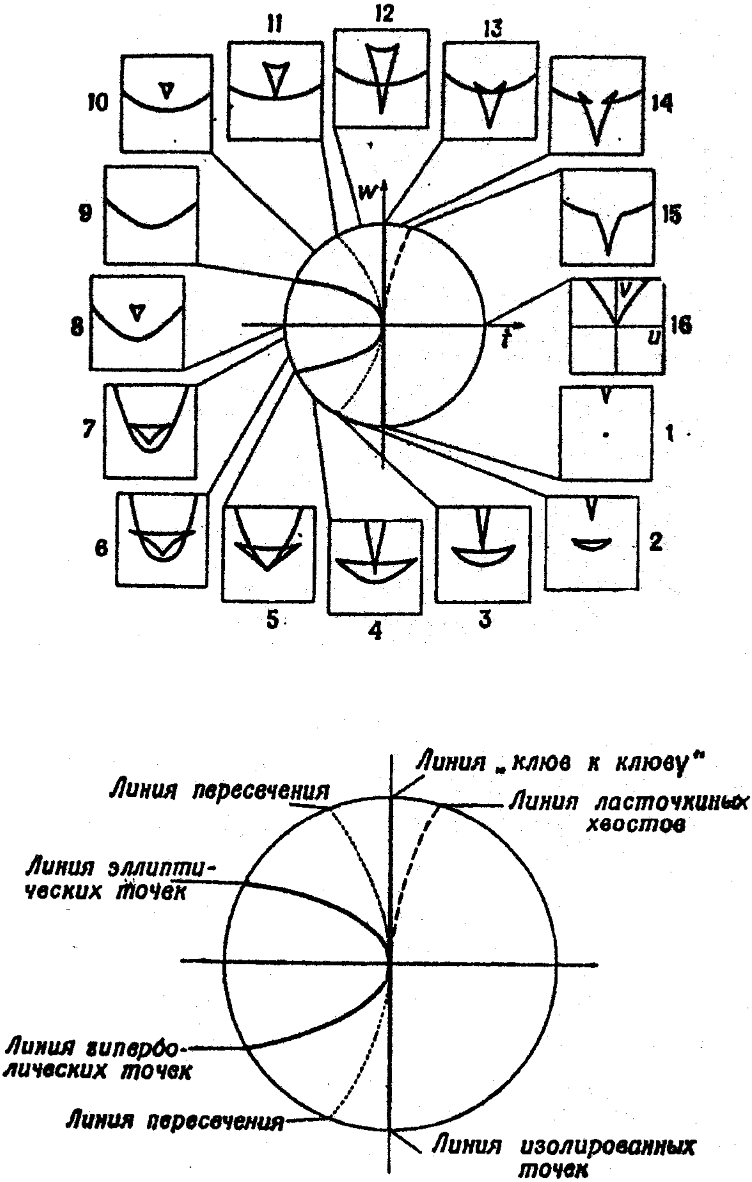

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
w
t
v
u
Линия „клюв к клюву"
Линия пересечения
Линия ласточкиных хвостов
Линия эллиптических точек
Линия гиперболических точек
Линия пересечения
Линия изолированных точек

Рис. 24.

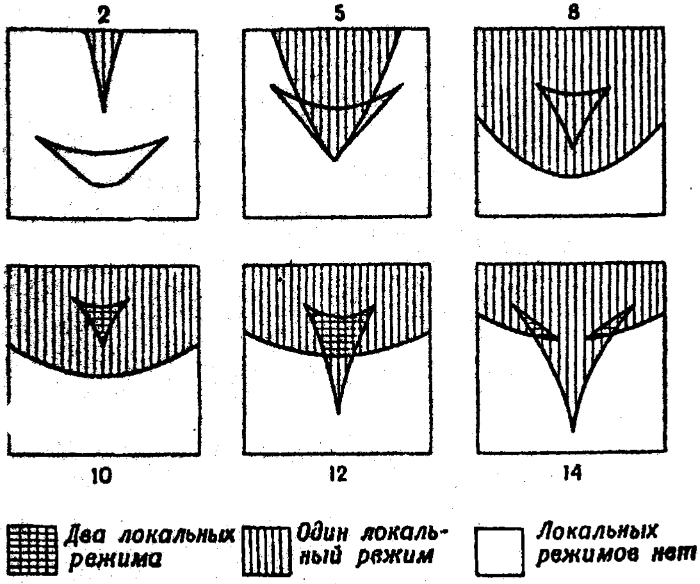


Рис. 25.

Число локальных режимов указано на рис. 25.

Деформации более высоких размерностей

Мы привели изображения деформаций минимальной размерности. Но, например, $f(x, u, v, w) = x^4 - ux^2 - vx$ есть версальная деформация, и множества Σ, Δ и D являются прямыми произведениями на ось w соответствующих множеств для обычной деформации точки сборки. Действительно, всякое дописывание новых переменных превращает универсальную деформацию в версальную. Приведенная выше деформация сборки эквивалентна следующей:

$$f(x, u, v, w) = x^4 - (u - w^2)x^2 - vx,$$

для которой D_f имеет вид, показанный на рис. 26. Если u — время, то плоскости с постоянным значением вре-

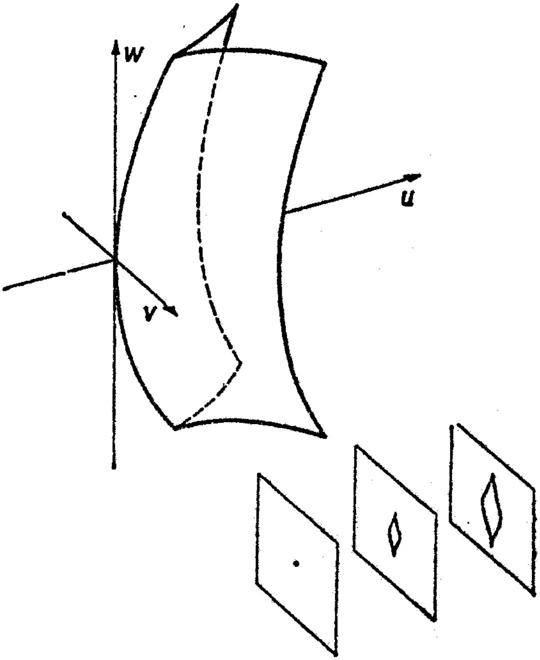


Рис. 26.

мени пересекают D_f так, как это показано на трех картинках. Вероятно, существует правило, для которого D_f является множеством катастроф.

Временная устойчивость

Обсуждавшаяся выше элементарная теория катастроф опирается на классификацию устойчивых ростков с точностью до некоторой эквивалентности. Эквивалентность определяется с помощью правых и левых замен координат (в образе и в прообразе). Детали читатель может найти в диссертации Вассермана.

Характерной особенностью этого отношения эквивалентности является то, что разрешается брать росток произвольного диффеоморфизма множества $U\rho$ Вас-

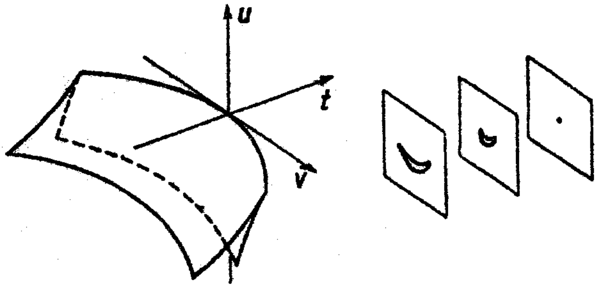


Рис. 27.

серман (вторая цитированная в начале главы работа) рассмотрел задачи, которые возникают, когда на диффеоморфизмы U накладываются ограничения. Предположим, что U расслоено на подпространства с одинаковым значением времени, т. е. на U введены координаты, в которых одна из осей представляет время. Будем разрешать только такие диффеоморфизмы U, которые переводят каждый слой с постоянным значением времени в другой такой слой. Отображения, эквивалентные с точки зрения этого нового, более ограничительного определения, называются *t-эквивалентными*, а соответствующее понятие устойчивости называется *t-устойчивостью*. Теперь можно поставить задачу классификации t-устойчивых функций. Список таких функций более обширен, чем список элементарных катастроф, но все-таки конечен в малых размерностях. Вот одна из t-устойчивых деформаций сборки:

$$f(x, u, v, t) = x^4 + ux^2 + tx + ux + v^2x.$$

Разумеется, роль времени играет координата t. Если взять в качестве $t = t(u, v, w)$ функцию, нулевая линия которой касается кривой сборки на рис. 26 и трансверсальна оси u, то деформация, к которой относится рис. 26, не будет t-устойчивой.

Вид D_f показан на рис. 27; там же показаны пересечения D_f с плоскостями $t = \text{const}$.

Кошка ловит мышь

«...Для животного наиболее важным регулирующим процессом является питание, т. е. восстановление запасов химической энергии. Этот процесс периодичен, поэтому он описывается петлей, которую мы назовем *петлей охоты*.

Здесь мы встречаемся с основной трудностью. Охота предполагает наличие добычи, т. е. объекта, внешнего по отношению к самому животному. Питание — в своей основе — это поглощение добычи (жертвы) организмом (как ясно видно на примере фагоцитоза одноклеточных). Следовательно, при описании петли охоты мы должны использовать простейшую из катастроф захвата, а именно катастрофу Римана—Гюгонио. Петлей охоты служит в этом случае единичный круг в плоскости Ouv параметров деформации $V = x^4/4 + ux^2/2 + vx$. Этот круг пересекает бифуркационную кривую $4u^3 + 27v' = 0$ в двух точках J и K. В точке J появляется новый минимум, новое действующее лицо. В точке K этот новый минимум ловит старый, точка K — катастрофа захвата. Но если мы продолжаем описывать единичный круг, то видим, что после одного оборота хищник — в голодном состоянии — *превращается в жертву*. Это, на первый взгляд, парадоксальное утверждение может служить объяснением многих фактов из мифологии (оборотень), из этнологии (охотничьи ритуалы, в которые обычно входит исполнение охотником роли жертвы) и из магии...»

Из работы Р. Тома
«Глобальная динамическая схема
эмбриологии позвоночных»
(A global dynamical scheme for
vertebrate embryology).

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ЧТЕНИЯ

(частично использована библиография из [24])

Всюду ниже используется следующее сокращение:

T. T. B. = Towards a Theoretical Biology, ed. C. H. Waddington, Edinburgh, 1970—1972.

Работы Рене Тома (René Thom)

1. Stabilité Structurelle et Morphogenèse, Benjamin, New York, 1972.
2. Une théorie dynamique de la morphogenèse, T. T. B. 1, 152—166.
3. Совм. с Уоддингтоном (Waddington C. H.), Correspondence, T. T. B. 1, 166—179.
4. Topologie et signification, *l'Age de Science*, 4 (1968), 219—242.
5. Topological models in biology, T. T. B. 3, 89—116; *Topology*, 8 (1969), 313—336.
6. A mathematical approach to morphogenesis: archetypal morphologies, Wistar Institute Symposium Monograph, No. 9 (1969), 165—174.
7. Topologie et linguistique, Essays on Topology and Related Subjects, Springer-Verlag (1970), 226—248. [Перевод: Том Р., Топология и лингвистика, *УМН*, 30 (1975), 199—221.]
8. Structuralism and biology, T. T. B. 4, 68—82.
9. Modèles mathématiques de la morphogenèse, Ch. 1—3, mimeographed, I. H. E. S., 1970/71.
10. Les symétries brisées en physique macroscopique et la mécanique quantique (в печати).
11. A dynamical scheme for vertebrate embryology, A. A. A. S., Philadelphia, 1971.
12. Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières (в печати).
13. Sur la typologie des langues naturelles: essai d'identification psycholinguistique, in Formal Analysis of Natural Languages, ed. Menton, Proc. I. R. I. A. Congress (1970), Janua Linguarium (в печати).
14. Language and catastrophes, Proc. Internat. Sympos. in Dynamical Systems (Salvador 1971), ed. M. Peixoto, Academic Press, New York, 1973.
15. La théorie des catastrophes: état présent et perspectives, Manifold 14, см. [42].

Работы Э. Зимана (E. C. Zeeman)

16. Geometry of catastrophe, Times Literary Supplement, 10 December, 1971.
17. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse, T. T. B. 4, 8—67.
18. A catastrophe machine, T. T. B. 4, 276—282.
19. Catastrophe theory in brain modelling, Conference on Neural Networks, I. C. T. P., Trieste (1972) (готовится к печати в *J. Neuroscience*).
20. Совм. с Иснардом (Isnard C.), Some models from catastrophe theory, Conference on Models in Social Sciences, Edinburgh (1972), preprint.
21. Совм. с Харрисоном (Harrison P. J.), Applications of catastrophe theory to macroeconomics, Symposium on Applications of Global Analysis, Utrecht (1973), preprint.
22. On the unstable behaviour of stock exchanges, mimeographed, Warwick (1973) (готовится к печати в *J. of Math. Economics*).
23. Applications of catastrophe theory, preprint (1973).

Работы разных авторов

24. Abraham R., Introduction to morphology, Quatrième Rencontre entre Mathématiciens et Physiciens (1972), Vol. 4, Fasc. I, Publ. du Département de Mathématiques de l'Université de Lyon, Tome 9 (1972), Fasc. suppl. 1, 38—114.
25. Арнольд В. И., Косы алгебраических функций и когомологии ласточкиных хвостов, *УМН*, XXIII, 4 (1968), 247—248.
26. Арнольд В. И., О матрицах, зависящих от параметров, *УМН*, XXVI, 2 (1971), 101—114.
27. Арнольд В. И., Лекции о бифуркациях и версальных семействах, *УМН*, XXVII, 5 (1972), 119—184.
28. Арнольд В. И., Интегралы быстроосцилирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий, *ФА*, 6, 3 (1972), 61—62.
29. Арнольд В. И., Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности; *ФА*, 6, 4 (1972), 3—25.
30. Арнольд В. И., Классификация унимодальных критических точек функций, *ФА*, 7, 3 (1973), 75—76.
31. Baas N. A., On the models of Thom in biology and morphogenesis, Lecture notes, Virginia, 1972.
32. Bochnak I., Kuo T.-C., Different realizations of a non sufficient jet, *Indag. Math.*, 34 (1972), 24—31.
33. Fowler D. H., The Riemann — Hugoniot catastrophe and van der Waals equation, T. T. B. 4, 1—7.
34. Fowler D. H., Translation of [1] into English, в печати.
35. Габриэлов А. М., Матрицы пересечений некоторых особенностей, *ФА*, 7, 3 (1973), 18—32.
36. Godwin A. N., Three dimensional pictures for Thom's parabolic umbilic, IHES Publ. Math., 40 (1971), 117—138.

37. Guckenheimer J., Bifurcation and Catastrophe, Proc. Internat. Sympos. in Dynamical Systems (Salvador 1971), ed. M. Peixoto, Academic Press, New York, 1973.
38. Guckenheimer J., Catastrophes and partial differential equations, *Ann. Inst. Fourier*, 23 (1973), 31—59.
39. Guckenheimer J., Review of [1], *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 878—890.
40. Kuo T.-C., On C^0-sufficiency of jets of potential functions, *Topology*, 8 (1969), 167—171.
41. Jänich K., Caustics and catastrophes, *Math. Ann.*, 209 (1974), 161—180.
42. Manifold 14, Spring 1973 (Manifold Publications, Math. Inst., Univ. Warwick, Coventry, England).
43. Mather J., Right equivalence, manuscript.
44. Pham F., Remarque sur l'equisingularité universelle, mimeographed, Université de Nice, 1970.
45. Pham F., Classification des singularités, Douzième Rencontre entre Mathématiciens et Physiciens (1971) R. C. P. No. 25, Strasbourg.
46. Porteous I. R., The normal singularities of a submanifold, *J. Differential Geometry*, 5 (1971), 543—564.
47. Poston T., Woodcock A. E. R., On Zeeman's catastrophe machine, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 74 (1973), 217—226.
48. Poston T., Woodcock A. E. R., A geometrical study of the elementary catastrophes, Lecture Notes in Mathematics, No. 373, Springer-Verlag, 1974.
49. Shulman L. S., Revzen M., Phase transitions as catastrophes, *Collective Phenomena*, 1 (1972), 43—47.
50. Siersma D., Singularities of C^∞ functions of right-codimension smaller or equal than eight, *Indag. Math.*, 25 (1973), 31—37.
51. Takens F., A note on sufficiency of jets, *Invent. Math.*, 13 (1971), 225—231.
52. Takens F., Singularities of functions and vectorfields, *Nieuw Arch. Wisk.*, (3), XX (1972), 107—130.
53. Takens F., Unfoldings of certain singularities of vector fields, generalized Hopf bifurcations, *J. Differential Equations*, 14 (1973), 476—493.
54. Тюрина Г. Н., Разрешение особенностей плоских деформаций двойных рациональных точек, *ФА*, 4, 1 (1970), 77—83.
55. Wassermann G., Stability of unfoldings, Dissertation, Regensburg, Lecture Notes in Mathematics, No. 393, Springer-Verlag, 1974.
56. Wassermann G., (r, s)-stability of unfoldings, preprint.
57*. Особенности дифференцируемых отображений, «Мир», М., 1968.
58*. Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, «Мир», М., 1977.
59*. Арнольд В. И., Критические точки функций, *УМН*, XXX, 5 (1975), 3—65.

* Добавлено переводчиком. — *Прим. ред.*

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ