У.Браттели, Д.Робинсон

ОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ И КВАНТОВАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Монография известных математиков У. Браттели (Норвегия) и Д Робинсона (Австралия). Посвящена одному из разделов функционального анализа, тесно связанному с приложениями в квантовой теории. В виде монографии эта тематика представлена впервые. Материал удачно подобран, изложение доступное.

Для математиков, физиков-теоретиков, аспирантов и студентов университетов.

Содержание

Именной указатель

Предметный указатель

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Читателям предлагается перевод первого тома двухтомной монографии, вышедшей в серии «Texts and Monographs in Physics» (первый том появился в 1979 г., второй — в 1981 г.).

Уже название монографии «Операторные алгебры и квантовая статистическая механика» вызывает вопрос, кому она адресована — математикам или физикам-теоретикам, специалистам или начинающим. По нашему мнению, она полезна всем указанным категориям читателей.

Настоящая книга может рассматриваться как самостоятельная книга по теории операторных алгебр — быстро развивающейся области исследований, для которой характерно тесное переплетение чисто математического и прикладного аспектов. Важное место, которое эта теория занимает в арсенале средств современной математической физики, обусловлено тем, что на языке алгебр операторов, их состояний, представлений и групп автоморфизмов можно описывать и исследовать свойства модельных систем с бесконечным числом степеней свободы, изучаемых квантовой теорией поля и статистической физикой. Основным объектом теории являются инволютивные топологические алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. Такие алгебры (или, как их вначале называли, кольца операторов) были введены впервые Дж. фон Нейманом в 1929 г. Это были алгебры, замкнутые в слабой операторной топологии; их именуют теперь W^*-алгебрами или алгебрами фон Неймана. Алгебры, замкнутые в топологии нормы, или C^*-алгебры, впервые начали изучать в 1943 г. И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк. Замечательным образом C^*- и W^*-алгебры можно охарактеризовать в классе всех банаховых алгебр простыми системами аксиом, на основе которых возникает очень богатая содержанием структура.

Данная книга хорошо отражает прогресс в теории операторных алгебр, достигнутый за последние 10—15 лет. В отличие, например, от известных монографий М. А. Наймарка и Ж. Диксмье, здесь вовсе не затронуты свойства групповых C^*-алгебр, зато весьма подробно рассмотрены теория Томиты—Такесаки, свойства однопараметрических групп автоморфизмов и их инфинитезимальных генераторов (производящих операторов), различные типы разложений состояний на алгебре, порожденной сетью подалгебр, свойства асимптотической абелевости и пр. В этих исследованиях широко применяется самая разнообразная техника функционального анализа. Заметим, что в разработке ряда новых разделов теории и их приложений активно участвовали и сами авторы.

Ориентированность книги на приложения сказывается в основном во включении нового математического материала, известного лишь по журнальным публикациям. Стиль изложения промежуточный между учебником и монографией, приводятся подробные доказательства всех утверждений и в то же время даются краткие обзоры не вошедших в основной текст результатов. В достаточно доступной для неспециалиста форме книга знакомит с проблемами, интересными для всех, кто занимается функциональным анализом и его приложениями.

Л. Д. Кудрявцев

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге излагаются элементарная теория операторных алгебр и те разделы высшей теории, которые имеют или могут иметь отношение к математической физике. Вслед за тем изложены различные приложения к квантовой статистической механике. Приступая к работе над книгой, мы собирались уложиться в рамки одного тома, но по ходу дела стало ясно, что тогда пришлось бы исключить ряд интересных тем или подробностей. В результате материал был разделен на два тома, первый из которых посвящен общей теории операторных алгебр, а второй — приложениям.

Такое разбиение на теорию и приложения, хотя и является традиционным, тем не менее несколько произвольно. Дело в том, что за последние 15—20 лет специалисты в области математической физики осознали важность операторных алгебр, их состояний и автоморфизмов для исследования проблем квантовой теории поля и статистической механики. Однако 20 лет назад теория операторных алгебр была ориентирована главным образом на анализ представлений групп, что не отвечало потребностям многих физических приложений. Поэтому за коротким медовым месяцем, когда вновь обретенные математические средства в их «первозданном» виде применялись для решения наиболее податливых проблем, последовал более продолжительный и интересный период, когда для применений в математической физике уже требовалось заново развивать теорию в соответствующих направлениях. Были введены новые понятия, такие как асимптотическая абелевость и состояния КМШ, были привлечены новые методы, например теория барицентрических разложений Шоке была применена для изучения состояний алгебр, были получены новые структурные результаты, скажем существование континуума неизоморфных факторов типа III. Достижения этого периода оказали существенное влияние на дальнейшее развитие теории операторных алгебр и привели к нынешнему периоду продолжающегося плодотворного сотрудничества математиков и физиков. Они также обусловили такое переплетение теории и приложений, что последние зачастую определяют формирование теории. Именно в этом смысле надо понимать наше замечание о некотором произволе деления книги на две части.

Вся книга (оба тома) состоит из шести глав, четыре в первом томе и две во втором. Нумерация глав сплошная, и в каждом томе приведена сводная библиография. Первая глава служит кратким историческим введением, основной же материал представлен в остальных пяти главах. При объединении этого материала в одну связную книгу с единым стилем изложения мы столкнулись с рядом трудностей. Прежде всего, разные главы существенно отличаются друг от друга по характеру и сложности. Отчасти это связано с тем, что сам предмет лежит где-то посредине между чистой математикой и теоретической физикой, отчасти с тем, что излагаемый материал является смесью стандартной теории и новых результатов, еще не нашедших отражения в книгах. Надеемся, что читатель признает успешными наши попытки ввести упорядочение и выдержать единый стиль изложения. Далее, мы, разумеется, не смогли охватить всех тем, касающихся связи между операторными алгебрами и квантовой статистической механикой. Например, мы совсем не упоминаем об открытых системах, необратимости и полугруппах вполне положительных отображений, поскольку эти вопросы рассмотрены в недавно вышедших монографиях [[Dav 1]], [[Eva 1]].

Работа над книгой заняла период с сентября 1976 г. по июль 1979 г. Бóльшая часть глав 1—5 была написана во время пребывания авторов в Марселе, в Университете Экс—Марсель II (Люмини) и в Центре теоретической физики при Национальном центре научных исследований (НЦНИ). Значительную часть этого времени У. Браттели пользовался поддержкой Норвежского совета по исследованиям в области естественных и гуманитарных наук, а остальное время занимал должность адъюнкт-профессора в Люмини. Глава 6 была написана частично в Университете Нового Южного Уэльса, частично в Марселе и в Университете Осло.

Машинописный вариант глав 2—4 и половины главы 5 был подготовлен в марсельском Центре теоретической физики НЦНИ, а большей части остального текста — на факультете чистой математики Университета Нового Южного Уэльса. Нам приятно поблагодарить мадемуазель Мариз Коэн-Солаль, мадам Долли Рош и миссис Мэйду Шахинян за их труд.

В процессе работы над книгой мы имели полезные обсуждения с целым рядом коллег. Мы благодарны Гэвину Брауну, Эду Эффросу, Джорджу Эллиотту, Уффе Хаагерупу, Ричарду Хёрмэну, Даниэлю Кастлéру, Акитаке Кисимото, Джону Робертсу, Рэю Стритеру и Андрэ Вербёру за ценные замечания и поправки, внесенные в первоначальные варианты рукописи.

Особая наша признательность — Адаму Маевски, прочитавшему весь окончательный вариант и исправившему много ошибок.

Ула Браттели
Дерик У. Робинсон

Осло и Сидней
1979

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория алгебр операторов, действующих в гильбертовом пространстве, возникла в 30-е годы с появлением серии статей фон Неймана и Мюррея — фон Неймана. Главными мотивировками этих авторов были применения к теории унитарных представлений групп и анализ некоторых аспектов квантовомеханического формализма. Они весьма подробно изучили структуру семейства алгебр, которые теперь называют алгебрами фон Неймана или W^*-алгебрами. Отличительным свойством этих алгебр является их замкнутость в слабой операторной топологии; равномерно замкнутые операторные алгебры, так называемые C^*-алгебры, были охарактеризованы и частично изучены лишь в 1943 г. Гельфандом и Наймарком. Несмотря на объявленные Мюрреем и фон Нейманом цели, теория операторных алгебр более 15 лет не находила существенных применений к теории представлений групп, а ее значение для анализа формализма квантовой механики было вполне оценено лишь по прошествии более чем 20 лет. Однако затем последовал период плодотворного взаимодействия математических и физических идей, давший, с одной стороны, интересную структурную теорию операторных алгебр, а с другой — важные физические приложения, особенно в квантовой статистической механике. Мы намерены изложить эту теорию и эти приложения. Новые достижения в теории операторных алгебр нашли также дальнейшие приложения в теории представлений групп и релятивистской теории поля, но этих вопросов мы коснемся лишь вскользь.

Для того чтобы лучше уяснить себе значение операторных алгебр для математической физики, а заодно составить представление о том, как развивалась теория, полезно проследить историю предмета более подробно.

В конце 1924 и в начале 1925 г. Гейзенберг и Шрёдингер независимо предложили эквивалентные, хотя на первый взгляд совершенно различные, формализмы, объяснявшие эмпирические правила квантования Бора и Зоммерфельда. Правила квантования возникли как вспомогательное средство для классификации экспериментальных данных, накопленных за предыдущие два десятилетия и указывавших на наличие атомной и субатомной структуры, не укладывающейся в рамки общепринятой классической механики

Ньютона. Первоначальные формализмы Гейзенберга и Шрёдингера, известные как матричная и волновая механика, были почти сразу синтезированы и дали в результате нынешнюю теорию строения атомов, или квантовую механику. Эта теория радикально отличается от всех предшествовавших физических теорий в том отношении, что имеет вероятностную интерпретацию, а потому означает в философском плане замену классического детерминизма на индетерминизм.

В формализме Гейзенберга компоненты вектора импульса частицы и ее координаты отождествляются с операторами p_i и q_j, удовлетворяющими каноническим коммутационным соотношениям [1])

$$p_i p_j - p_j p_i = 0 = q_i q_j - q_j q_i,$$
$$p_i q_j - q_j p_i = -i\hbar\delta_{ij},$$

а уравнение, определяющее изменение любого такого оператора A с течением времени t, имеет вид

$$\frac{\partial A_t}{\partial t} = \frac{i(HA_t - A_tH)}{\hbar}.$$

В этом уравнении $\hbar$ — постоянная Планка, а H — оператор (гамильтониан), который обычно является функцией положения и импульса частиц, скажем

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + V(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

где первый член (сумма) отвечает кинетической энергии n частиц с массой m, а второй член — энергии взаимодействия между этими частицами. Хотя первоначально формализм Гейзенберга был предложен в терминах матричных операторов, несложное вычисление с использованием коммутационных соотношений показывает, что в каждой паре операторов p_i, q_i по крайней мере один должен быть неограничен. Поэтому вместо матриц стали рассматривать операторы, действующие в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. При этом принимается следующая физическая интерпретация: каждому вектору $\psi \in \mathfrak{H}$ соответствует некоторое состояние системы, и если вектор ψ нормирован, т. е. $\|\psi\| = 1$, то число $(\psi, A_t\psi)$ совпадает со средним значением наблюдаемой A в момент времени t.

Что касается волновой механики Шрёдингера, то она прямо была сформулирована на языке функций ψ, зависящих от n

---

[1]) Ниже i играет двоякую роль — индекса и мнимой единицы. — *Прим. перев.*

переменных — координат частиц. Функция ψ представляет состояние системы, а динамика системы частиц массы m с коллективным взаимодействием V определяется уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t}(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_1, \ldots, x_n) \right) \psi_t(x_1, \ldots, x_n).$$

Мера на $\mathbb{R}^n$ с плотностью $|\psi_t|^2$,

$$d\rho_t(x_1, \ldots, x_n) = |\psi_t(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n,$$

с физической точки зрения задает вероятность обнаружить частицы в соответствующем (измеримом) подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$ в момент времени t, при условии что система пребывает в состоянии ψ. При этом предполагается, что ψ_t — вектор гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$, имеющий единичную норму.

Связь между двумя формализмами и их эквивалентность устанавливаются с помощью отождествления $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ и формул

$$(p_i\psi)(x_1, \ldots, x_n) = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$(q_i\psi)(x_1, \ldots, x_n) = x_i\psi(x_1, \ldots, x_n),$$
$$(H\psi)(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + V(q_1, \ldots, q_n) \right) \psi \right)(x_1, \ldots, x_n).$$

Динамические алгоритмы взаимно дополняют друг друга в соответствии с правилом

$$(\psi, A_t\psi) = (\psi_t, A\psi_t),$$

где A и ψ обозначают A_t и ψ_t при $t = 0$.

Описанная выше связь между формализмами Гейзенберга и Шрёдингера прояснилась на рубеже 20-х и 30-х годов благодаря работам Стоуна и фон Неймана, в которых был последовательно развит математический аппарат квантовой механики и было также показано, что эта теория по существу единственна. Прежде всего, Стоун и фон Нейман распространили спектральную теорему Гильберта на произвольные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Эта обобщенная спектральная теорема позволяет сопоставить каждому такому оператору A некоторую проекторнозначную меру на вещественной прямой (спектральное семейство) $E_A(\lambda)$, так что для любого единичного вектора ψ

возникает вероятностная мера с функцией распределения $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto (\psi, E_A(\lambda)\psi)$. В интерпретации квантовой механики, предложенной фон Нейманом, эта мера определяет распределение значений, полученных при измерениях наблюдаемой, отвечающей A, при условии что перед измерением система находилась в состоянии ψ. При этом функции от наблюдаемых могут вновь трактоваться как наблюдаемые, а именно, если f — вещественная борелевская функция, то функцией f от наблюдаемой, представляемой оператором A, будет наблюдаемая, для которой распределение вероятностей значений в состоянии ψ имеет вид $B \mapsto (\psi, E(f^{-1}(B))\psi)$, где B пробегает борелевские подмножества вещественной прямой, и эта последняя наблюдаемая представляется оператором $f(A)$. В частности, операторы A^2, A^3, ... имеют смысл наблюдаемых.

Далее, в 1930 г. Стоун доказал, что для всякого непрерывного унитарного представления вещественной прямой $t \mapsto U_t$ существует и единствен такой самосопряженный оператор H, что

$$\frac{dU_t}{dt} = iU_tH$$

на области определения H, и что верно обратное, т. е. что этим уравнением с самосопряженным H определяется единственное непрерывное унитарное представление группы $\mathbb{R}$. Связь между U и H соответствует экспоненциальной зависимости $U_t = \exp\{itH\}$, и теорема Стоуна показывает, что уравнение Шрёдингера тогда и только тогда имеет единственное решение ψ_t, удовлетворяющее условию сохранения вероятностей $\|\psi_t\| = \|\psi\|$, когда гамильтониан H самосопряжен. Это решение записывается в виде $\psi_t = U_{-t}\psi$, если выбрать систему единиц, в которой $\hbar = 1$. Соответствующим решением гейзенбергова уравнения движения в таком случае будет

$$A_t = U_tAU_{-t},$$

а эквивалентность двух динамических описаний следует из соотношений

$$(\psi_t, A\psi_t) = (U_{-t}\psi, AU_{-t}\psi) = (\psi, A_t\psi).$$

Наконец, Стоун анонсировал результат о единственности операторов, удовлетворяющих гейзенберговым соотношениям коммутации $p_iq_j - q_jp_i = -i\delta_{ij}$ и т. п., а фон Нейман в 1931 г. дал подробное доказательство этого утверждения. Поскольку p_i, либо же q_i, заведомо неограничены, этот результат лучше всего сформулировать в терминах унитарных групп $U_i(t) = \exp\{ip_it\}$, $V_j(t) = \exp\{iq_jt\}$, ассоциированных с самосопряженными операторами p_i, q_j. Эти группы подчиняются *коммутационным соотношениям в форме Вейля*

$$U_i(s)V_j(t) = V_j(t)U_i(s)e^{ist\delta_{ij}},$$

$$U_i(s)U_j(t) - U_j(t)U_i(s) = 0 = V_i(s)V_j(t) - V_j(t)V_i(s),$$

и теорема единственности Стоуна—фон Неймана гласит, что всякое представление этих соотношений непрерывными унитарными группами в гильбертовом пространстве является прямой суммой копий шрёдингерова представления. (В гл. 5 мы выведем этот результат из более общей теоремы для C^*-алгебр, порожденных произвольным числом унитарных групп, удовлетворяющих соотношениям Вейля.)

Таким образом, в начале 30-х годов квантовая механика получила прочную математическую основу, и ее постулаты можно резюмировать следующим образом:

(1) наблюдаемая — это самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$;

(2) состояние (*чистое*) — это вектор из $\mathfrak{H}$;

(3) среднее значение (или математическое ожидание) наблюдаемой A в состоянии ψ равно $(\psi, A\psi)$;

(4) динамическая эволюция системы определяется заданием некоторого самосопряженного оператора H, причем в равной мере пригодны описания

$$A \longmapsto A_t = e^{itH}Ae^{-itH} \quad \text{или} \quad \psi \longmapsto \psi_t = e^{-itH}\psi.$$

Конкретные модели возникают при конкретном выборе A, H и пр.

Для применения этого формализма к статистической механике требуется ввести незначительное обобщение, связанное с учетом добавочной неопределенности, присущей статистическому описанию. Необходимо ввести более общее понятие состояния. *Смешанное* состояние ω определяется как заданный на наблюдаемых функционал вида

$$\omega(A) = \sum_t \lambda_i(\psi_i, A\psi_i),$$

где $\lambda_i \geqslant 0$, $\Sigma_i \lambda_i = 1$ и $\|\psi_i\| = 1$. Если все ограниченные самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$ представляют наблюдаемые, то эти смешанные состояния автоматически будут записываться в виде

$$\omega(A) = \operatorname{Tr}(\rho A),$$

где ρ — некоторый положительный оператор, имеющий след, равный единице.

Затем были предложены различные алгебраические переформулировки описанного выше квантовомеханического формализма. В 1932 г. фон Нейман заметил, что произведение

$$A \circ B = \frac{AB + BA}{2}$$

двух наблюдаемых A, B можно интерпретировать как наблюдаемую, потому что

$$A \circ B = \frac{(A+B)^2 - A^2 - B^2}{2}.$$

Это произведение обладает свойствами дистрибутивности:

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C, \quad (B + C) \circ A = B \circ A + C \circ A,$$
$$\lambda (A \circ B) = (\lambda A) \circ B = A \circ (\lambda B),$$

и коммутативности: $A \circ B = B \circ A$, однако оно, вообще говоря, неассоциативно, т. е. $(A \circ B) \circ C$ может не совпадать с $A \circ (B \circ C)$. С другой стороны, выполняется следующее свойство, более слабое, чем ассоциативность:

$$((A \circ A) \circ B) \circ A = (A \circ A) \circ (B \circ A).$$

В 1933 г. Йордан предложил считать наличие такой алгебраической структуры характеристическим свойством множества квантовых наблюдаемых. Алгебры над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, удовлетворяющие этим аксиомам, теперь обычно называют *йордановыми*. В середине 30-х годов Йордан, фон Нейман и Вигнер нашли классификацию конечномерных йордановых алгебр над $\mathbb{R}$, обладающих добавочным *свойством вещественности*:

$$A_1 \circ A_1 + A_2 \circ A_2 + \cdots + A_n \circ A_n = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0.$$

Такие алгебры представляют собой прямые суммы простых алгебр, а все простые конечномерные йордановы алгебры, за одним-единственным исключением, сводятся к алгебрам самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, причем роль йорданова произведения в них играет антикоммутатор. Исключительной является алгебра эрмитовых 3×3-матриц над числами Кэли; она обозначается M_3^8.

Хотя вслед за тем фон Нейман предпринял изучение и бесконечномерных йордановых алгебр, оказалось, что наиболее плодотворна алгебраическая переформулировка квантовой механики на языке W^*-алгебр Мюррея и фон Неймана. В этой трактовке квантовые наблюдаемые отождествляются с самосопряженными элементами некоторой слабо замкнутой $*$-алгебры $\mathfrak{M}$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а состояния — со смешанными состояниями, описанными выше. Эти смешанные состояния, или *смеси*, являются линейными функционалами на $\mathfrak{M}$, принимающими положительные значения на положительных элементах алгебры, причем значение, принимаемое на единичном элементе, равно единице (*нормализованность*). Сейчас принято называть состояниями *все* нормализованные положительные линейные функционалы. Смешанные состояния обычно именуют *нормальными*, их можно охарактеризовать в ряду прочих состояний различными алгебраическими или аналитическими свойствами. (Общая структура топологических алгебр и их состояний обсуждается в гл. 2.)

После характеризации C^*-алгебр, данной Гельфандом и Наймарком, Сигал в 1947 г. выдвинул тезис о прямой физической интерпретируемости равномерного предела наблюдаемых, в отличие от слабого предела, имеющего лишь аналитический смысл (эта точка зрения не бесспорна). Он предложил отождествлять наблюдаемые с элементами некоторой равномерно замкнутой йордановой алгебры и показал, что ими вполне можно обойтись при построении спектральной теории, а следовательно и при интерпретации квантовой механики. Отсутствие структурной классификации йордановых алгебр заставило, правда, усилить основное предположение и считать, что наблюдаемые образуют самосопряженную часть некоторой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей, а физические состояния составляют некоторую часть множества всех состояний на $\mathfrak{A}$. Впоследствии структура йордановых алгебр была изучена, и последнее предположение выглядит теперь вполне убедительно. (Элберт и Пейдж в 1959 г. показали, что исключительная алгебра M_3^8 не имеет представлений в гильбертовом пространстве. Однако в 1974 г. Альфсен, Шульц и Стёрмер развили теорию Сигала для йордановых алгебр $\mathfrak{A}$ с единицей, полных относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, обладающей следующими тремя свойствами:

(1) $\|A\circ B\|\leqslant\|A\|\|B\|$,

(2) $\|A\circ A\|=\|A\|^2$,

(3) $\|A\circ A\|\leqslant\|A\circ A+B\circ B\|$

для всех A, B из $\mathfrak{A}$. Эквивалентное определение в терминах упорядоченных пространств: $(\mathfrak{A}, \mathbb{1})$ является полным упорядоченным пространством с порядковой единицей, в котором 1) $A\circ A\geqslant 0$ для любого $A\in\mathfrak{A}$ и 2) $-\mathbb{1}\leqslant A\leqslant\mathbb{1}\Rightarrow A\circ A\leqslant\mathbb{1}$. Альфсен, Шульц и Стёрмер доказали, что в этом случае $\mathfrak{A}$ содержит такой йорданов идеал $\mathfrak{J}$, что йорданова алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ допускает точное изометрическое представление самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве, причем всякое «неприводимое» йорданово представление алгебры $\mathfrak{A}$, не аннулирующее $\mathfrak{J}$, будет отображением на M_3^8.)

Сигал изучил также соответствие между состояниями и представлениями C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, важное и для математики, и для физики, а затем переформулировал теорему единственности Стоуна—фон Неймана в виде утверждения о свойствах состояний. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ обозначают соответственно C^*-алгебру и W^*-алгебру, порожденную вейлевскими операторами $\{U_i(s),\ V_j(t);\ s,\ t \in \mathbb{R},\ i,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ в представлении Шрёдингера, то состояние ω на $\mathfrak{A}$ Сигал называет *регулярным*, если функция $\omega(U_i(s), V_j(t))$ непрерывна по совокупности переменных s и t при всех i и j; это свойство регулярности прямо связано с существованием операторов координаты и импульса. Теорема единственности переформулируется так: состояние ω регулярно тогда и только тогда, когда оно оказывается сужением на $\mathfrak{A}$ некоторого нормального состояния алгебры $\mathfrak{M}$. Представления, отвечающие таким состояниям, устроены как прямые суммы копий представления Шрёдингера.

Данный вариант теоремы единственности показывает, что различие между описанием квантовых наблюдаемых при помощи C^*-алгебры и их описанием при помощи W^*-алгебры в случае систем с конечным числом степеней свободы несущественно и выбор между ними — это по сути дела вопрос технического удобства. Однако это различие очень существенно в более общей ситуации систем с бесконечным числом степеней свободы, например для систем с бесконечным числом частиц.

Имеется ряд различных способов распространения формализма Гейзенберга на случай бесконечных иаборов операторов p_i, q_j, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям. Так, можно построить прямой аналог представления Шрёдингера, применяя технику функционального интегрирования, или же можно воспользоваться унитарно эквивалентной перестройкой этого представления, сохраняющей смысл и для бесконечного числа переменных. Самый старый и самый распространенный вариант представления, допускающий такое обобщение, был предложен Фоком в 1932 г. и примерно двадцать лет спустя строго обоснован Куком (см. гл. 5). Располагая каким-нибудь таким представлением, можно построить бесконечное семейство унитарных операторов Вейля и рассмотреть порожденные этими операторами C^*-алгебру $\mathfrak{A}$ и W^*-алгебру $\mathfrak{M}$. Но теорема единственности теперь уже не имеет места. Существуют регулярные состояния алгебры $\mathfrak{A}$, которые не являются сужениями нормальных состояний алгебры $\mathfrak{M}$, и представления, отвечающие этим состояниям, не сводятся больше к прямым суммам копий представлений Фока—Кука или Шрёдингера. Об этом отсутствии единственности не подозревали до 50-х годов, когда Сигалом, Фридрихсом и другими были даны примеры неэквивалентных регулярных представлений. В 1955 г. Хааг доказал теорему, по существу означающую, что два чистых основных состояния либо совпадают, либо дизъюнктны, т. е. порождают неэквивалентные представления (см. гл. 5, следствие 5.3.41). Тем самым разные динамики должны, по-видимому, определять разные представления. Дополнительный свет на роль неэквивалентных представлений пролили Гординг и Вайтман в 1954 г.; полностью же этот вопрос был выяснен в середине 60-х годов усилиями Чейкена, Делль'Антонио, Доплихера и Рюэля. Регулярные состояния алгебры $\mathfrak{A}$, которые получаются при сужении на $\mathfrak{A}$ нормальных состояний алгебры $\mathfrak{M}$, в точности совпадают с состояниями, в которых с вероятностью 1 число частиц конечно. (Этот результат, подсказанный модельными расчетами, произведенными в 50-е годы Хаагом, ван Ховом, Араки и другими авторами, положен нами в основу рассмотрения в гл. 5 теоремы единственности Стоуна—фон Неймана.) Таким образом, представлением Шрёдингера можно обойтись при описанин систем с конечным числом частиц, но для систем, содержащих бесконечное число частиц, важны другие представления соответствующих C^*- и W^*-алгебр. Осознание этого обстоятельства стало отправным пунктом для большинства дальнейших применений алгебр с инволюцией в математической физике.

Разумеется, совсем не очевидно, что изучение систем, состоящих из бесконечного числа частиц, представляет интерес для физики, и вопрос о применимости такого подхода к статистической механике часто вызывал горячие споры в 50-х и 60-х годах. Для понимания существа проблемы необходимо разобраться, какого рода идеализации присущи теоретическому описанию систем даже в случае конечного числа частиц.

В качестве простого примера рассмотрим рассеяние частицы на неподвижной мишени. Пусть эксперимент состоит в многократном обстреле мишени частицами, получившими заданную скорость, и последующем измерении скоростей рассеянных частиц. Типичная задача для теоретика — рассчитать на основании данных рассеяния силу взаимодействия падающей частицы и мишени. Первым делом применяется стандартная идеализация — задача сводится к изучению взаимодействия двух изолированных тел. Этот прием оправдан, если эксперимент проводится аккуратно и можно пренебречь воздействием внешних факторов. Разумеется, видоизменяя условия эксперимента и саму экспериментальную установку, можно проверить, действительно ли малы внешние воздействия, и такого рода контроль — неотъемлемая часть хорошо поставленного эксперимента. Для того чтобы результаты эксперимента отличались надежностью и были воспроизводимы, необходимо еще убедиться, что данные рассеяния нечувствительны к небольшим изменениям в процедурах начального и конечного измерений. Например, если силы взаимодействия велики, а частица и мишень в начале опыта расположены близко, то небольшие изменения начальной скорости частицы приведут к большим изменениям ее конечной скорости. Аналогично если конечную скорость частицы измерять слишком рано, когда частица еще не успела достаточно удалиться от мишени и скорость ее еще не установилась, то незначительные погрешности в процедуре измерения приведут к существенному разбросу в результатах. В хорошем эксперименте предусматриваются различные проверки и перепроверки, гарантирующие независимость данных от подобных возмущений. В таком случае теоретик может интерпретировать результаты опыта как *асимптотические данные*; например, замеренная в эксперименте скорость вылетающей рассеянной частицы трактуется им как та скорость, которой частица обладала бы по истечении сколь угодно большого промежутка времени. Данные опыта, которые физик-экспериментатор получил, весьма вероятно, в промежуток времени между первым и вторым завтраком в крохотной загроможденной лаборатории, будут интерпретированы его коллегами-теоретиками в терминах изолированных систем, которые вечно движутся в бесконечно протяженном пространстве. На пригодности такого рода идеализаций, имеющей столь же фундаментальное значение, как и возможность повторного воспроизведения данных эксперимента, зиждется вся теоретическая физика.

Другой источник идеализаций — описание термодинамических систем при помощи статистической механики: конечная физическая система подменяется бесконечной теоретической моделью. Типичным примером термодинамического эксперимента может служить измерение теплоемкости жидкости; в этом эксперименте некоторая солидная порция жидкости нагревается в калориметре. После надлежащих измерений экспериментатор разделит найденную теплоемкость на массу взятого количества жидкости и объявит результат значением удельной теплоемкости данной жидкости в кал/(г·К) или в других соответствующих единицах. Результат представляется в такой форме потому, что экспериментатор уверен: при неизменных условиях эксперимента и в пределах точности измерений теплоемкость исследуемого образца вещества пропорциональна его массе, но, помимо этого, уже не зависит ни от размеров образца, ни от устройства калориметра и т. д. Конечно, это можно проверить, повторяя опыты с разными объемами жидкости и разными калориметрами, и такие проверки всегда сопутствуют хорошему эксперименту. Величиной, которая сравнивается с результатом измерений, будет доля рассчитанной теоретиком теплоемкости, приходящаяся на единицу объема системы, и поскольку для больших систем теплоемкость строго пропорциональна размерам системы, подходящей математической процедурой для отыскания этой величины будет взятие предела отношения теплоемкости к объему при стремлении объема к бесконечности. Это пример так называемого термодинамического предела. Итак, мы снова имеем здесь дело с идеализированным описанием конечных систем посредством бесконечных; абстракция эта оправдана, если выдержаны вышеупомянутые требования к эксперименту и для расчетов применяется надежная теоретическая модель. Но рассматриваемая жидкость, как всякое вещество, состоит из атомных частиц, так что идеализированная «бесконечная» жидкость, имея конечную плотность, должна содержать бесконечно много частиц, т. е. теоретическая модель жидкости есть модель с бесконечным числом частиц.

Прежде чем объяснять, как применяются для описания таких бесконечных систем алгебраические методы, подчеркнем, что в термодинамике отнюдь не все важные величины устойчивы относительно возмущений. В самом деле, наиболее интересные явления — фазовые переходы — связаны как раз с неустойчивостью. Вот типичный пример: если в замкнутом сосуде, содержащем некоторое количество жидкости, при постоянной температуре уменьшать давление, то по достижении некоторого критического давления вся жидкость испарится; при малых изменениях давления вблизи этой критической величины мы получаем совсем различные термодинамические состояния, или фазы. Аналогичным образом можно при постоянном давлении повышать температуру; тогда при критической температуре происходит фазовый переход жидкость—пар, и малым вариациям температуры вблизи критической отвечают значительные изменения некоторых величин, таких как плотность. При критическом давлении или критической температуре могут сосуществовать разные смеси пара и жидкости и, следовательно, состояние равновесия не единственно. Тем самым плотность, удельная теплоемкость и прочие величины, хорошо определенные почти во всем диапазоне значений давления и температуры, не имеют точного смысла при некоторых критических значениях термодинамических параметров. Можно поэтому ожидать, что теоретические аналоги этих величин будут функциями, резко меняющимися вблизи критических значений аргументов. Здесь вновь оказывается полезной идеализация термодинамического предела, ибо быстрому изменению величин, подсчитанных для системы в конечном объеме, в пределе бесконечного объема соответствует нарушение непрерывности. Этот факт появления разрывного поведения величин иногда выдвигается в качестве оправдания термодинамического предельного перехода.

Теперь обратимся к роли C^*-алгебр и W^*-алгебр в описании систем с бесконечным числом частиц.

Если начать с рассмотрения конечной системы, локализованной пространственно в конечной области Λ, то алгебраическая версия квантовой механики, набросок которой был дан выше, предписывает отождествить соответствующие наблюдаемые с самосопряженными элементами некоторой C^*-алгебры $\mathfrak{A}_\Lambda$. Поэтому наблюдаемые, отвечающие системе произвольно большого объема, должны определяться объединением этих $\mathfrak{A}_\Lambda$. В конкретных моделях с точечными частицами в качестве $\mathfrak{A}_\Lambda$ выступает либо C^*-алгебра, порожденная операторами Вейля, действующими в пространстве $\mathfrak{H}_\Lambda$ представления Фока—Кука, либо алгебра всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}_\Lambda$. Но в любом случае, если $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, соответствующие алгебры подчиняются условию $\mathfrak{A}_{\Lambda_1} \subset \mathfrak{A}_{\Lambda_2}$. Можно показать (теорема 2.2.5 и предложение 2.2.7), что если $A \in \mathfrak{A}_{\Lambda_1} \cap \mathfrak{A}_{\Lambda_2}$, то норма A как элемента $\mathfrak{A}_{\Lambda_i}$ одна и та же при $i = 1$ и $i = 2$. Отсюда следует, что объединение всех $\mathfrak{A}_\Lambda$ имеет единственное пополнение по норме, которое является C^*-алгеброй. Эта алгебра $\mathfrak{A}$ конструируется безо всяких ссылок на конкретные состояния или представления системы и может истолковываться как C^*-алгебра наблюдаемых бесконечной системы. Алгебры, построенные таким образом по семейству подалгебр $\mathfrak{A}_\Lambda$, обычно называют квазилокальными, а алгебры $\mathfrak{A}_\Lambda$ — локальными. Уже в статье Мюррея и фон Неймана 1934 г. в качестве одной из мотивировок изучения W^*-алгебр в контексте квантовой механики упоминается взаимосвязь алгебр, соответствующих наблюдаемым, локализованным в удаленных друг от друга частях системы. Тем не менее лишь в 1957 г. Хааг обратил внимание на важность квазилокальной структуры в моделях теории поля, а в квантовой статистической механике ее начали применять только в 60-е годы; эта алгебраическая структура оказалась весьма полезной при квантово-статистическом изучении равновесных состояний.

Правила квантовой статистической механики дают нам различные алгоритмы построения равновесных состояний $\omega_{\Lambda,\alpha}$ системы, заключенной в «сосуд» Λ. С помощью ансамблей Гиббса удается трактовать эти состояния как состояния на алгебре $\mathfrak{A}_\Lambda$. Индекс α обозначает термодинамические параметры; скажем, α может представлять температуру и плотность или же температуру и химический потенциал; упомянутые выше алгоритмы зависят от этого выбора параметризации. В соответствии с нашим предыдущим обсуждением можно попытаться найти термодинамический предел состояний $\omega_{\Lambda,\alpha}$, т. е. вычислить для любого $A \in \mathfrak{A}_\Lambda$

$$\omega_\alpha(A) = \lim_{\Lambda' \to \infty} \omega_{\Lambda',\alpha}(A),$$

где подразумевается, что Λ' возрастает так, что поглотит любое наперед заданное компактное подмножество. Множество значений $\omega_\alpha(A)$ представляет тогда равновесные данные, не зависящие от объема и формы. Можно предполагать, что такие пределы существуют при всех α, за исключением отдельных критических значений, а при этих критических значениях существует несколько различных предельных точек. Каждый набор таких предельных значений описывает возможную равновесную ситуацию, т. е. существует несколько независимых термодинамических фаз. Поскольку каждые предельные данные определяют некоторое состояние ω_α на $\mathfrak{A}$, равновесные состояния системы образуют подмножество состояний алгебры $\mathfrak{A}$, и рассмотренная конструкция задает параметризацию $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ этого подмножества.

Большинство приложений алгебраического формализма к статистической механике относится к проблемам равновесной статфизики и имеет целью оправдать и развить далее трактовку равновесных состояний как состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Можно выделить два направления этих исследований, частично связанных друг с другом, но отличающихся акцентами. Первое из них мы фактически только что кратко описали, во втором же, идущем более окольным путем, стремятся дать характеризацию равновесных состояний без привлечения термодинамического предельного перехода. Тем не менее оба подхода имеют одну и ту же конечную цель — выявление физически значимых свойств множества состояний, отнесенных к равновесным, например доказательство гладкости термодинамической параметризации этого множества. Теперь обсудим эти два подхода несколько подробнее.

В исследованиях первого типа сначала задаются гамильтонианом H_Λ, который учитывает взаимодействие частиц и граничные условия, связанные с их пребыванием в конечной области Λ, а затем пытаются построить гиббсовские равновесные состояния системы. Коротко говоря, это состояния вида

$$\omega_{\Lambda,\,\beta} = \frac{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H_\Lambda} A\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H_\Lambda}\right)},$$

где β — обратная температура в подходящих единицах. Таким образом, эта конструкция предусматривает доказательство самосопряженности гамильтониана H_Λ и принадлежности $\exp\{-\beta H_\Lambda\}$ классу операторов со следом. Далее выясняется, существует ли предел ω_β состояний $\omega_{\Lambda,\,\beta}$ при $\Lambda \to \infty$. Для исследования этих вопросов привлекается весь обширный арсенал средств функционального анализа, например функциональное интегрирование, неравенства выпуклости, интегральные уравнения. Результаты исследования простейших моделей классической механики хорошо подтверждают априорные соображения. К сожалению, для более реалистических моделей классической и квантовой механики получены лишь частичные результаты, дающие мало информации о критических явлениях.

В исследованиях второго типа вначале делаются общие предположения о динамике идеализированной бесконечной системы, простейшим и одновременно сильнейшим из которых является следующее: развитие наблюдаемых A во времени $t \mapsto \tau_t(A)$ задается некоторой непрерывной однопараметрической подгруппой τ группы $*$-автоморфизмов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ всех наблюдаемых. Затем устанавливаются критерии принадлежности данного состояния ω на $\mathfrak{A}$ множеству равновесных состояний; они формулируются в терминах свойств ω по отношению к τ; скажем, очевидному требованию стационарности ω соответствует условие инвариантности

$$\omega(\tau_t(A)) = \omega(A)$$

для всех $A \in \mathfrak{A}$ и $t \in \mathbb{R}$. Были получены разные эквивалентные наборы таких критериев. При этом либо исходят из основных принципов, таких как стационарность, устойчивость и эргодичность, либо основываются на аналогии с формализмом Гиббса для конечных систем. Например, запишем формальное тождество

$$\operatorname{Tr}\left(e^{-\beta H_\Lambda}\left(e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda}\right) B\right) =$$
$$= \operatorname{Tr}\left(e^{-\beta H_\Lambda} B \left(e^{i(t+i\beta) H_\Lambda} A e^{-i(t+i\beta) H_\Lambda}\right)\right).$$

Если принять, что $\tau_t(A)$ является пределом при $\Lambda \to \infty$ семейства

$$\exp\{itH_\Lambda\} A \exp\{-itH_\Lambda\},$$

и воспользоваться определением гиббсовского состояния $\omega_{\Lambda,\beta}$, приведенным выше, то можно было бы, свершив формальный переход к термодинамическому пределу, получить для предельных состояний ω_β соотношение

$$\omega_\beta(\tau_t(A) B) = \omega_\beta(B\tau_{t+i\beta}(A))$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$ и $t \in \mathbb{R}$. Первым это тождество записал Кубо в 1957 г., а в 1959 г. его получили Мартин и Швингер для гиббсовских состояний в конечном объеме. Теперь это соотношение принято называть условием КМШ. В качестве критерия равновесности оно было предложено Хаагом, Хугенхольцем и Виннинком в 1967 г. Это условие включает в себя предположение об аналитичности функции $t \mapsto \omega_\beta(B\tau_t(A))$ в полосе $0 < \operatorname{Im} t < \beta$ и выражает приближенную коммутативность наблюдаемых под знаком ω_β. Затем, в общем случае, с помощью выбранного классифицирующего признака равновесия типа условия КМШ проводится изучение равновесных состояний, а именно стараются доказать их существование, выяснить вопрос о единственности или неединственности и т. п.

Условие КМШ сыграло важную роль в объединении математической и физической теорий в значительной мере потому, что почти идентичное соотношение появляется в подходе Томиты к изучению алгебр фон Неймана. В середине 60-х годов Томита сопоставил каждому «точному» нормальному состоянию ω на W^*-алгебре $\mathfrak{M}$ некоторую каноническую однопараметрическую группу *-автоморфизмов τ^ω. Сам Томита интересовался исключительно проблемами структурного анализа алгебр, но в 1970 г. Такесаки показал, что такое состояние ω удовлетворяет условию КМШ по отношению к группе τ^ω, с тем лишь небольшим отличием, что уже не обязательна непрерывность функции $t \mapsto \tau_t^\omega(A)$, $A \in \mathfrak{M}$, по норме. Теория Томиты—Такесаки будет подробно изложена в главе 2, а с условием КМШ читатель встретится в главе 5.

Хотя отправные пункты у указанных подходов к равновесной статистической механике разные, оба они приводят к выделению некоего класса равновесных состояний, исследовать который легче для идеальных систем бесконечного объема. Такая идеализация позволяет выразить ряд свойств реальных физических тел, например однородность, в виде свойств симметрии теоретической модели. Действие группы пространственных сдвигов реализуется $*$-автоморфизмами C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ всех наблюдаемых, и однородность выражается инвариантностью равновесных состояний относительно этой группы. Изучение инвариантных состояний C^*-алгебры приводит в математическом плане к некоммутативному аналогу эргодической теории, которая сама развилась на основе классической статистической механики. Эргодическая теория занимается динамическими системами (X, μ, T), состоящими из измеримого пространства X, вероятностной меры μ на нем и однопараметрической группы T преобразований X, сохраняющих меру. Прямым алгебраическим аналогом динамической системы является тройка $(\mathfrak{A}, \omega, \tau)$, состоящая из C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, состояния ω на ней и однопараметрической группы τ ее $*$-автоморфизмов, оставляющих ω инвариантным, но представляет интерес и изучение более сложных групп автоморфизмов. Исследования равновесных состояний, проведенные в середине 60-х годов, показали, что многие результаты классической эргодической теории допускают распространение на некоммутативный случай, если $(\mathfrak{A}, \omega, \tau)$ обладает надлежащим свойством асимптотической абелевости, например таким:

$$\lim_{|t|\to\infty} \|\tau_t(A)B - B\tau_t(A)\| = 0.$$

Используя подобные свойства, удается доказать, что каждое инвариантное состояние ω единственным образом разлагается по инвариантным состояниям — аналогам эргодических мер. Эти последние состояния характеризуются свойством неразложимости, или перемешивания, а указанные разложения оказываются связанными с разделением на термодинамические фазы. Результаты такого рода, подробно разбираемые в главе 4, служат еще одним примером полезного и интересного синтеза математики и физики.

Обсуждая второй из подходов к анализу равновесных состояний, мы исходили из допущения, что эволюция системы во времени задается некоторой непрерывной однопараметрической подгруппой τ группы $*$-автоморфизмов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Это предположение выполняется, однако, лишь для самых простых моделей. Оно неверно даже для невзаимодействующего бозе-газа. Тем самым в более реалистических теориях приходится ослаблять указанное допущение; различные возможные варианты подсказываются первым подходом. Можно попытаться одновременно конструировать и равновесное состояние ω, и эволюцию τ. В «наилучших» случаях видоизменение сводится к тому, что τ образует теперь однопараметрическую группу автоморфизмов алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — слабого замыкания образа $\mathfrak{A}$ в циклическом представлении, ассоциированном с ω. Если встать на ту точку зрения, что смесями векторных состояний, отвечающих этому представлению π_ω, исчерпываются все «физически интересные» состояния, или если включить в категорию наблюдаемых все самосопряженные операторы из $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то такое описание приемлемо. В этом расширенном контексте производится уточнение алгебраических понятий физического состояния и наблюдаемой.

В 1963 г. Хааг и Кастлер высказали ряд интересных соображений относительно состояний и физической эквивалентности, которые в значительной мере подтверждают вышеизложенную точку зрения. Они отметили, что при измерении наблюдаемых $A_1, \ldots, A_n$ в состоянии ω мы должны получить некоторые числа $\omega(A_1) = \lambda_1, \ldots, \omega(A_n) = \lambda_n$, но поскольку любому процессу измерения неизбежно присущи погрешности, наблюденные значения будут на самом деле лежать внутри небольших интервалов $(\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon)$. Тем самым состояние ω физически эквивалентно любому состоянию ω', для которого

$$|\omega(A_i) - \omega'(A_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

т. е. физическая эквивалентность определяется окрестностями в слабой* топологии. Принимая во внимание, что смеси векторных состояний, отвечающих любому точному представлению π_ω, слабо* плотны во множестве всех состояний на $\mathfrak{A}$, вроде бы можно считать, что таких состояний достаточно для целей полного физического описания. Тем не менее при изучении систем, которые физически несходны, скажем систем при разных температурах или плотностях, необходимо работать с состояниями, не являющимися смесями векторных состояний, отвечающих тому или иному представлению, и целесообразно рассматривать динамическую эволюцию отдельно в каждом состоянии.

ЗАМЕЧАНИЯ И КОММЕНТАРИИ

Статьи Мюррея и фон Неймана удобно собраны в третьем томе собрания сочинений фон Неймана [[Neu 1]]. Характеризация C^*-алгебр, данная Гельфандом и Наймарком, впервые была опубликована в их статье [Gel 1].

В приложении к лекциям Макки [[Mac 1]], прочитанным в Университете Чикаго, описывается влияние, которое оказала теория алгебр фон Неймана на развитие теории представлений групп. В этом приложении обсуждаются также многие вопросы, затронутые в данной главе.

Многие из ранних статей по квантовой механике воспроизведены в сборнике [[Wae 1]] под редакцией ван дер Вардена, а самый ранний вариант предложенной фон Нейманом аксиоматизации квантовой теории содержится в [[Neu 2]].

С работами Стоуна и фон Неймана можно ознакомиться по второму тому собрания сочинений фон Неймана [Neu 1]] и по монографии Стоуна [[Sto 1]].

Принадлежащая Сигалу формулировка квантовой механики на языке C^*-алгебр резюмирована в [Seg 1].

Обзор по структурной теории йордановых алгебр можно найти в [[Str 1]].

В настоящей главе мы дали исторический очерк развития квантовых теорий, а также остановились на некоторых из попыток аксиоматического построения теории, первой из которых была аксиоматика фон Неймана. Однако мы намеренно не вдавались в подробности аксиоматики квантовой статистической механики, ибо в настоящее время не существует набора аксиом, охватывающего все модели. В конце главы упомянуты, например, трудности, связанные с предположением о возможности задать динамику системы некоторой сильно непрерывной однопараметрической подгруппой группы $*$-автоморфизмов C^*-алгебры, сопоставленной системе. Более обстоятельный обзор развития аксиоматических квантовых теорий вплоть до 1974 г. читатель найдет в статье Вайтмана [Wig 2], посвященной шестой проблеме Гильберта.

Остальные темы, затронутые в данной главе, подробно изучаются в последующих главах, и соответствующие ссылки на литературу можно найти в замечаниях и комментариях к этим главам.

2. C^*-АЛГЕБРЫ И АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА

2.1. C^*-алгебры

2.1.1. Основные определения и структура C^*-алгебр

Теория C^*-алгебр представляет собой абстрактное исследование структурных свойств некоторых алгебр ограниченных операторов, действующих в гильбертовых пространствах, и одновременно она является специальным разделом теории банаховых алгебр. В соответствии с этим возможны два варианта изложения теории. Можно отправляться от конкретной реализации алгебры операторами в гильбертовом пространстве или можно начать с абстрактного описания в духе общей теории банаховых алгебр. Мы воспользуемся вторым из указанных подходов.

Пусть $\mathfrak{A}$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$, полем комплексных чисел α, β, ... Пространство $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй*, если оно наделено операцией умножения, которая каждой паре элементов A, $B \in \mathfrak{A}$ сопоставляет их произведение AB. Закон умножения предполагается ассоциативным и дистрибутивным, т. е. требуется, чтобы

(1) $A(BC) = (AB)C$,

(2) $A(B + C) = AB + AC$,

(3) $\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\beta B)$.

Подпространство $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй*, если оно является алгеброй относительно операций, введенных в $\mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ *коммутативна*, или *абелева*, если умножение коммутативно, т. е. если

$$AB = BA.$$

Отображение $A \in \mathfrak{A} \longmapsto A^* \in \mathfrak{A}$ называется *инволюцией* (или *операцией сопряжения*) на алгебре $\mathfrak{A}$, если выполнены следующие свойства:

(1) $A^{**} = A$,

(2) $(AB)^* = B^*A^*$,

(3) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$

($\bar{\alpha}$ обозначает число, комплексно сопряженное с α). Алгебру с инволюцией называют *инволютивной* или $*$-алгеброй, а подмножество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ называется *самосопряженным*, если $A \in \mathfrak{B}$ влечет $A^* \in \mathfrak{B}$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *нормированной*, если каждому элементу $A \in \mathfrak{A}$ сопоставлено вещественное число $\|A\|$ (*норма* A) и при этом

(1) $\|A\| \geqslant 0$ и $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$,

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$,

(3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$,

(4) $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

Третье условие называется *неравенством треугольника*, а четвертое — *неравенством для* (нормы) *произведения*.

Норма определяет на $\mathfrak{A}$ метрическую топологию, которую именуют *равномерной топологией* $\mathfrak{A}$. Окрестностями элемента $A \in \mathfrak{A}$ в этой топологии служат множества

$$\mathcal{U}(A;\ \varepsilon) = \{B;\ B \in \mathfrak{A},\ \|B - A\| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$. Если пространство $\mathfrak{A}$ полно в равномерной топологии, $\mathfrak{A}$ называют *банаховой алгеброй*. Полная нормированная алгебра с инволюцией, обладающая свойством $\|A\| = \|A^*\|$, называется *банаховой *-алгеброй*.

Теперь приведем наше основное определение.

Определение 2.1.1. *C^*-алгебра* — это банахова *-алгебра $\mathfrak{A}$ с дополнительным свойством

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Характеризующее C^*-алгебру свойство нормы несет на себе отпечаток связи со структурой гильбертова пространства. Отметим, что это свойство в сочетании с неравенством для произведения автоматически дает $\|A^*\| = \|A\|$, потому что

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| \leqslant \|A^*\| \|A\|$$

и, следовательно, $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Меняя ролями A и A^*, заключаем, что

$$\|A\| = \|A^*\|$$

для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Приводимые ниже примеры проясняют происхождение условия на C^*-норму. Подчеркнем, что здесь и в дальнейшем под гильбертовым пространством понимается комплексное гильбертово пространство.

Пример 2.1.2. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — множество всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$. Введем в $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ обычные операции сложения и умножения элементов и снабдим это множество *операторной нормой*

$$\|A\| = \sup\{\|A\psi\|;\quad \psi \in \mathfrak{H},\ \|\psi\| = 1\}.$$

Стандартная операция перехода к сопряженному оператору определяет инволюцию в $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, и по отношению к введенным операциям и норме $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ будет C^*-алгеброй. В частности, характеристическое C^*-свойство нормы вытекает из простой выкладки

$$\begin{aligned}\|A\|^2 &= \sup\{(A\psi, A\psi);\quad \psi\in\mathfrak{H},\ \|\psi\|=1\}\\ &= \sup\{(\psi, A^*A\psi);\quad \psi\in\mathfrak{H},\ \|\psi\|=1\}\\ &\leqslant \sup\{\|A^*A\psi\|;\quad \psi\in\mathfrak{H},\ \|\psi\|=1\}\\ &= \|A^*A\| \leqslant \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2.\end{aligned}$$

Заметим, что всякая равномерно замкнутая и самосопряженная подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ также является C^*-алгеброй.

Пример 2.1.3. Пусть $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ обозначает алгебру компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Она оказывается C^*-алгеброй. Во-первых, $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ — самосопряженная подалгебра в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, а во-вторых, она равномерно замкнута, так как равномерный предел множества компактных операторов в $\mathfrak{H}$ автоматически будет компактным оператором.

Другие примеры C^*-алгебр, на первый взгляд несколько отличающиеся от предыдущих, можно получить, рассматривая алгебры функций.

Пример 2.1.4. Пусть X — локально-компактное пространство и $C_0(X)$ — совокупность непрерывных функций на X, обращающихся в нуль на бесконечности. Под этим подразумевается, что для любой $f\in C_0(X)$ и любого $\varepsilon>0$ можно указать такое компактное множество $K\subseteq X$, что $|f(x)|<\varepsilon$ при всех $x\in X\setminus K$ (дополнение к K в X). Введем алгебраические операции и инволюцию, полагая $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(fg)(x)=f(x)\,g(x)$ и $f^*(x)=\overline{f(x)}$. Зададим норму в $C_0(X)$ формулой

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x\in X\}.$$

Тогда $C_0(X)$ превращается в коммутативную C^*-алгебру. В частности, тождество для нормы имеет место, ибо

$$\|ff^*\| = \sup\{|f(x)|^2;\quad x\in X\} = \|f\|^2.$$

Заметим, что если на X определена мера μ и $\mathfrak{H}=L^2(X;\mu)$ — гильбертово пространство функций на X с μ-интегрируемым квадратом модуля, то $C_0(X)$ можно рассматривать и как алгебру операторов умножения в $\mathfrak{H}$. Тем самым $C_0(X)$ оказывается C^*-подалгеброй $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ в полной аналогии с предыдущими примерами.

Единицей C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ называется такой ее элемент $\mathbb{1}$, что

$$A = \mathbb{1}A = A\mathbb{1}$$

для всех $A\in\mathfrak{A}$. Применяя к этим равенствам инволюцию, видим, что $\mathbb{1}^*$ — также единица алгебры $\mathfrak{A}$. Но $\mathfrak{A}$ не может иметь более одной единицы, потому что второй подобный элемент $\mathbb{1}'$ удовлетворял бы условию

$$\mathbb{1}' = \mathbb{1}\mathbb{1}' = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $\mathbb{1}=\mathbb{1}'$. Кроме того, из соотношений

$$\|\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}^*\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}\|^2,$$

$$\|A\| = \|\mathbb{1}A\| \leqslant \|\mathbb{1}\|\,\|A\|$$

следует, что $\|\mathbb{1}\| = 0$ или 1. Но если $\|\mathbb{1}\| = 0$, то и для всякого $A \in \mathfrak{A}$ оказывается $\|A\| = 0$, так что алгебра состоит из одного элемента 0. Этот тривиальный случай мы исключаем из рассмотрения и в дальнейшем всегда считаем, что $\|\mathbb{1}\| = 1$.

Хотя C^*-алгебра не может иметь более одного единичного элемента, она вовсе не обязана обладать единицей. Например, в алгебре $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})$ (см. пример 2.1.3) единица существует тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}$ конечномерно, а алгебра $C_0(X)$ (см. пример 2.1.4) имеет единицу тогда и только тогда, когда X компактно. Отсутствие единицы, вообще говоря, усложняет структурный анализ $\mathfrak{A}$, но эту сложность можно в значительной мере обойти, погрузив $\mathfrak{A}$ в бóльшую алгебру $\tilde{\mathfrak{A}}$, в которой есть единица. Рассмотрим конструкцию такой алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Предложение 2.1.5. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ не имеет единицы, и пусть $\tilde{\mathfrak{A}}$ обозначает алгебру пар $\{(\alpha, A);\ \alpha \in \mathbb{C},\ A \in \mathfrak{A}\}$ с операциями $(\alpha, A) + (\beta, B) = (\alpha + \beta, A + B)$, $(\alpha, A)(\beta, B) = (\alpha\beta, \alpha B + \beta A + AB)$, $(\alpha, A)^* = (\bar{\alpha}, A^*)$* [1]. *Тогда*

$$\|(\alpha, A)\| = \sup\{\|\alpha B + AB\|,\ B \in \mathfrak{A},\ \|B\| = 1\}$$

определяет на $\tilde{\mathfrak{A}}$ норму, превращающую $\tilde{\mathfrak{A}}$ в C^*-алгебру с единицей. Алгебру $\mathfrak{A}$ можно отождествить с C^*-подалгеброй $\tilde{\mathfrak{A}}$, образованной парами вида $(0, A)$.

Доказательство. Легко проверить, что неравенство треугольника и неравенство для произведения при таком определении нормы выполнены. Далее, $\|(\alpha, A)\| = 0$ означает, что $\alpha = 0$ и $A = 0$. В самом деле, $\|(0, A)\| = \|A\|$, следовательно, из $\|(0, A)\| = 0$ вытекает $A = 0$. Остается случай $\alpha \neq 0$; умножая, если надо, (α, A) на скаляр, можно считать, что $\alpha = 1$. Но

$$\|B - AB\| \leqslant \|B\| \|(1, -A)\|,$$

поэтому из условия $\|(1, -A)\| = 0$ последует $B = AB$ для любого $B \in \mathfrak{A}$. Применяя инволюцию, находим $B = BA^*$ для всех $B \in \mathfrak{A}$, значит, $A^* = AA^* = A$ и

$$B = AB = BA,$$

т. е. A — единица $\mathfrak{A}$ в противоречие с исходным условием.

Для проверки C^*-свойства нормы заметим, что

$$\begin{aligned}\|(\alpha, A)\|^2 &= \sup\{\|\alpha B + AB\|^2;\ B \in \mathfrak{A},\ \|B\| = 1\} \\ &= \sup\{\|B^*(\bar{\alpha}\alpha B + \bar{\alpha}AB + \alpha A^*B + A^*AB)\|;\ B \in \mathfrak{A},\ \|B\| = 1\} \\ &\leqslant \|(\alpha, A)^*(\alpha, A)\| \leqslant \|(\alpha, A)^*\| \|(\alpha, A)\|.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|(\alpha, A)\| \leqslant \|(\alpha, A)^*\|.$$

---

[1] Кроме того, подразумевается, что $\beta(\alpha, A) = (\beta\alpha, \beta A)$ для $\beta \in \mathbb{C}$. — *Прим. перев.*

Заменяя (α, A) на $(\alpha, A)^*$, приходим к противоположному неравенству. Следовательно,

$$\|(\alpha, A)\|^2 \leqslant \|(\alpha, A)^*(\alpha, A)\| \leqslant \|(\alpha, A)\|^2,$$

т. е. необходимое свойство проверено.

Полнота $\tilde{\mathfrak{A}}$ сразу же выводится из полноты $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{A}$.

Определение 2.1.6. Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ не содержит единицы. Описанную в предложении 2.1.5 C^*-алгебру $\tilde{\mathfrak{A}}$ назовем *C^*-алгеброй, полученной присоединением единицы* $\mathbb{1}$ *к* $\mathfrak{A}$. Элементы (α, A) алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$ будем записывать в виде $\alpha\mathbb{1} + A$, а саму эту алгебру — в виде $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$.

Отметим, что у C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей $\mathbb{1}$ могут существовать C^*-подалгебры $\mathfrak{B}$, не имеющие единицы. В таком случае алгебру $\tilde{\mathfrak{B}}$, полученную присоединением единицы к $\mathfrak{B}$, можно отождествить с наименьшей C^*-подалгеброй в $\mathfrak{A}$, содержащей и $\mathfrak{B}$, и $\mathbb{1}$.

Хотя рассмотренная нами конструкция существенно облегчает изучение C^*-алгебр без единицы, с ее помощью снимаются не все проблемы, связанные с отсутствием единицы. Другой подход, состоящий в построении «аппроксимативной единицы», будет рассмотрен в пункте 2.2.3.

Теперь мы обратимся к ряду понятий, постоянно встречающихся в алгебраических теориях.

Подпространство $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ называют *левым идеалом*, если из $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$ следует, что $AB \in \mathfrak{B}$. Соответственно $\mathfrak{B}$ будет *правым идеалом*, если $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$ влечет $BA \in \mathfrak{B}$. Идеал $\mathfrak{B}$, являющийся одновременно и левым, и правым, называется *двусторонним*. Заметим, что всякий идеал автоматически оказывается алгеброй. Например, если $\mathfrak{B}$ — левый идеал и B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$, то, разумеется, $B_1 \in \mathfrak{A}$, $B_2 \in \mathfrak{B}$, так что $B_1B_2 \in \mathfrak{B}$. Далее, заметим, что левый (или правый) идеал $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ с инволюцией автоматически будет двусторонним, если он самосопряжен. Действительно, пусть $B \in \mathfrak{B}$. Тогда $AB \in \mathfrak{B}$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. В силу самосопряженности, $B^* \in \mathfrak{B}$; следовательно, $A^*B^* \in \mathfrak{B}$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Опять-таки в силу самосопряженности, $BA = (A^*B^*)^* \in \mathfrak{B}$. Тем самым идеал $\mathfrak{B}$ двусторонний.

Если $\mathfrak{A}$ — банахова $*$-алгебра и $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{A}$ — ее замкнутый двусторонний $*$-идеал, то факторпространство $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ также можно рассматривать как банахову $*$-алгебру. Напомним, что элементами $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ являются множества $\hat{A}$ элементов из $\mathfrak{A}$, которые сопоставляются элементам $A \in \mathfrak{A}$ по правилу

$$A \mapsto \hat{A} = \{A + I,\ I \in \mathfrak{I}\}.$$

Умножение, сложение и инволюция для этих классов эквивалентности вводятся так: $\hat{A}\hat{B} = \widehat{AB}$, $\hat{A} + \hat{B} = \widehat{A+B}$ и $\hat{A}^* = \widehat{A^*}$. Корректность этих операций, т. е. независимость от выбора конкретных представителей $A + I_1$ класса $|\hat{A}|$ и $B + I_2$ класса $|\hat{B}|$, гарантируется тем, что идеал $\mathfrak{J}$ двусторонний. Например,

$$(A + I_1)(B + I_2) = AB + I_3,$$

где

$$I_3 = I_1B + AI_2 + I_1I_2 \in \mathfrak{J}.$$

Факторпространство $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ становится банаховой $*$-алгеброй, если ввести норму

$$\|\hat{A}\| = \inf\{\|A + I\|,\ I \in \mathfrak{J}\}.$$

Легко проверить, что при таком определении выполнены все свойства нормы и $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ полно по этой норме. Менее очевидно, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$, наделенное такой структурой, окажется C^*-алгеброй. Доказательство этого утверждения мы отложим до пункта 2.2.3.

Пример 2.1.8. Рассмотрим C^*-алгебру $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Выберем вектор $\Omega \in \mathfrak{H}$ и положим

$$\mathfrak{J}_\Omega = \{A;\quad A \in \mathfrak{A},\ A\Omega = 0\}.$$

Множество $\mathfrak{J}_\Omega$ является левым идеалом в $\mathfrak{A}$.

Пример 2.1.8. Пусть $\mathfrak{A} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{B} = \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ (алгебра всех компактных операторов в $\mathfrak{H}$). Подалгебра $\mathfrak{B}$ образует двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, потому что произведение ограниченного оператора и компактного является компактным оператором.

Пример 2.1.9. Пусть $\mathfrak{A} = C_0(X)$ — коммутативная C^*-алгебра из примера 2.1.4. Если F — замкнутое подмножество в X и $\mathfrak{B}$ состоит из элементов $\mathfrak{A}$, обращающихся в нуль на F, то $\mathfrak{B}$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ можно отождествить с $C_0(F)$. Применяя теорему Стоуна — Вейерштрасса, можно показать, что так устроен всякий замкнутый двусторонний идеал алгебры $\mathfrak{A}$.

Банахова алгебра $\mathfrak{A}$ называется *простой*, если в ней нет нетривиальных замкнутых двусторонних идеалов, т. е. единственными замкнутыми двусторонними идеалами являются $\{0\}$ и $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ имеет единицу, то простота равносильна отсутствию любых двусторонних идеалов, замкнутых или нет. Простые C^*-алгебры играют фундаментальную роль в приложениях к математической физике.

В заключение этого вводного раздела приведем основные структурные теоремы для C^*-алгебр. Примеры 2.1.2—2.1.4 показывают, что равномерно замкнутые самосопряженные подалгебры алгебр $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ будут C^*-алгебрами; кроме того, примером коммутативной C^*-алгебры служит алгебра функций $C_0(X)$. Структурные теоремы утверждают, что этими случаями и исчерпывается общая ситуация.

Теорема 2.1.10. *Пусть $\mathfrak{A}$ — любая C^*-алгебра. Тогда $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторой замкнутой по норме самосопряженной алгебре ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.*

Теорема 2.1.11. *Пусть $\mathfrak{A}$—коммутативная C^*-алгебра. Тогда $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $C_0(X)$ непрерывных функций на некотором отделимом локально-компактном пространстве X, обращающихся в нуль на бесконечности.*

Доказательства этих теорем приведены в пунктах 2.3.4 и 2.3.5.

2.2. Функциональное исчисление и спектральный анализ

2.2.1. Резольвента, спектр и спектральный радиус

К числу важнейших среди элементарных функциональных зависимостей, изучаемых в вещественном и комплексном анализе, принадлежат обратная зависимость и экспоненциальная. Функция $z \in \mathbb{C} \mapsto (\lambda - z)^{-1} \in \mathbb{C}$ играет главную роль в преобразовании Коши, а функция $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\{i\lambda x\} \in \mathbb{C}$ позволяет ввести преобразование Фурье. Обе эти функции чрезвычайно важны для обобщения обычного функционального исчисления на алгебраические структуры. Изучение обратной функции сразу же приводит к понятиям резольвенты и спектра, и мы разберем эти понятия применительно к элементам C^*-алгебры.

Если $\mathfrak{A}$ — алгебра с единицей $\mathbb{1}$, то элемент $A \in \mathfrak{A}$ называют *обратимым*, когда существует такой элемент $A^{-1} \in \mathfrak{A}$, *обратный* для A, что

$$AA^{-1} = \mathbb{1} = A^{-1}A.$$

Из этого определения непосредственно выводится целый ряд элементарных заключений. Если A обратим, то обратный элемент единствен; он, в свою очередь, обратим и $(A^{-1})^{-1} = A$; если A и B обратимы, то обратим AB и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; если $\mathfrak{A}$ является $*$-алгеброй, то из обратимости A следует обратимость A^* и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Определение 2.2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра с единицей $\mathbb{1}$. *Резольвентным множеством* $r_{\mathfrak{A}}(A)$ элемента $A \in \mathfrak{A}$ называется множество чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых обратим элемент $\lambda\mathbb{1} - A$. *Спектр* $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ элемента A определяется как дополнение к $r_{\mathfrak{A}}(A)$ в $\mathbb{C}$. *Резольвентой A в точке* $\lambda \in r_{\mathfrak{A}}(A)$ называется элемент $(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$.

Спектр элемента произвольной алгебры может быть, вообще говоря, любым, но в случае банаховых алгебр, и в частности C^*-алгебр, он, как мы увидим, устроен очень просто.

Для изучения резольвент и спектров разработаны различные методы. Пожалуй, удобнее всего воспользоваться разложением в ряд и аналитическим продолжением. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| > \|A\|$, тогда частичные суммы ряда

$$\lambda^{-1} \sum_{m \geqslant 0} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^m$$

образуют последовательность Коши в равномерной топологии. В силу полноты, ряд должен определять некоторый элемент из $\mathfrak{A}$, и легко проверить, что это обратный для $\lambda\mathbb{1} - A$. Тем самым $\lambda \in r_{\mathfrak{A}}(A)$ и спектр $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ ограничен: $\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq \{\lambda;\ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leqslant \|A\|\}$. Более общим образом, при $\lambda_0 \in r_{\mathfrak{A}}(A)$ и $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0\mathbb{1} - A)^{-1}\|^{-1}$ ряд Неймана

$$\sum_{m \geqslant 0} (\lambda_0 - \lambda)^m (\lambda_0\mathbb{1} - A)^{-m-1}$$

определяет некоторый элемент из $\mathfrak{A}$, и прямым подсчетом проверяется, что это элемент $(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$. Значит, $\lambda \in r_{\mathfrak{A}}(A)$. Эти рассуждения показывают также, что $r_{\mathfrak{A}}(A)$ открыто и $\lambda \longmapsto (\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$ непрерывно на $r_{\mathfrak{A}}(A)$. Спектр $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ как дополнение к $r_{\mathfrak{A}}(A)$ автоматически замкнут и, следовательно, компактен. Можно показать, что он непуст.

Предложение 2.2.2. *Пусть A — элемент банаховой алгебры с единицей. Определим его* ***спектральный радиус*** *$\rho(A)$ формулой*

$$\rho(A) = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma_{\mathfrak{A}}(A)\}.$$

Тогда

$$\rho(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_n \|A^n\|^{1/n} \leqslant \|A\|,$$

причем предел существует. Следовательно, спектр $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ — непустое компактное множество.

Доказательство. Пусть $|\lambda|^n > \|A^n\|$ при некотором целом $n > 0$. Всякое $m \in Z$ представимо в виде $m = pn + q$, где $p, q \in Z$ и $0 \leqslant q \leqslant n$, поэтому опять легко убедиться, что ряд

$$\lambda^{-1} \sum_{m \geqslant 1} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^m$$

сходится по норме к $(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$. Значит,

$$\rho(A) \leqslant \|A^n\|^{1/n}$$

при каждом $n > 0$, и потому $\rho(A) \leqslant \inf_n \|A^n\|^{1/n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$.
Для завершения доказательства достаточно будет установить, что $\rho(A) \geqslant r_A$, где

$$r_A = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Имеются две возможности.

Рассмотрим сперва случай, когда $0 \in r_{\mathfrak{A}}(A)$, т. е. A обратим. Тогда $1 = \|A^n A^{-n}\| \leqslant \|A^n\| \|A^{-n}\|$, так что $1 \leqslant r_A r_{A^{-1}}$ и следовательно, $r_A > 0$. Тем самым $r_A = 0$ означает, что $0 \in \sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ и $\rho(A) \geqslant r_A$.

Теперь предположим, что $r_A > 0$. Нам понадобится такое простое наблюдение. Если A_n — последовательность элементов, для которых существуют $R_n = (1 - A_n)^{-1}$, то $1 - R_n = -A_n(1 - A_n)^{-1}$ и $A_n = -(1 - R_n)(1 - (1 - R_n))^{-1}$. Поэтому условия $\|1 - R_n\| \to 0$ и $\|A_n\| \to 0$ эквивалентны (проверка разложением в степенной ряд).

Введем $S_A = \{\lambda;\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \geqslant r_A\}$ и покажем, что предположение $S_A \subseteq r_{\mathfrak{A}}(A)$ приводит к противоречию. Пусть $\omega \in \mathbb{C}$ — примитивный корень n-й степени из единицы. По предположению,

$$R_n(A;\ \lambda) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\omega^k A}{\lambda}\right)^{-1}$$

при всех $\lambda \in S_A$ корректно определены. Но элементарные выкладки [1)] убеждают в том, что

$$R_n(A;\ \lambda) = \left(1 - \frac{A^n}{\lambda^n}\right)^{-1}.$$

Далее, верна оценка непрерывности, равномерная по k.

$$\left\| \left(1 - \frac{\omega^k A}{r_A}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{\omega^k A}{\lambda}\right)^{-1} \right\|$$
$$= \left\| \left(1 - \frac{A}{r_A}\right)^{-1} \omega^k A \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{r_A}\right) \left(1 - \frac{\omega^k A}{\lambda}\right)^{-1} \right\|$$
$$\leqslant |\lambda - r_A| \, \|A\| \sup_{\gamma \in S_A} \|(\gamma 1 - A)^{-1}\|^2.$$

(Супремум конечен, так как функция $\lambda \longmapsto \|(\lambda 1 - A)^{-1}\|$ непрерывна на $r_{\mathfrak{A}}(A)$ и при $|\lambda| > \|A\|$

$$\|(\lambda 1 - A)^{-1}\| \leqslant |\lambda|^{-1} \sum_{n \geqslant 0} \|A\|^n / |\lambda|^n = (|\lambda| - \|A\|)^{-1}.)$$

Отсюда сразу получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\lambda > r_A$, что

$$\left\| \left(1 - \frac{A^n}{\lambda^n}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{A^n}{r_A^n}\right)^{-1} \right\| < \varepsilon$$

---

1) Использующие равенство $\sum_{k=1}^{n} \omega^k = 0$. — *Прим. перев.*

равномерно по n. Однако $\|A^n\|/\lambda^n \to 0$ и сделанное выше наблюдение показывает, что $\|(\mathbb{1} - A^n/\lambda^n)^{-1} - \mathbb{1}\| \to 0$. Но тогда $\left\|\left(\mathbb{1} - A^n/r_A^n\right)^{-1} - \mathbb{1}\right\| \to 0$, и вторичная ссылка на наше наблюдение дает $\|A^n\|/r_A^n \to 0$, в противоречие с определением r_A. Тем самым доказательство завершено.

Другая полезная при изучении резольвент и пр. техника основана на применении разного рода преобразований. Например, тождество

$$\left(\lambda^n \mathbb{1} - A^n\right) = (\lambda\mathbb{1} - A)\left(\lambda^{n-1}\mathbb{1} + \lambda^{n-2}A + \cdots + A^{n-1}\right)$$

показывает, что из $\lambda^n \in r_{\mathfrak{A}}\left(A^n\right)$ следует $\lambda \in r_{\mathfrak{A}}(A)$. Переходя к дополнениям, получаем $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)^n \subseteq \sigma_{\mathfrak{A}}\left(A^n\right)$. Другие примеры соотношений, связанных с простыми преобразованиями, содержит следующее

Предложение 2.2.3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — инволютивная алгебра с единицей. Для $A \in \mathfrak{A}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(\lambda\mathbb{1} - A) = \lambda - \sigma_{\mathfrak{A}}(A),$$

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A^*) = \overline{\sigma_{\mathfrak{A}}(A)}$$

и, если A обратим,

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A^{-1}) = \sigma_{\mathfrak{A}}(A)^{-1}.$$

Кроме того, для любых A, $B \in \mathfrak{A}$

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(AB) \cup \{0\} = \sigma_{\mathfrak{A}}(BA) \cup \{0\}.$$

Доказательство. Первое свойство очевидно; второе вытекает из соотношения

$$(\lambda\mathbb{1} - A^*) = (\bar{\lambda}\mathbb{1} - A)^*.$$

Третье свойство следует из двух соотношений

$$(\lambda\mathbb{1} - A) = \lambda A\,(A^{-1} - \lambda^{-1}\mathbb{1})$$

и

$$(\lambda^{-1}\mathbb{1} - A^{-1}) = \lambda^{-1}A^{-1}\,(A - \lambda\mathbb{1}).$$

В самом деле, в силу первого соотношения, если $\lambda \neq 0$ и $\lambda\mathbb{1} - A$ необратим, то $\lambda^{-1}\mathbb{1} - A^{-1}$ тоже необратим, и наоборот, согласно второму соотношению. Исключительная точка $\lambda = 0$ не доставляет неприятностей, потому что из обратимости A следует, что $0 \notin \sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ и

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A^{-1}) \subseteq \{\lambda;\ |\lambda| \leqslant \|A^{-1}\| < +\infty\}.$$

Наконец, если $\lambda \in r_{\mathfrak{A}}(BA)$, то можно получить равенство

$$(\lambda\mathbb{1} - AB)(\mathbb{1} + A\,(\lambda\mathbb{1} - BA)^{-1}B) = \lambda\mathbb{1},$$

которое означает, что $\lambda\mathbb{1} - AB$ обратим за исключением, быть может, $\lambda = 0$. Значит, $\sigma_{\mathfrak{A}}(BA) \cup \{0\} \supseteq \sigma_{\mathfrak{A}}(AB) \cup \{0\}$. Меняя ролями A и B, получаем обратное включение, т. е. совпадение множеств.

Другие примеры соотношений между спектрами, возникающих при простых преобразованиях элементов, мы рассмотрим для элементов C^*-алгебр. Но прежде примем соглашение, что́ понимать под спектром элемента, если алгебра не содержит единицы. Проще всего единицу присоединить.

Определение 2.2.4. Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ не имеет единицы и $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$ обозначает C^*-алгебру, полученную присоединением единицы. Для $A \in \mathfrak{A}$ определим *резольвентное множество* $r_{\mathfrak{A}}(A)$ и *спектр* $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ соответственно равенствами

$$r_{\mathfrak{A}}(A) = r_{\tilde{\mathfrak{A}}}(A) \text{ и } \sigma_{\mathfrak{A}}(A) = \sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}}(A).$$

Теперь мы дадим частичную характеризацию спектров для некоторых классов элементов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Самыми важными в теории являются нормальные, самосопряженные, изометрические и унитарные элементы.

Элемент $A \in \mathfrak{A}$ именуют *нормальным*, если

$$AA^* = A^*A,$$

и *самосопряженным*, если

$$A = A^*.$$

Если $\mathfrak{A}$ имеет единицу $\mathbb{1}$, то A называют *изометрическим* или *изометрией*, когда

$$A^*A = \mathbb{1},$$

и *унитарным*, когда

$$A^*A = \mathbb{1} = AA^*.$$

Отметим, что произвольный элемент $A \in \mathfrak{A}$ обладает единственным разложением вида

$$A = A_1 + iA_2,$$

где A_1 и A_2 — самосопряженные элементы. Эти элементы называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями* A и задаются формулами $A_1 = (A + A^*)/2$ и $A_2 = (A - A^*)/2i$.

Наше соглашение о спектре, содержащееся в определении 2.2.4, позволяет фактически предполагать существование единицы в случае C^*-алгебр. Имеет место

Теорема 2.2.5. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ обладает единицей.*

а) *Если $A \in \mathfrak{A}$ нормален или самосопряжен, то его спектральный радиус $\rho(A)$ равен норме:*

$$\rho(A) = \|A\|.$$

б) *Если $A \in \mathfrak{A}$ изометричен или унитарен, то*

$$\rho(A) = 1.$$

в) *Если* $A \in \mathfrak{A}$ *унитарен, то*

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq \{\lambda;\quad \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\}.$$

г) *Если A самосопряжен, то*

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq [-\|A\|,\ \|A\|],\ \sigma_{\mathfrak{A}}(A^2) \subseteq [0,\ \|A\|^2].$$

д) *Для всякого* $A \in \mathfrak{A}$ *и любого полинома* P

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(P(A)) = P(\sigma_{\mathfrak{A}}(A)).$$

Доказательство. а) Нормальность A и C^*-свойство нормы влекут выполнение равенств

$$\left\| A^{2^n} \right\|^2 = \left\| (A^*)^{2^n} A^{2^n} \right\| = \left\| (A^*A)^{2^n} \right\| = \left\| (A^*A)^{2^{n-1}} \right\|^2 = \\ = \dots = \| A^*A \|^{2^n} = \| A \|^{2^{n+1}}.$$

Поэтому

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \| A^{2^n} \|^{2^{-n}} = \| A \|.$$

б) Доказательство аналогично а), так как

$$\| A^n \|^2 = \| (A^*)^n A^n \| = \| (A^*)^{n-1} A^{n-1} \| = \| \mathbb{1} \| = 1.$$

в) Поскольку всякий унитарный элемент изометричен, $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ содержится в единичном круге ввиду б). Но в силу предложения 2.2.3

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A) = \overline{\sigma_{\mathfrak{A}}(A^*)} = \overline{\sigma_{\mathfrak{A}}(A^{-1})} = \overline{\left(\sigma_{\mathfrak{A}}(A)\right)^{-1}}.$$

Комбинируя эти факты, получаем сразу, что $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ лежит на единичной окружности.

г) Всякий самосопряженный A автоматически нормален, поэтому $\rho(A) = \| A \|$. Следовательно, при $|\lambda^{-1}| \geqslant \| A \|$ имеем $\lambda^{-1} \in r_{\mathfrak{A}}(A)$, и $\mathbb{1} + i|\lambda| A$ обратим. Зададим $U \in \mathfrak{A}$, полагая

$$U = (\mathbb{1} - i|\lambda| A)(\mathbb{1} + i|\lambda| A)^{-1}.$$

Немедленно проверяется, что U унитарен, так что элемент $\mathbb{1}(1 - i|\lambda|\alpha)(1 + i|\lambda|\alpha)^{-1} - U$ обратим при всех $\alpha \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, в силу в). Однако

$$\mathbb{1}(1 - i|\lambda|\alpha)(1 + i|\lambda|\alpha)^{-1} - U = \\ = 2i|\lambda|(1 + i|\lambda|\alpha)^{-1}(A - \alpha\mathbb{1})(\mathbb{1} + i|\lambda| A)^{-1},$$

следовательно, $A - \alpha\mathbb{1}$ обратим для всех α с $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$. Поэтому $\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq \mathbb{R} \cap \{\lambda;\ |\lambda| \leqslant \| A \|\} = [-\| A \|,\ \| A \|]$. Утверждение о $\sigma_{\mathfrak{A}}(A^2)$ вытекает из д).

д) Сперва заметим, что элемент

$$B = \prod_{i=1}^{n} A_i,$$

где $A_i \in \mathfrak{A}$ и $A_iA_j = A_jA_i$ при $i, j = 1, \ldots, n$, обратим тогда и только тогда, когда все A_i обратимы. В одну сторону это так, поскольку из обратимости A_i и коммутативности A_i, A_j вытекает $A_i^{-1}A_j^{-1} = A_j^{-1}A_i^{-1}$, следовательно,

$$B^{-1} = \prod_{i=1}^{n} A_i^{-1},$$

причем порядок сомножителей безразличен.

В обратную сторону, если B обратим, то

$$A_i^{-1} = B^{-1} \prod_{j \neq i} A_j.$$

Выберем α_i, $\alpha \in \mathbb{C}$ так, чтобы

$$P(x) - \lambda = \alpha \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i).$$

Тогда

$$P(A) - \lambda \mathbb{1} = \alpha \prod_{i=1}^{n} (A - \alpha_i \mathbb{1}).$$

Таким образом, $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{A}}(P(A))$ в том и только том случае, когда $\alpha_i \in \sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ при некотором $i = 1, \ldots, n$. Но $P(\alpha_i) = \lambda$, так что $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{A}}(P(A))$ эквивалентно $\lambda \in P\left(\sigma_{\mathfrak{A}}(A)\right)$.

Замечание. Если A нормален, то последнее утверждение можно обобщить, а именно $\sigma_{\mathfrak{A}}(f(A)) = f\left(\sigma_{\mathfrak{A}}(A)\right)$ для всякой непрерывной функции f. Этот результат известен как *теорема об отображении спектра*.

Формула $\rho(A) = \|A\|$ для спектрального радиуса самосопряженного или нормального A имеет основополагающее значение в теории, и мы постоянно будем ею пользоваться без всяких комментариев.

Следствие 2.2.6. *Если на *-алгебре $\mathfrak{A}$ существует C^*-норма, по которой $\mathfrak{A}$ полна, то такая норма единственна.*

Доказательство. Для $A \in \mathfrak{A}$ спектр $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ зависит только от алгебраической структуры $\mathfrak{A}$. Тем самым для $A = A^*$ спектральный радиус $\rho(A) = \|A\|$ определяет C^*-норму единственным образом. Для произвольного A

$$\|A\| = \|A^*A\|^{1/2} = \rho(A^*A)^{1/2}.$$

Этими сведениями о спектрах самосопряженных элементов можно воспользоваться для устранения известной неопределенности в понятии спектра. Дело в том, что для элемента A из подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ можно рассматривать и спектр $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$, и спектр $\sigma_{\mathfrak{B}}(A)$. В общем случае эти спектры не совпадают, хотя из включения $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ вытекает, что $\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq \sigma_{\mathfrak{B}}(A)$. В случае C^*-алгебр ситуация очень проста,

Предложение 2.2.7. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет C^*-подалгебру $\mathfrak{B}$. Если $A \in \mathfrak{B}$, то*

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A) = \sigma_{\mathfrak{B}}(A).$$

Доказательство. Можно считать, что у $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ общий единичный элемент. Нам надо показать, что элемент $\lambda\mathbb{1} - A$, обратимый в $\mathfrak{A}$, будет обратим и в $\mathfrak{B}$. В действительности мы покажем, что он обратим в C^*-подалгебре $\mathfrak{C}$, порожденной элементами $\mathbb{1}$, A и A^*. Отсюда будет следовать, что

$$\sigma_{\mathfrak{C}}(A) = \sigma_{\mathfrak{B}}(A) = \sigma_{\mathfrak{A}}(A).$$

Итак, надлежит проверить, что обратимость $A \in \mathfrak{A}$ влечет $A^{-1} \in \mathfrak{C}$. Пусть сначала A самосопряжен; тогда $\sigma_{\mathfrak{C}}(A) \subseteq \mathbb{R}$, в силу предложения 2.2.5. Элемент A^{-1} можно получить аналитическим продолжением $(A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ вдоль мнимой оси, отправляясь от точки $\lambda = \lambda_0 = 2i\|A\|$. Прежде всего заметим, что $(A - \lambda_0\mathbb{1})^{-1}$ задается равномерно сходящимся рядом

$$(A - \lambda_0\mathbb{1})^{-1} = -\sum_{n\geqslant 0} \lambda_0^{-1}\left(\frac{A}{\lambda_0}\right)^n,$$

каждый член которого принадлежит $\mathfrak{C}$. Значит, $(A - \lambda_0\mathbb{1})^{-1} \in \mathfrak{C}$. Далее, при $\lambda \notin \sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ резольвента $R(\lambda) = (A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ — нормальный элемент, и $\sigma_{\mathfrak{A}}(R(\lambda)) = \sigma_{\mathfrak{A}}(A - \lambda\mathbb{1})^{-1} = \left(\sigma_{\mathfrak{A}}(A) - \lambda\right)^{-1}$, согласно предложению 2.2.3. Если $d(\lambda)$ обозначает расстояние от точки λ до $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$, то из теоремы 2.2.5 следует, что $\|R(\lambda)\| = d(\lambda)^{-1}$, и эта оценка означает, что ряд

$$R(\lambda) = \sum_{n\geqslant 0} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1}$$

сходится в круге радиуса $d(\lambda_0) = \|R(\lambda_0)\|^{-1}$ с центром в точке λ_0. Это гарантирует применимость принципа аналитического продолжения, так как $d(\lambda_0) > |\lambda_0|$ для чисто мнимых λ_0 (из обратимости A вытекает, что $\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subset \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ при некотором $\varepsilon > 0$), а следовательно,

$$A^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} (\lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1},$$

где число λ_0 чисто мнимое и $|\lambda_0| > \|A\|$.

Пусть теперь A обратим, но не обязательно самосопряжен. Тогда A^*A обратим, и предыдущие рассуждения показывают, что $(A^*A)^{-1}$ содержится в C^*-подалгебре алгебры $\mathfrak{C}$, порожденной $\mathbb{1}$ и A^*A. Наконец, положим

$$X = (A^*A)^{-1} A^*.$$

Этот $X \in \mathfrak{C}$ и $XA = \mathbb{1}$, так что $X = A^{-1}$, т. е. A обратим в $\mathfrak{C}$.

Принимая во внимание этот результат, упростим обозначение спектра элемента C^*- алгебры $\mathfrak{A}$ и впредь вместо $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ будем писать $\sigma(A)$.

2.2.2. Положительные элементы

Класс положительных элементов C^*-алгебры, вероятно, самый важный, потому что понятие положительности позволяет ввести отношение порядка между элементами алгебры и дает нам метод качественного сравнения.

Известны разные эквивалентные характеризации положительности; наиболее удобно, по-видимому, определение в терминах спектра.

Определение 2.2.8. Элемент A инволютивной алгебры $\mathfrak{A}$ назовем *положительным*, если он самосопряжен и его спектр $\sigma(A)$ принадлежит положительной полупрямой[1]. Множество всех положительных элементов обозначим $\mathfrak{A}_+$.

Изучение положительных элементов начнем с рассмотрения их квадратных корней. Имеет смысл подчеркнуть, что в теории функций комплексного переменного операция извлечения квадратного корня играет большую роль. Эта операция вместе с элементарными алгебраическими операциями позволяет легко построить абсолютную величину функции: $|f| = \sqrt{\bar{f}f}$; затем можно разложить вещественную функцию на положительную и отрицательную части: $f_\pm = (|f| \pm f)/2$, и т. д. Поэтому для обобщения функционального исчисления удобно распологать алгебраическими алгоритмами построения квадратного корня. Обратимся к этим алгоритмам.

Предварительно установим одну простую характеризацию положительных элементов.

Лемма 2.2.9. Пусть *C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ содержит единицу $\mathbb{1}$. Самосопряженный элемент $A \in \mathfrak{A}$ положителен тогда и только тогда, когда $\|\mathbb{1} - A/\|A\|\| \leqslant 1$. Если A самосопряжен, $\|A\| \leqslant 1$ и $\|1 - A\| \leqslant 1$, то A — положительный элемент.*

Доказательство. Если A положителен, то $\sigma(A) \subseteq [0, \|A\|]$ по теореме 2.2.5. Тогда $\sigma(\mathbb{1} - A/\|A\|) \subseteq [0, 1]$ и $\|\mathbb{1} - A/\|A\|\| \leqslant 1$. Наоборот, условие $\|\mathbb{1} - A/\|A\|\| \leqslant 1$ повлечет $\sigma(\mathbb{1} - A/\|A\|) \subseteq [-1, 1]$, или $\sigma(A) \subseteq [0, 2\|A\|]$, так что A положителен. Аналогично доказывается и второе утверждение.

Теорема 2.2.10. *Положительность самосопряженного элемента C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ равносильна представимости его в виде $A = B^2$, где $B = B^* \in \mathfrak{A}$ — некоторый самосопряженный элемент. Более того, если A положителен, то существует единственный положительный B, для которого $A = B^2$, и этот B лежит в абелевой C^*-подалгебре, порожденной A.*

Доказательство. Если B самосопряжен, то B^2 самосопряжен и $\sigma(B^2) \subseteq [0, \|B\|^2]$ по теореме 2.2.5, г), т. е. B^2 положителен. В обратную сторону докажем утверждение явным построением положительного B с $B^2 = A$.

Если $\mathfrak{A}$ не содержит единицы, то мы ее присоединим. Далее, для $\lambda > 0$ и положительного A будет обратим $\lambda\mathbb{1} + A$ и

$$A(\lambda\mathbb{1} + A)^{-1} = \mathbb{1} - \lambda(\lambda\mathbb{1} + A)^{-1}.$$

Из предложения 2.2.3 легко вывести, что

$$\sigma(A(\lambda\mathbb{1} + A)^{-1}) \subseteq [0, \|A\|(\lambda + \|A\|)^{-1}],$$

[1] То есть $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R};\ \lambda \geqslant 0\}$. — *Прим. перев.*

следовательно,

$$\| A (\lambda \mathbb{1} + A)^{-1} \| \leqslant \| A \| (\lambda + \| A \|)^{-1}.$$

Эта оценка позволяет задать $B \in \mathfrak{A}$ как интеграл Римана:

$$B = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}} A (\lambda \mathbb{1} + A)^{-1}.$$

(Интеграл в $\mathfrak{A}$ вводится по той же самой схеме, что и в обычном анализе, надо только все оценки, которые делались для модулей (комплексных) чисел, заменить оценками по норме в алгебре). Непосредственная проверка показывает, что $A = B^2$. Мы опустим эти выкладки, которые предполагают некоторые навыки в интегрировании[1], однако продемонстрируем положительность B. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $\| A \| = 1$. Тогда

$$\| B \| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}} \| A (\lambda \mathbb{1} + A)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}} \frac{1}{\lambda + 1} = 1$$

и

$$\| \mathbb{1} - B \| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}} \| (\lambda + 1)^{-1} \mathbb{1} - A (\lambda \mathbb{1} + A)^{-1} \|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}} \frac{1}{\lambda + 1} \| \lambda (\lambda \mathbb{1} + A)^{-1} \| \| \mathbb{1} - A \|.$$

Но $\| \lambda (\lambda \mathbb{1} + A)^{-1} \| \leqslant 1$ при $\lambda > 0$ и $\| \mathbb{1} - A \| \leqslant 1$ для положительных A с $\| A \| = 1$ (лемма 2.2.9). Следовательно, $\| B \| \leqslant 1$ и $\| \mathbb{1} - B \| \leqslant 1$, и вторичная ссылка на лемму 2.2.9 гарантирует положительность B.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_A$ обозначает абелеву C^*-алгебру, порожденную A. Если $\lambda > 0$, то $(\lambda \mathbb{1} + A)^{-1} \in \widetilde{\mathfrak{A}}_A = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}_A$, согласно предложению 2.2.7. Тем самым $A (\lambda \mathbb{1} + A)^{-1} \in \mathfrak{A}_A$ и $B \in \mathfrak{A}_A$.

Наконец, остается доказать, что B — единственный положительный элемент со свойством $A = B^2$. Вначале заметим, что проведенную нами конструкцию можно применить к B и получить такой положительный C, что $B = C^2$. При этом C будет лежать в алгебре, порожденной B, а она, разумеется, совпадает с $\mathfrak{A}_A$. Значит, A, B и C коммутируют друг с другом. Предположим теперь, что нашелся другой положительный элемент B', квадрат которого $B'^2 = A$, и пусть C' — положительный элемент с $C'^2 = B'$. Очевидно, C' коммутирует с B' и потому $C'A = C'B'^2 = B'^2C' = AC'$. Но тогда C' коммутирует и с B, и с C, которые лежат в $\mathfrak{A}_A$. Таким образом, оказывается, что коммутируют друг с другом A, B, B', C и C'. Далее,

$$\begin{aligned} 0 &= (B^2 - B'^2)(B - B') \\ &= (B - B') B (B - B') + (B - B') B' (B - B') \\ &= ((B - B') C)^2 + ((B - B') C')^2. \end{aligned}$$

---

[1] Интеграл берется уже вдоль кривой в $\mathbb{C}$, охватывающей $\sigma(A)$. Ссылки на литературу см. в замечаниях и комментариях. — *Прим. перев.*

Оба слагаемых в последнем выражении положительны, а их сумма равна нулю, поэтому они тоже равны нулю (если $X = ((B - B')\,C)^2$, то и $X \in \mathfrak{A}_+$ и $-X \in \mathfrak{A}_+$, откуда $\sigma(X) = 0$, или $X = 0$). Разность этих элементов равна $(B - B')^3 = 0$, так что $\|(B - B')^3\| = 0$. Применяя предложение 2.2.2 и теорему 2.2.5, находим $\rho(B - B') = 0$ и $\|B - B'\| = 0$, т. е. $B = B'$.

Доказанное утверждение позволяет принять следующее определение *квадратного корня* из положительного элемента A в C^*-алгебре $\mathfrak{A}$: это единственный положительный $B \in \mathfrak{A}$, для которого $B^2 = A$. Этот квадратный корень из A обозначают либо $\sqrt{A}$, либо $A^{1/2}$. Если A самосопряжен, то можно ввести его *модуль* как $\sqrt{A^2}$. Этот модуль, или *абсолютную величину*, обозначают символом $|A|$.

Примечание. Алгоритм построения квадратного корня с помощью интеграла позволил доказать принадлежность $A^{1/2}$ подалгебре, порожденной A. После того как это свойство и единственность $A^{1/2}$ установлены, можно применять и более простые алгоритмы. Например,

$$A^{1/2} = \|A\|^{1/2}\left[\mathbb{1} - \sum_{n\geqslant 1} c_n \left(\mathbb{1} - \frac{A}{\|A\|}\right)^n\right],$$

где c_n — коэффициенты ряда Тэйлора для функции $x \in [0, 1] \mapsto \sqrt{1 - x} \in [0, 1]$. Сходимость этого ряда гарантируется леммой 2.2.9.

Теперь рассмотрим свойства всего множества положительных элементов и разложение самосопряженных элементов на положительную и отрицательную части.

Предложение 2.2.11. *Множество $\mathfrak{A}_+$ положительных элементов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ представляет собой равномерно замкнутый выпуклый конус со свойством*

$$\mathfrak{A}_+ \cap (-\mathfrak{A}_+) = \{0\}.$$

Если для самосопряженного элемента $A \in \mathfrak{A}$ ввести $A_\pm = (|A| \pm A)/2$, то

(1) $A_\pm \in \mathfrak{A}_+$,

(2) $A = A_+ - A_-$,

(3) $A_+A_- = 0$.

Более того, $A_\pm$ — единственные элементы с этими свойствами.

Доказательство. Ясно, что достаточно провести доказательство для $\mathfrak{A}$ с единицей. Если $A \in \mathfrak{A}_+$ и $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda A \in \mathfrak{A}_+$ по лемме 2.2.9. Следующим шагом будет проверка того, что для A, $B \in \mathfrak{A}_+$ также и $(A+B)/2 \in \mathfrak{A}_+$. Можно ограничиться случаем $\|A\| = 1$, $\|B\| = 1$. Но тогда $\|(A+B)/2\| \leqslant 1$ и

$$\left\|\mathbb{1} - \frac{A+B}{2}\right\| \leqslant \frac{\|\mathbb{1} - A\|}{2} + \frac{\|\mathbb{1} - B\|}{2} \leqslant 1;$$

последнее неравенство вытекает из первого утверждения леммы 2.2.9. Теперь можно сослаться на второе утверждение этой леммы. Далее, как мы уже отмечали, $A \in \mathfrak{A}_+ \cap (-\mathfrak{A}_+)$ означает, что $\sigma(A) = 0$, а это для самосопряженного A влечет $\|A\| = 0$ и $A = 0$. Для доказательства замкнутости $\mathfrak{A}_+$ рассмотрим такие $A_n \in \mathfrak{A}_+$, что $\|A_n - A\| \to 0$. Тогда $\|A_n\| - \|A\| \to 0$. Но $A_n \in \mathfrak{A}_+$ равносильно тому, что $\|\|A_n\|\mathbb{1} - A_n\| \leqslant \|A_n\|$, и, переходя к пределу, получаем $\|\|A\|\mathbb{1} - A\| \leqslant \|A\|$, что равносильно $A \in \mathfrak{A}_+$.

Займемся утверждением о разложении. Очевидно, что $A = A_+ - A_-$, а

$$4A_+A_- = A^2 - |A|A + A|A| - A^2 = 0,$$

так как A коммутирует с $|A| = \sqrt{A^2}$, принадлежащим абелевой алгебре, порожденной A^2. Докажем положительность A_+ (для A_- доказательство аналогично). Вначале зададим A_n формулой

$$A_n = n\left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-1} A_+^2$$

и заметим, что

$$A_n|A| = A_nA_+.$$

Далее проведем оценку

$$\begin{aligned}
\|A_n|A| - A_+\|^2 &= \left\|n\left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-1} A_+^3 - A_+\right\|^2 \\
&= \left\|\left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-1} A_+\right\|^2 \\
&= \left\|\left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-2} A_+^2\right\| \\
&\leqslant \left\|\left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-1} A_+^2\right\| \left\|\left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-1}\right\| \\
&= \frac{1}{n}\left\|\mathbb{1} - \left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-1}\right\| \left\|\left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-1}\right\|.
\end{aligned}$$

Спектр $\mathbb{1} + nA_+^2$ принадлежит $[1, +\infty)$, поэтому спектр $\left(\mathbb{1} + nA_+^2\right)^{-1}$ лежит в $[0, 1]$, согласно предложению 2.2.3. Отсюда получаем, что

$$\|A_n|A| - A_+\| \leqslant n^{-1/2}.$$

Таким образом, A_+ оказывается равномерным пределом $A_n|A|$. Но $|A|$, A_+^2 и прочие элементы положительны и коммутируют. Следовательно,

$$A_n|A| = \left(|A|^{1/4}|A_+|^{1/2}\left(\frac{\mathbb{1}}{n} + A_+^2\right)^{-1/2}|A_+|^{1/2}|A|^{1/4}\right)^2 \in \mathfrak{A}_+.$$

Положительность A_+ вытекает теперь из замкнутости $\mathfrak{A}_+$.

Наконец, если A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}_+$, $A = A_1 - A_2$ и $A_1A_2 = 0$, то $A^2 = A_1^2 + A_2^2 = (A_1 + A_2)^2$. Значит, $|A| = A_1 + A_2$, в силу единственности положительного квадратного корня, и $A_+ = (|A| + A)/2 = A_1$. Аналогично $A_- = A_2$.

Описанное в предложении 2.2.11 разложение $A = A_+ - A_-$ часто именуют *ортогональным разложением* A. Его существованием мы воспользуемся при выводе последнего и самого важного характеристического свойства положительных элементов.

Теорема 2.2.12. *Пусть A — элемент C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Для него эквивалентны условия:*

(1) *A положителен,*

(2) *$A = B^*B$ при некотором $B \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) уже содержится в теореме 2.2.10.

(2) $\Rightarrow$ (1). Запишем ортогональное разложение B^*B:

$$B^*B = C - D.$$

Имеем $C, D \in \mathfrak{A}_+$ и $CD = 0 = DC$. Надо показать, что $D = 0$. Сперва заметим, что

$$(BD)^*(BD) = D(C - D)D = -D^3 \in -\mathfrak{A}_+.$$

Далее,

$$BD = S + iT,$$

где S и T самосопряженные, и легко проверить, что

$$(BD)(BD)^* = -(BD)^*(BD) + 2(S^2 + T^2) \in \mathfrak{A}_+,$$

поскольку $\mathfrak{A}_+$ — выпуклый конус. Тем самым $\sigma((BD)(BD)^*) \subseteq [0, \|B\|^2\|D\|^2]$ и, согласно предложению 2.2.3, $\sigma((BD)^*(BD)) \subseteq [0, \|B\|^2\|D\|^2]$. Но мы уже знаем, что $(BD)^*(BD) \in -\mathfrak{A}_+$, так что $\sigma(D^3) = \{0\}$. Формула для спектрального радиуса дает нам $\|D^3\| = 0 = \|D\|^3$, или $D = 0$.

Теперь рассмотрим некоторые следствия установленных свойств положительных элементов. Так как $\mathfrak{A}_+$ — положительный конус и $\mathfrak{A}_+ \cap (-\mathfrak{A}_+) = \{0\}$, можно ввести частичное упорядочение в множестве самосопряженных элементов, приняв, что соотношение $A - B \geqslant 0$ означает принадлежность разности $A - B$ конусу $\mathfrak{A}_+$. Это отношение записывается также в виде $A \geqslant B$ или $B \leqslant A$. Если $A \geqslant B$ и $A \neq B$, обычно пишут $A > B$.

Введенное отношение порядка обладает свойствами:

(1) Из $A \geqslant 0$ и $A \leqslant 0$ следует $A = 0$.

(2) Из $A \geqslant B$ и $B \geqslant C$ следует $A \geqslant C$.

Кроме того, из специальных свойств положительных элементов C^*-алгебры вытекают менее очевидные порядковые соотношения.

Предложение 2.2.13. *Пусть A, B, C — элементы C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Справедливы следующие утверждения:*

а) *Если $A \geqslant B \geqslant 0$, то $\|A\| \geqslant \|B\|$.*

б) *Если $A \geqslant 0$, то $A\|A\| \geqslant A^2$.*

в) *Если $A \geqslant B \geqslant 0$, то*

$$C^*AC \geqslant C^*BC \geqslant 0$$

при всех $C \in \mathfrak{A}$.

г) *Если $\mathfrak{A}$ имеет единицу, $A \geqslant B \geqslant 0$ и $\lambda > 0$, то*

$$(B + \lambda\mathbb{1})^{-1} \geqslant (A + \lambda\mathbb{1})^{-1}.$$

Доказательство. а) Присоединим, если необходимо, единицу $\mathbb{1}$ к $\mathfrak{A}$. Формула для спектрального радиуса из теоремы 2.2.5 дает $A \leqslant \|A\|\mathbb{1}$, откуда $0 \leqslant B \leqslant \|A\|\mathbb{1}$, и вторичное применение той же формулы показывает, что $\|B\| \leqslant \|A\|$.

б) Так как $\sigma(A - \|A\|\mathbb{1}/2) \subseteq [-\|A\|/2, \|A\|/2]$, то $\sigma((A - \|A\|\mathbb{1}/2)^2) \subseteq [0, \|A\|^2/4]$ по теореме 2.2.5, г). Тогда

$$0 \leqslant \left(A - \frac{\|A\|\mathbb{1}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{\mathbb{1}\|A\|^2}{4},$$

что равносильно $0 \leqslant A^2 \leqslant \|A\| A$.

в) Так как $A - B \in \mathfrak{A}_+$, то $A - B = D^*D$ с некоторым $D \in \mathfrak{A}$, согласно теореме 2.2.12. Значит,

$$C^*AC - C^*BC = (DC)^*(DC) \in \mathfrak{A}_+$$

по той же теореме.

г) Оба элемента $A + \lambda\mathbb{1}$ и $B + \lambda\mathbb{1}$ положительны, обратимы и

$$A + \lambda\mathbb{1} \geqslant B + \lambda\mathbb{1} \geqslant \lambda\mathbb{1}.$$

Поэтому из в) вытекает, что

$$(B + \lambda\mathbb{1})^{-1/2}(A + \lambda\mathbb{1})(B + \lambda\mathbb{1})^{-1/2} \geqslant \mathbb{1}.$$

Если же $X = X^*$ и $X \geqslant \mathbb{1}$, то $\sigma(X) \subseteq [1, +\infty)$ и $\sigma(X^{-1}) \subseteq [0, 1]$ по предложению 2.2.3, так что $X^{-1} \leqslant 1$. Это рассуждение показывает, что

$$(B + \lambda\mathbb{1})^{1/2}(A + \lambda\mathbb{1})^{-1}(B + \lambda\mathbb{1})^{1/2} \leqslant \mathbb{1}.$$

Остается домножить обе части на $(B + \lambda\mathbb{1})^{-1/2}$ и воспользоваться частью в), чтобы получить

$$(A + \lambda\mathbb{1})^{-1} \leqslant (B + \lambda\mathbb{1})^{-1}.$$

Из неравенства предложения 2.2.13, г) можно вывести много других интересных неравенств, умножая его на функции $f(\lambda)$ и интегрируя по λ. Например, если $A \geqslant B \geqslant 0$, то

$$A^{1/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}}\left(\mathbb{1} - \lambda(\lambda\mathbb{1} + A)^{-1}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}}\left(\mathbb{1} - \lambda(\lambda\mathbb{1} + B)^{-1}\right) = B^{1/2},$$

т. е. $A^{1/2} \geqslant B^{1/2} \geqslant 0$. С помощью аналогичных преобразований можно рассмотреть любые дробные показатели $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и убедиться, что $A \geqslant B \geqslant 0$ влечет $A^\alpha \geqslant B^\alpha \geqslant 0$. Однако при $\alpha > 1$ указанное свойство может нарушаться.

Следующая полезная лемма о разложении служит другим примером применения свойств положительных элементов.

Лемма 2.2.14. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ содержит единицу. Всякий элемент $A \in \mathfrak{A}$ обладает разложением вида*

$$A = a_1U_1 + a_2U_2 + a_3U_3 + a_4U_4,$$

где U_i — унитарные элементы $\mathfrak{A}$, а $a_i \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию $|a_i| \leqslant \|A\|/2$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\|A\| = 1$. Тогда $A = A_1 + iA_2$ с самосопряженными $A_1 = (A + A^*)/2$ и $A_2 = (A - A^*)/2i$, у которых $\|A_1\| \leqslant 1$, $\|A_2\| \leqslant 1$. Но любой самосопряженный элемент B с $\|B\| \leqslant 1$ можно разложить на унитарные элементы: $B = (U_+ + U_-)/2$, явно задав $U_\pm = B \pm i\sqrt{\mathbb{1} - B^2}$.

В качестве последнего приложения свойства положительности получим еще один тип разложения. Сначала обобщим введенное определение модуля. Если A — произвольный элемент C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, то элемент A^*A положителен по теореме 2.2.11, и мы определим *модуль* A равенством $|A| = \sqrt{A^*A}$. Для случая, когда A — самосопряженный элемент, это определение совпадает с прежним. Теперь заметим, что если $\mathfrak{A}$ содержит единицу и A обратим, то и A^*A обратим и его обратный элемент тоже положителен. Значит, обратим $|A|$ и $|A|^{-1} = \sqrt{(A^*A)^{-1}}$. Но тогда

$$A = U|A|,$$

где $U = A|A|^{-1}$. К тому же $U^*U = \mathbb{1}$ и U обратим $(U^{-1} = |A|A^{-1})$. Значит, U — унитарный элемент $\mathfrak{A}$; более того, он лежит в C^*-подалгебре, порожденной A и A^*. Такое разложение A — частный случай так называемого полярного разложения. Вообще *полярное разложение* определено для операторов в гильбертовом пространстве; оно представляет всякий замкнутый плотно определенный оператор A в виде произведения $A = V(A^*A)^{1/2}$ частично изометрического оператора V и положительного самосопряженного $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Это и другие свойства, относящиеся к гильбертовым пространствам, иллюстрирует

Пример 2.2.15. Пусть $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ обозначает алгебру всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$; это C^*-алгебра, согласно примеру 2.1.2. Для $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ абстрактное определение положительности равносильно представимости A в виде $A = B^*B$, $B \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, откуда $(\psi, A\psi) = \|B\psi\|^2 \geqslant 0$ для каждого $\psi \in \mathfrak{H}$. Последнее свойство в теории операторов часто принимается за определение положительности; убедимся, что такое определение эквивалентно абстрактному. Если значения $(\psi, A\psi)$ положительны, то они вещественны и потому $(\psi, A\psi) = (A\psi, \psi)$. *Тождество поляризации*

$$(\psi, A\varphi) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k}\left((\psi + i^k\varphi),\ A(\psi + i^k\varphi)\right)$$

показывает, что $(\psi, A\varphi) = (\varphi, A\psi)$ для всех $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$, т. е. A самосопряжен. Но при $\lambda < 0$

$$\|(A - \lambda\mathbb{1})\psi\|^2 = \|A\psi\|^2 + 2|\lambda|(\psi, A\psi) + \lambda^2\|\psi\|^2 \geqslant \lambda^2\|\psi\|^2,$$

так что $A - \lambda\mathbb{1}$ обратим. Следовательно, $\sigma(A) \subseteq [0, \|A\|]$ и A положителен в смысле прежнего определения.

Пример 2.2.16. Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Зададим оператор V на всех векторах вида $|A|\psi$, полагая

$$V|A|\psi = A\psi.$$

Этот V — корректно определенный линейный оператор, потому что $|A|\psi = 0$ равносильно $0 = \||A|\psi\| = \|A\psi\|$, т. е. $A\psi = 0$. Далее, V изометричен, ибо $\|V|A|\psi\| = \|A\psi\| = |A|\psi$. Можно расширить V до частично изометрического оператора в $\mathfrak{H}$, доопределив его нулем на ортогональном дополнении множества $\{|A|\psi;\ \psi \in \mathfrak{H}\}$ и расширив по линейности. Так получается *полярное разложение* A: $A = V|A|$. Это разложение единственно в том смысле, что если $A = UB$, где $B \geqslant 0$ и U — частично изометрический оператор, причем $U\varphi = 0$ в точности для тех φ, которые ортогональны области значений B, то $U = V$ и $B = |A|$. Действительно, $A^*A = BU^*UB = B^2$, откуда $B = |A|$ — единственному положительному квадратному корню из A^*A. Но тогда $U|A| = V|A|$, и оба оператора U и V переводят в нуль ортогональное дополнение к области значений оператора $|A|$. В общем случае V не обязательно окажется элементом C^*-алгебры $\mathfrak{A}_A$, порожденной A и A^*, хотя, как мы убедились, это так для операторов A с ограниченным обратным. Тем не менее в разделе 2.4 мы увидим, что V будет элементом алгебры, получающейся присоединением к $\mathfrak{A}_A$ всех сильных или слабых предельных точек сетей [1)] элементов из $\mathfrak{A}_A$.

2.2.3. Аппроксимативные единицы в факторалгебры

В пункте 2.2.1 были приведены примеры C^*-алгебр, которые не имеют единичного элемента, и было продемонстрировано, что всегда возможно такой элемент присоединить. Тем не менее часто встречаются ситуации, когда отсутствие единицы имеет первостепенное значение, поэтому полезно ввести понятие аппроксимативной единицы.

Определение 2.2.17. Пусть $\mathfrak{I}$ — правый идеал C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. *Аппроксимативной единицей для* $\mathfrak{I}$ называется сеть [1)] $\{E_\alpha\}$ положительных элементов $E_\alpha \in \mathfrak{I}$, такая что:

(1) $\|E_\alpha\| \leqslant 1$,
(2) из $\alpha \leqslant \beta$ вытекает $E_\alpha \leqslant E_\beta$,
(3) $\lim_\alpha \|E_\alpha A - A\| = 0$ для каждого $A \in \mathfrak{I}$.

Определение аппроксимативной единицы левого идеала аналогично, только условие (3) заменяется на

(3′) $\lim_\alpha \|AE_\alpha - A\| = 0$ для всех $A \in \mathfrak{I}$.

Существование аппроксимативных единиц нуждается в доказательстве.

[1)] Множество $\mathscr{U}$ называется *направленным*, если, во-первых, в нем определено частичное упорядочение, т. е. задано для некоторых пар элементов $\alpha, \beta \in \mathscr{U}$ отношение $\alpha \leqslant \beta$, которое рефлексивно ($\alpha \leqslant \alpha$), транзитивно ($\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \gamma$ влекут $\alpha \leqslant \gamma$) и антисимметрично ($\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$ влекут $\beta = \alpha$), и, во-вторых, для всякой пары $\alpha, \beta \in \mathscr{U}$ найдется такой $\gamma \in \mathscr{U}$, что $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \gamma$. *Сетью* называют семейство элементов какого-либо множества M, индексированное направленным множеством $\mathscr{U}$.

Предложение 2.2.18. *Пусть $\mathfrak{I}$ — правый идеал C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Идеал $\mathfrak{I}$ обладает аппроксимативной единицей.*

Доказательство. Сначала присоединим к $\mathfrak{A}$ единицу, если ее не было. Рассмотрим множество $\mathcal{U}$ всех конечных семейств элементов из $\mathfrak{I}$. Множество $\mathcal{U}$ можно упорядочить по включению, т. е. если $\alpha = \{A_1, \ldots, A_m\}$ и $\beta = \{B_1, \ldots \ldots, B_n\}$, то $\alpha \gg \beta$ равносильно тому, что β — подсемейство семейства α. Каждому такому α сопоставим элемент $F_\alpha \in \mathfrak{A}$, задаваемый формулой

$$F_\alpha = \sum_{i=1}^{m} A_i A_i^*,$$

и введем еще

$$E_\alpha = mF_\alpha (\mathbb{1} + mF_\alpha)^{-1}.$$

Поскольку $A_i \in \mathfrak{I}$, то также и E_α, $F_\alpha \in \mathfrak{I}$. Кроме того, $\|E_\alpha\| \leqslant 1$ и

$$\begin{aligned}(E_\alpha A_i - A_i)(E_\alpha A_i - A_i)^* &\leqslant \sum_{i=1}^{m} (E_\alpha - \mathbb{1}) A_i A_i^* (E_\alpha - \mathbb{1}) \\ &= (\mathbb{1} + mF_\alpha)^{-1} F_\alpha (\mathbb{1} + mF_\alpha)^{-1} \\ &= F_\alpha^{1/2} (\mathbb{1} + mF_\alpha)^{-2} F_\alpha^{1/2} \\ &\leqslant F_\alpha^{1/2} (\mathbb{1} + mF_\alpha)^{-1} F_\alpha^{1/2} \\ &= \frac{1}{m} (\mathbb{1} - (\mathbb{1} + mF_\alpha)^{-1}) \leqslant \frac{1}{m} \mathbb{1}.\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $0 \leqslant (1 + mF_\alpha)^{-1} \leqslant 1$, и воспользовались предложением 2.2.13, в). В силу части а) этого предложения,

$$\|E_\alpha A_i - A_i\|^2 \leqslant \frac{1}{m}$$

и, следовательно, $\|E_\alpha A - A\| \xrightarrow[\alpha]{} 0$ при всех $A \in \mathfrak{I}$. В заключение отметим, что

$$E_\alpha - E_\beta = (\mathbb{1} + nF_\beta)^{-1} - (\mathbb{1} + mF_\alpha)^{-1},$$

но $\alpha \gg \beta$ влечет $mF_\alpha \gg nF_\beta$, так что $E_\alpha \gg E_\beta$ согласно предложению 2.2.13, г) Таким образом, E_α образуют аппроксимативную единицу.

Существование аппроксимативных единиц позволяет завершить обсуждение факторалгебр, начатое в разделе 2.1, доказательством следующего важного результата:

Предложение 2.2.19. *Пусть $\mathfrak{I}$ — замкнутый двусторонний идеал C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{I}$ самосопряжен и факторалгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ (определение см. в пункте 2.1.1) является C^*-алгеброй.*

Доказательство. Идеал I обладает аппроксимативной единицей $\{E_\alpha\}$. Если $A \in \mathfrak{I}$, то $\|E_\alpha A - A\| = \|A^* E_\alpha - A^*\| \to 0$. Однако $A^* E_\alpha \in \mathfrak{I}$, замкнутому множеству, поэтому $A^* \in \mathfrak{A}$. Этим доказана самосопряженность $\mathfrak{I}$.

Для завершения доказательства надо показать, что норма на факторалгебре,

$$\|\hat{A}\| = \inf\{\|A + I\|;\ I \in \mathfrak{I}\},$$

обладает свойствами C^*-нормы. С этой целью сперва проверим, что

$$\|\hat{A}\| = \lim_{\alpha} \|A - E_\alpha A\|.$$

Присоединив, если необходимо, единицу к $\mathfrak{A}$, получаем оценку

$$\begin{aligned}\limsup_{\alpha} \|A - E_\alpha A\| &= \limsup_{\alpha} \|(\mathbb{1} - E_\alpha)(A + I)\| \\ &\leqslant \|A + I\|.\end{aligned}$$

Действительно, для $I \in \mathfrak{J}$ имеем $\|E_\alpha I - I\| \to 0$, а неравенство вытекает из того, что $\sigma(E_\alpha) \subseteq [0, 1]$ и, значит, $\sigma(\mathbb{1} - E_\alpha) \subset [0, 1]$ и $\|\mathbb{1} - E_\alpha\| \leqslant 1$.

Теперь можно получить

$$\begin{aligned}\|\hat{A}\| &\geqslant \limsup_{\alpha} \|A - E_\alpha A\| \\ &\geqslant \liminf_{\alpha} \|A - E_\alpha A\| \\ &\geqslant \inf\{\|A + I\|;\quad I \in \mathfrak{J}\} = \|\hat{A}\|,\end{aligned}$$

и C^*-свойство нормы следует из соотношений

$$\begin{aligned}\|\hat{A}\|^2 &= \lim_{\alpha} \|A - E_\alpha A\|^2 \\ &= \lim_{\alpha} \|(A - E_\alpha A)(A - E_\alpha A)^*\| \\ &= \lim_{\alpha} \|(\mathbb{1} - E_\alpha)(AA^* + I)(\mathbb{1} - E_\alpha)\| \\ &\leqslant \|AA^* + I\|;\end{aligned}$$

здесь I — произвольный элемент из $\mathfrak{J}$. Тем самым

$$\|\hat{A}\|^2 \leqslant \|\hat{A}\hat{A}^*\| \leqslant \|\hat{A}\|\,\|\hat{A}^*\|,$$

откуда, во-первых, $\|\hat{A}\| = \|\hat{A}^*\|$, а, во-вторых,

$$\|\hat{A}\|^2 = \|\hat{A}\hat{A}^*\|.$$

2.3. Представления и состояния

2.3.1. Представления

В предыдущих разделах мы изложили начала абстрактной теории C^*-алгебр и в качестве иллюстрации к теоретическим положениям рассмотрели ряд примеров C^*-алгебр операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Теперь мы обсудим некоторые вопросы теории представлений и изучим связь между абстрактным описанием и конкретными алгебрами операторов. Ключевыми понятиями для этого круга вопросов являются понятия представления и состояния. Состояния C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, играющие основную роль в конструкции ее представлений, образуют подкласс класса линейных функционалов, принимающих положительные значения на положительных элементах из $\mathfrak{A}$. Обсуждению свойств состояний мы предпошлем рассмотрение общих свойств представлений. Начнем с точного определения представления.

Нам потребуется понятие **-морфизма* между двумя *-алгебрами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Это — отображение π: $A \in \mathfrak{A} \mapsto \pi(A) \in \mathfrak{B}$, определенное при всех $A \in \mathfrak{A}$, для которого

(1) $\pi(\alpha A + \beta B) = \alpha\pi(A) + \beta\pi(B)$,
(2) $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$,
(3) $\pi(A^*) = \pi(A)^*$

при любых A, $B \in \mathfrak{A}$ и α, $\beta \in \mathbb{C}$. Обычно термин «морфизм» резервируется для отображений со свойствами (1) и (2), однако все морфизмы, которые нам встретятся, будут *-морфизмами, поэтому мы часто будем опускать звездочку *.

Полезно отметить, что все *-морфизмы между C^*-алгебрами автоматически непрерывны. Верна следующая

Лемма 2.3.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две C^*-алгебры и π — некоторый *-морфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Тогда*

(1) *π сохраняет положительность, т. е.*

$$\text{из } A \geqslant 0 \text{ следует } \pi(A) \geqslant 0,$$

(2) *π непрерывен и*

$$\|\pi(A)\| \leqslant \|A\|$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. (1) Если $A \geqslant 0$, то $A = B^*B$ с $B \in \mathfrak{A}$ (по теореме 2.2.12). Таким образом, $\pi(A) = \pi(B^*B) = \pi(B)^*\pi(B) \geqslant 0$.

(2) Согласно предложению 2.2.13, б), $0 \leqslant (A^*A)^2 \leqslant A^*A\|A^*A\|$. Доказанная часть теоремы позволяет получить

$$0 \leqslant \pi(A^*A)^2 \leqslant \pi(A^*A)\|A^*A\|.$$

Ссылка на предложение 2.2.13, а) дает неравенство

$$\|\pi(A)\|^4 = \|\pi(A^*A)\|^2 \leqslant \|\pi(A^*A)\|\|A^*A\| = \|\pi(A)\|^2\|A\|^2,$$

равносильное неравенству $\|\pi(A)\| \leqslant \|A\|$.

Из леммы 2.3.1 немедленно следует, что образ $\{\pi(A);\ A \in \mathfrak{A}\}$ любого *-морфизма π между C^*-алгебрами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ также является C^*-алгеброй. Ясно, что этот образ будет *-алгеброй, а замкнутость следует[1] из свойства непрерывности $\|\pi(A)\| \leqslant \|A\|$.

Если *-морфизм π из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ есть взаимно-однозначное отображение на, т. е. образ π совпадает с $\mathfrak{B}$ и каждый элемент из $\mathfrak{B}$ является образом единственного элемента из $\mathfrak{A}$, то π называется

[1] См., например, следствие 1.8.3 в [[Dix 2]] и следующий абзац. — *Прим. перев.*

*-изоморфизмом. Тем самым *-морфизм π C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ на C^*-алгебру $\mathfrak{B}$ будет *-изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker \pi = \{0\}$, где $\ker \pi$ обозначает *ядро* π, т. е. множество

$$\ker \pi = \{A \in \mathfrak{A};\ \pi(A) = 0\}.$$

В общем случае это ядро оказывается замкнутым двусторонним идеалом в $\mathfrak{A}$. Действительно, если $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \ker \pi$, то $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B) = 0$ и $\pi(BA) = \pi(B)\pi(A) = 0$, а замкнутость сразу следует из оценки $\|\pi(A)\| \leqslant \|A\|$. Следовательно, можно ввести факторалгебру $\mathfrak{A}_\pi = \mathfrak{A}/\ker \pi$, элементами которой являются классы $\widehat{A} = \{A + I;\ I \in \ker \pi\}$, и $\mathfrak{A}_\pi$, согласно предложению 2.2.19, есть C^*-алгебра. Морфизмом π индуцируется морфизм $\widehat{\pi}$ из $\mathfrak{A}_\pi$ в $\mathfrak{B}$: $\widehat{\pi}(\widehat{A}) = \pi(A)$. Так определенный $\widehat{\pi}$ имеет по построению нулевое ядро; значит, это изоморфизм алгебр $\mathfrak{A}_\pi$ и $\hat{\pi}(\mathfrak{A}_\pi) \subseteq \mathfrak{B}$.

Теперь можно дать основное определение теории представлений.

Определение 2.3.2. *Представление* C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ — это пара $(\mathfrak{H}, \pi)$, состоящая из комплексного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ и *-морфизма π алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Представление $(\mathfrak{H}, \pi)$ называется *точным* в том и только том случае, если π есть *-изоморфизм алгебр $\mathfrak{A}$ и $\pi(\mathfrak{A})$, т. е. если $\ker \pi = \{0\}$.

С этим определением естественно связан ряд других терминов. Пространство $\mathfrak{H}$ называется *пространством представления*, операторы $\pi(A)$ называются *представителями* $\mathfrak{A}$, и, неявно отождествляя π и множество представителей, π также именуют *представлением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}$*.

В абзаце перед определением 2.3.2 мы фактически установили, что всякое представление $(\mathfrak{H}, \pi)$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ порождает точное представление факторалгебры $\mathfrak{A}_\pi = \mathfrak{A}/\ker \pi$. В частности, каждое представление простой C^*-алгебры точно. Точные представления наиболее важны, поэтому полезно располагать критерием точности.

Предложение 2.3.3. *Пусть $(\mathfrak{H}, \pi)$ — представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Это представление точно тогда и только тогда, когда выполняются эквивалентные условия:*

(1) $\ker \pi = \{0\}$,

(2) $\|\pi(A)\| = \|A\|$ *для всех* $A \in \mathfrak{A}$,

(3) $\pi(A) > 0$ *для всех* $A > 0$.

Доказательство. Условие (1) равносильно точности по определению. Покажем, что (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Так как $\ker \pi = \{0\}$, можно задать морфизм π^{-1} из образа π в $\mathfrak{A}$, полагая $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Применение леммы 2.3.1 к π^{-1}, а затем к π, дает

$$\|A\| = \|\pi^{-1}(\pi(A))\| \leqslant \|\pi(A)\| \leqslant \|A\|.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Если $A > 0$, то $\|A\| > 0$, а значит, и $\|\pi(A)\| > 0$, так что $\pi(A) \neq 0$. Но $\pi(A) \geqslant 0$ по лемме 2.3.1, следовательно, $\pi(A) > 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Если условие (1) не выполняется, то найдется такое $B \in \ker \pi$, что $B \neq 0$ и $\pi(B^*B) = 0$. Но так как $\|B^*B\| \geq 0$, а $\|B^*B\| = \|B\|^2$, то $B^*B > 0$, и условие (3) нарушается.

Определим **-автоморфизм* τ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ как *-изоморфизм $\mathfrak{A}$ в себя, т. е. τ — это *-морфизм $\mathfrak{A}$ с образом, равным $\mathfrak{A}$, и нулевым ядром.

Принимая во внимание обратимость τ, из приведенных рассуждений получаем

Следствие 2.3.4. *Всякий *-автоморфизм τ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ сохраняет норму, т. е. $\|\tau(A)\| = \|A\|$ для любого $A \in \mathfrak{A}$.*

Этот результат, который по существу является переформулировкой следствия 2.2.6, можно вывести прямо из формулы для спектрального радиуса. Можно было бы с помощью этой формулы получить также другое доказательство свойства непрерывности, сформулированного в лемме 2.3.1.

Обратим теперь внимание на различные типы представлений и методы композиции и декомпозиции представлений.

Введем понятие подпредставления. Если $(\mathfrak{H}, \pi)$ — представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{H}_1$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}_1$ называется *инвариантным* (или *устойчивым*) *относительно* π, если $\pi(A)\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_1$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Если подпространство $\mathfrak{H}_1$ замкнуто и $P_{\mathfrak{H}_1}$ — ортогональный проектор в $\mathfrak{H}$ с областью значений $\mathfrak{H}_1$, то инвариантность $\mathfrak{H}_1$ относительно π означает, что

$$P_{\mathfrak{H}_1}\pi(A)P_{\mathfrak{H}_1} = \pi(A)P_{\mathfrak{H}_1}$$

для любого $A \in \mathfrak{A}$. Следовательно,

$$\pi(A)P_{\mathfrak{H}_1} = (P_{\mathfrak{H}_1}\pi(A^*)P_{\mathfrak{H}_1})^* = (\pi(A^*)P_{\mathfrak{H}_1})^* = P_{\mathfrak{H}_1}\pi(A)$$

для всех $A \in \mathfrak{A}$, т. е. проектор $P_{\mathfrak{H}_1}$ коммутирует с любым из представителей $\pi(A)$. В обратную сторону, из этого свойства коммутативности получаем, что $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно π. Следовательно, $\mathfrak{H}_1$ является инвариантным подпространством для π тогда и только тогда, когда

$$\pi(A)P_{\mathfrak{H}_1} = P_{\mathfrak{H}_1}\pi(A)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Можно также проверить, что если $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное подпространство представления π, а π_1 определяется формулой

$$\pi_1(A) = P_{\mathfrak{H}_1}\pi(A)P_{\mathfrak{H}_1},$$

то и $(\mathfrak{H}_1, \pi_1)$ окажется представлением $\mathfrak{A}$. Действительно,

$$\pi_1(A)\pi_1(B) = (P_{\mathfrak{H}_1}\pi(A))(\pi(B)P_{\mathfrak{H}_1}) = P_{\mathfrak{H}_1}\pi(AB)P_{\mathfrak{H}_1} = \pi_1(AB).$$

Построенное таким образом представление называется *подпредставлением* представления $(\mathfrak{H}, \pi)$.

Отметим, что указанный метод перехода к подпредставлению задает *разложение* π в следующем смысле. Если $\mathfrak{H}_1$ инвариантно для π, то и его ортогональное дополнение $\mathfrak{H}_1^{\perp}$ тоже инвариантно. Полагая $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1^{\perp}$, зададим второе подпредставление $(\mathfrak{H}_2, \pi_2)$ формулой $\pi_2(A) = P_{\mathfrak{H}_2}\pi(A)P_{\mathfrak{H}_2}$. Пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую ортогональную сумму $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, и каждый оператор $\pi(A)$ можно разложить в прямую сумму $\pi(A) = \pi_1(A) \oplus \oplus \pi_2(A)$. Поэтому принято писать $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ и $(\mathfrak{H}, \pi) = (\mathfrak{H}_1, \pi_1) \oplus (\mathfrak{H}_2, \pi_2)$.

Тривиальное представление C^*-алгебры имеет вид $\pi = 0$, т. е. $\pi(A) = 0$ для всех $A \in \mathfrak{A}$. Представление может быть нетривиальным, но содержать тривиальную часть. Если положить

$$\mathfrak{H}_0 = \{\psi;\ \psi \in \mathfrak{H},\ \pi(A)\psi = 0\ \ \forall A \in \mathfrak{A}\},$$

то $\mathfrak{H}_0$ инвариантно относительно π и соответствующее подпредставление $\pi_0 = P_{\mathfrak{H}_0}\pi P_{\mathfrak{H}_0}$ нулевое. В этих обозначениях, представление с $\mathfrak{H}_0 = \{0\}$ назовем *невырожденным*. Вообще, говорят, что множество $\mathfrak{M}$ ограниченных операторов действует на $\mathfrak{H}$ *невырожденным образом*, если

$$\{\psi;\ A\psi = 0\ \ \forall A \in \mathfrak{M}\} = \{0\}.$$

Важный класс невырожденных представлений составляют циклические представления. Сперва приведем определение циклического вектора для произвольного набора $\mathfrak{M}$ ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$: вектор Ω называется циклическим для $\mathfrak{M}$, если $\{A\Omega;\ A \in \mathfrak{M}\}$ плотно в $\mathfrak{H}$. Теперь дадим

Определение 2.3.5. *Циклическим представлением* C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ называют тройку $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$, где $(\mathfrak{H}, \pi)$ — представление $\mathfrak{A}$, а Ω — вектор из $\mathfrak{H}$, циклический для π в $\mathfrak{H}$.

В дальнейшем там, где это не приведет к недоразумениям, мы просто будем говорить «Ω — циклический вектор» или «Ω цикличен для π». Полезным также оказывается более общее понятие *циклического подпространства* для π. Это — такое замкнутое подпространство $\mathfrak{K}$ пространства представления $\mathfrak{H}$, что множество

$$\left\{ \sum_i \pi(A_i)\psi_i;\ A_i \in \mathfrak{A},\ \psi_i \in \mathfrak{K} \right\}$$

плотно в $\mathfrak{H}$. Ортогональный проектор $P_{\mathfrak{K}}$ с областью значений $\mathfrak{K}$ именуют *циклическим проектором.*

Из этих определений ясно, что циклическое представление невырожденно. Имеет место и утверждение в некотором роде обратное. Для формулировки его требуется общее понятие прямой суммы представлений.

Пусть $(\mathfrak{H}_\alpha, \pi_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство представлений C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, причем множество индексов I может быть как счетным, так и несчетным. *Гильбертова прямая сумма*

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$$

пространств представлений $\mathfrak{H}_\alpha$ определяется обычным образом [1)], а прямую сумму представителей

$$\pi = \bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha$$

задаем, полагая $\pi(A)$ равным оператору $\pi_\alpha(A)$ на подпространстве $\mathfrak{H}_\alpha$. В результате получаем ограниченные операторы $\pi(A)$ в $\mathfrak{H}$, ибо $\|\pi_\alpha(A)\| \leqslant \|A\|$ при всех $\alpha \in I$, согласно лемме 2.3.1. Легко проверить, что $(\mathfrak{H}, \pi)$ является представлением $\mathfrak{A}$; его называют *прямой суммой представлений* $(\mathfrak{H}_\alpha, \pi_\alpha)_{\alpha \in I}$. Теперь сформулируем

Предложение 2.3.6. *Всякое невырожденное представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ является прямой суммой циклических подпредставлений.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве невырожденного представления $(\mathfrak{H}, \pi)$ максимальное семейство $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ненулевых векторов, такое что

$$(\pi(A)\,\Omega_\alpha, \pi(B)\,\Omega_\beta) = 0$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$, если $\alpha \neq \beta$. Существование такого семейства устанавливается с помощью леммы Цорна. Пусть $\mathfrak{H}_\alpha$ обозначает гильбертово подпространство в $\mathfrak{H}$, полученное замыканием линейной оболочки множества $\{\pi(A)\,\Omega_\alpha, A \in \mathfrak{A}\}$. Это — инвариантное подпространство, поэтому можно ввести π_α, полагая $\pi_\alpha(A) = P_{\mathfrak{H}_\alpha}\,\pi(A)\,P_{\mathfrak{H}_\alpha}$. Очевидно, $(\mathfrak{H}_\alpha, \pi_\alpha, \Omega_\alpha)$ — циклическое представление $\mathfrak{A}$ при каждом α. Из максимальности $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и невырожденности π выводим, что в $\mathfrak{H}$ нет ненулевых Ω, ортогональных всем $\mathfrak{H}_\alpha$; следовательно,

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha, \quad \pi = \bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha.$$

Установленное предложение позволяет свести изучение произвольных представлений к изучению циклических, что весьма важно, ибо существует каноническая конструкция циклических

---

1) Конечные подмножества F множества индексов I образуют направленное множество относительно упорядочения по включению, и $\mathfrak{H}$ состоит из таких семейств векторов $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha, \psi_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$, для которых

$$\lim_F \sum_{\alpha \in F} \|\psi_\alpha\|^2_{\mathfrak{H}_\alpha} < +\infty, \quad \lim_F \sum_{\alpha \in F} \|\varphi_\alpha\|^2_{\mathfrak{H}_\alpha} < +\infty.$$

Скалярное произведение в $\mathfrak{H}$ задается формулой

$$(\varphi, \psi) = \sum_\alpha (\varphi_\alpha, \psi_\alpha)_{\mathfrak{H}_\alpha} = \lim_F \sum_{\alpha \in F} (\varphi_\alpha, \psi_\alpha)_{\mathfrak{H}_\alpha}.$$

представлений, которую мы подробно разберем в пункте 2.3.3. Указанное разложение представления связано с существованием нетривиальных инвариантных подпространств; в отсутствие таких подпространств редукция к циклической ситуации невозможна. Этим оправдано следующее

Определение 2.3.7. Множество $\mathfrak{M}$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ *неприводимо*, если единственными замкнутыми подпространствами, инвариантными относительно $\mathfrak{M}$, являются тривиальные подпространства $\{0\}$ и $\mathfrak{H}$. Представление $(\mathfrak{H}, \pi)$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ называется *неприводимым*, если множество $\pi(\mathfrak{A})$ неприводимо в $\mathfrak{H}$.

Вместо термина «неприводимое представление» употребляется иногда термин «топологически неприводимое представление», в таком случае «неприводимость» трактуется как отсутствие всяких нетривиальных инвариантных подпространств, замкнутых или незамкнутых. Оказывается, что для представлений C^*-алгебр оба эти понятия совпадают, но на доказательстве их эквивалентности мы не останавливаемся.

Имеются два стандартных критерия неприводимости.

Предложение 2.3.8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — самосопряженное множество ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{M}$ неприводимо;*

(2) *коммутант $\mathfrak{M}'$ множества $\mathfrak{M}$, т. е. множество всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, коммутирующих со всеми $A \in \mathfrak{M}$, состоит из операторов вида $\lambda\mathbb{1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, т. е. из операторов, кратных единичному оператору в $\mathfrak{H}$;*

(3) *либо всякий ненулевой вектор $\psi \in \mathfrak{H}$ является циклическим для $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$, либо $\mathfrak{M} = \{0\}$ и $\mathfrak{H} = \mathbb{C}$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (3). Допустим, найдется такой ненулевой ψ, что $\{A\psi;\ A \in \mathfrak{M}\}$ неплотно в $\mathfrak{H}$. Ортогональное дополнение этого множества должно тогда содержать ненулевой вектор и должно быть инвариантным для $\mathfrak{M}$ (за исключением случаев $\mathfrak{M} = \{0\}$, $\mathfrak{H} = \mathbb{C}$), а это противоречит (1).

(3) $\Rightarrow$ (2). Если $T \in \mathfrak{M}'$, то $T^* \in \mathfrak{M}'$, а также $T + T^* \in \mathfrak{M}'$ и $(T - T^*)/i \in \mathfrak{M}'$. Тем самым если $\mathfrak{M}' \neq \mathbb{C}\mathbb{1}$, то найдется такой самосопряженный оператор $S \in \mathfrak{M}'$, что $S \neq \lambda\mathbb{1}$ ни при каком $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как все ограниченные функции оператора S должны также принадлежать коммутанту, то и спектральные проекторы S будут коммутировать с $\mathfrak{M}$. Но если E — такой проектор, а ψ — ненулевой вектор из его области значений, то $\psi = E\psi$ не может быть циклическим, в противоречие с (3).

(2) $\Rightarrow$ (1). Если (1) нарушается, то найдется замкнутое подпространство $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$, инвариантное относительно $\mathfrak{M}$. Тогда $P_{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{M}'$ и (2) не выполнено.

В заключение этого краткого обзора свойств представлений отметим, что, располагая каким-либо представлением $(\mathfrak{H}, \pi)$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, легко конструировать другие представления.

Например, если U — унитарный оператор в $\mathfrak{H}$, то можно ввести π_U, полагая $\pi_U(A) = U\pi(A)U^*$; тогда $(\mathfrak{H}, \pi_U)$ — новое представление. Однако такого рода отличие представлений несущественно, и мы назовем два представления $(\mathfrak{H}_1, \pi_1)$ и $(\mathfrak{H}_2, \pi_2)$ *эквивалентными* (или *унитарно эквивалентными*), если существует такой унитарный оператор U из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$, что[1)]

$$\pi_1(A) = U\pi_2(A)U^*$$

для всех $A \in \mathfrak{A}$. Эквивалентность π_1 и π_2 обозначается символом $\pi_1 \simeq \pi_2$.

2.3.2. Состояния

Хотя мы уже обсудили некоторые свойства представлений C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, само существование представлений еще не было доказано. И в доказательстве существования, и в построении конкретных представлений важную роль играют положительные линейные формы, или функционалы, на $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{A}^*$ *сопряженное*, или *двойственное*, к $\mathfrak{A}$ пространство, т. е. пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{A}$, и введем в нем норму, полагая для функционала f на $\mathfrak{A}$

$$\|f\| = \sup\{|f(A)|;\ \|A\| = 1\}.$$

Особенно интересны линейные функционалы с добавочными свойствами.

Определение 2.3.9. Линейный функционал ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ называется *положительным*, если

$$\omega(A^*A) \geqslant 0$$

для всех $A \in \mathfrak{A}$. Положительный линейный функционал ω на $\mathfrak{A}$ с $\|\omega\| = 1$ называется *состоянием*.

Обращаем внимание читателя на то, что в определении положительности не присутствует требование непрерывности. Дело в том, что в случае C^*-алгебр непрерывность оказывается следствием положительности, как показывает приводимое ниже предложение 2.3.11. Отметим также, что положительность формы ω эквивалентна тому, что на положительных элементах значения ω положительны, поскольку всякий положительный элемент представи́м в виде A^*A.

Происхождение понятия состояния и его роль лучше всего проиллюстрировать, предположив, что C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет некоторое представление $(\mathfrak{H}, \pi)$. В таком случае всякому ненулевому вектору $\Omega \in \mathfrak{H}$ сопоставим форму ω_Ω, задаваемую формулой

$$\omega_\Omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$$

[1)] $U: \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1$ — изоморфизм гильбертовых пространств; можно отождествить U^* с U^{-1}. — *Прим. перев.*

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Ясно, что ω_Ω — линейный функционал на $\mathfrak{A}$, который к тому же положителен, так как

$$\omega_\Omega(A^*A) = \|\pi(A)\Omega\|^2 \geqslant 0.$$

Можно проверить, например, привлекая предложение 2.3.11 и следствие 2.3.13 (см. ниже), что $\|\omega_\Omega\| = 1$ всякий раз, когда $\|\Omega\| = 1$ и π невырожденно, так что ω_Ω — состояние. Состояния такого типа обычно называют *векторными состояниями* представления $(\mathfrak{H}, \pi)$. Хотя приведенный пример состояния кажется довольно специальным, впоследствии мы убедимся, что он отвечает общему случаю. Каждое состояние C^*-алгебры в некотором представлении окажется векторным. Обсуждению связи между состояниями и представлениями предпошлем рассмотрение некоторых общих свойств состояний.

Эксплуатировать положительность состояний мы будем, главным образом, привлекая обобщенное неравенство Коши—Шварца.

Лемма 2.3.10. (неравенство Коши—Шварца). *Пусть ω — положительный линейный функционал на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда*

а) $\omega(A^*B) = \overline{\omega(B^*A)}$,

б) $|\omega(A^*B)|^2 \leqslant \omega(A^*A)\,\omega(B^*B)$ *для всех* $A, B \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Из положительности ω вытекает, что для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\omega((\lambda A + B)^*(\lambda A + B)) \geqslant 0.$$

Переписываем неравенство, пользуясь линейностью ω:

$$|\lambda|^2\omega(A^*A) + \bar{\lambda}\omega(A^*B) + \lambda\omega(B^*A) + \omega(B^*B) \geqslant 0.$$

Условия а) и б) как раз необходимые и достаточные условия положительности этой квадратичной функции.

В качестве первого применения этого результата установим взаимосвязи между положительностью, непрерывностью и нормализованностью функционалов на C^*-алгебрах.

Предложение 2.3.11. *Пусть ω — линейный функционал на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$. Эквивалентны следующие два условия:*

(1) ω *положителен;*

(2) ω *непрерывен и*

$$\|\omega\| = \lim_\alpha \omega(E_\alpha^2)$$

для некоторой аппроксимативной единицы $\{E_\alpha\}$ алгебры $\mathfrak{A}$.

Если эти условия выполнены, т. е. ω — положительный функционал, то

а) $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$,

б) $|\omega(A)|^2 \leqslant \omega(A^*A)\,\|\omega\|$,

в) $|\omega(A^*BA)| \leqslant \omega(A^*A)\,\|B\|$,

г) $\|\omega\| = \sup\{\omega(A^*A),\ \|A\| = 1\}$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$ *и*

$$\|\omega\| = \lim_{\alpha} \omega(E_\alpha),$$

где $\{E_\alpha\}$ *— любая аппроксимативная единица в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Положим

$$M = \sup_{\alpha} \omega\left(E_\alpha^2\right).$$

Заметим, что при $\lambda_\alpha \geqslant 0$ и $\Sigma_\alpha \lambda_\alpha < +\infty$ мы имеем

$$\sum_{\alpha} \lambda_\alpha \omega\left(E_\alpha^2\right) < +\infty.$$

Действительно, $\Sigma_\alpha \lambda_\alpha E_\alpha^2$ сходится равномерно и монотонно к некоторому $E^2 \in \in \mathfrak{A}_+$, поэтому линейность и положительность ω дают

$$\sum_{\alpha} \lambda_\alpha \omega\left(E_\alpha^2\right) \leqslant \omega(E^2).$$

Это замечание показывает, что $M < +\infty$, ибо $M = +\infty$ приведет к противоречию.

Далее, применяя неравенство Коши — Шварца (лемма 2.3.10), получаем

$$|\omega(AE_\alpha)|^2 \leqslant \omega(A^*A)\,\omega\left(E_\alpha^2\right).$$

Переходя к пределу по α, находим

$$|\omega(A)|^2 \leqslant M\omega(A^*A).$$

Присоединив, если необходимо, единицу и воспользовавшись предложением 2.2.13, получим

$$E_\alpha A^* A E_\alpha \leqslant \|A\|^2 E_\alpha^2;$$

следовательно,

$$\omega\left(E_\alpha A^* A E_\alpha\right) \leqslant \|A\|^2 \omega\left(E_\alpha^2\right).$$

Вновь переходя к пределу по α, находим

$$\omega(A^*A) \leqslant M\|A\|^2.$$

Комбинируя этн две оценки, получаем

$$|\omega(A)| \leqslant M\|A\|,$$

т. е. ω — непрерывный функционал и $\|\omega\| \leqslant M$. Но $M \leqslant \|\omega\|$, поскольку $\|E_\alpha\| \leqslant \leqslant 1$; значит, $\|\omega\| = M = \lim_\alpha \omega\left(E_\alpha^2\right)$. В данном случае также $\|\omega\| = = \lim_\alpha \omega\left(E_\alpha^2\right) \leqslant \lim_\alpha \omega\left(E_\alpha\right) \leqslant \|\omega\|$, потому что $E_\alpha^2 \leqslant E_\alpha$. Итак, $\|\omega\| = = \lim_\alpha \omega(E_\alpha)$, т. е. установлено второе равенство в г).

(2) $\Rightarrow$ (1). Можно предположить, что $\|\omega\| = 1$. Если $\mathfrak{A}$ имеет единицу $\mathbb{1}$, то

$$\|\mathbb{1} - E_\alpha^2\| \leqslant \|\mathbb{1} - E_\alpha\| + \|\mathbb{1} - E_\alpha\|\|E_\alpha\|,$$

так что $\lim_\alpha E_\alpha^2 = \mathbb{1}$. Следовательно, $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Если $\mathfrak{A}$ единицы не имеет, то присоединим ее и расширим ω до функционала $\tilde{\omega}$ на $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbf{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$ по формуле

$$\tilde{\omega}(\lambda\mathbb{1} + A) = \lambda + \omega(A).$$

Так как $A - AE_\alpha^2 = (A - AE_\alpha) + (A - AE_\alpha)E_\alpha$, то $\lim_\alpha AE_\alpha^2 = A$. Пользуясь определением нормы в $\tilde{\mathfrak{A}}$ (предложение 2.1.5), получаем

$$|\tilde{\omega}(\lambda\mathbb{1}+A)| = |\lambda+\omega(A)| = \lim_{\alpha}\left|\lambda\omega\left(E_\alpha^2\right)+\omega\left(AE_\alpha^2\right)\right|$$
$$\leqslant \limsup_{\alpha}\left\|\lambda E_\alpha^2 + AE_\alpha^2\right\| \leqslant \|\lambda\mathbb{1}+A\|.$$

Значит, без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{A}$ содержит единицу и

$$\omega(\mathbb{1}) = 1 = \|\omega\|.$$

Теперь покажем, что на элементах $A = A^*$ значения $\omega(A)$ вещественны. Пусть

$$\omega(A) = \alpha + i\beta,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Для всякого вещественного γ

$$\omega(A + i\gamma\mathbb{1}) = \alpha + i(\beta + \gamma).$$

Элемент $A + i\gamma\mathbb{1}$ нормален, и его спектр содержится в

$$\sigma(A) + i\gamma \subseteq [-\|A\|,\ \|A\|] + i\gamma.$$

Поэтому

$$\|A + i\gamma\mathbb{1}\| = \rho(A + i\gamma\mathbb{1}) = \sqrt{\|A\|^2 + \gamma^2}.$$

Поскольку $|\omega(A + i\gamma\mathbb{1})| \geqslant |\beta + \gamma|$, то

$$|\beta + \gamma| \leqslant \sqrt{\|A\|^2 + \gamma^2}$$

для любого $\gamma \in \mathbb{R}$. Но тем самым $\beta = 0$, т. е. $\omega(A)$ вещественно.

Наконец,

$$\left\|\mathbb{1} - \frac{A^*A}{\|A\|^2}\right\| \leqslant 1$$

для любого $A \in \mathfrak{A}$ по лемме 2.2.9. Следовательно,

$$\left|\omega(\mathbb{1}) - \frac{\omega(A^*A)}{\|A\|^2}\right| \leqslant 1.$$

Но $\omega(\mathbb{1}) = 1$ и $\omega(A^*A)$ вещественно, так что с необходимостью

$$\omega(A^*A) \geqslant 0.$$

Таким образом, положительность ω установлена.

В заключение укажем, что для проверки а) и б) надо применить лемму 2.3.10 к A и E_α и затем перейти к пределу по α. В силу той же леммы,

$$|\omega(A^*BA)|^2 \leqslant \omega(A^*A)\,\omega(A^*B^*BA),$$

так что из

$$A^*B^*BA \leqslant \|B\|^2 A^*A$$

следует

$$\omega(A^*B^*BA) \leqslant \|B\|^2\omega(A^*A),$$

и свойство в) получено. Свойство г) вытекает из б).

Следствие 2.3.12. *Если ω_1 и ω_2 — положительные линейные функционалы на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$, то $\omega_1 + \omega_2$ — положительный линейный функционал и*

$$\|\omega_1 + \omega_2\| = \|\omega_1\| + \|\omega_2\|.$$

В частности, состояния на $\mathfrak{A}$ образуют выпуклое подмножество в сопряженном пространстве алгебры.

Доказательство. Положительность $\omega_1+\omega_2$ очевидна, а

$$\|\omega_1+\omega_2\| = \lim_\alpha \left(\omega_1\left(E_\alpha^2\right)+\omega_2\left(E_\alpha^2\right)\right)$$
$$= \lim_\alpha \omega_1\left(E_\alpha^2\right)+\lim_\alpha \omega_2\left(E_\alpha^2\right) = \|\omega_1\|+\|\omega_2\|.$$

Наконец, если ω_1 и ω_2 — состояния, то при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ функционал $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\,\omega_2$ положителен и $\|\omega\| = \lambda\|\omega_1\| + (1-\lambda)\|\omega_2\| = 1$. Значит, ω — состояние.

Заметим, что если C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ не имеет единицы и $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$ — алгебра, полученная присоединением единицы, то всякий $\omega \in \mathfrak{A}^*$ обладает продолжением $\tilde{\omega} \in \widetilde{\mathfrak{A}}^*$, задаваемым формулой $\tilde{\omega}(\lambda\mathbb{1} + A) = \lambda\|\omega\| + \omega(A)$. Это продолжение обычно называют *каноническим*; оно переводит состояния в состояния.

Следствие 2.3.13. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ не имеет единицы и $\widetilde{\mathfrak{A}}$ получена из нее присоединением единицы. Пусть ω — положительный линейный функционал на $\mathfrak{A}$, а $\tilde{\omega}$ — его каноническое продолжение на $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Тогда $\tilde{\omega}$ положителен и $\|\tilde{\omega}\| = \|\omega\|$. Более того, если ω_1, ω_2 — положительные формы, а $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ — их канонические продолжения, то*

$$\widetilde{\omega_1+\omega_2} = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2.$$

Доказательство. Применяя предложение 2.3.11, б), получаем оценку

$$\tilde{\omega}((\lambda\mathbb{1}+A)^*(\lambda\mathbb{1}+A)) = |\lambda|^2\|\omega\| + \bar{\lambda}\omega(A) + \lambda\omega(A^*) + \omega(A^*A)$$
$$\geqslant (|\lambda|\,\|\omega\|^{1/2} - \omega(A^*A)^{1/2})^2 \geqslant 0,$$

так что $\tilde{\omega}$ положителен. Поскольку $\widetilde{\mathfrak{A}}$ содержит единицу, то $\|\tilde{\omega}\| = \tilde{\omega}(\mathbb{1}) = \|\omega\|$ в соответствии с предложением 2.3.11. Далее,

$$\tilde{\omega}_1(\lambda\mathbb{1}+A) + \tilde{\omega}_2(\lambda\mathbb{1}+A) = \lambda(\|\omega_1\|+\|\omega_2\|) + \omega_1(A) + \omega_2(A)$$

и

$$\|\omega_1\| + \|\omega_2\| = \|\omega_1+\omega_2\|,$$

откуда следует последнее утверждение следствия.

Свойство положительности определяет во множестве функционалов естественное упорядочение. Для положительных линейных функционалов ω_1 и ω_2 будем писать $\omega_1 \geqslant \omega_2$ или $\omega_1 - \omega_2 \geqslant 0$, если $\omega_1 - \omega_2$ положителен, и будем говорить при этом, что ω_1 *мажорирует* ω_2. В дальнейшем большую роль играют свойства состояний, связанные с этой структурой порядка.

Если ω_1, ω_2 — состояния на $\mathfrak{A}$ и $0 < \lambda < 1$, то $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\,\omega_2$ будет состоянием, для которого выполняются условия $\omega \geqslant \lambda\omega_1$ и $\omega \geqslant (1-\lambda)\,\omega_2$.

Таким образом, если ω является выпуклой линейной комбинацией двух различных состояний, то оно мажорирует соответствующие кратные этих состояний. Естественно называть состояние чистым, когда его нельзя представить в виде выпуклой комбинации других состояний, так что предыдущим замечанием о мажорировании оправдывается

***Определение* 2.3.14.** Состояние ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ назовем *чистым*, если оно мажорирует только положительные линейные функционалы вида $\lambda\omega$ с $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Множество всех состояний обозначим $E_{\mathfrak{A}}$, а множество чистых состояний $P_{\mathfrak{A}}$.

Завершим этот пункт обсуждением ряда элементарных свойств множеств $E_{\mathfrak{A}}$ и $P_{\mathfrak{A}}$. Эти подмножества двойственного пространства $\mathfrak{A}^*$ алгебры $\mathfrak{A}$ можно наделять топологией, сужая на них какую-либо топологию $\mathfrak{A}^*$. На $\mathfrak{A}^*$ определены две естественные топологии. *Равномерная топология*, или *топология нормы*, задается системой окрестностей $\omega \in \mathfrak{A}^*$ вида

$$\mathcal{U}(\omega;\ \varepsilon) = \{\omega';\ \omega' \in \mathfrak{A}^*,\ \|\omega - \omega'\| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$. В *слабой* топологии* окрестности точки ω индексируются конечными наборами элементов $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ и имеют вид

$$\mathcal{U}(\omega;\ A_1,\ \ldots,\ A_n) = \{\omega';\ \omega' \in \mathfrak{A}^*,\ |\omega'(A_i) - \omega(A_i)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Слабой* топологией приходится очень широко пользоваться; впоследствии мы будем прибегать и к помощи равномерной топологии.

***Теорема* 2.3.15.** *Пусть $B_{\mathfrak{A}}$ обозначает множество положительных линейных функционалов на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$, норма которых не превосходит единицы. Тогда $B_{\mathfrak{A}}$ есть выпуклое слабо* компактное подмножество сопряж нного пространства $\mathfrak{A}^*$. Множество $\mathscr{E}(B_{\mathfrak{A}})$ крайних, или экстремальных, точек $B_{\mathfrak{A}}$ состоит из 0 и всех чистых состояний. Вдобавок $B_{\mathfrak{A}}$ совпадает со слабым* замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек.*

Множество состояний $E_{\mathfrak{A}}$ тоже выпукло, но оно слабо компактно в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}$ содержит единицу. В таком случае крайними точками $E_{\mathfrak{A}}$ являются чистые состояния $\omega \in P_{\mathfrak{A}}$ и $E_{\mathfrak{A}}$ совпадает со слабым* замыканием выпуклой оболочки чистых состояний.*

Доказательство. Очевидно, $B_{\mathfrak{A}}$ — выпуклое, слабо * замкнутое подмножество единичного шара $\mathfrak{A}_1^*$ пространства $\mathfrak{A}^*$ ($\mathfrak{A}_1^* = \{\omega;\ \omega \in \mathfrak{A}^*,\ \|\omega\| \leqslant 1\}$). Шар $\mathfrak{A}_1^*$ по теореме Алаоглу — Бурбаки слабо * компактен.

Точка 0 — крайняя для $B_{\mathfrak{A}}$, потому что если $\omega \in B_{\mathfrak{A}}$ и $-\omega \in B_{\mathfrak{A}}$, то $\omega(A^*A) = 0$ для всех $A \in \mathfrak{A}$, и из предложения 2.3.11, б) следует, что $\omega(A) = 0$ для любого $A \in \mathfrak{A}$, т. е. $\omega = 0$.

Теперь предположим, что $\omega \in P_{\mathfrak{A}}$ и $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$, где $0 < \lambda < 1$, а $\omega_1, \omega_2 \in B_{\mathfrak{A}}$. Тогда $\omega \geqslant \lambda\omega_1$, значит, $\lambda\omega_1 = \mu\omega$ при некотором $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, в силу чистоты ω. Но $1 = \|\omega\| = \lambda\|\omega_1\| + (1-\lambda)\|\omega_2\|$, так что обязательно $\|\omega_1\| = 1 = \|\omega_2\|$, поэтому $\lambda = \mu$ и $\omega = \omega_1$. Аналогично показываем, что $\omega = \omega_2$; следовательно, ω — крайняя точка для $B_{\mathfrak{A}}$.

Допустим, что $\omega \in \mathfrak{A}^*$ является крайней точкой $B_{\mathfrak{A}}$ и $\omega \neq 0$. Тогда $\|\omega\| = 1$. Тем самым ω — состояние, и надо проверить, что оно чистое. Если это не так, то найдутся $\omega_1 \neq \omega$ и λ, $0 < \lambda < 1$, такие что $\omega \geqslant \lambda\omega_1$. Введем $\omega_2 = (\omega - \lambda\omega_1)/(1-\lambda)$; тогда $\|\omega_2\| = (\|\omega\| - \lambda\|\omega_1\|)/(1-\lambda) = 1$, так что ω_2 тоже состояние. Но $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$, а это противоречит тому, что ω — крайняя точка.

Множество $B_{\mathfrak{A}}$ совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек по теореме Крейна — Мильмана. Эта теорема, в частности, утверждает, что крайние точки существуют; a priori это не очевидно.

Если $\mathfrak{A}$ имеет единицу $\mathbb{1}$ то $E_{\mathfrak{A}}$ является пересечением $B_{\mathfrak{A}}$ с гиперплоскостью $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Поэтому выпуклость, слабая * замкнутость и порождаемость крайними точками получаются для $E_{\mathfrak{A}}$ из аналогичных свойств $B_{\mathfrak{A}}$. Остается проверить, что $E_{\mathfrak{A}}$ не будет слабо* компактным, когда $\mathbb{1} \notin \mathfrak{A}$; это будет сделано в пункте 2.3.4.

2.3.3. Конструкция представлений

Если $(\mathfrak{H}, \pi)$ — невырожденное представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и Ω — вектор в $\mathfrak{H}$ с $\|\Omega\| = 1$, то, как было показано в предыдущем пункте, линейный функционал

$$\omega_\Omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$$

является состоянием на $\mathfrak{A}$. Такие состояния называются векторными. Теперь мы хотим доказать обратное: каждое состояние является векторным в некотором невырожденном представлении. Таким образом, отправляясь от состояния ω, мы должны построить представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$ алгебры $\mathfrak{A}$ и вектор $\Omega_\omega \in \mathfrak{H}_\omega$ так, чтобы ω можно было отождествить с векторным состоянием ω_{Ω_ω}, т. е.

$$\omega(A) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$.

Идея такого представления очень проста. Сначала разберем, как получить пространство представления $\mathfrak{H}_\omega$. Алгебра $\mathfrak{A}$ — это банахово пространство, а с помощью ω его можно наделить структурой предгильбертова пространства, вводя положительно-полуопределенное скалярное произведение

$$\langle A, B\rangle = \omega(A^*B).$$

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{J}_\omega = \{A;\ A \in \mathfrak{A},\ \omega(A^*A) = 0\}.$$

Оно оказывается левым идеалом $\mathfrak{A}$, так как для $I \in \mathfrak{J}_\omega$ и $A \in \mathfrak{A}$

$$0 \leqslant \omega((AI)^*(AI)) \leqslant \|A\|^2 \omega(I^*I) = 0,$$

в силу предложения 2.3.11, т. е. $AI \in \mathfrak{J}_\omega$.

Зададим теперь классы эквивалентности ψ_A, ψ_B, положив

$$\psi_A = \{\hat{A};\ \hat{A} = A + I,\ I \in \mathfrak{J}_\omega\}.$$

Как легко видеть, эти классы образуют комплексное векторное пространство с операциями, унаследованными от $\mathfrak{A}$, а именно $\psi_A + \psi_B = \psi_{A+B}$, $\alpha\psi_A = \psi_{\alpha A}$. Более того, это пространство наделено положительно-определенным скалярным произведением

$$(\psi_A, \psi_B) = \langle A, B\rangle = \omega(A^*B).$$

Конечно, корректность этого определения нуждается в проверке; ее легко выполнить, привлекая предложение 2.3.11. Например, (ψ_A, ψ_B) не зависит от выбора представителей классов, использованного в определении, поскольку

$$\omega((A + I_1)^*(B + I_2)) = \omega(A^*B) + \overline{\omega(B^*I_1)} + \omega(A^*I_2) + \\ + \omega(I_1^*I_2) = \omega(A^*B)$$

для любых I_1, $I_2 \in \mathfrak{J}_\omega$. Хорошо известно, что предгильбертово пространство с положительно-определенным скалярным произведением можно пополнить, т. е. линейно погрузить в качестве плотного подпространства в гильбертово пространство так, что сохранится скалярное произведение. Такое пополнение и возьмем в качестве $\mathfrak{H}_\omega$.

Далее рассмотрим, как вводятся представители $\pi_\omega(A)$. Сперва определим эти операторы на плотном подпространстве в $\mathfrak{H}_\omega$, образованном векторами ψ_B, $B \in \mathfrak{A}$, полагая

$$\pi_\omega(A)\psi_B = \psi_{AB}.$$

Отметим, что это соотношение также не зависит от выбора представителя класса ψ_B, потому что

$$\pi_\omega(A)\psi_{B+I} = \psi_{AB+AI} = \psi_{AB} = \pi_\omega(A)\psi_B$$

для $I \in \mathfrak{J}_\omega$. Кроме того, каждый $\pi_\omega(A)$ является линейным оператором, так как

$$\pi_\omega(A)(\lambda\psi_B + \psi_C) = \pi_\omega(A)\psi_{\lambda B+C} = \psi_{\lambda AB+AC} = \lambda\psi_{AB} + \psi_{AC} \\ = \lambda\pi_\omega(A)\psi_B + \pi_\omega(A)\psi_C.$$

Наконец, из предложения 2.3.11, в) следует, что

$$\|\pi_\omega(A)\psi_B\|^2 = (\psi_{AB}, \psi_{AB}) = \omega(B^*A^*AB) \leqslant \|A\|^2\omega(B^*B) = \|A\|^2\|\psi_B\|^2,$$

так что $\pi_\omega(A)$ обладает ограниченным замыканием, которое мы по-прежнему обозначаем $\pi_\omega(A)$. Нужные алгебраические свойства π_ω легко проверяются; например,

$$\pi_\omega(A_1)\pi_\omega(A_2)\psi_B = \psi_{A_1A_2B} = \pi_\omega(A_1A_2)\psi_B,$$

следовательно, $\pi_\omega(A_1)\pi_\omega(A_2) = \pi_\omega(A_1A_2)$. Таким образом, построено представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$.

Остается указать вектор Ω_ω.

Если $\mathfrak{A}$ содержит единицу, определим Ω_ω так:

$$\Omega_\omega = \psi\mathbb{1}.$$

В этом случае соответствующее векторное состояние совпадает с ω:

$$(\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) = (\psi_1, \psi_A) = \omega(A).$$

Отметим еще, что множество $\{\pi_\omega(A)\Omega_\omega;\ A \in \mathfrak{A})\}$ в точности совпадает со множеством классов эквивалентности $\{\psi_A;\ A \in \mathfrak{A}\}$ и, следовательно, Ω_ω — циклический вектор для $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$.

Если $\mathfrak{A}$ не содержит единицы, ее можно присоединить и повторить предыдущую конструкцию для $\tilde{\mathfrak{A}}$, но теперь понадобится дополнительное рассуждение при доказательстве цикличности Ω_ω для множества $\pi_\omega(\mathfrak{A})$. По построению множество $\pi_\omega(\tilde{\mathfrak{A}})\Omega_\omega = \pi_\omega(\mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A})\Omega_\omega$ плотно, поэтому цикличность Ω_ω для $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ будет установлена, если Ω_ω принадлежит замыканию множества $\pi_\omega(\mathfrak{A})\Omega_\omega$. Выберем в $\mathfrak{A}$ аппроксимативную единицу $\{E_\alpha\}$; тогда

$$\begin{aligned}\|\pi_\omega(E_\alpha)\Omega_\omega - \Omega_\omega\|^2 &= \|\Omega_\omega\|^2 + \|\pi_\omega(E_\alpha)\Omega_\omega\|^2 - 2(\Omega_\omega, \pi_\omega(E_\alpha)\Omega_\omega)\\ &= 1 + \omega(E_\alpha^2) - 2\omega(E_\alpha)\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_\alpha \|\pi_\omega(E_\alpha)\Omega_\omega - \Omega_\omega\| = 0,$$

в силу предложения 2.3.11, что и требовалось.

Нами установлена главная часть следующей теоремы.

Теорема 2.3.16. *Для всякого состояния ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ существует такое циклическое представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ алгебры $\mathfrak{A}$, что*

$$\omega(A) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$, а следовательно, $\|\Omega_\omega\|^2 = \|\omega\| = 1$. Такое представление определено единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности.

Доказательство. Остается проверить только единственность. Под ней мы подразумеваем следующее. Если $(\mathfrak{H}'_\omega, \pi'_\omega, \Omega'_\omega)$ — другое циклическое представление, для которого при всех $A \in \mathfrak{A}$

$$\omega(A) = (\Omega'_\omega, \pi'_\omega(A)\Omega'_\omega),$$

то найдется такой унитарный оператор U, отображающий $\mathfrak{H}_\omega$ на $\mathfrak{H}'_\omega$, что

$$U^{-1}\pi'_\omega(A)U = \pi_\omega(A)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$ и

$$U\Omega_\omega = \Omega'_\omega.$$

Укажем такой U. Положим сначала

$$U\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega = \pi'_\omega(A)\,\Omega'_\omega;$$

тогда

$$(U\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ U\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega) = (\pi'_\omega(A)\,\Omega'_\omega,\ \pi'_\omega(B)\,\Omega'_\omega)$$
$$= \omega(A^*B) = (\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ \pi_\omega(B)\,\Omega_\omega).$$

Значит, U сохраняет скалярное произведение, а потому корректно определен. Легко видеть, что замыкание U будет унитарным оператором, обладающим всеми нужными алгебраическими свойствами; детали можно опустить.

Следствие 2.3.17. *Пусть ω — состояние на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ и τ — такой $*$-автоморфизм $\mathfrak{A}$, относительно которого ω инвариантно, т. е.*

$$\omega(\tau(A)) = \omega(A)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. В пространстве циклического представления $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, построенного по ω, существует и единствен такой унитарный оператор U_ω, что

$$U_\omega \pi_\omega(A)\,U_\omega^{-1} = \pi_\omega(\tau(A))$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$ и

$$U_\omega \Omega_\omega = \Omega_\omega.$$

Доказательство. Этот результат получается из утверждения о единственности теоремы 2.3.16, примененного к циклическому представлению $(\mathfrak{H}_\omega,\ \pi_\omega\circ\tau,\ \Omega_\omega)$, где $\pi_\omega\circ\tau(A) = \pi_\omega(\tau(A))$.

Определение 2.3.18. Циклическое представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, построенное по состоянию ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$, называется (*каноническим*) *циклическим представлением* $\mathfrak{A}$, *ассоциированным с* ω.

Теперь покажем, что между понятиями чистоты состояния ω и неприводимости ассоциированного с ним представления существует тесная связь.

Теорема 2.3.19. *Пусть ω — состояние на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ — ассоциированное циклическое представление. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$ неприводимо,*
(2) *ω — чистое состояние,*
(3) *ω является крайней точкой множества $E_{\mathfrak{A}}$ состояний $\mathfrak{A}$.*

Кроме того, имеется взаимно-однозначное соответствие

$$\omega_T(A) = (T\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\,\Omega_\omega)$$

между положительными функционалами ω_T на $\mathfrak{A}$, которые мажорируются ω, и положительными операторами T из коммутанта π'_ω представления π_ω, у которых $\| T \| \leqslant 1$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что (2) не выполняется. Тогда найдется такой положительный функционал ρ, что $\rho(A^*A) \leqslant \omega(A^*A)$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Применение неравенства Коши — Шварца дает

$$|\rho(B^*A)|^2 \leqslant \rho(B^*B)\,\rho(A^*A) \leqslant \omega(B^*B)\,\omega(A^*A) = \|\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega\|^2 \|\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega\|^2.$$

Тем самым $\rho\colon \pi_\omega(B)\,\Omega_\omega \times \pi_\omega(A)\,\Omega_\omega \longmapsto \rho(B^*A)$ — плотно определенный ограниченный полуторалинейный функционал на $\mathfrak{H}_\omega \times \mathfrak{H}_\omega$, и в $\mathfrak{H}_\omega$ существует единственный ограниченный оператор T, для которого

$$(\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega,\; T\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega) = \rho(B^*A).$$

Но так как ρ не пропорционален ω, то оператор T не может быть пропорционален единичному. Далее,

$$0 \leqslant \rho(A^*A) = (\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\; T\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega) \leqslant \omega(A^*A) = (\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\; \pi_\omega(A)\,\Omega_\omega),$$

следовательно, $0 \leqslant T \leqslant \mathbb{1}$. Однако

$$(\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega,\; T\pi_\omega(C)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega) = \rho(B^*CA)$$
$$= \rho((C^*B)^*A) = (\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega,\; \pi_\omega(C)\,T\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega),$$

поэтому $T \in \pi'_\omega$. Значит, условие (1) нарушается.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть (1) не выполнено. Если $T \in \pi'_\omega$, то $T^* \in \pi'_\omega$ и $T + T^*$, $(T - T^*)/i$ также принадлежат коммутанту. Поэтому в π'_ω существует самосопряженный элемент S, который не кратен $\mathbb{1}$, а значит, найдется его спектральный проектор P, такой что $0 < P < \mathbb{1}$ и $P \in \pi'_\omega$. Рассмотрим функционал

$$\rho(A) = (P\Omega_\omega,\; \pi_\omega(A)\,\Omega_\omega).$$

Он, разумеется, положителен, так как

$$\rho(A^*A) = (P\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\; P\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega) \geqslant 0.$$

К тому же

$$\omega(A^*A) - \rho(A^*A) = (\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\; (\mathbb{1} - P)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega) \geqslant 0,$$

т. е. ω мажорирует ρ. Легко проверить, что ρ не кратен ω, значит, (2) нарушается.

Тем самым проверена эквивалентность первых двух условий и установлено соответствие, о котором идет речь в последнем утверждении теоремы. Эквивалентность условий (2) и (3) уже содержится в теореме 2.3.15.

Из приведенной характеризации чистых состояний вытекают два полезных следствия.

Следствие 2.3.20. *Пусть ω — состояние на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ без единицы, и пусть $\tilde{\omega}$ — его каноническое продолжение на $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$. Чистым состоянием ω будет тогда и только тогда, когда $\tilde{\omega}$ — чистое состояние на $\tilde{\mathfrak{A}}$.*

Доказательство. Если $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ — циклическое представление, ассоциированное с ω, и $\mathbb{1}_\omega$ обозначает единичный оператор в $\mathfrak{H}_\omega$, то можно без труда получить представление, ассоциированное с $\tilde{\omega}$, а именно взяв $\mathfrak{H}_{\tilde{\omega}} = \mathfrak{H}_\omega$,

$\Omega_{\tilde{\omega}} = \Omega_\omega$ и $\pi_{\tilde{\omega}}(\lambda \mathbb{1} + A) = \lambda \mathbb{1}_\omega + \pi_\omega(A)$. Оба представления одновременно приводимы или неприводимы, следовательно, оба состояния будут чистыми одновременно.

Следствие 2.3.21. *Состояние ω на абелевой C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ является чистым тогда и только тогда, когда $\omega(AB) = \omega(A)\,\omega(B)$ для всех $A, B \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Критерием чистоты ω является неприводимость ассоциированного представления. Но $\pi_\omega(\mathfrak{A}) \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, так как $\mathfrak{A}$ абелева, поэтому $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$ тогда и только тогда неприводимо, когда $\mathfrak{H}_\omega$ одномерно. Это имеет место в том и только том случае, когда состояние ω обладает мультипликативным свойством, указанным в следствии.

2.3.4. Существование представлений

Продолжая рассмотрение представлений, мы докажем, что существуют нетривиальные представления, и выведем основную структурную теорему — теорему 2.1.10, анонсированную в разделе 2.1. Доказательство использует свойства выпуклости, компактности и пр., которые уже установлены для состояний C^*-алгебры, но главным его ингредиентом является теорема Хана—Банаха.

Теорема 2.3.22А (теорема Хана—Банаха). *Пусть Y — подпространство нормированного линейного пространства X. Всякий ограниченный линейный функционал f на Y обладает ограниченным линейным продолжением F на X, таким что $\|F\| = \|f\|$.*

В разделе 2.4 и в следующих главах нам понадобится обобщение этой теоремы для пространств с локально-выпуклой топологией, определяемой семейством полунорм. Существование состояний C^*-алгебр вытекает, однако, из приведенной теоремы 2.3.22А. Начнем с результата, относящегося к состояниям со специальными свойствами.

Лемма 2.3.23. *Пусть A — произвольный элемент C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. На $\mathfrak{A}$ существует такое чистое состояние ω, что*

$$\omega(A^*A) = \|A\|^2,$$

и, следовательно, имеется такое неприводимое представление $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$, что

$$\|\pi(A)\| = \|A\|.$$

Доказательство. Присоединив, если необходимо, единицу, рассмотрим на подпространстве $\mathfrak{B}$ нашей алгебры, состоящем из элементов вида

$$\alpha \mathbb{1} + \beta A^*A;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C},$$

функционал f, задаваемый соотношением

$$f(\alpha \mathbb{1} + \beta A^*A) = \alpha + \beta \|A\|^2.$$

Формула для спектрального радиуса нормального элемента $\alpha\mathbb{1}+\beta A^*A$ дает

$$|\alpha+\beta\|A\|^2|\leqslant\sup\{|\alpha+\beta\lambda|;\ \lambda\in\sigma(A^*A)\}=\|\alpha\mathbb{1}+\beta A^*A\|,$$

так что $\|f\|\leqslant 1$. Но $f(\mathbb{1})=1$, следовательно, $\|f\|=1=f(\mathbb{1})$. Применим теорему 2.3.22А, выбрав $X=\mathfrak{A}$, $Y=\mathfrak{B}$. Пусть ω — соответствующее линейное продолжение f; тогда $\|\omega\|=1=f(\mathbb{1})$, так что ω — состояние, согласно предложению 2.3.11. Но $\omega(A^*A)=f(A^*A)=\|A\|^2$. Обозначим через E_A множество тех состояний ω, для которых $\omega(A^*A)=\|A\|^2$. Это — непустое выпуклое слабо* замкнутое, а потому слабо* компактное подмножество во множестве $E_{\mathfrak{A}}$ всех состояний $\mathfrak{A}$. Следовательно, E_A обладает крайними точками по теореме Крейна — Мильмана. Возьмем такую крайнюю точку $\hat{\omega}$ и предположим, что $\hat{\omega}=\lambda\omega_1+(1-\lambda)\omega_2$ при некотором $0<\lambda<1$, где ω_1 и ω_2 — пара состояний $\mathfrak{A}$. Имеем $|\omega_i(A^*A)|\leqslant\|A\|^2$ и $\|A\|^2=\lambda\omega_1(A^*A)+(1-\lambda)\omega_2(A^*A)$. Последнее возможно только в том случае, если $\omega_1(A^*A)=\omega_2(A^*A)=\|A\|^2$, т. е. $\omega_1,\omega_2\in E_A$. Так как $\hat{\omega}$ — крайняя точка множества $E_{\mathfrak{A}}$, то $\omega_1=\omega_2=\hat{\omega}$. Таким образом, $\hat{\omega}$ является крайней точкой E_A, и, в силу теоремы 2.3.19, $\hat{\omega}$ — чистое состояние $\mathfrak{A}$. Этим завершается доказательство первого утверждения леммы; второе следует из соотношений

$$\|A\|^2=\omega(A^*A)=\|\pi_\omega(A)\Omega_\omega\|^2\leqslant\|\pi_\omega(A)\|^2\leqslant\|A\|^2;$$

здесь $(\mathfrak{H}_\omega,\pi_\omega,\Omega_\omega)$ — циклическое представление, ассоциированное с ω, а последнее неравенство вытекает из леммы 2.3.1.

Теперь мы можем доказать основную структурную теорему. Напомним, что эта теорема (теорема 2.1.10) гласит:

Всякая C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторой замкнутой по норме самосопряженной алгебре ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Доказательство. По каждому состоянию ω алгебры $\mathfrak{A}$ построим ассоциированное циклическое представление $(\mathfrak{H}_\omega,\pi_\omega,\Omega_\omega)$ и образуем прямую сумму $(\mathfrak{H},\pi)$ этих представлений:

$$\mathfrak{H}=\bigoplus_{\omega\in E_{\mathfrak{A}}}\mathfrak{H}_\omega,\quad \pi=\bigoplus_{\omega\in E_{\mathfrak{A}}}\pi_\omega.$$

Для любого $A\in\mathfrak{A}$ найдется такое ω_A, что $\|A\|=\|\pi_{\omega_A}(A)\|$ (по лемме 2.3.23). Но $\|\pi(A)\|\geqslant\|\pi_{\omega_A}(A)\|=\|A\|$. Поэтому $\|\pi(A)\|=\|A\|$, в силу леммы 2.3.1; следовательно, π — точное представление.

Мы можем также завершить доказательство теоремы 2.3.15.

Нам осталось доказать, что множество $E_{\mathfrak{A}}$ состояний алгебры $\mathfrak{A}$ без единицы не является слабо* компактным. Для этого достаточно показать, что всякая слабая* окрестность нуля содержит некоторое состояние. С учетом того, что каждый элемент алгебры можно представить в виде линейной комбинации четырех положительных элементов, достаточно рассматривать окрестности, индексированные положительными элементами $A_1, A_2, \ldots, A_n\in\mathfrak{A}_+$ и $\varepsilon>0$. Введем $A=A_1+\ldots+A_n\in\mathfrak{A}_+$. Достаточно будет найти $\omega\in E_{\mathfrak{A}}$, для которого $\omega(A)<\varepsilon$. Пусть $(\mathfrak{H},\pi)$ — точное невырожденное представление $\mathfrak{A}$. Всякий оператор $\pi(A)$, $A\in\mathfrak{A}$, необратим в $\pi(\mathfrak{A})$, поэтому он не имеет обратного и в подалгебре $\mathfrak{B}=\mathbb{C}\mathbb{1}+\pi(\mathfrak{A})$, где $\mathbb{1}$ — единица $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. (При наличии такого обратного $B\in\mathfrak{B}$ элемент $\pi(A)B^2\in\pi(\mathfrak{A})$ был бы обратным к $\pi(A)$ [1].) Со-

[1] Алгебра $\pi(\mathfrak{A})$, изоморфная $\mathfrak{A}$, является идеалом в $\mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*

гласно предложению 2.2.7, $\pi(A)$ необратим в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, поэтому в $\mathfrak{H}$ должен найтись единичный вектор ψ, такой что $\omega_\psi(A) = (\psi, \pi(A)\psi) < \varepsilon$. Итак, существует состояние ω_ψ с требуемым свойством.

В заключение пункта приведем другое следствие теоремы Хана—Банаха, которое часто приходится употреблять.

Предложение 2.3.24. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет C^*-подалгебру $\mathfrak{B}$, и пусть ω — состояние на $\mathfrak{B}$. На $\mathfrak{A}$ существует состояние $\hat{\omega}$, продолжающее ω. Если ω — чистое состояние, то можно выбрать и $\hat{\omega}$ чистым.*

Доказательство. Сперва заметим, что можно предполагать наличие у $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ общей единицы. К этому случаю всегда можно свести дело, присоединив единицу и канонически продолжив ω до $\tilde{\omega}$ на $\mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{B}$; при этом для второго утверждения теоремы существенно, что чистота состояния и его канонического продолжения эквивалентны (следствие 2.3.20).

Далее, по теореме Хана — Банаха ω обладает линейным продолжением $\hat{\omega}$ с $\|\hat{\omega}\| = \|\omega\| = 1$. Но $\hat{\omega}(\mathbb{1}) = \omega(\mathbb{1}) = 1$, следовательно, $\hat{\omega}$ положительно, согласно предложению 2.3.11, т. е. $\hat{\omega}$ — состояние.

Наконец, пусть E_ω обозначает множество состояний на $\mathfrak{A}$, продолжающих ω. Это — непустое выпуклое подмножество в множестве всех состояний $E_{\mathfrak{A}}$. Кроме того, E_ω слабо* замкнуто, а значит, слабо* компактно. По теореме Крейна — Мильмана E_ω имеет по крайней мере одну крайнюю точку $\hat{\omega}$. Теперь мы хотим показать, что если ω чисто, то и $\hat{\omega}$ чисто. Допустим, $\hat{\omega} = \lambda\hat{\omega}_1 + (1 - \lambda)\hat{\omega}_2$ при некотором $0 < \lambda < 1$, где $\hat{\omega}_1$ и $\hat{\omega}_2$ — состояния на $\mathfrak{A}$. Сужения ω_1 и ω_2 этих состояний на $\mathfrak{B}$ будут состояниями алгебры $\mathfrak{B}$, следовательно, $\omega = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2$. Но по предположению ω — чистое состояние, следовательно, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Поэтому $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in E_\omega$, а так как $\hat{\omega}$ — крайняя точка для E_ω, то $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 = \hat{\omega}$. Значит, $\hat{\omega}$ будет крайней точкой $E_{\mathfrak{A}}$, т. е. $\hat{\omega}$ — чистое состояние, в силу теоремы 2.3.19.

2.3.5. Коммутативные C^*-алгебры

Обсуждение свойств представлений завершим доказательством структурной теоремы для абелевых C^*-алгебр — теоремы 2.1.11. Мы теперь в состоянии получить более точный вариант этой теоремы, в котором явно присутствует описание топологического пространства X. Оно проводится в терминах характеров, определение которых таково:

Определение 2.3.25. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева C^*-алгебра. *Характер* ω алгебры $\mathfrak{A}$ — это такое ненулевое линейное отображение ω: $A \in \mathfrak{A} \longmapsto \omega(A) \in \mathbb{C}$ алгебры $\mathfrak{A}$ в поле комплексных чисел, что

$$\omega(AB) = \omega(A)\,\omega(B)$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$. *Спектром* $\sigma(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется множество всех ее характеров.

Характеры — стандартные объекты алгебраической теории, но фактически они не что иное, как чистые состояния. Для проверки этого нам понадобится следующий простой результат.

Лемма 2.3.26. *Если ω — характер абелевой C^*-алгебры, то для всякого $A \in \mathfrak{A}$ число $\omega(A) \in \sigma(A)$, спектру A. Следовательно, $|\omega(A)| \leqslant \|A\|$ и $\omega(A^*A) \geqslant 0$.*

Доказательство. Присоединим, если нужно, единицу и введем функционал $\tilde{\omega}$ на $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$, полагая $\tilde{\omega}(\lambda\mathbb{1} + A) = \lambda + \omega(A)$. Тогда $\tilde{\omega}$ — тоже характер, так как

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}((\lambda\mathbb{1} + A)(\mu\mathbb{1} + B)) &= \lambda\mu + \mu\omega(A) + \lambda\omega(B) + \omega(A)\,\omega(B) \\ &= \tilde{\omega}(\lambda\mathbb{1} + A)\,\tilde{\omega}(\mu\mathbb{1} + B).\end{aligned}$$

Значит, без органичения общности можно предполагать, что $\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$, и из $\omega(A) = \omega(A\mathbb{1}) = \omega(A)\,\omega(\mathbb{1})$ и $\omega \neq 0$ с необходимостью вытекает $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Теперь предположим, что $\lambda \notin \sigma(A)$. Тогда должен найтись такой элемент B, что $(\lambda\mathbb{1} - A)B = \mathbb{1}$, и в результате имеем

$$\omega(\lambda\mathbb{1} - A)\,\omega(B) = \omega(\mathbb{1}) = 1.$$

Поэтому $(\lambda - \omega(A))\,\omega(B) = 1$ и $\lambda \neq \omega(A)$. Этим доказано включение $\omega(A) \in \sigma(A)$, а тогда формула спектрального радиуса дает $|\omega(A)| \leqslant \rho(A) = \|A\|$. Наконец, $\omega(A^*A) \in \sigma(A^*A) \geqslant 0$.

Предложение 2.3.27. *Пусть ω — ненулевой линейный функционал на абелевой C^*-алгебре $\mathfrak{A}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) ω — *чистое состояние,*
(2) ω — *характер.*

Следовательно, спектр $\sigma(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$ оказывается подмножеством сопряженного пространства $\mathfrak{A}^*$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Это уже было доказано (следствие 2.3.21).

(2) $\Rightarrow$ (1). Лемма 2.3.26 показывает, что ω — непрерывная положительная форма с $\|\omega\| \leqslant 1$. Для всякой аппроксимативной единицы E_α

$$\omega(A) = \lim_\alpha \omega(AE_\alpha) = \omega(A) \lim_\alpha \omega(E_\alpha),$$

так что

$$1 = \lim_\alpha \omega(E_\alpha).$$

Поэтому $\|\omega\| = 1$ и ω — состояние. Наконец, это состояние чисто, в силу того же следствия 2.3.21, поскольку оно мультипликативно.

Теперь можно уточнить теорему 2.1.11.

Теорема 2.1.11А. *Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева C^*-алгебра и X — множество ее характеров, снабженное слабой* топологией, унаследованной от сопряженного пространства $\mathfrak{A}^*$. Пространство X отделимо и локально-компактно; оно компактно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ содержит единицу. Кроме того, $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $C_0(X)$ непрерывных функций на X, обращающихся в нуль на бесконечности.*

Доказательство. Сначала докажем, что X локально-компактно. Всякому $\omega_0 \in X$ можно сопоставить такой элемент $A \in \mathfrak{A}_+$, что $\omega_0(A) > 0$, поэтому умножением на скаляр всегда можно добиться, чтобы $\omega_0(A) > 1$. Множество

$$K = \{\omega;\ \omega \in X,\ \omega(A) > 1\}$$

является открытой окрестностью точки ω_0; его замыкание $\overline{K}$ удовлетворяет условию

$$\overline{K} \subseteq \{\omega;\ \omega \in X,\ \omega(A) \geqslant 1\}.$$

Покажем, что последнее множество компактно. Ясно, что слабый* предел ω семейства характеров ω_α обладает мультипликативным свойством $\omega(BC) = \omega(B)\,\omega(C)$. Далее,

$$\omega(A) = \lim_\alpha \omega_\alpha(A) \geqslant 1,$$

так что наш предел ω ненулевой. Поэтому множество $\{\omega;\ \omega \in X,\ \omega(A) \geqslant 1\}$, будучи замкнутым подмножеством слабо* компактного единичного шара в $\mathfrak{A}^*$, само компактно. Отметим, что при наличии у $\mathfrak{A}$ единицы множество всех характеров, содержащееся в единичном шаре $\mathfrak{A}_1^*$, замкнуто, в силу тех же самых соображений, примененных при $A = 2\mathbb{1}$, и потому слабо* компактно.

Далее, каждому $A \in \mathfrak{A}$ сопоставим его представитель $\widehat{A}$, полагая $\widehat{A}(\omega) = \omega(A)$. Немедленно проверяется, что $\widehat{A}$ — комплекснозначная непрерывная функция и что отображение $A \longmapsto \widehat{A}$ — морфизм; так, например, $\widehat{AB}(\omega) = \omega(AB) = \omega(A)\,\omega(B) = \widehat{A}(\omega)\,\widehat{B}(\omega)$. Согласно основной лемме о существовании (лемма 2.3.23), имеем также

$$\|\widehat{A}\|^2 = \sup_{\omega \in X} |\widehat{A}(\omega)|^2 = \sup_{\omega \in X} |\widehat{A^*A}(\omega)| = \|A\|^2.$$

Значит, $A \to \widehat{A}$ — изоморфизм. Перейдем к проверке того, что $\widehat{A} \in C_0(X)$. Достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ множество

$$K_\varepsilon = \{\omega;\ \omega \in X,\ |\omega(A)| \geqslant \varepsilon\}$$

слабо* компактно. Но это вытекает из рассуждений, проведенных выше.

Наконец, отметим, что функции $\widehat{A}$ разделяют точки X в том смысле, что при $\omega_1 \neq \omega_2$ найдется такая функция $\widehat{A}$, что $\widehat{A}(\omega_1) \neq \widehat{A}(\omega_2)$. Действительно, в этом и заключается несовпадение ω_1 и ω_2. Таким образом, множество функций $\widehat{A}$ совпадает со всем $C_0(X)$ по теореме Стоуна — Вейерштрасса. Если X компактно, то $C_0(X)$ содержит постоянные функции, и $\mathfrak{A}$ должна содержать единицу.

Отображение $A \longmapsto \widehat{A}$ обычно называют *преобразованием Гельфанда*. В отдельных случаях структурную теорему можно уточнить и дальше.

Теорема 2.1.11Б. *Если $\mathfrak{A}$ — абелева C^*-алгебра, порожденная одним элементом A (и его сопряженным A^*), то $\mathfrak{A}$ изоморфна C^*-алгебре непрерывных функций на спектре $\sigma(A)$ этого элемента, обращающихся в нуль в 0.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathfrak{A}$ имеет единицу. Тогда A обратим, т. е. $0 \notin \sigma(A)$, и $X = \sigma(\mathfrak{A})$ слабо* компактно. Зададим отображение φ формулой

$$\varphi(\omega) = \omega(A)$$

при всех $\omega \in X$. Согласно лемме 2.3.26, φ отображает X в $\sigma(A)$. Если $\omega_1, \omega_2 \in X$, то $\omega_1 = \omega_2$ равносильно $\omega_1(A) = \omega_2(A)$, поскольку ω_i мультипликативны и A порождает $\mathfrak{A}$. Значит, φ взаимно-однозначно, и мы теперь покажем, что это гомеоморфизм. Если $\lambda \in \sigma(A)$, то замыкание множества $\{(\lambda\mathbb{1} - A)B;\ B \in \mathfrak{A}\}$ окажется замкнутым двусторонним идеалом в $\mathfrak{A}$, который не содержит шара $\{C;\ C \in \mathfrak{A},\ \|\mathbb{1} - C\| < 1\}$. Для проверки достаточно заметить, что все элементы из этого шара обратимы, $C^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} (\mathbb{1} - C)^n$, что несовместимо с включением $\lambda \in \sigma(A)$. Из леммы 2.3.23 следует, что имеется чистое состояние ω с $\lambda\mathbb{1} - A \in \ker\omega$, т. е. $\omega(A) = \lambda$. Отображение φ, очевидно непрерывное, является гомеоморфизмом, так как X и $\sigma(A)$ компактны.

Если же $\mathfrak{A}$ не содержит единицы, перейдем к алгебре $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$, которая порождается $\mathbb{1}$ и A. Следствие 2.3.20 показывает, что всякий характер ω на $\mathfrak{A}$ обладает единственным продолжением до характера $\tilde{\omega}$ на $\tilde{\mathfrak{A}}$, причем $\tilde{\omega}(\lambda\mathbb{1} + A) = \lambda + \omega(A)$. Наоборот, если $\tilde{\omega}$ — характер $\tilde{\mathfrak{A}}$, то $\tilde{\omega}|_{\mathfrak{A}}$ будет характером $\mathfrak{A}$, кроме того случая, когда $\tilde{\omega}|_{\mathfrak{A}} = 0$, а в этом случае $\tilde{\omega}$ есть тот единственный характер $\tilde{\omega}_\infty$ алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$, для которого $\tilde{\omega}_\infty(\mathbb{1}) = 1$, $\tilde{\omega}_\infty|_{\mathfrak{A}} = 0$. Тем самым $\sigma(\tilde{\mathfrak{A}}) = \sigma(\mathfrak{A}) \cup \{\tilde{\omega}_\infty\}$ (как множества).

Зададим отображение φ: $\sigma(\tilde{\mathfrak{A}}) \to \mathbb{C}$, полагая

$$\varphi(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}(A).$$

По лемме 2.3.26 это φ отображает $\sigma(\tilde{\mathfrak{A}})$ в $\sigma(A)$. Если $\varphi(\tilde{\omega}_1) = \varphi(\tilde{\omega}_2)$, то $\tilde{\omega}_1|_{\mathfrak{A}} = \tilde{\omega}_2|_{\mathfrak{A}}$, в то время как $\tilde{\omega}_1(\mathbb{1}) = 1 = \tilde{\omega}_2(\mathbb{1})$. Значит, $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$ и φ взаимно-однозначно. Те же соображения, что и выше, показывают, что φ отображает $\sigma(\tilde{\mathfrak{A}})$ на $\sigma(A)$, причем гомеоморфно. Рассмотрим теперь $B \longmapsto \widehat{B}$ — гельфандовский изоморфизм $\tilde{\mathfrak{A}} \longmapsto C(\sigma(\tilde{\mathfrak{A}}))$. Полагая $\hat{\hat{B}}(\lambda) = \widehat{B}(\varphi^{-1}(\lambda))$, приходим к изоморфизму $B \longmapsto \hat{\hat{B}}$ алгебры $\mathfrak{A}$ на $C(\sigma(A))$. Из определения φ вытекает, что

$$\hat{\hat{A}}(\lambda) = \lambda, \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Таким образом, алгебра $\mathfrak{A} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$ изоморфна подалгебре в $C(\sigma(A))$, порожденной тождественной функцией $\lambda \longmapsto \lambda$. По теореме Стоуна — Вейерштрасса эта алгебра состоит из непрерывных функций на $\sigma(A)$, обращающихся в 0 в нуль.

2.4. Алгебры фон Неймана

2.4.1. Топологии в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$

Всякая C^*-алгебра может быть реализована как алгебра ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Существует много, вообще говоря неэквивалентных, представлений такого рода, но в любом из конкретных представлений алгебра замкнута в равномерной операторной топологии. Для подробного изучения структуры представления необходимо изучить действие алгебры на векторы и подпространства $\mathfrak{H}$. При этом естественно и интересно рассмотреть все операторы, которые аппроксимируют представителей C^*-алгебры во всех конечномерных подпространствах. Так возникает желание замкнуть алгебру операторов в какой-нибудь из топологий, более слабых, чем равномерная, но тем не менее обладающих некоторыми свойствами равномерности на конечномерных подпространствах. Существует много таких операторных топологий, однако оказывается, что замыкание C^*-алгебры от конкретного выбора топологии не зависит. Алгебра операторов, полученная в результате этой процедуры замыкания, служит примером алгебр фон Неймана.

Нашей ближайшей целью является изучение алгебр фон Неймана, но для этого надо начать с обзора операторных топологий в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$.

Все рассматриваемые нами топологии принадлежат к локально-выпуклым топологиям, согласованным со структурой векторного пространства в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Каждая такая топология задается некоторым семейством полунорм $\{p\}$. Базис окрестностей нуля в соответствующей топологии получается, если рассмотреть для каждого конечного набора полунорм $p_1, \ldots, p_n$ множество тех $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, для которых $p_i(A) < 1$, $i = 1, \ldots, n$.

В значительной мере дальнейшее изложение основано на общем варианте теоремы Хана—Банаха для вещественных или комплексных векторных пространств. В пункте 2.3.4 мы сформулировали эту теорему применительно к нормированным пространствам (теорема 2.3.22А); его обобщение по существу состоит в замене нормы полунормой либо любой другой однородной полуаддитивной функцией.

Теорема 2.3.22Б (теорема Хана—Банаха). *Пусть X — вещественное векторное пространство и p — вещественнозначная функция на X со свойствами*

(1) $$p(\omega_1 + \omega_2) \leqslant p(\omega_1) + p(\omega_2), \quad \omega_1, \omega_2 \in X,$$

(2) $$p(\lambda\omega) = \lambda p(\omega), \quad \lambda \geqslant 0, \quad \omega \in X.$$

Далее, пусть Y — вещественное векторное подпространство в X и f — вещественный линейный функционал на Y, удовлетворяющий условию

$$f(\omega) \leqslant p(\omega), \quad \omega \in Y.$$

Тогда f обладает таким вещественным линейным продолжением F на X, что

$$F(\omega) \leqslant p(\omega), \quad \omega \in X.$$

Если пространство X нормировано и $p(\omega) = \|\omega\| \|f\|$, то сформулированная теорема сводится к теореме 2.3.22А. Если же X — отделимое локально-выпуклое топологическое пространство, а в качестве p выбирается одна из полунорм, определяющих его топологию, то теорема гарантирует существование непрерывных линейных продолжений у непрерывных функционалов, заданных на подпространствах.

Оба приведенных варианта теоремы Хана—Банаха являются утверждениями о существовании продолжений для линейных функционалов. Однако можно переформулировать теорему, придав ей вид геометрического результата, относящегося к свойствам отделимости. Вот одна из подобных формулировок.

Теорема 2.3.22В (теорема Хана—Банаха). *Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество отделимого вещественного локально-выпуклого топологического пространства. Если $\omega_0 \notin K$, то найдется такой непрерывный аффинный функционал f, что $f(\omega_0) > 1$, а $f(\omega) \leqslant 1$ при всех $\omega \in K$.*

Выведем третий вариант теоремы из второго. Зафиксируем $\omega' \in K$ и положим

$$L = \{\omega;\ \omega = \omega'' - \omega',\ \omega'' \in K\}.$$

Затем введем функционал p_L, полагая

$$p_L(\omega) = \inf\{\lambda;\ \lambda \geqslant 0,\ \lambda^{-1}\omega \in L\}.$$

Можно проверить, что $p_L(\omega_1 + \omega_2) \leqslant p_L(\omega_1) + p_L(\omega_2)$, $p_L(\lambda\omega) = \lambda p_L(\omega)$ при $\lambda \geqslant 0$ и $p_L(\omega) \leqslant 1$ в том и только том случае, когда $\omega \in L$. Для этого надо учесть выпуклость и замкнутость L и то, что $0 \in L$. Кроме того, $\omega_0 - \omega' \notin L$, а следовательно, $p_L(\omega_0 - \omega') > 1$. Теперь зададим g на подпространстве $\{\lambda(\omega_0 - \omega');\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, положив $g(\lambda(\omega_0 - \omega')) = \lambda p_L(\omega_0 - \omega')$. Из теоремы 2.3.22Б вытекает, что g имеет линейное непрерывное продолжение на X, причем для этого продолжения $g(\omega) \leqslant p_L(\omega)$. Функция $f(\omega) = g(\omega - \omega')$ обладает нужными нам свойствами.

Эти рассуждения показывают, что третий вариант теоремы Хана—Банаха является следствием второго, но верно и обратное. Доказательство мы не приводим, так как в дальнейшем такой связью не воспользуемся.

Обратимся к операторным топологиям в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$.

Сильная и σ-сильная топологии. Для всякого $\xi \in \mathfrak{H}$ отображение $A \mapsto \|A\xi\|$ задает полунорму на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Локально-выпуклая топология в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, определенная такими полунормами, называется *сильной*.

С ней можно сопоставить σ-сильную топологию; для ее получения рассматривают все последовательности $\{\xi_n\}$ в $\mathfrak{H}$, у которых $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$. Тогда для $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$

$$\sum_n \|A\xi_n\|^2 \leqslant \|A\|^2 \sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty.$$

Следовательно, $A \mapsto [\sum_n \|A\xi_n\|^2]^{1/2}$ будет полунормой на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$; *σ-сильная топология* определяется множеством таких полунорм.

Предложение 2.4.1. *Хотя σ-сильная топология сильнее, чем сильная, обе они совпадают на единичном шаре $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ пространства $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Шар $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ полон в равномерной структуре, определенной этими топологиями. Умножение $(A, B) \mapsto AB$ непрерывно в этих* *топологиях как отображение $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H}) \times \mathscr{L}(\mathfrak{H}) \to \mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Если $\mathfrak{H}$ бесконечномерно, то умножение не будет непрерывным по совокупности переменных на всём $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и отображение $A \mapsto A^*$ не является непрерывным.*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из того, что полунормы, задающие σ-сильную топологию, являются равномерными пределами сильно непрерывных полунорм. Полнота $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ вытекает из полноты $\mathfrak{H}$. Непрерывность умножения на $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H}) \times \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ выводится из соотношения

$$AB\xi - A_0B_0\xi = A(B - B_0)\xi + (A - A_0)B_0\xi.$$

Разрывность $A \mapsto A^*$ в случае бесконечномерного $\mathfrak{H}$ демонстрирует следующий пример. Пусть $\{\xi_n\}$ — ортонормированный базис $\mathfrak{H}$; зададим операторы $A_n \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ формулой $A_n\xi = (\xi_n, \xi)\xi_1$. Ясно, что $A_n \to 0$ σ-сильно, но $(A_n^*\xi_1, \xi) = (\xi_1, A_n\xi) = (\xi_1, \xi_1)(\xi_n, \xi)$, т. е. $A_n^*\xi_1 = \xi_n$, так что $A_n^*\xi_1$ не стремится к нулю.

Слабая и σ-слабая топологии. Если $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$, то $A \mapsto |(\xi, A\eta)|$ определяет полунорму на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Порожденная этими полунормами топология в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ называется *слабой*. Для задания этой топологии достаточно полунорм, отвечающих векторным состояниям, $A \mapsto |(\xi, A\xi)|$, потому что в комплексном $\mathfrak{H}$ имеет место тождество поляризации

$$4(\xi, A\eta) = \sum_{n=0}^{3} i^{-n}(\xi + i^n\eta, A(\xi + i^n\eta)).$$

Пусть $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ — такие последовательности в $\mathfrak{H}$, что $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$, $\sum_n \|\eta_n\|^2 < \infty$. Тогда для $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$

$$\sum_n |(\xi_n, A\eta_n)| \leqslant \sum_n \|\xi_n\| \|A\| \|\eta_n\| \leqslant \|A\| \Big[\sum_n \|\xi_n\|^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_n \|\eta_n\|^2\Big]^{1/2} < \infty.$$

Значит, $A \mapsto \Sigma_n |(\xi_n, A\eta_n)|$ — полунорма на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Индуцированная этими полунормами топология в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ называется *σ-слабой*.

Предложение 2.4.2. *Хотя σ-слабая топология сильнее, чем слабая, обе они совпадают на единичном шаре $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ пространства $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Шар $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ компактен в этой топологии. Отображения $A \mapsto AB$, $A \mapsto BA$ и $A \mapsto A^*$ непрерывны в этой топологии, но в случае бесконечномерного $\mathfrak{H}$ умножение не является непрерывным по совокупности іеременных.*

Доказательство. Так как полунормы, задающие σ-слабую топологию, — это равномерные пределы слабо непрерывных полунорм, то первое утверждение очевидно. Столь же очевидна раздельная непрерывность умножения, а непрерывность $A \mapsto A^*$ следует из равенства $|(\xi, A^*\eta)| = |(\eta, A\xi)|$.

Компактность $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ в слабой топологии выводится из теоремы Алаоглу — Бурбаки с помощью следующего результата.

Предложение 2.4.3. *Пусть* Tr *обозначает обычный след на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, и пусть $\mathscr{T}(\mathfrak{H})$ — банахово пространство операторов в $\mathfrak{H}$ со следом, снабженное следовой нормой $T \mapsto \mathrm{Tr}(|T|) = \|T\|_{\mathrm{Tr}}$.*

Сопряженное к $\mathcal{T}(\mathfrak{H})$ пространство $\mathcal{T}(\mathfrak{H})^*$ совпадает с $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, оно двойственно $\mathcal{T}(\mathfrak{H})$ относительно билинейной формы

$$A \times T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \times \mathcal{T}(\mathfrak{H}) \longmapsto \mathrm{Tr}(AT).$$

Связанная с этой двойственностью слабая топология на $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ совпадает с σ-слабой топологией.*

Доказательство. Ввиду неравенства $|\mathrm{Tr}(AT)| \leqslant \|A\| \|T\|_{\mathrm{Tr}}$, $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ является подпространством пространства $\mathcal{T}(\mathfrak{H})^*$ в смысле указанной в предложении двойственности. С другой стороны, каждое $\omega \in \mathcal{T}(\mathfrak{H})^*$ принадлежит этому подпространству, т. е. найдется $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, такое что $\omega(T) = \mathrm{Tr}(AT)$ при всех $T \in \mathcal{T}(\mathfrak{H})$. Для доказательства возьмем $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ и введем оператор $E_{\varphi,\psi}$ ранга 1 по формуле

$$E_{\varphi,\psi}\chi = \varphi(\psi, \chi).$$

Легко видеть, что $E^*_{\varphi,\psi} = E_{\psi,\varphi}$ и $E_{\varphi,\psi}E_{\psi,\varphi} = \|\psi\|^2 E_{\varphi,\varphi}$, поэтому

$$\|E_{\varphi,\psi}\|_{\mathrm{Tr}} = \|\psi\| \,\mathrm{Tr}\,(E^{1/2}_{\varphi,\varphi}) = \|\psi\| \|\varphi\|.$$

Следовательно,

$$|\omega(E_{\varphi,\psi})| \leqslant \|\omega\| \|\varphi\| \|\psi\|.$$

Теорема Рисса об общем виде линейного функционала позволяет заключить, что существует такой оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ с $\|A\| \leqslant \|\omega\|$, что

$$\omega(E_{\varphi,\psi}) = (\psi, A\varphi).$$

Рассмотрим теперь $\omega_0 \in \mathcal{T}(\mathfrak{H})^*$, заданное соотношением

$$\omega_0(T) = \mathrm{Tr}(AT);$$

тогда

$$\omega_0(E_{\varphi,\psi}) = \mathrm{Tr}(AE_{\varphi,\psi}) = (\psi, A\varphi) = \omega(E_{\varphi,\psi}).$$

Для всякого $T \in \mathcal{T}(\mathfrak{H})$ можно указать ограниченные последовательности векторов $\{\psi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ и последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$ так, чтобы

$$\sum_n |\alpha_n| < \infty \text{ и } T = \sum_n \alpha_n E_{\varphi_n,\psi_n}.$$

Последний ряд сходится по следовой норме, так что

$$\omega(T) = \sum_n \alpha_n \omega\left(E_{\varphi_n,\psi_n}\right) = \sum_n \alpha_n \omega_0\left(E_{\varphi_n,\psi_n}\right) = \omega_0(T) = \mathrm{Tr}(AT).$$

Таким образом, $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ совпадает с $\mathcal{T}(\mathfrak{H})^*$.

Слабая* топология, связанная с двойственностью, задается полунормами

$$A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \longmapsto |\mathrm{Tr}(AT)|.$$

Но для

$$T = \sum_n \alpha_n E_{\varphi_n,\psi_n}$$

мы имеем

$$\mathrm{Tr}(AT) = \sum_n \alpha_n \,\mathrm{Tr}\left(E_{\varphi_n,\psi_n}A\right) = \sum_n \alpha_n(\psi_n, A\varphi_n).$$

Значит, эти полунормы эквивалентны полунормам, определяющим σ-слабую топологию.

Определение 2.4.4. Пространство σ-слабо непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ называется *предсопряженным* или *преддвойственным* пространством алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и обозначается $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$.

Как указано в предложении 2.4.3, $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$ можно канонически отождествить с $\mathscr{T}(\mathfrak{H})$ и $\mathscr{L}(\mathfrak{H}) = \mathscr{L}_*(\mathfrak{H})^*$.

Сильная и σ-сильная* топологии.* Эти топологии задаются соответственно полунормами вида

$$A \longmapsto \| A\xi \| + \| A^*\xi \|$$

и

$$A \longmapsto \left[\sum_n \| A\xi_n \|^2 + \sum_n \| A^*\xi_n \|^2 \right]^{1/2},$$

где $\Sigma_n \| \xi_n \|^2 < \infty$. Основное отличие между сильной* и сильной топологией заключается в том, что $A \longmapsto A^*$ непрерывно в первой, но не во второй из них. В остальном доказательство следующего предложения проводится по аналогии с предложением 2.4.1.

Предложение 2.4.5. *Сильная* топология слабее, чем σ-сильная*, с которой она совпадает на единичном шаре $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ пространства $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. В этих топологиях непрерывны $A \longmapsto A^*$ и умножение как отображение $(A, B) \longmapsto AB$ из $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H}) \times \mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, однако умножение разрывно как отображение $\mathscr{L}(\mathfrak{H}) \times \mathscr{L}(\mathfrak{H}) \to \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, если $\mathfrak{H}$ бесконечномерно.*

Связь между введенными топологиями в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ иллюстрирует следующая схема:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{равномерная} & \succ & \sigma\text{-сильная}^* & \succ & \sigma\text{-сильная} & \succ & \sigma\text{-слабая} \\
 & & \curlyvee & & \curlyvee & & \curlyvee \\
 & & \text{сильная}^* & \succ & \text{сильная} & \succ & \text{слабая}
\end{array}$$

Здесь «$\succ$» означает «сильнее (тоньше), чем», а в случае бесконечномерного $\mathfrak{H}$ — «строго сильнее, чем».

Интересно отметить, что требования непрерывности в σ-сильной*, σ-сильной и σ-слабой топологиях выделяют один и тот же класс линейных функционалов на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. То же самое верно применительно к топологиям без знака σ. Поскольку оба утверждения доказываются аналогично, мы приведем доказательство лишь первого из них.

Предложение 2.4.6. *Всякий σ-сильно* непрерывный линейный функционал ω на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ непрерывен в σ-слабой топологии, т. е. принадлежит $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$, и имеет вид $\omega(A) = \Sigma_n (\xi_n, A\eta_n)$, где $\Sigma_n \| \xi_n \|^2 < \infty$, $\Sigma_n \| \eta_n \|^2 < \infty$.*

Доказательство. Пусть ω — линейный функционал на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, непрерывный в σ-сильной* топологии. Тогда можно указать последовательность $\{\xi_n\}$ в $\mathfrak{H}$, такую что $\sum_{n\geqslant 1}\|\xi_n\|^2<\infty$ и

$$|\omega(A)|\leqslant\left[\sum_{n\geqslant 1}(\|A\xi_n\|^2+\|A^*\xi_n\|^2)\right]^{1/2}.$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}=\oplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathfrak{H}_n$, где $\mathfrak{H}_n=\mathfrak{H}$ при $n=1, 2, \ldots$, а при $n=-1, -2, \ldots$ $\mathfrak{H}_n=\overline{\mathfrak{H}}$, сопряженному с $\mathfrak{H}$ гильбертову пространству[1]. В частности, $\tilde{\xi}=\{\ldots, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$ принадлежит $\tilde{\mathfrak{H}}$. Для всякого $\tilde{\eta}=\{\bar{\eta}_{-m}, \eta_m;\ m=1, 2, \ldots\}\in\tilde{\mathfrak{H}}$ и всякого $A\in\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ введем $\tilde{A}\tilde{\eta}\in\tilde{\mathfrak{H}}$, полагая по определению

$$\tilde{A}\tilde{\eta}=\{\overline{A^*\eta_{-m}},\ A\eta_m;\ m=1, 2, \ldots\}.$$

Ясно, что $\tilde{A}\in\mathscr{L}(\tilde{\mathfrak{H}})$, $\|\tilde{A}\|=\|A\|$ и отображение $A\longmapsto\tilde{A}$ линейно. Неравенство для $\omega(A)$ показывает, что отображение $\tilde{A}\tilde{\xi}\longmapsto\omega(A)$ задает непрерывный линейный функционал на пространстве $\{\tilde{A}\tilde{\xi};\ A\in\mathscr{L}(\mathfrak{H})\}$. По теореме Рисса найдется такой элемент $\tilde{\eta}\in\tilde{\mathfrak{H}}$, что

$$\omega(A)=(\tilde{\eta},\ \tilde{A}\tilde{\xi})=\sum_{n=1}^{\infty}[(\eta_n,\ A\xi_n)+(\xi_n,\ A\eta_{-n})].$$

Следовательно, функционал ω является σ-слабо непрерывным.

Непосредственным следствием предложения 2.4.6 является совпадение замыканий выпуклых подмножеств $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$.

Теорема 2.4.7. *Пусть $\mathfrak{K}$ — выпуклое подмножество $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, а $\mathscr{L}_r(\mathfrak{H})$ — шар радиуса r в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{K}$ замкнуто в σ-слабой топологии;*

(2) *$\mathfrak{K}$ замкнуто в σ-сильной топологии;*

(3) *$\mathfrak{K}$ замкнуто в σ-сильной* топологии;*

(4) *$\mathfrak{K}\cap\mathscr{L}_r(\mathfrak{H})$ слабо (а потому и σ-слабо) замкнуто при всех $r>0$;*

(5) *$\mathfrak{K}\cap\mathscr{L}_r(\mathfrak{H})$ сильно (а потому и σ-сильно) замкнуто при всех $r>0$;*

(6) *$\mathfrak{K}\cap\mathscr{L}_r(\mathfrak{H})$ сильно* (а потому и σ-сильно*) замкнуто при всех $r>0$.*

Доказательство. Эквивалентность $(1)\Longleftrightarrow(4)$ вытекает из того факта, что $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ двойственно $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$, и одной теоремы Банаха (см. замечания и комментарии). Импликации $(4)\Rightarrow(5)\Rightarrow(6)$ и $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$ тривиальны. Так как $\mathfrak{K}\cap\mathscr{L}_r(\mathfrak{H})$ выпукло при всех $r>0$, то, в силу предложения 2.4.6, $(3)\Rightarrow(1)$ и $(6)\Rightarrow(4)$, поскольку замкнутое выпуклое множество, содержащее нуль, совпадает со своей биполярой (см. замечания и комментарии).

---

[1] Как множество $\overline{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}$. Если $\xi\in\mathfrak{H}$, то соответствующий элемент из $\overline{\mathfrak{H}}$ обозначим $\bar{\xi}$. Структура гильбертова пространства в $\overline{\mathfrak{H}}$ вводится так:

$$\bar{\xi}+\bar{\eta}=\overline{\xi+\eta},\ \lambda\bar{\xi}=\overline{\bar{\lambda}\xi},\ (\bar{\xi},\ \bar{\eta})=(\eta,\ \xi).$$

2.4.2. Определение алгебр фон Неймана и их элементарные свойства

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Для всякого подмножества $\mathfrak{M}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ символом $\mathfrak{M}'$, как и прежде, обозначается его коммутант, т. е. множество всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, коммутирующих со всеми операторами из $\mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M}'$ является банаховой алгеброй операторов, содержащей единичный оператор $\mathbb{1}$. Если $\mathfrak{M}$ самосопряжено, то $\mathfrak{M}'$ окажется C^*-алгеброй операторов в $\mathfrak{H}$, замкнутой в каждой из локально-выпуклых топологий, введенных в предыдущем пункте. Нетрудно показать, что

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}^{(\mathrm{IV})} = \mathfrak{M}^{(\mathrm{VI})} = \ldots,$$

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}''' = \mathfrak{M}^{(\mathrm{V})} = \mathfrak{M}^{(\mathrm{VII})} = \ldots .$$

Определение 2.4.8. *Алгебра фон Неймана в* $\mathfrak{H}$ — это такая $*$-подалгебра $\mathfrak{M}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, что

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''.$$

Центр $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ *алгебры фон Неймана* определяется равенством

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'.$$

Алгебра фон Неймана называется *фактором*, если ее центр тривиален, т. е. если $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Теперь приведем ряд элементарных сведений об алгебрах фон Неймана. Пусть A — самосопряженный элемент алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$. Любой оператор, коммутирующий с A, коммутирует и со всеми спектральными проекторами A, поэтому все эти проекторы лежат в $\mathfrak{M}$. Линейными комбинациями спектральных проекторов можно с любой точностью аппроксимировать $A = A^*$ по норме, а любой элемент $A \in \mathfrak{M}$ представим в виде линейной комбинации двух самосопряженных операторов: $A = (A + A^*)/2 + (A - A^*)/2i$; следовательно, проекторы из $\mathfrak{M}$ порождают плотное в $\mathfrak{M}$ по норме подпространство.

Так как всякий элемент C^*-алгебры с единицей является линейной комбинацией четырех унитарных элементов (лемма 2.2.14), то $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ принадлежит $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $VAV^* = A$ для всех унитарных $V \in \mathfrak{M}'$. Значит, если $A = U|A|$ — полярное разложение (пример 2.2.16) элемента $A \in \mathfrak{M}$, то для любого унитарного элемента $V \in \mathfrak{M}'$

$$VUV^*V|A|V^* = VU|A|V^* = VAV^* = A = U|A|.$$

Из единственности полярного разложения выводим

$$VUV^* = U, \quad V|A|V^* = |A|.$$

Тем самым $U \in \mathfrak{M}$, $|A| \in \mathfrak{M}$.

Аналогично, если $\{A_\alpha\}$ — возрастающая сеть положительных операторов из $\mathfrak{M}$ с точной верхней гранью $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})_+$, то для любого унитарного элемента $V \in \mathfrak{M}'$ сеть $\{VA_\alpha V^*\} = \{A_\alpha\}$ имеет точной верхней гранью VAV^*. Следовательно, $A = VAV^*$ и $A \in \mathfrak{M}$.

Пример 2.4.9. $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ — алгебра фон Неймана, и притом фактор, ибо $\mathscr{L}(\mathfrak{H})' = \mathbb{C}1$, а $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ не является алгеброй фон Неймана, так как $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})' = \mathbb{C}1$ и, следовательно, $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})'' = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Отметим, что всякий оператор из $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ можно аппроксимировать операторами конечного ранга в любой из топологий, рассмотренных в пункте 2.4.1, т. е. замыкание $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ в любой из этих топологий совпадает с $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Здесь мы сталкиваемся с частным случаем фундаментального результата, известного как теорема фон Неймана о плотности или теорема о бикоммутанте; доказательство ее дано ниже (теорема 2.4.11).

Определение 2.4.10. Если $\mathfrak{M}$ — подмножество в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, а $\mathfrak{K}$ — подмножество в $\mathfrak{H}$, то условимся обозначать символом $[\mathfrak{M}\mathfrak{K}]$ замыкание линейной оболочки векторов вида $A\xi$, где $A \in \mathfrak{M}$, $\xi \in \mathfrak{K}$. Тем же символом $[\mathfrak{M}\mathfrak{K}]$ будет обозначаться ортогональный проектор на подпространство $[\mathfrak{M}\mathfrak{K}]$.

Напомним, что $*$-подалгебра $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ называется невырожденной (в $\mathfrak{H}$), если $[\mathfrak{A}\mathfrak{H}] = \mathfrak{H}$ (см. пункт 2.3.1).

Если $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ содержит единицу, то невырожденность $\mathfrak{A}$ очевидна.

Теорема 2.4.11 (теорема о бикоммутанте). *Пусть $\mathfrak{A}$ — невырожденная $*$-алгебра операторов в $\mathfrak{H}$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(1) $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$;
(2) (*соотв.* (2a)) *множество* $\mathfrak{A}$ (*соотв.* $\mathfrak{A}_1$) *слабо замкнуто*;
(3) (*соотв.* (3a)) $\mathfrak{A}$ (*соотв.* $\mathfrak{A}_1$) *сильно замкнуто*;
(4) (*соотв.* (4a)) $\mathfrak{A}$ (*соотв.* $\mathfrak{A}_1$) *сильно* замкнуто*;
(5) (*соотв.* (5a)) $\mathfrak{A}$ (*соотв.* $\mathfrak{A}_1$) *σ-слабо замкнуто*;
(6) (*соотв.* (6a)) $\mathfrak{A}$ (*соотв.* $\mathfrak{A}_1$) *σ-сильно замкнуто*;
(7) (*соотв.* (7a)) $\mathfrak{A}$ (*соотв.* $\mathfrak{A}_1$) *σ-сильно* замкнуто*.

Доказательство. Эквивалентность (2a), (3a), (4a), (5), (5a), (6), (6a), (7), (7a) вытекает из теоремы 2.4.7. Ясно, что из (1) следуют все остальные условия и что (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (7). Таким образом, остается показать, скажем, что (6) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (1). Для этого рассмотрим счетную сумму копий $\mathfrak{H}$: $\tilde{\mathfrak{H}} = \bigoplus_{n=1}^\infty \mathfrak{H}_n$, где $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$ при всех n.

По $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ зададим $\pi(A) \in \mathscr{L}(\tilde{\mathfrak{H}})$:

$$\pi(A)\left(\bigoplus_n \xi_n\right) = \bigoplus_n (A\xi_n).$$

Очевидно, π будет $*$-изоморфизмом, переводящим $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ в некоторую подалгебру алгебры $\mathscr{L}(\tilde{\mathfrak{H}})$.

Лемма 2.4.12. *Справедливо соотношение* $\pi(\mathfrak{A}'') = \pi(\mathfrak{A})''$.

Доказательство. Пусть E_n — ортогональный проектор из $\tilde{\mathfrak{H}} = \oplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}_n$ на $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$. Оператор $B \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{H}})$ лежит в $\pi(\mathfrak{A})'$ тогда и только тогда, когда $E_n B E_m \in \mathfrak{A}'$ при всех n и m. Следовательно, $C \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{H}})$ принадлежит $\pi(\mathfrak{A})''$ тогда и только тогда, когда C коммутирует со всеми E_n, а $E_n C E_n$ принадлежит $\mathfrak{A}''$ и не зависит от n, т. е. тогда и только тогда, когда C принадлежит $\pi(\mathfrak{A}'')$.

Лемма 2.4.13. *Если $\mathfrak{M}$ — невырожденная $*$-алгебра операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то всякий вектор $\xi \in \mathfrak{H}$ содержится в подпространстве $[\mathfrak{M}\xi]$.*

Доказательство. Пусть $P = [\mathfrak{M}\xi]$; тогда

$$MP = PMP$$

при всех $M \in \mathfrak{M}$. Переходя к сопряженным операторам, получаем

$$PM^* = PM^*P$$

при всех $M^* \in \mathfrak{M}$. Из самосопряженности $\mathfrak{M}$ выводим, что

$$MP = PM = PMP$$

при всех $M \in \mathfrak{M}$, т. е. $P \in \mathfrak{M}'$. Полагая $\xi' = P\xi$ и $\xi'' = (1 - P)\xi$, имеем $\xi = \xi' + \xi''$. Соотношение

$$A\xi' + A\xi'' = A\xi \in [\mathfrak{M}\xi]$$

означает, что $A\xi'' = 0$ при всех $A \in \mathfrak{M}$. Следовательно, для произвольных $\eta \in \mathfrak{H}$ и $A \in \mathfrak{M}$

$$(\xi'', A\eta) = (A^*\xi'', \eta) = 0.$$

Мы установили, что ξ'' содержится в ортогональном дополнении к $[\mathfrak{M}\mathfrak{H}] = \mathfrak{H}$; значит, $\xi'' = 0$ и $\xi \in [\mathfrak{M}\xi]$.

Лемма 2.4.14. *Пусть $\mathfrak{M}$ — невырожденная $*$-алгебра операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда для любых $\xi \in \mathfrak{H}$, $A \in \mathfrak{M}''$ и $\varepsilon > 0$ существует такой оператор $B \in \mathfrak{M}$, что*

$$\|(A - B)\xi\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Мы должны показать, что $[\mathfrak{M}\xi] = [\mathfrak{M}''\xi]$. Пусть P — ортогональный проектор на $[\mathfrak{M}\xi]$. Так как $\mathfrak{M}[\mathfrak{M}\xi] \subseteq [\mathfrak{M}\xi]$, то $P \in \mathfrak{M}'$. Тем самым P коммутирует с $\mathfrak{M}''$, так что $\mathfrak{M}''[\mathfrak{M}\xi] \subseteq [\mathfrak{M}\xi]$. По лемме 2.4.13, $\xi \in [\mathfrak{M}\xi]$; следовательно, $\mathfrak{M}''\xi \subseteq [\mathfrak{M}\xi]$ и $[\mathfrak{M}''\xi] \subseteq [\mathfrak{M}\xi]$.

Конец доказательства теоремы 2.4.11. Пусть выполнено (6), $A \in \mathfrak{A}''$ и $\{\xi_n\}$ — такая последовательность в $\mathfrak{H}$, что $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$. Тогда $\oplus_n \xi_n \in \tilde{\mathfrak{H}}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ невырожденна, значит, и $\pi(\mathfrak{A})$ невырожденна. Кроме того, согласно лемме 2.4.12, $\pi(A) \in \pi(\mathfrak{A})''$. Поэтому можно применить лемму 2.4.14, заменив в ней A на $\pi(A)$, с $\mathfrak{M} = \pi(\mathfrak{A})$ и $\xi = \oplus_n \xi_n$. Следовательно, существует $B \in \mathfrak{A}$, для которого

$$\varepsilon > \|(\pi(A) - \pi(B))\xi\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|(A - B)\xi_n\|^2\right]^{1/2},$$

т. е. A принадлежит σ-сильному замыканию $\mathfrak{A}$. Значит, $A \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'' \subseteq \mathfrak{A}$.

Следствие 2.4.15 (теорема фон Неймана о плотности). *Всякая невырожденная $*$-алгебра $\mathfrak{A}$ операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, плотна в $\mathfrak{A}''$ в слабой, сильной, сильной$*$, σ-слабой, σ-сильной и σ-сильной$*$ топологиях.*

Доказательство. Если $\overline{\mathfrak{A}}$ обозначает замыкание $\mathfrak{A}$ в любой из названных топологий, то $\overline{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{A}'$, а потому $\overline{\mathfrak{A}}'' = \mathfrak{A}''$. Но, согласно теореме 2.4.11, $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}''$.

Теперь мы установим полезный результат, который позволяет сразу же усилить следствие 2.4.15 [1].

Теорема 2.4.16 (теорема Капланского о плотности). *Если $\mathfrak{A}$ — самосопряженная алгебра операторов в гильбертовом пространстве, то ее единичный шар σ-сильно* плотен в единичном шаре алгебры, полученной слабым замыканием $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — слабое замыкание $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{M}_1$ — единичные шары алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Будем обозначать совокупность самосопряженных элементов подмножества $\mathfrak{N}$ в $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ через $\mathfrak{N}_{sa}$. Очевидно, шар $\mathfrak{A}_1$ плотен по норме в единичном шаре замыкания $\mathfrak{A}$ по норме, так что без ограничения общности можно считать $\mathfrak{A}$ C^*-алгеброй.

По теореме 2.4.11 она σ-сильно* плотна в $\mathfrak{M}$, так что ее подмножество $\mathfrak{A}_{sa}$ будет σ-сильно плотно в $\mathfrak{M}_{sa}$ (применяем теорему 2.4.11, заменив $\mathfrak{H}$ на $[\mathfrak{A}\mathfrak{H}] \subseteq \mathfrak{H}$). Вещественная функция $t \longmapsto 2t(1+t^2)^{-1}$ строго возрастает от -1 до 1 на промежутке $[-1, 1]$, принимая все значения из $[-1, 1]$. Поэтому функция f: $\mathcal{L}(\mathfrak{H})_{sa} \longmapsto \mathcal{L}(\mathfrak{H})_{sa}$, которая A сопоставляет $f(A) = 2A(\mathbb{1}+A^2)^{-1}$, для всякой C^*-подалгебры $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ отображает $\mathfrak{B}_{sa}$ в $\mathfrak{B}_{1\,sa}$. Более того, f отображает $\mathfrak{B}_{1sa}$ на себя взаимно-однозначно. Следовательно, если f непрерывна в σ-сильной топологии, то $\mathfrak{A}_{1sa} = f(\mathfrak{A}_{sa})$ окажется σ-сильно плотно в $\mathfrak{M}_{1sa} = f(\mathfrak{M}_{sa})$.

Тождества, справедливые при всех $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})_{sa}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(A) - f(B)) &= (\mathbb{1}+A^2)^{-1}[A(\mathbb{1}+B^2) - (\mathbb{1}+A^2)B](\mathbb{1}+B^2)^{-1} \\ &= (\mathbb{1}+A^2)^{-1}(A-B)(\mathbb{1}+B^2)^{-1} \\ &\qquad + (\mathbb{1}+A^2)^{-1}A(B-A)B(\mathbb{1}+B^2)^{-1} \\ &= (\mathbb{1}+A^2)^{-1}(A-B)(\mathbb{1}+B^2)^{-1} + \frac{1}{4}f(A)(B-A)f(B)\end{aligned}$$

позволяют заключить, что функция f непрерывна (см. предложение 2.4.1).

Для завершения доказательства введем гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$. Каждый оператор $A \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{H}})$ представим 2×2-матрицей (A_{ij}), $i, j = 1, 2$ Пусть $\tilde{\mathfrak{A}}$ (соотв. $\tilde{\mathfrak{M}}$) состоит из таких операторов $A \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{H}})$, для которых $A_{ij} \in \mathfrak{A}$, $i, j = 1, 2$ (соотв. $A_{ij} \in \mathfrak{M}$). Ясно, что $\tilde{\mathfrak{A}}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$ — самосопряженные алгебры в $\tilde{\mathfrak{H}}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$ слабо плотна в $\tilde{\mathfrak{M}}$ Теперь выберем $B \in \mathfrak{M}$ с $\|B\| \leqslant 1$ и зададим $\tilde{B} \in \tilde{\mathfrak{M}}$ равенством

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\tilde{B}^* = \tilde{B}$ и $\|\tilde{B}\| \leqslant 1$. Первая часть доказательства показывает, что найдутся такие операторы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{A}}_1$$

---

[1] А именно, элемент $A \in \overline{\mathfrak{A}}$ можно аппроксимировать в любой из названных топологий элементами $A_\alpha \in \mathfrak{A}$ с $\|A_\alpha\| \leqslant \|A\|$. — *Прим. перев.*

с $A_{12} = A_{21}^*$, которые σ-сильно сходятся к $\tilde{B}$. Соответствующие A_{12} будут σ-сильно сходиться к B, а $A_{12}^* = A_{21}$ одновременно σ-сильно сходятся к B^*. Таким образом, A_{12} будут сходиться к B также и σ-сильно*, и при этом $\|A_{12}\| \leqslant \leqslant \|\tilde{A}\| \leqslant 1$.

2.4.3. Нормальные состояния и преддвойственное пространство

Если мера μ на X σ-конечна, то элементы $f \in L^\infty(X, d\mu)$, рассматриваемые как операторы умножения в гильбертовом пространстве $L^2(X, d\mu)$, образуют алгебру фон Неймана. Пространство $L^\infty(X, d\mu)$ сопряжено к банахову пространству $L^1(X, d\mu)$, однако $L^1(X, d\mu)$ не совпадает с сопряженным к $L^\infty(X, d\mu)$ банаховым пространством, образуя в нем замкнутое по норме подпространство. В этом пункте мы опишем аналогичное подмножество сопряженного пространства произвольной алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ и изучим свойства этого подмножества, именуемого предсопряженным или преддвойственным пространством алгебры.

Определение 2.4.17. *Предсопряженное, или преддвойственное, пространство $\mathfrak{M}_*$ алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$* — это пространство всех σ-слабо непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{M}$.

Отметим, что в частном случае $\mathfrak{M} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ мы уже вводили такое определение. Если ω — любой функционал на $\mathfrak{M}$, непрерывный в локально-выпуклой топологии, индуцированной заданной топологией $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, то ω можно продолжить до непрерывного линейного функционала на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, согласно теореме Хана—Банаха (теорема 2.3.22Б). Тем самым, в силу предложения 2.4.6, можно заменить в определении 2.4.17 «σ-слабо» на «σ-сильно*», и, кроме того, все элементы $\omega \in \mathfrak{M}_*$ представимы в виде

$$\omega(A) = \sum_n (\xi_n, A\eta_n),$$

где $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$ и $\sum_n \|\eta_n\|^2 < \infty$.

Предложение 2.4.18. *Преддвойственное пространство $\mathfrak{M}_*$ алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ по отношению к норме из $\mathfrak{M}^*$ банахово. Пространство $\mathfrak{M}$ ставится в двойственность пространству $\mathfrak{M}_*$ билинейной формой*

$$(A, \omega) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_* \longmapsto \omega(A).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}^\perp$ состоит из элементов $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$, которые ортогональны $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\perp\perp}$, поскольку $\mathfrak{M}$ — это σ-слабо замкнутое подпространство в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Но теорема Хана — Банаха обеспечивает возможность продолжить любой элемент $\mathfrak{M}_*$ до элемента $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$. Кроме того, сужение всякого элемента $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$ задает элемент из $\mathfrak{M}_*$. Значит, $\mathfrak{M}_*$ можно канонически отождествить с банаховым пространством $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})/\mathfrak{M}^\perp$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ двойственно этому пространству, поскольку $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ двойственно $\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$ (предложение 2.4.3).

Предложение 2.4.18 означает, что всякая алгебра фон Неймана как банахово пространство сопряжена некоторому банахову пространству. Интересно отметить, что это свойство может служить абстрактным определением алгебры фон Неймана:

Теорема (Сакаи). *C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ *-изоморфна алгебре фон Неймана тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{A}$ сопряжено некоторому банахову пространству.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим, так как в дальнейшем она нам не понадобится (см. замечания и комментарии).

Займемся теперь положительными функционалами из $\mathfrak{M}_*$.

Лемма 2.4.19. *Пусть $\{A_\alpha\}$ — возрастающая сеть в $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})_+$, ограниченная сверху некоторым элементом из $\mathscr{L}(\mathfrak{H})_+$. Тогда $\{A_\alpha\}$ имеет точную верхнюю грань $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и σ-сильно сходится к A.*

Доказательство. Обозначим слабое замыкание множества, состоящего из всех A_β с $\beta > \alpha$, через $\mathfrak{K}_\alpha$. Слабая компактность $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$ гарантирует существование хотя бы одного элемента A в $\bigcap_\alpha \mathfrak{K}_\alpha$. При всяком A_α множество таких $B \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})_+$, что $B \geqslant A_\alpha$, будет σ-слабо замкнутым множеством, содержащим $\mathfrak{K}_\alpha$; поэтому $A \geqslant A_\alpha$. Значит, A мажорирует $\{A_\alpha\}$ и содержится в слабом замыкании $\{A_\alpha\}$. Если B — другой оператор, мажорирующий множество $\{A_\alpha\}$, то он мажорирует и его слабое замыкание, так что $B \geqslant A$; иначе говоря, A — точная верхняя грань $\{A_\alpha\}$. Наконец, для $\xi \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}\|(A - A_\alpha)\xi\|^2 &\leqslant \|A - A_\alpha\| \, \|(A - A_\alpha)^{1/2}\xi\|^2 \\ &\leqslant \|A\| (\xi, (A - A_\alpha)\xi) \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Но сильная и σ-сильная топологии совпадают на $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})$; этим завершается доказательство. [1]

Определение 2.4.20. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана и ω — положительный линейный функционал на $\mathfrak{M}$. Если для любой возрастающей сети $\{A_\alpha\}$ в $\mathfrak{M}_+$, имеющей верхнюю грань, выполняется равенство [2] $\omega(\mathrm{l.\,u.\,b.}_\alpha A_\alpha) = \mathrm{l.\,u.\,b.}_\alpha \omega(A_\alpha)$, то ω называется *нормальным*.

Теорема 2.4.21. *Пусть ω — состояние на алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$, действующей в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Эквивалентны следующие условия:*

(1) *ω — нормальное состояние;*

(2) *ω непрерывно в σ-слабой топологии;*

(3) *существует такая матрица плотности ρ, т. е. положительный оператор в $\mathfrak{H}$, имеющий след $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$, что*

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A).$$

---

[1] Предложение 2.2.13, а) позволяет заменить в условии леммы $\mathscr{L}_1(\mathfrak{H})_+$ на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})_+$. — *Прим. перев.*

[2] Ниже l. u. b. — сокращение от least upper bound (точная верхняя грань). — *Прим. ред.*

Доказательство. Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 2.4.3, а (2) $\Rightarrow$ (1) — из леммы 2.4.19. Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Если ω является σ-слабо непрерывным, то существуют такие последовательности векторов $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$, для которых $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$, $\sum_n \|\eta_n\|^2 < \infty$ и $\omega(A) = \sum_n (\xi_n, A\eta_n)$. Введем $\tilde{\mathfrak{H}} = \oplus_{n=1}^{\infty}\mathfrak{H}$ и зададим представление π алгебры $\mathfrak{M}$ на $\tilde{\mathfrak{H}}$, полагая $\pi(A)(\oplus_n\psi_n) = \oplus_n(A\psi_n)$. Пусть $\xi = \oplus_n\xi_n$, $\eta = \oplus_n\eta_n$; тогда $\omega(A) = (\xi, \pi(A)\eta)$. Учитывая, что $\omega(A)$ вещественно при $A \in \mathfrak{M}_+$, получаем

$$\begin{aligned}
4\omega(A) &= 2(\xi, \pi(A)\eta) + 2(\xi, \pi(A^*)\eta)\\
&= 2(\xi, \pi(A)\eta) + 2(\eta, \pi(A)\xi)\\
&= (\xi+\eta, \pi(A)(\xi+\eta)) - (\xi-\eta, \pi(A)(\xi-\eta))\\
&\leqslant (\xi+\eta, \pi(A)(\xi+\eta)).
\end{aligned}$$

Следовательно, согласно теореме 2.3.19, найдется такой положительный оператор $T \in \pi(\mathfrak{M})'$, что $0 \leqslant T \leqslant \mathbb{1}/2$ и

$$(\xi, \pi(A)\eta) = (T(\xi+\eta), \pi(A)T(\xi+\eta)) = (\psi, \pi(A)\psi).$$

Всякий элемент $\psi \in \tilde{\mathfrak{H}}$ имеет вид $\psi = \oplus_n\psi_n$, поэтому

$$\omega(A) = \sum_n (\psi_n, A\psi_n), \quad A \in \mathfrak{M}.$$

Правая часть этого равенства представляет собой σ-слабо непрерывный положительный функционал, определенный на всем $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, так что ω имеет продолжение $\tilde{\omega}$ на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Так как $\tilde{\omega}(\mathbb{1}) = 1$, то $\tilde{\omega}$ — состояние. Тем самым, в силу предложения 2.4.3, имеется такой оператор ρ в классе операторов со следом, что $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ и

$$\tilde{\omega}(A) = \mathrm{Tr}(\rho A).$$

Пусть P — проектор ранга единица и ξ — единичный вектор, порождающий его область значений. Тогда

$$(\xi, \rho\xi) = \mathrm{Tr}(P\rho P) = \mathrm{Tr}(\rho P) = \tilde{\omega}(P) \geqslant 0.$$

Значит, ρ положителен.

Теперь займемся импликацией (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что ω — нормальное состояние на $\mathfrak{M}$. Пусть $\{B_\alpha\}$ — возрастающая сеть элементов из $\mathfrak{M}_+$, и при всех α пусть $\|B_\alpha\| \leqslant 1$, а все отображения $A \mapsto \omega(AB_\alpha)$ являются σ-сильно непрерывными. С помощью леммы 2.4.19 можно определить оператор [1]

$$B = \underset{\alpha}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\, B_\alpha = \sigma\text{-strong}\lim_\alpha B_\alpha.$$

Тогда $0 \leqslant B \leqslant \mathbb{1}$ и $B \in \mathfrak{M}$. Но для всех $A \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}
|\omega(AB - AB_\alpha)|^2 &= |\omega(A(B-B_\alpha)^{1/2}(B-B_\alpha)^{1/2})|\\
&\leqslant \omega(A(B-B_\alpha)A^*)\,\omega(B-B_\alpha) \leqslant \|A\|^2\omega(B-B_\alpha).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\omega(\cdot B) - \omega(\cdot B_\alpha)\| \leqslant (\omega(B-B_\alpha))^{1/2}).$$

Но ω нормально, поэтому $\omega(B - B_\alpha) \to 0$ и сеть функционалов $\omega(\cdot B_\alpha)$ сходится к $\omega(\cdot B)$ по норме. Пространство $\mathfrak{M}_*$ банахово, так что $\omega(\cdot B) \in \mathfrak{M}_*$. Применяя теперь лемму Цорна, можно выбрать максимальный элемент $P \in$

---

[1] Ниже σ-strong обозначает σ-сильный. — *Прим. ред.*

$\in \mathfrak{M}_+ \cap \mathfrak{M}_1$, для которого отображение $A \longmapsto \omega(AP)$, $A \in \mathfrak{M}$, σ-сильно непрерывно. Если $P = \mathbb{1}$, то теорема доказана. Поэтому допустим, что $P \neq \mathbb{1}$, и придем к противоречию. Положим $P' = \mathbb{1} - P$ и выберем $\xi \in \mathfrak{H}$ так, чтобы $\omega(P') < (\xi, P'\xi)$. Если $\{B_\alpha\}$ — возрастающая сеть в $\mathfrak{M}_+$, для которой $B_\alpha \leqslant P'$, $\omega(B_\alpha) \geqslant (\xi, B_\alpha\xi)$ и $B = \text{l. u. b.}_\alpha B_\alpha = \sigma\text{-strong} \lim_\alpha B_\alpha$, то $B \in \mathfrak{M}_+$, $B \leqslant P'$ и $\omega(B) = \sup \omega(B_\alpha) \geqslant \sup(\xi, B_\alpha\xi) = (\xi, B\xi)$. Тогда, согласно лемме Цорна, можно указать максимальный элемент $B \in \mathfrak{M}_+$, для которого $B \leqslant P'$ и $\omega(B) \geqslant (\xi, B\xi)$. Пусть $Q = P' - B$. Ясно, что $Q \in \mathfrak{M}_+$ и $Q \neq 0$ (поскольку $\omega(P') < (\xi, P'\xi)$), а если $A \in \mathfrak{M}_+$, $A \leqslant Q$, $A \neq 0$, то $\omega(A) < (\xi, A\xi)$, ибо B максимален.

Для всякого $A \in \mathfrak{M}$

$$QA^*AQ \leqslant \|A\|^2 Q^2 \leqslant \|A\|^2 \|Q\| Q.$$

Тем самым $(QA^*AQ)/\|A\|^2\|Q\| \leqslant Q$ и $\omega(QA^*AQ) < (\xi, QA^*AQ\xi)$. Комбинируя это с неравенством Коши — Шварца, получаем

$$|\omega(AQ)|^2 \leqslant \omega(\mathbb{1})\, \omega(QA^*AQ) < (\xi, QA^*AQ\xi) = \|AQ\xi\|^2.$$

Значит, отображения $A \longmapsto \omega(AQ)$ и $A \longmapsto \omega(A(P+Q))$ оба σ-сильно непрерывны, но это противоречит максимальности P, так как $P + Q \leqslant \mathbb{1}$.

Отметим, что понятие нормального состояния позволяет дать еще одну абстрактную характеризацию алгебр фон Неймана.

Теорема (Кадисон). *Для всякой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ следующие два условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{A}$ *-изоморфна некоторой алгебре фон Неймана;*

(2) *каждая ограниченная возрастающая сеть элементов из $\mathfrak{A}$ имеет точную верхнюю грань, и для любого положительного ненулевого $A \in \mathfrak{A}$ найдется такое нормальное состояние ω на $\mathfrak{A}$, что $\omega(A) \neq 0$.*

Вследствие тождества поляризации всякий σ-слабо непрерывный линейный функционал является линейной комбинацией четырех σ-слабо непрерывных состояний. Таким образом, теорема 2.4.21 показывает, что σ-слабая топология зависит только от структуры порядка в алгебре фон Неймана, а не от конкретного представления алгебры операторами в гильбертовом пространстве. В результате изоморфизмы и гомоморфизмы между алгебрами фон Неймана будут автоматически непрерывны в σ-слабой топологии. Прежде чем дать строгую формулировку этого утверждения, необходимо охарактеризовать σ-слабо замкнутые идеалы алгебры фон Неймана.

Предложение 2.4.22. *Если $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана и $\mathfrak{I}$ — ее σ-слабо замкнутый двусторонний идеал, то существует такой проектор $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$, что $\mathfrak{I} = \mathfrak{M}E$.*

Доказательство. Прежде всего убедимся, что $\mathfrak{I}$ самосопряжен. Действительно, если $A = U|A|$ — полярное разложение элемента $A \in \mathfrak{I}$, то $A^*A \in \mathfrak{I}$ и $|A| = (A^*A)^{1/2} \in \mathfrak{I}$, так что $A^* = |A|U^* \in \mathfrak{I}$. Далее, лемма 2.4.19 показывает, что существует наибольший проектор $E \in \mathfrak{I}$. Если $\{E_\alpha\} \subset \mathfrak{I}$ — аппроксиматнвная единица, то можно положить $E = \sigma\text{-strong}\lim_\alpha E_\alpha$. Тем самым E оказывается единицей для $\mathfrak{J}$. Значит, для $A \in \mathfrak{M}$

$$AE = (AE)\,E = E\,(AE) = (EA)\,E = E\,(EA) = EA.$$

Таким образом, $E \in \mathfrak{M}'$, т. е. $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$.

Теорема 2.4.23. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — алгебры фон Неймана и τ — произвольный *-гомоморфизм $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$. Тогда τ непрерывен и в σ-слабой, и в σ-сильной топологиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\{A_\alpha\}$ — возрастающая сеть в $\mathfrak{M}_+$ и[1] $A = \text{l. u. b.}_\alpha A_\alpha = \sigma\text{-weak}\lim_\alpha A_\alpha$. Поскольку τ сохраняет положительность и является отображением на, $\tau(A) = \text{l. u. b.}_\alpha \tau(A_\alpha) = \sigma\text{-weak}\lim_\alpha \tau(A_\alpha)$. Следовательно, по нормальному состоянию ω на $\mathfrak{N}$ определяется нормальное состояние $\omega\circ\tau$ на $\mathfrak{M}$. Всякий σ-слабо непрерывный функционал представим в виде линейной комбинации σ-слабо непрерывных состояний. Из теоремы 2.4.21 вытекает, что $\omega\circ\tau$ будет σ-слабо непрерывным функционалом на $\mathfrak{M}$, если ω есть σ-слабо непрерывный функционал на $\mathfrak{N}$. Таким образом, отображение τ σ-слабо непрерывно.

Далее, если A_α σ-сильно сходится к нулю, то $A_\alpha^* A_\alpha$ сходится к нулю σ-слабо. Следовательно, $\tau(A_\alpha)^*\,\tau(A_\alpha) = \tau(A_\alpha^* A_\alpha)$ сходится σ-слабо к 0 и $\tau(A_\alpha)$ сходится σ-сильно к 0. [2]

Теорема 2.4.24. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана, ω — нормальное состояние на $\mathfrak{M}$ и $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$ — соответствующее циклическое представление. Тогда $\pi(\mathfrak{M})$ — алгебра фон Неймана и π нормально в том смысле, что $\pi(\text{l. u. b.}_\alpha A_\alpha) = \text{l. u. b.}_\alpha (\pi(A_\alpha))$ для всякой ограниченной возрастающей сети $\{A_\alpha\}$ в $\mathfrak{M}_+$.*

Доказательство. Если $A_\alpha \nearrow A$ в $\mathfrak{M}_+$, то $\pi(A_\alpha)$ образуют возрастающую сеть и $\pi(A_\alpha) \leqslant \pi(A)$ при всех α. Но так как ω нормально, то для любого $B \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}(\pi(B)\,\Omega,\ \pi(A)\,\pi(B)\,\Omega) &= \omega(B^*AB) = \omega(\text{l. u. b.}_\alpha B^*A_\alpha B) = \\ &= \text{l. u. b.}_\alpha \omega(B^*A_\alpha B) = \text{l. u. b.}_\alpha (\pi(B)\,\Omega,\ \pi(A_\alpha)\,\pi(B)\,\Omega)\end{aligned}$$

(ибо $B^*A_\alpha B \nearrow BAB$). Нормальность π вытекает теперь из того, что множество $\pi(\mathfrak{M})\,\Omega$ плотно в $\mathfrak{H}$ по норме.

Рассуждая далее, как при доказательстве теоремы 2.4.23, убедимся, что π как отображение из $\mathfrak{M}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ будет σ-слабо непрерывно. Поэтому ядро $\mathfrak{J}$ отображения π является σ-слабо замкнутым идеалом в $\mathfrak{M}$. По предложению 2.4.22 существует такой проектор $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$, что $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}E$.

Следовательно, соотношением $\pi(A(\mathbb{1} - E)) = \pi(A)$ задается точное представление алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}(\mathbb{1} - E)$, т. е. можно, не теряя общности, считать, что и π точно. В таком случае π изометрично, по предложению 2.3.3. Значит, π отображает $\mathfrak{M}_1$ на $\pi(\mathfrak{M})_1$. Из σ-слабой компактности $\mathfrak{M}_1$ и σ-слабой непрерывности π следует σ-слабая компактность и, в частности, σ-слабая замкнутость $\pi(\mathfrak{M})_1$. Теорема 2.4.11 показывает теперь, что $\pi(\mathfrak{M})$ — алгебра фон Неймана.

---

[1] Ниже σ-weak обозначает σ-слабый. — *Прим. ред.*

[2] Ср. с предложением 2.4.6. — *Прим. перев.*

2.4.4. Квазиэквивалентность представлений

Ранее, в конце пункта 2.3.1, мы ввели понятие унитарной эквивалентности двух представлений C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. В соответствии с теоремой 2.3.16, $(\mathfrak{H}_1, \pi_1)$ и $(\mathfrak{H}_2, \pi_2)$ унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда единичные векторы пространства $\mathfrak{H}_1$ и единичные векторы пространства $\mathfrak{H}_2$ определяют один и тот же набор состояний алгебры $\mathfrak{A}$. Понятие квазиэквивалентности представлений несколько слабее, но оно более естественно в плане физических приложений.

Определение 2.4.25. Если π — представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, то состояние ω на $\mathfrak{A}$ называется *π-нормальным*, если существует такое нормальное состояние ρ алгебры $\pi(\mathfrak{A})''$, что

$$\omega(A) = \rho(\pi(A))$$

для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Два представления π_1 и π_2 C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ называются *квазиэквивалентными*, если каждое π_1-нормальное состояние π_2-нормально, и наоборот; записывается это свойство так: $\pi_1 \approx \pi_2$.

Для представления $(\mathfrak{H}, \pi)$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и кардинального числа n символом $n\pi$ обозначим представление [1] $\mathfrak{A}$ в пространстве $n\mathfrak{H} = \bigoplus_{k=1}^{n}\mathfrak{H}$, задаваемое формулой

$$n\pi(A)\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \bigoplus_{k=1}^{n} (\pi(A)\xi_k).$$

В лемме 2.4.12 мы доказали, что $(n\pi(\mathfrak{A}))''$ и $\pi(\mathfrak{A})''$ изоморфны, причем соответствующий изоморфизм является продолжением отображения $n\pi(A) \longmapsto \pi(A)$, $A \in \mathfrak{A}$.

Следующая теорема показывает среди прочего, что квазиэквивалентность представлений — это то же самое, что их унитарная эквивалентность с точностью до кратности.

Теорема 2.4.26. *Пусть $(\mathfrak{H}_1, \pi_1)$ и $(\mathfrak{H}_2, \pi_2)$ — невырожденные представления C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Следующие условия равносильны:*

(1) определен такой изоморфизм τ: $\pi_1(\mathfrak{A})'' \longmapsto \pi_2(\mathfrak{A})''$, что $\tau(\pi_1(A)) = \pi_2(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$;

(2) $\pi_1 \approx \pi_2$, т. е. π_1-нормальные и π_2-нормальные состояния совпадают;

---

[1] Представление $n\pi$ (и всякое $\pi_1 \simeq n\pi$) называется *кратным* представления π. — *Прим. перев.*

(3) *существуют такие кардинальные числа n и m, проекторы $E_1' \in n\pi_1(\mathfrak{A})'$, $E_2' \in m\pi_2(\mathfrak{A})'$ и унитарные операторы U_1: $\mathfrak{H}_1 \mapsto E_2'(m\mathfrak{H}_2)$, U_2: $\mathfrak{H}_2 \mapsto E_1'(n\mathfrak{H}_1)$, что для всех $A \in \mathfrak{A}$*

$$U_1\pi_1(A)U_1^* = m\pi_2(A)E_2',$$

$$U_2\pi_2(A)U_2^* = n\pi_1(A)E_1';$$

(4) *существует такое кардинальное число k, что $k\pi_1 \simeq k\pi_2$, т. е. π_1 и π_2 унитарно эквивалентны с точностью до кратности.*

Замечание. В этой теореме по сути дела содержатся две разные идеи; одна заключается в эквивалентности (1) $\Longleftrightarrow$ (2) и связана с самими представлениями π_1 и π_2, а другая состоит в эквивалентности (1) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) и связана со структурой изоморфизмов между алгебрами фон Неймана, в частности с вопросом об унитарной выполнимости изоморфизмов. Например, если представления π_1 и π_2 неприводимы и квазиэквивалентны, то изоморфизм τ унитарно выполним, так что π_1 и π_2 унитарно эквивалентны. Аналогично, если обе алгебры $\pi_1(\mathfrak{A})''$ и $\pi_2(\mathfrak{A})''$ обладают циклическим и отделяющим вектором, то изоморфизм τ унитарно выполним, согласно следствию 2.5.32, так что π_1 и π_2 унитарно эквивалентны.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) сразу следует из теоремы 2.4.23.

(2) $\Rightarrow$ (3). Как показывает предложение 2.3.6, π_1 является прямой суммой циклических представлений, т. е. можно найти в $\mathfrak{H}_1$ множество $\{\xi_\alpha\}$ единичных векторов, таких что $[\pi_1(\mathfrak{A})\xi_\alpha]$ взаимно ортогональны и $\Sigma_\alpha[\pi_1(\mathfrak{A})\xi_\alpha] = \mathbb{1}$. Пусть

$$\omega_\alpha(A) = (\xi_\alpha, \pi_1(A)\xi_\alpha), \quad A \in \mathfrak{A},$$

обозначает состояние, отвечающее ξ_α. По предположению, ω_α при любом α π_2-нормально. Значит, по теореме 2.4.21, существует такая последовательность векторов $\{\eta_{\alpha,n}\}$ в $\mathfrak{H}_2$, что $\Sigma_n\|\eta_{\alpha,n}\|^2 = 1$ и

$$\omega_\alpha(A) = \sum_n (\eta_{\alpha,n}, \pi_2(A)\eta_{\alpha,n}) = (\eta_\alpha, \aleph_0\pi_2(A)\eta_\alpha)$$

для всех $A \in \mathfrak{A}$, где $\eta_\alpha = \oplus_n\eta_{\alpha,n} \in \aleph_0\mathfrak{H}_2$. Следовательно, по теореме 2.3.16, существует такой унитарный оператор U_α: $[\pi_1(\mathfrak{A})\xi_\alpha] \mapsto [\aleph_0\pi_2(\mathfrak{A})\eta_\alpha]$, что

$$U_\alpha\pi_1(A)U_\alpha^* = \aleph_0\pi_2(A)[\aleph_0\pi_2(\mathfrak{A})\eta_\alpha].$$

Если k обозначает мощность $\{\alpha\}$, то можно построить изометрию $U_1 = \Sigma_\alpha U_\alpha$ из $\mathfrak{H}_1 = \oplus_\alpha[\pi_1(\mathfrak{A})\xi_\alpha]$ в $k\aleph_0\mathfrak{H}_2 = \oplus_\alpha(\aleph_0\mathfrak{H}_2)$ с областью значений

$$\bigoplus_\alpha [\aleph_0\pi_2(\mathfrak{A})\eta_\alpha] = E_2'\Big(\bigoplus_\alpha (\aleph_0\mathfrak{H}_2)\Big),$$

причем

$$U_1\pi_1(A)U_1^* = k\aleph_0\pi_2(A)E_2'.$$

Тем самым проверена первая часть условия (3); вторая получается переменой ролей π_1 и π_2.

(3) $\Rightarrow$ (4). Можно выбрать n и m в (3) бесконечными, тогда для $k = \sup\{n, m\}$ имеем $kn = km = k$. Из (3) выводим, что $k\pi_1$ унитарно эквивалентно некоторому подпредставлению представления $mk\pi_2 = k\pi_2$, а $k\pi_2$ унитарно эквивалентно подпредставлению представления $nk\pi_1 = k\pi_1$. Теорема Кантора — Бернштейна позволяет заключить, что $k\pi_1$ и $k\pi_2$ унитарно эквивалентны.

(4) $\Rightarrow$ (1) немедленно вытекает из леммы 2.4.12.

Состояние ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ называется *примарным* (или *факторным*), если $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — фактор, где π_ω — ассоциированное с ω циклическое представление. Два состояния ω_1 и ω_2 называются *квазиэквивалентными*, если π_{ω_1} и π_{ω_2} квазиэквивалентны (в случае абелевой алгебры $\mathfrak{A}$ это равносильно эквивалентности вероятностных мер, соответствующих ω_1 и ω_2). Следующее предложение полезно в случае квазилокальных алгебр (см. раздел 2.6).

Предложение 2.4.27. *Пусть ω_1 и ω_2 — факторные состояния C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Они квазиэквивалентны в том и только том случае, когда состояние $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ факторное.*

Доказательство. Рассмотрим циклические представления $(\mathfrak{H}_i, \pi_i, \Omega_i)$, отвечающие ω_i, и введем $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, $\Omega = (1/\sqrt{2})(\Omega_1 \oplus \Omega_2)$, $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ и $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. Для $A \in \mathfrak{A}$ имеем $\omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$, т. е. $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ можно отождествить с подпредставлением представления $(\mathfrak{H}, \pi)$, определенным проектором $E' = [\pi(\mathfrak{A})\Omega] \in \pi(\mathfrak{A})'$.

Допустим сперва, что π_1 и π_2 квазиэквивалентны. По теореме 2.4.26 существует такой изоморфизм τ: $\pi_1(\mathfrak{A})'' \mapsto \pi_2(\mathfrak{A})''$, что $\tau(\pi_1(A)) = \pi_2(A)$. Так как всякий элемент из $\pi(\mathfrak{A})''$ является σ-слабым пределом элементов вида $\pi_1(A) \oplus \pi_2(A) = \pi_1(A) \oplus \tau(\pi_1(A))$, а изоморфизм τ σ-слабо непрерывен, то $A \longmapsto A \oplus \tau(A)$ устанавливает изоморфизм $\pi_1(\mathfrak{A})''$ и $\pi(\mathfrak{A})''$. Следовательно, $\pi(\mathfrak{A})''$ — фактор. Но $A \longmapsto AE'$ является σ-слабо* непрерывным гомоморфизмом $\pi(\mathfrak{A})''$ на $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, а $\pi(\mathfrak{A})''$ не имеет нетривиальных σ-слабо замкнутых идеалов, по предложению 2.4.22. Таким образом, алгебра $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ изоморфна $\pi(\mathfrak{A})''$, т. е. $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — фактор.

В другую сторону, предположим, что π_1 и π_2 не квазиэквивалентны. Пусть $C \in \pi(\mathfrak{A})'$ и E — ортогональный проектор в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1 \oplus \{0\}$. Мы покажем, что $CE = EC$. Достаточно показать, что $(\mathbb{1} - E)CE = 0$, ибо $\pi(\mathfrak{A})'$ — алгебра фон Неймана. Будь этот оператор ненулевым, тогда частичная изометрия U, входящая в его полярное разложение, принадлежала бы $\pi(\mathfrak{A})'$, так как $E, C \in \pi(\mathfrak{A})'$, и $UE = (\mathbb{1} - E)U = U$. Следовательно, $U\pi_1(A) = \pi_2(A)U$, т. е. U устанавливает унитарную эквивалентность подпредставления π_1 и подпредставления π_2.

Поскольку всякое подпредставление факторпредставления квазиэквивалентно самому представлению (по теореме 2.4.26, (1) и предложению 2.4.22), то $\pi_1 \approx \pi_2$, что противоречит исходной посылке. Следовательно, $CE = EC$ для любого $C \in \pi(\mathfrak{A})'$ и, значит, $E \in \pi(\mathfrak{A})''$, т. е. $E \in \pi(\mathfrak{A})'' \cap \pi(\mathfrak{A})'$. Таким образом, EE' — нетривиальный элемент в центре алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' = \pi(\mathfrak{A})''E'$ (нетривиальный, потому что $E'(\mathfrak{H}_1 \oplus \{0\}) = [\pi_1(\mathfrak{A})\Omega_1] \oplus \{0\} \neq \{0\}$ и $E'(\{0\} \oplus \mathfrak{H}_2) \neq \{0\}$, так что $0 \neq EE' \neq E'$). Тем самым $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ не будет факторным состоянием.

2.5. Модулярная теория Томиты—Такесаки и стандартные формы алгебр фон Неймана

Теорема 2.1.11, а) показывает, что абелева алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}$ изоморфна алгебре $C(X)$ на компактном хаусдорфовом пространстве X. Если ω — нормальное состояние на $\mathfrak{M}$, то по теореме Рисса об общем виде линейного функционала на X существует такая вероятностная мера μ, что $\omega(A) = \int A(x)\, d\mu(x)$ для любого $A \in \mathfrak{M}$. Отсюда немедленно следует, что, рассматривая циклическое представление $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$, ассоциированное с ω, можно отождествлять $\mathfrak{H}$ с $L^2(X, \mu)$, а вектор Ω — с функцией на X, тождественно равной 1. При этом $\pi(\mathfrak{M})$ совпадает с алгеброй $L^\infty(X, \mu)$, элементы которой действуют в $L^2(X, \mu)$ как операторы умножения на функцию. Если носителем μ является всё X, то преддвойственное пространство $\mathfrak{M}_*$ можно отождествить с $L^1(X, \mu)$. В частности, положительный функционал $\rho \in \mathfrak{M}_*$ будет представлен единственной положительной функцией из L^1, которая в свою очередь оказывается квадратом единственной положительной функции из L^2. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством положительных нормальных состояний на $\mathfrak{M}$ и множеством L^2_+ положительных функций из $L^2 (= \mathfrak{H})$. Этим соответствием можно в свою очередь воспользоваться для установления взаимно-однозначного соответствия между автоморфизмами $\mathfrak{M}$ и унитарными операторами в L^2, которые отображают положительные функции на положительные функции.

Кратко остановимся на структуре множества L^2_+. Положительные элементы образуют в L^2 замкнутый выпуклый конус, причем конус самосопряжен в том смысле, что неравенство

$$\int d\mu f g \geqslant 0$$

имеет место для всех $f \in L^2_+$ тогда и только тогда, когда $g \in L^2_+$. Абстрактное описание этого конуса мы получим, вспоминая, что $\mathfrak{M}$ является C^*-алгеброй и ее положительные элементы образуют равномерно замкнутый выпуклый конус (предложение 2.2.11). Каждый элемент этого конуса имеет вид A^*A с $A \in \mathfrak{M}$, а его L^2-представитель $\pi(A^*A)\Omega$ положителен. Слабое замыкание множества таких векторов совпадает с L^2_+. Свойство самосопряженности L^2_+ вытекает из коммутативности $\mathfrak{M}$, потому что

$$(\pi(A^*A)\Omega, \pi(B^*B)\Omega) = \omega(A^*AB^*B) = \omega((AB)^* AB) \geqslant 0.$$

В этом разделе будет показано, что подобной структурой можно наделить всякую алгебру фон Неймана $\mathfrak{M}$, обладающую точным (см. определение 2.5.4) нормальным состоянием. А именно, мы построим такое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ с «положительным самосопряженным конусом» $\mathscr{P}$, что положительные элементы из $\mathfrak{M}_*$ можно привести в соответствие с векторами из $\mathscr{P}$, а автоморфизмы $\mathfrak{M}$ будут соответствовать унитарным операторам в $\mathfrak{H}$, оставляющим $\mathscr{P}$ на месте. Хотя описание $\mathscr{P}$ в общем случае аналогично абстрактному описанию в случае абелевой $\mathfrak{M}$, имеется существенное отличие, связанное с некоммутативностью $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M}$ действует в $\mathfrak{H}$ и имеет циклический вектор Ω. Можно построить выпуклый конус в $\mathfrak{H}$ из векторов вида $A^*A\Omega$, однако для неабелевой $\mathfrak{M}$ этот конус не обязан быть самосопряженным, ибо нет причин, по которым бы для соответствующего состояния $\omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$ должно было выполняться неравенство $\omega(A^*AB^*B) \geqslant 0$. Такое свойство гарантируется для неабелевой $\mathfrak{M}$, если ω будет следом, т. е. если $\omega(AB) = \omega(BA)$ при любых $A, B \in \mathfrak{M}$. Имеет смысл сравнить эту ситуацию с абелевым случаем.

Введем оператор сопряжения (инволюцию) J в $\mathfrak{H}$, полагая

$$JA\Omega = A^*\Omega.$$

Следовое свойство ω дает нам

$$\|A\Omega\|^2 = \omega(A^*A) = \omega(AA^*) = \|A^*\Omega\|^2,$$

так что J корректно определен и может быть расширен до антиунитарного оператора (обозначаемого тем же символом). Кроме того,

$$JAJB\Omega = JAB^*\Omega = BA^*\Omega.$$

В случае абелевой $\mathfrak{M}$ эта выкладка показывает, что J осуществляет операцию инволюции $*$, т. е. $A^* = j(A)$, где $j(A) = JAJ$. В случае следа на неабелевой $\mathfrak{M}$ действие j более сложное. Например,

$$(B_1\Omega, A_1 j(A_2) B_2\Omega) = \omega(B_1^* A_1 B_2 A_2^*) = (B_1\Omega, j(A_2) A_1 B_2 \Omega),$$

откуда видно, что $j(A) \in \mathfrak{M}'$; это свойство в абелевом случае тривиально.

Пример со следом подсказывает, что в общем случае конструкция соответствующего самосопряженного конуса как множества векторов $AA^*\Omega$ предполагает модификацию $*$-операции. Следует заменить A^* на «сопряженный элемент» $j(A)$; при этом надо ожидать, что новая операция j отображает $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$. Изучение отображения $A\Omega \mapsto A^*\Omega$ служит отправным пунктом теории Томиты—Такесаки, которой посвящен пункт 2.5.2. Предварительно в пункте 2.5.1 мы введем класс алгебр, с которыми будем иметь дело в дальнейшем; этот класс важен и для приложений.

2.5.1. σ-конечные алгебры фон Неймана

Все алгебры фон Неймана, встречающиеся в квантовой статистической механике и квантовой теории поля, попадают в следующий класс:

Определение 2.5.1. Алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}$ называется *σ-конечной*, если мощность любого набора ее взаимно ортогональных проекторов не превосходит мощности счетного множества.

Отметим, в частности, что всякая алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве σ-конечна, однако обратное не справедливо, т. е. не все σ-конечные алгебры фон Неймана могут быть реализованы в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Определение 2.5.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Подмножество $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ называется *отделяющим для* $\mathfrak{M}$ (или *сепаратором*), если для $A \in \mathfrak{M}$ условие $A\xi = 0$ при всех $\xi \in \mathfrak{K}$ означает, что $A = 0$.

Напомним, что подмножество $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ называется циклическим для $\mathfrak{M}$, если $[\mathfrak{M}\mathfrak{K}] = \mathfrak{H}$. Между свойствами быть циклическим для алгебры и быть отделяющим для ее коммутанта нет разницы, как показывает

Предложение 2.5.3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{K}$ — циклическое для $\mathfrak{M}$ множество;*
(2) *$\mathfrak{K}$ — отделяющее для $\mathfrak{M}'$ множество.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что $\mathfrak{K}$ циклично для $\mathfrak{M}$, и выберем $A' \in \mathfrak{M}'$ так, чтобы $A'\mathfrak{K} = \{0\}$. Тогда для любых $B \in \mathfrak{M}$ и $\xi \in \mathfrak{K}$ имеем $A'B\xi = BA'\xi = 0$ и, следовательно, $A'\,[\mathfrak{M}\mathfrak{K}] = \{0\}$, т. е. $A' = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $\mathfrak{K}$ — сепаратор для $\mathfrak{M}'$, и положим $P' = [\mathfrak{M}\mathfrak{K}]$. Тогда P' — проектор в $\mathfrak{M}'$ и $(\mathbb{1} - P')\,\mathfrak{K} = \{0\}$. Следовательно, $\mathbb{1} - P' = 0$ и поэтому $[\mathfrak{M}\mathfrak{K}] = \mathfrak{H}$.

Определение 2.5.4. Состояние ω на алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$ называется *точным*, если $\omega(A) > 0$ для всякого ненулевого $A \in \mathfrak{M}_+$.

Пример 2.5.5. Пусть $\mathfrak{M} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ в сепарабельном $\mathfrak{H}$. Каждое нормальное состояние ω на $\mathfrak{M}$ имеет вид

$$\omega(A) = \operatorname{Tr}(\rho A),$$

где ρ — матрица плотности. Если ω точно, то $\omega(E) > 0$ для любого одномерного проектора E, т. е. $\|\rho^{1/2}\psi\| > 0$ при всех $\psi \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}$. Тем самым оператор ρ обратим (в классе плотно определенных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$). Если же, напротив, состояние ω не точно, то для некоторого ненулевого A будет $\omega(A^*A) = 0$ и, значит, $\|\rho^{1/2}A^*\psi\| = 0$ при всех $\psi \in \mathfrak{H}$, так что ρ необратим. Заметим, что в случае несепарабельного $\mathfrak{H}$ оператор ρ имеет не более чем счетное множество ненулевых собственных значений. Значит, $\omega(A)$ обратится в нуль для некоторого положительного A, т. е. ω не является точным состоянием. Таким образом, $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ будет σ-конечной алгеброй (иначе говоря, $\mathfrak{H}$ будет сепарабельным) тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ обладает точным нормальным состоянием.

Следующее предложение характеризует σ-конечные алгебры фон Неймана.

Предложение 2.5.6. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$. *Тогда эквивалентны условия:*

(1) $\mathfrak{M}$ *является* σ*-конечной алгеброй;*

(2) существует счетное подмножество в $\mathfrak{H}$, *отделяющее для* $\mathfrak{M}$;

(3) существует точное нормальное состояние на $\mathfrak{M}$;

(4) $\mathfrak{M}$ *изоморфна алгебре фон Неймана* $\pi(\mathfrak{M})$, *обладающей отделяющим и циклическим вектором.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\{\xi_\alpha\}$ — максимальное семейство векторов в $\mathfrak{H}$, такое что при $\alpha \neq \alpha'$ проекторы $[\mathfrak{M}'\xi_\alpha]$ и $[\mathfrak{M}'\xi_{\alpha'}]$ ортогональны. Семейство $\{\xi_\alpha\}$ счетно, поскольку проектор $[\mathfrak{M}'\xi_\alpha]$ лежит в $\mathfrak{M}$ (это наименьший проектор в $\mathfrak{M}$, область значений которого содержит ξ_α). Из свойства максимальности $\{\xi_\alpha\}$ вытекает, что

$$\sum_\alpha [\mathfrak{M}'\xi_\alpha] = \mathbb{1}.$$

Но это означает, что $\{\xi_\alpha\}$ — циклическое для $\mathfrak{M}'$ множество, и в силу предложения 2.5.3 оно является отделяющим для $\mathfrak{M}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Выберем последовательность векторов ξ_n так, чтобы множество $\{\xi_n\}$ оказалось сепаратором для $\mathfrak{M}$ и $\Sigma_n \|\xi_n\|^2 = 1$. Зададим ω равенством

$$\omega(A) = \sum_n (\xi_n, A\xi_n).$$

Состояние ω является σ-слабо непрерывным, а значит, нормальным (теорема 2.4.21). Если $\omega(A^*A) = 0$, то $0 = (\xi_n, A^*A\xi_n) = \|A\xi_n\|^2$ при всех n, так что $A = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть ω — точное нормальное состояние на $\mathfrak{M}$ и $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$ — соответствующее циклическое представление. По теореме 2.4.24, $\pi(\mathfrak{M})$ — алгебра фон Неймана. Если для некоторого $A \in \mathfrak{M}$ выполняется равенство $\pi(A)\Omega = 0$, то $\omega(A^*A) = \|\pi(A)\Omega\|^2 = 0$, следовательно, $A^*A = 0$ и $A = 0$. Этим доказаны и точность представления π, и свойство вектора Ω быть отделяющим для $\pi(\mathfrak{M})$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть Ω — отделяющий (и циклический) вектор для $\pi(\mathfrak{M})$, и пусть $\{E_\alpha\}$ — семейство взаимно ортогональных проекторов в $\mathfrak{M}$. Полагаем $E = \Sigma_\alpha E_\alpha$. Тогда

$$\|\pi(E)\Omega\|^2 = (\pi(E)\Omega, \pi(E)\Omega) = \sum_{\alpha, \alpha'} (\pi(E_\alpha)\Omega, \pi(E_{\alpha'})\Omega) = \sum_\alpha \|\pi(E_\alpha)\Omega\|^2,$$

согласно лемме 2.4.19. Так как $\Sigma_\alpha \|\pi(E_\alpha)\Omega\|^2 < +\infty$, то среди $\pi(E_\alpha)\Omega$ встретится не более счетного множества ненулевых; поэтому то же верно и для E_α.

2.5.2. Модулярная группа

Если алгебра фон Неймана σ-конечна, то, согласно предложению 2.5.6, можно, не ограничивая общности, считать, что эта алгебра $\mathfrak{M}$ имеет отделяющий и циклический вектор Ω. Тогда отображение $A \in \mathfrak{M} \mapsto A\Omega \in \mathfrak{H}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathfrak{M}$ и плотным подмножеством $\mathfrak{M}\Omega$ пространства $\mathfrak{H}$. Этим соответствием можно воспользоваться для того, чтобы преобразовать алгебраические операции на $\mathfrak{M}$ в операции на $\mathfrak{M}\Omega$. Основная тема данного пункта — изучение антилинейного оператора S_0 на $\mathfrak{M}\Omega$, сопоставленного операции* на алгебре $\mathfrak{M}$, а также ряда других операторов, связанных с S_0.

Прежде чем собственно приступить к этой теме, дадим одно определение и докажем одну лемму.

Определение 2.5.7. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Замкнутый оператор A в $\mathfrak{H}$ называется *присоединенным к* $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}'D(A) \subseteq D(A)$ и $AA' \supseteq A'A$ для всех $A' \in \mathfrak{M}'$; в таком случае употребляется запись $A\eta\mathfrak{M}$.

Связи между элементами алгебры и присоединенными к ней операторами посвящена следующая

Лемма 2.5.8. *Предположим, что A — замкнутый оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$. Если $A = U|A|$ — полярное разложение A, то U и спектральные проекторы $|A|$ лежат в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть U' — унитарный элемент $\mathfrak{M}'$. Тогда

$$U'UU'^*U'|A|U'^* = U'U|A|U'^* = U|A|,$$

так что, в силу единственности полярного разложения,

$$U'UU'^* = U$$

и

$$U'|A|U'^* = |A|.$$

Предпоследнее равенство означает, что $U \in \mathfrak{M}$. Из последнего равенства вытекает, что спектральное разложение

$$|A| = \int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda)$$

оператора $|A|$ можно переписать так:

$$\int_0^\infty \lambda U' \, dE(\lambda) U'^* = U' \int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda) \, U'^* = \int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda).$$

В силу единственности спектрального разложения $|A|$,

$$U'E(\lambda)\, U'^* = E(\lambda),$$

т. е. $E(\lambda) \in \mathfrak{M}$ при всех $\lambda \geqslant 0$.

Займемся теперь антилинейным оператором S_0.

Во введении был рассмотрен специальный случай следового состояния. Оказалось, что в случае следа оператор J, отвечающий S_0, антиунитарен и $J\mathfrak{M}J \subseteq \mathfrak{M}'$. В частности, $J\mathfrak{M}\Omega \subseteq \mathfrak{M}'\Omega$. Но, кроме того, $\mathfrak{M}\Omega = J(J\mathfrak{M}\Omega) \subseteq J\mathfrak{M}'\Omega$. Таким образом, исследуя J или S_0, естественно задать некий дополнительный оператор на $\mathfrak{M}'\Omega$, который должен соответствовать обратной операции к операции сопряжения. Итак, мы займемся изучением двух антилинейных операторов S_0 и F_0, один из них связан с $\mathfrak{M}\Omega$, а другой — с $\mathfrak{M}'\Omega$.

Предложение 2.5.3 показывает, что вектор Ω, циклический и отделяющий для $\mathfrak{M}$, будет циклическим и отделяющим также для $\mathfrak{M}'$. Поэтому антилинейные операторы[1] S_0 и F_0, определенные равенствами $S_0 A\Omega = A^*\Omega$ для $A \in \mathfrak{M}$ и $F_0 A'\Omega = A'^*\Omega$ для $A' \in \mathfrak{M}'$, оба корректно заданы на плотных областях определения $D(S_0) = \mathfrak{M}\Omega$ и $D(F_0) = \mathfrak{M}'\Omega$.

Предложение 2.5.9. *Определенные выше операторы S_0 и F_0 замыкаемы и*

$$S_0^* = \overline{F}_0, \quad F_0^* = \overline{S}_0;$$

здесь черта обозначает замыкание оператора. Далее, для всякого $\psi \in D(\overline{S}_0)$ существует такой замкнутый оператор Q в $\mathfrak{H}$, что

$$Q\Omega = \psi, \quad Q^*\Omega = \overline{S}_0\psi$$

и Q присоединен к $\mathfrak{M}$. Аналогичный результат справедлив и для $\overline{F}_0$.

Доказательство. Для $A \in \mathfrak{M}$, $A' \in \mathfrak{M}'$ имеем

$$(A'\Omega, S_0 A\Omega) = (A'\Omega, A^*\Omega) = (A\Omega, A'^*\Omega) = (A\Omega, F_0 A'\Omega).$$

Значит, $F_0 \subseteq S_0^*$. Поэтому оператор S_0^* плотно определен и S_0 замыкаем. Аналогично, $S_0 \subseteq F_0^*$.

Для проверки совпадения S_0^* с замыканием F_0 выберем сначала $\xi \in D(S_0^*)$ и положим $\psi = S_0^*\xi$. Тогда для $A \in \mathfrak{M}$

$$(A\Omega, \psi) = (A\Omega, S_0^*\xi) = (\xi, S_0 A\Omega) = (\xi, A^*\Omega).$$

Далее введем операторы Q_0 и $Q_0^\dagger$:

$$Q_0\colon A\Omega \longmapsto A\xi, \quad Q_0^\dagger\colon A\Omega \longmapsto A\psi$$

для всех $A \in \mathfrak{M}$. Предыдущее соотношение позволяет заключить, что для любых $A, B \in \mathfrak{M}$

$$(B\Omega, Q_0 A\Omega) = (B\Omega, A\xi) = (A^*B\Omega, \xi)$$
$$= (\psi, B^*A\Omega) = (B\psi, A\Omega) = (Q_0^\dagger B\Omega, A\Omega).$$

Следовательно, $Q_0^\dagger \subseteq Q_0^*$, и оператор Q_0 допускает замыкание. Пусть $Q' = \overline{Q_0}$.

Если $A, B \in \mathfrak{M}$, то

$$Q_0 AB\Omega = AB\xi = AQ_0 B\Omega.$$

Тем самым для замкнутого Q' имеем

$$Q'A \supseteq AQ',$$

т. е. A отображает $D(Q')$ в $D(Q')$ и коммутирует с Q' на $D(Q')$. Значит, по лемме 2.5.8, если $Q' = U'|Q'|$ — полярное разложение Q', то $U' \in \mathfrak{M}'$ и все спектральные проекторы $|Q'|$ лежат в $\mathfrak{M}'$. Пусть $E'_n \in \mathfrak{M}'$ обозначает спектральный проектор $|Q'|$, соответствующий промежутку $[0, n]$, и

$$Q'_n = U'E'_n|Q'|.$$

---

[1] *T — антилинейный* оператор в $\mathfrak{H}$, если для всех $\xi, \eta \in D(T)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $T(\lambda\xi + \eta) = \bar{\lambda}T\xi + T\eta$; если $D(T)$ плотна в $\mathfrak{H}$, то определен (антилинейный) оператор T^*, причем $(T\xi, \eta) = \overline{(\xi, T^*\eta)}$ для $\xi \in D(T)$, $\eta \in D(T^*)$. — *Прим. перев.*

Тогда $Q'_n \in \mathfrak{M}'$ и

$$Q'_n\Omega = U'E'_n\,|Q'|\,\Omega = U'E'_nU'^*U'\,|Q'|\,\Omega$$
$$= U'E'_nU'^*Q_0\Omega = U'E'_nU'^*\xi.$$

Далее,

$$Q'^*_n\Omega = E'_n\,|Q'|\,U'^*\Omega = E'_nQ_0^+\Omega = E'_n\psi.$$

Следовательно, $U'E'_nU'^*\xi \in D(F_0)$ и

$$F_0(U'E'_nU'^*\xi) = E'_n\psi.$$

Учтем, что $\{E'_n\}$ сильно сходится к единичному оператору $\mathbb{1}$, а $U'U'^*$ является проектором, область значений которого совпадает с областью значений Q', содержащей $\xi = \mathbb{1}\xi$. Следовательно, $\xi \in D(\overline{F}_0)$ и $\overline{F}_0\xi = \psi = S_0^*\xi$. Тем самым $S_0^* \subseteq \overline{F}_0 \subseteq S_0^*$, т. е. $\overline{F}_0 = S_0^*$. Меняя ролями S_0 и F_0, аналогично убедимся, что $\overline{S}_0 = F_0^*$.

***Определение* 2.5.10.** Зададим операторы S и F как замыкания S_0 и F_0 соответственно, т. е.

$$S = \overline{S}_0, \quad F = \overline{F}_0.$$

Полярное разложение

$$S = J\Delta^{1/2}$$

оператора S определяет единственным образом положительный самосопряженный оператор Δ и антиунитарный оператор J[1]; Δ называют *модулярным оператором, ассоциированным с парой* $(\mathfrak{M}, \Omega)$, а J — *модулярной инволюцией.*

Операторы S, F, Δ и J связаны рядом соотношений, которые почти сразу вытекают из определения.

***Предложение* 2.5.11.** *Справедливы следующие равенства:*

$$\Delta = FS, \quad \Delta^{-1} = SF,$$
$$S = J\Delta^{1/2}, \quad F = J\Delta^{-1/2},$$
$$J = J^*, \quad J^2 = \mathbb{1},$$
$$\Delta^{-1/2} = J\Delta^{1/2}J.$$

Доказательство. $\Delta = S^*S = FS$ и $S = J\Delta^{1/2}$, согласно определению 2.5.10 и предложению 2.5.9. Поскольку $S_0 = S_0^{-1}$, то же верно и для замыканий, так что $S = S^{-1}$. Следовательно,

$$J\Delta^{1/2} = S = S^{-1} = \Delta^{-1/2}J^*,$$

откуда $J^2\Delta^{1/2} = J\Delta^{-1/2}J^*$. Очевидно, оператор $J\Delta^{-1/2}J^*$ положителен, поэтому единственность полярного разложения влечет $J^2 = \mathbb{1}$. Тогда

$$J^* = J, \ \Delta^{-1/2} = J\Delta^{1/2}J,$$

[1] J — антилинейный оператор с $D(J) = \mathfrak{H}$ и $(J\xi, J\eta) = (\eta, \xi)$, так что $J^{-1} = J^*$. — *Прим. перев.*

и это приводит к соотношениям

$$F = S^* = (\Delta^{-1/2}J)^* = J\Delta^{-1/2}$$

и

$$SF = \Delta^{-1/2}JJ\Delta^{-1/2} = \Delta^{-1}.$$

Полезно вернуться вновь к примерам, обсуждавшимся во введении, и рассмотреть случаи абелевой $\mathfrak{M}$ и следового состояния ω. В обоих этих примерах вектор Ω отделяющий, так как цикличность в сочетании со следовым свойством ω $(\omega(B^*A^*AB) = \omega(BB^*A^*A))$ означает, что условия $A\Omega = 0$ и $A = 0$ эквивалентны. Нетрудно проверить, что $\Delta = \mathbb{1}$, $S = F = J$ и, кроме того,

$$J\mathfrak{M}J \subseteq \mathfrak{M}', \quad J\mathfrak{M}'J \subseteq \mathfrak{M};$$

следовательно,

$$J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'.$$

Таким образом, отличие модулярного оператора Δ от $\mathbb{1}$ отображает до некоторой степени свойство ω не быть следом. Эти примеры не позволяют судить о возможных свойствах Δ в общем случае, но сведения, характеризующие Δ, можно почерпнуть из следующих рассуждений.

Рассмотрим действие оператора SAS, где $A \in \mathfrak{M}$. Для всякой пары $B, C \in \mathfrak{M}$ имеем

$$(SAS)\,BC\Omega = SAC^*B^*\Omega = BCA^*\Omega$$

и

$$B\,(SAS)\,C\Omega = BSAC^*\Omega = BCA^*\Omega.$$

Значит, оператор SAS присоединен к $\mathfrak{M}'$.

Допустим сначала, что Δ ограничен и, следовательно, операторы $\Delta^{-1} = J\Delta J$, S и F тоже ограничены. Как мы уже убедились,

$$S\mathfrak{M}S \subseteq \mathfrak{M}', \quad F\mathfrak{M}'F \subseteq \mathfrak{M}.$$

Тем самым

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{M}\Delta^{-1} &= \Delta^{1/2}JJ\Delta^{1/2}\mathfrak{M}\Delta^{-1/2}JJ\Delta^{-1/2} \\ &= FS\mathfrak{M}SF \subseteq F\mathfrak{M}'F \subseteq \mathfrak{M};\end{aligned}$$

отсюда по индукции выводим, что при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Delta^n\mathfrak{M}\Delta^{-n} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Далее, для $A \in \mathfrak{M}$, $A' \in \mathfrak{M}'$, $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ рассмотрим целую аналитическую функцию

$$f(z) = \|\Delta\|^{-2z}\,(\varphi,\ [\Delta^z A\Delta^{-z},\ A']\,\psi).$$

Эта функция f допускает следующую оценку (надо учесть, что $\|\Delta^{-1}\| = \|J\Delta J\| = \|\Delta\|$):

$$|f(z)| = O(\|\Delta\|^{-2\,\mathrm{Re}\,z}(\|\Delta\|^{|\mathrm{Re}\,z|})^2) = O(1)$$

при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$, и $f(z) = 0$ для $z = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Из теоремы Карлсона вытекает, что $f(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Следовательно,

$$\Delta^z \mathfrak{M} \Delta^{-z} \subseteq \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}$$

при всех $z \in \mathbb{C}$. Но и $\mathfrak{M} = \Delta^z (\Delta^{-z} \mathfrak{M} \Delta^z) \Delta^{-z} \subseteq \Delta^z \mathfrak{M} \Delta^{-z}$, так что

$$\Delta^z \mathfrak{M} \Delta^{-z} = \mathfrak{M}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Далее,

$$J\mathfrak{M}J = J\Delta^{1/2}\mathfrak{M}\Delta^{-1/2}J = S\mathfrak{M}S \subseteq \mathfrak{M}'$$

и, аналогично,

$$J\mathfrak{M}'J = J\Delta^{-1/2}\mathfrak{M}'\Delta^{1/2}J = F\mathfrak{M}'F \subseteq \mathfrak{M}.$$

Тем самым получаем

$$J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'.$$

Основной результат теории Томиты—Такесаки состоит в том, что эти соотношения остаются справедливы и в общем случае, когда оператор Δ не обязательно ограничен, т. е.

$$J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}' \quad \text{и} \quad \Delta^{it}\mathfrak{M}\Delta^{-it} = \mathfrak{M}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство в общем случае строится иначе, чем приведенное выше. Проследить его построение помогает такое соображение: предположим, что в случае следа нам a priori известно совпадение множеств $\mathfrak{M}\Omega$ и $\mathfrak{M}'\Omega$. Иначе говоря, для всякого $A \in \mathfrak{M}$ существует такой элемент $A' \in \mathfrak{M}'$, что $A^*\Omega = A'\Omega$. Тогда $JAJ = A'$, потому что для любого $B \in \mathfrak{M}$

$$JAJB\Omega = JAB^*\Omega = BA^*\Omega = BA'\Omega = A'B\Omega.$$

Следовательно, $J\mathfrak{M}J \subseteq \mathfrak{M}'$, и, меняя ролями $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, получим $J\mathfrak{M}J \subseteq \mathfrak{M}'$, т. е. $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$.

В следующей лемме устанавливается результат, по существу аналогичный равенству $\mathfrak{M}\Omega = \mathfrak{M}'\Omega$, однако в рассматриваемом общем случае появляется резольвента модулярного оператора.

Лемма 2.5.12. *Если $\lambda \in \mathbb{C}$, $-\lambda \notin \mathbb{R}_+$ и $A' \in \mathfrak{M}'$, то существует такой элемент $A_\lambda \in \mathfrak{M}$, что*

$$A_\lambda^*\Omega = (\Delta + \lambda \mathbb{1})^{-1} A'\Omega.$$

Для A_λ справедлива оценка

$$\| A_\lambda \| \leqslant (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-1/2} \| A' \|.$$

Доказательство основано на следующем простом факте.

Наблюдение. *Пусть a, b, $K \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — такие числа, что*

$$|a + \lambda b| \leqslant K.$$

Тогда

$$(ab)^{1/2} \leqslant (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-1/2} K.$$

Действительно, это неравенство является следствием такого:

$$K^2 \geqslant |a + \lambda b|^2 - (a - |\lambda| b)^2 = (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})\, ab.$$

Возьмем теперь $\xi = (\Delta + \lambda \mathbb{1})^{-1} A'\Omega$ и произвольный элемент $B' \in \mathfrak{M}'$. Так как

$$(\Delta + \bar{\lambda}\mathbb{1})^{-1} B'^* B'\xi \in D(\Delta) \subseteq D(S),$$

то, в силу предложения 2.5.9, найдется замкнутый оператор B, присоединенный к $\mathfrak{M}$, для которого $\Omega \in D(B) \cap D(B^*)$ и

$$B\Omega = (\Delta + \bar{\lambda}\mathbb{1})^{-1} B'^* B'\xi,$$

так что

$$B'^* B'\xi = (\Delta + \bar{\lambda}\mathbb{1})\, B\Omega.$$

Пусть $B = U|B|$ — полярное разложение B. Тогда

$$\begin{aligned} |\lambda(\Omega, |B|\Omega) + (\Omega, U|B|U^*\Omega)| &= |\lambda(B\Omega, U\Omega) + (U^*\Omega, B^*\Omega)| \\ &= |\lambda(B\Omega, U\Omega) + (\Delta B\Omega, U\Omega)| \\ &= |((\Delta + \bar{\lambda}\mathbb{1})\, B\Omega, U\Omega)| \\ &= |(B'^* B'\xi, U\Omega)| \\ &= |(B'\xi, UB'\Omega)| \leqslant \|B'\xi\|\,\|B'\Omega\|. \end{aligned}$$

Из нашего наблюдения вытекает, что

$$\||B|^{1/2}\Omega\| \cdot \||B|^{1/2} U^*\Omega\| \leqslant (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-1/2} \|B'\xi\|\,\|B'\Omega\|.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|B'\xi\|^2 &= (B'^* B'\xi, \xi) \\ &= ((\Delta + \bar{\lambda}\mathbb{1})\, B\Omega, (\Delta + \lambda\mathbb{1})^{-1} A'\Omega) \\ &= (B\Omega, A'\Omega) \\ &= (|B|^{1/2}\Omega, A'|B|^{1/2}U^*\Omega) \\ &\leqslant \|A'\|\,\||B|^{1/2}\Omega\|\,\||B|^{1/2}U^*\Omega\| \\ &\leqslant (2|\lambda| + \bar{\lambda} + \lambda)^{-1/2} \|A'\|\,\|B'\xi\|\,\|B'\Omega\|. \end{aligned}$$

Разделив обе части на $\|B'\xi\| = \|B'(\Delta + \lambda\mathbb{1})^{-1} A'\Omega\|$, получаем оценку

$$\|B'(\Delta + \lambda\mathbb{1})^{-1} A'\Omega\| \leqslant (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-1/2} \|A'\|\,\|B'\Omega\|.$$

Она означает, что отображение, заданное на $\mathfrak{M}'\Omega$ правилом

$$B'\Omega \longmapsto B'(\Delta + \lambda\mathbb{1})^{-1} A'\Omega,$$

оказывается плотно определенным ограниченным оператором с нормой, не превосходящей

$$(2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-1/2} \|A'\|.$$

Обозначив через A_λ^* замыкание этого оператора, имеем $A_\lambda^* \in \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}$ и

$$A_\lambda^*\Omega = (\Delta + \lambda\mathbb{1})^{-1} A'\Omega.$$

Вторая фундаментальная лемма указывает явно связь между элементами $A_\lambda \in \mathfrak{M}$ и $A' \in \mathfrak{M}'$ из леммы 2.5.12.

Лемма 2.5.13. *Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $-\lambda \notin \mathbb{R}_+$, и $A' \in \mathfrak{M}'$ обозначим через A_λ такой элемент $\mathfrak{M}$, что*

$$A_\lambda^* \Omega = (\Delta + \lambda \mathbb{1})^{-1} A'\Omega$$

(существование A_λ следует из леммы 2.5.12). Следующее равенство справедливо как соотношение между билинейными формами на $D(\Delta^{1/2}) \cap D(\Delta^{-1/2})$:

$$JA'J = \Delta^{-1/2} A_\lambda \Delta^{1/2} + \bar{\lambda} \Delta^{1/2} A_\lambda \Delta^{-1/2}.$$

Доказательство. Пусть B', C' — произвольные элементы $\mathfrak{M}'$, и пусть B, $C \in \mathfrak{M}$ таковы, что

$$B^*\Omega = (\Delta + \mathbb{1})^{-1} B'\Omega,$$
$$C^*\Omega = (\Delta + \mathbb{1})^{-1} C'\Omega.$$

Учитывая, что $(\Delta + \lambda\mathbb{1}) A_\lambda^*\Omega = A'\Omega$, получаем

$$(\Delta A_\lambda^*\Omega,\ B^*C\Omega) + \bar{\lambda}(A_\lambda^*\Omega,\ B^*C\Omega) = (A'\Omega,\ B^*C\Omega).$$

Рассмотрим по отдельности эти три скалярных произведения. Преобразуем первое из них:

$$\begin{aligned}(\Delta A_\lambda^*\Omega,\ B^*C\Omega) &= (FSA_\lambda^*\Omega,\ B^*C\Omega)\\ &= (SB^*C\Omega,\ SA_\lambda^*\Omega) = (C^*B\Omega,\ A_\lambda\Omega)\\ &= (B\Omega,\ CA_\lambda\Omega) = (SB^*\Omega,\ SA_\lambda^*C^*\Omega)\\ &= (A_\lambda^*C^*\Omega,\ \Delta B^*\Omega)\\ &= (C'\Omega,\ (\Delta + \mathbb{1})^{-1} A_\lambda \Delta (\Delta + \mathbb{1})^{-1} B'\Omega).\end{aligned}$$

Второе равно

$$\begin{aligned}(A_\lambda^*\Omega,\ B^*C\Omega) &= (BA_\lambda^*\Omega,\ C\Omega)\\ &= (SA_\lambda B^*\Omega,\ SC^*\Omega) = (\Delta C^*\Omega,\ A_\lambda B^*\Omega)\\ &= (C'\Omega,\ (\Delta + \mathbb{1})^{-1} \Delta A_\lambda (\Delta + \mathbb{1})^{-1} B'\Omega);\end{aligned}$$

последнее —

$$\begin{aligned}(A'\Omega,\ B^*C\Omega) &= (A'B\Omega,\ C\Omega)\\ &= (A'SB^*\Omega,\ SC^*\Omega) = (C^*\Omega,\ FA'SB^*\Omega)\\ &= (C'\Omega,\ (\Delta + \mathbb{1})^{-1} \Delta^{1/2} JA'J \Delta^{1/2} (\Delta + \mathbb{1})^{-1} B'\Omega).\end{aligned}$$

Множество $\mathfrak{M}'\Omega$ плотно в $\mathfrak{H}$, поэтому мы приходим к равенству между ограниченными операторами

$$\begin{aligned}(\Delta + \mathbb{1})^{-1} A_\lambda \Delta (\Delta + \mathbb{1})^{-1} + \bar{\lambda} (\Delta + \mathbb{1})^{-1} \Delta A_\lambda (\Delta + \mathbb{1})^{-1} = \\ = (\Delta + \mathbb{1})^{-1} \Delta^{1/2} JA'J \Delta^{1/2} (\Delta + \mathbb{1})^{-1}.\end{aligned}$$

Умножив его справа и слева на $(\Delta + \mathbb{1}) \Delta^{-1/2}$, получаем требуемый результат.

Используя последнюю лемму, покажем, что при $A' \in \mathfrak{M}'$ оператор $JA'J$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Его можно представить в виде

$$JA'J = (D^{-1/2} + \bar{\lambda} D^{1/2})(A_\lambda),$$

где $D^{1/2}(B) = \Delta^{1/2}B\Delta^{-1/2}$, и при $\lambda > 0$ формальное применение преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{ipt}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}} = \frac{1}{e^{p/2}+e^{-p/2}}$$

дает обратное соотношение

$$A_\lambda = \lambda^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\lambda^{it}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}} D^{it}(JA'J),$$

где $D^{it}(B) = \Delta^{it}B\Delta^{-it}$. Ключевым моментом доказательства следующей теоремы является оправдание такого обратного перехода, потому что техника преобразования Фурье позволит тогда из факта $A_\lambda \in \mathfrak{M}$ вывести $D^{it}(JA'J) \in \mathfrak{M}$. На этом пути и будет установлен наш главный результат.

Теорема 2.5.14 (теорема Томиты—Такесаки). *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана с циклическим и отделяющим вектором Ω, и пусть Δ и J — соответствующие модулярный оператор и модулярная инволюция. В таком случае*

$$J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$$

и, кроме того,

$$\Delta^{it}\mathfrak{M}\Delta^{-it} = \mathfrak{M}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из спектральной теории операторов следует, что функции $t \in \mathbb{R} \longmapsto (\psi, \Delta^{it}B\Delta^{-it}\varphi)$ для $B \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ непрерывны и ограничены по модулю числом $\|B\|\|\varphi\|\|\psi\|$. Поэтому интегрирование билинейных форм позволяет ввести преобразование $I_\lambda(B)$ оператора B при каждом $\lambda > 0$:

$$I_\lambda(B) = \lambda^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\lambda^{it}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}} \Delta^{it}B\Delta^{-it}.$$

Выбрав $\psi, \varphi \in D(\Delta^{1/2}) \cap D(\Delta^{-1/2})$, рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\Delta^{-1/2}\psi, I_\lambda(B)\Delta^{1/2}\varphi) + \lambda(\Delta^{1/2}\psi, I_\lambda(B)\Delta^{-1/2}\varphi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\lambda^{it}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}} \{\lambda^{-1/2}(\Delta^{-(1/2)-it}\psi, B\Delta^{(1/2)-it}\varphi) \\ &\qquad + \lambda^{1/2}(\Delta^{(1/2)-it}\psi, B\Delta^{-(1/2)-it}\varphi)\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись спектральным разложением Δ:

$$\Delta = \int dE_\Delta(\mu)\,\mu,$$

находим

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{\lambda^{it}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}} \int d^2 (E_\Delta(\mu)\psi,\ BE_\Delta(\rho)\varphi) \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{it} \left\{\left(\frac{\rho}{\mu\lambda}\right)^{1/2} + \left(\frac{\mu\lambda}{\rho}\right)^{1/2}\right\}.$$

Но в силу указанного выбора φ, ψ можно изменить порядок интегрирования и получить

$$f(\lambda) = \int d^2 (E_\Delta(\mu)\psi,\ BE_\Delta(\rho)\varphi) \left\{\left(\frac{\rho}{\mu\lambda}\right)^{1/2} + \left(\frac{\mu\lambda}{\rho}\right)^{1/2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}} \left(\frac{\mu\lambda}{\rho}\right)^{it} =$$

$$= \int d^2 (E_\Delta(\mu)\psi,\ BE_\Delta(\rho)\varphi) = (\psi,\ B\varphi);$$

здесь внутренний интеграл найден с помощью преобразования Фурье, выписанного перед теоремой. Тем самым установлено такое соотношение между билинейными формами на $D(\Delta^{1/2}) \cap D(\Delta^{-1/2})$:

$$\Delta^{-1/2} I_\lambda(B)\, \Delta^{1/2} - \lambda \Delta^{1/2} I_\lambda(B)\, \Delta^{-1/2} = B.$$

Из определений легко получить, что коммутируют операторы $(D^{-1/2} + \lambda D^{1/2})$ и I_λ на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, следовательно, последнее соотношение приводит к равенству $I_\lambda = (D^{-1/2} + \lambda D^{1/2})^{-1}$.

Сопоставив его с леммой 2.5.13, убеждаемся, что соотношение, связывающее A' и A_λ, можно обратить, так что

$$A_\lambda = I_\lambda(JA'J).$$

Но $A_\lambda \in \mathfrak{M}$, следовательно, при $B' \in \mathfrak{M}'$

$$(\psi,\ [B',\ I_\lambda(JA'J)]\, \varphi) = 0.$$

Полагая $\lambda = e^p$ и пользуясь определением I_λ, выводим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{e^{ipt}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}} (\psi,\ [B',\ \Delta^{it} JA'J \Delta^{-it}]\, \varphi) = 0$$

при всех $p \in \mathbb{R}$. Из обращения в нуль этого преобразования Фурье следует, что

$$\Delta^{it} JA'J \Delta^{-it} \in \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}. \qquad (*)$$

Полагая $t = 0$, имеем

$$J\mathfrak{M}'J \subseteq \mathfrak{M}.$$

Однако, согласно предложению 2.5.11, с парой $(\mathfrak{M}', \Omega)$ ассоциирована та же самая модулярная инволюция, что и с $(\mathfrak{M}, \Omega)$, значит, те же самые доводы приведут к соотношению

$$J\mathfrak{M}J \subseteq \mathfrak{M}'.$$

Пользуясь тем, что $J^2 = \mathbb{1}$, получаем $\mathfrak{M} \subseteq J\mathfrak{M}'J \subseteq \mathfrak{M}$ — и приходим к фундаментальному соотношению теории:

$$J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'.$$

Поскольку $J\mathfrak{M}'J = \mathfrak{M}$, мы заключаем, что любой элемент $A \in \mathfrak{M}$ имеет вид $A = JA'J$, где $A' \in \mathfrak{M}'$. Поэтому (*) показывает, что

$$\Delta^{it} A \Delta^{-it} \in \mathfrak{M}.$$

Замечание. Мы доказали, что связь элементов A_λ и A' из леммы 2.5.12 дается равенством $A_\lambda = I_\lambda\,(JA'J)$, а обращение преобразования Фурье позволяет получить, что

$$\Delta^{it} JA'J\Delta^{-it} = \pi^{-1}\operatorname{ch}(\pi t)\int_0^\infty d\lambda\lambda^{-((1/2)+it)} A_\lambda \in \mathfrak{M},$$

где интеграл понимается в смысле слабой топологии операторов на $\mathfrak{M}$.

Определение 2.5.15. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана, ω — точное нормальное состояние на $\mathfrak{M}$, $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ — соответствующее циклическое представление и Δ — модулярный оператор, ассоциированный с парой $(\pi_\omega(\mathfrak{M}), \Omega_\omega)$. Теорема 2.5.14 устанавливает существование σ-слабо непрерывной однопараметрической группы $t \longmapsto \sigma_t^\omega$ *-автоморфизмов $\mathfrak{M}$, которая задается формулой

$$\sigma_t^\omega(A) = \pi_\omega^{-1}\left(\Delta^{it}\pi_\omega(A)\,\Delta^{-it}\right).$$

Группа $t \longmapsto \sigma_t^\omega$ называется *группой модулярных автоморфизмов, ассоциированной с парой* $(\mathfrak{M}, \omega)$, или *модулярной группой.*

Группа модулярных автоморфизмов является одним из наиболее полезных средств дальнейшего анализа алгебр фон Неймана. Она также играет важнейшую роль в приложениях к квантовой статистической механике (см. главы 5 и 6), поскольку равновесная динамика обычно описывается модулярной группой. В этом контексте чрезвычайно важно модулярное условие

$$\begin{aligned}(\Delta^{1/2}\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega, \Delta^{1/2}\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega) &= (J\pi_\omega(A^*)\,\Omega_\omega, J\pi_\omega(B^*)\,\Omega_\omega)\\ &= (\pi_\omega(B^*)\,\Omega_\omega, \pi_\omega(A^*)\,\Omega_\omega).\end{aligned}$$

Отметим, что, продолжив модулярную группу в чисто мнимую точку $t = i/2$, это условие можно представить в виде

$$\omega(\sigma_{i/2}^\omega(A)\,\sigma_{-i/2}^\omega(B)) = \omega(BA).$$

Пример 2.5.16. Если $\mathfrak{M} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ в сепарабельном $\mathfrak{H}$, то каждое нормальное состояние ω имеет вид

$$\omega(A) = \operatorname{Tr}(\rho A),$$

и ω является точным тогда и только тогда, когда оператор ρ обратим (пример 2.5.5). В этом случае, как можно проверить, модулярная группа задается равенством $\sigma_t(A) = \rho^{it} A \rho^{-it}$. Модулярное условие будет выполнено, так как

$$\omega(BA) = \mathrm{Tr}(\rho BA) = \mathrm{Tr}\left(\rho\left(\rho^{-1/2} A \rho^{1/2}\right)\left(\rho^{1/2} B \rho^{-1/2}\right)\right).$$

(Этим условием σ определяется однозначно, см. теорему 5.3.10.)

2.5.3. Интегрирование и аналитические элементы для однопараметрических групп изометрий банаховых пространств

Построение самосопряженного конуса, о котором шла речь во введении к этому разделу, производится с помощью модулярной группы, описанной в предыдущем пункте. Для того чтобы в полной мере использовать это средство, нам потребуются некоторые общие результаты об однопараметрических группах. Такие группы подробно изучаются в главе 3, там мы вновь воспользуемся предварительными результатами этого пункта.

Рассмотрим комплексное банахово пространство X и замкнутое по норме подпространство F его сопряженного X^*, такое что $F = X^*$ или $X = F^*$: в последнем случае будем писать $F = X_*$. Пусть $\sigma(X, F)$ обозначает локально-выпуклую топологию на X, индуцированную функционалами из F.

Определение 2.5.17. Однопараметрическое семейство $t \in \mathbb{R} \longmapsto \tau_t$ ограниченных линейных отображений X в себя называется *$\sigma(X, F)$-непрерывной однопараметрической группой изометрий в X*, если:

(1) $\tau_{t_1+t_2} = \tau_{t_1}\tau_{t_2}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ и $\tau_0 = \iota$[1];

(2) $\|\tau_t\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$;

(3) $t \longmapsto \tau_t(A)$ при всех $A \in X$ является $\sigma(X, F)$-непрерывным, т. е. $t \longmapsto \eta(\tau_t(A))$ непрерывно при любых $A \in X$ и $\eta \in F$;

(4) $A \longmapsto \tau_t(A)$ является $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-непрерывным отображением при всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. $\eta \circ \tau_t \in F$ для любого $\eta \in F$.

Отметим, что при $F = X^*$ условие (4) выполняется автоматически. В любом случае (4) означает, что мы можем ввести однопараметрическое семейство $\{\tau_t^*\}$ отображений F, полагая $(\tau_t^*\eta)(A) = \eta(\tau_t(A))$. Легко проверить, что $t \longmapsto \tau_t^*$ окажется $\sigma(F, X)$-непрерывной группой изометрий F. Далее мы увидим (следствие 2.5.23), что при $F = X^*$ условие (3) сводится к требованию сильной непрерывности $t \longmapsto \tau_t$, т. е. требованию, что $t \longmapsto \tau_t(A)$ непрерывно в норме X для любого $A \in X$. Если $F = X^*$, то $\sigma(X, F)$-непрерывную группу τ_t будем называть *C_0-группой*, а в случае $F = X_*$ группу τ_t называем *C_0^*-группой*. Группы, которые изуча-

[1] ι обозначает тождественное отображение. — *Прим. перев.*

ются в нашей книге, попадают в одну из следующих трех категорий:

(1) Сильно непрерывные унитарные группы в гильбертовых пространствах, т. е. $X = F = \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$ — гильбертово пространство.

(2) Сильно непрерывные группы $*$-автоморфизмов C^*-алгебр; это автоматически группы изометрий, согласно следствию 2.3.4.

(3) Слабо непрерывные группы $*$-автоморфизмов алгебр фон Неймана, т. е. $X = \mathfrak{M}$, $F = \mathfrak{M}_*$. В этом случае (4) выполняется автоматически, в силу теоремы 2.4.23. Отметим еще, что если $t \mapsto U_t$ — такая сильно непрерывная группа унитарных операторов, что $U_t \mathfrak{M} U_t^* \subseteq \mathfrak{M}$ при всех t, то, как нетрудно убедиться, $t \mapsto \tau_t(A) = U_t A U_t^*$ представляет собой слабо непрерывную группу $*$-автоморфизмов $\mathfrak{M}$.

Предложение 2.5.18. *Пусть на X определена $\sigma(X, F)$-непрерывная группа изометрий $t \mapsto \tau_t$, и пусть μ — борелевская мера на $\mathbb{R}$, имеющая ограниченную вариацию. Тогда для каждого $A \in X$ существует такой элемент $B \in X$, что*

$$\eta(B) = \int \eta(\tau_t(A))\, d\mu(t)$$

при всех $\eta \in F$.

Этот результат позволяет нам ввести для приведенной выше процедуры усреднения обозначение, более ясно указывающее на ее природу.

Определение 2.5.19. Если A и B связаны, как в предложении 2.5.18, мы будем писать

$$B = \int \tau_t(A)\, d\mu(t).$$

Доказательство предложения 2.5.18. Прежде всего заметим, что выпуклое замыкание любого $\sigma(X, F)$-предкомпактного подмножества в X будет $\sigma(X, F)$-компактным. Если $F = X_*$, это следует из теоремы Алаоглу, а если $F = X^*$ — из теоремы Крейна — Шмульяна.

Ввиду оценки

$$\left| \int \eta(\tau_t(A))\, d\mu(t) \right| \leqslant \|A\| \|\mu\| \|\eta\|$$

найдется такое $f \in F^*$, что

$$f(\eta) = \int \eta(\tau_t(A))\, d\mu(t), \quad \eta \in F$$

(в случае $F = X_*$ доказательство окончено).

Для доказательства существования такого $B \in X$, что $f(\eta) = \eta(B)$, достаточно проверить $\sigma(F, X)$-непрерывность f. Но по теореме Макки $\sigma(F, X)$-непрерывные функционалы на F совпадают с $\tau(F, X)$-непрерывными функционалами, где $\tau(F, X)$ — топология Макки на F. Эта последняя задается полунор мами

$$\eta \mapsto \sup_{C \in K} |\eta(C)|,$$

где K пробегает все выпуклые компактные в $\sigma(X, F)$-топологии закругленные подмножества X. (Множество K *закруглено*, если для всех $A \in K$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| = 1$ все $\lambda A \in K$.) Предположим сначала, что μ имеет компактный носитель, содержащийся в $[-\lambda, \lambda]$. Непрерывность отображения γ: $t \longmapsto \gamma\tau_t(A)$ обеспечивает компактность в X множества $\{\gamma\tau_t(A);\ |\gamma| = 1,\ t \in [-\lambda, \lambda]\}$; значит, компактно и его выпуклое замыкание K. Поэтому из оценки

$$|f(\eta)| \leqslant \|\mu\| \sup_{t \in [-\lambda, \lambda]} |\eta(\tau_t(A)|$$

вытекает, что

$$|f(\eta)| \leqslant \|\mu\| \sup_{C \in K} |\eta(C)|.$$

Следовательно, функционал f является $\tau(F, X)$-непрерывным, а значит, и $\sigma(F, X)$-непрерывным, чем и доказано существование B.

Если носитель μ не компактен, то выберем такую возрастающую последовательность компактов $\{K_n\} \subset \mathbb{R}$, что $|\mu|(\mathbb{R} \setminus K_n) \to 0$. Тогда для любого n можно найти $B_n \in X$, для которого

$$\eta(B_n) = \int_{K_n} \eta(\tau_t(A))\, d\mu(t),\ \eta \in F.$$

Оценка

$$|\eta(B_n) - f(\eta)| \leqslant \|\eta\| \|A\| |\mu| (\mathbb{R} \setminus K_n)$$

показывает, что последовательность $\{B_n\}$ будет последовательностью Коши в банаховом пространстве X, и для ее предела B мы имеем $f(\eta) = \eta(B)$.

Заметим, что предложение 2.5.18 справедливо и при более общих предположениях; например, условие (4) в определении τ_t излишне, а от F требуется только, чтобы

(1) $\|A\| = \sup\{|\eta(A)|;\ \eta \in F,\ \|\eta\| \leqslant 1\}$;

(2) $\sigma(X, F)$-замкнутая выпуклая оболочка всякого $\sigma(X, F)$-компактного подмножества в X также была $\sigma(X, F)$-компактна.

Определение 2.5.20. Пусть в X задана $\sigma(X, F)$-непрерывная группа изометрий $t \longmapsto \tau_t$. Элемент $A \in X$ называется *аналитическим* для τ_t или τ_t-*аналитическим*, если существуют полоса

$$T_\lambda = \{z;\ |\operatorname{Im} z| < \lambda\}$$

в $\mathbb{C}$ и функция f: $T_\lambda \longmapsto X$, такие что

(I) $f(t) = \tau_t(A)$ при $t \in \mathbb{R}$;

(II) $z \longmapsto \eta(f(z))$ — аналитическая функция при всех $\eta \in F$.

При выполнении этих условий будем писать

$$f(z) = \tau_z(A),\ z \in T_\lambda.$$

Сразу же продемонстрируем эквивалентность слабой аналитичности, т. е. условия (II), и сильной аналитичности:

Предложение 2.5.21. *Если $A \in X$ — элемент, τ_t-аналитический в полосе T_λ в смысле определения* 2.5.20, *то он сильно аналитичен в T_λ, т. е. для $f(z) = \tau_z(A)$ верно, что*

(II′) $\lim_{h\to 0} h^{-1}(f(z+h)-f(z))$ *существует в смысле нормы при каждом* $z \in T_\lambda$.

Доказательство. Для $z \in I_\lambda$ пусть C обозначает окружность радиуса r с центром в z, лежащую в I_λ, а K обозначает круг радиуса $r/2$ с центром в z. Взяв любое $x \in K$, запишем интегральную формулу Коши

$$\eta(f(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\eta(f(y))}{y-x}\,dy, \quad \eta \in F.$$

Для $z+h$ и $z+g \in K$

$$(h-g)^{-1}\{h^{-1}(\eta(f(z+h))-\eta(f(z)))-g^{-1}(\eta(f(z+g))-\eta(f(z)))\}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \eta(f(y))\,(y-z-h)^{-1}(y-z-g)^{-1}(y-z)^{-1}\,dy.$$

При фиксированном η модуль этого интеграла равномерно по h и g ограничен, так как C отстоит от K на положительное расстояние $r/2$. Следовательно, в силу теоремы о равномерной ограниченности, найдется такая константа γ, что

$$\sup_{|h|\leqslant r,\,|g|\leqslant r} \frac{1}{|h-g|}\left\| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+g)-f(z)}{g}\right\| \leqslant \gamma.$$

Существование производной $(d/dz)\,f(z)$ обеспечивается теперь полнотой X.

Предложение 2.5.22. *Пусть $t \mapsto \tau_t$ задает $\sigma(X, F)$-непрерывную группу изометрий и $A \in X$. Положим*

$$A_n = (n/\pi)^{1/2}\int \tau_t(A)\,e^{-nt^2}\,dt.$$

Все A_n будут целыми аналитическими элементами для τ_t, $\|A_n\| \leqslant \|A\|$ при всех n и $A_n \to A$ в $\sigma(X, F)$-топологии при $n \to \infty$. В частности, τ_t-аналитические элементы образуют $\sigma(X, F)$-плотное подмножество в X.

Доказательство. Из предложения 2.5.18 следует, что функции

$$f_n(z) = (n/\pi)^{1/2}\int \tau_t(A)\,e^{-n(t-z)^2}\,dt$$

определены при всех $z \in \mathbb{C}$, поскольку $t \mapsto e^{-n(t-z)^2} \in L^1(\mathbb{R})$ при всех z.

Для $z = s \in \mathbb{R}$ имеем

$$f_n(s) = (n/\pi)^{1/2}\int \tau_t(A)\,e^{-n(t-s)^2}\,dt$$
$$= (n/\pi)^{1/2}\int \tau_{t+s}(A)\,e^{-nt^2}\,dt$$
$$= \tau_s\left((n/\pi)^{1/2}\int \tau_t(A)\,e^{-nt^2}\,dt\right) = \tau_s(A_n).$$

Но при $\eta \in F$

$$\eta(f_n(z)) = (n/\pi)^{1/2}\int \eta(\tau_t(A))\,e^{-n(t-z)^2}\,dt,$$

а $|\eta(\tau_t(A))| \leqslant \|\eta\|\,\|A\|$. Ссылка на теорему Лебега о мажорированной сходимости показывает, что $z \mapsto \eta(f_n(z))$ — аналитическая функция. Значит, каждый элемент A_n аналитичен для τ_t.

Затем можно получить оценку

$$\| A_n \| \leqslant \sup_t \{\| \tau_t (A) \|\} (n/\pi)^{1/2} \int e^{-nt^2}\, dt = \| A \|.$$

Далее,

$$\eta (A_n - A) = (n/\pi)^{1/2} \int e^{-nt^2} (\eta (\tau_t (A)) - \eta (A))\, dt$$

при всех $\eta \in F$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta > 0$, что $|\eta (\tau_t (A)) - \eta (A)| < \varepsilon/2$ при $|t| < \delta$. Кроме того, при достаточно больших N

$$(N/\pi)^{1/2} \int\limits_{|t| \geqslant \delta} e^{-Nt^2}\, dt < \frac{\varepsilon}{4 \| \eta \| A \|}.$$

Таким образом, при $n \geqslant N$

$$\begin{aligned} |\eta (A_n - A)| &\leqslant (n/\pi)^{1/2} \int\limits_{|t| \geqslant \delta} e^{-nt^2} |\eta (\tau_t (A)) - \eta (A)|\, dt \\ &\qquad + (n/\pi)^{1/2} \int\limits_{|t| \geqslant \delta} e^{-nt^2} |\eta (\tau_t (A)) - \eta (A)|\, dt \\ &\leqslant (\varepsilon/2)\, (n/\pi)^{1/2} \int\limits_{|t| \geqslant \delta} e^{-nt^2}\, dt \\ &\qquad + 2 \| \eta \| \| A \| (n/\pi)^{1/2} \int\limits_{|t| \geqslant \delta} e^{-nt^2}\, dt \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым $A_n \to A$ в $\sigma (X, F)$-топологии.

Следствие 2.5.23. *Из $\sigma (X, X^*)$-непрерывности группы изометрий $\tau = \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ пространства X следует сильная непрерывность отображения $t \mapsto \tau_t$ (т. е. $t \mapsto \tau_t (A)$ непрерывно в норме X для любого $A \in X$), а также существование в X плотного по норме множества целых аналитических элементов для τ.*

Доказательство. Согласно предложению 2.5.22, целые аналитические элементы для τ_t образуют $\sigma (X, X^*)$-плотное подмножество в X. Это подмножество, очевидно, является подпространством, следовательно, оно плотно в X по норме, как нетрудно показать, используя теорему Хана — Банаха. (Если бы это подпространство не было плотно, то нашелся бы ненулевой линейный функционал, обращающийся в нуль на его замыкании, что противоречило бы свойству $\sigma (X, X^*)$-плотности.) Но если A — аналитический элемент, то $t \longmapsto \tau_t (A)$ — дифференцируемое отображение (в топологии нормы), в силу предложения 2.5.21; тем более $t \longmapsto \tau_t (A)$ непрерывно по норме. Наконец, для любого $A \in X$ можно найти последовательность $\{A_n\}$ аналитических элементов, сходящуюся к A, так что

$$\begin{aligned} \| \tau_t (A) - A \| &\leqslant \| \tau_t (A - A_n) \| + \| \tau_t (A_n) - A_n \| + \| A_n - A \| \\ &= 2 \| A_n - A \| + \| \tau_t (A_n) - A_n \|. \end{aligned}$$

Следствие 2.5.24. *При условии $\sigma (X, X_*)$-непрерывности группы изометрий $\tau = \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ множество Y, состоящее из тех $A \in$*

$\in X$, для которых $t \mapsto \tau_t(A)$ непрерывно по норме, совпадает с замкнутым по норме $\sigma(X, X_*)$-плотным подпространством, полученным замыканием по норме множества целых аналитических элементов для τ.

Доказательство. Пусть Y_0 — замыкание по норме множества целых аналитических элементов. Оно $\sigma(X, X_*)$-плотно в X, согласно предложению 2.5.22, и те же рассуждения, что и в доказательстве следствия 2.5.23, показывают сильную непрерывность $\tau|_{Y_0}$. Если A — целый элемент для τ, то, как легко проверить, и $\tau_z(A)$ — целые при всех $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, целые элементы для $\tau|_{Y_0}$ совпадают с целыми элементами для τ. Поскольку Y — это замыкание по норме множества целых элементов для $\tau|_Y$, из следствия 2.5.23 выводим, что $Y_0 = Y$.

Наконец, заметим, что в том случае, когда слабо непрерывная однопараметрическая группа *-автоморфизмов алгебры фон Неймана имеет вид $\tau_t(A) = \Delta^{it}A\Delta^{-it}$, где Δ — положительный обратимый самосопряженный оператор, то и при $z \in \mathbb{C}$

$$\tau_z(A) = \Delta^{iz}A\Delta^{-iz}$$

для всякого аналитического A. Обе части последнего соотношения представляют собой билинейные формы на целых векторах группы $t \mapsto \Delta^{it}$. Равенство их вытекает из совпадения аналитических в полосе вокруг вещественной оси функций, принимающих одинаковые значения на этой оси. Этот простой факт неоднократно будет использован в следующем пункте.

2.5.4. Самосопряженные конусы и стандартные формы

На протяжении этого пункта $\mathfrak{M}$ обозначает алгебру фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеющую циклический и отделяющий вектор Ω. Модулярный оператор и модулярную инволюцию, ассоциированные с парой $(\mathfrak{M}, \Omega)$, обозначим соответственно через Δ и J. Соответствующая модулярная группа автоморфизмов обозначается σ_t, а $\mathfrak{M}_0$ обозначает *-алгебру целых аналитических элементов для σ. Символ j мы употребляем для антилинейного *-изморфизма, переводящего $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$ по правилу $j(A) = JAJ$.

Определение 2.5.25. *Естественный положительный конус $\mathcal{P}$,* ассоциированный с парой $(\mathfrak{M}, \Omega)$, определяется как замыкание множества

$$\{Aj(A)\Omega;\ A \in \mathfrak{M}\}.$$

Подчеркнем, что этот конус в точности соответствует положительным конусам, которые обсуждались во введении к этому разделу для случаев абелевой алгебры и алгебры со следом. Он является некоммутативным аналогом конуса положительных функций из L^2, рассматриваемого в абелевом случае.

Предложение 2.5.26. *Замкнутое подмножество* $\mathscr{P} \subseteq \mathfrak{H}$ *обладает следующими свойствами:*

(1) $\mathscr{P} = \overline{\Delta^{1/4}\mathfrak{M}_+\Omega} = \overline{\Delta^{-1/4}\mathfrak{M}'_+\Omega} = \overline{\Delta^{1/4}\overline{\mathfrak{M}_+\Omega}} = \overline{\Delta^{-1/4}\overline{\mathfrak{M}'_+\Omega}}$ *и, следовательно,* $\mathscr{P}$ *— выпуклый конус;*

(2) $\Delta^{it}\mathscr{P} = \mathscr{P}$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$;

(3) *если* f *— положительно-определенная функция, то* $f(\log \Delta)\,\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}$;

(4) *если* $\xi \in \mathscr{P}$, *то* $J\xi = \xi$;

(5) *если* $A \in \mathfrak{M}$, *то* $Aj(A)\,\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}$.

Доказательство. (1) Для $A \in \mathfrak{M}_0$, полагая $B = \sigma_{-i/4}(A)$, имеем

$$\begin{aligned}\Delta^{1/4}AA^*\Omega &= \sigma_{-i/4}(A)\,\sigma_{-i/4}(A^*)\,\Omega\\ &= \sigma_{-i/4}(A)\,\sigma_{i/4}(A)^*\,\Omega\\ &= \sigma_{-i/4}(A)\,J\Delta^{1/2}\sigma_{i/4}(A)\,\Omega\\ &= \sigma_{-i/4}(A)\,J\sigma_{-i/4}(A)\,\Omega = Bj(B)\,\Omega.\end{aligned}$$

Так как $\sigma_{-i/4}(\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_0$ сильно* плотно в $\mathfrak{M}$, то полученное соотношение и теорема Капланского позволяют заключить, что

$$Bj(B)\,\Omega \in \overline{\Delta^{1/4}\mathfrak{M}_+\Omega} \subseteq \overline{\Delta^{1/4}\overline{\mathfrak{M}_+\Omega}}.$$

при всех $B \in \mathfrak{M}$.

Таким образом,

$$\mathscr{P} \subseteq \overline{\Delta^{1/4}\mathfrak{M}_+\Omega} \subseteq \overline{\Delta^{1/4}\overline{\mathfrak{M}_+\Omega}}.$$

С другой стороны, $\mathfrak{M}_{0+}$ сильно* плотно в $\mathfrak{M}_+$, по теореме плотности Капланского, так что $\mathfrak{M}_{0+}\Omega$ плотно в $\overline{\mathfrak{M}_+\Omega}$. Для $\psi \in \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}$ выберем такую последовательность $A_n \in \mathfrak{M}_{0+}$, что $A_n\Omega \to \psi$. Тогда соотношение, рассмотренное в начале доказательства, показывает, что $\Delta^{1/4}A_n\Omega \in \mathscr{P}$. Однако

$$J\Delta^{1/2}A_n\Omega = A_n\Omega \to \psi = J\Delta^{1/2}\psi,$$

следовательно,

$$\|\Delta^{1/4}(\psi - A_n\Omega)\|^2 = (\psi - A_n\Omega,\ \Delta^{1/2}(\psi - A_n\Omega)).$$

Тем самым $\Delta^{1/4}\psi \in \mathscr{P}$ и $\overline{\Delta^{1/4}\overline{\mathfrak{M}_+\Omega}} \subseteq \mathscr{P}$. Комбинируя оба включения, получаем

$$\mathscr{P} = \overline{\Delta^{1/4}\mathfrak{M}_+\Omega} = \overline{\Delta^{1/4}\overline{\mathfrak{M}_+\Omega}}.$$

Если $\mathscr{P}'$ — естественный конус, соответствующий $(\mathfrak{M}', \Omega)$, то $\mathscr{P}'$ совпадает с замыканием множества элементов вида

$$A'j(A')\,\Omega = j(j(A'))\,j(A')\,\Omega = j(A)\,A\Omega = Aj(A)\,\Omega,$$

где $A = j(A') \in \mathfrak{M}$. Значит, $\mathscr{P}' = \mathscr{P}$. Поскольку Δ^{-1} — это модулярный оператор, соответствующий $(\mathfrak{M}', \Omega)$, то из предыдущих рассуждений вытекает, что

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}' = \overline{\Delta^{-1/4}\mathfrak{M}'_+\Omega} = \overline{\Delta^{-1/4}\overline{\mathfrak{M}'_+\Omega}}.$$

Этим завершается доказательство свойства (1).

(2) выводим из (1), приняв во внимание, что

$$\Delta^{it}\Delta^{1/4}\mathfrak{M}_+\Omega = \Delta^{1/4}\Delta^{it}\mathfrak{M}_+\Omega = \Delta^{1/4}\sigma_t(\mathfrak{M}_+)\Omega = \Delta^{1/4}\mathfrak{M}_+\Omega.$$

(3) можно получить из (2), заметив, что по теореме Бохнера всякая положительно-определенная функция обладает представлением $f(x) = \int e^{itx}d\mu(t)$, где μ — положительная конечная борелева мера на $\mathbb{R}$. Поэтому $f(\log\Delta) = \int \Delta^{it}d\mu(t)$, и (3) вытекает из того, что $\mathscr{P}$ — замкнутый конус.

Для проверки (4) достаточно заметить, что

$$JAj(A)\Omega = j(A)A\Omega = Aj(A)\Omega,$$

а (5) следует из соотношения

$$Aj(A)Bj(B)\Omega = ABj(A)j(B)\Omega = ABj(AB)\Omega.$$

Следующий наш шаг состоит в подготовке к доказательству самосопряженности $\mathscr{P}$.

Предложение 2.5.27. (1) *Пусть $\eta \in \mathfrak{H}$ и $(\eta, A\Omega) \geqslant 0$ для $A \in \mathfrak{M}_+$. В таком случае найдется положительный самосопряженный оператор Q', присоединенный к $\mathfrak{M}'$, такой что $\eta = Q'\Omega$.*

(2) *$\mathfrak{M}_+\Omega$ и $\overline{\mathfrak{M}'_+(\Omega)}$ — сопряженные конусы в $\mathfrak{H}$, т. е.*

$$\overline{\mathfrak{M}_+\Omega} = \{\xi \in \mathfrak{H};\ (\xi, \eta) \geqslant 0 \text{ для всех } \eta \in \overline{\mathfrak{M}'_+\Omega}\},$$

$$\overline{\mathfrak{M}'_+\Omega} = \{\xi \in \mathfrak{H};\ (\xi, \eta) \geqslant 0 \text{ для всех } \eta \in \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}\}.$$

Доказательство. (1) Зададим оператор A' на $D(A') = \mathfrak{M}\Omega$, полагая

$$A'A\Omega = A\eta,\ A \in \mathfrak{M}.$$

Для всякого унитарного $U \in \mathfrak{M}$ имеем

$$A'UA\Omega = UA\eta = UA'A\Omega,$$

т. е.

$$UA'U^* = A'.$$

Далее,

$$(A\Omega, A'A\Omega) = (A\Omega, A\eta) = \overline{(\eta, A^*A\Omega)} \geqslant 0.$$

Значит, A' — положительный симметрический оператор. Пусть Q' — расширение A' по Фридрихсу. Тогда Q' — положительный самосопряженный оператор, а в силу единственности расширения по Фридрихсу

$$UQ'U^* = Q'$$

для всех унитарных элементов в $\mathfrak{M}$. Следовательно, Q' присоединен к $\mathfrak{M}'$ и

$$Q'\Omega = A'\Omega = \eta.$$

(2) Вначале для любого подмножества $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$ введем обозначение

$$\mathfrak{K}^\vee = \{\eta \in \mathfrak{H};\ (\xi, \eta) \geqslant 0\ \forall \xi \in \mathfrak{K}\}.$$

Однако если $A \in \mathfrak{M}_+$ и $A' \in \mathfrak{M}'_+$, то

$$(A\Omega, A'\Omega) = (\Omega, A^{1/2}A'A^{1/2}\Omega) \geqslant 0.$$

Значит, $\overline{\mathfrak{M}_+\Omega} \subseteq \overline{\mathfrak{M}'_+\Omega}^\vee$ и $\overline{\mathfrak{M}'_+\Omega} \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}^\vee$. Далее, если $\eta \in \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}^\vee$, то из приведенного доказательства утверждения (1) следует, что $\eta = Q'\Omega$, где Q' —

положительный самосопряженный оператор, присоединенный к $\mathfrak{M}'$. Пусть E'_n — его спектральный проектор, отвечающий промежутку $[0, n]$; тогда $Q'E'_n \in \mathfrak{M}'_+$ и $\lim_{n\to\infty} Q'E'_n\Omega = Q'\Omega = \eta$. Тем самым $\eta \in \overline{\mathfrak{M}'_+\Omega}$ и $\overline{\mathfrak{M}_+\Omega}^{\vee} = \overline{\mathfrak{M}'_+\Omega}$.

Теперь мы в состоянии установить важнейшие геометрические свойства конуса $\mathscr{P}$.

Предложение 2.5.28. (1) *Конус $\mathscr{P}$ самосопряжен, т. е. $\mathscr{P} = \mathscr{P}^{\vee}$, где*

$$\mathscr{P}^{\vee} = \{\eta \in \mathfrak{H}; (\xi, \eta) \geqslant 0 \text{ для всех } \xi \in \mathscr{P}\}.$$

(2) *Конус $\mathscr{P}$ является острым, или выступающим, т. е.*

$$\mathscr{P} \cap (-\mathscr{P}) = \{0\}.$$

(3) *Если $J\xi = \xi$, то существует единственное представление $\xi = \xi_1 - \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{P}$ и $\xi_1 \perp \xi_2$.*

(4) *$\mathfrak{H}$ совпадает с линейной оболочкой $\mathscr{P}$.*

Доказательство. (1) Если $A \in \mathfrak{M}_+$, $A' \in \mathfrak{M}'_+$, то

$$\begin{aligned}(\Delta^{1/4}A\Omega,\ \Delta^{-1/4}A'\Omega) &= (A\Omega,\ A'\Omega)\\ &= (\Omega,\ A^{1/2}A'A^{1/2}\Omega) \geqslant 0,\end{aligned}$$

так что $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}^{\vee}$, согласно предложению 2.5.26, (1). Для вывода обратного включения возьмем $\xi \in \mathscr{P}^{\vee}$, т. е. $(\xi, \eta) \geqslant 0$ при всех $\eta \in \mathscr{P}$. Определим

$$\xi_n = f_n(\log \Delta)\,\xi,$$

где $f_n(x) = e^{-x^2/2n^2}$. Тогда $\xi_n \in \bigcap_{\alpha \in \mathbb{C}} D(\Delta^{\alpha})$ и $\xi_n \to \xi$, $n \to \infty$.

Пусть $\eta \in \mathscr{P}$. Функция f_n положительно-определенна, поэтому $f_n(\log \Delta)\eta \in \mathscr{P}$, в силу предложения 2.5.26, (3). Таким образом,

$$(\xi_n, \eta) = (\xi, f_n(\log \Delta)\eta) \geqslant 0,\ \eta \in \mathscr{P}.$$

Пусть $A \in \mathfrak{M}_+$. Тогда $\Delta^{1/4}A\Omega \in \mathscr{P}$, следовательно,

$$(\Delta^{1/4}\xi_n,\ A\Omega) = (\xi_n,\ \Delta^{1/4}A\Omega) \geqslant 0.$$

В результате из предложения 2.5.27, (2) получаем, что $\Delta^{1/4}\xi_n \in \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}^{\vee} = \overline{\mathfrak{M}'_+\Omega}$. Значит, $\xi_n \in \Delta^{-1/4}\overline{\mathfrak{M}'_+\Omega} \subseteq \mathscr{P}$. Конус $\mathscr{P}$ замкнут, так что $\xi = \lim_n \xi_n \in \mathscr{P}$; тем самым $\mathscr{P}$ совпадает с $\mathscr{P}^{\vee}$.

Свойства (2)—(4) вытекают исключительно из самосопряженности конуса $\mathscr{P}$.

(2) Если $\xi \in \mathscr{P} \cap (-\mathscr{P}) = \mathscr{P} \cap (-\mathscr{P}^{\vee})$, то $(\xi, -\xi) \geqslant 0$ и поэтому $\xi = 0$.

(3) Допустим, что $J\xi = \xi$. Конус $\mathscr{P}$ — это замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве, значит, имеется единственный вектор $\xi_1 \in \mathscr{P}$, для которого

$$\|\xi - \xi_1\| = \inf\{\|\xi - \eta\|;\ \eta \in \mathscr{P}\}.$$

Обозначим $\xi_2 = \xi_1 - \xi$. Пусть $\eta \in \mathscr{P}$ и $\lambda > 0$. Тогда $\xi_1 + \lambda\eta \in \mathscr{P}$ и

$$\|\xi_1 - \xi\|^2 \leqslant \|\xi_1 + \lambda\eta - \xi\|^2,$$

т. е. $\|\xi_2\|^2 \leqslant \|\xi_2 + \lambda\eta\|^2$. Но это эквивалентно тому, что

$$\lambda^2\|\eta\|^2 + 2\lambda\,\mathrm{Re}\,(\xi_2, \eta) \geqslant 0$$

при всех $\lambda > 0$. Следовательно, обязательно $\operatorname{Re}(\xi_2, \eta) \geqslant 0$. По предположению $J\xi_2 = \xi_2$, и $J\eta = \eta$, поскольку $\eta \in \mathscr{P}$. Таким образом,

$$(\xi_2, \eta) = (J\xi_2, J\eta) = \overline{(\xi_2, \eta)},$$

и (ξ_2, η) должно быть вещественно, а значит, $(\xi_2, \eta) \geqslant 0$. Так как $\mathscr{P} = \mathscr{P}^\vee$, то $\xi_2 \in \mathscr{P}$. В результате $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{P}$. Покажем, что $\xi_1 \perp \xi_2$. Поскольку $(1 - \lambda)\xi_1 \in \mathscr{P}$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, имеем

$$\|\xi_1 - \xi\|^2 \leqslant \|(1 - \lambda)\xi_1 - \xi\|^2,$$

т. е.

$$\|\xi_2\|^2 \leqslant \|\xi_2 - \lambda\xi_1\|^2.$$

Опять-таки это эквивалентно неравенству

$$\lambda^2 \|\xi_1\|^2 - 2\lambda(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0,$$

и в итоге должно выполняться условие $(\xi_1, \xi_2) \leqslant 0$. Но оба вектора ξ_1 и ξ_2 лежат в $\mathscr{P}$, так что $(\xi_1, \xi_2) = 0$. Для доказательства единственности разложения предположим наличие двух разложений

$$\xi = \xi_1 - \xi_2, \ \xi_1, \xi_2 \in \mathscr{P}, \ \xi_1 \perp \xi_2,$$
$$\xi = \eta_1 - \eta_2, \ \eta_1, \eta_2 \in \mathscr{P}, \ \eta_1 \perp \eta_2.$$

В таком случае

$$\xi_1 - \eta_1 = \xi_2 - \eta_2.$$

Следовательно,

$$\|\xi_1 - \eta_1\|^2 = (\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2) = -(\eta_1, \xi_2) - (\xi_1, \eta_2) \leqslant 0.$$

Таким образом, $\xi_1 = \eta_1$, поэтому и $\xi_2 = \eta_2$, т. е. разложение единственно.

(4) Если ξ ортогонален линейной оболочке $\mathscr{P}$, то $\xi \in \mathscr{P}^\vee = \mathscr{P}$, значит, $(\xi, \xi) = 0$ и $\xi = 0$.

Пример 2.5.29. Пусть $\mathfrak{M} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H}$ конечномерно. Рассмотрим нормальное состояние ω, заданное матрицей плотности ρ, т. е.

$$\omega(A) = \operatorname{Tr}(\rho A)$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$. В примере 2.5.5 было показано, что критерием точности состояния ω является обратимость ρ. Воспользовавшись явным описанием модулярной группы: $\sigma_t^\omega(A) = \rho^{it} A \rho^{-it}$, приведенным в примере 2.5.16, найдем, что

$$\mathscr{P} = \{\psi_A;\ \psi_A = \pi_\omega(\rho^{1/4} A^* A \rho^{-1/4})\,\Omega_\omega,\ A \in \mathfrak{M}\}.$$

Условие самосопряженности вытекает из соотношений

$$\begin{aligned}(\psi_B, \psi_A) &= \operatorname{Tr}(\rho(\rho^{-1/4} B^* B \rho^{1/4})(\rho^{1/4} A^* A \rho^{-1/4})) \\ &= \operatorname{Tr}(\rho^{1/2} B^* B \rho^{1/2} A^* A) \\ &= \operatorname{Tr}((B\rho^{1/2} A^*)^* (B\rho^{1/2} A^*)) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Предложение 2.5.30 (универсальность конуса $\mathscr{P}$). (1) *Если вектор ξ принадлежит $\mathscr{P}$, то он является циклическим для $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда он является отделяющим для $\mathfrak{M}$.*

(2) *Если $\xi \in \mathscr{P}$ — циклический и, следовательно, отделяющий вектор, то для модулярной инволюции J_ξ и естественного положительного конуса $\mathscr{P}_\xi$, ассоциированных с парой $(\mathfrak{M}, \xi)$, имеем*

$$J_\xi = J, \ \mathscr{P}_\xi = \mathscr{P}.$$

Доказательство. (1) Если $\xi \in \mathscr{P}$ — циклический для $\mathfrak{M}$ вектор, то $J\xi$ — циклический для $\mathfrak{M}' = J\mathfrak{M}J$. Следовательно, $\xi = J\xi$ будет отделяющим для $\mathfrak{M}$, и наоборот.

(2) Пусть S_ξ обозначает замыкание отображения

$$A\xi \longmapsto A^*\xi, \; A \in \mathfrak{M},$$

а F_ξ — замыкание отображения

$$A'\xi \longmapsto A'^*\xi, \; A' \in \mathfrak{M}'.$$

Для всякого $A \in \mathfrak{M}$ получаем

$$JF_\xi JA\xi = JF_\xi (JAJ)\xi = J(JAJ)^*\xi = A^*\xi = S_\xi A\xi.$$

Таким образом, $S_\xi \subseteq JF_\xi J$.

Аналогично проверяется, что

$$F_\xi \subseteq JS_\xi J,$$

так что

$$JS_\xi = F_\xi J.$$

Но тогда

$$(JS_\xi)^* = S_\xi^* J = F_\xi J = JS_\xi,$$

следовательно, JS_ξ самосопряжен.

Далее, покажем, что JS_ξ положителен. Поскольку JS_ξ совпадает с замыканием своего сужения на $\mathfrak{M}\xi$, достаточно убедиться, что $(A\xi, JS_\xi A\xi) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathfrak{M}$. Однако

$$(A\xi, JS_\xi A\xi) = (A\xi, JA^*\xi) = (\xi, A^*j(A^*)\xi) \geqslant 0,$$

так как и ξ, и $A^*j(A^*)\xi$ лежат в $\mathscr{P}$.

Теперь мы знаем, что $S_\xi = J_\xi \Delta_\xi^{1/2} = J(JS_\xi)$. Значит, единственность полярного разложения влечет равенство $J_\xi = J$.

Для доказательства последнего утверждения предложения укажем, что $\mathscr{P}_\xi$ порождается элементами вида

$$Aj_\xi(A)\xi = Aj(A)\xi.$$

Но $\xi \in \mathscr{P}$, поэтому, в силу предложения 2.5.26, (5), $Aj(A)\xi \in \mathscr{P}$. Тем самым $\mathscr{P}_\xi \subseteq \mathscr{P}$. А так как $\mathscr{P} = \mathscr{P}^\vee \subseteq \mathscr{P}_\xi^\vee = \mathscr{P}_\xi$, то $\mathscr{P} = \mathscr{P}_\xi$.

Обсудив эти геометрические свойства естественного положительного конуса $\mathscr{P}$, покажем теперь, что всякая положительная нормальная форма на $\mathfrak{M}$ представима единственным образом посредством вектора из этого конуса. В качестве следствия будет установлена выполнимость автоморфизмов $\mathfrak{M}$ унитарными элементами, которые оставляют конус на месте.

Теорема 2.5.31. *Сопоставим каждому $\xi \in \mathscr{P}$ нормальную положительную форму $\omega_\xi \in \mathfrak{M}_{*+}$, полагая*

$$\omega_\xi(A) = (\xi, A\xi), \; A \in \mathfrak{M}.$$

В таком случае

a) для любой формы $\omega \in \mathfrak{M}_{*+}$ существует такой единственный вектор $\xi \in \mathscr{P}$, что $\omega = \omega_\xi$;

б) *отображение* $\xi \mapsto \omega_\xi$ *есть гомеоморфизм, если* $\mathscr{P}$ *и* $\mathfrak{M}_{*+}$ *снабдить топологией нормы. Кроме того, имеет место оценка*

$$\|\xi-\eta\|^2 \leqslant \|\omega_\xi-\omega_\eta\| \leqslant \|\xi-\eta\|\,\|\xi+\eta\|.$$

Замечание. В теореме определено отображение $\xi \in \mathscr{P} \mapsto \omega_\xi \in \mathfrak{M}_{*+}$. Обратное отображение обозначим $\omega \mapsto \xi(\omega)$. Можно показать, что $\omega \mapsto \xi(\omega)$ — монотонно возрастающее и вогнутое отображение по отношению к естественному упорядочению конусов $\mathfrak{M}_{*+}$ и $\mathscr{P}$. Можно также получить формулу для $\xi(\omega)$, если $\omega \leqslant C\omega_\Omega$ при некоторой константе C. Тогда $\omega(A) = (A'\Omega, AA'\Omega)$ с единственным $A' \in \mathfrak{M}'_+$ (по теореме 2.3.19), и оказывается, что $\xi(\omega) = |A'\Delta^{-1/2}|\Omega$, где $|A'\Delta^{-1/2}|$ — положительная часть полярного разложения оператора $A'\Delta^{-1/2}$. Мы опускаем доказательства этих утверждений.

Сформулируем важное следствие теоремы.

Следствие 2.5.32. *Существует единственное унитарное представление в* $\mathfrak{H}$

$$\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{M}) \mapsto U(\alpha)$$

группы $\operatorname{Aut}(\mathfrak{M})$ *всех* $*$*-автоморфизмов алгебры* $\mathfrak{M}$ *в* $\mathfrak{H}$, *обладающее следующими свойствами*:

а) $U(\alpha)AU(\alpha)^* = \alpha(A)$, $A \in \mathfrak{M}$;

б) $U(\alpha)\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}$ *и, более того,*

$$U(\alpha)\xi(\omega) = \xi(\alpha^{-1*}(\omega)), \quad \omega \in \mathfrak{M}_{*+},$$

где $(\alpha^*\omega)(A) = \omega(\alpha(A))$;

в) $[U(\alpha), J] = 0$.

Отображение $\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{M}) \mapsto U(\alpha) \in U(\operatorname{Aut}(\mathfrak{M}))$ *является гомеоморфизмом между* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{M})$ *и* $U(\operatorname{Aut}(\mathfrak{M}))$, *снабженными топологиями нормы. Оно также будет гомеоморфизмом, если* $U(\operatorname{Aut}(\mathfrak{M}))$ *снабдить слабой, сильной или сильной* топологией (все они эквивалентны), а* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{M})$ *рассматривать с топологией сильной сходимости* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{M})^*$ *на* $\mathfrak{M}_*$ *(в этой топологии* $\alpha \to \beta$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha^*(\omega) \mapsto \beta^*(\omega)$ *по норме для всякого* $\omega \in \mathfrak{M}_*$).

Замечание. Можно получить также частичное обращение этого утверждения. Если U — такой унитарный оператор в $\mathfrak{H}$, что $U\mathscr{P} = \mathscr{P}$, то существует такой проектор $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$, что

$$U\mathfrak{M}U^* = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}'(\mathbb{1} - E).$$

Это утверждение содержится в теореме 3.2.15. (Отметим, что все алгебры $\mathfrak{M}E + \mathfrak{M}'(\mathbb{1} - E)$ имеют один и тот же естественный конус $\mathscr{P}$.)

Доказательство теоремы и ее следствия довольно длинное Оно основано на нескольких вполне понятных, но утомительных выкладках в сочетании с хитрой методикой сравнения, связанной с «удвоением» или «учетверением» нашей алгебры. Основные этапы доказательства выделены в виде лемм, но мы советуем пропустить их при первом чтении.

Лемма 2.5.33. *Пусть ξ_1 и ξ_2 — циклические и отделяющие для $\mathfrak{M}$ векторы, а $\mathfrak{H}_4$ — четырехмерное гильбертово пространство с ортогональным базисом η_{ij}, i, $j=1$, 2. Далее, пусть $\mathfrak{F}$ обозначает алгебру 2×2-матриц в $\mathfrak{H}_4$, порожденную матрицами E_{ij}, для которых $E_{ij}\eta_{kl}=\delta_{jk}\eta_{il}$. Пусть $\mathfrak{F}'$ — коммутант $\mathfrak{F}$, т. е. алгебра 2×2-матриц, порожденная такими F_{ij}, что $F_{ij}\eta_{kl}=$ $=\delta_{jl}\eta_{ki}$. Наконец, пусть $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_4$, $\Omega_0=\xi_1\otimes\eta_{11}+\xi_2\otimes\eta_{22}$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{F}$, и пусть $U_{ij}\colon\mathfrak{H}\longmapsto\mathfrak{K}$ будет изометрией, определенной так, что $U_{ij}\xi=\xi\otimes\eta_{ij}$.*

Тогда вектор Ω_0 — циклический и отделяющий для $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{K}$. Соответствующая инволюция S_{Ω_0}, ассоциированная с $(\mathfrak{N},\ \Omega_0)$, удовлетворяет условию

$$S_{\Omega_0}=U_{11}S_{\xi_1}U_{11}^*+U_{21}S_{\xi_1,\ \xi_2}U_{12}^*+U_{12}S_{\xi_2,\ \xi_1}U_{21}^*+U_{22}S_{\xi_2}U_{22}^*,$$

где $S_{\xi_1,\ \xi_2}$ обозначает замыкание оператора, определенного на $\mathfrak{M}\xi_2$ равенством

$$S_{\xi_1,\ \xi_2}A\xi_2=A^*\xi_1,\ \ A\in\mathfrak{M}.$$

Доказательство. Любой элемент $A\in\mathfrak{N}$ имеет вид

$$A=\sum_{i,\ j}A_{ij}\otimes E_{ij},$$

где $A_{ij}\in\mathfrak{M}$. Поэтому

$$A\Omega_0=A_{11}\xi_1\otimes\eta_{11}+A_{12}\xi_2\otimes\eta_{12}+A_{21}\xi_1\otimes\eta_{21}+A_{22}\xi_2\otimes\eta_{22}.$$

Это показывает, что вектор Ω_0 — циклический и отделяющий для $\mathfrak{N}$, так что можно определить S_{Ω_0} как замыкание отображения $A\Omega_0\longmapsto A^*\Omega_0$, $A\in\mathfrak{N}$. Во введенных обозначениях имеем

$$A^*=A_{11}^*\otimes E_{11}+A_{21}^*\otimes E_{12}+A_{12}^*\otimes E_{21}+A_{22}^*\otimes E_{22}$$

и, следовательно,

$$A^*\Omega_0=A_{11}^*\xi_1\otimes\eta_{11}+A_{21}^*\xi_2\otimes\eta_{12}+A_{12}^*\xi_1\otimes\eta_{21}+A_{22}^*\xi_2\otimes\eta_{22}.$$

Переходя к замыканию в обеих частях равенства, убеждаемся в замыкаемости $S_{\xi_1,\ \xi_2}$ и получаем соотношение

$$S_{\Omega_0}=U_{11}S_{\xi_1}U_{11}^*+U_{21}S_{\xi_1,\ \xi_2}U_{12}^*+U_{12}S_{\xi_2,\ \xi_1}U_{21}^*+U_{22}S_{\xi_2}U_{22}^*.$$

Лемма 2.5.34. *Примем обозначения леммы 2.5.33, и пусть $S_{\xi_1,\ \xi_2}=J_{\xi_1,\ \xi_2}\Delta_{\xi_1,\xi_2}^{1/2}$ будет полярным разложением оператора $S_{\xi_1,\ \xi_2}$. В таком случае*

$$J_{\Omega_0}=U_{11}J_{\xi_1}U_{11}^*+U_{21}J_{\xi_1,\ \xi_2}U_{12}^*+U_{12}J_{\xi_2,\ \xi_1}U_{21}^*+U_{22}J_{\xi_2}U_{22}^*\qquad(*)$$

и

$$\Delta_{\Omega_0} = U_{11}\Delta_{\xi_1}U_{11}^* + U_{21}\Delta_{\xi_2,\,\xi_1}U_{21}^* + U_{12}\Delta_{\xi_1,\,\xi_2}U_{12}^* + U_{22}\Delta_{\xi_2}U_{22}^*. \qquad (**)$$

Доказательство. Рассматривая S_{Ω_0}, J_{Ω_0} и Δ_{Ω_0} как 4×4-матрицы, сразу же убеждаемся, что правая часть в $(*)$ представляет собой изометрию $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{K}$, а правая часть $(**)$ является положительным самосопряженным оператором. Полярное разложение единственно, поэтому достаточно проверить, что $J_{\Omega_0}\Delta_{\Omega_0}^{1/2} = S_{\Omega_0}$, а это — простое упражнение.

Лемма 2.5.35. *Существует единственный унитарный элемент $U' \in \mathfrak{M}'$, такой что (в обозначениях лемм 2.5.33 и 2.5.34) $J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{21})J_{\Omega_0} = U'\otimes F_{21}$, и для этого унитарного элемента*

$$J_{\xi_1,\,\xi_2} = J_{\xi_1}U'^*,\ J_{\xi_2,\,\xi_1} = U'J_{\xi_1},\ J_{\xi_2} = U'J_{\xi_1}U'^*.$$

Доказательство. Поскольку $J_{\Omega_0}^2 = \mathbb{1}$, то из леммы 2.5.34 вытекает, что

$$J_{\xi_1,\,\xi_2}J_{\xi_2,\,\xi_1} = J_{\xi_2,\,\xi_1}J_{\xi_1,\,\xi_2} = \mathbb{1}.$$

Для $\xi_{ij}\in\mathfrak{H}$ имеем тогда

$$J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{11})J_{\Omega_0}\Big(\sum_{ij}\xi_{ij}\otimes\eta_{ij}\Big) = \xi_{11}\otimes\eta_{11} + \xi_{21}\otimes\eta_{21} = (\mathbb{1}\otimes F_{11})\Big(\sum_{ij}\xi_{ij}\otimes\eta_{ij}\Big).$$

Тем самым

$$J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{11})J_{\Omega_0} = \mathbb{1}\otimes F_{11},$$

и аналогично проверяется, что

$$J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{22})J_{\Omega_0} = \mathbb{1}\otimes F_{22}.$$

Но $\mathbb{1}\otimes E_{21}$ — это частичная изометрия с начальной областью $(\mathbb{1}\otimes E_{11})\,\mathfrak{K}$ и конечной областью $(\mathbb{1}\otimes E_{12})\,\mathfrak{K}$. Значит, и оператор $J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{21})J_{\Omega_0}$ должен быть частично изометрическим с начальной областью $(\mathbb{1}\otimes F_{11})\,\mathfrak{K}$ и конечной $(\mathbb{1}\otimes F_{22})\,\mathfrak{K}$. А так как

$$J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{21})J_{\Omega_0} \in \mathfrak{N}' = \mathfrak{M}'\otimes\mathfrak{F}',$$

то должен найтись такой унитарный оператор $U'\in\mathfrak{M}'$, что

$$J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{21})J_{\Omega_0} = U'\otimes F_{21}.$$

Далее, возьмем $\xi\in\mathfrak{H}$ и, применив лемму 2.5.34, убедимся, что

$$\begin{aligned}(J_{\xi_2,\,\xi_1}\xi)\otimes\eta_{12} &= J_{\Omega_0}(\xi\otimes\eta_{21})\\ &= J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{21})(\xi\otimes\eta_{11})\\ &= J_{\Omega_0}(\mathbb{1}\otimes E_{21})J_{\Omega_0}J_{\Omega_0}(\xi\otimes\eta_{11})\\ &= (U'\otimes F_{21})(J_{\xi_1}\xi\otimes\eta_{11})\\ &= (U'J_{\xi_1}\xi)\otimes\eta_{12}.\end{aligned}$$

Следовательно, $J_{\xi_2, \xi_1} = U'J_{\xi_1}$. Переходя к сопряженным, получим $J_{\xi_1, \xi_2} = J_{\xi_1}U'^*$. Наконец, при $\xi \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}(J_{\xi_2}\xi) \otimes \eta_{22} &= J_{\Omega_0}(\xi \otimes \eta_{22}) \\ &= J_{\Omega_0}(\mathbb{1} \otimes E_{24}) J_{\Omega_0} J_{\Omega_0}(\xi \otimes \eta_{12}) \\ &= (U' \otimes F_{21})(J_{\xi_1}U'^*\xi \otimes \eta_{21}) \\ &= (U'J_{\xi_1}U'^*\xi) \otimes \eta_{22}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$J_{\xi_2} = U'J_{\xi_1}U'^*.$$

Для всякой пары векторов ξ_1, ξ_2, одновременно циклических и отделяющих для $\mathfrak{M}$, будем обозначать через $\theta(\xi_2, \xi_1)$ унитарный элемент $U' \in \mathfrak{M}'$, полученный в лемме 2.5.35.

Лемма 2.5.36. *Если ξ_1, ξ_2 — циклические и отделяющие для $\mathfrak{M}$, а $U' \in \mathfrak{M}'$ — унитарный элемент, то*

$$\theta(U'\xi_2, \xi_1) = U'\theta(\xi_2, \xi_1).$$

Доказательство. При $A \in \mathfrak{M}$ имеем

$$S_{U'\xi_2, \xi_1}A\xi_1 = A^*U'\xi_2 = U'A^*\xi_2 = U'S_{\xi_2, \xi_1}A\xi_1.$$

Значит,

$$S_{U'\xi_2, \xi_1} = U'S_{\xi_2, \xi_1}.$$

Поэтому

$$J_{U'\xi_2, \xi_1} = U'J_{\xi_2, \xi_1},$$

и наше утверждение вытекает из леммы 2.5.35.

Отметим, что из двух последних лемм вытекает, что θ удовлетворяет цепному правилу

$$\theta(\xi_3, \xi_1) = \theta(\xi_3, \xi_2)\,\theta(\xi_2, \xi_1).$$

Лемма 2.5.37. *Если ξ — циклический и отделяющий для $\mathfrak{M}$ вектор, то эквивалентны следующие три утверждения:*

(I) $\theta(\xi, \Omega) = \mathbb{1}$;

(II) $\xi \in \mathscr{P}_\Omega$;

(III) $\mathscr{P}_\xi = \mathscr{P}_\Omega$.

Доказательство. (I) $\Rightarrow$ (II). По лемме 2.5.35, если $\theta(\xi, \Omega) = \mathbb{1}$, то $J_\xi = J_\Omega = J_{\xi, \Omega} = J$. Следовательно, при $A \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}(\xi, Aj(A)\Omega) &= (A^*\xi, j(A)\Omega) \\ &= (S_{\xi, \Omega}A\Omega, JA\Omega) \\ &= \left(J\Delta_{\xi, \Omega}^{1/2}A\Omega, JA\Omega\right) \\ &= \left(A\Omega, \Delta_{\xi, \Omega}^{1/2}A\Omega\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Тем самым ξ принадлежит сопряженному к $\mathscr{P}_\Omega^\vee$ конусу, который совпадает с $\mathscr{P}_\Omega$.

(II) $\Rightarrow$ (III). Это — предложение 2.5.30, (2).

(III) $\Rightarrow$ (II). Это тривиально.

(II) $\Rightarrow$ (I). Если $\xi \in \mathscr{P}_\Omega$, то при всех $A \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (\xi, AJ_\Omega A\Omega) \\ &= (A^*\xi, J_\Omega A\Omega) \\ &= (S_{\xi, \Omega}A\Omega, J_\Omega A\Omega) = (A\Omega, J_\Omega S_{\xi, \Omega}A\Omega). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\eta, J_\Omega S_{\xi, \Omega}\eta) \geqslant 0, \quad \eta \in D(S_{\xi, \Omega}).$$

Согласно лемме 2.5.33 и предложению 2.5.9, сопряженным к оператору $S_{\xi, \Omega}$ является замыкание $F_{\xi, \Omega}$ отображения

$$A'\Omega \longmapsto A'^*\xi, \quad A' \in \mathfrak{M}'.$$

Поэтому для $A \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} J_\Omega F_{\xi, \Omega} J_\Omega A\Omega &= J_\Omega F_{\xi, \Omega} J_\Omega A J_\Omega \Omega \\ &= J_\Omega (J_\Omega A J_\Omega)^* \xi \\ &= A^*\xi = S_{\xi, \Omega} A\Omega; \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались равенством $J_\Omega\xi = \xi$. Следовательно,

$$S_{\xi, \Omega} \subseteq J_\Omega F_{\xi, \Omega} J_\Omega.$$

Но вполне аналогично и

$$F_{\xi, \Omega} \subseteq J_\Omega S_{\xi, \Omega} J_\Omega,$$

так что

$$J_\Omega S_{\xi, \Omega} = F_{\xi, \Omega} J_\Omega.$$

Итак,

$$(J_\Omega S_{\xi, \Omega})^* = S_{\xi, \Omega}^* J_\Omega = F_{\xi, \Omega} J_\Omega = J_\Omega S_{\xi, \Omega}.$$

Нами установлено, что оператор $J_\Omega S_{\xi, \Omega}$ положителен и самосопряжен. Из единственности полярного разложения следует, что $J_\Omega = J_{\xi, \Omega}$, поскольку $S_{\xi, \Omega} = J_\Omega (J_\Omega S_{\xi, \Omega})$. Значит, $\theta(\xi, \Omega) = \mathbb{1}$, по лемме 2.5.35.

Следующая лемма демонстрирует справедливость утверждения а) теоремы 2.5.31 для некоторого плотного множества форм из $\mathfrak{M}_{*+}$. В полном объеме указанное утверждение следует из этого частичного результата и оценки, содержащейся в теореме 2.5.31, б).

Лемма 2.5.38. *Пусть $\eta \in \mathfrak{H}$ обозначает вектор, циклический и отделяющий для $\mathfrak{M}$. Существует единственный вектор $\xi \in \mathscr{P}$ со свойством*

$$(\eta, A\eta) = (\xi, A\xi)$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Положим $U' = \theta(\eta, \Omega)$ и $\xi = U'^*\eta$. Так как U' — унитарный элемент из $\mathfrak{M}'$, то

$$(\eta, A\eta) = (\xi, A\xi)$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$. Но по лемме 2.5.36

$$\theta(\xi, \eta) = \theta(U'^*\eta, \Omega) = U'^*\theta(\eta, \Omega) = \mathbb{1},$$

а лемма 2.5.37 показывает, что $\xi \in \mathscr{P}$.

Для доказательства единственности предположим, что $\xi' \in \mathscr{P}$ и $\omega_{\xi'} = \omega_\xi$. Вектор ξ' — отделяющий для $\mathfrak{M}$, поэтому он также циклический, в силу предложения 2.5.30. Тем самым элемент $\theta(\xi', \Omega)$ определен. Поскольку $\omega_{\xi'} = \omega_\xi$, теорема 2.3.16 гарантирует существование такого унитарного $U' \in \mathfrak{M}'$, что $\xi' = U'\xi$. По лемме 2.5.36

$$\theta(\xi', \Omega) = \theta(U'\xi, \Omega) = U'.$$

Так как $\xi' \in \mathscr{P}$, то из леммы 2.5.37 следует, что $U' = \mathbb{1}$; таким образом, $\xi' = \xi$.

Лемма 2.5.39. *Множество положительных форм ω_η, отвечающих векторам η, циклическим и отделяющим для $\mathfrak{M}$, плотно по норме в $\mathfrak{M}_{*+}$.*

Доказательство. Если $\omega \in \mathfrak{M}_{*+}$, то, согласно теореме 2.4.21, ω имеет вид $\omega(A) = \Sigma_n (\xi_n, A\xi_n)$, где $\Sigma_n \|\xi_n\|^2 < \infty$. Каждый из векторов ξ_n можно аппроксимировать векторами вида $A'_n\Omega$, где $A'_n \in \mathfrak{M}'$. Но при $A \in \mathfrak{M}_+$

$$\left(A'_n\Omega, AA'_n\Omega\right) = \left(A^{1/2}\Omega, A'^*_n A'_n A^{1/2}\Omega\right) \leqslant \|A'_n\|^2 (\Omega, A\Omega).$$

Значит, множество положительных форм ω, для которых

$$\omega(A) \leqslant \alpha(\Omega, A\Omega)$$

при некоторой константе α, плотно в $\mathfrak{M}_{*+}$ по норме. Но по теореме 2.3.19 такие состояния имеют вид

$$\omega(A) = (A'\Omega, AA'\Omega),$$

где $A' \in \mathfrak{M}'_+$. Всякий элемент $A' \in \mathfrak{M}'_+$ можно аппроксимировать по норме обратимым $B' \in \mathfrak{M}'_+$. Введем $\eta = B'\Omega$ и покажем, что этот вектор — циклический и отделяющий для $\mathfrak{M}'$. Если $A\eta = 0$ при $A \in \mathfrak{M}$, то $0 = B'^{-1}A\eta = AB'^{-1}\eta = A\Omega$, так что $A = 0$ и η — отделяющий для $\mathfrak{M}$. Если же $A'\eta = 0$ при $A' \in \mathfrak{M}'$, то $A'B'\Omega = 0$ и $A'B' = 0$. Обратимость B' означает, что $A' = 0$ и вектор η — отделяющий для $\mathfrak{M}'$, а следовательно циклический для $\mathfrak{M}$, согласно предложению 2.5.3.

Теперь мы займемся оценкой, указанной в теореме 2.5.31. Сначала нам потребуется следующая

Лемма 2.5.40. *Обозначим $\mathfrak{H}_{sa} = \mathscr{P} - \mathscr{P}$, $\mathfrak{M}_{sa} = \mathfrak{M}_+ - \mathfrak{M}_+$. Отображение Φ: $\mathfrak{M}_{sa} \longmapsto \mathfrak{H}_{sa}$; $A \longmapsto \Delta^{1/4}A\Omega$ является порядковым изоморфизмом $\mathfrak{M}_{sa}$ на множество таких $\xi \in \mathfrak{H}_{sa}$, что*

$$-\alpha\Omega \leqslant \xi \leqslant \alpha\Omega$$

при некоторой константе $\alpha > 0$ (отношения порядка индуцируются соответственно конусами $\mathfrak{M}_+$ и $\mathscr{P}$).

Доказательство. Из предложения 2.5.26 вытекает, что $A \in \mathfrak{M}_+ \Rightarrow \Delta^{1/4}A\Omega \in \mathscr{P}$. В обратную сторону, если $A = A^*$ и $\Delta^{1/4}A\Omega \in \mathscr{P}$, то при любом $A' \in \mathfrak{M}'$

$$\begin{aligned}(A'\Omega, AA'\Omega) &= (A'^*A'\Omega, A\Omega) \\ &= (\Delta^{-1/4}|A'|^2\Omega, \Delta^{1/4}A\Omega) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $A \geqslant 0$.

Таким образом, $\Phi\colon \mathfrak{M}_{sa} \to \Phi(\mathfrak{M}_{sa})$ — порядковый изоморфизм. Покажем теперь, что Φ непрерывно относительно $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-топологии в $\mathfrak{M}$ и $\sigma(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$-топологии (т. е. слабой топологии) в $\mathfrak{H}$. При $A \in \mathfrak{M}$ имеем

$$(1 + \Delta^{1/2}) A\Omega = A\Omega + JA^*\Omega,$$

так что

$$A\Omega = (1 + \Delta^{1/2})^{-1}(A\Omega + JA^*\Omega)$$

и

$$\Delta^{1/4} A\Omega = (\Delta^{1/4} + \Delta^{-1/4})^{-1}(A\Omega + JA^*\Omega).$$

Следовательно, при $\eta \in \mathfrak{H}_{sa}$

$$(\eta,\ \Delta^{1/4} A\Omega) = ((\Delta^{1/4} + \Delta^{-1/4})^{-1}\eta,\ A\Omega + JA^*\Omega).$$

Так как $\|(\Delta^{1/4} + \Delta^{-1/4})^{-1}\| \leqslant 1/2$, то утверждение о непрерывности проверено.

Далее, предположим, что $-\alpha\Omega \leqslant \xi \leqslant \alpha\Omega$. С помощью надлежащей нормировки можно добиться, чтобы $0 \leqslant \xi \leqslant \Omega$. Положим

$$\xi_n = f_n(\log \Delta)\, \xi,$$

где $f_n(x) = e^{-x^2/2n^2}$. Тогда $\xi_n \in D(\Delta^\beta)$ при всех $\beta \in \mathbb{C}$, и по предложению 2.5.26, (3)

$$0 \leqslant \xi_n = f_n(\log \Delta)\, \xi \leqslant f_n(\log \Delta)\, \Omega = \Omega.$$

Теперь для любого $A' \in \mathfrak{M}'_+$

$$(\Delta^{-1/4}\xi_n,\ A'\Omega) = (\xi_n,\ \Delta^{-1/4} A'\Omega) \geqslant 0,$$

так как $\Delta^{-1/4} A'\Omega \in \mathscr{P}$. Значит, в силу предложения 2.5.27,

$$\Delta^{-1/4}\xi_n \in \overline{\mathfrak{M}'_+\Omega}^{\vee} = \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}.$$

Сходным образом находим, что

$$\Omega - \Delta^{-1/4}\xi_n = \Delta^{-1/4}(\Omega - \xi_n) \in \overline{\mathfrak{M}_+\Omega},$$

так что для $A' \in \mathfrak{M}'_+$

$$0 \leqslant (\Delta^{-1/4}\xi_n,\ A'\Omega) \leqslant (\Omega,\ A'\Omega).$$

Поэтому, согласно предложению 2.5.27, (1), существует оператор $A_n \in \mathfrak{M}$ со свойствами $0 \leqslant A_n \leqslant 1$ и

$$\Delta^{-1/4}\xi_n = A_n\Omega.$$

В результате мы выводим, что $\xi_n \in \mathfrak{B}$, где

$$\mathfrak{B} = \{\Phi(A);\ A \in \mathfrak{M}_{sa},\ 0 \leqslant A \leqslant 1\}.$$

Так как множество $\{A;\ A \in \mathfrak{M}_{sa},\ 0 \leqslant A \leqslant 1\}$, очевидно, σ-слабо замкнуто и потому является σ-слабо компактным подмножеством в $\mathfrak{M}_1$, а Φ действует $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-$\sigma(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$-непрерывно, то $\mathfrak{B}$ также $\sigma(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$-компактно. Таким образом, $\xi = \lim_n \xi_n \in \mathfrak{B}$.

Лемма 2.5.41. *Для* $\xi,\ \eta \in \mathscr{P}$

$$\|\xi - \eta\|^2 \leqslant \|\omega_\xi - \omega_\eta\| \leqslant \|\xi - \eta\|\|\xi + \eta\|.$$

Доказательство. Второе неравенство верно при всех $\xi,\ \eta \in \mathfrak{H}$, поскольку

$$(\omega_\xi - \omega_\eta)(A) = \frac{1}{2}[(\xi - \eta,\ A(\xi + \eta)) + (\xi + \eta,\ A(\xi - \eta))].$$

Для доказательства первого неравенства предположим вначале, что $\xi + \eta$ — циклический и отделяющий вектор. Этот вектор лежит в $\mathscr{P}$, поэтому, в силу предложения 2.5.30, (2), $\mathscr{P}_{\xi+\eta} = \mathscr{P}$. Далее,

$$-(\xi + \eta) \leqslant \xi - \eta \leqslant (\xi + \eta).$$

Тем самым можно воспользоваться леммой 2.5.40, взяв $\xi + \eta$ в качестве Ω, и убедиться в существовании такого $A = A^* \in \mathfrak{M}$, что

$$-\mathbb{1} \leqslant A \leqslant \mathbb{1}$$

и

$$\xi - \eta = \Delta_{\xi+\eta}^{1/4} A \ (\xi + \eta).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\omega_\xi - \omega_\eta\| &\geqslant (\omega_\xi - \omega_\eta)(A) \\ &= (\xi, A\xi) - (\eta, A\eta) \\ &= \operatorname{Re}\,(\xi - \eta, A\,(\xi + \eta)) \\ &= \left(\xi - \eta, \Delta_{\xi+\eta}^{-1/4}\,(\xi - \eta)\right).\end{aligned}$$

А так как $J\,(\xi - \eta) = \xi - \eta$ и $J\Delta_{\xi+\eta}^{-1/4} = \Delta_{\xi+\eta}^{1/4}J$, то

$$\left(\xi - \eta, \Delta_{\xi+\eta}^{-1/4}\,(\xi - \eta)\right) = \left(\xi - \eta, \Delta_{\xi+\eta}^{1/4}\,(\xi - \eta)\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\|\omega_\xi - \omega_\eta\| &\geqslant \left(\xi - \eta, \frac{1}{2}\left(\Delta_{\xi+\eta}^{1/4} + \Delta_{\xi+\eta}^{-1/4}\right)(\xi - \eta)\right) \\ &\geqslant \|\xi - \eta\|^2,\end{aligned}$$

ибо $\frac{1}{2}\left(\Delta_{\xi+\eta}^{1/4} + \Delta_{\xi+\eta}^{-1/4}\right) \geqslant \mathbb{1}$.

В случае произвольных ξ и η из $\mathscr{P}$ можно подобрать такие последовательности $A'_n, B'_n \in \mathfrak{M}'_+$ целых аналитических элементов для σ', что $\xi_n = \Delta^{-1/4}A'_n\Omega \to \xi$, $\eta_n = \Delta^{-1/4}B'_n\Omega \to \eta$. Прибавив, если необходимо, $\varepsilon_n\mathbb{1}$ к A'_n, B'_n, можно считать, что $A'_n \geqslant \varepsilon_n\mathbb{1} > 0$ и $B'_n \geqslant \varepsilon_n\mathbb{1} > 0$. Но тогда $A'_n + B'_n \geqslant 2\varepsilon_n\mathbb{1}$ и, значит, $A'_n \pm B'_n$ обратимы. Следовательно, обратимы $\Delta^{-1/4}\left(A'_n + B'_n\right)\Delta^{1/4} \in \mathfrak{M}'$, поэтому $\xi_n + \eta_n = \Delta^{-1/4}\left(A'_n + B'_n\right)\Omega$ будут отделяющими и циклическими для $\mathfrak{M}$. В результате получаем

$$\|\omega_{\xi_n} - \omega_{\eta_n}\| \geqslant \|\xi_n - \eta_n\|^2,$$

и первое из неравенств, указанных в лемме, выводится из второго предельным переходом по n.

Конец доказательства теоремы 2.5.31. Утверждение б) сводится к лемме 2.5.41, а а) вытекает из б) и лемм 2.5.38 и 2.5.39.

Доказательство следствия 2.5.32. Пусть $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — произвольный *-автоморфизм, и пусть $\xi \in \mathscr{P}$ — вектор, представляющий состояние

$$A \longmapsto (\Omega, \alpha^{-1}(A)\,\Omega),$$

т. е.

$$(\xi, A\xi) = (\Omega, \alpha^{-1}(A)\,\Omega).$$

Тогда ξ является отделяющим для $\mathfrak{M}$, а значит, по предложению 2.5.30, и циклическим. Введем оператор $U = U(\alpha)$ на $\mathfrak{M}\Omega$, полагая

$$UA\Omega = \alpha(A)\,\xi.$$

Имеем

$$\| UA\Omega \|^2 = (\xi,\ \alpha(A^*A)\,\xi) = (\Omega,\ A^*A\Omega) = \| A\Omega \|^2,$$

так что, замкнув U, мы получим изометрический оператор, который обозначим той же буквой U. Так как ξ — циклический вектор, то область значений U плотна, следовательно, U унитарен, $U^* = U^{-1}$, т. е.

$$U^*A\Omega = \alpha^{-1}(A)\,\xi.$$

Далее, при $A,\ B \in \mathfrak{M}$

$$UAU^*B\xi = UA\alpha^{-1}(B)\,\Omega = \alpha(A\alpha^{-1}(B))\,\xi = \alpha(A)\,B\xi.$$

Отсюда

$$\alpha(A) = UAU^*,\quad A \in \mathfrak{M},$$

и этим доказан пункт а) (в роли $U(\alpha)$ выступает U). Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} SU^*A\xi = S\alpha^{-1}(A)\,\Omega = \alpha^{-1}(A)^*\,\Omega = \alpha^{-1}(A^*)\,\Omega = U^*A^*\xi \\ = U^*S_\xi A\xi. \end{aligned}$$

Переходя к замыканиям, получаем

$$J\Delta^{1/2}U^* = U^*J_\xi\Delta_\xi^{1/2} = U^*J\Delta_\xi^{1/2},$$

или

$$UJU^*U\Delta^{1/2}U^* = J\Delta_\xi^{1/2}.$$

В силу единственности полярного разложения, $UJU^* = J$, или, что равносильно,

$$[U,\ J] = 0,$$

и этим доказан пункт в). Опираясь на в) и а), для $A \in \mathfrak{M}$ получаем

$$UAj(A)\,\Omega = \alpha(A)\,j(\alpha(A))\,\xi.$$

Поскольку $\xi \in \mathscr{P}$, из предложений 2.5.26, (5) и 2.5.30, (2) выводим, что

$$U\mathscr{P} = \mathscr{P}.$$

Если $\varphi \in \mathfrak{M}_{*+}$, то при всех $A \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} (U\xi(\varphi),\ AU\xi(\varphi)) &= (\xi(\varphi),\ U^*AU\xi(\varphi)) \\ &= (\xi(\varphi),\ \alpha^{-1}(A)\,\xi(\varphi)) = \varphi(\alpha^{-1}(A)) \\ &= (\alpha^{-1*}(\varphi))(A) = (\xi(\alpha^{-1*}(\varphi)),\ A\xi(\alpha^{-1*}(\varphi))). \end{aligned}$$

Учитывая единственность в $\mathscr{P}$ векторного представителя состояния, заключаем, что

$$U(\alpha)\,\xi(\varphi) = \xi(\alpha^{-1*}(\varphi)).$$

Тем самым доказан пункт б), и, кроме того, отсюда следуют тот факт, что $\alpha \longmapsto U(\alpha)$ является представлением, а также единственность $U(\alpha)$.

Непрерывность отображений $\alpha \longmapsto U(\alpha)$ и $U(\alpha) \longmapsto \alpha$ в различных топологиях, указанных в следствии, вытекает из теоремы 2.5.31 б), с учетом того обстоятельства, что

$$\| U(\alpha) - U(\beta) \| = \left\| (U(\alpha) - U(\beta)) \big|_{\mathscr{P}} \right\|.$$

Последнее равенство объясняется тем, что каждый вектор $\psi \in \mathfrak{H}$ обладает единственным разложением (предложение 2.5.28) вида

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 + i(\psi_3 - \psi_4),$$

где $\psi_k \in \mathscr{P}$, $\psi_1 \perp \psi_2$, $\psi_3 \perp \psi_4$, и $U(\alpha)$ сохраняют такое разложение. Совпадение слабой, сильной и сильной* топологий на группе $U(\mathfrak{H})$ унитарных операторов в $\mathfrak{H}$ устанавливается с помощью тождества

$$\begin{aligned}\|(V-U)\psi\|^2 &= ((V-U)\psi, (V-U)\psi) \\ &= 2\|\psi\|^2 - (V\psi, U\psi) - (U\psi, V\psi).\end{aligned}$$

Таким образом, если $V \to U$ слабо, то $V \to U$ сильно, а также $V^* \to U^*$ сильно.

2.6. Квазилокальные алгебры

2.6.1. Кластерные свойства

В предыдущих разделах этой главы мы описали общую структуру C^*-алгебр и алгебр фон Неймана. Теперь мы обсудим свойства определенного класса C^*-алгебр — квазилокальных алгебр — и частично изучим свойства специального класса состояний, именуемых локально-нормальными, на этих алгебрах.

Отличительной особенностью квазилокальных алгебр является наличие порождающей их возрастающей сети локальных подалгебр. Для дальнейшего анализа полезна

Теорема 2.6.1. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ имеет циклический единичный вектор Ω, который определяет состояние ω на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$:*

$$\omega(B) = (\Omega, B\Omega), \quad B \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}).$$

Пусть $\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ — убывающая сеть алгебр фон Неймана; определим алгебру $\mathfrak{M}$ равенством

$$\mathfrak{M} = \bigcap_\alpha \mathfrak{M}_\alpha.$$

Если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}'$ или если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}''$ и вектор Ω — отделяющий для $\mathfrak{A}''$, то эквивалентны следующие условия:

(1) $\mathfrak{M}$ состоит из элементов, кратных единице;

(2) для любого $A \in \mathfrak{A}$ найдется индекс α, такой что

$$|\omega(AM) - \omega(A)\omega(M)| \leqslant \|M\|$$

при всех $M \in \mathfrak{M}_\alpha$;

(3) для любого $A \in \mathfrak{A}''$ найдется такой индекс α, что

$$|\omega(AM) - \omega(A)\omega(M)| \leqslant \{\omega(M^*M) + \omega(MM^*)\}^{1/2}$$

при всех $M \in \mathfrak{M}_\alpha$.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (2). Сначала заметим, что, заменив A на A/ε, можно вместо неравенства в условии (2) рассмотреть неравенство

$$|\omega(AM) - \omega(A)\omega(M)| < \varepsilon \; \|M\|.$$

Аналогичное замечание применимо и к условию (3). Поэтому (3) $\Rightarrow$ (2), так как

$$\{\omega(M^*M) + \omega(MM^*)\}^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\,\|M\|.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Если условие (1) неверно, то существуют такие $A, B \in \mathfrak{A}$ и $M \in \mathfrak{M}$, что

$$(\Omega,\ AMB\Omega) \neq \omega(M)(\Omega,\ AB\Omega).$$

Домножив A и M на скаляры, можно добиться того, что при некоторых A, $B \in \mathfrak{A}$ и $M \in \mathfrak{M}$

$$|\omega(A+B) - \omega(M)\omega(AB)| > \|M\|.$$

Таким образом, если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}'$, то (2) не имеет места, так что (2) $\Rightarrow$ (1). Если же вектор Ω — отделяющий для $\mathfrak{A}''$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}''$, но $\mathfrak{M} \neq \mathbb{C}\mathbb{1}$, то найдется такое $M \in \mathfrak{M}$, что $M\Omega \neq \omega(M)\Omega$. Значит, существует такое $A \in \mathfrak{A}$, что $|(A^*\Omega, (M - \omega(M)\mathbb{1})\Omega| > \|M\|$, т. е.

$$|\omega(AM) - \omega(A)\omega(M)| > \|M\|.$$

Остается доказать импликацию (1) $\Rightarrow$ (3). Для этого потребуется

Лемма 2.6.2. *Пусть $\mathfrak{M}_\alpha$ — убывающая сеть алгебр фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и*

$$\mathfrak{M} = \bigcap_\alpha \mathfrak{M}_\alpha.$$

Допустим, что Ω — циклический для $\mathfrak{M}'$ вектор и что имеется сеть элементов $M_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, такая что существуют следующие слабые пределы:

$$\varphi = \text{w-}\lim_\alpha M_\alpha\Omega, \qquad \varphi^* = \text{w-}\lim_\alpha M_\alpha^*\Omega.$$

В этом случае φ и φ^* принадлежат замыканию $\overline{\mathfrak{M}\Omega}$ множества $\mathfrak{M}\Omega$.

Доказательство. Определим $N_\alpha = (M_\alpha + M_\alpha^*)/2$ и $\psi = (\varphi + \varphi^*)/2$; тогда для $A \in \mathfrak{M}_\alpha'$ имеем

$$(A\psi,\ \Omega) = \lim_\beta (AN_\beta\Omega,\ \Omega) = \lim_\beta (A\Omega,\ N_\beta\Omega) = (A\Omega,\ \psi).$$

Но тогда такое же соотношение верно для любого $A \in \{\bigcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha'\}''$. Однако

$$\Big\{\bigcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha'\Big\}'' = \mathfrak{M}'.$$

Выберем теперь проектор $P \in \mathfrak{M}'$ с областью значений $\overline{\mathfrak{M}\Omega}$. При $A \in \mathfrak{M}'$

$$\begin{aligned}(A\Omega,\ P\psi) &= (PA\Omega,\ \psi) = (PA\psi,\ \Omega)\\ &= (A\psi,\ P\Omega) = (A\psi,\ \Omega) = (A\Omega,\ \psi).\end{aligned}$$

Тем самым вектор $\psi - P\psi$ ортогонален плотному множеству $\mathfrak{M}'\Omega$ и

$$\frac{\varphi + \varphi^*}{2} = \psi = P\psi \in \overline{\mathfrak{M}\Omega}.$$

Аналогичное рассуждение с заменой N_α на $(M_\alpha - M_\alpha^*)/2i$ и ψ на $(\varphi - \varphi^*)/2i$ дает

$$\frac{\varphi - \varphi^*}{2i} \in \overline{\mathfrak{M}\Omega},$$

так что $\varphi,\ \varphi^* \in \overline{\mathfrak{M}\Omega}$.

Теперь можно завершить доказательство теоремы 2.6.1, показав, что (1) $\Rightarrow$ (3). Предположим, что (3) ложно. Тогда найдется элемент $A \in \mathfrak{A}''$, такой, что при любом α для всякого $M_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$

$$|\omega(AM_\alpha) - \omega(A)\,\omega(M_\alpha)| > \{\omega(M_\alpha^* M_\alpha) + \omega(M_\alpha M_\alpha^*)\}^{1/2}.$$

Правая часть не может обращаться в нуль, так как $\omega(M_\alpha^* M_\alpha) = 0$ повлечет $M_\alpha\Omega = 0$, а потому и левая часть нулевая, в противоречие с условием. Далее, введем N_α, полагая

$$N_\alpha = \frac{M_\alpha}{\{\omega(M_\alpha^* M_\alpha) + \omega(M_\alpha M_\alpha^*)\}^{1/2}},$$

и заметим, что

$$|\omega(AN_\alpha) - \omega(A)\,\omega(N_\alpha)| > 1$$

и

$$\omega(N_\alpha^* N_\alpha) + \omega(N_\alpha N_\alpha^*) = 1.$$

Из последнего условия ясно, что $\|N_\alpha\Omega\| \leqslant 1$ и $\|N_\alpha^*\Omega\| \leqslant 1$. Следовательно, воспользовавшись слабой компактностью единичного шара в $\mathfrak{H}$, можно указать такую подсеть $\{N_{\alpha'}\}$, для которой существуют пределы

$$\varphi = \lim_{\alpha'} N_{\alpha'}\Omega, \quad \varphi^* = \lim_{\alpha'} N_{\alpha'}^*\Omega.$$

Поэтому

$$|(\Omega,\ A\varphi) - \omega(A)(\Omega,\ \varphi)| \geqslant 1.$$

Применим теперь лемму 2.6.2 к $\mathfrak{M}$ и $N_{\alpha'}$, $N_{\alpha'}^*$. Возможны два случая. Либо $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}'$, так что $\mathfrak{M}' \supseteq \mathfrak{A}''$, Ω цикличен для $\mathfrak{M}'$ и применима лемма, либо $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}''$ и вектор Ω — отделяющий для $\mathfrak{A}''$. В последнем случае Ω будет отделяющим для $\mathfrak{M}$ и циклическим для $\mathfrak{M}'$, согласно лемме 2.5.3, так что вновь применима лемма 2.6.2. В любом случае, поскольку в соответствии с последним неравенством φ не может быть кратен Ω, мы имеем $\mathfrak{M} \neq \mathbb{C}\mathbb{1}$, т. е. (1) не выполняется.

Перейдем к понятию квазилокальной алгебры. Такая алгебра порождается возрастающей сетью подалгебр $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$, удовлетворяющих ряду структурных отношений. Для того чтобы ввести эту структуру, сначала надо обсудить что́ представляет собой множество индексов I. В приложениях им служит обычно множество ограниченных открытых подмножеств конфигурационного пространства $\mathbb{R}^\nu$, упорядоченное по включению. Это множество является направленным и обладает рядом других свойств, связанных с операциями объединения и пересечения. Частичные аналоги этих свойств понадобятся нам и в случае более общих семейств индексов.

Говорят, что в направленном множестве I введено *отношение ортогональности*, если задано бинарное отношение $\perp$ для элементов I, обладающее следующими свойствами:

а) для всякого $\alpha \in I$ найдется такой элемент $\beta \in I$, что $\alpha \perp \beta$;

б) если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \perp \gamma$, то $\alpha \perp \gamma$;

в) если $\alpha \perp \beta$ и $\alpha \perp \gamma$, то существует такой элемент $\delta \in I$, что $\alpha \perp \delta$ и $\delta \geqslant \beta$, γ. Для I, состоящего из ограниченных открытых подмножеств в $\mathbb{R}^\nu$, $\alpha \perp \beta$ могло бы означать, что α и β имеют пустое пересечение.

Впоследствии нам понадобится аналог операции объединения двух множеств. Будем предполагать, что всякая пара элементов множества I имеет точную верхнюю грань $\alpha \vee \beta$. Тем самым мы считаем, что если α, $\beta \in I$, то существует элемент $\alpha \vee \beta \in I$ со свойствами

г) $\alpha \vee \beta \geqslant \alpha$ и $\alpha \vee \beta \geqslant \beta$;

д) если $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$, то $\gamma \geqslant \alpha \vee \beta$.

Отметим еще, что если σ — автоморфизм C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, для которого $\sigma^2 = \iota$, т. е. $\sigma(\sigma(A)) = A$ при любом $A \in \mathfrak{A}$, то всякий элемент $A \in \mathfrak{A}$ обладает единственным разложением на четную и нечетную части относительно σ. Это разложение определяется так:

$$A = A^+ + A^-, \quad A^\pm = \frac{A \pm \sigma(A)}{2}.$$

При этом $\sigma(A^\pm) = \pm A^\pm$; четные элементы[1] $\mathfrak{A}^e$ образуют C^*-подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, а нечетные элементы — некоторое банахово пространство $\mathfrak{A}^o$.

Теперь мы уже можем сформулировать определение квазилокальной алгебры.

Определение 2.6.3. *Квазилокальная алгебра* — это C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ вместе с такой сетью $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ («локальных») C^*-подалгебр, что во множестве индексов введено отношение ортогональности и выполнены следующие условия:

(1) если $\alpha \geqslant \beta$, то $\mathfrak{A}_\alpha \supseteq \mathfrak{A}_\beta$;

(2) $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha}$, где черта означает равномерное замыкание;

(3) алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$ имеют общую единицу $\mathbb{1}$;

(4) существует такой автоморфизм σ, что $\sigma^2 = \iota$, $\sigma(\mathfrak{A}_\alpha) = \mathfrak{A}_\alpha$ и $[\mathfrak{A}_\alpha^e, \mathfrak{A}_\beta^e] = \{0\}$, $[\mathfrak{A}_\alpha^e, \mathfrak{A}_\beta^o] = \{0\}$, $\{\mathfrak{A}_\alpha^o, \mathfrak{A}_\beta^o\} = \{0\}$, если $\alpha \perp \beta$; здесь $\mathfrak{A}_\alpha^e \subseteq \mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{A}_\alpha^o \subseteq \mathfrak{A}_\alpha$ обозначают множества четных и нечетных элементов относительно σ. Мы применили обозначение

[1] Ниже индекс e — от even (четный), индекс o — от odd (нечетный). — *Прим. ред.*

$\{A, B\} = AB + BA$ для антикоммутатора. Частный случай описанной структуры получаем при $\sigma = \iota$; тогда $\mathfrak{A}_\alpha^e = \mathfrak{A}_\alpha$ и условие (4) упрощается, приобретая вид

$$[\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_\beta] = \{0\}$$

при $\alpha \perp \beta$. В приложениях к квантовой механике $\sigma = \iota$ соответствует бозе-статистике, в случае ферми-статистики $\sigma \neq \iota$.

Условие (3) можно было бы заменить более слабым условием, предположив, что каждая $\mathfrak{A}_\alpha$ содержит аппроксимативную единицу для $\mathfrak{A}$, но такое обобщение приводит по сути дела только к усложнению обозначений. В приложениях к математической физике подалгебры $\mathfrak{A}_\alpha$ индексируются ограниченными открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^\nu$, упорядоченными по включению. Алгебра $\mathfrak{A}_\alpha$ интерпретируется как алгебра физических наблюдаемых для подсистемы, локализованной в области α конфигурационного пространства $\mathbb{R}^\nu$. Квазилокальная алгебра $\mathfrak{A}$ соответствует расширенной алгебре наблюдаемых для бесконечной системы. Состояние ω на $\mathfrak{A}$ представляет физическое состояние системы, а числа $\omega(A)$, $\omega(B)$, ... отвечают результатам наблюдений A, B, ... Представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ позволяет дать более подробное описание индивидуального состояния ω, и алгебра фон Неймана $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ интерпретируется как алгебра наблюдаемых, соответствующих этому состоянию. Некоторые из подалгебр алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ выделяются той важной ролью, которую они играют при изучении состояний на квазилокальных алгебрах. Среди таких подалгебр — центр $\mathfrak{Z}_\omega = \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, две другие подалгебры вводит следующее

Определение 2.6.4. Если ω — состояние квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$, то *коммутантной алгеброй* $\mathfrak{Z}_\omega^c$ ассоциированного представления

$$(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$$

назовем

$$\mathfrak{Z}_\omega^c = \bigcap_{\alpha \in I} (\pi_\omega(\mathfrak{A}_\alpha)' \bigcap \pi_\omega(\mathfrak{A}))''$$

и *алгеброй на бесконечности* — алгебру

$$\mathfrak{Z}_\omega^\perp = \bigcap_{\alpha \in I} \Big(\bigcup_{\beta \perp \alpha} \pi_\omega(\mathfrak{A}_\beta)\Big)''.$$

Отметим, что $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$ — действительно алгебра, в силу условия в) на множество индексов I. Далее, поскольку $\mathfrak{A}$ квазилокальна и $\mathfrak{Z}_\omega = \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то

$$\mathfrak{Z}_\omega = \bigcap_{\alpha \in I} (\pi_\omega(\mathfrak{A}_\alpha)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'').$$

Отсюда легко получить, что $\mathfrak{Z}_\omega^c \subseteq \mathfrak{Z}_\omega$.

С помощью теоремы 2.6.1 и теоремы Капланского о плотности мы немедленно заключаем, что следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathfrak{Z}_\omega^c$ состоит из кратных единице элементов $\lambda\mathbb{1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$;

(2) всякому $A \in \mathfrak{A}$ можно сопоставить такой индекс α, что

$$|\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)| \leqslant \|\pi_\omega(B)\|$$

при любом $B \in \mathfrak{A}'_\alpha \cap \mathfrak{A}$;

(3) всякому $A \in \mathfrak{A}$ соответствует такой индекс α, что

$$|\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)| \leqslant \{\omega(B^*B) + \omega(BB^*)\}^{1/2}$$

при всех $B \in \mathfrak{A}'_\alpha \cap \mathfrak{A}$.

Теперь мы рассмотрим свойства алгебры $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$. При $\sigma \neq \iota$ свойство антикоммутативности приводит к ряду сложностей, и даже совсем не очевидно, что $\mathfrak{Z}_\omega^\perp \subseteq \mathfrak{Z}_\omega$, но это всё же так.

Теорема 2.6.5. *Пусть ω — состояние на квазилокальной алгебре. Алгебра на бесконечности $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$ содержится в центре $\mathfrak{Z}_\omega$ ассоциированного с ω представления; точнее,*

$$\mathfrak{Z}_\omega^\perp = \bigcap_{\alpha \in I} \Big(\bigcup_{\beta \perp \alpha} \pi_\omega(\mathfrak{A}_\beta^e)\Big)'' \subseteq \mathfrak{Z}_\omega \cap \pi_\omega(\mathfrak{A}^e)''.$$

Следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$ состоит из кратных единице элементов;

(2) всякому $A \in \mathfrak{A}$ можно сопоставить такой индекс α, что

$$|\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)| \leqslant \|\pi_\omega(B)\|$$

при любом $B \in \mathfrak{A}_\beta$ и всех $\beta \perp \alpha$;

(3) всякому $A \in \mathfrak{A}$ соответствует такой индекс α, что

$$|\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)| \leqslant \{\omega(B^*B) + \omega(BB^*)\}^{1/2}$$

при всех $B \in \mathfrak{A}_\beta$ и всех $\beta \perp \alpha$.

Доказательство. Если $\mathfrak{M}_\alpha^\perp$ определить как

$$\mathfrak{M}_\alpha^\perp = \Big(\bigcup_{\beta \perp \alpha} \pi_\omega(\mathfrak{A}_\beta)\Big)'',$$

то

$$\mathfrak{Z}_\omega^\perp = \bigcap_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^\perp.$$

Как только установлено включение $\mathfrak{Z}_\omega^\perp \subseteq \mathfrak{Z}_\omega \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, эквивалентность указанных трех условий вытекает из теоремы 2.6.1 и теоремы Капланского о плотности (теорема 2.4.16). Поэтому займемся характеризацией $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$.

Прежде всего покажем, что из $B \in \mathfrak{Z}_\omega^\perp$ следует $B \in \pi_\omega(\mathfrak{A}^e)''$. Поскольку $B \in \mathfrak{Z}_\omega^\perp$ влечет $B^* \in \mathfrak{Z}_\omega^\perp$, то достаточно будет ограничиться самосопряженными B. Рассмотрим множества $\beta = (\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_n, \varepsilon)$, где α принадлежит множеству индексов I, векторы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ взяты из $\mathfrak{H}_\omega$, а $\varepsilon > 0$. Можно образовать направленное множество из таких β, полагая по определению: $\beta_1 \leqslant \beta_2$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, $\{\psi_i\}_{\beta_1} \subseteq \{\psi_i\}_{\beta_2}$ и $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$; мы воспользовались обозначением $\beta_j = (\alpha_j, \{\psi_i\}_{\beta_j}, \varepsilon_j)$. Далее, введем сеть B_β, индексированную этим составным направленным множеством. Если $\beta = (\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_n, \varepsilon)$, то

$$B \in \Big(\bigcup_{\gamma \perp \alpha} \pi_\omega(\mathfrak{A}_\gamma)\Big)'',$$

и из теоремы Капланского о плотности следует, что найдутся γ_β, для которого $\gamma_\beta \perp \alpha$, и $B_\beta \in \pi_\omega(\mathfrak{A}_{\gamma_\beta})$, для которого $B_\beta = B_\beta^*$, $\|B_\beta\| \leqslant \|B\|$ и

$$\|(B_\beta - B)\psi_i\| < \varepsilon$$

при $i = 1, 2, \ldots, n$. Тем самым сеть B_β сильно сходится к B, а так как $\|\sigma(B_\beta)\| = \|B_\beta\| \leqslant \|B\|$, то существует подсеть $B_{\beta'}$, такая что $\sigma(B_{\beta'})$ сходится слабо. Последнее утверждение обосновывается ссылкой на слабую компактность единичного шара в $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\omega)$ и предложение 2.4.2. Поэтому нечетная и четная части $B_{\beta'}^{\mp}$ элементов $B_{\beta'}$ образуют слабо сходящиеся сети. Пусть C обозначает слабый предел сети $B_{\beta'}^-$. Тогда

$$\|C\psi\|^2 = \lim_{\beta'} \lim_{\beta''} \left(B_{\beta'}^-\psi, \ B_{\beta''}^-\psi\right),$$

где оба предела берутся по одной и той же подсети. Но при фиксированном β' из этой подсети $B_{\beta'} \in \pi_\omega\left(\mathfrak{A}_{\gamma_{\beta'}}\right)$ и при достаточно больших β'' элемент $B_{\beta''}$ принадлежит $\pi_\omega\left(\mathfrak{A}_{\gamma_{\beta''}}\right)$ с $\gamma_{\beta''} \perp \gamma_{\beta'}$. Таким образом,

$$\lim_{\beta''} (\psi, \ B_{\beta'}^- B_{\beta''}^-\psi) = -\lim_{\beta''} (\psi, \ B_{\beta''}^- B_{\beta'}^-\psi) = -(C\psi, \ B_{\beta'}^-\psi)$$

благодаря антикоммутативности нечетных элементов. Следовательно,

$$\|C\psi\|^2 = -\lim_{\beta'} (C\psi, \ B_{\beta'}^-\psi) = -\|C\psi\|^2$$

и $C = 0$. Отсюда мы делаем заключение, что $B_{\beta'}^+$ сходится слабо к B и

$$B \in \bigcap_\alpha \Big(\bigcup_{\beta \perp \alpha} \pi_\omega\left(\mathfrak{A}_\beta^e\right)\Big)''.$$

Но последнее множество содержится в $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$, поэтому

$$\mathfrak{Z}_\omega^\perp = \bigcap_\alpha \Big(\bigcup_{\beta \perp \alpha} \pi_\omega\left(\mathfrak{A}_\beta^e\right)\Big)'' \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A}^e)''.$$

Свойства коммутативности для квазилокальных алгебр гарантируют, что $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$ является подалгеброй в $\mathfrak{Z}_\omega$. В общем случае также $\mathfrak{Z}_\omega^c \subseteq \mathfrak{Z}_\omega$. Для алгебр с несколько более богатой структурой и со специальным классом состояний можно показать, что эти центральные подалгебры окажутся совпадающими. Удобно исследовать алгебры с возрастающей сетью алгебр фон Неймана.

Определение 2.6.6. Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — квазилокальная алгебра, порождающая сеть которой образована алгебрами фон Неймана $\mathfrak{M}_\alpha$. Состояние ω на $\mathfrak{A}$ называется *локально-нормальным*, если нормально сужение ω на каждую $\mathfrak{M}_\alpha$.

В приложениях к статистической механике $\mathfrak{M}_\alpha$ обычно изоморфна алгебре $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$ в некотором $\mathfrak{H}_\alpha$. Если ω локально-нормально, то, как показывает теорема 2.4.21, сужение ω на всякую $\mathfrak{M}_\alpha$ будет определяться матрицей плотности ρ_α в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_\alpha$:

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho_\alpha A), \quad A \in \mathfrak{M}_\alpha.$$

Тем самым ω можно было бы задать семейством пар $\{\mathfrak{H}_\alpha, \rho_\alpha\}$. Отметим, что из соотношений включения $\mathfrak{M}_\alpha \subseteq \mathfrak{M}_\beta$, $\alpha \leqslant \beta$, последуют тогда некоторые условия согласованности на ρ_α. Задание ω парами $\{\mathfrak{H}_\alpha, \rho_\alpha\}$ бывает полезно, потому что приходится иметь дело и с квазилокальными алгебрами, подалгебры которых не являются алгебрами фон Неймана, но изоморфны неприводимым C^*-подалгебрам алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$. Подчеркнем, что в этом случае всякое такое ω имеет каноническое продолжение $\hat{\omega}$, определенное на алгебре $\hat{\mathfrak{A}}$, порожденной сетью $\{\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ алгебр фон Неймана, причем

$$\hat{\omega}(B) = \mathrm{Tr}(\rho_\alpha B), \; B \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha).$$

В приложениях к теории поля локальные алгебры являются факторами более сложного типа, поэтому бо́льшая часть дальнейших результатов применима лишь в ситуациях, встречающихся в статистической механнке.

Лемма 2.6.7. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — квазилокальная алгебра, порождающая сеть которой состоит из алгебр фон Неймана $\mathfrak{M}_\alpha$, и пусть ω — локально-нормальное состояние, с которым ассоциировано циклическое представление $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$. Тогда $\pi|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ нормально при каждом α.*

Доказательство. Предположим, что A_γ — возрастающая сеть положительных элементов из $\mathfrak{M}_\alpha$, которая сходится к $A \in \mathfrak{M}_\alpha$, а $B \in \mathfrak{M}_\beta$, где $\beta \geqslant \alpha$. В таком случае $B^*A_\gamma B$ сходится к B^*AB в $\mathfrak{M}_\beta$. Так как $\omega|_{\mathfrak{M}_\beta}$ нормально, то

$$(\pi(B^*)\Omega, \pi(A_\gamma)\pi(B)\Omega) = \omega(B^*A_\gamma B) \to \omega(B^*AB) = \\ = (\pi(B^*)\Omega, \pi(A)\pi(B)\Omega).$$

Далее, $\bigcup_\beta \pi(\mathfrak{M}_\beta)\Omega$ плотно в $\mathfrak{H}$, значит, $\pi(A_\gamma)$ сходится к $\pi(A)$, т. е. $\pi|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ нормально.

Для изучения локально-нормальных состояний очень существенна

Лемма 2.6.8. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ операторов в гильбертовом пространстве содержит алгебру фон Неймана $\mathfrak{M}$. Допустим, что существует σ-слабо непрерывная проекция E из $\mathfrak{A}''$ на $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A}''$, такая что $E(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}$. Тогда*

$$\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A}'' = (\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A})''.$$

Доказательство. Сперва заметим, что для всех $A \in \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A}''$ образ $E(A) = A$, так как E — проекция на $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A}''$. Заметим также, что $(\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A})'' \subseteq \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A}''$ и потому достаточно доказать обратное включение. Но если $A \in \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A}''$, то существует сходящаяся сеть $\{A_\beta\} \subseteq \mathfrak{A}$, такая что

$$A = \lim_\beta A_\beta$$

и, следовательно,

$$A = E(A) = \lim_\beta E(A_\beta),$$

в силу первого замечания и σ-слабой непрерывности E. Но $E(A_\beta) \in \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A}$, так что $A \in (\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{A})''$.

Воспользовавшись этой леммой, можно сразу получить утверждение о совпадении $\mathfrak{Z}^c_\omega$ с центром.

Предложение 2.6.9. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — квазилокальная алгебра с порождающей сетью алгебр фон Неймана $\mathfrak{M}_\alpha$, и пусть ω — локально-нормальное состояние на $\mathfrak{A}$. Предположим, что при любом $\alpha \in I$ алгебра $\mathfrak{M}_\alpha$ изоморфна $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$ в некотором $\mathfrak{H}_\alpha$. При таком условии совпадают центр $\mathfrak{Z}_\omega$ и коммутантная алгебра $\mathfrak{Z}^c_\omega$ ассоциированного с ω представления, т. е.*

$$\mathfrak{Z}_\omega = \bigcap_\alpha (\pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A}))'' = \mathfrak{Z}^c_\omega.$$

Доказательство. Выберем множество матричных единиц $\{E_{ij}\}$ для $\mathfrak{M}_\alpha$ и зададим проекцию E на $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_\omega)$, полагая

$$E(B) = \sum_i \pi_\omega(E_{i1}) B \pi_\omega(E_{1i}).$$

Свойства матричных единиц гарантируют сильную сходимость ряда в правой части. Поскольку $\pi_\omega \big|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ нормально (лемма 2.6.7), то $\sum_i \pi_\omega(E_{ii}) = \pi_\omega(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}_\alpha}$ и

$$E(B) = \sum_i \pi_\omega(E_{i1}) B \pi_\omega(E_{1i}) = B$$

для $B \in \pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)'$, и для любого $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_\omega)$ мы имеем $E(B) \in \pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)'$, так как

$$E(B)\pi_\omega(E_{ij}) = \pi_\omega(E_{i1}) E(B) \pi_\omega(E_{1j}) = \pi_\omega(E_{ij}) E(B).$$

Кроме того, если $\mathfrak{N}$ — любая алгебра фон Неймана, для которой $\pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha) \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H}_\omega)$, то $E(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $E(\pi_\omega(\mathfrak{M}_\beta)) \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{M}_\beta)$ при $\beta \geqslant \alpha$. Поскольку $\mathfrak{A}$ порождается алгебрами $\mathfrak{M}_\beta$ в равномерной топологии, можно сделать вывод, что $E(\pi_\omega(\mathfrak{A})) \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})$ и $E(\pi_\omega(\mathfrak{A})'') \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Значит, можно применить лемму 2.6.8, и

$$\mathfrak{Z}_\omega = \bigcap_\alpha (\pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'')$$

$$= \bigcap_\alpha (\pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A}))'' = \mathfrak{Z}^c_\omega.$$

Теперь мы опишем ситуацию, в которой $\mathfrak{Z}_\omega = \mathfrak{Z}_\omega^\perp$. Доказательство равенства этих двух алгебр опирается на совпадение алгебр фон Неймана, порожденных $\mathfrak{M}'_\alpha \cap \mathfrak{A}$ и $\bigcup_{\beta\perp\alpha}\mathfrak{M}_\beta$. Первая алгебра соответствует наблюдаемым, постоянным относительно наблюдений в области с индексом α, а вторая соответствует наблюдаемым вне α. О совпадении этих двух алгебр часто говорят как о свойстве дуальности. Дуальность играет важную роль при анализе статистик в теории поля.

Следующий результат о равенстве $\mathfrak{Z}_\omega = \mathfrak{Z}_\omega^\perp$ относится к случаю систем с $\sigma = \iota$. Более сложный случай $\sigma \neq \iota$ также может быть изучен (см. замечания и комментарии в конце главы).

Теорема 2.6.10. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{M}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — квазилокальная алгебра с $\sigma = \iota$, порождающая сеть которой образована алгебрами фон Неймана $\mathfrak{M}_\alpha$, и пусть ω — локально-нормальное состояние $\mathfrak{A}$. Предположим, что $\mathfrak{M}_\alpha$ изоморфны $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$, $\mathfrak{M}_\alpha \cup \mathfrak{M}_\beta$ порождают $\mathfrak{M}_{\alpha\vee\beta}$ в слабой операторной топологии и для любой пары α, β можно указать индекс $\gamma \perp \alpha$, такой что $\beta \leqslant \gamma \vee \alpha$. Тогда для ассоциированного циклического представления совпадают центр $\mathfrak{Z}_\omega$ и алгебра на бесконечности $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$. Кроме того, эквивалентны следующие условия:*

(1) *$\mathfrak{Z}_\omega\ (=\mathfrak{Z}_\omega^\perp)$ состоит из операторов, кратных единичному, т. е. ω — факторное состояние;*

(2) *для любых заданных α и $\varepsilon > 0$ найдется такой индекс α', что*

$$|\omega(AB) - \omega(A)\,\omega(B)| \leqslant \varepsilon \|A\|\,\|B\|$$

при всех $A \in \mathfrak{M}_\alpha$, всех $B \in \mathfrak{M}_\beta$ и всех $\beta \perp \alpha'$;

(3) *для любых заданных α и $\varepsilon > 0$ найдется такой индекс α', что*

$$|\omega(AB) - \omega(A)\,\omega(B)| \leqslant \varepsilon \|A\|\,\{\omega(B^*B) + \omega(BB^*)\}^{1/2}$$

при всех $A \in \mathfrak{M}_\alpha$, всех $B \in \mathfrak{M}_\beta$ и всех $\beta \perp \alpha'$.

Доказательство. Построим проекцию E по аналогии с доказательством предложения 2.6.9. Сделанные выше предположения позволяют заключить, что $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$ имеет вид

$$A = \lim_\gamma \left(\sum_{i=1}^{N_\gamma} \pi_\omega(A_{\gamma,i})\,\pi_\omega(B_{\gamma,i})\right),$$

где предел понимается в сильной операторной топологии и

$$A_{\gamma,i} \in \mathfrak{M}_\alpha, \quad B_{\gamma,i} \in \bigcup_{\beta\perp\alpha} \mathfrak{M}_\beta.$$

Но если $A \in \pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})$, то $E(A) = A$ и

$$A = \lim_\gamma \left(\sum_{i=1}^{N_\gamma} E(\pi_\omega(A_{\gamma,i}))\,\pi_\omega(B_{\gamma,i})\right) \in \left(\bigcup_{\beta\perp\alpha} \pi_\omega(\mathfrak{M}_\beta)\right)'',$$

потому что $A_{\gamma, i} \in \mathfrak{M}_\alpha$ означает, что $E(\pi_\omega(A_{\gamma, i}))$ будет кратен единице. Значит,

$$(\pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A}))'' = \Big(\bigcup_{\beta \perp \alpha} \pi_\omega(\mathfrak{M}_\beta)\Big)'',$$

и применение предложения 2.6.9 показывает, что

$$\mathfrak{Z}_\omega = \bigcap_\alpha \Big(\bigcup_{\beta \perp \alpha} \pi_\omega(\mathfrak{M}_\beta)\Big)'' = \mathfrak{Z}_\omega^\perp.$$

Рассмотрим теперь три перечисленных условия. Ясно, что (3) $\Rightarrow$ (2), а из (2) вытекает условие (2) теоремы 2.6.5, так как $\mathfrak{M}_\alpha$ порождают $\mathfrak{A}$ в равномерной топологии и $\pi_\omega|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ точны, поскольку они нормальны, а $\mathfrak{M}_\alpha$ — факторы (предложение 2.4.22). Применив эту теорему, убеждаемся, что (2) $\Rightarrow$ (1). Остается доказать импликацию (1) $\Rightarrow$ (3). Сужение ω на $\mathfrak{M}_\alpha$ определяется матрицей плотности ρ_α, и при $\delta > 0$ можно выбрать проектор конечного ранга $E \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$, для которого

$$\operatorname{Tr}(\rho_\alpha(\mathbb{1} - E)) < \delta.$$

Пусть E обозначает также образ этого проектора в $\pi_\omega(\mathfrak{M}_\alpha)$. Если $A \in \mathfrak{M}_\alpha$, а $B \in \mathfrak{M}_\beta$ с $\alpha \perp \beta$, то

$$\omega(AB) = \omega(EAEB) + \omega((\mathbb{1} - E)AEB) + \omega(BEA(\mathbb{1} - E)) +$$
$$+ \omega((\mathbb{1} - E)A(\mathbb{1} - E)B).$$

(Это следует из перестановочности B и $EA(\mathbb{1} - E)$, вытекающей из квазилокальности нашей алгебры.) Отсюда

$$|\omega(AB) - \omega(EAEB)| \leqslant \omega(\mathbb{1} - E)\|A\|\{2\omega(B^*B)^{1/2} + \omega(BB^*)^{1/2}\}$$
$$< 3\delta\|A\|\{\omega(B^*B) + \omega(BB^*)\}^{1/2}.$$

Аналогично,

$$|\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)| < |\omega(EAEB) - \omega(EAE)\omega(B)| +$$
$$+ 6\delta\|A\|\{\omega(B^*B) + \omega(BB^*)\}^{1/2}.$$

Но так как ранг E в $\mathfrak{H}_\alpha$ конечен, у алгебры $E\mathfrak{M}E$ конечный базис, поэтому, по теореме 2.6.5, можно выбрать α' так, чтобы

$$\sup_{\|A\|=1,\ A \in \mathfrak{M}_\alpha} |\omega(EAEB) - \omega(EAE)\omega(B)| < \delta\{\omega(B^*B) + \omega(BB^*)\}^{1/2}$$

при всех $B \in \mathfrak{M}_\beta$ с $\beta \perp \alpha'$. Комбинируя эти оценки при $\delta = \varepsilon/7$, получим нужный нам результат.

Теорема 2.6.10 дает критерий, позволяющий выяснить, является ли состояние на квазилокальной алгебре факторным. Мы приведем теперь условия, обеспечивающие квазиэквивалентность двух факторных состояний; грубо говоря, мы покажем, что они квазиэквивалентны тогда и только тогда, когда они «совпадают на бесконечности».

Следствие 2.6.11. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — квазилокальная алгебра, удовлетворяющая всем условиям теоремы* 2.6.10, *и пусть ω_1, ω_2 — факторные состояния $\mathfrak{A}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *ω_1 и ω_2 квазиэквивалентны;*

(2) *по заданному* $\varepsilon > 0$ *можно указать* α *так, чтобы*

$$|\omega_1(B) - \omega_2(B)| < \varepsilon \|B\|$$

при всех $B \in \mathfrak{M}_\beta$ *с* $\beta \perp \alpha$;

(3) *всякому* $\varepsilon > 0$ *можно сопоставить такой индекс* $\alpha \in I$, *что*

$$|\omega_1(B) - \omega_2(B)| \leqslant \varepsilon \{\omega_1(B^*B) + \omega_2(B^*B) + \omega_1(BB^*) + \omega_2(BB^*)\}^{1/2}$$

при всех $B \in \mathfrak{M}_\beta$ *с* $\beta \perp \alpha$.

Доказательство. Согласно предложению 2.4.27, ω_1 и ω_2 квазиэквивалентны тогда и только тогда, когда состояние $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ факторное. Для любых A и B из $\mathfrak{A}$

$$\omega(AB) - \omega(A)\,\omega(B) = \frac{1}{2}(\omega_1(AB) - \omega_1(A)\,\omega_1(B)) + \\ + \frac{1}{2}(\omega_2(AB) - \omega_2(A)\,\omega_2(B)) + \frac{1}{4}(\omega_1(A) - \omega_2(A))(\omega_1(B) - \omega_2(B)).$$

Если ω_1 и ω_2 — факторные состояния, то, как показывает эта выкладка, выполнение условий (2) и (3) настоящего следствия обеспечивает выполнение для ω условий (2) и (3) из теоремы 2.6.10. Тем самым ω — факторное состояние и ω_1, ω_2 квазиэквивалентны.

Обратно, если ω — факторное состояние, то имеются две возможности: либо $\omega_1 = \omega_2$ и тогда (2) и (3), очевидно, выполнены, либо $\omega_1 \neq \omega_2$. В этом последнем случае выберем такой элемент $A \in \bigcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$, что $\omega_1(A) \neq \omega_2(A)$. Проведенная выкладка позволяет представить $\omega_1(B) - \omega_2(B)$ как линейную комбинацию $\omega(AB) - \omega(A)\,\omega(B)$ и $\omega_i(AB) - \omega_i(A)\,\omega_i(B)$, $i = 1, 2$. Применив критерий теоремы 2.6.10 к трем состояниям ω, ω_1, ω_2, получаем (2) и (3).

На этом мы закончим общее обсуждение кластерных свойств. К этой теме мы вернемся в главе 4.

Пример 2.6.12. Пусть I — произвольное множество индексов и I_f — направленное множество конечных подмножеств I (упорядоченное по включению). Каждому $\alpha \in I$ сопоставим некоторое конечномерное гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\alpha$, а каждому $\Lambda \in I_f$ сопоставим тензорное произведение

$$\mathfrak{H}_\Lambda = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{H}_\alpha$$

и введем $\mathfrak{A}_\Lambda = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\Lambda)$. (Определение тензорного произведения см. в пункте 2.7.2.) Если $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{H}_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} = \mathfrak{H}_{\Lambda_1} \otimes \mathfrak{H}_{\Lambda_2}$ и алгебра $\mathfrak{A}_{\Lambda_1}$ изоморфна C^*-подалгебре $\mathfrak{A}_{\Lambda_1} \times \mathbb{1}_{\Lambda_2}$ алгебры $\mathfrak{A}_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$, где $\mathbb{1}_{\Lambda_2}$ обозначает единичный оператор в $\mathfrak{H}_{\Lambda_2}$. Неявно отождествляя $\mathfrak{A}_{\Lambda_1}$ и $\mathfrak{A}_{\Lambda_1} \otimes \mathbb{1}_{\Lambda_2}$, убеждаемся, что алгебры $\{\mathfrak{A}_\Lambda\}_{\Lambda \in I_f}$ образуют возрастающее семейство матричных алгебр. Объединение этих алгебр представляет собой неполную нормированную алгебру с инволюцией. Пополнение этой алгебры по норме представляет собой квазилокальную алгебру $\mathfrak{A}$. Приняв, что $\Lambda_1 \perp \Lambda_2$ означает $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$, нетрудно убедиться, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям коммутации для квазилокальной алгебры; так,

$$A_1 A_2 = A_1 \otimes A_2 = A_2 A_1, \quad A_1 \in \mathfrak{A}_{\Lambda_1}, \quad A_2 \in \mathfrak{A}_{\Lambda_2}.$$

Точной верхней гранью для Λ_1, Λ_2 является $\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2$, и легко видеть, что $\mathfrak{M}_{\Lambda_1} \bigcup \mathfrak{M}_{\Lambda_2}$ порождает $\mathfrak{M}_{\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2}$.

Более того, всякое состояние ω на $\mathfrak{A}$ локально-нормально, потому что все состояния матричных алгебр нормальны (более общий результат приведен ниже в предложении 2.6.13). Таким образом, теорема 2.6.10 применима к любому состоянию на $\mathfrak{A}$ и характеризует те из них, которые порождают фактор-представления.

Алгебры типа рассмотренной в последнем примере называются РГФ-(равномерно гиперфинитными) алгебрами, если I счетно. Такие алгебры важны для описания квантовых систем в статистической механике.

2.6.2. Топологические свойства

Продолжая изучение квазилокальных алгебр, рассмотрим некоторые топологические свойства локально-нормальных состояний, и в частности свойство метризуемости. Эти сведения о метризуемости понадобятся в главе 4, где обсуждается разложение состояний.

Прежде всего приведем информацию о состояниях неприводимых подалгебр алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$; нас особенно будет интересовать C^*-алгебра $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})$ компактных операторов в $\mathfrak{H}$. Условимся называть состояние ω на неприводимой подалгебре $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ *нормальным*, если оно каноническим образом определяется матрицей плотности ρ:

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Предложение 2.6.13. *Пусть $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})$ обозначает C^*-алгебру компактных операторов в $\mathfrak{H}$, $\mathscr{T}(\mathfrak{H})$ — линейное пространство операторов в $\mathfrak{H}$ со следом, снабженное следовой нормой $T \longmapsto \|T\|_{\mathrm{Tr}} = \mathrm{Tr}\,|T|$, а $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ — алгебру фон Неймана, состоящую из всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$. Банахово пространство $\mathscr{T}(\mathfrak{H})$ сопряжено к банахову пространству $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})$; их ставит в двойственность билинейная форма*

$$T \times A \in \mathscr{T}(\mathfrak{H}) \times \mathscr{LC}(\mathfrak{H}) \longmapsto \mathrm{Tr}(TA).$$

Следовательно, $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ — второе сопряженное пространство для $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})$ и всякое состояние ω на $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})$ нормально.

Доказательство. Сначала заметим, что $\mathscr{T}(\mathfrak{H})$ — это подпространство в $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})$, плотное по норме; следовательно, $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})^* \subseteq \mathscr{T}(\mathfrak{H})^* = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, согласно предложению 2.4.3, причем $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})^*$ можно считать подпространством в $\mathscr{T}(\mathfrak{H})^*$ (сужая функционалы $\omega \in \mathscr{LC}(\mathfrak{H})^*$ на подпространство $\mathscr{T}(\mathfrak{H})$). Поэтому для $\omega \in \mathscr{LC}(\mathfrak{H})^*$

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(TA), \quad A \in \mathscr{T}(\mathfrak{H}),$$

при некотором подходящем $T \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Пусть $T = U|T|$ — полярное разложение; тогда $A|T| = AU^*T$ и, значит,

$$|\mathrm{Tr}(|T|A)| = |\mathrm{Tr}(TAU^*)| = |\omega(AU^*)| \leqslant \|\omega\|\,\|A\|,$$

поскольку $A \in \mathcal{T}(\mathfrak{H})$ влечет $AU^* \in \mathcal{T}(\mathfrak{H})$. Тем самым $A \longmapsto \mathrm{Tr}(|T|A)$ будет элементом из $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})^*$.

Далее, если $\{P_\alpha\}$ — возрастающая сеть всех проекторов конечного ранга, то

$$0 \leqslant \sup_\alpha \mathrm{Tr}(|T| P_\alpha) \leqslant \sup_\alpha \|\omega\| \, \|P_\alpha\| = \|\omega\| < +\infty,$$

так что $|T| \in \mathcal{T}(\mathfrak{H})$. Таким образом, $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})^* = \mathcal{T}(\mathfrak{H})$. Утверждение о втором сопряженном пространстве вытекает из предложения 2.4.3, а явное описание сопряженного пространства позволяет легко сделать вывод о нормальности всех состояний.

При рассмотрении алгебр $\mathfrak{A}$, содержащих подалгебру $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})$, полезен бывает следующий критерий нормальности состояний на $\mathfrak{A}$.

Предложение 2.6.14. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ содержит компактные операторы: $\mathcal{LC}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}$. Состояние ω на $\mathfrak{A}$ нормально тогда и только тогда, когда*

$$\sup\{|\omega(A)|;\ \|A\| = 1,\ A \in \mathcal{LC}(\mathfrak{H})\} = 1.$$

Доказательство. Если ω нормально, то, очевидно, существует такой проектор конечного ранга P_α, что

$$\sup_\alpha \omega(P_\alpha) = \sup_\alpha \mathrm{Tr}(\rho P_\alpha) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1.$$

С другой стороны, если условие на норму выполнено, то сужение ω на $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})$ будет состоянием этой алгебры и, значит, должна найтись такая матрица плотности ρ, что

$$\omega(C) = \mathrm{Tr}(\rho C)$$

при всех $C \in \mathcal{LC}(\mathfrak{H})$. Если $\{P_\alpha\}$ — возрастающая сеть конечномерных проекторов в $\mathfrak{H}$, то оказывается, что

$$\lim_\alpha \omega(\mathbb{1} - P_\alpha) = 0.$$

Применив неравенство Коши — Шварца при $A \in \mathfrak{A}$, получим

$$|\omega(A - P_\alpha A)| \leqslant \omega(\mathbb{1} - P_\alpha)^{1/2}\omega(A^*A)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\omega(A) = \lim_\alpha \omega(P_\alpha A) = \lim_\alpha \mathrm{Tr}(\rho P_\alpha A) = \mathrm{Tr}(\rho A),$$

и мы показали, что ω нормально.

При рассмотрении общих свойств состояний на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ (пункт 2.3.2) мы ввели две топологии: слабую *, или $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$-топологию, и равномерную топологию. Слабая* топология обычно оказывается слабее равномерной, потому что каждая базисная окрестность в слабой* топологии очевидным образом содержит некоторую окрестность в равномерной топологии. Ситуация для нормальных состояний интереснее в том случае, когда $\mathcal{LC}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}$.

Предложение 2.6.15. *Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — неприводимая C^*-подалгебра C^*-алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *слабая* и равномерная топологии совпадают на множестве $N_{\mathfrak{A}}$ нормальных состояний алгебры* $\mathfrak{A}$;

(2) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *содержит* C^**-алгебру* $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})$ *всех компактных операторов как подалгебру.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что (2) не имеет места. Наметим путь доказательства ложности посылки (1). Во-первых, если $\mathfrak{A} \cap \mathcal{LC}(\mathfrak{H})$ не сводится к нулевому элементу, то можно показать, что $\mathcal{LC}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}$. Значит, можно считать, что $\mathfrak{A} \cap \mathcal{LC}(\mathfrak{H}) = \{0\}$. Во-вторых, из этого условия и неприводимости $\mathfrak{A}$ следует, что всякое состояние на $\mathfrak{A}$ является слабым* пределом векторных состояний (см. замечания и комментарии в конце главы). В частности, всякое нормальное состояние $\mathfrak{A}$ будет слабым* пределом векторных состояний. Если бы слабая* и равномерная топологии совпадали, то можно было бы всякую матрицу плотности получить из проекторов ранга 1 предельным переходом по следовой норме. Этот вывод абсурден, так что (1) не выполняется.

(2) $\Rightarrow$ (1). Состояния $N_{\mathfrak{A}}$ можно снабдить слабой* топологией, заимствованной от $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})^*$; эта топология слабее, чем слабая* топология, определенная по $\mathfrak{A}$, так как $\mathfrak{A} \supseteq \mathcal{LC}(\mathfrak{H})$. Кроме того, $N_{\mathfrak{A}}$ можно наделить равномерной топологией, отправляясь от $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})$, но легко проверить, что она не отличается от равномерной топологии, связанной с $\mathfrak{A}$, потому что

$$\sup\{|\operatorname{Tr}((\rho-\rho')A)|;\ A\in\mathcal{LC}(\mathfrak{H}),\ \|A\|=1\}$$
$$=\operatorname{Tr}(|\rho-\rho'|)=\sup\{|\operatorname{Tr}(\rho-\rho')A|\};\ A\in\mathfrak{A},\ \|A\|=1\}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что слабая* и равномерная топологии, порожденные $\mathcal{LC}(\mathfrak{H})$, совпадают на $N_{\mathfrak{A}}$. Пусть $\omega \in N_{\mathfrak{A}}$; тогда найдется такая матрица плотности ρ, что

$$\omega(A)=\operatorname{Tr}(\rho A).$$

Следовательно, по $\varepsilon > 0$ можно указать такой проектор $E \in \mathfrak{A}$ конечного ранга, что

$$0\leqslant \operatorname{Tr}(\rho(1-E))<\varepsilon;$$

например, в качестве E можно выбрать подходящий спектральный проектор оператора ρ. Далее, рассмотрим окрестность состояния ω

$$W(\omega;\ \varepsilon)=\Big\{\omega';\ \omega'\in N_{\mathfrak{A}},\ \sup_{A\in\mathfrak{A},\ \|A\|=1}|(\omega-\omega')(EAE)<\varepsilon\Big\}.$$

Множество $W(\omega;\ \varepsilon)$ содержит слабую* окрестность, так как E имеет конечный ранг. Значит, ограниченные операторы в $E\mathfrak{H}$ обладают конечным базисом из матричных единиц и условие

$$\sup_{A\in\mathcal{LC}(\mathfrak{H}),\ \|A\|=1}|(\omega-\omega')(EAE)|<\varepsilon$$

является следствием конечного набора условий вида

$$|(\omega-\omega')(A_i)|<\varepsilon.$$

Теперь для $\omega' \in W(\omega;\ \varepsilon)$ запишем

$$\operatorname{Tr}(\rho'(\mathbb{1}-E))=\operatorname{Tr}(\rho(\mathbb{1}-E))+(\omega-\omega')(E),$$

откуда

$$0\leqslant\operatorname{Tr}(\rho'(\mathbb{1}-E))\leqslant\operatorname{Tr}(\rho(\mathbb{1}-E))+|(\omega-\omega')(E)|<2\varepsilon.$$

Затем при произвольном $A \in \mathcal{LC}(\mathfrak{H})$ применим неравенство треугольника и неравенство Коши — Шварца и в результате получим

$$|(\omega-\omega')(A)| \leqslant |(\omega-\omega')(EAE)| + 2\|A\|\left(\sqrt{\operatorname{Tr}(\rho(\mathbb{1}-E))} + \sqrt{\operatorname{Tr}(\rho'(\mathbb{1}-E))}\right).$$

Тем самым можно утверждать, что

$$\sup_{A\in\mathfrak{A},\ \|A\|=1} |(\omega-\omega')(A)| < \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2\varepsilon},$$

т. е. окрестность в равномерной топологии

$$U(\omega,\ \delta) = \{\omega',\ \omega' \in E_{\mathfrak{A}},\ \|\omega-\omega'\| < \delta\}$$

содержит окрестность $W(\omega,\ \varepsilon)$, если $\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2\varepsilon} < \delta$.

В описанном выше случае совпадения топологий, разумеется, слабая* топология оказывается метрической топологией на $N_{\mathfrak{A}}$, т. е. множество нормальных состояний метризуемо в этой топологии. Если алгебра $\mathfrak{A}$ сепарабельна, то множество всех ее состояний $E_{\mathfrak{A}}$ всегда метризуемо в слабой* топологии, однако результат для нормальных состояний справедлив без всяких предположений о сепарабельности.

Рассмотрим теперь множество состояний $E_{\mathfrak{A}}$ квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной подалгебрами $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Множество $E_{\mathfrak{A}}$ можно наделить, как и выше, равномерной топологией и $\sigma(\mathfrak{A}^*,\ \mathfrak{A})$-, или слабой*, топологией. Но можно ввести и третью топологию на $E_{\mathfrak{A}}$, воспользовавшись специальной структурой $\mathfrak{A}$. Эта топология называется *локально-равномерной;* она задается семейством окрестностей

$$V(\omega;\ \alpha,\ \varepsilon) = \{\omega';\ \omega' \in E_{\mathfrak{A}},\ \sup_{\|A\|=1,\ A\in\mathfrak{A}_\alpha} |\omega'(A)-\omega(A)| < \varepsilon\},$$

где $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$, $\alpha \in I$ и $\varepsilon > 0$. Очевидно, локально-равномерная топология сильнее, чем слабая* топология, и слабее, чем равномерная. Если $\mathfrak{A}$ порождается возрастающей последовательностью подалгебр $\mathfrak{A}_n$, то локально-равномерная топология метризуема; соответствующую метрику можно задать формулой

$$\|\omega_1-\omega_2\| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{-n}\|\omega_1-\omega_2\|_n}{1+\|\omega_1-\omega_2\|_n},$$

где

$$\|\omega_1 = \omega_2\|_n = \sup\{|\omega_1(A)-\omega_2(A)|;\ \|A\| = 1,\ A \in \mathfrak{A}_n\}.$$

Теорема 2.6.16. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — квазилокальная алгебра, и пусть каждая алгебра $\mathfrak{A}_\alpha$ изоморфна некоторой подалгебре $\pi(\mathfrak{A}_\alpha)$ алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$, причем $\pi(\mathfrak{A}_\alpha) \supseteq \mathcal{LC}(\mathfrak{H}_\alpha)$. Состояние ω на $\mathfrak{A}$ назовем локально-нормальным, если любое его сужение $\omega|_{\mathfrak{A}_\alpha}$ нормально. На множестве локально-нормальных состояний совпа-*

дают слабая и локально-равномерная топологии. Таким образом, если $\mathfrak{A}$ порождается возрастающей последовательностью подалгебр, то множество локально-нормальных состояний метризуемо в слабой* топологии.*

Доказательство этого утверждения легко получить, привлекая результат предложения 2.6.15, обеспечивающий совпадение локальных топологий на основании условия $\pi(\mathfrak{A}_\alpha) \supseteq \mathcal{LC}(\mathfrak{H}_\alpha)$, и учитывая, что $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$ порождает $\mathfrak{A}$. Детали мы опускаем.

2.6.3. Алгебраические свойства

Рассмотрение свойств квазилокальных алгебр $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ мы завершим, продемонстрировав, что при вполне общих предположениях об $\mathfrak{A}_\alpha$ алгебра $\mathfrak{A}$ проста. В последующих рассуждениях под идеалом C^*-алгебры подразумевается замкнутый двусторонний идеал (отметим, что такие идеалы самосопряжены, согласно предложению 2.2.19).

В доказательстве следующего предложения использованы только условия (1) и (2), входящие в определение квазилокальных алгебр (определение 2.6.3).

Предложение 2.6.17. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — квазилокальная алгебра, и пусть $\mathfrak{J}$ — идеал в $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{A}_\alpha$ будет при каждом α идеалом в $\mathfrak{A}_\alpha$ и*

$$\mathfrak{J} = \overline{\bigcup_\alpha \mathfrak{J}_\alpha}.$$

В частности, представление π алгебры $\mathfrak{A}$ точно, если $\pi|_{\mathfrak{A}_\alpha}$ точны при всех α.

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{J}_\alpha$ является идеалом в $\mathfrak{A}_\alpha$ при любом α и

$$\overline{\bigcup_\alpha \mathfrak{J}_\alpha} \subseteq \mathfrak{J}.$$

Для доказательства обратного включения рассмотрим морфизм π алгебры $\mathfrak{A}$, у которого $\ker \pi = \mathfrak{J}$. Мы покажем, что при $A \notin \overline{\bigcup_\alpha \mathfrak{J}_\alpha}$ также $A \notin \mathfrak{J}$. Допустим, $A \notin \overline{\bigcup_\alpha \mathfrak{J}_\alpha}$, и пусть последовательность $\{A_n\} \subseteq \bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$ такова, что $A_n \to A$. Поскольку $A \notin \overline{\bigcup_\alpha \mathfrak{J}_\alpha}$, имеем

$$\inf\left\{\|A - B\|;\ B \in \bigcup_\alpha \mathcal{J}_\alpha\right\} = \varepsilon > 0.$$

Выберем N так, чтобы из $n \geqslant N$ вытекало $\|A_n - A\| < \varepsilon/2$. При $n \geqslant N$ для $A_n \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ и любого $B \in \mathfrak{J}_{\alpha_n}$

$$\|A_n - B\| \geqslant \|A - B\| - \|A - A_n\| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но так как $\ker\left(\pi \,\middle|\, \mathfrak{A}_{\alpha_n}\right) = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{A}_{\alpha_n} = \mathfrak{J}_{\alpha_n}$, то при $n \geqslant N$, в силу предложения 2.2.19,

$$\|\pi(A_n)\| = \inf\{\|A_n - B\|;\ B \in \mathfrak{J}_{\alpha_n}\} \geqslant \varepsilon/2,$$

потому что норма на C^*-алгебре $\pi(\mathfrak{A}_{\alpha_n})$ будет одна и та же, если определять ее, считая $\pi(\mathfrak{A}_{\alpha_n})$ подалгеброй в $\pi(\mathfrak{A})$ или же считая ее образом канонического отображения $\mathfrak{A}_{\alpha_n} \hookrightarrow \mathfrak{A}_{\alpha_n}/\mathfrak{J}_{\alpha_n}$ (следствие 2.2.6). Так как π непрерывно, то $\pi(A_n) \to \pi(A)$. В частности,

$$\|\pi(A)\| = \lim_{n\to\infty} \|\pi(A_n)\| \geqslant \varepsilon/2,$$

поэтому $A \notin \mathfrak{J}$.

В приводимом ниже следствии дается общий критерий простоты. Его доказательство опирается на условия (1)—(3) определения 2.6.3.

Следствие 2.6.18. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — квазилокальная алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{A}$ проста;

(2) для любого α и всякого $A \in \mathfrak{A}_\alpha \setminus \{0\}$ найдется такой индекс $\beta \geqslant \alpha$, что идеал, порожденный A в $\mathfrak{A}_\beta$, совпадает с $\mathfrak{A}_\beta$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть (2) выполнено, но $\mathfrak{J}$ — ненулевой идеал в $\mathfrak{A}$. Согласно предложению 2.6.17, существует такой индекс α, что $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{A}_\alpha \neq \{0\}$. Но из (2) следует, что при некотором $\beta \geqslant \alpha$ мы будем иметь $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{J}$. Значит, $\mathfrak{A}_\gamma \subseteq \mathfrak{J}$ при всех $\gamma \geqslant \beta$ и $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}$ проста.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть выполнено (1) и $A \in \mathfrak{A}_\alpha \setminus \{0\}$. При $\beta \geqslant \alpha$ обозначим через $\mathfrak{J}_\beta$ идеал, порожденный A в $\mathfrak{A}_\beta$. Ясно, что $\mathfrak{J}_\beta$ образуют возрастающую сеть C^*-алгебр и $\mathfrak{J} = \overline{\bigcup_{\beta\geqslant\alpha}\mathfrak{J}_\beta}$ — ненулевой идеал в $\mathfrak{A}$, так как $\mathfrak{J}_{\beta'} \cap \mathfrak{A}_\beta$ — идеал в $\mathfrak{A}_\beta$ при $\beta' \geqslant \beta \geqslant \alpha$. Из (1) следует, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}$. Но тогда существуют $\beta \geqslant \alpha$ и элемент $B \in \mathfrak{J}_\beta$, такие что $\|B - \mathbb{1}\| < 1$. Поскольку B обратим и $\mathbb{1} = B^{-1}B \in \mathfrak{J}_\beta$, то $\mathbb{1} \in \mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\mathbb{1} = \mathfrak{A}$.

Следующее следствие применимо, например, тогда, когда все $\mathfrak{A}_\alpha$ — матричные алгебры или любые конечные факторы, либо когда $\mathfrak{A}_\alpha$ — факторы типа III в сепарабельных гильбертовых пространствах (см. определение 2.7.18).

Следствие 2.6.19. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — квазилокальная алгебра. Если каждая алгебра $\mathfrak{A}_\alpha$ проста, то и $\mathfrak{A}$ проста.*

Доказательство. Это немедленно вытекает из следствия 2.6.18.

Приводимое ниже следствие допускает обобщение на случай произвольных факторов $\mathfrak{M}_\alpha$ в сепарабельном гильбертовом пространстве, для которых $\mathfrak{M}_\alpha^e = \{A \in \mathfrak{M}_\alpha;\ \sigma(A) = A\}$ при любом α будет бесконечной алгеброй фон Неймана (см. определение 2.7.15). Доказательство этого обобщения по существу то же, что и для приведенного нами варианта, но требует некоторой дополнительной техники.

Следствие 2.6.20. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — квазилокальная алгебра с $\sigma = \iota$, и пусть $\mathfrak{A}_\alpha \equiv \mathfrak{M}_\alpha$ изоморфны $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$, где $\mathfrak{H}_\alpha$ — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство. В таком случае $\mathfrak{A}$ проста.*

Доказательство. Покажем, что можно применить следствие 2.6.18. Пусть $A \in \mathfrak{A}_\alpha \setminus \{0\}$. Заменив A на A^*A, можно считать, что оператор A положителен. Рассмотрим E — спектральный проектор A, отвечающий спектральному интервалу $[\|A\| \setminus 2, \|A\|]$. Ясно, что $E \neq 0$. Выберем γ и β так, чтобы $\gamma \perp \alpha$ и $\beta \geqslant \gamma \vee \alpha$. Установим теперь, что E — бесконечномерный проектор в $\mathfrak{M}_\beta = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\beta)$.

Для этого введем $\{E_{ij}\} \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\beta)$ — полный набор матричных единиц для $\mathfrak{M}_\gamma \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\beta)$. Тогда все E_{ij} коммутируют с E. В частности, EE_{ii} — проекторы при всех i. Далее,

$$EE_{jj} = EE_{ji}E_{ii}E_{ij} = E_{ji}(EE_{ii})E_{ij}.$$

Значит, если $EE_{ii} = 0$ при некотором i, то $EE_{jj} = 0$ при всех j. Но это невозможно, ибо $E = E\mathbb{1} = \Sigma_i EE_{ii}$. Таким образом, $\{EE_{ii}\}$ представляет собой бесконечный набор взаимно ортогональных ненулевых проекторов, которые мажорируются E, и E бесконечномерен. Следовательно, существует такая частичная изометрия $W \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\beta)$, что

$$WEW^* = \mathbb{1}.$$

Но так как $A \geqslant (\|A\|/2)\,E$, то

$$WAW^* \geqslant \frac{\|A\|}{2}\mathbb{1}.$$

Тем самым WAW^* обратим, и идеал в $\mathfrak{M}_\beta$, порожденный A, должен совпадать со всей алгеброй $\mathfrak{M}_\beta$.

Простота $\mathfrak{A}$ вытекает теперь из следствия 2.6.18.

2.7. Различные результаты и структурные свойства

В этом разделе предлагается обзор некоторых результатов теории операторных алгебр, которые важны либо для приложений в математической физике, либо для структурного анализа и классификации операторных алгебр (а следовательно, потенциально важны для приложений). Полных доказательств мы не приводим, но в ряде случаев даны указания и повсюду даны ссылки на соответствующую литературу.

2.7.1. Динамические системы и скрещенные произведения

При исследовании симметрий физических систем средствами операторных алгебр первостепенную роль играет понятие динамической системы.

Определение 2.7.1. *C^*-динамической системой* называется тройка $\{\mathfrak{A}, G, \alpha\}$, состоящая из C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, локально-компактной группы G и сильно непрерывного гомоморфизма α группы G в группу *-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$; таким образом, α_g — автоморфизм $\mathfrak{A}$ при каждом $g \in G$,

$$\alpha_e = \iota,$$

$$\alpha_{g_1}\alpha_{g_2} = \alpha_{g_1 g_2}$$

и $g \longmapsto \alpha_g(A)$ непрерывно по норме при любом $A \in \mathfrak{A}$ (e — единица группы G, ι — тождественное отображение алгебры $\mathfrak{A}$).

Назовем *W^*-динамической системой* тройку $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$, где $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана, G — локально-компактная группа и α — слабо непрерывное представление G *-автоморфизмами $\mathfrak{M}$.

Ковариантное представление динамической системы — это тройка $(\mathfrak{H}, \pi, U)$, где $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, π — невырожденное представление рассматриваемой алгебры в $\mathfrak{H}$, которое в W^*-случае предполагается нормальным, и U — такое сильно непрерывное унитарное представление группы G в $\mathfrak{H}$, что

$$\pi(\alpha_g(A)) = U_g\pi(A)U_g^*, \quad A \in \mathfrak{A} \text{ (соотв. } \mathfrak{M}), \quad g \in G^{1)}.$$

Отметим, что в W^*-случае требование непрерывности, наложенное на $g \longmapsto \alpha_g$, эквивалентно требованию сильной непрерывности $g \longmapsto \alpha^*_{g^{-1}}$ на $\mathfrak{M}_*$. Для $G = \mathbb{R}$ это вытекает из следствия 2.5.23, но такой же результат справедлив для любой локально-компактной группы G. Продемонстрировать это можно, проводя усреднения с непрерывными функциями в духе определения 2.5.19.

Каждой C^*-(соотв. W^*-) динамической системе мы сопоставим новую C^*-алгебру (соотв. алгебру фон Неймана), которая называется *скрещенным произведением* $\mathfrak{A}$ на G и обозначается $C^*(\mathfrak{A}, \alpha) \equiv \mathfrak{A} \otimes_\alpha G$ (соотв. $W^*(\mathfrak{M}, \alpha) \equiv \mathfrak{M} \otimes_\alpha G$). Прежде чем перейти к довольно запутанному определению этих объектов, упомянем четыре главных довода в пользу введения таких понятий.

(1) Существует взаимно-однозначное естественное соответствие между ковариантными представлениями динамической системы и невырожденными представлениями скрещенного произведения.

(2) Во многих интересных для нас случаях алгебра динамической системы оказывается устроенной как скрещенное произведение стационарной подалгебры в $\mathfrak{A}$ (соотв. в $\mathfrak{M}$)

$$\{A \in \mathfrak{A};\ \alpha_g(A) = A \forall g \in G\}$$

и «двойственного объекта» группы G (являющегося двойственной группой, если G абелева), причем действие α естественным образом возникает как двойственное действие, определенное на скрещенном произведении. Положительные результаты в этом направлении известны почти исключительно в W^*-случае; они были применены для анализа «полевых алгебр» в терминах «алгебр наблюдаемых», когда в роли G выступает группа калибровочных преобразований.

(3) Скрещенные произведения важны для построения примеров как в теории C^*-алгебр, так и в теории алгебр фон Неймана. Если действие α свободно и эргодично в определенном смысле, то скрещенное произведение является простой алгеброй в C^*-случае и фактором в W^*-случае.

---

1) В таком случае мы говорим об унитарной выполнимости (унитарной осуществимости) группы автоморфизмов G в представлении π. — *Прим. перев.*

(4) W^*-скрещенные произведения играют фундаментальную роль в классификации факторов; они позволили провести почти полную классификацию гиперфинитных факторов, которые представляют собой слабое замыкание возрастающей последовательности конечномерных подалгебр. Все факторы, встречавшиеся в математической физике, гиперфинитны, однако физический смысл проведенной классификации еще не ясен. Основные результаты, относящиеся к этой классификации, приведены в пункте 2.7.3.

Обратимся теперь к определению скрещенного произведения в C^*-случае.

Определение 2.7.2. Пусть $\{\mathfrak{A}, G, \alpha\}$ — некоторая C^*-динамическая система. Пусть dg и $\Delta(g)$ обозначают соответственно левоинвариантную меру Хаара и модулярную функцию на G, а $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, G)$ — совокупность непрерывных функций из G в $\mathfrak{A}$ с компактным носителем. Множество $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, G)$, обладающее естественной структурой линейного пространства, наделим умножением, инволюцией и нормой, полагая

$$
\begin{aligned}
(xy)(g) &= \int_G x(h)\,\alpha_h(y(h^{-1}g))\,dh,\\
x^*(g) &= \Delta(g)^{-1}\alpha_g(x(g^{-1}))^*,\\
\|x\|_1 &= \int_G \|x(h)\|\,dh, \quad x,\ y \in \mathfrak{K}(\mathfrak{A}, G),\quad g \in G.
\end{aligned}
$$

Нетрудно проверить, что $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, G)$ удовлетворяет всем аксиомам для банаховых $*$-алгебр, за исключением полноты. Таким образом, $L^1(\mathfrak{A}, G)$ — пополнение $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, G)$ — является банаховой $*$-алгеброй, если распространить по непрерывности введенные алгебраические операции. Далее, на $L^1(\mathfrak{A}, G)$ введем новую норму

$$\|x\| = \sup_{\pi} \|\pi(x)\|;$$

здесь π пробегает множество всех представлений $L^1(\mathfrak{A}, G)$ операторами в гильбертовом пространстве. Легко видеть, что $\|\cdot\|$ будет C^*-полунормой на $L^1(\mathfrak{A}, G)$ и

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1,$$

потому что для любого представления π алгебры $L^1(\mathfrak{A}, G)$

$$
\begin{aligned}
\|\pi(x)\| &= \|\pi(x^*x)\|^{1/2} = \rho(\pi(x^*x))^{1/2}\\
&\leqslant \rho(x^*x)^{1/2} \leqslant \|x^*x\|_1^{1/2} \leqslant \|x\|_1.
\end{aligned}
$$

Кроме того, с помощью техники, которая применяется для определения W^*-скрещенного произведения, можно показать, что $L^1(\mathfrak{A}, G)$ имеет точное представление. Тем самым $\|\cdot\|$ — действительно норма. Пополнение $L^1(\mathfrak{A}, G)$ по этой норме называется

C^*-скрещенным произведением $\mathfrak{A}$ *и* G; оно обозначается одним из символов

$$C^*(\mathfrak{A},\ \alpha) \equiv \mathfrak{A} \otimes_\alpha G.$$

Отметим, что взаимно-однозначное соответствие между ковариантным представлением $(\mathfrak{H},\ \pi,\ U)$ системы $\{\mathfrak{A},\ G,\ \alpha\}$ и представлением ρ скрещенного произведения $C^*\ (\mathfrak{A},\ \alpha)$ задается явно формулой

$$\rho(x) = \int\limits_G \pi\,(x\,(h))\,U\,(h)\,dh,\ \ x \in \mathfrak{K}\,(\mathfrak{A},\ G).$$

Указанное соотношение выражает ρ через $\{\pi,\ U\}$; для построения $\{\pi,\ U\}$ по заданному ρ учтем, что $\mathfrak{A}$ и G действуют на $C^*\ (\mathfrak{A}, \alpha)$ мультипликативно; поэтому π и U задаются соотношениями

$$\pi\,(A)\,\rho\,(x) = \rho\,({}_A x), \qquad U\,(g)\,\rho\,(x) = \rho\,({}_g x),$$

где

$${}_A x\,(h) = A\ (x\,(h)), \qquad {}_g x\,(h) = x(g^{-1}h).$$

Подчеркнем, что $\rho\ (C^*\ (\mathfrak{A},\ \alpha))$ и $\{\pi\ (\mathfrak{A}),\ \ U\ (G)\}$ порождают в $\mathfrak{H}$ одну и ту же алгебру фон Неймана [Dop 1], [Tak 1].

При рассмотрении скрещенного произведения алгебры фон Неймана и группы удобнее иметь дело не с абстрактной алгеброй, а с какой-нибудь конкретной ее реализацией.

Определение 2.7.3. Пусть задана W^*-динамическая система $\{\mathfrak{M},\ G,\ \alpha\}$ и алгебра $\mathfrak{M}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Введем новое гильбертово пространство $L^2\ (\mathfrak{H},\ \ G,\ dg)$, определив его как пополнение $\mathfrak{K}\ (\mathfrak{H},\ G)$, где $\mathfrak{K}\ (\mathfrak{H},\ \ G)$ — множество всех непрерывных функций из G в $\mathfrak{H}$, имеющих компактный носитель, со скалярным произведением

$$(\xi,\ \eta) = \int\limits_G (\xi\ (g),\ \ \eta\ (g))\,dg.$$

Зададим в $L^2\ (\mathfrak{H},\ G)$ представления π_0 для $\mathfrak{M}$ и λ для G формулами

$$(\pi_0\ (A)\ \xi)\ (h) = \alpha_h^{-1}\ (A)\ \xi\ (h),$$

$$(\lambda\ (g)\ \xi)\ (h) = \xi\ (g^{-1}h).$$

Легко проверить, что π_0 является нормальным точным представлением $\mathfrak{M}$, а λ — сильно непрерывным унитарным представлением G и

$$\lambda\ (g)\ \pi_0\ (A)\ \lambda\ (g)^* = \pi_0\ (\alpha_g\ (A)).$$

Алгебра фон Неймана в $L^2\ (\mathfrak{H},\ G)$, порожденная $\pi_0\ (\mathfrak{M})$ и $\lambda\ (G)$, называется *скрещенным произведением* $\mathfrak{M}$ *на* G и обозначается $W^*\ (\mathfrak{M},\ \alpha) \equiv \mathfrak{M} \otimes_\alpha G$.

Отметим, что каждому $x \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}, G)$ можно сопоставить элемент $\hat{x}$ алгебры $W^*(\mathfrak{M}, G)$, полагая

$$\hat{x} = \int_G \pi_0(x(g)) \lambda(g)\, dg.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\hat{x}\hat{y} = \widehat{xy}, \quad \hat{x}^* = \widehat{x^*},$$

где

$$xy(g) = \int_G x(h) \alpha_h(y(h^{-1}g))\, dh$$

и

$$x^*(g) = \Delta(g)^{-1} \alpha_g(x(g^{-1}))^*.$$

Этим устанавливается связь данного определения скрещенного произведения с определением в случае C^*-алгебр, и, кроме того, мы убеждаемся, что алгебра $L^1(\mathfrak{A}, G)$, фигурирующая в определении C^*-скрещенного произведения, обладает точным представлением; W^*-скрещенное произведение совпадает с алгеброй фон Неймана, порожденной множеством элементов $\hat{x}$, $x \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}, G)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что группа G абелева. Бо́льшая часть результатов может быть обобщена на неабелевы G, хотя такое обобщение не всегда просто. Условимся для $s, t \in G$ писать $s + t = st$ и $s - t = st^{-1}$. Двойственную для G группу обозначим $\hat{G}$. Напомним, что $\hat{G}$ представляет собой набор характеров γ группы G, т. е. гомоморфизмов G в окружность — группу $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ с операцией обычного умножения. Групповая операция во множестве $\{\gamma\}$ задается соотношением

$$\langle \gamma_1\gamma_2, g\rangle = \langle \gamma_1, g\rangle \langle \gamma_2, g\rangle.$$

Снабдив $\{\gamma\}$ топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах G, получим локально-компактную группу $\hat{G}$. По теореме двойственности Понтрягина $\hat{\hat{G}} = G$ (как топологические группы).

Рассмотрим теперь C^*-динамическую систему $\{\mathfrak{A}, G, \alpha\}$ с абелевой G и зададим отображение $\hat{\alpha}_\gamma$ из $\hat{G}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, G))$, положив $(\hat{\alpha}_\gamma x)(t) = \overline{\langle \gamma, t\rangle}\, x(t)$. Тогда $\hat{\alpha}_\gamma$ будет $*$-автоморфизмом $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, G)$, и по непрерывности его можно расширить до $*$-автоморфизма C^*-алгебры $C^*(\mathfrak{A}, \alpha)$. Тройка $\{C^*(\mathfrak{A}, \alpha), \hat{G}, \hat{\alpha}\}$ является C^*-динамической системой.

Аналогично, для W^*-динамической системы $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$ с абелевой G определим отображение μ из $\hat{G}$ в унитарную группу в $L^2(\mathfrak{H}, G)$ формулой

$$\mu(\gamma)\,\xi(t) = \overline{\langle \gamma, t\rangle}\, \xi(t).$$

Тогда

$$\mu(\gamma)\,\pi_0(A)\,\mu(\gamma)^* = \pi_0(A),\ A \in \mathfrak{M},$$
$$\mu(\gamma)\,\lambda(t)\,\mu(\gamma)^* = \overline{\langle\gamma,\ t\rangle}\,\lambda(t),\ t \in G,$$

и потому

$$\hat{\alpha}_\gamma(A) = \mu(\gamma)\,A\,\mu(\gamma)^*,\ A \in W^*(\mathfrak{M},\ \alpha)$$

является автоморфизмом $W^*(\mathfrak{M}, \alpha)$. Отсюда сразу же вытекает, что $\{W^*(\mathfrak{M}, \alpha), \hat{G}, \hat{\alpha}\}$ — это W^*-динамическая система.

В обоих рассмотренных случаях действие $\hat{G}$ на скрещенном произведении называется *двойственным* (или *дуальным*) действием к исходному действию G на алгебре.

Воспользовавшись каноническим погружением $\mathfrak{K}(\mathfrak{M}, G)$ в $W^*(\mathfrak{M}, \alpha)$, нетрудно показать, что определения дуального действия по существу одинаковы в C^*-случае и в W^*-случае.

Теперь можно охарактеризовать W^*-динамические системы, опираясь на понятие дуального действия на скрещенном произведении. Изоморфизм между W^*-динамическими системами $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$ и $\{\mathfrak{N}, G, \beta\}$ определяется, разумеется, как такой *-изоморфизм γ между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, что $\gamma\alpha_t = \beta_t\gamma$ при всех $t \in G$. Самой простой из теорем в этом направлении является следующая.

Теорема 2.7.4. ([Land 1], [Nak 1]). *Пусть $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$ — произвольная W^*-динамическая система с абелевой G. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *существует такая W^*-динамическая система $\{\mathfrak{N}, \hat{G}, \beta\}$, что*

$$\{W^*(\mathfrak{N},\ \beta),\ G,\ \hat{\beta}\}$$

изоморфна $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$;

(2) *существует такое сильно непрерывное унитарное представление U группы $\hat{G}$ со значениями в $\mathfrak{M}$, что $\alpha_t(U_\gamma) = \overline{\langle\gamma,\ t\rangle}\, U_\gamma$.*

Алгебра $\mathfrak{N}$ в (1) изоморфна $\mathfrak{M}^\alpha = \{A \in \mathfrak{M};\ \alpha_t(A) = A\ \forall\, t \in G\}$.

Доказательство. Строгие доказательства этих утверждений длинны и утомительны, и они не более проясняют ситуацию, чем формальная аргументация, опирающаяся на основные положения абелева гармонического анализа. Поэтому мы ограничимся формальными рассуждениями.

1) $\Rightarrow$ (2). Это немедленно следует из определения дуального действия, если взять $U_\gamma = \lambda(\gamma)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Введем

$$\mathfrak{N} = \{A \in \mathfrak{M};\ \alpha_t(A) = A\ \forall t \in G\}$$

и, более общим образом,

$$\mathfrak{N}_\gamma = \{A \in \mathfrak{M};\ \alpha_t(A) = \overline{\langle\gamma,\ t\rangle}\, A\ \forall\ t \in G\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{N}U_\gamma \subseteq \mathfrak{N}_\gamma$ и $\mathfrak{N}_\gamma U_\gamma^* \subseteq \mathfrak{N}$. Тем самым $\mathfrak{N}_\gamma = \mathfrak{N}U_\gamma$. Также $U_\gamma \mathfrak{N} U_\gamma^* = \mathfrak{N}$, так что можно задать действие β группы $\hat{G}$ на $\mathfrak{N}$ формулой

$$\beta_\gamma(A) = U_\gamma A U_\gamma^*.$$

Теперь определим изоморфизм η между $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$ и $\{W^*(\mathfrak{N}, \beta), G, \hat{\beta}\}$, положив

$$\eta\left(\sum_i A_i U_{\gamma i}\right) = \sum_i \pi_0(A_i)\, \lambda(\gamma_i),$$

где $A_i \in \mathfrak{N} = \mathfrak{M}^\alpha$.

Отметим, что из (2) нельзя убрать предположение о том, что U_γ образуют представление, т. е. $U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} = U_{\gamma_1\gamma_2}$. Это показывает пример, в котором $\mathfrak{M} = \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}))$, $G = \mathbb{R}^2$ и

$$\alpha_{t,s}(A) = U(t)\, V(s)\, AV(s)^* U(t)^*,$$

где $U(t)\,\xi(h) = \xi(h - t)$, $V(s)\,\xi(h) = e^{ish}\,\xi(h)$. В таком случае $U(t)\,V(s) = e^{ist}\,V(s)\,U(t)$. Легко видеть, что $(t, s) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \alpha_{t,s}$ — непрерывный гомоморфизм группы $\mathbb{R}^2$ в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ и

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^\alpha = \mathbb{C}\mathbb{1}.$$

Таким образом, $\mathfrak{N} \otimes_\beta \mathbb{R}^2 = L^\infty(\mathbb{R}^2)$, что неизоморфно $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}))$ ни при каком действии β на $\mathfrak{N}$. Далее, при $u, v \in \mathbb{R}$ введем $W(u, v) = U(-v)\,V(u)$. Тогда

$$\alpha_{t,s}(W(u, v)) = e^{i(tu+sv)} W(u, v),$$

но унитарные элементы $W(u, v)$ не определяют представления группы $\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$. В ряде случаев от требования $U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} = U_{\gamma_1\gamma_2}$ отказаться можно, например, если $\mathfrak{M}^\alpha$ собственно бесконечна (см. определение 2.7.15) и G сепарабельна [Tak 2], [Con 2]. Можно также обобщить понятие скрещенного произведения, введя «кососкрещенное произведение» и заменив групповое свойство U некоторым «свойством быть коциклом» [Zel 1], [Robe 1].

Следующим из доводов в пользу введения скрещенных произведений служит необходимость построения специальных операторных алгебр. В физике алгебра квантовых наблюдаемых часто получается из абелевой алгебры классических наблюдаемых с помощью процедуры, напоминающей построение скрещенного произведения с группой, порожденной множеством наблюдаемых p, «сопряженных» с классическими наблюдаемыми q [Ara 5], [Heg 1].

Теперь мы изучим один особенно простой случай скрещенного произведения, позволяющий тем не менее выяснить многие общие свойства. Пусть G — конечная абелева группа, а $\mathfrak{A}$ — конечномерная абелева C^*-алгебра, т. е. $\mathfrak{A} = C(X)$, где X — конечное множество с дискретной топологией. Тогда действие α группы G на $\mathfrak{A}$ индуцирует действие τ на X (характерах G): $(\alpha_g f)(x) =$

$= f(\tau_g(x))$. Легко проверить, что X распадается при этом действии на непересекающиеся орбиты $X_1, \ldots, X_n$ группы G, т. е. всякая X_i имеет вид $\{\tau_g(x_i);\ g \in G\}$ при некотором $x_i \in X$. Для каждого i определим $G_i = \{g \in G;\ gx_i = x_i\}$; тогда G_i — подгруппа в G, зависящая только от X_i, с точностью до внутреннего автоморфизма G. Действие G на X_i изоморфно действию G на $g\,G_i$. В качестве полезного упражнения предлагается показать, что

$$C^*(C(X),\ \alpha) = \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathscr{L}(L^2(X_i)) \otimes L^\infty(G_i)) = W^*(L^\infty(X),\ \alpha).$$

Следовательно, для того чтобы скрещенное произведение оказалось простым, или, эквивалентно, фактором, или полной матричной алгеброй, необходимо, чтобы X содержало лишь одну орбиту, т. е. действие α должно быть эргодичным и для любого $x \in X$ из $gx = x$ должно вытекать $g = e$. Последнее требование означает, что действие должно быть свободным. Этим оправдывается следующее

Определение 2.7.5. Для C^*- или W^*-динамической системы $\{\mathfrak{A}, G, \alpha\}$ с абелевой $\mathfrak{A}$ назовем действие α *эргодичным*, если $\mathfrak{A}$ не содержит нетривиальных замкнутых двусторонних глобально α-инвариантных идеалов. Действие *свободно*, если для любых $g \neq e$ и $A > 0$ можно указать такой B, что $A \geqslant B > 0$ и $\alpha_g(B) \neq$ $\neq B$.

Отметим, что в C^*-случае эргодичность означает, что все орбиты действия, индуцированного α на спектре $\sigma(\mathfrak{A})$, плотны в $\sigma(\mathfrak{A})$, а в W^*-случае эргодичность означает, что $\mathfrak{A}$ не содержит α-инвариантных нетривиальных проекторов. Это вытекает из теоремы 2.1.11, (A) и предложения 2.4.22.

Данное определение, конечно, вполне пригодно и для неабелевой $\mathfrak{A}$, но в таком случае часто бывают полезнее другие понятия эргодичного и свободного действия автоморфизмов [Tak 1], [Zel 1], [Taka 1], [Gli 3]. Обсуждение конечномерного случая подсказывает нам, что справедлива

Теорема 2.7.6. ([Eff 1]). *Пусть C^*-динамическая система $\{\mathfrak{A}, G, \alpha\}$ такова, что $\mathfrak{A}$ абелева и сепарабельна, G дискретна, счетна и аменабельна*[1]*, а действие α эргодично и свободно. Тогда алгебра $C^*(\mathfrak{A}, \alpha)$ проста.*

В случае алгебр фон Неймана верна, например, такая

Теорема 2.7.7. *Пусть W^*-динамическая система $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$ такова, что $\mathfrak{M}$ абелева и σ-конечна, а G — счетная группа, дейст-*

---

[1] См. пункт 4.3.2. — *Прим. перев.*

вующая свободно и эргодично на $\mathfrak{M}$. *В этом случае* $W^*(\mathfrak{M}, \alpha)$ — *фактор.*

Такого рода факторы называют *факторами Кригера* [Kri 1]. Этот фактор неизоморфен $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, кроме случая, когда система $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$ изоморфна системе $\{L^\infty(G), G, \text{сдвиги}\}$. Известно, что фактор Кригера гиперфинитен, и обратное утверждение «почти» верно [Con 3]. Конструкции, связанные с указанной, играли большую роль в ранних попытках построения неизоморфных факторов.

2.7.2. Тензорные произведения операторных алгебр

В предыдущих разделах книги при доказательствах различных утверждений нам время от времени встречалась следующая конструкция. Располагая C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$, мы рассматривали все $n \times n$-матрицы $(A_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$, $A_{ij} \in \mathfrak{A}$, с операциями умножения и инволюции

$$(A_{ij})(B_{ij}) = \Big(\sum_k A_{ik}B_{kj}\Big), \qquad (A_{ij})^* = (A_{ji}^*).$$

Эту $*$-алгебру матриц обозначим $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \otimes M_n$. Нетрудно показать, что на $\mathfrak{B}$ имеется единственная C^*-норма со свойством

$$\| A \otimes \gamma_{ij} \| = \| (\gamma_{ij}) \| \| A \|,$$

где $\|(\gamma_{ij})\|$ обозначает C^*-норму $n \times n$-матрицы (γ_{ij}). Алгебра $\mathfrak{B}$ называется *тензорным произведением* $\mathfrak{A}$ и M_n.

Обобщим эту конструкцию, перейдя сначала к рассмотрению конечного набора векторных пространств $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Тогда существует единственное векторное пространство $\bigodot_{i=1}^n X_i$ со следующими тремя свойствами:

(I) для каждого семейства $\{x_i\}$, состоящего из $x_i \in X_i$, найдется элемент $\otimes_i x_i$ в $\bigodot_i X_i$, зависящий от x_i полилинейным образом, и конечными линейными комбинациями таких элементов исчерпывается всё $\bigodot_i X_i$;

(II) (свойство универсальности) для любого полилинейного отображения π прямого произведения пространств X_i в векторное пространство Y существует единственное линейное отображение $\varphi : \bigodot_i X_i \to Y$, такое что

$$\varphi\Big(\bigodot_i x_i\Big) = \pi(\{x_i\})$$

при всех $x_i \in X_i$;

(III) (ассоциативность) для всякого разбиения $\bigcup_k I_k$ множества $\{1, \ldots, n\}$ существует единственный изоморфизм пространства $\bigodot_i X_i$ на $\bigodot_k (\bigodot_{i \in I_k} X_i)$, переводящий $\otimes_i x_i$ в $\otimes_k (\bigodot_{i \in I_k} x_i)$.

В том случае, когда $X_i = \mathfrak{H}_i$ — гильбертовы пространства, можно наделить $\bigodot_i \mathfrak{H}_i$ скалярным произведением, распространив по линейности произведение

$$\left(\bigotimes_i \xi_i,\ \bigotimes_i \eta_i\right) = \prod_i (\xi_i,\ \eta_i).$$

Пополнение $\bigodot_i \mathfrak{H}_i$ по норме, ассоциированной с таким скалярным произведением, называется тензорным произведением гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_i$; для его обозначения применяется символ

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{H}_i.$$

Отметим, что ортонормированный базис пространства $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{H}_i$ образуют векторы $\bigotimes_{i=1}^{n} \xi_{k_i}^{(i)}$, где k_i при разных i меняются независимо, а $\{\xi_k^{(i)}\}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}_i$.

Если $X_i = \mathfrak{M}_i$ — алгебры фон Неймаиа в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_i$, то можно ввести на $\bigodot_i \mathfrak{M}_i$ структуру *-алгебры, полагая

$$\left(\bigotimes_i A_i\right)\left(\bigotimes_i B_i\right) = \bigotimes_i (A_i B_i), \qquad \left(\bigotimes_i A_i\right)^* = \bigotimes_i \left(A_i^*\right).$$

Зададим теперь отображение π: $\bigodot_i \mathfrak{M}_i \to \mathscr{L}(\otimes_i \mathfrak{H}_i)$ формулой

$$\pi\left(\bigotimes_i A_i\right)\left(\bigotimes_i \xi_i\right) = \bigotimes_i A_i \xi_i.$$

Это π оказывается точным *-представлением $\bigodot_i \mathfrak{M}_i$. Слабое замыкание алгебры операторов $\pi(\bigodot_i \mathfrak{M}_i)$ называется *тензорным произведением алгебр фон Неймана* $\mathfrak{M}_i$; оно обозначается $\otimes_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$. По теореме 2.4.26 всякий изоморфизм τ между алгебрами фон Неймана $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ представи́м в виде $\tau(A) = U((A \otimes \mathbb{1}) E') U^*$, где $\mathbb{1}$ — единичный оператор в некотором «большом» гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $E' \in \mathfrak{M}' \otimes \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, а U — изометрия. С помощью такого представления можно показать, что $\otimes_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$ зависит лишь от классов изоморфности перемножаемых алгебр $\mathfrak{M}_i$ и не зависит от $\mathfrak{H}_i$.

Если $X_i = \mathfrak{A}_i$ будут C^*-алгебрами, то ситуация с тензорным произведением сложнее. Опять-таки можно превратить $\bigodot_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ в *-алгебру. Однако в общем случае на $\bigodot_i \mathfrak{A}_i$ имеется более одной нормы с C^*-свойством $\|A^*A\| = \|A\|^2$ и со *свойством кросс-нормы* $\|\otimes_i A_i\| = \Pi_i \|A_i\|$. Для приложений полезнее всего C^*-норма на $\bigodot_i \mathfrak{A}_i$, которая определяется следующим образом. Если $(\mathfrak{H}_i, \pi_i)$ — точные представления алгебр $\mathfrak{A}_i$, то

$$\left\| \sum_k \bigotimes_i A_i^{(k)} \right\| = \left\| \sum_k \bigotimes_i \pi_i \left(A_i^{(k)}\right) \right\|;$$

здесь в правой части фигурирует оператор из $\mathscr{L}(\otimes_i \mathfrak{H}_i)$. Эта норма не зависит от конкретного выбора точных представлений π_i. Пополнение $\bigodot_i \mathfrak{A}_i$ по этой норме называется *C^*-тензорным произведением* алгебр $\mathfrak{A}_i$; оно обозначается

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i.$$

Известно, что если все $\mathfrak{A}_i$, за исключением одной, ядерные (см. конец пункта 2.7.3), то построенная выше норма на $\bigodot_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ является единственной C^*-кросс-нормой [Lanc 1].

Пусть $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ — бесконечный набор гильбертовых пространств и $\Omega_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$ — единичные векторы; рассмотрим множество конечных линейных комбинаций элементов вида $\otimes_\alpha \xi_\alpha$, где $\xi_\alpha = \Omega_\alpha$ за исключением конечного числа индексов α. Можно построить бесконечное тензорное произведение $\otimes_\alpha^{\Omega_\alpha} \mathfrak{H}_\alpha$, пополнив это множество по норме, порождаемой скалярным произведением

$$\left(\bigotimes_\alpha \xi_\alpha, \bigotimes_\alpha \eta_\alpha\right) = \prod_\alpha (\xi_\alpha, \eta_\alpha).$$

Если $\mathfrak{M}_\alpha$ — алгебры фон Неймана в $\mathfrak{H}_\alpha$, то можно получить $\otimes_\alpha^{\Omega_\alpha} \mathfrak{M}_\alpha$ как слабое замыкание множества линейных комбинаций элементов из $\mathscr{L}\left(\otimes_\alpha^{\Omega_\alpha} \mathfrak{H}_\alpha\right)$ вида $\otimes_\alpha A_\alpha$, где $A_\alpha = 1_{\mathfrak{H}_\alpha}$ за исключением конечного числа α. Возникающая алгебра фон Неймана существенно зависит от выбора последовательности $\{\Omega_\alpha\}$ [Ara 6], [Pow 1]. Если каждая $\mathfrak{M}_\alpha$ будет фактором, то и $\otimes_\alpha^{\Omega_\alpha} \mathfrak{M}_\alpha$ тоже фактор. Доказать это можно, применив к состоянию

$$\omega\left(\bigotimes_\alpha A_\alpha\right) = \prod_\alpha (\Omega_\alpha, A_\alpha \Omega_\alpha)$$

незначительно обобщенную теорему 2.6.10.

Если $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$ — семейство C^*-алгебр, то аналогичным образом можно построить бесконечное C^*-тензорное произведение $\otimes_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$ как индуктивный предел соответствующих конечных подпроизведений. В этом случае $\otimes_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$ определено единственным образом (с точностью до неединственности конечных тензорных произведений, о которой шла речь выше). См. по этому вопросу [Gui 1], [Lanc 1].

2.7.3. Веса на операторных алгебрах; самосопряженные конусы для произвольных алгебр фон Неймана; двойственность и классификация факторов; классификация C^*-алгебр

В этом пункте мы перечислим ряд результатов, играющих важную роль в структурной теории операторных алгебр, но не оказавших пока заметного влияния на математическую физику. Доказательства либо не приведены, либо только намечены.

Введем обобщение понятия положительного линейного функционала.

Определение 2.7.8. *Весом* на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ называется функция $\omega : \mathfrak{A}_+ \to [0, \infty]$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(A+B) = \omega(A) + \omega(B), \quad A, B \in \mathfrak{A}_+,$$
$$\omega(\alpha A) = \alpha\omega(A), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad A \in \mathfrak{A}_+$$

(с добавочным соглашением $0 \cdot \infty = 0$).

Следом на $\mathfrak{A}$ называется вес ω, для которого

$$\omega(A^*A) = \omega(AA^*), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Нетрудно доказать следующее

Предложение 2.7.9. *Пусть ω — вес на $\mathfrak{A}$. Введем*

$$\mathfrak{M}_{\omega+} = \{A \in \mathfrak{A}_+; \quad \omega(A) < \infty\},$$
$$\mathscr{L}_\omega = \{A \in \mathfrak{A}; \quad \omega(A^*A) < \infty\}.$$

Тогда $\mathfrak{M}_{\omega+}$ является наследственным конусом в $\mathfrak{A}_+$, т. е. конусом, обладающим свойством

$$0 \leqslant A \leqslant B \in \mathfrak{M}_{\omega+} \Rightarrow A \in \mathfrak{M}_{\omega+}.$$

Комплексная линейная оболочка $\mathfrak{M}_\omega$ множества $\mathfrak{M}_{\omega+}$ является $*$-подалгеброй в $\mathfrak{A}$. Далее, $\mathscr{L}_\omega$ — левый идеал в $\mathfrak{A}$ и

$$\mathfrak{M}_\omega = \mathscr{L}_\omega^* \mathscr{L}_\omega.$$

Вес ω расширяется до линейного функционала (обозначаемого по-прежнему ω) на $\mathfrak{M}_\omega$.

Так же как и в случае состояний, рассмотренном в теореме 2.3.16, можно снабдить $\mathscr{L}_\omega$ предгильбертовой структурой, положив $A, B \in \mathscr{L}_\omega \mapsto \omega(A^*B)$. Имеет место

Теорема 2.7.10. *Всякому весу ω на $\mathfrak{A}$ соответствуют гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и два отображения $\eta : \mathscr{L}_\omega \to \mathfrak{H}$ и $\pi : \mathfrak{A} \to \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, такие что η линейно, его образ плотен в $\mathfrak{H}$, а π — представление $\mathfrak{A}$ и при всех $A \in \mathfrak{A}$, $B, C \in \mathscr{L}_\omega$*

$$(\eta(B), \pi(A)\eta(C)) = \omega(B^*AC).$$

Далее, обобщим понятие нормального положительного функционала на алгебре фон Неймана.

Теорема 2.7.11. ([Haa 3], [Ped 2]). *Пусть ω — вес на алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *если* $\{A_i\}$ — *последовательность в* $\mathfrak{M}_+$ *и* $\Sigma_i A_i = A \in \mathfrak{M}_+$, *то* $\omega(A) = \Sigma_i \omega(A_i)$;

(2) *если* $\{A_\alpha\}$ — *возрастающая сеть в* $\mathfrak{M}_+$ *и* $A = \text{l. u. b.}_\alpha A_\alpha \in \mathfrak{M}_+$, *то* $\omega(A) = \text{l. u. b.}_\alpha\, \omega(A_\alpha)$;

(3) *если* σ-*слабо сходящаяся сеть* $\{A_\alpha\}$ *в* $\mathfrak{M}_+$ *имеет пределом* $A \in \mathfrak{M}_+$, *то* $\omega(A) \leqslant \text{l. u. b.}_\alpha\, \omega(A_\alpha)$;

(4) *имеется сеть* $\{\omega_\alpha\}$ *положительных нормальных функционалов на* $\mathfrak{M}$, *такая что* $\omega(A) = \sup_\alpha \omega_\alpha(A)$ *для всех* $A \in \mathfrak{M}_+$;

(5) *имеется сеть* $\{\omega_\alpha\}$ *положительных нормальных функционалов на* $\mathfrak{M}$, *такая что* $\omega(A) = \Sigma_\alpha \omega_\alpha(A)$ *для всех* $A \in \mathfrak{M}_+$.

Определение 2.7.12. Вес ω на алгебре фон Неймана называется *нормальным*, если он удовлетворяет любому из эквивалентных условий теоремы 2.7.11. Вес называется *точным*, если для $A \in \mathfrak{M}$ равенство $\omega(A) = 0$ влечет $A = 0$. Вес называется *полуконечным*, если подалгебра $\mathfrak{M}_\omega$ является σ-слабо плотной в $\mathfrak{M}$.

С помощью свойства (5) из теоремы 2.7.11 нетрудно получить

Предложение 2.7.13. *Каждая алгебра фон Неймана обладает нормальным точным полуконечным весом.*

Для доказательства первой части следующей теоремы привлекаются так называемые левые гильбертовы алгебры [Com 1]; остальная часть доказательства строится в точности так же, как для состояний в теории Томиты—Такесаки, изложенной в пункте 2.5.2.

Теорема 2.7.14. *Пусть ω — точный нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$; введем $\mathscr{L}_\omega$, $\mathfrak{H}$, η и π, как в предложении 2.7.9 и теореме 2.7.10. Тогда π — нормальный *-изоморфизм $\mathfrak{M}$ на $\pi(\mathfrak{M}) = \pi(\mathfrak{M})''$. Отождествим $\pi(\mathfrak{M})$ с $\mathfrak{M}$. Существует такой левый идеал $\mathscr{L}'_\omega \subset \mathfrak{M}'$, для которого $\mathfrak{M}'_\omega = \mathscr{L}'^*_\omega \mathscr{L}'_\omega$ будет σ-слабо плотно в $\mathfrak{M}'$, и такое линейное отображение $\eta : \mathscr{L}'_\omega \mapsto \mathfrak{H}$ с плотным образом, что $\eta(A'B') = A'\eta(B')$, $A' \in \mathfrak{M}'$, $B' \in \mathscr{L}'_\omega$, а также*

(1) *$A\eta(A') = A'\psi$ для всех $A' \in \mathscr{L}'_\omega$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathscr{L}_\omega$ и $\eta(A) = \psi$;*

(2) *$A'\eta(A) = A\psi$ для всех $A \in \mathscr{L}_\omega$ тогда и только тогда, когда $A' \in \mathscr{L}'_\omega$ и $\eta(A') = \psi$.*

Кроме того, $\eta(\mathfrak{M}_\omega)$ и $\eta(\mathfrak{M}'_\omega)$ плотны в $\mathfrak{H}$ и отображения

$$S_0 : \eta(\mathfrak{M}_\omega) \to \mathfrak{H}; \quad \eta(A) \mapsto \eta(A^*),$$

$$F_0 : \eta(\mathfrak{M}'_\omega) \to \mathfrak{H}; \quad \eta(A') \mapsto \eta(A'^*)$$

замыкаемы, а их замыкания S и F удовлетворяют условию $S^* = F$. Если $S = J\Delta^{1/2}$ — полярное разложение S, то J и Δ обладают всеми свойствами, перечисленными в предложении 2.5.10, *и*

$$\Delta^{it}\mathfrak{M}\Delta^{-it} = \mathfrak{M},\ t \in \mathbb{R},$$

$$J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'.$$

Так же как и для нормальных точных состояний, для нормальных полуконечных точных весов можно теперь определить модулярную группу и прочие объекты.

Можно ввести естественный положительный конус $\mathscr{P}_\omega$ в гильбертовом пространстве, ассоциированный с нормальным полуконечным весом ω, определив $\mathscr{P}_\omega$ как замыкание множества $\pi(A)\, J\, \eta(A))$, где $A \in \mathfrak{M}_\omega$. Конус $\mathscr{P}_\omega$ обладает всеми свойствами естественных конусов, установленными в пункте 2.5.4; требуемые при этом модификации очевидны (а именно $\mathscr{P}_\omega = \overline{\Delta^{1/4}\eta\left(\mathfrak{M}_{\omega+}\right)}$) [Haa 2].

Обратимся теперь к проблеме классификации алгебр фон Неймана.

Определение 2.7.15. Проекторы E и F, принадлежащие алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$, называются *эквивалентными* (пишем $E \sim F$), если существует такой элемент $W \in \mathfrak{M}$, что $E = W^*W$ и $F = WW^*$. Проектор E в $\mathfrak{M}$ называют *конечным*, если он не эквивалентен никакому своему подпроектору, в противном случае E — *бесконечный* проектор. Алгебру $\mathfrak{M}$ называют *полуконечной*, если всякий проектор в $\mathfrak{M}$ содержит ненулевой конечный проектор; иначе говоря, в $\mathfrak{M}$ существует такая возрастающая сеть $\{E_\alpha\}$ конечных проекторов, что $E_\alpha \to \mathbb{1}$. Алгебра $\mathfrak{M}$ *конечна*, если $\mathbb{1}$ — конечный проектор; в противном случае $\mathfrak{M}$ *бесконечна*. Если все ненулевые проекторы в центре $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ бесконечны, то $\mathfrak{M}$ *собственно бесконечна*, а если бесконечны все ненулевые проекторы $\mathfrak{M}$, то алгебра *чисто бесконечна*.

Следующая теорема исключительно важна для классификации алгебр фон Неймана; это «теорема Радона—Никодима», принадлежащая Конну.

Теорема 2.7.16 ([Con 4]). *Для всякой пары φ, ψ точных нормальных полуконечных весов на $\mathfrak{M}$ в алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$ существует непрерывное однопараметрическое семейство $t \mapsto (D\psi : D\varphi)_t$ унитарных элементов, обладающее свойствами:*

(1) $\sigma_t^\psi(A) = (D\psi : D\varphi)_t\, \sigma_t^\varphi(A)\, (D\psi : D\varphi)_t^*$;

(2) $(D\psi : D\varphi)_{t+s} = (D\psi : D\varphi)_t\, \sigma_t^\varphi((D\psi : D\varphi)_s)$;

(3) $(D\psi : D\varphi)_t^* = (D\varphi : D\psi)_t$, $(D\psi : D\varphi)_t (D\varphi : D\omega)_t = (D\psi : D\omega)_t$;

(4) $\psi(A) = \varphi(UAU^*)$, где U — унитарный элемент из $\mathfrak{M} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (D\psi : D\varphi)_t = U^* \sigma_t^\varphi (U)$.

В доказательстве используется техника, основанная на применении 2×2-матриц, в значительной мере напоминающая доказательство леммы 2.5.33. (См. теорему 5.3.34.)

Займемся теперь полуконечными алгебрами фон Неймана.

Теорема 2.7.17. ([Dix 1]). *Для алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $\mathfrak{M}$ полуконечна;

(2) для любого $A \in \mathfrak{M}_+$, $A \neq 0$, найдется такой нормальный полуконечный след τ на $\mathfrak{M}$, что $\tau(A) > 0$;

(3) на $\mathfrak{M}$ существует точный нормальный полуконечный след;

(4) для всякого точного нормального полуконечного веса на $\mathfrak{M}$ соответствующая модулярная группа σ_t^ω состоит из внутренних автоморфизмов $\mathfrak{M}$, т. е. весу ω сопоставляется такой положительный обратимый самосопряженный оператор h, присоединенный к $\mathfrak{M}$, что $\sigma_t^\omega(A) = h^{it} A h^{-it}$ при $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathfrak{M}$.

Наметим вкратце доказательство. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) тривиальна, поскольку проектор E должен быть конечным, если след τ точен и $\tau(E) < \infty$. Также более или менее очевидна эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3). Показав, что $\tau(A) = \omega(h^{-1}A)$ будет следом, можно получить (4) $\Rightarrow$ (3), а с помощью теоремы 2.7.16 выводится (3) $\Rightarrow$ (4) (см. [Tak 3]). Наконец, для доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ (2) строится след с помощью теории сравнения проекторов; процедура эта имеет много общего с конструкцией вещественных чисел на базе целых чисел или с построением меры Хаара на локально-компактной группе.

Если $\{E_\alpha\}$ — такое семейство взаимно ортогональных проекторов в центре $\mathfrak{Z}$ алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$, что $\Sigma_\alpha E_\alpha = \mathbb{1}$, то $\mathfrak{M}$ расщепляется в прямую сумму $\mathfrak{M} = \Sigma_\alpha \mathfrak{M} E_\alpha$; $\mathfrak{M} E_\alpha$ — алгебра фон Неймана с центром $\mathfrak{Z} E_\alpha$. Тем самым, совершив предельный переход (надлежащие уточнения приведены в главе 4), можно будет расщепить алгебру фон Неймана, представив ее в виде обобщенной прямой суммы, или прямого интеграла, факторов (строго говоря, это применимо только к σ-конечным алгебрам фон Неймана). Следовательно, можно свести задачу классификации алгебр фон Неймана к классификации факторов.

Определение 2.7.18. Фактор $\mathfrak{M}$ называют *фактором типа* I, если он содержит ненулевой минимальный проектор, и *типа* II, если он полуконечен и не является фактором типа I. Конечный фактор типа II называют фактором *типа* II_1, а бесконечный — фактором *типа* II_∞. Если $\mathfrak{M}$ не полуконечен, т. е. чисто бесконечен, то $\mathfrak{M}$ — *фактор типа* III.

Легко получить полную классификацию факторов типа I.

Предложение 2.7.19. *Если* $\mathfrak{M}$ *— фактор типа* I, *то* $\mathfrak{M}$ *изоморфен* $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ *в некотором гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$. *Тем самым размерность* $\mathfrak{H}$ *является инвариантом, полностью характеризующим фактор типа* I.

Определение 2.7.20. Фактор типа I называют *фактором типа* I_n, если размерность соответствующего гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ из предложения 2.7.19 равна n.

Остается провести классификацию факторов типа II и III. Эту задачу можно свести к классификации некоторых полуконечных алгебр фон Неймана и их автоморфизмов (теорема Конна—Такесаки о двойственности).

Теорема 2.7.21 ([Tak 2], [Con 4]). *Если* $\mathfrak{M}$ *— собственно бесконечная алгебра фон Неймана, то существуют такая полуконечная алгебра фон Неймана* $\mathfrak{N}$ *с точным нормальным полуконечным следом* τ *и такая* σ*-слабо непрерывная однопараметрическая подгруппа* α_t *группы* $*$*-автоморфизмов алгебры* $\mathfrak{N}$, *что*

$$\tau \circ \alpha_t = e^{-t}\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

и

$$\mathfrak{M} = W^*(\mathfrak{N}, \alpha).$$

Другая пара $(\mathfrak{N}^0, \alpha^0)$ *обладает этими свойствами тогда и только тогда, когда существуют изоморфизм* $\gamma\colon \mathfrak{N} \mapsto \mathfrak{N}^0$ *и однопараметрическое семейство* U_t *унитарных элементов в* $\mathfrak{N}^0$, *для которых*

$$\alpha_t^0(A) = U_t\left(\gamma\alpha_t\gamma^{-1}(A)\right)U_t^*.$$

Кроме того, центр алгебры $\mathfrak{M}$ *можно отождествить со стационарной при действии* α *подалгеброй в центре* $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$ *алгебры* $\mathfrak{N}$. *Пару* $(\mathfrak{N}, \alpha)$ *можно получить по данной* $\mathfrak{M}$, *выбрав точный нормальный полуконечный вес* ω *на* $\mathfrak{M}$ *и положив*

$$\mathfrak{N} = W^*(\mathfrak{M}, \sigma^\omega),$$

$$\alpha_t = \widehat{\sigma_t^\omega} = \text{дуальному действию } \mathbb{R} \text{ на } W^*(\mathfrak{M}, \sigma^\omega).$$

Доказательство. Доказательство основано на том, что группу σ^ω и вес ω можно расширить единственным образом до группы внутренних автоморфизмов алгебры $W^*(\mathfrak{M}, \sigma^\omega)$ и веса на $W^*(\mathfrak{M}, \sigma^\omega)$, причем так, что расширенная группа оказывается группой модулярных автоморфизмов для расширенного веса. Применив затем теорему 2.7.17, получим след на $\mathfrak{N}$ и в заключение заметим, что если σ является C_0^*-группой автоморфизмов $\mathfrak{M}$, то

$$W^*(W^*(\mathfrak{M}, \sigma), \hat{\sigma}) \cong \mathfrak{M} \otimes \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R})) \cong \mathfrak{M}.$$

Определение 2.7.22. Если $\mathfrak{M}$ — фактор, то введем $S(\mathfrak{M}) = \bigcap_\omega \sigma(\Delta_\omega)$, где $\sigma(\Delta_\omega)$ — спектр Δ_ω, а ω пробегает все нормальные полуконечные веса на $\mathfrak{M}$.

Множество $S(\mathfrak{M})$, очевидно, будет замкнутым подмножеством множества неотрицательных вещественных чисел. Первое из утверждений следующей теоремы прямо вытекает из теоремы 2.7.16.

Теорема 2.7.23 ([Con 4]). *Множество таких t, для которых автоморфизм σ_t^ω внутренний, образует группу, не зависящую от нормального полуконечного веса ω. Для фактора $\mathfrak{M}$ обозначим через* $\Gamma(\mathfrak{M})$ *Γ-спектр любой модулярной группы автоморфизмов $\mathfrak{M}$. Тогда*

$$\Gamma(\mathfrak{M}) = \log(S(\mathfrak{M}) \setminus \{0\}).$$

Эта теорема означает, что $S(\mathfrak{M}) \setminus \{0\}$ оказывается замкнутой подгруппой мультипликативной группы положительных вещественных чисел. Следовательно, имеются четыре возможности:

(1) $S(\mathfrak{M}) = \{1\}$;
(2) $S(\mathfrak{M}) = [0, \infty)$;
(3) $S(\mathfrak{M}) = \{0\} \cup \{\lambda^n,\quad n \in \mathbb{Z}\}$, $\lambda \in (0, 1)$;
(4) $S(\mathfrak{M}) = \{0, 1\}$.

Из теорем 2.7.17 и 2.7.23 следует, что (1) реализуется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ полуконечна, а (2)—(4) осуществляются в том и только том случае, когда $\mathfrak{M}$ — типа III.

Определение 2.7.24. *Фактор* $\mathfrak{M}$ принадлежит к *типу* III_1, если $S(\mathfrak{M}) = [0, \infty)$. Если $S(\mathfrak{M}) = \{0\} + \lambda^{\mathbb{Z}}$, $0 < \lambda < 1$, то $\mathfrak{M}$ — *типа* III_λ, а если $S(\mathfrak{M}) = \{0, 1\}$, то *типа* III_0.

Если фактор $\mathfrak{M}$ полуконечен, то пара $\{\mathfrak{N}, \alpha\}$ из теоремы 2.7.21 имеет вид

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \otimes L^\infty(\mathbb{R}), \quad \alpha_t = \iota \otimes \text{сдвиг на } t,$$

так что теорема не содержит интересной информации.

Однако для типа III получается следующий результат (вспомните, что α действует эргодично на $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}' = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$— фактор):

Теорема 2.7.25. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана. Приведенные ниже пары условий эквивалентны:*

(1_λ) *$\mathfrak{M}$ — фактор типа* III_λ, $0 < \lambda < 1$;
(2_λ) *в* $\{\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}), \alpha\}$ *действие α транзитивно и периодично с периодом* $-\log\lambda$;
(1_0) *$\mathfrak{M}$ — фактор типа* III_0;

(2_0) *система* $\{\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}), \alpha\}$ *эргодична, но неизоморфна системе* $\{L^\infty(\mathbb{R}),$ *сдвиги*$\}$;

(1_1) $\mathfrak{M}$ — *фактор типа* III_1;

(2_1) $\mathfrak{N}$ — *фактор типа* II_1.

Специальный класс факторов, для которых известна почти полная классификация, составляют так называемые гиперфинитные факторы. Напомним, что фактор *гиперфинитен*, если он порождается возрастающей последовательностью конечномерных факторов, т. е. матричных алгебр; определение гиперфинитной алгебры фон Неймана аналогично. Для фактора указанное свойство эквивалентно порождаемости последовательностью конечномерных алгебр фон Неймана [Ell 4], [Ell 5]. Известно, что гиперфинитная алгебра фон Неймана обладает *свойством Томиямы* E, т. е. для $\mathfrak{M} \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ найдется проектор $E: \mathscr{L}(\mathfrak{H}) \to \mathfrak{M}$ нормы единица, такой что $E^2 = E$, $E\mathscr{L}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{M}$, $\|E\| = 1$. Это отображение E является также условным ожиданием: $E(ABC) = AE(B)C$ при $A, C \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ [Tom 1]. В обратную сторону утверждение получено для всех факторов $\mathfrak{M}$, исключая, быть может, факторы типа III_1 [Con 5]. Известно, что гиперфинитны *факторы Кригера*, т. е. факторы, которые представляют собой скрещенное произведение σ-конечной абелевой алгебры фон Неймана и единственного автоморфизма, действующего свободно и эргодично; справедливо и обратное утверждение, за исключением, быть может, случая III_1 [Con 3], [Con 5].

Относительно классификации гиперфинитных факторов известно, что, с точностью до изоморфизма, существуют только один гиперфинитный фактор типа II_1 и один гиперфинитный II_∞-фактор [Con 5]. Автоморфизмы этих факторов были классифицированы [Con 6] с точностью до отношения эквивалентности, играющего роль в теоремах 2.7.21 и 2.7.25. В результате было установлено, что существует в точности один гиперфинитный III_λ-фактор при каждом λ между 0 и 1, а гиперфинитные факторы типа III_0 полностью характеризуются свойствами потока $\{\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}), \alpha\}$. Гиперфинитный фактор типа III_1 существует [Ara 6], и есть гипотеза, что он единствен.

Параллельно с классификацией факторов возникает классификация C^*-алгебр. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется C^*-алгеброй типа I, если все ее фактор-представления принадлежат к типу I (*фактор-представление* C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ — это такое представление π, что $\pi(\mathfrak{A})''$ — фактор). Для сепарабельной C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ известно, что $\mathfrak{A}$ будет типа I тогда и только тогда, когда ее неприводимые представления с одним и тем же ядром унитарно эквивалентны (ядра неприводимых представлений — примитивные идеалы алгебры). Известно еще, что $\mathfrak{A}$ типа I тогда и только тогда, когда для любого ее неприводимого представления π выполнено условие

$\mathcal{LC}(\mathfrak{H}) \subseteq \pi(\mathfrak{A})$ [Gli 4]. Тем самым классификация сепарабельных C^*-алгебр типа I сводится до некоторой степени к изучению структуры их идеалов.

Известно [Gli 4], [Mar 1], что для сепарабельной C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ не типа I и бесконечного гиперфинитного фактора $\mathfrak{M}$ среди представлений алгебры найдется такое представление π, что $\pi(\mathfrak{A})'' = \mathfrak{M}$. Этот результат позволяет считать, что следующим по простоте своих свойств классом C^*-алгебр будет класс *ядерных* C^*-алгебр, которые характеризуются тем, что все их фактор-представления гиперфинитны. В этом направлении предприняты многочисленные исследования, см. [Choi 1], [Eff 2], [Ell 6], [Ped 2].

ЗАМЕЧАНИЯ И КОММЕНТАРИИ

Материал этой главы содержится в целом ряде книг и курсов лекций по операторным алгебрам. Например, можно обратиться к [[Arv 1]], [[Dix 1]], [[Dix 2]], [[Gui 1]], [[Kad 1]], [[Lan 1]], [[Nai 1]], [[Ped 1]], [[Sak 1]], [[Sch 1]]. Наиболее доступное введение в общую теорию дают [[Arv 1]], [[Gui 1]], [[Kad 1]], [[Lan 1]]. Из числа многих книг по функциональному анализу и его различным аспектам упомянем только [[Bou 1]], [[Kat 1]], [[Ree 1]], [[Rie 1]], [[Rud 1]], [[Rud 2]], [[Yos 1]]. Особенно простое изложение отличает [[Ree 1]], [[Rud 2]] и [[Rud 1]].

Пункт 2.1.1

В этом пункте приведены стандартные сведения. Изучение абстрактных C^*-алгебр было начато Гельфандом и Наймарком [Gel 1], а также Сигалом [Seg 1]. Первоначально C^*-алгебра определялась в [Gel 1] как банахова $*$-алгебра с нормой, удовлетворяющей условию $\|A^*A\| = \|A\|^2$, и требовалась также обратимость всякого элемента вида $\mathbb{1} + A^*A$. Второе условие впоследствии удалось исключить благодаря усилиям Фукамии [Fuk 1], Келли и Вота [Kel 1] и Капланского [Kap 1]. Глимм и Кадисон [Gli 1] показали также, что условие на норму можно заменить следующим: $\|A^*A\| = \|A^*\|\|A\|$. Сравнительно недавно Араки и Эллиотт [Ara 1] показали, что условие $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ является следствием остальных C^*-структурных свойств. Теорема 2.1.10 содержится в [Gel 1], а теорема 2.1.11—в [Gel 2]. Некоторые авторы различают абстрактные C^*-алгебры и C^*-алгебры, конкретно реализованные ограниченными операторами в гильбертовом пространстве. В таком случае абстрактную алгебру называют B^*-алгеброй, а конкретную — C^*-алгеброй.

Пункт 2.2.1

Общая спектральная теория для элементов банаховых алгебр с инволюцией была также заложена в [Gel 1], и обычно ее изложение базируется на теории коммутативных банаховых алгебр [Gel 2]. Мы обошлись без применения этой теории, сделав ударение на тех свойствах, которые выводятся с помощью простых преобразований элементов.

Пункт 2.2.2

Теорема 2.2.12, которая гласит, что элемент положителен в том и только том случае, когда он представим в виде A^*A, принадлежит Капланскому [Kap 1]. Это ключевой результат, позволяющий заключить, что элемент $\mathbb{1} + A^*A$ обратим, и тем самым исключить избыточную аксиому из [Gel 1]. Поскольку мы избегали коммутативной теории, наше обсуждение свойств положительных элементов проведено нетрадиционным образом. Но базируется оно на стандартной технике, применяемой при изучении ограниченных операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [[Rie 1, §§ 104 и 108]]). Интегральный алгоритм извлечения квадратного корня, который часто используется при исследовании свойств ограниченных операторов, может быть распространен на положительные неограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве [[Kat 1]], [[Ree 1]]. В связи с предложением 2.2.13 интересно заметить, что если при некотором $\alpha > 1$ для элементов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ из $A \geqslant B \geqslant 0$ всегда следует $A^\alpha \geqslant B^\alpha$, то алгебра $\mathfrak{A}$ абелева [Oga 1]. Подробное обсуждение полярного разложения дано в [[Kat 1]].

Пункт 2.2.3

Теория аппроксимативных единиц восходит к работе Сигала [Seg 1].

Пункт 2.3.1

Теория представлений C^*-алгебр тесно связана с теорией представлений топологических групп. Теория групп возникла раньше, и в значительной мере она предопределила развитие алгебраической теории. Предложение 2.3.8, которое характеризует неприводимость представления, — это классический результат теории групп, а эквивалентность условий (1) и (2) составляет утверждение леммы Шура.

Пункт 2.3.2

Понятия состояния и чистого состояния введены Сигалом [Seg 1]. Терминология заимствована из физики. Теорема Крейна—Мильмана [Kre 1] подробно разобрана, например, в [[Yos 1]], [[Rud 2]].

Пункт 2.3.3

Процедура построения представления по состоянию (теорема 2.3.16) предложена Гельфандом и Наймарком [Gel 1] и Сигалом [Seg 1], поэтому ее часто именуют *конструкцией ГНС*. Связь между неприводимостью, чистотой и экстремальностью (теорема 2.3.19) опять-таки изучена в [Seg 1].

Пункт 2.3.4

Теорема Хана—Банаха приводится в каждой книге по функциональному анализу. Прозрачное ее изложение читатель найдет в [[Rud 1]] или [[Rud 2]]. Наше доказательство основной структурной теоремы с помощью леммы 2.3.23 представляет собой незначительное видоизменение обычных рассуждений.

Пункт 2.3.5

Как уже указывалось, теория коммутативных алгебр началась с работы [Gel 1].

Раздел 2.4

Теория алгебр фон Неймана возникла раньше теории C^*-алгебр, ее происхождение связано и с теорией групп, и с квантовой механикой. Первое исследование таких алгебр относится к 1929 г. [Neu 1]. Значительная часть стандартной теории была построена в серии работ Мюррея и фон Неймана [Mur 1], [Neu 2].

Пункт 2.4.1

Теорему Алаоглу — Бурбаки можно найти в [[Bou 1]], [[Rud 2]] или в [[Köt 1]]. Упомянутую в доказательстве теоремы 2.4.7 теорему Банаха можно найти в [[Bou 1, гл. 4, § 2, теорема 5]]. Утверждение о биполяре замкнутого выпуклого множества также приведено в [[Bou 1]].

Пункт 2.4.2

Теорема о коммутанте и первая из теорем о плотности доказаны в самой ранней из статей фон Неймана [Neu 1]. Теорема Капланского о плотности появилась гораздо позже [Kap 2]. Эти теоремы очень часто применяются в качестве технических средств доказательства. Заслуживает внимания также следующий результат Кадисона [Kad 1], [Kad 2], близкий по содержанию.

Теорема. Пусть $\mathfrak{A}$ — *неприводимая* C^**-подалгебра в* $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, *и пусть* $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — *два конечных семейства векторов из* $\mathfrak{H}$. *Если существует такой оператор* $T \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, *что* $T\varphi_i = \psi_i$ *при* $i = 1, 2, \ldots, n$, *то найдется и* $A \in \mathfrak{A}$, *с тем же свойством, причем* $\|A\| = \|T\|$. *Если* T *самосопряжен, то и оператор* A *можно выбрать самосопряженным, а если* T *унитарен, то можно выбрать унитарный оператор* A.

Эта теорема находит многочисленные применения; например, она позволяет доказать эквивалентность алгебраической неприводимости и топологической неприводимости, упомянутую в в пункте 2.3.1.

Пункт 2.4.3

Теорему Сакаи, дающую абстрактную характеризацию алгебр фон Неймана, можно найти в [[Sak 1, теорема 1.16.7]]. Термин «W^*-алгебра» часто используют применительно к абстрактно определенным алгебрам, в таком случае термин «алгебра фон Неймана» резервируют для операторных алгебр. Другая абстрактная характеризация алгебр фон Неймана была предложена Кадисоном в [Kad 3].

Пункт 2.5.1

Хотя не всякая алгебра фон Неймана σ-конечна, но всегда в ней содержится возрастающая сеть проекторов $P_\alpha \in \mathfrak{M}$, такая что $P_\alpha \to \mathbb{1}$ и редуцированные алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}_\alpha = P_\alpha \mathfrak{M} P_\alpha$ будут σ-конечными; например, можно выбрать $P_\alpha = [\mathfrak{M}'\mathfrak{H}_\alpha]$, где $\mathfrak{H}_\alpha$ — конечномерное подпространство в $\mathfrak{H}$. В этом смысле любая алгебра фон Неймана порождается σ-конечными алгебрами.

Пункт 2.5.2

Теория Томиты—Такесаки восходит к неопубликованной работе Томиты [Tomi 1]. В ней сформулирована основная теорема (теорема 2.5.14) и дано детальное доказательство, которому присущи все главные черты доказательства, приведенного нами.

Изложение этой работы с многочисленными улучшениями и разными приложениями было опубликовано Такесаки [Tak 3]. Доказательство основной теоремы было упрощено и сокращено рядом авторов; отметим работы ван Дале [Dae 1], ван Дале и Риффела [Dae 2] и Вороновича [Wor 1]. Данное в книге доказательство комбинирует ряд моментов из [Dae 1], [Wor 1] с некоторыми нашими собственными улучшениями. С теоремой Карлсона, примененной в случае $\|\Delta\| < +\infty$, можно ознакомиться по [[Tit 1]].

Пункт 2.5.3

Аналитические элементы применяются при исследовании представлений групп [Har 1], [Car 1], они применялись также при изучении свойств самосопряженности [Lum 1], [Nel 1]. Теорему Крейна—Шмульяна и изложение свойств топологии Макки можно найти в [[Bou 1]]. Эквивалентность свойств слабой и сильной аналитичности установлена Данфордом [Dun 1].

Пункт 2.5.4

Теория самосопряженных конусов и стандартных форм была независимо развита Араки, Конном и Хаагерупом [Ara 2], [Con 1], [Haa 1]. Данное нами ее частичное изложение следует [Ara 3], [Haa 2]. Трюк с введением 4×4-матриц, использованный в доказательстве теоремы 2.5.31, придуман Конном [Con 1]. Конн также показал, что самосопряженный конус (в гильбертовом пространстве) оказывается естественным конусом алгебры фон Неймана тогда и только тогда, когда этот конус обладает двумя свойствами, названными им ориентируемостью и однородностью.

Пункт 2.6.1

Важная роль квазилокальной структуры в C^*-алгебрах, применяемых в математической физике, была впервые отмечена Хаагом [Haag 1]. Кластерные свойства типа описанных здесь были впервые установлены Пауэрсом [Pow 1] в контексте РГФ-алгебр. В частности, Пауэрс доказал лемму 2.6.7, предложение 2.6.8 и теорему 2.6.9 применительно к этому простому случаю. Работа Пауэрса нашла дальнейшее развитие и обобщение во многих публикациях, например [Ara 4], [Haag 2], [Lan 2], [Rob 1], [Ruel]. Понятие алгебры на бесконечности было введено в [Lan 2], а лемма 2.6.4 принадлежит Араки и Кисимото [Ara 4]. Мы следовали главным образом изложению, данному в [Rue 1], с улучшениями, предложенными в [Ara 4] и [Rob 1]. Более подробное обсуждение статистики Ферми дано в [Rob 1]. Если $\mathfrak{M}_\alpha = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$, то ситуация будет следующая. Для всякого α существует такой оператор $R_\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$, что

$$R_\alpha^2 = \mathbb{1}, \quad R_\alpha A R_\alpha = \sigma(A), \ A \in \mathfrak{M}_\alpha,$$

и локальная нормальность ω в сочетании с предположением $\{\mathfrak{M}_\alpha \vee \mathfrak{M}_\beta\}'' = \mathfrak{M}_{\alpha\vee\beta}$ позволяет заключить, что

$$\pi_\omega(\mathfrak{M}'_\alpha \cap \mathfrak{M}_{\alpha\vee\beta}) = (\pi_\omega(R_\alpha \mathfrak{M}^o_\beta + \mathfrak{M}^e_\beta))''.$$

Далее, если автоморфизм σ слабо непрерывен в представлении $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$, то можно, воспользовавшись этим отождествлением алгебр, утверждать, что $\mathfrak{Z}_\omega \cap \pi_\omega(\mathfrak{A}^e)'' = \mathfrak{Z}_\omega^\perp$. Кластерные свойства вновь характеризуют случай тривиального $\mathfrak{Z}_\omega$.

Пункт 2.6.2

Наше обсуждение топологий частично следует [Rob 2]. Два результата, использованные в доказательстве предложения 2.6.13, можно найти в [[Dix 2]]. В следствии 4.1.10 из этой книги установлен тот факт, что из $\mathfrak{A} \cap \mathscr{LC}(\mathfrak{H}) \neq \{0\}$ следует $\mathfrak{A} \supseteq \mathscr{LC}(\mathfrak{H})$, а утверждение о векторных состояниях содержится там же в лемме 11.2.1.

Пункт 2.6.3

Более подробное описание структуры идеалов и прочих алгебраических структур в случае квазилокальных алгебр имеется в работах [Gli 2], [Bra 1], [Bra 2] и [Ell 1].

3. ГРУППЫ, ПОЛУГРУППЫ И ГЕНЕРАТОРЫ

3.1. Теория для случая банахова пространства

Физические теории состоят по сути дела из двух «элементов»: кинематической структуры, отображающей мгновенную картину состояний и наблюдаемых системы в фиксированный момент времени, и динамического правила, описывающего изменение этих состояний и наблюдаемых во времени. В классической механике точечных частиц состояние представляется точкой дифференцируемого многообразия, а наблюдаемые — функциями на этом многообразии. В квантовой механике систем с конечным числом степеней свободы состояния задаются лучами в гильбертовом пространстве, а наблюдаемые — операторами, действующими в этом пространстве. Для систем частиц с бесконечным числом степеней свободы мы намерены отождествить состояния с состояниями на определенной алгебре полей, или алгебре операторов. В каждом из этих примеров физических теорий динамическое описание системы заключается в задании потока — однопараметрической группы автоморфизмов рассматриваемой кинематической структуры, — представляющего движение системы с изменением времени. В классической механике мы имеем дело с группой диффеоморфизмов, в квантовой механике — с группой унитарных операторов в гильбертовом пространстве, а в случае систем с бесконечным числом степеней свободы — с группой автоморфизмой алгебры наблюдаемых. Столь же общепринято описание симметрий физических систем посредством групп автоморфизмов основной кинематической структуры, и в этой главе и в следующей за не-читатель ознакомится с различными аспектами такого теоретиков группового описания. В настоящей главе мы будем заниматься в основном однопараметрическими группами и проблемами, связанными с исследованием динамики.

В стандартных формулировках теорий взаимодействующих частиц динамический поток вводится неявным образом. Движение системы естественно описывать в терминах ее бесконечно малых изменений. Такое бесконечно малое движение описывается одним из вариантов гамильтонова формализма, который позволяет явно учесть взаимодействие частиц. В классической механике бесконечно малые изменения определяются векторным полем, в квантовой механике — самосопряженным оператором, гамильтонианом, а для систем с бесконечным числом степеней свободы аналогичную роль играет какой-либо тип дифференцирования соответствующей алгебры. Первой из основных проблем, связанных с таким подходом, оказывается интегрирование заданной «инфинитезимальной динамики» с целью получить динамический поток. Эта проблема, которая будет в центре внимания на протяжении данной главы, разумеется, и при положительном решении позволяет сделать лишь небольшой шаг на пути анализа физической теории. Интересные характеристики теории связаны с дальнейшими свойствами потока, вроде дисперсионных, эргодических и пр. Интегрируемость отражает лишь свойство полноты описания, в отличие от описания неполного, что в свою очередь соответствует отсутствию либо наличию катастрофического поведения системы. Однако эти вопросы почти не изучены в случае систем с бесконечным числом степеней свободы, так что решение проблемы интегрируемости составляет нетривиальный первый шаг в изучении динамики таких систем.

Проблема заключается в исследовании дифференциального уравнения

$$\frac{dA_t}{dt} = SA_t$$

при различных дополнительных условиях и ограничениях. В каждом данном случае A будет соответствовать или наблюдаемой, или состоянию системы и будет представляться элементом некоторого пространства X. Функция

$$t \in \mathbb{R} \mapsto A_t \in X$$

описывает движение A, а S — это оператор в X, порождающий бесконечно малое изменение A. Возможные динамики задаются решениями дифференциального уравнения, которые удовлетворяют некоторым добавочным условиям на рост и непрерывность. Существование «разумной» некатастрофической эволюции системы эквивалентно существованию глобальных решений уравнения движения, удовлетворяющих физическим граничным условиям.

Три основных вопроса, возникающих в связи с такими решениями, — их существование, единственность и устойчивость относительно малых возмущений — будут рассмотрены нами при разных предположениях, однако всякий раз будет предполагаться, что пространство X банахово, а S — линейный оператор в X. Таким образом, мы начнем с изучения дифференциального уравнения в случае банахова пространства, не наделенного добавочной структурой. Вслед за этим мы введем в X структуру алгебры и будем считать S дифференцированием этой алгебры.

Формальное решение нашего дифференциального уравнения имеет вид $A_t = U_tA$, где $U_t = \exp\{tS\}$, и мы займемся приданием смысла такой экспоненте. Независимо от способа, которым это будет сделано, можно рассчитывать на то, что U_0 — единичный оператор, а $U_t U_s = U_{t+s}$, поэтому мы разыскиваем только решения с такими свойствами. Но поскольку возможны различные типы непрерывности отображения $t \longmapsto U_t$, возникает их структурная иерархия. Мы изучим равномерную, сильную и слабую* непрерывности, при этом иногда будет налагаться условие $\| U_t \| \leqslant 1$, где $\| \cdot \|$ обозначает норму ограниченного оператора в X, т. е.

$$\| S \| = \sup \{ \| SA \|;\ A \in X,\ \| A \| = 1 \}.$$

Это ограничение на рост можно интерпретировать как закон сохранения вероятности или, возможно, ее диссипации. Тем самым рассматриваемые нами типы решений попадают в один из двух следующих классов:

либо $U = \{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ представляет собой однопараметрическую группу ограниченных линейных операторов в X, характеризуемую первым условием из определения 2.5.17, т. е.

$$U_{s+t} = U_s U_t;\quad s,\ t \in \mathbb{R},\ U_0 = I,$$

где I — тождественное отображение;

либо семейство $U = \{U_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ определено только при $t \geqslant 0$ и представляет собой полугруппу, удовлетворяющую условиям

$$U_{s+t} = U_s U_t;\quad s,\ t \in \mathbb{R}_+,\ U_0 = I.$$

Если $\| U_t A \| = \| A \|$ при всех $t \in \mathbb{R}$ или $t \in \mathbb{R}_+$, $A \in X$, то U будет группой (или полугруппой) изометрий. Если же выполняется соотношение $\| U_t \| \leqslant 1$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, то U_t называется *полугруппой сжатий*. Отметим, что однопараметрическая группа сжатий автоматически является группой изометрий, так как

$$\| U_t \| \leqslant 1,\quad \| U_t^{-1} \| = \| U_{-t} \| \leqslant 1.$$

Теперь мы рассмотрим группы и полугруппы с разными свойствами непрерывности.

3.1.1. Равномерная непрерывность

Теория равномерно непрерывных групп и полугрупп особенно проста. Ее основное содержание составляет

Предложение 3.1.1. *Пусть* $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ *— однопараметрическая полугруппа ограниченных линейных операторов* ($U_t \in \mathcal{L}(X)$) *в банаховом пространстве* X. *Эквивалентны следующие условия:*

(1) U_t *равномерно непрерывна в начальной точке* 0, *т. е.*

$$\lim_{t \to 0} \| U_t - I \| = 0;$$

(2) U_t *равномерно дифференцируема при* $t = 0$, *т. е. существует такой ограниченный оператор* $S \in \mathscr{L}(X)$, *что*

$$\lim_{t\to 0} \| (U_t - I)/t - S \| = 0;$$

(3) *существует такой ограниченный оператор* $S \in \mathscr{L}(X)$, *что*

$$U_t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!} S^n.$$

Если эти условия выполнены, то U_t *расширяется до равномерно непрерывной однопараметрической группы, для которой*

$$\| U_t \| \leqslant \exp \{ |t| \, \| S \| \}.$$

Доказательство. Очевидно, (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1), так что остается проверить импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Для этого заметим, что при достаточно малых t

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t dsU_s - I \right\| < 1,$$

откуда следует, что интеграл

$$X_t = \frac{1}{t} \int_0^t dsU_s$$

задает ограниченный оператор с ограниченным обратным. Далее, рассмотрим тождество

$$\left(\frac{U_h - I}{h} \right) X_t = \frac{1}{th} \int_0^t ds \, (U_{s+h} - U_s) =$$

$$= \frac{1}{th} \int_t^{t+h} dsU_s - \frac{1}{th} \int_0^h dsU_s = \left(\frac{U_t - I}{t} \right) X_h.$$

Выражение в правой части равномерно сходится к $(U_t - I)/t$ при h, стремящемся к нулю, следовательно,

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{U_h - I}{h} - \left(\frac{U_t - I}{t} \right) X_t^{-1} \right\| = 0.$$

Тем самым U_t равномерно дифференцируема, и мы даже нашли выражение для ее производной S в точке нуль:

$$S = \left(\frac{U_t - I}{t} \right) X_t^{-1}.$$

Исходя из этого равенства, выписываем интегральное уравнение

$$U_t - I = S \int_0^t dsU_s,$$

которое можно решить методом последовательных приближений. В результате получим

$$U_t = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} S^n.$$

Оценка на $\| U_t \|$ вытекает из последней формулы.

Таким образом, группа $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ограниченных операторов в банаховом пространстве X равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда ее генератор S ограничен. Под *генератором* мы подразумеваем равномерную производную группы, взятую в точке 0. Отметим, что в силу такого определения суммы и равномерные пределы генераторов снова будут генераторами. Более того, если U и V — равномерно непрерывные группы с генераторами S и T соответственно, то

$$U_t - V_t = t \int_0^1 d\lambda U_{\lambda t} (S - T) V_{(1-\lambda) t}$$

и, следовательно,

$$\| U_t - V_t \| \leqslant | t | \exp \{ | t | (\| S \| + \| T \|)\} \| S - T \|.$$

Тем самым, если генераторы S равномерно приближают T, то группы U равномерно сходятся к V, причем эта сходимость (по норме) будет равномерна по t на любом конечном интервале в $\mathbb{R}$. В другую сторону, если $\lambda \geqslant \| S \|$, $\lambda > \| T \|$, то прямая выкладка дает

$$S - T = (\lambda I - S) \left[\int_0^\infty dt e^{-\lambda t} (U_t - V_t) \right] (\lambda I - T),$$

откуда

$$\| S - T \| \leqslant (\| S \| + \lambda) \ (\| T \| + \lambda) \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \| U_t - V_t \|.$$

Значит, при равномерной сходимости U к V на конечных интервалах $\mathbb{R}$ генераторы S групп U будут равномерно сходиться к T.

Этим завершается описание равномерно непрерывных однопараметрических групп. Эти группы не могут иметь широкого применения при описании динамики, поскольку их генераторы (а они ассоциируются с гамильтонианами) с необходимостью ограничены. Тем не менее такие группы представляют определенный интерес для общей проблемы изучения симметрий.

3.1.2. Сильная, слабая и слабая* непрерывности

В этом пункте мы рассматриваем группы и полугруппы ограниченных операторов в банаховом пространстве X, имеющие более слабые свойства непрерывности, нежели рассмотренное выше. Для обсуждения этих свойств обратимся к формализму, аналогичному использованному в пункте 2.5.3.

Пусть F — замкнутое по норме подпространство пространства X^*, сопряженного к X, и пусть $\sigma(X, F)$ обозначает локально-выпуклую топологию на X, индуцированную функционалами из F. Мы предположим, что:

а) $\|A\| = \sup\{|\eta(A)|;\ \eta \in F,\ \|\eta\| = 1\}$;

б) $\sigma(X, F)$-замкнутая выпуклая оболочка всякого $\sigma(X, F)$-компактного множества в X также $\sigma(X, F)$-компактна;

в) $\sigma(F, X)$-замкнутая выпуклая оболочка всякого $\sigma(F, X)$-компактного множества в F также $\sigma(F, X)$-компактна.

Эти условия выполнены, в частности, при $F = X^*$ и $F = X_*$ (см. пункт 2.5.3), и два таких специальных выбора F будут особенно важны в дальнейшем.

Часто бывает полезна другая топология, согласованная с двойственностью, — топология Макки $\tau(X, F)$. Эта топология, кратко описанная в пункте 2.5.3, задается семейством полунорм

$$A \in X \mapsto p_K(A) = \sup_{\eta \in K} |\eta(A)|,$$

где K пробегает множество компактных подмножеств в F. В общем случае топология Макки определяется по выпуклым компактным закругленным подмножествам K множества F, однако в силу предположения в) такое определение будет эквивалентно нашему. Особенно проста $\tau(X, F)$-топология при $F = X^*$. Единичный шар пространства X^* по теореме Алаоглу—Бурбаки $\sigma(X^*, X)$-компактен, и потому $\tau(X, X^*)$-топология совпадает с топологией нормы. Вообще можно показать, что $\tau(X, F)$-топология на X является сильнейшей из локально-выпуклых топологий, обладающих свойством: все $\tau(X, F)$-непрерывные функционалы принадлежат F. Отсюда следует вывод о $\tau(X, F)$-плотности в X всякого его $\sigma(X, F)$-плотного выпуклого подмножества.

После такой топологической прелюдии займемся вновь группами и полугруппами. Введем классы групп и полугрупп, которые будут изучены в этом пункте.

Определение 3.1.2. Полугруппа (соотв. группа) $t \to U_t$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X называется *$\sigma(X, F)$-непрерывной полугруппой (соотв. группой)*, если

(1) $t \mapsto U_t A$ при всех $A \in X$ непрерывно в $\sigma(X, F)$-топологии, т. е. $t \mapsto \eta(U_t, A)$ непрерывно при всех $A \in X$ и $\eta \in F$;

(2) $A \mapsto U_t A$ при всех t является $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-непрерывным отображением, т. е. $\eta \circ U_t \in F$ для любого $\eta \in F$.

Если $F = X^*$, то U называется *слабо непрерывной*, или *C_0-полугруппой*; если $F = X_*$, то *слабо* непрерывной*, или *C_0^*-полугруппой*.

Мы увидим ниже (следствие 3.1.8), что всякая слабо непрерывная полугруппа оказывается сильно непрерывной, т. е. $t \mapsto U_t A$ непрерывно относительно нормы X при всех $A \in X$. С проявлением этого факта мы уже сталкивались в специальном случае C_0-групп изометрий (следствие 2.5.23). Для того чтобы разобраться с общим случаем, вначале нам необходимо оценить рост $\| U_t \|$.

Предложение 3.1.3. *Пусть $U = \{U_t\}_{t \geqslant 0}$ — полугруппа в банаховом пространстве X. Если она $\sigma(X, F)$-непрерывна, то существуют такие константы $M \geqslant 1$ и $\beta \geqslant \inf_{t>0} (t^{-1} \log \| U_t \|)$, что*

$$\|U_t\| \leqslant M e^{\beta t}.$$

Доказательство. Функция $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \eta(U_t A)$ непрерывна для всех $\eta \in F$ и $A \in X$, поэтому, дважды применив принцип равномерной ограниченности, можно утверждать, что найдется такое $M < +\infty$, что $\| U_t \| \leqslant M$ при $t \in [0, 1]$. Поскольку всякое число $t \geqslant 0$ представимо в виде $t = n + s$, где n — натуральное число, а $s \in [0, 1)$, то

$$\| U_t \| = \| U_1^n U_s \| \leqslant M^{n+1} \leqslant M e^{\beta t},$$

где $\beta = \log M$. Кроме того, $M \geqslant \| U_0 \| = 1$ и

$$\beta + t^{-1} \log M \geqslant t^{-1} \log \| U_t \| \geqslant \inf_{s>0} s^{-1} \log \| U_s \|,$$

откуда и вытекают требуемые оценки на M и β.

Одним из следствий такой оценки роста является то, что $\{U_t e^{-\beta t}\}_{t \geqslant 0}$ оказывается $\sigma(X, F)$-непрерывной полугруппой, которая равномерно ограничена, и тем самым можно применить регуляризационную процедуру из предложения 2.5.18. В доказательстве следующего вспомогательного утверждения мы явно используем предположения а) — в) о паре (X, F).

Предложение 3.1.4. *Пусть $t \mapsto U_t$ — такая $\sigma(X, F)$-непрерывная полугруппа в X, что $\|U_t\| \leqslant M e^{\beta t}$. Пусть μ — комплексная мера на $\mathbb{R}_+$, такая что $\int_0^\infty d|\mu|(t)\, e^{\beta t} < \infty$. Тогда соответствие $A \mapsto U_\mu(A)$, где*

$$U_\mu(A) = \int_0^\infty d\mu(t)\, U_t(A),$$

определяет ограниченный линейный оператор в X. Кроме того, U_μ будет $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-непрерывным.

Доказательство. Первое утверждение — это по существу предложение 2.5.18. Для проверки второго утверждения надо показать, что $U_\mu^* \eta \in F$ при всяком $\eta \in F$; здесь U_μ^* — оператор в X^*, сопряженный к U_μ. Полугруппа $t \mapsto U_t^*$, в соответствии с определением 3.1.2, $\sigma(F, X)$-непрерывна на F, и для нее

$$U_\mu^* \eta(A) = \eta(U_\mu(A)) = \int_0^\infty d\mu(t)\, \eta(U_t(A)) = \int_0^\infty d\mu(t)\, (U_t^* \eta)(A).$$

Поскольку условия а) — в) на пару (X, F) симметричны по X и F, можно вновь применить предложение 2.5.18 и убедиться, что $U_\mu^* \eta \in F$.

Теперь мы введем генератор σ (X, F)-непрерывной полугруппы.

Определение 3.1.5. *(Инфинитезимальный) генератор* σ (X, F)-непрерывной полугруппы U в банаховом пространстве X определяется как линейный оператор S с областью определения $D(S)$, состоящей из таких $A \in X$, для которых существует $B \in X$ со свойством

$$\eta(B) = \lim_{t \to 0} \frac{\eta((U_t - I) A)}{t}$$

при всех $\eta \in F$. Если $A \in D(S)$, то S действует на A по правилу $SA = B$.

Отметим, что полугрупповое свойство U автоматически приводит к тому, что $U_t D(S) \subseteq D(S)$ и

$$SU_t A = U_t SA$$

при всех $A \in D(S)$. Перейдем к рассмотрению различных свойств генераторов и их резольвент. Напомним, что *резольвентное множество* $r(S)$ оператора S в банаховом пространстве X образовано такими $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $\lambda I - S$ имеет ограниченный обратный оператор, а его *спектр* $\sigma(S)$ — это дополнение к $r(S)$ в $\mathbb{C}$, и при $\lambda \in r(S)$ операторная функция $(\lambda I - S)^{-1}$ называется *резольвентой* S. Основные свойства генераторов и их резольвент содержатся в следующем предложении.

Предложение 3.1.6. *Пусть S — генератор σ (X, F)-непрерывной полугруппы U в банаховом пространстве X и M, β — такие константы, что*

$$\| U_t \| \leqslant M \exp\{\beta t\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда $D(S)$, область определения генератора, $\sigma(X, F)$-плотна, и он $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнут. Если $\operatorname{Re}\lambda > \beta$, то область значений $R(\lambda I - S)$ оператора $\lambda I - S$ совпадает с X:

$$R(\lambda I - S) = X,$$

и для $A \in D(S)$

$$\| (\lambda I - S)(A) \| \geqslant M^{-1} (\operatorname{Re}\lambda - \beta) \| A \|.$$

Резольвента S задается преобразованием Лапласа:

$$(\lambda I - S)^{-1} A = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} U_t A$$

при всех $A \in X$ и $\operatorname{Re}\lambda > \beta$.

Доказательство. Если $\operatorname{Re}\lambda > \beta$, то, согласно предложению 3.1.4, в X можно ввести $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-непрерывный оператор R_λ, положив

$$R_\lambda A = \int_0^\infty ds e^{-\lambda s} U_s A.$$

При $t \geqslant 0$ имеем

$$\frac{1}{t}(U_t - I) R_\lambda A = \frac{1}{t}\int_0^\infty ds e^{-\lambda s}(U_{s+t} - U_s) A =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^\infty ds \left(e^{-\lambda(s-t)} - e^{-\lambda s}\right) U_s A - \frac{1}{t}\int_0^t ds e^{-\lambda(s-t)} U_s A \underset{t\to 0}{\to} \lambda R_\lambda A - A,$$

причем первый член здесь сходится по норме, а второй — в $\sigma(X, F)$-топологии. Значит, $R_\lambda A \in D(S)$ и $(\lambda I - S) R_\lambda A = A$ при $A \in X$. Так как $U_t R_\lambda = R_\lambda U_t$, то из $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-непрерывности R_λ следует, что S коммутирует с R_λ в том смысле, что

$$R_\lambda(\lambda I - S) A = (\lambda I - S) R_\lambda A = A$$

при $A \in D(S)$. Тем самым $\lambda \in r(S)$ и $(\lambda I - S)^{-1} = R_\lambda$. Из $\sigma(X, F)$-$\sigma(X$ $F)$-непрерывности $(\lambda I - S)^{-1}$ вытекает $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнутость $\lambda I - S$, а потому и S. Далее, для любых $A \in X$ и $\eta \in F$ получаем, воспользовавшись теми же рассуждениями, что и в доказательстве предложения 2.5.22:

$$\lim_{n\to\infty} \eta(nR_n A) = \eta(A).$$

Принимая во внимание, что $D(S) = R(R_n) = R(nR_n)$, видим, что $D(S)$ плотна в X в $\sigma(X, F)$-топологии. Наконец, при $\eta \in F$, $A \in X$

$$|\eta(R_\lambda A)| \leqslant \int_0^\infty ds e^{-s|\operatorname{Re}\lambda|} |\eta(U_s A)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty ds e^{-s|\operatorname{Re}\lambda|} M e^{\beta s} \|\eta\| \|A\| \leqslant M(\operatorname{Re}\lambda - \beta)^{-1} \|\eta\| \|A\|,$$

иначе говоря, $\|(\lambda I - S)^{-1}\| \leqslant M(\operatorname{Re}\lambda - \beta)^{-1}$. Отсюда вытекает оценка, указанная в предложении.

Слегка видоизменив предыдущие рассуждения, можно получить следующее утверждение, которое часто полезно иметь в виду.

Следствие 3.1.7. *Пусть S — генератор $\sigma(X, F)$-непрерывной полугруппы U в банаховом пространстве X. Пусть D — подмножество в $D(S)$, области определения S, которое $\sigma(X, F)$-плотно в X и инвариантно относительно U, т. е. $U_t A \in D$ при всех $A \in D$ и $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда D — с у щ е с т в е н н а я о б л а с т ь о п р е д е л е н и я S, т. е. $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замыкание сужения S на D совпадает с S.*

Доказательство. Обозначим через $\hat{S}$ замыкание S, суженного на D. Если при некотором λ с $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ окажется, что $R(\lambda I - \hat{S}) = X$, то из предложения

3.1.6 последует $\hat{S} = S$. При $A \in D$ можно аппроксимировать интегралы римановыми суммами

$$\sum_N (A) = \sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda t_i} U_{t_i} A (t_{i+1} - t_i),$$

$$\sum_N ((\lambda I - S) A) = \sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda t_i} U_{t_i} (\lambda I - S) A (t_{i+1} - t_i),$$

которые одновременно сходятся к $(\lambda I - S)^{-1} A$ и A соответственно. Но вследствие инвариантности D относительно U имеем $\Sigma_N (A) \in D$ и

$$(\lambda I - S) \sum_N (A) = \sum_N ((\lambda I - S) A).$$

Тем самым $\Sigma_N (A) \to (\lambda I - S)^{-1} A$ и $(\lambda I - S) \Sigma_N (A) \to A$. Поэтому $A \in R (\lambda I - \hat{S})$ при каждом $A \in D$. Поскольку $(\lambda I - S)^{-1}$ обладает $\sigma(X,F)$-$\sigma (X, F)$-непрерывностью, множество $R (\lambda I - \hat{S})$ будет $\sigma (X, F)$-замкнуто. Таким образом, $R (\lambda I - \hat{S}) = X$, ввиду плотности D.

При некоторых добавочных условиях с помощью предложения 3.1.6 можно получить, что из $\sigma (X, F)$-непрерывности полугруппы U следует ее непрерывность в $\tau (X, F)$-топологии (топологии Макки). Таким добавочным предположением является требование равностепенной непрерывности, которое означает существование такого β', что для всякого $\sigma (F, X)$-компактного подмножества $K \subseteq F$ подмножество

$$K' = \{e^{-\beta' t} U_t^* \eta;\ \eta \in K,\ t \geqslant 0\}$$

имеет $\sigma (F, X)$-компактное замыкание. Вновь U_t^* обозначает сопряженный с U_t оператор, действующий в F. Если $F = X^*$, то условие равностепенной непрерывности выполняется автоматически. Достаточно выбрать β' и M так, чтобы $\| U_t \| \leqslant M \exp \{\beta' t\}$, тогда $\sigma (X^* X)$-компактность K' последует из теоремы Алаоглу—Бурбаки. Другой пример, когда условие равностепенной непрерывности выполнено, соответствует выбору столь большого β', что

$$\| e^{-\beta' t} U_t \| \to 0$$

при $t \to \infty$, и отображение η: $t \mapsto U_t^* \eta$ предполагается непрерывным по совокупности переменных в $\sigma (F, X)$-топологии.

Чтобы сформулировать общий результат о совпадении свойств непрерывности, удобно ввести понятие равностепенной $\tau (X, F)$-непрерывности. Семейство $\{T_\alpha\}$ операторов в банаховом пространстве X называют *равностепенно* $\tau (X, F)$*-непрерывным*, если для всякой полунормы p_K, фигурирующей в определенни $\tau (X, F)$-топологии, найдется такая полунорма $p_{K'}$, что

$$p_K (T_\alpha A) \leqslant p_{K'} (A)$$

при всех $A \in X$ и всех α.

Упомянутый общий результат таков:

Следствие 3.1.8. *Пусть $\sigma(X, F)$-непрерывная полугруппа U в банаховом пространстве X имеет генератор S. Предположим, что найдется такое $\beta' \geq 0$, что семейство $\{U_t e^{-\beta' t}\}_{t \geq 0}$ равностепенно $\tau(X, F)$-непрерывно. В таком случае $t \mapsto U_t$ будет $\tau(X, F)$-непрерывной, и если $A \in D(S)$, то*

$$\lim_{t \to 0} \frac{(U_t - I) A}{t} = SA,$$

где предел понимается в $\tau(X, F)$-топологии. В частности, всякая слабо непрерывная полугруппа сильно непрерывна, и ее слабый и сильный генераторы совпадают.

Доказательство. При всех $A \in D(S)$ и $\eta \in F$

$$\eta\left(U_{t_2} A - U_{t_1} A\right) = \int_{t_1}^{t_2} ds\, \eta\left(U_s SA\right).$$

Следовательно,

$$\| U_{t_1} A - U_{t_2} A \| \leqslant M \| SA \| \int_{t_1}^{t_2} dt e^{\beta t};$$

существование таких M и β вытекает из предложения 3.1.3. Значит, $t \mapsto U_t A$ сильно непрерывно при $A \in D(S)$. Далее, если $A \in D(S)$ и $B \in X$, то

$$\begin{aligned} p_K\left(\left(U_{t_1} - U_{t_2}\right) B\right) &\leqslant p_K\left(\left(U_{t_1} - U_{t_2}\right) A\right) + p_K\left(U_{t_1}(B - A)\right) + p_K\left(U_{t_2}(B - A)\right) \\ &\leqslant \| p_K \| \, \| \left(U_{t_1} - U_{t_2}\right) A \| + \left(e^{\beta' t_1} + e^{\beta' t_2}\right) p_{K'}(B - A). \end{aligned}$$

Но $D(S)$ является $\sigma(X, F)$-плотным подпространством в X, поэтому оно и $\tau(X, F)$-плотно. Тем самым из полученной оценки следует $\tau(X, F)$-непрерывность.

Теперь опять введем резольвенту R_λ оператора S и, как в доказательстве предложения 3.1.6, заметим, что

$$\frac{(U_t - I) R_\lambda A}{t} = \frac{1}{t} \int_0^\infty ds \left(e^{-\lambda (s-t)} - e^{-\lambda s}\right) U_s A - \frac{1}{t} \int_0^t ds e^{-\lambda (s-t)} U_s A \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \lambda R_\lambda A - A = S R_\lambda A.$$

Первый член по-прежнему сходится равномерно, а второй сходится в $\tau(X, F)$-топологии, так как $s \mapsto U_s A$ непрерывно в этой топологии. Поскольку область значений оператора R_λ и $D(S)$ совпадают, то при $A \in D(S)$ в $\tau(X, F)$-топологии $(U_t - I) A/t \to SA$.

Чтобы установить последнее из утверждений следствия, возьмем $F = X^*$. Тогда топология Макки $\tau(X, F)$ совпадает с топологией нормы, и предположение о свойствах полунорм соответствует следующей оценке: $\| U_t A \| \leqslant M \exp\{\beta' t\} \| A \|$. Но эта оценка была установлена в предложении 3.1.3.

Можно заметить, что оценка для резольвенты

$$\| (\lambda I - S)^{-1} \| \leqslant M (\operatorname{Re} \lambda - \beta)^{-1}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \beta,$$

полученная в предложении 3.1.6, принимает особенно простую форму

$$\|(\lambda I - S)^{-1}\| \leqslant (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$$

для C_0-полугруппы сжатий U; очевидно, что тогда и

$$\|(\lambda I - S)^{-n}\| \leqslant (\operatorname{Re}\lambda)^{-n}$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$. Однако в общем случае ситуация усложняется. Можно получить выражения, представляющие собой преобразования Лапласа:

$$(\lambda I - S)^{-n} A = \int_0^\infty dte^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} U_t A, \quad \operatorname{Re}\lambda > \beta,$$

и с их помощью показать, что

$$\|(\lambda I - S)^{-n}\| \leqslant \int_0^\infty dte^{-t\operatorname{Re}\lambda} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Me^{\beta t} = M(\operatorname{Re}\lambda - \beta)^{-n}.$$

Эти оценки не выводятся по индукции из оценки при $n = 1$, если $M \neq 1$, так как M входит в них линейно.

В качестве последнего замечания о предложении 3.1.6 упомянем, что резольвентное множество генератора S содержит полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \beta$. Если же S — генератор такой C_0-полугруппы U, для которой $\|U_t\| \leqslant Me^{\beta t}$, то и S, и $-S$ порождают C_0-полугруппы (соответственно $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$ и $\{U_{-t}\}_{t\geqslant 0}$) и, значит, $r(S)$ содержит обе полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ и $\operatorname{Re}\lambda < -\beta$. Следовательно, спектр $\sigma(S)$ генератора S лежит в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \beta$, и если U — группа изометрий, то спектр ее генератора должен лежать на мнимой оси.

После такого предварительного знакомства с генераторами обратимся к более интересной проблеме построения полугруппы по генератору. Мы рассмотрим два случая, $F = X^*$ и $F = X_*$, отвечающих слабо (сильно) и слабо* непрерывным полугруппам. В обоих случаях изложение ведется по одной схеме, и многие из свойств первого случая переносятся на второй по двойственности. В связи с этим часто бывает полезен следующий элементарный результат:

Лемма 3.1.9. *Пусть S — оператор в банаховом пространстве X, F — замкнутое по норме подпространство в X^*, и пусть*

$$\|A\| = \sup\{|\eta(A)|;\ \eta \in F,\ \|\eta\| \leqslant 1\}.$$

Если S можно расширить до оператора в X, сопряженного к некоторому $\sigma(F, X)$-плотно определенному оператору S^* в F, то S обладает $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замыканием.

Вдобавок, эквивалентны следующие условия:

(1) S определен $\sigma(X, F)$-плотно и $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнут;

(2) S сопряжен к некоторому $\sigma(F, X)$-плотно определенному и $\sigma(F, X)$-$\sigma(F, X)$-замкнутому оператору S^* в F.

Если эти условия выполнены и S ограничен, то $\|S\| = \|S^*\|$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $G(S) = \{(A, SA);\ A \in D(S)\}$ обозначает график оператора S, а $G(S)^{\perp} = \{(\omega_1, \omega_2)\}$ — его ортогональное дополнение в $F \times F$. Вначале покажем, что $G = \{(-\omega_2, \omega_1);\ (\omega_1, \omega_2) \in G(S)^{\perp}\}$ служит графиком оператора S^* в F. Для этого достаточно проверить, что из $\omega_2 = 0$ последует $\omega_1 = 0$. Но это вытекает из соотношения ортогональности

$$\omega_1(A) + \omega_2(SA) = 0$$

и плотности $D(S)$. Далее, заметим, что $G(S)^{\perp}$, а значит и G, является по определению $\sigma(F, X) \times \sigma(F, X)$-замкнутым множеством. Тем самым $\sigma(F, X)$-$\sigma(F, X)$-замкнут оператор S^*. Если же S^* не будет $\sigma(F, X)$-плотно определен, то в $G^{\perp}$ должен найтись элемент вида $(-B, 0)$, т. е. в X содержится $B \neq 0$, такой что $(0, B) \in G(S)$. Однако это противоречит линейности оператора S; следовательно, S^* определен плотно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Применимо то же самое рассуждение.

Обратимся теперь к первому утверждению леммы. Поскольку $D(S^*)$ плотна, сопряженный к S^* оператор S^{**} корректно определен как $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнутый оператор в X. Но S^{**} будет замкнутым расширением S, т. е. S замыкаем. Наконец, равенство норм для ограниченных операторов непосредственно усматривается из соотношения

$$\|A\| = \sup\{|\eta(A)|;\ \eta \in F,\ \|\eta\| \leqslant 1\}.$$

Главная тема этого пункта — конструкция C_0- и C_0^*-полугрупп. Проблема состоит в характеризации тех операторов, которые допускают взятие экспоненты от них тем или иным способом, и мы рассмотрим здесь в пункте 3.1.3 ряд алгоритмов построения экспоненциальной функции. Начнем с результата, дающего характеризацию генератора S полугруппы сжатий через свойства его резольвенты. Алгоритм

$$e^{tx} = \lim_{n\to\infty}(1 - tx/n)^{-n},$$

применяемый для числовых функций, может быть распространен и на операторные функции при условии, что «резольвента» $(I - tS/n)^{-n}$ обладает подходящими свойствами. Определить резольвенту замкнутого оператора S удается, если располагать информацией двоякого рода. С одной стороны, надо знать, что область значений оператора $I - tS/n$ совпадает со всем пространством, чтобы быть уверенным в том, что $(I - tS/n)^{-1}$ всюду определен, а с другой — нужна ограниченность $\|(I - tS/n)^{-n}\|$. Для дальнейшего полезно четко разграничить два этих независимых свойства.

Теорема 3.1.10 (теорема Хилле—Иосиды). *Пусть S—оператор в банаховом пространстве X. Если $F = X^*$ или $F = X_*$, то следующие условия эквивалентны:*

(1) S является инфинитезимальным генератором $\sigma(X, F)$-непрерывной полугруппы сжатий U;

(2) S определен $\sigma(X, F)$-плотно и $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнут. При $\alpha \geqslant 0$

$$\| (I - \alpha S) A \| \geqslant \| A \|, \quad A \in D(S),$$

и при некотором $\alpha > 0$

$$R(I - \alpha S) = X.$$

Если эти условия выполнены, то полугруппа определяется по генератору S посредством любого из предельных переходов

$$U_t A = \lim_{\varepsilon \to 0} \exp \{tS(I - \varepsilon S)^{-1}\} A$$
$$= \lim_{n \to \infty} (I - tS/n)^{-n} A,$$

где экспонента ограниченного оператора $S(I - \varepsilon S)^{-1}$ определяется как сумма соответствующего степенного ряда. Пределы существуют в $\sigma(X, F)$-топологии, сходимость равномерна по t на компактах, а если A принадлежит $\overline{D(S)}$, замыканию $D(S)$ по норме, то пределы существуют в смысле нормы.

Доказательство. В предложении 3.1.6 установлена импликация (1) $\Rightarrow$ (2). Для доказательства обратной импликации мы построим полугруппу, применив первый из алгоритмов, указанных в теореме. Из условия (2) следуют ограниченность оператора $(I - \varepsilon S)^{-1}$ и его $\sigma(X, F)$-непрерывность, а также оценка $\| (I - \varepsilon S)^{-1} \| \leqslant 1$ в точке $\varepsilon = \alpha_0$, в которой $R(I - \alpha_0 S) = X$. С помощью разложения в ряд Неймана выразим возмущенный оператор $(I - \alpha S)^{-1}$ через $(I - \alpha_0 S)^{-1}$:

$$(I - \alpha S)^{-1} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right) \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha}\right)^n (I - \alpha_0 S)^{-n-1}.$$

Отсюда видно, что $R(I - \varepsilon S) = X$ при всех $\varepsilon > 0$.

Теперь рассмотрим порознь случаи C_0- и $C_0{}^*$-полугрупп, т. е. случаи $F = X^*$ и $F = X_*$.

C_0-случай: $F = X^*$. Сначала введем оператор $S_\varepsilon = S(I - \varepsilon S)^{-1}$ и с помощью соотношения $S_\varepsilon = -\varepsilon^{-1}(I - (I - \varepsilon S)^{-1})$ получим, что

$$\| \exp \{tS_\varepsilon\} \| \leqslant \exp \{-t\varepsilon^{-1}\} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(t\varepsilon^{-1})^n}{n!} \| (I - \varepsilon S)^{-n} \| \leqslant 1$$

при $t \geqslant 0$. Тем самым $U_t^\varepsilon = \exp\{tS_\varepsilon\}$ образуют равномерно непрерывную сжимающую полугруппу. Вдобавок ограниченные операторы S_ε и S_δ коммутируют и при всех $t \geqslant 0$

$$\|U_t^\varepsilon A - U_t^\delta A\| = \left\| \int_0^1 ds \frac{d}{ds} e^{t(sS_\varepsilon + (1-s) S_\delta)} A \right\|$$

$$= \left\| t \int_0^1 ds e^{tsS_\varepsilon} e^{t(1-s) S_\delta} (S_\varepsilon - S_\delta) A \right\| \leqslant t \| (S_\varepsilon - S_\delta) A \|. \qquad (*)$$

Теперь заметим, что при $A \in D(S)$

$$\| (I - \varepsilon S)^{-1} A - A \| = \varepsilon \| (I - \varepsilon S)^{-1} SA \| \leqslant \varepsilon \| SA \|.$$

Следовательно, равномерно ограниченное семейство операторов $(I - \varepsilon S)^{-1}$ сильно сходится к единичному оператору на плотном множестве $D(S)$. Но тогда это семейство сильно сходится к единице, и из соотношения

$$(S_\varepsilon - S) A = ((I - \varepsilon S)^{-1} - I) SA$$

вытекает, что $S_\varepsilon A$ сходится по норме к SA при всех $A \in D(S)$. Воспользовавшись $(*)$, мы заключаем, что $\{U_t^\varepsilon A\}_{\varepsilon \geqslant 0}$ сходится по норме, и притом равномерно по t на компактах, если $A \in D(S)$. Учитывая равномерную ограниченность, а именно то, что $\| U_t^\varepsilon \| \leqslant 1$, можно утверждать, что $\{U_t^\varepsilon\}_{\varepsilon \geqslant 0}$ сходится сильно на $\overline{D(S)}$, причем равномерно по t на компактах. Пусть $U = \{U_t\}_{t \geqslant 0}$ обозначает соответствующий сильный предел; нетрудно убедиться, что это C_0-полугруппа сжатий.

Непосредственно проверяется соотношение

$$\frac{\left(U_t^\varepsilon - I\right) A}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t ds U_s^\varepsilon S_\varepsilon A$$

при всех $A \in X$. В случае $A \in D(S)$ мы приходим к равенству

$$\frac{(U_t - I) A}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t ds U_s SA,$$

взяв сильный предел. Поэтому

$$\left\| \frac{(U_t - I) A}{t} - SA \right\| \leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \| (U_s - I) SA \|,$$

а сильная непрерывность полугруппы U обеспечивает, что ее генератор $\hat{S}$ расширяет S. В таком случае $(I - \alpha\hat{S})^{-1}$ служит расширением $(I - \alpha S)^{-1}$ при всех $\alpha > 0$. Но всюду определенные операторы $(I - \alpha S)^{-1}$ не могут иметь собственных расширений, поэтому невозможно строгое вложение S в $\hat{S}$, т. е. $\hat{S}$ обязан совпадать с S.

Так завершается доказательство в случае $F = X^*$, за исключением второго алгоритма, который будет обоснован позже.

C_0^*-случай: $F = X_*$. Условие (2) теоремы и лемма 3.1.9 позволяют заключить, что оператор S^* в X_* слабо замкнут и имеет слабо плотную область определения. Вторичное применение леммы 3.1.9 дает

$$\| (I - \alpha S^*)^{-1} \| = \| (I - \alpha S)^{-1*} \| = \| (I - \alpha S)^{-1} \| \leqslant 1$$

при $\alpha \geqslant 0$. Рассмотренный C_0-вариант теоремы (случай $F = X^*$) гарантирует, что S^* является генератором слабо непрерывной полугруппы U_t^* сжатий в $F = X_*$. Пусть U_t — сопряженная с ней полугруппа операторов в X. Очевидно, U_t будет $\sigma(X, F)$-непрерывной полугруппой сжатий пространства X. Пусть T — генератор U_t. Воспользовавшись предложением 3.1.6 при $\lambda > 0$ и $\eta \in X_*$, $A \in X$, получим

$$\eta((\lambda I - T)^{-1}A) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \eta(U_t A) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \left(U_t^* \eta\right)(A)$$

$$= ((\lambda I - S^*)^{-1}\eta)(A) = \eta((\lambda I - S)^{-1} A).$$

Отсюда выводим, что $(\lambda I - T)^{-1} = (\lambda I - S)^{-1}$, так что $T = S$, т. е. S — генератор U_t.

Теперь дадим обоснование второго алгоритма взятия экспоненты, приведенного в теореме.

Лемма 3.1.11. *Пусть T — ограниченный оператор в банаховом пространстве X с $\|T\| \leqslant 1$. Тогда*

$$\|(e^{n(T-I)} - T^n) A\| \leqslant \sqrt{n}\, \|(T - I) A\|$$

при всех $A \in X$ и всех натуральных n.

Доказательство. Норма разности в левой части оценивается так:

$$\|(e^{n(T-I)} - T^n) A\| \leqslant e^{-n} \sum_{m \geqslant 0} \frac{n^m}{m!} \|(T^m - T^n) A\|$$

$$\leqslant e^{-n} \sum_{m \geqslant 0} \frac{n^m}{m!} \|(T^{|m-n|} - I) A\| \leqslant \|(T - I) A\| e^{-n} \sum_{m \geqslant 0} \frac{n^m}{m!} |m - n|.$$

Нетрудно с помощью неравенства Коши — Шварца получить теперь, что

$$e^{-2n} \left(\sum_{m \geqslant 0} \frac{n^m}{m!} |m - n|\right)^2 \leqslant e^{-n} \sum_{m \geqslant 0} \frac{n^m}{m!} (m - n)^2 = n.$$

Комбинируя обе оценки, приходим к требуемому неравенству.

Доказательство теоремы 3.1.10 завершается теперь просто. Выберем $A \in D(S)$ и в качестве T в лемме 3.1.11 возьмем $(I - tS/n)^{-1}$. Имеем

$$\left\| \left(e^{tS(I - tS/n)^{-1}} - \left(I - \frac{tS}{n}\right)^{-n}\right) A \right\| \leqslant \frac{t}{\sqrt{n}} \left\| \left(I - \frac{tS}{n}\right)^{-1} SA \right\| \leqslant \frac{t}{\sqrt{n}} \|SA\|.$$

Это позволяет утверждать, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\| U_t A - \left(I - \frac{tS}{n}\right)^{-n} A \right\| = 0$$

при всех $A \in D(S)$ равномерно по t на компактах. Для требуемого заключения остается сослаться на равномерную ограниченность и плотность.

В случае $F = X_*$ заметим, что $\overline{D(S)}$ инвариантно относительно U_t, и, как и в следствии 3.1.8, можно показать, что сужение U_t на $\overline{D(S)}$ сильно непрерывно. Существование пределов (в смысле сходимости по норме), задающих $U_t A$

при $A \in \overline{D(S)}$, выводится из C_0-варианта теоремы. Слабая* сходимость для произвольных A вытекает из сильной сходимости к соответствующим пределам, задающим $U_t^*\eta$ при всех $\eta \in X_*$.

У теоремы Хилле—Иосиды есть вариант, применимый к произвольным $\sigma(X, F)$-непрерывным полугруппам. Напомним, что семейство операторов $\{T_\alpha\}$ называется равностепенно $\tau(X, F)$-непрерывным, если для любой полунормы p_K, применяемой при задании $\tau(X, F)$-топологии, существует такая полунорма $p_{K'}$, что

$$p_K(T_\alpha A) \leqslant p_{K'}(A)$$

при всех $A \in X$ и всех α.

Следствие 3.1.12. *Для всякого $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнутого оператора S в X эквивалентны условия* (1) *и* (2) *и эквивалентны условия* (1a) *и* (2a):

(1) *S — генератор $\sigma(X, F)$-непрерывной сжимающей полугруппы $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$ в X, обладающей свойством равностепенной $\tau(X, F)$-непрерывности;*

(1a) *S—генератор $\sigma(X, F)$-непрерывной полугруппы U сжатий, для которой семейство $\{U_t^*\}_{t\geqslant 0}$ равностепенно $\tau(F, X)$-непрерывно;*

(2) $\|(I - \alpha S)^{-1}\| \leqslant 1$ *при* $\alpha \geqslant 0$, *и семейство* $\{(I - \alpha S)^{-m};\ \alpha \in [0, 1],\ m = 1, 2, \ldots\}$ *равностепенно* $\tau(X, F)$-непрерывно;

(2a) $\|(I - \alpha S)^{-1}\| \leqslant 1$ *при* $\alpha \geqslant 0$, *и семейство* $\{(I - \alpha S^*)^{-m};\ \alpha \in [0, 1],\ m = 1, 2, \ldots\}$ *равностепенно* $\tau(F, X)$-*непрерывно. В этих случаях*

$$U_t A = \lim_{\varepsilon \to 0} \exp\{tS(I - \varepsilon S)^{-1}\} A = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{tS}{n}\right)^{-n} A,$$

причем пределы существуют в $\tau(X, F)$-топологии в случае (1) ($\Leftrightarrow$ (2)) *и в $\sigma(X, F)$-топологии в случае* (1a) ($\Leftrightarrow$ (2a)).

Доказательство. Доказательство эквивалентности условий (1) и (2) совпадает с доказательством в случае $F = X^*$ в теореме Хилле — Иосиды, а эквивалентность (1a) и (2a) устанавливается по аналогии со случаем $F = X_*$. Единственное небольшое отлнчие в рассуждениях состоит в том, что оценки норм заменяются оценками для полунорм и вместо равномерной ограниченности применяется равностепенная непрерывность.

Теорема Хилле—Иосиды характеризует генераторы через свойства их резольвент $(I - \alpha S)^{-1}$. Теперь мы обратимся к другой характеризации для C_0-полугрупп, в которой фигурирует понятие диссипативности.

Сначала напомним, что если A — элемент банахова пространства X, а $\eta \in X^*$ удовлетворяет условию $\eta(A) = \|\eta\|\,\|A\|$, то η называется *касательным функционалом* к A. Теорема Хана —

Банаха гарантирует, что для любого $A \in X$ существует по крайней мере один ненулевой функционал, касательный к A.

Определение 3.1.13. Оператор S с областью определения $D(S)$ в банаховом пространстве X называется *диссипативным*, если для любого $A \in D(S)$ найдется такой ненулевой касательный к A функционал η, что

$$\operatorname{Re} \eta (SA) \leqslant 0.$$

Для того чтобы пояснить происхождение этого понятия, рассмотрим сжимающую C_0-полугруппу U с генератором S и допустим, что η — касательный функционал к $A \in D(S)$. Тогда $|\eta(U_s A)| \leqslant \|\eta\| \; \|A\|$ при всех $s \geqslant 0$ и, значит,

$$\operatorname{Re} \eta (U_s A) \leqslant \operatorname{Re} \eta (U_0 A),$$

а следовательно,

$$\frac{d}{ds} \operatorname{Re} \eta (U_s A) |_{s=0} \leqslant 0.$$

Последнее условие в точности совпадает с условием диссипативности

$$\operatorname{Re} \eta (SA) \leqslant 0.$$

Итак, продемонстрировано, что генератор S сжимающей C_0-полугруппы диссипативен.

Хотя ниже мы убедимся, что свойство диссипативности полезно при изучении C_0-полугрупп сжатий, применения в случае произвольных $\sigma(X, F)$-непрерывных полугрупп оно сразу не находит. При попытке несколько видоизменить определение и рассматривать только касательные функционалы η из F мы сталкиваемся с проблемой существования. Если, однако, настаивать на определении диссипативности по отношению к X^*, то не очевидна диссипативность генератора S полугруппы U, обладающей $\sigma(X, F)$-непрерывностью, поскольку функция $s \mapsto \eta(U_s A)$ при $\eta \in X^*$ и $A \in D(S)$ не обязана быть дифференцируемой.

В качестве следующего шага выведем свойства диссипативных операторов, имеющие отношение к проблеме характеризации C_0-генераторов.

Лемма 3.1.14. *Пусть S — диссипативный оператор с областью определения, плотной по норме в банаховом пространстве X. Тогда S допускает замыкание относительно нормы в X и это замыкание диссипативно.*

Доказательство. Возьмем такую последовательность $A_n \in D(S)$, что $A_n \to 0$, $SA_n \to 0$. Мы должны показать, что $A = 0$. Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$, подберем $B \in D(S)$ так, чтобы $\|A + B\| \leqslant \varepsilon$. Далее, при $\lambda < 0$ рассмотрим такой касательный функционал $\eta_{n,\lambda}$ к $B + \lambda A_n$, имеющий единичную норму, что $\operatorname{Re} \eta_{n,\lambda} (S(B + \lambda A_n)) \leqslant 0$. Единичный шар в X^* слабо*-компактен по теореме

Алаоглу — Бурбаки, поэтому последовательность $\eta_{n,\lambda}$ содержит подпоследовательность $\eta_{n',\lambda}$, которая сходится в слабой* топологии к $\eta_\lambda \in X^*$. В силу условий

$$\|\eta_{n,\lambda}\| = 1, \quad \eta_{n,\lambda}(B + \lambda A_n) = \|B + \lambda A_n\|, \quad \operatorname{Re}\eta_{n,\lambda}(S(B + \lambda A_n)) \leqslant 0$$

будут выполнены условия

$$\|\eta_\lambda\| = 1, \quad \eta_\lambda(B) = \|B\|, \quad \operatorname{Re}\eta_\lambda(S(B + \lambda A)) \leqslant 0.$$

Теперь можно выбрать такую подсеть $\eta_{\lambda'}$, которая в слабой* топологии сходится к $\eta \in X^*$ при стремлении λ' к $-\infty$. Функционал η автоматически обладает свойствами

$$\|\eta\| = 1, \quad \eta(B) = \|B\|, \quad \operatorname{Re}\eta(A) \geqslant 0.$$

Но тогда

$$0 \leqslant \|B\| + \operatorname{Re}\eta(A) \leqslant |\eta(B) + \eta(A)| \leqslant \|B + A\| \leqslant \varepsilon.$$

В частности, $\|B\| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, обязательно $A = 0$.

Наконец, если $A \in D(\overline{S})$, где $\overline{S}$ — замыкание S, то найдутся такие $A_n \in D(S)$, что $A_n \to A$ и $SA_n \to \overline{S}A$. Если η_n — нормированные касательные функционалы к A_n, а η — слабая* предельная точка η_n, то

$$\|\eta\| = 1, \quad \eta(A) = \|A\|, \quad \operatorname{Re}\eta(\overline{S}A) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\eta_n(SA_n) \leqslant 0.$$

Таким образом, S диссипативен.

Лемма 3.1.15. *Пусть S — диссипативный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Тогда*

$$\|(I - \alpha S)\ A\| \geqslant \|A\|$$

при всех $\alpha \geqslant 0$ и всех $A \in D(S)$.

Доказательство. Пусть η — ненулевой касательный функционал к $A \in D(S)$. Диссипативность S означает, что при всех $\alpha \geqslant 0$ мы имеем $-\alpha \operatorname{Re}\eta(SA) \geqslant 0$, а потому

$$\|\eta\|\,\|A\| = \operatorname{Re}\eta(A) \leqslant \operatorname{Re}\eta((I - \alpha S)\ A) \leqslant \|\eta\|\,\|(I - \alpha S)\ A\|.$$

Поделив последнее неравенство на $\|\eta\|$, получим требуемый результат.

Замечание. Если оператор S плотно по норме определен в банаховом пространстве X и для всех $\alpha \geqslant 0$ и всех $A \in D(S)$

$$\|(I - \alpha S)(A)\| \geqslant \|A\|,$$

то S допускает замыкание по норме. Этот вывод можно сделать, несколько видоизменив доказательство леммы 3.1.14; соответствующее рассуждение явно проведено в лемме 3.1.27.

В результате мы приходим к следующей характеризации генераторов.

Теорема 3.1.16 (теорема Люмера—Филлипса). *Для оператора S в банаховом пространстве X следующие условия эквивалентны:*

(1) S — *генератор* C_0-*полугруппы сжатий;*

(2) S *плотно определен, замкнут, диссипативен, и*

$$R(I - \alpha S) = X$$

при некотором $\alpha > 0$.

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) следует из теоремы 3.1.10 и обсуждения, предваряющего лемму 3.1.14. Обратно, (2) ⇒ (1) согласно лемме 3.1.15 и теореме 3.1.10.

Следует отметить, что для доказательства леммы 3.1.15 и для доказательства свойства S быть генератором в теореме 3.1.16 требуется только, чтобы $\operatorname{Re} \eta(SA) \leqslant 0$ для каждого $A \in D(S)$ при каком-нибудь одном ненулевом касательном к A функционале η. Если же известно, что S — генератор, то $\operatorname{Re} \eta(SA) \leqslant 0$ при всех касательных к A функционалах η, для всякого $A \in D(S)$. Можно доказать, что всякий плотно по норме определенный диссипативный оператор обладает таким более сильным свойством.

После обсуждения $\sigma(X, F)$-непрерывных сжимающих полугрупп займемся $\sigma(X, F)$-непрерывными группами изометрий $U = \{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Вновь можно заметить, что если S — генератор U, то S и $-S$ будут генераторами сжимающих полугрупп $\{U_t\}_{t \geqslant 0}$ и $\{U_{-t}\}_{t \geqslant 0}$ соответственно. Тем самым информация, полученная о свойствах генераторов полугрупп сжатий, может быть прямо преобразована в информацию о генераторах изометрических групп. Для этого S заменяется на $\pm S$; например, если S — генератор C_0-группы изометрий, то

$$\|(I - \alpha S)(A)\| \geqslant \|A\|, \quad R(I - \alpha S) = X$$

при *всех* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, согласно предложению 3.1.6. Приведенные здесь условия встречаются в теореме Хилле—Иосиды для случая $\sigma(X, F)$-непрерывных групп, а в теореме Люмера—Филлипса в случае генераторов групп необходимо требовать, чтобы S и $-S$ были диссипативны. Эти результаты мы резюмируем в теореме 3.1.19, добавив к ним характеризацию генераторов через аналитические элементы. Дадим определение таких элементов.

Определение 3.1.17. Пусть S — оператор в банаховом пространстве X. Элемент $A \in X$ называется *аналитическим* (*целым аналитическим*) *для* S, если он принадлежит $D(S^n)$ (области определения оператора S^n) при всех $n = 1, 2, \ldots$ и

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} \|S^n A\|$$

является аналитической (целой аналитической) функцией. ⌉

В случае когда S — генератор $\sigma(X, F)$-непрерывной изометрической группы U, данное понятие аналитичности совпадает с понятием аналитичности, введенным в определении 2.5.20. Например, если A — аналитический элемент для генератора S группы U, то функция

$$f(t+z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}U_tS^nA$$

определена при всех $t\in\mathbb{R}$ и всех z из круга сходимости ряда $\sum\limits_{n\geqslant 0}(z^n/n!)\,\|S^nA\|$. Эта функция f удовлетворяет критерию, содержащемуся в определении 2.5.20, и, следовательно, A аналитичен для U. Наоборот, если A сильно (слабо) аналитичен для U в полосе $\{z;\ |\operatorname{Jm} z|<\lambda\}$, то обычные оценки Коши дают

$$\left\|\frac{d^n}{dt^n}U_tA\right\|=\|U_tS^nA\|=\|S^nA\|\leqslant\frac{n!\,M}{\lambda^n}$$

при некотором M. Тем самым

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{|z|^n}{n!}\|S^nA\|\leqslant M\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{|z|}{\lambda}\right)^n<+\infty$$

при $|z|<\lambda$.

Эквивалентность двух понятий аналитичности для $\sigma(X,F)$-непрерывной группы изометрий U и ее инфинитезимального генератора S позволяет заключить с помощью следствия 2.5.23, что S имеет $\sigma(X,F)$-плотное множество целых аналитических элементов. По-видимому, стоит подчеркнуть, что для полугрупп ситуация может в корне отличаться. Имеются C_0-полугруппы изометрий, для которых один только нуль является аналитическим элементом.

Пример 3.1.18. Пусть $X=C_0(\mathbb{R})$ (банахово пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$, обращающихся в нуль на бесконечности, снабженное sup-нормой) и X_+ обозначает банахово подпространство в X, состоящее из элементов $f\in X$, для которых $f(t)=0$ при $t\leqslant 0$. Введем C_0-группу T сдвигов на X, полагая

$$(T_tf)(x)=f(x-t),\ x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R},$$

и C_0-полугруппу U_t левых сдвигов на X_+:

$$(U_tf)(x)=f(x-t),\ x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}_+.$$

Функция $f\in X$ будет аналитической для T, если она аналитична в обычном смысле. Допустим теперь, что $f\in X_+$ аналитична для U. Тогда она должна быть аналитична и для T, а следовательно, окажется аналитической в обычном понимании функцией, обращающейся в нуль на полуоси $x\leqslant 0$. Таким образом, $f=0$.

Основные результаты, относящиеся к характеризации генераторов $\sigma(X,F)$-групп изометрий, представлены в приводимой ниже теореме.

Теорема 3.1.19. *Пусть S — оператор в банаховом пространстве X. Если $F = X^*$ или $F = X_*$, то эквивалентны следующие условия:*

(1) S — инфинитезимальный генератор $\sigma(X, F)$-непрерывной группы изометрий U;

(2) S является $\sigma(X, F)$-плотно определенным $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнутым оператором,

$$\|(I - \alpha S) A\| \geqslant \|A\|$$

при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $A \in D(S)$ и либо

(A1) $R(I - \alpha S) = X$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ (при одном $\alpha > 0$ и одном $\alpha < 0$), либо

(A2) единичный шар множества X_a всех аналитических для S элементов $\sigma(X, F)$-плотен в единичном шаре пространства X.

Замечание. В C_0-случае ($F = X^*$) в условии (2) вместо $\|(I - \alpha S) A\| \geqslant \|A\|$ можно потребовать диссипативность обоих операторов $\pm S$. Тогда неравенство последует из леммы 3.1.15.

Доказательство. Основная часть теоремы была уже доказана. Эквивалентность условий (1) и (2) + (A1) составляет содержание теоремы Хилле — Иосиды применительно к $\pm S$. Импликация (1) $\Rightarrow$ (A2) вытекает из предложения 2.5.22. Остается установить, что (2) + (A2) $\Rightarrow$ (1).

Пусть A — аналитический элемент для S и t_A — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{m \geqslant 0} \frac{t^m}{m!} \|S^m A\|$. Примем во внимание, что

$$\left(I + \frac{tS}{n}\right)^n A = \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} S^m A c_{n,m},$$

где

$$1 - \frac{m(m-1)}{n} \leqslant c_{n,m} = \prod_{p=1}^{m-1} \left(1 - \frac{p}{n}\right) \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} S^m A - \left(I + \frac{tS}{n}\right)^n A \right\| = 0.$$

Таким образом, если при $|t| < t_A$ задать $U_t A$ формулой

$$U_t A = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} S^n A,$$

то получим, применив неравенство из условия (2):

$$\|U_t A\| = \lim_{n \to \infty} \left\| \left(I + \frac{tS}{n}\right)^n A \right\| \geqslant \|A\|.$$

Далее, оперируя со сходящимися по норме степенными рядами, можно получить, что $U_{s+t}A = U_s(U_tA)$ при $|s| + |t| < t_A$. Следовательно,

$$\| A \| = \| U_{-t}(U_tA) \| \geqslant \| U_tA \| \geqslant \| A \|,$$

и мы убеждаемся, что $\| U_tA \| = \| A \|$ при $|t| < t_A/2$.

Воспользовавшись тождеством

$$S \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} S^m A = \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} S^m S A,$$

из замкнутости S выводим, что $U_tA \in D(S)$ и $SU_tA = U_tSA$ при $|t| < t_A$. Поэтому при $|t| < t_A/2$

$$\| SU_tA \| = \| U_tSA \| = \| SA \|.$$

Последовательно повторяя это рассуждение, можно показать, что при $|t| < t_A/2$ элемент U_tA — аналитический для S, причем соответствующий радиус сходимости $t_{U_tA} = t_A$. Значит, можно повторно применить определение U_t. Находим, что

$$U_{t+s}A = U_t(U_sA) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{t^m}{m!} S^m (U_sA)$$

при $|t| < t_A$ и $|s| < t_A/2$, и в результате получаем, что $\| U_tA \| = \| A \|$ при всех $|t| < t_A$, и т. д.

Та же самая аргументация позволяет определить U_tA при всех $t \in \mathbb{R}$: выбрав n так, чтобы $n > 2|t|/t_A$, полагаем

$$U_tA = (U_{t/n})^n A.$$

Легко видеть, что это определение не зависит от выбора n и $U_sU_tA = U_{s+t}A$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$. К тому же

$$\lim_{t\to 0} \| U_tA - A \| = 0,$$

поэтому $U = \{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ является сильно непрерывной однопараметрической группой изометрий множества X_a. Замыкания операторов U_t относительно нормы в X образуют C_0-группу изометрий множества $X_0 = \overline{X_a}$ — замыкания X_a по норме. Пусть S_0 — генератор этой группы. Ясно, что $S_0|_{X_a} = S|_{X_a}$. Но, согласно следствию 3.1.7, X_a — существенная область определения для S_0, а из $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнутости оператора S следует его замкнутость по норме. Таким образом, $S_0 \subseteq S$, следовательно, при $\alpha \neq 0$

$$X_a \subseteq X_0 = (I - \alpha S_0) D(S_0) \subseteq (I - \alpha S) D(S).$$

В случае $F = X^*$ совпадут X_0 и X, так что выполняется (A1), и доказательство завершено. В случае $F = X_*$ можно для $A \in X$ выбрать сеть $A_\gamma \in X_a$, такую что A_γ сходится к A в слабой* топологии и $\| A_\gamma \| \leqslant \| A \|$. Но наше предыдущее заключение гарантирует существование таких $B_\gamma \in D(S)$, что $A_\gamma = (I - \alpha S) B_\gamma$. Вдобавок

$$\| B_\gamma \| \leqslant \| (I - \alpha S) B_\gamma \| = \| A_\gamma \| \leqslant \| A \|.$$

Тем самым $\| B_\gamma \|$ равномерно ограничены. Поскольку единичный шар в X слабо*-компактен по теореме Алаоглу — Бурбаки, найдется слабо* сходящаяся подсеть $B_{\gamma'}$ сети B_γ. Пусть B обозначает ее предельную точку. Тогда $B_{\gamma'} \to B$ и $A_{\gamma'} = (I - \alpha S) B_{\gamma'} \to A$ (оба предела — в слабой* топологии). Из слабой* замкнутости S следует, что $B \in D(S)$ и $(I-\alpha S)B = A$, т. е. $R(I-\alpha S) = X$. Иначе говоря, верно (2) + (A1), так что S — генератор, по теореме 3.1.10.

Отметим, что проведенное в этом доказательстве построение U_t позволяет установить

Следствие 3.1.20. *Пусть X — банахово пространство, в котором действует $\sigma(X, F)$-непрерывная группа изометрий U с генератором S. Пусть D — подпространство области определения S, которое $\sigma(X, F)$-плотно в X, состоит из аналитических элементов для S и удовлетворяет условию $SD \subseteq D$. Тогда D — существенная область определения S.*

Пример 3.1.21. Рассмотрим в качестве X гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. Тогда неравенство в условии (2) теоремы 3.1.9 равносильно следующему:

$$\|(I-\alpha S)\psi\|^2 \geqslant \|\psi\|^2, \quad \psi \in D(S),$$

т. е.

$$-2\alpha \operatorname{Re}(\psi, S\psi) + \alpha^2 \|S\psi\|^2 \geqslant 0.$$

Для справедливости такого условия необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Re}(\psi, S\psi) = 0$ при всех $\psi \in D(S)$. Далее, учтем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$ и единственным нормированным касательным функционалом к ψ будет $\eta = \psi/\|\psi\|$. Значит, диссипативность $\pm S$ эквивалентна свойству $\operatorname{Re}(\psi, S\psi) = 0$ при всех $\psi \in D(S)$, или

$$(\psi, S\psi) + (S\psi, \psi) = 0, \ \psi \in D(S).$$

Полагая $S = iH$ и применяя стандартные тождества поляризации, замечаем, что эти условия равносильны требованию симметричности H:

$$(H\varphi, \psi) = (\varphi, H\psi), \ \varphi, \psi \in D(H) = D(S).$$

Тем самым теорема 3.1.19 утверждает, что S будет инфинитезимальным генератором сильно непрерывной однопараметрической группы изометрий (унитарных операторов) тогда и только тогда, когда $S = iH$, где H — плотно определенный замкнутый симметрический оператор, удовлетворяющий одному из следующих двух условий:

либо $R(\mathbb{1} + i\alpha H) = \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
либо H обладает плотным множеством аналитических векторов.

Хорошо известно, что это условия самосопряженности H.

До сих пор мы охарактеризовали лишь генераторы изометрических групп и сжимающих полугрупп, но большую часть полученных результатов можно распространить на общие группы и полугруппы, хотя свойства роста $\|U_t\|$ и вызывают некоторые осложнения. Например, у теоремы 3.1.19 есть такой аналог:

Теорема 3.1.22. *Оператор S в банаховом пространстве X является инфинитезимальным генератором $\sigma(X, F)$-непрерывной группы при $F = X^*$ или $F = X_*$ тогда и только тогда, когда он $\sigma(X, F)$-плотно определен, $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнут и удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *существуют такие* $M \geqslant 1$ *и* $\beta \geqslant 0$, *что*

$$\| (I - \alpha S)^n A \| \geqslant M^{-1} (1 - \alpha\beta)^n \| A \|$$

при всех $A \in D(S^n)$, *всех* α *с* $|\alpha| \beta < 1$ *и всех* $n = 1, 2, \ldots$;

(2) *либо при всех* α *с* $|\alpha| \beta < 1$ *(достаточно, чтобы при одном* α *с* $0 < \alpha\beta < 1$ *и одном с* $-1 < \alpha\beta < 0$*)*

$$R(I - \alpha S) = X,$$

либо S *имеет* $\sigma(X, F)$*-плотное множество аналитических элементов и любой элемент в* X *можно аппроксимировать равномерно ограниченной сетью аналитических элементов.*

Подчеркнем, что в этом случае для группы U_t выполняется оценка роста $\| U_t \| \leqslant Me^{\beta |t|}$, и всякий элемент $A \in X$ является пределом последовательности A_n аналитических элементов с $\| A_n \| \leqslant M \| A \|$.

В заключение остановимся на одном специальном свойстве C_0^*-групп и полугрупп, которым, вообще говоря, не обладают C_0-группы или полугруппы.

Предложение 3.1.23. *Пусть* C_0^**-полугруппа* U *в банаховом пространстве* X *имеет инфинитезимальный генератор* S. *Тогда эквивалентны условия:*

(1) $A \in D(S)$;

(2) $\sup_{0<t\leqslant 1} \| (U_t - I) A \| / t < +\infty$.

Доказательство. (1) ⇒ (2). Эта импликация верна для любых $\sigma(X, F)$-непрерывных полугрупп. Выберем $A \in D(S)$; для него

$$(U_t - I) A = \int_0^t ds U_s S A.$$

Таким образом,

$$\| (U_t - I) A \| \leqslant \int_0^t ds M e^{\beta s} \| SA \| \leqslant t M e^{\beta} \| SA \|$$

при $t \in [0, 1]$.

(2) ⇒ (1). Единичный шар пространства X слабо* компактен. Следовательно, если

$$\sup_{0<t\leqslant 1} \frac{\| (U_t - I) A \|}{t} = M < +\infty,$$

то должна найтись такая сеть $t_\alpha \in (0, 1]$, что $t_\alpha \to 0$ и $(U_{t_\alpha} - I) A / t_\alpha$ сходится лабой* топологии к некоторому элементу $B \in X$. Тем самым

$$\lim_\alpha \frac{\eta((U_{t_\alpha} - I) A)}{t_\alpha} = \eta(B)$$

при всех $\eta \in X_*$. Но для $\eta \in D(S^*)$ в таком случае

$$S^*\eta(A) = \lim_{\alpha} \frac{\left(U^*_{t_\alpha} - I\right)\eta(A)}{t_\alpha} = \eta(B).$$

Значит, $A \in D(S^{**}) \cap X = D(S)$ и $B = S^{**}A = SA$.

Пример 3.1.24. Пусть H — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $U = \{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — унитарная группа, порожденная iH, т. е. $U_t = \exp\{iHt\}$. Это не только C_0-группа, но и C_0^*-группа, поскольку $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$. Поэтому $\psi \in D(H)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \frac{\|(e^{iHt} - \mathbb{1})\psi\|}{t} < +\infty.$$

Пример 3.1.25. Пусть $X = C_0(\mathbb{R})$ с sup-нормой. Сдвиги действуют как C_0-группа U в X, и если $f \in C_0(\mathbb{R})$ абсолютно непрерывна и производная $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, но $f' \notin C_0(\mathbb{R})$, то

$$\|(U_t f - f)/t\| \leqslant \sup_s \sup_x |(f(x-s) - f(x))/s|$$
$$\leqslant \operatorname{ess.\,sup}_x |f'(x)| = \|f'\|_\infty.$$

Таким образом, критерий предложения 3.1.23 удовлетворяется, однако f не входит в область определения генератора S группы U. Ведь $D(S) = \{f;\ f \in C_0(\mathbb{R}),\ f' \in C_0(\mathbb{R})\}$. Пример показывает, что для C_0-групп условия предложения 3.1.23, вообще говоря, не эквивалентны.

3.1.3. Свойства сходимости

В предыдущих пунктах этого раздела мы исследовали вопрос о существовании и построении различных групп и полугрупп, а теперь рассмотрим их свойства устойчивости. У понятия устойчивости имеется целый ряд аспектов, а именно аспекты, связанные со сходимостью, возмущениями, аппроксимациями и т. д. В этом и следующих двух пунктах мы соответственно изложим три разных подхода к проблеме устойчивости. Сначала займемся свойствами сходимости и применим их для обобщения приведенных ранее результатов, касающихся построения групп.

В пункте 3.1.1 было показано, что группа $U = \{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ в банаховом пространстве X равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда ее генератор S ограничен. Кроме того, мы видели, что две такие группы близки по норме тогда и только тогда, когда их генераторы близки по норме. Аналог этого результата позволяет характеризовать сходимость $\sigma(X, F)$-непрерывных групп через сходимость резольвент их генераторов.

Теорема 3.1.26. *Пусть S_n и S — генераторы $\sigma(X, F)$-непрерывных полугрупп U_n и U в банаховом пространстве X. Предположим, что при некотором $\beta \geqslant 0$ семейство*

$$\{e^{-\beta t} U_{n,t};\ t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots\} \cup \{e^{-\beta t} U_t;\ t \geqslant 0\}$$

равностепенно $\tau(X, F)$-*непрерывно. Тогда эквивалентны следующие четыре условия:*

(1а) [(1б)] $\lim_{n\to\infty}(\lambda I - S_n)^{-1}A = (\lambda I - S)^{-1}A$, $A \in X$, *в* $\tau(X, F)$-*топологии при некотором* λ *с* $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ [*равномерно по всем* λ *с* $\operatorname{Re}\lambda > \beta + \varepsilon$];

(2а) [(2б)] $\lim_{n\to\infty} U_{n,t}A = U_tA$, $A \in X$, *в* $\tau(X, F)$-*топологии для всех* $t \in \mathbb{R}_+$ [*равномерно по* t *на любом конечном интервале из* $\mathbb{R}_+$].

Доказательство. Ясно, что (2б) $\Rightarrow$ (2а) и (1б) $\Rightarrow$ (1а). Покажем, что (2а) $\Rightarrow$ (1б) и (1а) $\Rightarrow$ (2б).

Без ограничения общности можно считать $\beta = 0$, заменив, если необходимо, $U_{n,t}$ и U_t на $U_{n,t}\exp\{-\beta t\}$ и $U_t\exp\{-\beta t\}$. Также отметим, что отображения $t \longmapsto U_{n,t}A$ и $t \longmapsto U_tA$ при всех $A \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ являются $\tau(X, F)$-непрерывными, в силу следствия 3.1.8.

(2а) $\Rightarrow$ (1б). Из предложения 3.1.6 следует, что

$$(\lambda I - S_n)^{-1}A - (\lambda I - S)^{-1}A = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t}(U_{n,t} - U_t)A.$$

Поэтому с помощью свойства непрерывности, установленного в следствии 3.1.8, получаем

$$p_K((\lambda I - S_n)^{-1}A - (\lambda I - S)^{-1}A) \leqslant \int_0^\infty dt e^{-t|\operatorname{Re}\lambda|} p_K((U_{n,t} - U_t)A)$$

для всякой полунормы p_K. Условие (1б) вытекает теперь из теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

(1а) $\Rightarrow$ (2б). Если $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то область значений $R((\lambda I - S)^{-1}) = D(S)$ будет $\sigma(X, F)$-плотна, а семейство разностей $U_{n,t} - U_t$ равностепенно непрерывно. Значит, достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} U_{n,t}(\lambda I - S)^{-1}A = U_t(\lambda I - S)^{-1}A,\quad A \in X,$$

в $\tau(X, F)$-топологии равномерно на конечных интервалах в $\mathbb{R}_+$. Далее, учтем, что

$$\begin{aligned}(U_{n,t} - U_t)(\lambda I - S)^{-1}A &= U_{n,t}((\lambda I - S)^{-1} - (\lambda I - S_n)^{-1})A \\ &+ (\lambda I - S_n)^{-1}(U_{n,t} - U_t)A + ((\lambda I - S_n)^{-1} - (\lambda I - S)^{-1})U_tA.\end{aligned}$$

Поэтому для всякой полунормы p_K

$$\begin{aligned}p_K((U_{n,t} - U_t)(\lambda I - S)^{-1}A) &\leqslant p_{K'}(((\lambda I - S)^{-1} - (\lambda I - S_n)^{-1})A) \\ &+ p_K((\lambda I - S_n)^{-1}(U_{n,t} - U_t)A) + p_K(((\lambda I - S_n)^{-1} - (\lambda I - S)^{-1})U_tA)\end{aligned}$$

(вследствие равностепенной непрерывности). Первый член по предположению сходится к нулю. Рассмотрим остальные слагаемые порознь.

Из резольвентной формулы вытекает, что резольвенты равностепенно непрерывны, так как равностепенно непрерывны полугруппы $U_{n,t}$ и U_t. Например, для каждой p_K существует такая $p_{K'}$, что

$$p_K((\lambda I - S_n)^{-1}B) \leqslant p_{K'}(B).$$

Тем самым следствие 3.1.8 позволяет заключить, что функции

$$t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto p_K(((\lambda I - S_n)^{-1} - (\lambda I - S)^{-1})U_tA)$$

непрерывны, причем равномерно по n. Но эта последовательность функций поточечно сходится к нулю при $n \to \infty$, так что она сходится к нулю равномерно на конечных интервалах $\mathbb{R}_+$. Остается разобраться со вторым членом.

Сначала отметим, что произведение двух равностепенно непрерывных семейств также равностепенно непрерывно. Таким образом, достаточно убедиться в правильном типе сходимости на каком-нибудь $\tau(X, F)$-плотном множестве элементов A, например на $D(S)$. В таком случае

$$(\lambda I - S_n)^{-1}(U_{n,t} - U_t)(\lambda I - S)^{-1}A$$
$$= -\int_0^t ds \frac{d}{ds} U_{n,t-s}(\lambda I - S_n)^{-1} U_s (\lambda I - S)^{-1} A$$
$$= -\int_0^t ds U_{n,t-s}\{(\lambda I - S)^{-1} - (\lambda I - S_n)^{-1}\} U_s A$$

и, следовательно,

$$p_K((\lambda I - S_n)^{-1}(U_{n,t} - U_t)(\lambda I - S)^{-1}A)$$
$$\leqslant \int_0^t ds p_{K'}(\{(\lambda I - S)^{-1} - (\lambda I - S_n)^{-1}\} U_s A).$$

Требуемый тип сходимости обосновывается рассуждениями, относящимися к третьему члену, и теоремой Лебега о мажорированной сходимости.

Предложенная в теореме 3.1.26 характеризация сходимости полугрупп страдает двумя основными недостатками. Во-первых, необходимо предполагать, что пределом является полугруппа, а во-вторых, свойство сходимости резольвент характеризует генераторы неявно, зачастую его трудно проверить. Естественно попытаться получить другие описания, в которых генераторы выступают более явным образом. Трудности на этом пути обусловлены тем, что области определения $D(S_n)$ различных генераторов вполне могут иметь тривиальное пересечение, и это делает невозможным всякое непосредственное сравнение операторов. Один из способов обойти эту трудность, по крайней мере для C_0-полугрупп сжатий, состоит в применении понятия сходимости графиков.

Напомним, что для последовательности операторов S_n в банаховом пространстве X соответствующую последовательность графиков $G(S_n)$ образуют подпространства в $X \times X$, состоящие из пар вида (A, S_nA), где $A \in D(S_n)$. Рассмотрим теперь все такие последовательности $A_n \in D(S_n)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \| S_nA_n - B \| = 0$$

для некоторой пары $(A, B) \in X \times X$. Полученные таким образом пары (A, B) образуют некоторый «график» G—некоторое подпространство в $X \times X$, и мы введем обозначение $D(G)$ для множества таких A, что $(A, B) \in G$ при некотором B. Аналогично $R(G)$ обозначает множество таких B, что $(A, B) \in G$ при некотором A. Далее, будем писать

$$G = \lim_{n\to\infty} G(S_n).$$

В общем случае G не будет графиком оператора, хотя при определенных обстоятельствах такое возможно. В тех случаях, когда существует оператор S с $G(S) = G$, мы пишем

$$S = \operatorname{graph} \lim_{n\to\infty} S_n$$

и говорим о *граф-пределе* операторов S_n. Очевидно, $D(S) = D(G)$ и $R(S) = R(G)$.

В следующей лемме приведены условия, при которых последовательность операторов имеет граф-предел.

Лемма 3.1.27. *Пусть S_n — последовательность операторов в банаховом пространстве X. Предположим, что при всех $A \in \in D(S_n)$, всех $n \geqslant 0$ и всех $\alpha \in [0, 1]$*

$$\|(I - \alpha S_n) A\| \geqslant \|A\|.$$

Пусть G обозначает график, определенный соотношением

$$G = \lim_{n\to\infty} G(S_n),$$

и предположим, что $D(G)$ плотно в X по норме. В таком случае G оказывается графиком замыкаемого по норме оператора S в X с $D(S) = D(G)$, и

$$\|(I - \alpha S) A\| \geqslant \|A\|$$

при всех $A \in D(S)$.

Доказательство. Сначала считаем, что $A_n \in D(S_n)$ и $B \in X$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|S_n A_n - B\| = 0.$$

Для проверки того, что G — график некоторого оператора S, достаточно доказать, что $B = 0$. По всякой паре $(A', B') \in G$ можно указать такую последовательность $\{A'_n\} \subset D(S_n)$, что $A'_n \to A'$ и $S_n A'_n \to B'$. Кроме того,

$$\|(I - \alpha S_n)(A_n + \alpha A'_n)\| \geqslant \|A_n + \alpha A'_n\|.$$

Перейдя к пределу в обеих частях этого неравенства, получим после сокращения на α

$$\|A' - B - \alpha B'\| \geqslant \|A'\|$$

при всех $\alpha \in [0, 1]$. Устремив α к нулю, найдем, что

$$\|A' - B\| \geqslant \|A'\|.$$

Это верно для всех A' из плотного множества $D(G)$, следовательно, $B = 0$.

Таким образом, G — график плотно по норме определенного оператора S, и требуемое неравенство вытекает из соответствующих неравенств для S_n ввиду сходимости графиков. Повторив начало доказательства с заменой S_n на S, установим замыкаемость S по норме.

Следующая наша цель — показать, что сходимость графиков генераторов можно использовать для характеризации сходимости последовательностей C_0-полугрупп.

Теорема 3.1.28. *Пусть U_n — последовательность C_0-полугрупп сжатий в банаховом пространстве X с генераторами S_n. Определим график G_α формулой*

$$G_\alpha = \lim_{n\to\infty} G(I - \alpha S_n).$$

Эквивалентны следующие условия:

(1) существует такая C_0-полугруппа U, что

$$\lim_{n\to\infty} \| (U_{n,t} - U_t) A \| = 0$$

при всех $A \in X$, $t \in \mathbb{R}_+$ равномерно по t на конечных интервалах в $\mathbb{R}_+$;

(2) множества $D(G_\alpha)$ и $R(G_\alpha)$ плотны по норме в X при некотором $\alpha > 0$.

Если эти условия выполнены, то G_α — график оператора $I - \alpha S$, где S — генератор U.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Для $A \in X$ и $\alpha > 0$ определим A_n, полагая $A_n = (I - \alpha S_n)^{-1} A$. Теорема 3.1.26 гарантирует сходимость $A_n \to (I - \alpha S)^{-1} A$, где S — генератор U. К тому же $(I - \alpha S_n) A_n = A$, так что $G_\alpha \supseteq G(I - \alpha S)$. Тем самым $D(G_\alpha)$ и $R(G_\alpha)$ плотны по норме, согласно теореме 3.1.10.

(2) $\Rightarrow$ (1). Из предложения 3.1.6 вытекает для всех $A \in D(S_n)$, что $\| (I - \alpha S_n) A \| \geqslant \| A \|$. Значит, применима лемма 3.1.27 и существует такой замыкаемый и плотно по норме определенный оператор S, что $G_\alpha = G(I - \alpha S)$ и $\| (I - \alpha S) A \| \geqslant \| A \|$. То же самое неравенство справедливо и для замыкания $\bar{S}$, и $R(I - \alpha\bar{S})$ замкнуто по норме. Но $R(I - \alpha\bar{S}) = \overline{R(G_\alpha)} = X$. Следовательно, $\bar{S}$ является генератором некоторой C_0-полугруппы сжатий U по теореме 3.1.10. Но если $A_n \to A$ и $B_n = (I - \alpha S_n) A_n \to B = (I - \alpha S) A$, то

$$\| ((I - \alpha S_n)^{-1} - (I - \alpha\bar{S})^{-1}) B \| = \| (I - \alpha S_n)^{-1} (B - B_n) + A_n - A \|$$
$$\leqslant \| B - B_n \| + \| A - A_n \|.$$

Тем самым резольвенты операторов S_n сильно сходятся к резольвенте $\bar{S}$, так как $R(I - \alpha\bar{S}) = X$, а U_n сходятся к U в силу теоремы 3.1.26. Но сходимость резольвент влечет замкнутость G_α, и потому $S = \bar{S}$.

Импликацией (2) $\Rightarrow$ (1) теоремы 3.1.28 можно воспользоваться в следующей простой ситуации. Допустим, S_n и S — генераторы сжимающих C_0-полугрупп, причем S обладает такой существенной областью определения D, что

$$D \subseteq \bigcup_m \Big(\bigcap_{n \geqslant m} D(S_n) \Big)$$

и при всех $A \in D$

$$\lim_{n\to\infty} \| (S_n - S) A \| = 0.$$

Тогда S будет граф-пределом S_n.

Пример 3.1.29. Пусть $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций на $\mathbb{R}^\nu$, а S — обычный самосопряженный оператор Лапласа:

$$(S\psi)(x) = -\nabla_x^2 \psi(x).$$

Хорошо известно, что пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем образует существенную область определения D для S. Для всякого ограниченного открытого множества $\Lambda \subseteq R^\nu$ обозначим через S_Λ любое из самосопряженных расширений оператора S, суженного на бесконечно дифференцируемые функции с носителем в Λ. Существует много таких расширений, каждое из них отвечает определенному выбору граничных условий. Если Λ_n — возрастающая последовательность, такая что каждое ограниченное открытое множество Λ при достаточно больших n содержится в Λ_n, то

$$D \subseteq \bigcup_m \left(\bigcap_{n\geqslant m} D\left(S_{\Lambda_n}\right)\right),$$

по определению. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(e^{itS_{\Lambda n}} - e^{itS}\right) \psi \right\| = 0$$

для всех $\psi \in \mathfrak{H}$ равномерно по t на конечных интервалах в $\mathbb{R}$. Сеть унитарных групп e^{itS_Λ} сильно сходится к группе e^{itS}, как легко установить рассуждением от противного.

После этого примера рассмотрим приложение полученных результатов к построению сжимающих полугрупп.

Теорема 3.1.30. *Пусть S — инфинитезимальный генератор C_0-полугруппы сжатий U в банаховом пространстве X. Пусть $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto F(t) \in \mathscr{L}(X)$ — функция со значениями во множестве ограниченных операторов в X, такая что $F(0) = I$, $\| F(t) \| \leqslant 1$,*

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{(F(t) - I) A}{t} - SA \right\| = 0$$

при всех A из некоторой существенной области определения D генератора S. При этих предположениях

$$\lim_{n\to\infty} \| U_t A - F(t/n)^n A \| = 0, \quad A \in X.$$

Доказательство. При каждом фиксированном $s > 0$ и каждом натуральном n формулой

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto U_t^{(n,s)} = \exp\left\{ t\left(\frac{n}{s}\right)\left(F\left(\frac{s}{n}\right) - I\right)\right\}$$

задается сжимающая полугруппа с генератором $S_n = (n/s)(F(s/n) - I)$. Операторы $U_t^{(n,\, s)}$ являются сжатиями, ибо

$$\| U_t^{(n,\, s)} \| \leqslant e^{-t\,(n/s)} \sum_{m \geqslant 0} \frac{t^m}{m!} \left(\frac{n}{s}\right)^m \left\| F\left(\frac{s}{n}\right) \right\|^m \leqslant 1.$$

Но S_n сходится к S на множестве D, так что можно, применив замечание, предваряющее пример 3.1.29, убедиться, что

$$\lim_{n \to \infty} \| U_t A - U_t^{(n,\, s)} A \| = 0.$$

Лемма 3.1.11 дает оценку

$$\left\| U_t^{(n,\, t)} A - F\left(\frac{t}{n}\right)^n A \right\| \leqslant \frac{t n^{-1/2} \| (F(t/n) - I) A \|}{t/n}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| U_t A - F\left(\frac{t}{n}\right)^n A \right\| = 0$$

для всех A из плотного множества D, а потому и для всех $A \in X$.

Отметим, что функция

$$F(t) = (I - tS)^{-1}$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.1.30, и при таком выборе F вновь устанавливается результат, полученный в теореме 3.1.10:

$$\lim_{n \to \infty} \left\| U_t A - \left(I - \frac{tS}{n}\right)^{-n} A \right\| = 0.$$

Более общий результат в этом направлении содержит

Следствие 3.1.31. *Пусть U и V — сжимающие C_0-полугруппы в банаховом пространстве X с генераторами S и T. Предположим, что оператор $S + T$ замыкаем по норме и его замыкание является генератором сжимающей C_0-полугруппы W. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \| W_t A - (U_{t/n} V_{t/n})^n A \| = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| W_t A - \left(\left(I - \frac{tS}{n}\right)^{-1} \left(I - \frac{tT}{n}\right)^{-1}\right)^n A \right\| = 0.$$

Доказательство. Возьмем $F(t) = U_t V_t$. Поскольку $F(0) = I$, $\| F(t) \| \leqslant 1$ и при каждом $A \in D(S + T)$

$$\frac{(F(t) - I) A}{t} = \frac{U_t (V_t - I) A + (U_t - I) A}{t},$$

то

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{(F(t) - I) A}{t} - (S + T) A \right\| = 0$$

при всех A из $D(S+T)$ — существенной области определения генератора полугруппы W. Аналогичное заключение справедливо и при выборе $F(t) = (I-tS)^{-1}(I-tT)^{-1}$. Из теоремы 3.1.30 вытекает, что

$$W_tA = \lim_{n\to\infty}(U_{t/n}V_{t/n})^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(I-\frac{tS}{n}\right)^{-1}\left(I-\frac{tT}{n}\right)^{-1}\right)^n A.$$

3.1.4. Теория возмущений

Если S — генератор полугруппы U ограниченных операторов в банаховом пространстве X, а P — оператор, действующий в X, то естественно возникает вопрос, какие свойства P необходимы для того, чтобы и оператор $S+P$ был генератором. Если U равномерно непрерывна, то S ограничен, согласно предложению 3.1.1, и $S+P$ порождает равномерно непрерывную полугруппу в том и только том случае, когда P ограничен. Если же U — полугруппа класса C_0 или C_0^*, то ситуация сильно усложняется и известны лишь частичные ответы в ряде специальных случаев.

Первый из такого рода результатов относится к случаю C_0-полугрупп и относительно ограниченных возмущений.

Теорема 3.1.32. *Пусть S — генератор C_0-полугруппы сжатий в банаховом пространстве X, а P — диссипативный оператор с $D(P) \supseteq D(S)$ и*

$$\|PA\| \leqslant a\|A\| + b\|SA\|$$

при всех $A \in D(S)$ и некоторых a, $b < 1$, $a \geqslant 0$. В таком случае $S+P$ порождает C_0-полугруппу сжатий.

Доказательство. Вначале напомним, что, как было показано после определения 3.1.13, $\operatorname{Re}\eta(SA) \leqslant 0$ для всякого касательного к $A \in D(S)$ функционала η. Но поскольку P диссипативен, то при каждом $A \in D(S) \subseteq D(P)$ найдется такой касательный к A функционал η, что $\operatorname{Re}\eta(PA) \leqslant 0$. Следовательно, $\operatorname{Re}\eta((S+\lambda P)A) \leqslant 0$ при $\lambda \geqslant 0$, т. е. $S+\lambda P$ диссипативен. Из лемм 3.1.14 и 3.1.15 вытекают замыкаемость $S+\lambda P$ и оценка

$$\|(I-\alpha(S+\lambda P))A\| \geqslant \|A\|,$$

справедливая при всех $A \in D(S)$ и $\alpha > 0$.

Далее используем условие относительной ограниченности.

Прежде всего предложение 3.1.6 дает нам оценку $\|(I-\alpha S)^{-1}\| \leqslant 1$ при всех $\alpha \geqslant 0$. Поэтому

$$\|\alpha P(I-\alpha S)^{-1}A\| \leqslant a\|\alpha(I-\alpha S)^{-1}A\| + b\|(I-(I-\alpha S)^{-1})A\| \leqslant (a\alpha+2b)\|A\|.$$

Тем самым, если $0 \leqslant \lambda_1 < (2b)^{-1}$, то можно выбрать α_0 так, чтобы $\lambda_1(\alpha a+2b) < 1$ при $0 \leqslant \alpha < \alpha_0$, а тогда $P_\alpha = \lambda_1\alpha P(I-\alpha S)^{-1}$ будет ограниченным оператором с $\|P_\alpha\| < 1$. Следовательно, $I-P_\alpha$ имеет ограниченный обратный. Затем выпишем тождество

$$I-\alpha(S+\lambda_1 P) = (I-P_\alpha)(I-\alpha S),$$

которое в сочетании со свойством $R(I-\alpha S) = X$ дает нам

$$R(I-\alpha(S+\lambda_1 P)) = R(I-P_\alpha) = D((I-P_\alpha)^{-1}) = X.$$

Применив теорему 3.1.16, устанавливаем, что $S + \lambda_1 P$ — генератор C_0-полугруппы сжатий.

Теперь заметим, что

$$\| PA \| \leqslant a \| A \| + b \| (S + \lambda_1 P) A \| + b\lambda_1 \| PA \|,$$

а так как $\lambda_1 \leqslant (2b)^{-1}$, то

$$\| PA \| \leqslant 2a \| A \| + 2b \| (S + \lambda_1 P) A \|.$$

Продолжая доказательство, выберем $0 \leqslant \lambda_2 < (4b)^{-1}$ и, повторив предыдущие рассуждения, установим, что $S + (\lambda_1 + \lambda_2) P$ является генератором C_0-полугруппы сжатий. Последовательным n-кратным применением этих рассуждений получим, что $S + \lambda P$ является генератором при всех $0 \leqslant \lambda < (1 - 2^{-n})/b$. Выбрав достаточно большое натуральное число n, приходим к желаемому результату для $S + P$.

У теоремы 3.1.32 нет непосредственного C_0^*-аналога, но в простейшем случае, когда P ограничен, такой аналог имеется.

Пусть оператор P ограничен и замкнут в $\sigma(X, X_*)$-топологии на X. Тогда P сопряжен к ограниченному замкнутому по норме оператору P^* в X_* по лемме 3.1.9. Кроме того, $P^* - \| P \| I$ является ограниченным генератором равномерно непрерывной сжимающей полугруппы в X_* в соответствии с предложением 3.1.1, и этот генератор диссипативен в X_*. Рассмотрим еще C_0^*-полугруппу U сжатий в X с генератором S. Вторично применив лемму 3.1.9, находим, что операторы U_t сопряжены к операторам U_t^*, составляющим полугруппу U^* в X_*, и эта C_0-полугруппа сжатий имеет генератор S^*, которому сопряжен S. Тем самым теорема 3.1.32 позволяет утверждать, что $S^* + P^* - \| P \| I$ будет генератором C_0-полугруппы сжатий в X_*. Переходя к сопряженным операторам, видим, что $S + P$ порождает C_0^*-полугруппу U^P в X с оценкой роста $\| U_t^P \| \leqslant \exp\{\| P \| t\}$.

Другой подход к изучению ограниченных возмущений предлагает следующая

Теорема 3.3.33. *Пусть $\sigma(X, F)$-непрерывная полугруппа U в банаховом пространстве X имеет генератор S, и пусть оператор P в X ограничен и $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнут. Если $F = X^*$ или $F = X_*$, то $S + P$ порождает такую $\sigma(X, F)$-непрерывную полугруппу U^P, что*

$$U_t^P A = U_t A + \sum_{n \geqslant 1} \int\limits_{\substack{0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \\ \cdots \leqslant t_n \leqslant t}} dt_1 \ldots dt_n U_{t_1} P U_{t_2 - t_1} P \ldots U_{t_n - t_{n-1}} P U_{t - t_n} A$$

при всех $A \in X$. Интегралы здесь существуют в топологии нормы, если $F = X^*$, и в $\sigma(X, X_*)$-топологии, если $F = X_*$; в обоих случаях эти интегралы представляют собой ограниченные опера-

торы из $\mathscr{L}(X)$, и ряд в правой части сходится по норме[1]. *Если* $\| U_t \| \leqslant Me^{\beta t}$, *то*

$$\| U_t^P - U_t \| \leqslant Me^{\beta t} \left(e^{M \|P\| t} - 1 \right).$$

Доказательство. *C_0-случай:* $F = X^*$. Пусть $U_t^{(n)}$ обозначает n-й член ряда теории возмущений, задающего U_t^P. Так как U сильно непрерывна и

$$U_t^{(0)} = U_t, \quad U_t^{(n)} = \int_0^t dt_1 U_{t_1} P U_{t-t_1}^{(n-1)}, \tag{*}$$

то по индукции проверяется, что $U_t^{(n)}$ корректно определены и сильно непрерывны. Легко получить оценку

$$\| U_t^{(n)} A \| \leqslant \int\limits_{0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n \leqslant t} dt_1 \dots dt_n \| U_{t_1} \| \| U_{t_2 - t_1} \| \dots \| U_{t-t_n} \| \| P \|^n \| A \|$$
$$\leqslant \frac{t^n}{n!} M^{n+1} e^{\beta t} \| P \|^n \| A \|.$$

Отсюда немедленно следует сходимость нашего ряда по норме и последнее утверждение теоремы.

Далее, из рекуррентных формул (*) вытекает интегральное уравнение

$$U_t^P = U_t + \int_0^t ds U_s P U_{t-s}^P; \tag{**}$$

отсюда

$$U_{t_1}^P U_{t_2}^P = U_{t_1} U_{t_2}^P + \int_0^{t_1} ds U_s P U_{t_1 - s}^P U_{t_2}^P$$
$$= U_{t_1 + t_2} + \int_0^{t_2} ds U_{t_1 + s} P U_{t_2 - s}^P + \int_0^{t_1} ds U_s P U_{t_1 - s}^P U_{t_2}^P$$
$$= U_{t_1 + t_2}^P + \int_0^{t_1} ds U_s P \left\{ U_{t_1 - s}^P U_{t_2}^P - U_{t_1 + t_2 - s}^P \right\}.$$

Таким образом, семейство функций $\lambda \in \mathbb{C} \longmapsto F_{t_1}(\lambda) = U_{t_1}^{\lambda P} U_{t_2}^{\lambda P} - U_{t_1 + t_2}^{\lambda P}$ состоит из целых аналитических функций, удовлетворяющих однородным интегральным уравнениям

$$F_t(\lambda) = \lambda \int_0^t ds U_s P F_{t-s}(\lambda).$$

С помощью разложения в ряд Тэйлора проверяется, что $F_t(\lambda) = 0$, т. е. имеет место полугрупповое свойство $U_{t_1}^P U_{t_2}^P = U_{t_1 + t_2}^P$. Очевидно, $U_0^P = I$, и остается лишь отыскать генератор T полугруппы U^P.

---

[1] Такое разложение в ряд в дальнейшем именуется *разложением теории возмущений*. — *Прим. перев.*

Если $0 < \alpha < (\beta + M\|P\|)^{-1}$, то

$$(I - \alpha T)^{-1} = \int_0^\infty dte^{-t} U^P_{\alpha t},$$

согласно предложению 3.1.6. Используя интегральное уравнение (**), находим, что

$$\begin{aligned}(I - \alpha T)^{-1} &= \int_0^\infty dte^{-t} U_{\alpha t} + \alpha \int_0^\infty dt \int_0^t dse^{-t} U_{\alpha s} P U^P_{\alpha (t-s)} \\ &= \int_0^\infty dte^{-t} U_{\alpha t} + \alpha \int_0^\infty dte^{-t} U_{\alpha t} P \int_0^\infty dse^{-s} U^P_{\alpha s} \\ &= (I - \alpha S)^{-1} + \alpha (I - \alpha S)^{-1} P (I - \alpha T)^{-1}.\end{aligned}$$

Тем самым установлено, что

$$(I - \alpha (S + P)) (I - \alpha T)^{-1} = I.$$

Но предложение 3.1.6 показывает, что $\|(I - \alpha S)^{-1}\| \leqslant M (1 - \alpha\beta)^{-1}$; поэтому выберем α так, чтобы

$$\alpha \|P\| \leqslant \|(I - \alpha S)^{-1}\|^{-1}.$$

Тогда можно разложением в ряд убедиться, что оператор $I - \alpha (S + P)$ обратим и обратный оператор ограничен; следовательно, $(I - \alpha T)^{-1} = (I - \alpha (S + P))^{-1}$, или $T = S + P$.

C_0^**-случай*: $F = X_*$. Так как P — оператор $\sigma(X, X_*)$-$\sigma(X, X_*)$-замкнутый и ограниченный, то по лемме 3.1.9 он сопряжен некоторому ограниченному оператору P^* в X_*. Полугруппа U сопряжена к C_0-полугруппе U^* в X_*, и S, генератор U, сопряжен к S^*, генератору U^*. Предыдущие рассуждения позволяют утверждать, что $S^* + P^*$ порождает C_0-полугруппу в X_*, а по соображениям двойственности сопряженный оператор $S + P$ служит генератором C_0^*-полугруппы в X. Разложение в ряд для этой полугруппы получается «транспонированием» в X соответствующего ряда, построенного в X_*.

Рассмотренная теорема демонстрирует устойчивость класса генераторов C_0- и C_0^*-полугрупп относительно возмущений ограниченными слагаемыми. Аналогичный результат для сжимающих полугрупп, разумеется, вытекает из теоремы 3.1.32. Однако у разложения в «зависящий от времени» ряд есть преимущества, и заключения теоремы 3.1.33 можно распространить на некоторые неограниченные возмущения. По сути дела от возмущения требуется только, чтобы был хорошо определен и сходился ряд для U^P. При этом может даже статься, что не выполняется условие теоремы 3.1.32 об относительной ограниченности возмущения, и такие ситуации оказались полезными для конструктивной квантовой теории поля. Другим примером, иллюстрирующим мощь указанного разложения теории возмущений, служит приводимый ниже результат, относящийся к диссипативным операторам в банаховом пространстве.

Теорема 3.1.34. *Пусть S — диссипативный оператор в банаховом пространстве X. Предположим, что существует возрастающая последовательность замкнутых подпространств X_n в X, такая что*

$$\bigcup_n X_n \subseteq D(S),$$

а замыкание $\bigcup_n X_n$ совпадает с X. Предположим еще, что существуют такие линейные операторы

$$S_{n,m}: D(S_{n,m}) = X_n \longmapsto X_{n+m}$$

и такие числа M, $\alpha > 0$, что

$$\left\| S|_{X_n} - S_{n,m} \right\| \leqslant Mne^{-\alpha m}$$

при $n = 1, 2, \ldots, m = 0, 1, \ldots$. Тогда $\bigcup_n X_n$ является существенной областью определения для S и замыкание $\overline{S}$ оператора S оказывается генератором полугруппы сжатий в X.

Если вдобавок $S_{n,0}$ диссипативны при всех n и

$$S_{n,m} = S_{n+m,0}|_{X_n}$$

при всех n, m, то

$$e^{t\overline{S}}A = \lim_{n\to\infty} e^{tS_{n,0}}A$$

для всех $A \in \bigcup_n X_n$ равномерно по t на компактах.

Доказательство. С учетом леммы 3.1.14 и теоремы 3.1.16 для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что множество $(\lambda I - S)\bigcup_n X_n$ плотно в X при некотором $\lambda > 0$. Из тех же утверждений следует, что можно отождествить S с замыканием его сужения на $\bigcup_n X_n$. Если выполнены условия второй части теоремы, то

$$\lim_{m\to\infty} \left\| S|_{X_n} - S_{n+m,0}|_{X_n} \right\| = 0$$

и нужное нам свойство устанавливается при помощи чуть усиленного варианта теоремы 3.1.28 (см. замечания и комментарии в конце главы).

Мы докажем теорему лишь для того, немного более простого, случая, когда

$$SX_n \subseteq X_{n+1},$$

потому что здесь яснее идея доказательства. Переход к общему случаю заключается главным образом в добавлении дополнительных итераций в разложение теории возмущений (см. замечания и комментарии).

Введем новое обозначение $S_{n,0} = S_n$ и, домножив S на соответствующий скаляр, добьемся оценки

$$\left\| S|_{X_n} - S_n \right\| < n/2.$$

Наблюдение (1). *Оператор $S_n - (n/2)I$ ограничен и диссипативен в X_n.*

Доказательство. Поскольку оператор $S|_{X_n}$ замкнут, он ограничен, а потому ограничен и S_n. Пусть $A \in X_n \setminus \{0\}$. Так как S диссипативен, то найдется $f \in X^*$ с $\|f\| = 1$, для которого $f(A) = \|A\|$ и $\operatorname{Re} f(SA) \leqslant 0$. Но тогда

$$\operatorname{Re} f\left(\left(S_n - \frac{n}{2} I\right) A\right) = \operatorname{Re} f((S_n - S) A) + \operatorname{Re} f(SA) - \frac{n}{2}\|A\|$$

$$\leqslant \frac{n}{2}\|A\| + 0 - \frac{n}{2}\|A\| = 0.$$

В соответствии с наблюдением (1) можно заменить S_n на $S_n - (n/2) I$ и считать, что все S_n диссипативны и

$$\left\| S|_{X_n} - S_n \right\| \leqslant n.$$

Тогда e^{tS_n} образуют непрерывную по норме полугруппу сжатий на X_n при каждом n, и можно развить вариант зависящей от времени теории возмущений.

Для $A \in X_m$ определим индуктивно

$$\sigma_t^{(0)}(A) = A,$$

$$\sigma_t^{(1)}(A) = \int_0^t ds e^{(t-s) S_{m+1}} S \sigma_s^{(0)}(A),$$

$$\sigma_t^{(n)}(A) = \int_0^t ds e^{(t-s) S_{m+n}} (S - S_{m+n-1}) \sigma_s^{(n-1)}(A)$$

при $n \geqslant 2$. Поскольку сужение S на каждое X_n ограничено и $SX_n \subseteq X_{n+1}$, то интегралы в этих определениях можно понимать как римановы интегралы, и $t \longmapsto \sigma_t^{(n)}(A)$ есть непрерывная по норме кривая в X_{m+n} при $n = 0, 1, \ldots$. Если $K = \left\| S|_{X_m} \right\|$, то, используя неравенство $\left\| S|_{X_n} - S_n \right\| \leqslant n$, по индукции выводим следующие оценки:

Наблюдение (2). $\left\|\sigma_t^{(0)}(A)\right\| \leqslant \|A\|$ *и при всех* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $t \geqslant 0$

$$\left\|\sigma_t^{(n)}(A)\right\| \leqslant \frac{(m+n-1)!}{n!\,m!} t^n K \|A\| \leqslant (m+n-1)^m t^n K \|A\|.$$

Введем

$$\tau_t^{(k)}(A) = \sum_{n=0}^{k} \sigma_t^{(n)}(A).$$

Наблюдение (2) показывает, что предел

$$\tau_t(A) = \lim_{k \to \infty} \tau_t^{(k)}(A)$$

существует в топологии нормы при $t \in [0, 1)$ равномерно по t на компактах. (На этом этапе нельзя исключить возможность зависимости $\tau_t(A)$ не только от A и t, но и от m, и мы будем считать, что для каждого A выбрано фиксированное $m = m(A)$; a posteriori $\tau_t(A)$ окажется не чем иным, как $e^{t\bar{S}} A$.

Замечая, что

$$\sigma_{t+\delta}^{(n)}(A) - \sigma_t^{(n)}(A) =$$
$$= \int_t^{t+\delta} ds e^{(t+\delta-s)S_{m+n}} (S - S_{m+n-1})\, \sigma_s^{(n-1)}(A)$$
$$+ \int_0^t ds \left(e^{(t+\delta-s)S_{m+n}} - e^{(t-s)S_{m+n}}\right)(S - S_{m+n-1})\sigma_s^{(n-1)}(A),$$

а $(S - S_{m+n-1})|X_{m+n-1}$ и S_{m+n} ограничены, убеждаемся, что отображение $t \longmapsto \sigma_t^{(n)}(A)$ дифференцируемо, и для производных получаем выражения

$$\frac{d}{dt}\sigma_t^{(0)}(A) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_t^{(1)}(A) = S\sigma_t^{(0)}(A) - S_{m+1}\sigma_t^{(1)}(A),$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_t^{(n)}(A) = (S - S_{m+n-1})\,\sigma_t^{(n-1)}(A) + S_{m+n}\sigma_t^{(n)}(A).$$

Просуммировав эти равенства, находим

$$\frac{d}{dt}\left(\tau_t^{(n)}(A)\right) - S\left(\tau_t^{(n)}(A)\right) = (S_{m+n} - S)\,\sigma_t^{(n)}(A).$$

Наблюдение (2) дает нам оценку

$$\left\| (S_{m+n} - S)\,\sigma_t^{(n)}(A) \right\| \leqslant (m+n)^{m+1} t^n K \| A \|,$$

так как $\sigma_t^{(n)}(A) \in X_{m+n}$; поэтому, проинтегрировав обе части предыдущего равенства, получим

$$\left\| \tau_t^{(n)}(A) - A - S\left(\int_0^t ds\tau_s^{(n)}(A)\right) \right\| \leqslant \frac{(m+n)^{m+1}}{n+1}\, t^{n+1}\, K \| A \|.$$

Но S замкнут, а предел

$$\tau_t(A) = \lim_{n\to\infty} \tau_t^{(n)}(A)$$

существует для $t \in [0, 1)$ равномерно по t на компактах, так что справедливо следующее

***Наблюдение* (3).** *При* $t \in [0, 1)$

$$\int_0^t ds\tau_s(A) \in D(S)$$

и

$$\tau_t(A) - A = S\left(\int_0^t ds\tau_s(A)\right).$$

Далее, проверим

Наблюдение (4). *Функция* $t \in [0, 1) \longmapsto \|\tau_t(A)\|$ *не возрастает на* $[0, 1)$.

Доказательство. Определим регуляризованные элементы

$$\tau_t(A_\varepsilon) = \int_0^\varepsilon ds\tau_{t+s}(A)$$

при $t \in [0, 1-\varepsilon]$. (Предостережение: на этой стадии не следует чересчур буквально принимать обозначение $\tau_t(A_\varepsilon)$; надо рассматривать $t \longmapsto \tau_t(A_\varepsilon)$ просто как кривую в X.) Легко видеть, что функция $t \longmapsto \tau_t(A_\varepsilon)$ дифференцируема с производной

$$\frac{d}{dt}\tau_t(A_\varepsilon) = \tau_{t+\varepsilon}(A) - \tau_t(A).$$

Далее, наблюдение (3) дает нам

$$\begin{aligned}\tau_{t+\delta}(A_\varepsilon) - \tau_t(A_\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon ds\,(\tau_{t+\delta+s}(A) - \tau_{t+s}(A)) \\ &= \int_0^\varepsilon dsS\left(\int_{t+s}^{t+\delta+s} du\tau_u(A)\right) \\ &= S\left(\int_0^\varepsilon ds \int_{t+s}^{t+\delta+s} du\tau_u(A)\right).\end{aligned}$$

Разделив на δ и устремив δ к нулю, получим, ввиду замкнутости S,

$$\frac{d}{dt}\tau_t(A_\varepsilon) = S(\tau_t(A_\varepsilon)).$$

Но S диссипативен, поэтому, по лемме 3.1.15,

$$\|\tau_t(A_\varepsilon) - \delta S(\tau_t(A_\varepsilon))\| \geqslant \|\tau_t(A_\varepsilon)\|$$

при всех $\delta \geqslant 0$, т. е.

$$\left\|\tau_t(A_\varepsilon) - \delta\frac{d}{dt}\tau_t(A_\varepsilon)\right\| \geqslant \|\tau_t(A_\varepsilon)\|,$$

следовательно,

$$\tau_{t-\delta}(A_\varepsilon)\| + o(\delta) \geqslant \|\tau_t(A_\varepsilon)\|$$

или

$$\frac{1}{\delta}\{\|\tau_{t-\delta}(A_\varepsilon)\| - \|\tau_t(A_\varepsilon)\|\} \geqslant o(1).$$

Тем самым проверено, что функция $t \longmapsto \|\tau_t(A_\varepsilon)\|$ не возрастает, а так как

$$\tau_t(A) = \lim_{\varepsilon\to 0}\tau_t(A_\varepsilon),$$

то и $t \longmapsto \|\tau_t(A)\|$ не возрастает.

Завершим теперь доказательство теоремы 3.1.34 рассуждением от противного, предположив, что при некотором $\lambda > 0$ область значений $R(\lambda I - S)$ не плотна. Тогда по теореме Хана — Банаха найдется линейный функционал $f \in$

$\in X^*$ с $\|f\| = 1$, для которого $f((\lambda I - S) B) = 0$ при всех $B \in D(S)$. В частности, в согласии с наблюдением (3),

$$\lambda f\left(\int_0^t ds \tau_s(A)\right) = f\left(S\left(\int_0^t ds \tau_s(A)\right)\right) = f(\tau_t(A)) - f(A),$$

или

$$f(\tau_t(A)) = f(A) + \lambda \int_0^t ds f(\tau_s(A)).$$

Отсюда вытекает, что $f(\tau_t(A)) = e^{\lambda t} f(A)$ при $t \in [0, 1)$. Плотность $\bigcup_n X_n$ в X позволяет выбрать такое $A \in \bigcup_n X_n$, что $e^{\lambda/2} |f(A)| > \|A\|$ и, следовательно,

$$\|\tau_{1/2}(A)\| \geqslant |f(\tau_{1/2}(A))| = e^{\lambda/2} |f(A)| > \|A\|.$$

Полученное противоречие с наблюдением (4) завершает доказательство теоремы 3.1.34.

Замечания. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \tau_t(A_\varepsilon) = S \tau_t(A_\varepsilon),$$

установленное в ходе доказательства, приводит к равенству $\tau_t(A_\varepsilon) = e^{tS} A_\varepsilon$, и по непрерывности получается разложение в ряд теории возмущений

$$e^{tS} A = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_t^{(n)}(A),$$

справедливое при $t \in [0, 1)$.

Как показывают контрпримеры, теорему 3.1.34 нельзя распространить на случай

$$SX_n \subseteq X_{n+1}, \quad \left\| S|_{X_n} - S_{n,0} \right\| \leqslant Mn^2,$$

даже когда S — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $X = \mathfrak{H}$.

Более простыми, но менее явными рассуждениями можно доказать аналог теоремы 3.1.34 для случая, когда

$$\left\| S|_{X_n} - S_{n,0} \right\| \leqslant M$$

для $n = 1, 2, \ldots$. Прежде всего, наблюдение (1) позволяет считать, что каждый из $S_n = S_{n,0}$ диссипативен, так что

$$\|(\lambda I - S_n)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}$$

при $\lambda > 0$, по лемме 3.1.15. Пусть теперь $\lambda > M$ и функционал $f \in X^*$ обращается в нуль на $R(\lambda I - S)$. В частности, для $A \in X_n$

$$|f(A)| = |f((\lambda I - S_n)(\lambda I - S_n)^{-1} A)| =$$
$$= |f((S - S_n)(\lambda I - S_n)^{-1} A)| \leqslant \|f\| M\lambda^{-1} \|A\|.$$

Плотность $\bigcup_n X_n$ влечет оценку $\|f\| \leqslant M\lambda^{-1}\|f\|$, показывающую, что $f = 0$; следовательно, $R(\lambda I - S)$ — плотное множество.

3.1.5. Теория приближений

В предыдущем пункте мы исследовали устойчивость генераторов полугрупп при возмущениях и установили свойство устойчивости относительно ограниченных возмущений. Для C_0-полугруппы U и для возмущенной полугруппы U^P, полученной прибавлением к генератору полугруппы U ограниченного возмущения P, теорема 3.1.33 утверждает, что

$$\|U_t - U_t^P\| = O(t)$$

при t, стремящемся к нулю[1]. Расстояние по норме между двумя группами или полугруппами является удобной мерой их близости, и этот пример показывает, что группы, генераторы которых близки, мало удалены друг от друга по норме при малых t. Теперь посмотрим, каковы «взаимоотношения» между полугруппами, близкими при малых t. Первый результат состоит в том, что полугруппы не могут быть очень близки без того, чтобы не совпасть.

Предложение 3.1.35. *Пусть U и V — две $\sigma(X, F)$-непрерывные полугруппы в банаховом пространстве X. Если*

$$\|U_t - V_t\| = o(t)$$

при $t \to 0$, то $U = V$.

Доказательство. Обозначим через S и T генераторы полугрупп U и V соответственно. Зафиксируем $A \in D(T)$; тогда при $t \to 0$

$$\left|\omega\left(\frac{1}{t}(U_t - I)A\right) - \omega\left(\frac{1}{t}(V_t - I)A\right)\right| = o(1)$$

для любого $\omega \in F$. Следовательно, $A \in D(S)$, по определению, и $SA = TA$, т. е. $S \supseteq T$. Меняя ролями S и T, получаем $S \subseteq T$ и, следовательно, $S = T$. Воспользовавшись соотношениями $U_t = \lim_{n\to\infty}(I - tS/n)^{-n}A$, $V_t = \lim_{n\to\infty}(I - tT/n)^{-n}A$, которые справедливы, в силу теоремы 3.1.10, при $A \in D(S) = D(T)$, заключаем, что $U_t|_{D(S)} = V_t|_{D(S)}$, так что $U_t = V_t$, ввиду предположенной $\sigma(X, F)$-непрерывности.

Наш второй результат показывает, что если две C_0- или C_0^*-группы умеренно близки при малых t, то они связаны весьма простым образом.

[1] $\|U_t - V_t\| = o(t)$ означает, что $\lim_{t\to 0}\|U_t - V_t\|/t = 0$, а $\|U_t - V_t\| = O(t)$ означает, что $\limsup_{t\to 0}\|U_t - V_t\|/t < +\infty$.

Теорема 3.1.36. *Пусть U и V — две C_0- или C_0^*-группы в банаховом пространстве X с генераторами S и T соответственно. Следующие условия эквивалентны:*

(1) существуют такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$, что

$$\| U_t V_{-t} - I \| \leqslant 1 - \varepsilon_1$$

при $0 \leqslant t \leqslant \delta_1$;

(2) существуют $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$ и ограниченные операторы P, W, такие что у W есть ограниченный обратный,

$$S = W (T + P) W^{-1}$$

и

$$\| U_t W^{-1} U_{-t} W - I \| \leqslant 1 - \varepsilon_2$$

при всех $0 \leqslant t \leqslant \delta_2$.

Если эти условия выполнены, то в качестве W можно взять

$$W = \frac{1}{\delta_1} \int_0^{\delta_1} ds U_s V_{-s}$$

и, следовательно, $\| I - W \| \leqslant 1 - \varepsilon_1$. Кроме того,

$$\| U_t W^{-1} U_{-t} W - I \| = \| U_t V_{-t} - I \| + O(t), \quad t \to 0,$$

$$\| U_t W V_{-t} - W \| = O(t), \quad t \to 0.$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Рассмотрим оператор

$$W = \frac{1}{\delta_1} \int_0^{\delta_1} ds U_s V_{-s}$$

(интеграл понимается как сильный интеграл от сильно непрерывной функции в C_0-случае и как элемент, сопряженный к сильному интегралу, в C_0^*-случае). Для него $\| I - W \| \leqslant 1 - \varepsilon_1$, так что W имеет ограниченный обратный. Положим

$$X_t = W^{-1} U_t W V_{-t}.$$

Можно проверить, что

$$\frac{1}{h} (X_{t+h} - X_t) = \frac{1}{\delta_1 h} W^{-1} \int_{\delta_1}^{\delta_1 + h} ds U_{s+t} V_{-s-t} - \frac{1}{\delta_1 h} W^{-1} \int_0^h ds U_{s+t} V_{-s-t}.$$

В C_0-случае это влечет сильную дифференцируемость X_t, а в C_0^*-случае — слабую* дифференцируемость. В обоих случаях производная равна

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{W^{-1} U_t (U_{\delta_1} V_{-\delta_1} - I) V_{-t}}{\delta_1}.$$

Далее, заметим, что

$$\frac{(U_t - I) W A}{t} = \frac{W (V_t - I) A}{t} + \frac{W (X_t - I) V_t A}{t}.$$

Если $A \in D(T)$ и $t \to 0$, то правая часть сходится в сильной либо в слабой* топологии. Значит, $WA \in D(S)$ и $SWA = W(T+P)A$, где

$$P = \frac{dX_t}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{W^{-1}(U_{\delta_1}V_{-\delta_1} - I)}{\delta_1}.$$

Аналогично если $A \in D(S)$, то $W^{-1}A \in D(T)$ и $W^{-1}SA = (T+P)W^{-1}A$ Тем самым $D(S) = WD(T)$ и $S = W(T+P)W^{-1}$.

Наконец, легко проверяется, что

$$U_tW^{-1}U_{-t}W - I = (U_tV_{-t} - I)(V_tW^{-1}U_{-t}W - I) + \frac{1}{\delta_1}W^{-1}\int_0^t dsU_s(I - U_{\delta_1}V_{-\delta_1})V_{-s}V_tW^{-1}U_{-t}W + (U_tV_{-t} - I).$$

Поскольку группа $t \mapsto W^{-1}U_tW$ имеет генератор $T+P$, то по теореме 3.1.33

$$\|V_tW^{-1}U_{-t}W - I\| = O(t),\ t \to 0. \tag{*}$$

Следовательно, при $t \to 0$

$$\|U_tW^{-1}U_{-t}W - I\| = \|U_tV_{-t} - I\| + O(t). \tag{**}$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Зададим Q формулой $Q = -WPW^{-1}$. Тогда $T = W^{-1}(S+Q)W$, и если группа $\widehat{U}$ порождается генератором $S+Q$, то $\widehat{U}_t = WU_tW^{-1}$. Вновь применив теорему 3.1.33, получаем, что $\|U_t\widehat{U}_{-t} - I\| = O(t)$ при $t \to 0$. Тогда из тождества

$$U_tV_{-t} - I = U_tW^{-1}U_{-t}(U_t\widehat{U}_{-t} - I)W + (U_tW^{-1}U_{-t}W - I).$$

вытекает, что

$$\|U_tV_{-t} - I\| = \|U_tW^{-1}U_{-t}W - I\| + O(t). \tag{***}$$

Последнее утверждение теоремы следует из (*), (**) и (***).

Хотя мы сформулировали эту теорему только для C_0- и C_0^*-групп, имеется ее версия для $\sigma(X, F)$-непрерывных групп, справедливая при условии равностепенной $\tau(X, F)$-непрерывности $\{U_t\}_{|t|\leqslant 1}$ и $\{V_t\}_{|t|\leqslant 1}$. Фактически достаточным условием является аналогичное свойство равностепенной $\tau(F, X)$-непрерывности сопряженных групп U_t^* и V_t^*. Единственное место в доказательстве, где важную роль играет непрерывность группы, — это определение W. Но если, например, $\{U_t\}_{|t|\leqslant 1}$ и $\{V_t\}_{|t|\leqslant 1}$ равностепенно непрерывны, то для любой $\tau(X, F)$-полунормы p_K при всех A и $|t|, |s| \leqslant 1$

$$p_K((U_tV_{-t} - U_sV_{-s})A) \leqslant p_{K'}((V_{-t} - V_{-s})A) + p_{K'}((U_t - U_s)V_{-s}A).$$

Значит, функция $t \in [-1, 1] \mapsto U_tV_{-t}A$ будет $\tau(X, F)$-непрерывной.

Предыдущая теорема показывает, что для групп, которые близки по норме при достаточно малых t, всё отличие одной от другой сводится к «подкручиванию» и «подталкиванию»[1]. Под-

[1] В оригинале twist и boost. Иногда в отечественной физической литературе используются термины-кальки с английского «твист» и «буст». — *Прим. перев.*

талкивание — это ограниченное возмущение генератора, а подкручивание — это отображение $U_t \longmapsto WU_tW^{-1}$. Отметим, что если $\|U_t - V_t\| = o(1)$ или же $O(t^\alpha)$ при $t \to 0$, то $\|U_t - WU_tW^{-1}\| = o(1)$ или $O(t^\alpha)$ при $t \to 0$. Таким образом, подкручивание оставляет U почти неизменным. Однако, как мы увидим на примерах, вообще говоря, без подкручивания обойтись нельзя. Прежде чем рассмотреть этот вопрос, выведем из теоремы простое и замечательное следствие.

Следствие 3.1.37. *Для C_0-или C_0^*-группы U в банаховом пространстве X эквивалентны следующие условия:*

(1) *существуют такие* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, *что*

$$\|U_t - I\| \leqslant 1 - \varepsilon$$

при всех $t \in [0, \delta)$;

(2) $\lim_{t\to 0}\|U_t - I\| = 0$.

Доказательство. Это следует из теоремы 3.1.36, если положить $V = I$. Замечая, что условие (1) влечет ограниченность генератора U, делаем вывод о равномерной непрерывности U на основании предложения 3.1.1.

В предыдущем пункте методами теории возмущений было показано (теорема 3.1.33), что две полугруппы, генераторы которых отличаются только на ограниченный оператор, близки по норме при малых t, причем эта близость одного порядка с t при t, стремящемся к нулю. Такое свойство почти характеризует ограниченные возмущения C_0^*-полугрупп.

Теорема 3.1.38. *Пусть U и V — две C_0^*-полугруппы в банаховом пространстве X с генераторами S и T соответственно. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\|U_t - V_t\| = O(t)$, $t \to 0$;

(2) $D(S) = D(T)$ *и* $S - T$ *ограниченный оператор из* $D(S)$ *в* X.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). По предположению найдутся такие константы M, $\delta > 0$, что $\|U_t - V_t\| \leqslant Mt$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Выбрав $A \in D(S)$, рассмотрим семейство элементов $A_s = (U_s - V_s)A/s$. Имеем $\|A_s\| \leqslant M\|A\|$ при $0 < s < \delta$. Но единичный шар в X компактен в слабой* топологии, т. е. $\sigma(X, X_*)$-топологии, по теореме Алаоглу — Бурбаки. Тем самым существует слабо* сходящееся подсемейство A_{t_α}, предел которого при t_α, стремящемся к нулю, обозначим через B.

Далее, пусть T^* и V_t^* обозначают операторы в X_*, к которым сопряжены соответственно T и V_t (см. лемму 3.1.9). Рассмотрим тождество (по $\omega \in X_*$)

$$\left(\left(V_{t_\alpha}^* - I\right)\omega\right)(A)/t_\alpha = \omega\left(\left(U_{t_\alpha} - I\right)A/t_\alpha\right) - \omega\left(A_{t_\alpha}\right).$$

Переходя к пределу, находим

$$(T^*\omega)(A) = \omega(SA) - \omega(B). \qquad (*)$$

Поскольку правая часть непрерывна по ω, то обязательно $A \in D(T)$. Значит, $D(S) \subseteq D(T)$. Меняя ролями S и T, убедимся, что в действительности $D(S) = D(T)$. Кроме того, из (*) вытекает, что $(S - T)A = B$. Но $\|B\| \leqslant M\|A\|$, и потому

$$\sup_{A \in D(S)} (\|(S-T)A\| / \|A\|) \leqslant M.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Положим

$$N = \sup_{A \in D(S)} \frac{\|(S-T)A\|}{\|A\|};$$

по условию $N < +\infty$. Если $A \in D(S)$, то $U_s A \in D(S)$. Кроме того, $D(S) = D(T)$. Воспользовавшись соотношением

$$\omega((U_t - V_t)A) = \int_0^t ds\omega(V_{t-s}(S-T)U_s A),$$

выводим оценку

$$\|(U_t - V_t)A\| \leqslant tN\|A\| \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \|V_{t-s}\| \|U_s\|.$$

Но тогда существуют такие M и β, что $\|U_t\| \leqslant M \exp\{\beta t\}$ и $\|V_t\| \leqslant M \exp\{\beta t\}$, в силу предложения 3.1.3. Поэтому

$$\|U_t - V_t\| \leqslant tNM \exp\{\beta t\} = O(t) \text{ при } t \to 0.$$

Эта теорема не обязательно сохраняет силу для C_0-групп, как показывает следующий пример.

Пример 3.1.39. В качестве X возьмем $C_0(\mathbb{R})$, пространство непрерывных функций на прямой с обычной sup-нормой. Пусть F — оператор умножения на вещественную функцию f, которая недифференцируема на плотном множестве точек, но равномерно непрерывна по Гёльдеру в том смысле, что

$$|f(s) - f(t)| \leqslant c|s-t|.$$

Зададим W формулой $W = \exp\{iF\}$. Затем введем C_0-группу сдвигов U:

$$(U_t\psi)(x) = \psi(x-t), \ t \in \mathbb{R}, \ \psi \in X,$$

и вторую C_0-группу $V_t = W^{-1}U_tW$. Легко проверить, что

$$\|U_t - V_t\| \leqslant c|t|.$$

Но генератор S группы U — это оператор дифференцирования, а генератор T группы V равен $W^{-1}SW$, и $D(S) \cap D(T) = \{0\}$, так как f недифференцируема на плотном множестве.

Этот пример показывает также, что нельзя вовсе отказаться от «подкручиваний», фигурирующих в теореме 3.1.36.

Заметим, что теорема 3.1.38 не дотягивает до критерия отличия S и T на ограниченный оператор, потому что речь идет лишь об ограниченности $S - T$ как оператора из $D(S) = D(T)$ в X. Область определения $D(S)$, хотя и $\sigma(X, X_*)$-плотна, не обязательно плотна по норме. В отдельных случаях, однако, можно установить существование ограниченного замыкания у $S - T$.

Пример 3.1.40. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, т. е. $X = X^{**}$. Тогда предсопряженное пространство X_* совпадает с сопряженным: $X_* = X^*$, и совпадают слабая* и слабая топологии. Тем самым всякая C_0^*-группа U в X оказывается C_0-группой (см. определение 3.1.2). В частности, область определения $D(S)$ генератора S группы U плотна в X по норме. В этом случае для групп U и V условие

$$\| U_t - V_t \| = O(t), \quad t \to 0,$$

выполняется тогда и только тогда, когда для генераторов S и T области определения равны: $D(S) = D(T)$, и $S - T$ имеет ограниченное замыкание. Особый интерес представляет случай самосопряженных операторов S и T в гильбертовом пространстве и ассоциированных с S, T унитарных групп $U_t = \exp\{itS\}$ и $V_t = \exp\{itT\}$. Тогда эквивалентны условия:

(1) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \| U_t - V_t \| / |t| < \infty$;

(2) $S - T$ имеет ограниченное замыкание.

Теоремы 3.1.36 и 3.1.38 описывают основные взаимосвязи между двумя группами, близкими по норме при малых t. Естественно также рассмотреть более слабые меры близости, и в C_0^*-случае можно охарактеризовать относительно ограниченные возмущения типа фигурирующих в теореме 3.1.32.

Теорема 3.1.41. *Пусть C_0^*-полугруппы U и V на банаховом пространстве X имеют генераторы S и T соответственно. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\| (U_t - V_t) A \| = O(t)$, $t \to 0$, *при всех* $A \in D(T)$;

(2) $\| (U_t - V_t)(I - \alpha T)^{-1} \| = O(t)$, $t \to 0$, *при всех* α *из интервала* $(0, \delta)$;

(3) $D(S) \supseteq D(T)$ *и существуют такие константы* a, $b \geqslant 0$, *что*

$$\| (S - T) A \| \leqslant a \| A \| + b \| TA \|$$

при всех $A \in D(T)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (3). Сперва отметим, что $A \in D(S)$ тогда и только тогда, когда $\| (U_t - I) A \| = O(t)$ при $t \to 0$, согласно предложению 3.1.23. Таким образом, при $A \in D(T)$

$$\frac{\| (U_t - I) A \|}{t} \leqslant \frac{\| (V_t - I) A \|}{t} + \frac{\| (U_t - V_t) A \|}{t} = O(1),$$

и $A \in D(S)$. Поэтому $D(S) \supseteq D(T)$. Затем покажем, что S и T оба слабо* замкнуты и, следовательно, сильно замкнуты. Рассмотрим график $G(T) = \{(A, TA)\}$ оператора T, снабженный нормой $\| (A, TA) \| = \| A \| + \| TA \|$. Он замкнут как подпространство в $X \times X$, и отображение $(A, TA) \longmapsto SA$ является линейным оператором из $G(T)$ в X. Но этот последний оператор замкнут, потому что из сходимости (A_n, TA_n) в $G(T)$ и сходимости SA_n в X следует, что $\| A_n - A \| \to 0$ при некотором A и $\| SA_n - B \| \to 0$. Тем самым $B = SA$, так как S замкнут. Теорема о замкнутом графике позволяет теперь утверждать, что оператор этот должен быть ограничен. Следовательно, имеется такая константа c, что

$$\| SA \| \leqslant c (\| A \| + \| TA \|).$$

Наконец,

$$\|(S-T)A\| \leqslant c\|A\| + (c+1)\|TA\|.$$

(3) $\Rightarrow$ (2). Если $A \in D(T)$, то $V_t A \in D(T) \subseteq D(S)$ и

$$\omega((U_t - V_t)A) = \int_0^t ds\omega(U_s(S-T)V_{t-s}A)$$

при всех $\omega \in X_*$. Легко получить оценку

$$\|(U_t - V_t)A\| \leqslant t \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \|U_s\| \|V_{t-s}\| (a\|A\| + b\|TA\|).$$

Но при некоторых M и β выполняются также неравенства $\|U_t\| \leqslant M \exp\{\beta t\}$ и $\|V_t\| \leqslant M \exp\{\beta t\}$, так что

$$\|(U_t - V_t)A\| \leqslant tM^2 e^{\beta t}(a\|A\| + b\|TA\|).$$

Выбрав $A = (I - \alpha T)^{-1} B$, получим

$$\|(U_t - V_t)(I - \alpha T)^{-1} B\| \leqslant tM^2 e^{\beta t}(a\|(I - \alpha T)^{-1} B\| + b\|(I - (I - \alpha T)^{-1} B\|.$$

Применив для оценки резольвенты предложение 3.1.6, находим, что при $0 < \alpha < \beta^{-1}$

$$\|(U_t - V_t)(I - \alpha T)^{-1}\| \leqslant tM^2 e^{\beta t}(aM(1 - \alpha\beta)^{-1} + \\ + b\alpha^{-1}(1 + M(1 - \alpha\beta)^{-1})) = O(t).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Это немедленно следует из совпадения $D(T)$ с $R((I - \alpha T)^{-1})$.

3.2. Теория для случая алгебр

В этом разделе мы главным образом изучаем однопараметрические группы *-автоморфизмов C^*-алгебр и алгебр фон Неймана, усиливая результаты раздела 3.1 за счет учета структуры алгебры. В приложениях к математической физике такой анализ полезен при изучении динамики систем или при исследовании однопараметрических групп симметрий. В таком контексте, однако, естественно сначала рассмотреть преобразования более общего вида, чем *-автоморфизмы.

Симметрии физических систем можно описывать двумя различными взаимодополнительными способами. Можно трактовать симметрию как инвариантность состояний системы относительно преобразований, которым подвергаются приборы, ведущие наблюдение за системой, или можно трактовать ее как инвариантность наблюдений относительно преобразований состояний. Если принять такое описание физической системы, при котором наблюдаемые являются элементами некоторой алгебры $\mathfrak{A}$, а физически реализуемые состояния представляются математическими состояниями ω на $\mathfrak{A}$, то две указанные трактовки окажутся двойственными друг другу. Можно описывать симметрии как преобразования алгебры $\mathfrak{A}$ и считать множество состояний $E_{\mathfrak{A}}$ неизменяющимися или, двойственным образом, вводить симметрии как преобразования множества состояний $E_{\mathfrak{A}}$, а алгебру $\mathfrak{A}$ считать не подвергающейся изменениям. В любом случае важную роль играет условие положительности. Требование положительности состояний на алгебре наблюдаемых связано с вероятностной интерпретацией результатов измерений, и сохранение положительности при преобразованиях симметрии соответствует сохранению вероятности. С другой стороны, спектральные значения самосопряженных наблюдаемых соответствуют физически реализуемым значениям этих наблюдаемых, так что физически осмысленно выделение преобразований, переводящих положительные элементы алгебры в положительные. Поэтому мы начнем с изучения положительных отображений алгебр и охарактеризуем также некоторые специальные подклассы *-автоморфизмов. После этого мы вернемся к изучению групп автоморфизмов.

3.2.1. Положительные линейные отображения и йордановы морфизмы

В этом пункте мы рассмотрим различные типы положительных линейных отображений C^*-алгебр и алгебр фон Неймана $\mathfrak{A}$ (см. предпоследнюю фразу введения к настоящему разделу). Конкретными примерами таких отображений φ являются *-автоморфизмы и *-антиавтоморфизмы. Другие примеры — это отображения φ, которые сопряжены с отображениями $\varphi^* : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$, обладающими свойством переводить состояния в состояния. Мы опишем более подробно это и некоторые другие характеристические требования, предъявляемые к φ, естественные с точки зрения физической интерпретации, и докажем эквивалентность разных требований. Мы также покажем, что при выполнении этих требований φ расщепляется на морфизм и антиморфизм.

Начало общим исследованиям такого рода в математической физике положила предложенная Вигнером математическая формулировка понятия симметрии в квантовой механике. Чистые состояния квантовомеханической системы представляются «лучами» единичных векторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Если $\psi \in \mathfrak{H}$ и $\|\psi\| = 1$, то соответствующий луч $\widehat{\psi}$ определяется как множество векторов вида $e^{i\lambda}\psi$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Числа

$$p(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = |(\varphi, \psi)|^2,$$

очевидным образом не зависящие от выбора представителей φ, ψ лучей $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$, задают вероятность перехода системы из состояния $\widehat{\varphi}$ в состояние $\widehat{\psi}$. Вигнер определил симметрию системы как такое взаимно-однозначное отображение лучей в лучи, при котором сохраняются вероятности перехода $p(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$. Это понятие можно также переформулировать в терминах проекторов. Если $\mathscr{E}(\mathfrak{H})$ обозначает множество всех проекторов ранга 1 в $\mathfrak{H}$, то симметрия по Вигнеру — это такое взаимно-однозначное отображение $E \in \mathscr{E}(\mathfrak{H}) \mapsto \alpha(E) \in \mathscr{E}(\mathfrak{H})$, что

$$\operatorname{Tr}(\alpha(E_\varphi)\,\alpha(E_\psi)) = \operatorname{Tr}(E_\varphi E_\psi); \tag{*}$$

здесь E_φ и E_ψ обозначают проекторы на подпространства, порожденные соответственно векторами φ и ψ. Отображение α по линейности можно распространить на все операторы конечного ранга, а затем по непрерывности и на C^*-алгебру $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ всех компактных операторов в $\mathfrak{H}$. Отметим, что свойство инвариантности (*) обеспечивает корректность такого расширения ($\alpha(A) = 0$, если $A = 0$). Кроме того, можно убедиться, что матрицы плотности ρ, описанные в пункте 2.6.2, отображаются в матрицы плотности, причем если $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то $\alpha(\rho) = \lambda\alpha(\rho_1) + (1-\lambda)\,\alpha(\rho_2)$. Тем самым α определяет отображение состояний C^*-алгебры $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ или же нормальных состояний алгебры фон Неймана $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов, а именно действующее по правилу

$$\omega(A) = \operatorname{Tr}(\rho A) \mapsto (\alpha^*\omega)(A) = \operatorname{Tr}(\alpha(\rho)A),$$

и это — аффинное отображение, т. е.

$$\alpha^*(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\,\omega_2) = \lambda\alpha^*\omega_1 + (1-\lambda)\,\alpha^*\omega_2.$$

Таким образом, вигнеровские симметрии попадают в класс отображений, которые мы рассматриваем. Структура этих симметрий $\hat{\psi} \mapsto \alpha\hat{\psi}$ оказывается чрезвычайно простой, а именно

$$\alpha\hat{\psi} = U\hat{\psi},$$

где U — унитарный или антиунитарный оператор, который с точностью до фазы определен единственным образом. Этот результат вытекает из общей теории, например из теоремы 3.2.8, и мы рассмотрим его ниже в данном пункте в качестве примера.

Начнем с формального определения различных новых типов отображений, которые будут представлять для нас интерес.

Определение 3.2.1. Пусть $\varphi : \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{B}$ — линейное отображение C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в C^*-алгебру $\mathfrak{B}$. Будем говорить, что

(1) φ — *положительное отображение*, если $\varphi(\mathfrak{A}_+) \subseteq \mathfrak{B}_+$;
(2) φ — *йорданов морфизм*, если

$$\varphi(A^*) = \varphi(A)^*,\ \ \varphi(\{A, B\}) = \{\varphi(A), \varphi(B)\}$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$, где $\{A, B\} = AB + BA$;

(3) φ — *антиморфизм*, если

$$\varphi(A^*) = \varphi(A)^*, \quad \varphi(AB) = \varphi(B)\varphi(A)$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$;

(4) φ — *изометрия*, если $\|\varphi(A)\| = \|A\|$ при всех $A \in \mathfrak{A}$;

(5) φ — *порядковый изоморфизм*, если существует φ^{-1} и оба отображения φ и φ^{-1} положительны;

(6) φ — *йорданов изоморфизм*, если существует φ^{-1} и φ (а значит, и φ^{-1}) — йорданов морфизм;

(7) φ — *антиизоморфизм*, если существует φ^{-1} и φ — антиморфизм.

Применяются также такие понятия, как *порядковый автоморфизм, йорданов автоморфизм и антиавтоморфизм*, определения которых ясны из названий. Некоторые связи между введенными понятиями вполне очевидны; например, и морфизмы, и антиморфизмы являются йордановыми морфизмами. Если φ — йорданов морфизм и элемент $A \in \mathfrak{A}$ самосопряжен, то $\varphi(A^2) = \varphi(A)^2$, так что отображение φ положительно. Отметим, что имеется тесная связь между антиморфизмами и антилинейными морфизмами; последние переводятся в первые (и наоборот) преобразованием $A \mapsto A^*$.

Теперь займемся характеризацией йордановых морфизмов, а именно покажем, что они получаются «сложением» морфизма и антиморфизма.

***Предложение* 3.2.2.** *Пусть φ — йорданов морфизм C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{B}$ обозначает C^*-алгебру, порожденную $\varphi(\mathfrak{A})$. Тогда существует такой проектор $E \in \mathfrak{B}' \cap \mathfrak{B}''$, что отображение*

$$A \mapsto \varphi(A)E$$

есть морфизм, а

$$A \mapsto \varphi(A)(\mathbb{1} - E)$$

— антиморфизм.

В частности, если π — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{B}$, то $\pi \circ \varphi$ — либо морфизм, либо антиморфизм.

Поскольку полное доказательство этого предложения довольно длинно, мы ограничимся указанием его основных моментов.

***Наблюдение* (1).** *Если $A, B \in \mathfrak{A}$, то*

$$\varphi(ABA) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(A).$$

Для проверки замечаем, что $\varphi((A+B)^3) = \varphi(A+B)^3$, $\varphi(A^3) = \varphi(A)^3$ и т. д., откуда можно получить

$$\varphi(ABA + BAB) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(A) + \varphi(B)\varphi(A)\varphi(B).$$

Аналогичная выкладка, учитывающая, что $\varphi((A-B)^3) = \varphi(A-B)^3$, дает

$$\varphi(ABA - BAB) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(A) - \varphi(B)\varphi(A)\varphi(B),$$

и искомый результат получается сложением двух выписанных выше равенств.

Наблюдение *(2). Если* $A, B, C \in \mathfrak{A}$, *то*

$$\varphi(ABC + CBA) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) + \varphi(C)\varphi(B)\varphi(A).$$

Это следует из тождества

$$ABC + CBA = (A + C)B(A + C) - ABA - CBC$$

и наблюдения (1).

Наблюдение *(3). Если* $A, B \in \mathfrak{A}$, *то*

$$[\varphi(AB) - \varphi(A)\varphi(B)][\varphi(AB) - \varphi(B)\varphi(A)] = 0.$$

Раскрывая скобки и применяя наблюдение (1), а затем наблюдение (2), получаем

$$\begin{aligned}&[\varphi(AB) - \varphi(A)\varphi(B)][\varphi(AB) - \varphi(B)\varphi(A)]\\ &= \varphi((AB)^2) + \varphi(ABBA) - \varphi(A)\varphi(B)\varphi(AB) - \varphi(AB)\varphi(B)\varphi(A)\\ &= \varphi((AB)^2 + (AB)(BA)) - \varphi((AB)(AB) + (AB)(BA)) = 0.\end{aligned}$$

Теперь с помощью наблюдения (3) можно доказать предложение 3.2.2 в том случае, когда $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана вида $\mathfrak{M} \otimes M_n$, $n \geqslant 2$, где M_n — алгебра всех матриц размера $n \times n$. Доказательство, основанное на манипулировании матричными единицами, носит алгебраически-комбинаторный характер и позволяет на самом деле получить результат для матриц над кольцами более общими, нежели алгебры фон Неймана. В общем случае алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ содержит последовательность взаимно ортогональных проекторов $\{E_n\}_{n\geqslant 1}$ в центре $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$, обладающую свойствами: $\Sigma_n E_n = \mathbb{1}$, алгебра $\mathfrak{A}E_1$ абелева, а $\mathfrak{A}E_n = \mathfrak{M}_n \otimes M_n$, где $\mathfrak{M}_n$ — алгебры фон Неймана. Это позволяет завершить доказательство для случая алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$. Наконец, если $\mathfrak{A}$ является C^*-алгеброй, то сначала φ расширяем на $\mathfrak{A}^{**}$, где $\mathfrak{A}^{**}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\left(\otimes_{\omega \in E_{\mathfrak{A}}} \pi_\omega\right)(\mathfrak{A})$, и затем применяем результат для алгебр фон Неймана.

Теперь мы подошли к первому основному результату данного пункта, к характеристике йордановых автоморфизмов и сопряженных с ними отображений.

Теорема 3.2.3. *Пусть C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обладают единицами и алгебра $\mathfrak{B}$ невырожденно действует в некотором гильбертовом пространстве. Пусть $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — линейное отображение, имеющее обратное φ^{-1}, и $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) φ — *йорданов изоморфизм;*

(2) *существует проектор $E \in \mathfrak{B}' \cap \mathfrak{B}''$, такой что $A \longmapsto \varphi(A)E$ — морфизм и $A \longmapsto \varphi(A)(\mathbb{1} - E)$ — антиморфизм;*

(3) (I) *если U унитарен, то $\varphi(U)$ унитарен,*

(II) *если $A = A^*$, то $\varphi(|A|) = |\varphi(A)|$,*

(III) *если элемент A обратим, то и $\varphi(A)$ обратим и $\varphi(A^{-1}) = \varphi(A)^{-1}$;*

(4) φ — *изометрия;*

(5) φ — *порядковый изоморфизм;*

(6) *сопряженное с* φ *отображение* $\varphi^*: \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^*$ *обладает тем свойством, что*

$$\varphi^*(E_{\mathfrak{B}}) = E_{\mathfrak{A}},$$

где $E_{\mathfrak{A}}$ и $E_{\mathfrak{B}}$ — *множества состояний на* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *соответственно.*

Мы докажем эту теорему с помощью серии предложений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Первое из предложений иногда называют *обобщенным неравенством Шварца*, потому что в случае состояний оно сводится к этому неравенству.

Предложение 3.2.4. *Пусть C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют единицы, φ — такое положительное отображение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, что $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, и $A \in \mathfrak{A}$ — нормальный элемент, т. е. $AA^* = A^*A$. При этих предположениях*

$$\varphi(A^*A) \geqslant \varphi(A)^* \varphi(A).$$

Доказательство. Нормальность A позволяет считать, что $\mathfrak{A}$ абелева. В таком случае $\mathfrak{A} = C(X)$, где X — некоторое отделимое компактное пространство (теорема 2.1.11). Можно считать, что C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Сначала докажем, что

$$\sum_{ij} \left(\xi_i, \varphi\left(A_i^* A_j\right) \xi_j\right) \geqslant 0$$

для всякой пары конечных последовательностей $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{H}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$. По теореме Рисса на X найдутся такие бэровские меры $d\mu_{\xi_i\xi_j}$ с конечной полной вариацией, что

$$(\xi_i, \varphi(A)\xi_j) = \int_X d\mu_{\xi_i\xi_j}(x) A(x)$$

для всех $A \in \mathfrak{A} = C(X)$. Пусть $d\mu = \sum_{ij} d\left|\mu_{\xi_i\xi_j}\right|$. Тогда μ — положительная конечная бэровская мера, и по теореме Радона — Никодима существуют μ-измеримые функции $h_{\xi_i\xi_j}$ на X, такие что

$$d\mu_{\xi_i\xi_j}(x) = h_{\xi_i\xi_j}(x)\, d\mu(x).$$

Для всякого набора $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{ij} \bar{\lambda}_i \lambda_j\, d\mu_{\xi_i\xi_j} = d\mu_{\xi\xi},$$

где $\xi = \sum_i \lambda_i \xi_i$. Мера $d\mu_{\xi,\xi}$ положительна и

$$d\mu_{\xi,\xi}(x) = \left(\sum_{ij} \bar{\lambda}_i \lambda_j h_{\xi_i\xi_j}(x)\right) d\mu(x).$$

Следовательно,

$$\sum_{ij} \bar{\lambda}_i \lambda_j h_{\xi_i\xi_j}(x) \geqslant 0$$

при всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и μ-почти всех $x \in X$. Но тогда для любых $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$

$$\sum_{ij} \left(\xi_i, \varphi\left(A_i^* A_j\right) \xi_j\right) = \int d\mu(x) \left\{\sum_{ij} \overline{A_i(x)}\, A_j(x)\, h_{\xi_i \xi_j}(x)\right\} \geqslant 0.$$

Снабдим теперь тензорное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{H}$ векторных пространств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{H}$ полуторалинейной формой

$$\left(\sum_i A_i \otimes \xi_i, \; \sum_j B_j \otimes \eta_j\right) = \sum_{ij} \left(\xi_i, \varphi\left(A_i^* B_j\right) \eta_j\right).$$

Форма эта корректно определена и задает положительно-полуопределенное скалярное произведение, согласно только что установленному неравенству. Пусть $\mathfrak{N}$ обозначает множество нулевых векторов относительно этой формы, а $\mathfrak{K}$ — замыкание множества $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{H}/\mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{K}$ — гильбертово пространство, и оператор V, определенный соотношением $V\psi = \mathbb{1} \otimes \psi + \mathfrak{N}$, будет линейной изометрией $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$. Пусть π — представление, индуцированное в $\mathfrak{K}$ представлением π' алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{H}$, задаваемым формулой

$$\pi'(A)\left(\sum_i B_i \otimes \psi_i\right) = \sum_i AB_i \otimes \psi_i.$$

Простые вычисления показывают, что π — представление $\mathfrak{A}$ и

$$\varphi(A) = V^* \pi(A) V$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. (Заметим, что это — обобщение конструкции ГНС.) Далее, при $A \in \mathfrak{A}$ и $\psi \in \mathfrak{H}$ имеем

$$\begin{aligned}(\psi, \varphi(A^*A)\psi) &= (\psi, V^*\pi(A)^*\pi(A)V\psi) = \|\pi(A)V\psi\|^2 \\ &\geqslant \|V^*\pi(A)V\psi\|^2 = (\psi, \varphi(A)^*\varphi(A)\psi).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\varphi(A^*A) \geqslant \varphi(A)^*\varphi(A).$$

Лемма 2.2.14 и ее доказательство показывают, что элемент A, принадлежащий C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей, является выпуклой комбинацией унитарных элементов из $\mathfrak{A}$, если $\|A\| \leqslant {}^1/_2$. Более общим образом, можно показать, что всякий элемент $A \in \mathfrak{A}$ с $\|A\| < 1$ является выпуклой комбинацией унитарных элементов. Однако нам понадобится только следующий более слабый результат.

Предложение 3.2.5. *Единичный шар C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой унитарных элементов алгебры $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{A}$ и $\|A\| < 1$, то элемент $\mathbb{1} - A^*A$ положителен и обратим, так что элемент

$$f(A, \lambda) = (\mathbb{1} - AA^*)^{-1/2}(\mathbb{1} + \lambda A)$$

существует в $\mathfrak{A}$ и обратим при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| = 1$. Далее,

$$A^*(\mathbb{1} - AA^*)^{-1} = A^*\left(\sum_{n \geqslant 0} (AA^*)^n\right) = \left(\sum_{n \geqslant 0} (A^*A)^n\right) A^* = (\mathbb{1} - A^*A)^{-1} A^*,$$

откуда

$$f(A, \lambda)^* f(A, \lambda) + \mathbb{1} = (\mathbb{1} + \bar{\lambda} A^*)(\mathbb{1} - AA^*)^{-1}(\mathbb{1} + \lambda A) + \mathbb{1}$$
$$= (\mathbb{1} - AA^*)^{-1} + (\mathbb{1} - A^*A)^{-1} \bar{\lambda} A^* +$$
$$+ (\mathbb{1} - AA^*)^{-1} \lambda A + (\mathbb{1} - A^*A)^{-1}.$$

Это выражение не изменится, если совершить преобразование $A \longmapsto A^*, \lambda \longmapsto \bar{\lambda}$, и мы заключаем, что

$$f(A, \lambda)^* f(A, \lambda) = f(A^*, \bar{\lambda})^* f(A^*, \bar{\lambda}).$$

Отсюда выводим, что элемент $U_\lambda = f(A, \lambda) f(A^*, \bar{\lambda})^{-1}$ унитарен при $|\lambda| = 1$. Функция

$$U(\lambda) = (\mathbb{1} - AA^*)^{-1/2} (\lambda \mathbb{1} + A)(\mathbb{1} + \lambda A^*)^{-1} (\mathbb{1} - A^*A)^{1/2}$$

аналитична в некоторой окрестности замкнутого единичного круга и при $|\lambda| = 1$ выполняется равенство $U(\lambda) = \lambda U_{\bar{\lambda}}$. Кроме того,

$$U(0) = (\mathbb{1} - AA^*)^{-1/2} A (\mathbb{1} - A^*A)^{1/2}$$
$$= (\mathbb{1} - AA^*)^{-1/2} (\mathbb{1} - AA^*)^{1/2} A = A.$$

По интегральной формуле Коши

$$A = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} U(e^{it})\, dt;$$

интеграл здесь существует как риманов интеграл. Следовательно, открытый единичный шар в $\mathfrak{A}$ содержится в замкнутой выпуклой оболочке унитарных элементов, что и доказывает предложение.

Предложение 3.2.5 имеет следующее следствие, которое мы уже доказали для случая состояний (предложение 2.3.11).

Следствие 3.2.6. *Пусть φ — линейное отображение между C^*-алгебрами с единицей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, и пусть $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Отображение φ положительно тогда и только тогда, когда $\|\varphi\| = 1$.*

Доказательство. Если $\|\varphi\| = 1$ и ω — состояние алгебры $\mathfrak{B}$, то $\omega \circ \varphi(\mathbb{1}) = 1$ и $\|\omega \circ \varphi\| \leqslant \|\omega\| \|\varphi\| = 1$, так что $\omega \circ \varphi$ оказывается состоянием $\mathfrak{A}$, в силу предложения 2.3.11. Значит, φ положительно.

В другую сторону, если φ положительно и $A = A^* \in \mathfrak{A}$, то $-\|A\| \mathbb{1} \leqslant A \leqslant \|A\| \mathbb{1}$ и $-\|A\| \mathbb{1} \leqslant \varphi(A) \leqslant \|A\| \mathbb{1}$. Следовательно, $\|\varphi(A)\| \leqslant \|A\|$, если $A = A^*$, и $\|\varphi(A)\| \leqslant 2\|A\|$ для всякого A, что проверяется разложением A на самосопряженные элементы. Тем самым установлена непрерывность φ. Для унитарного $U \in \mathfrak{A}$ из предложения 3.2.4 следует, что

$$\|\varphi(U)\|^2 = \|\varphi(U)^* \varphi(U)\| \leqslant \|\varphi(U^*U)\| = \|\varphi(\mathbb{1})\| = 1.$$

Непрерывность φ в сочетании с предложением 3.2.5 влечет равенство $\|\varphi\| = 1$.

Доказательство теоремы 3.2.3. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 3.2.2, импликация (2) $\Rightarrow$ (3) тривиальна. Далее, выполнение (3), (II) влечет положительность φ и φ^{-1}. Из следствия 3.2.6 вытекает тогда, что $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\|\varphi^{-1}\| \leqslant 1$; так что φ — изометрия. Этим проверяется импликация (3) $\Rightarrow$ (4). Эквивалентность (4) $\Leftrightarrow$ (5) выводится из следствия 3.2.6, а (5) $\Leftrightarrow$ (6) тривиальна. Наконец, докажем, что (5) $\Rightarrow$ (1). Если $A = A^* \in \mathfrak{A}$, то, применив к φ и φ^{-1} предложение 3.2.4, получим $\varphi(A^2) \geqslant \varphi(A)^2 = \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(A)^2)) \geqslant \varphi((\varphi^{-1}(\varphi(A)))^2) = \varphi(A^2)$. Следовательно, $\varphi(A^2) = \varphi(A)^2$ при $A = A^*$. Для $A = A^* \in \mathfrak{A}$, $B = B^* \in \mathfrak{A}$ используем тождество $(A + B)^2 - A^2 - B^2 = AB + BA = \{A, B\}$, и заключаем, что $\varphi(\{A, B\}) = \{\varphi(A), \varphi(B)\}$. Для произвольных A и B это соотношение справедливо по линейности.

У теоремы 3.2.3 есть различные интересные следствия, относящиеся к аффинным отображениям состояний и к однопараметрическим группам автоморфизмов. Остальная часть этого пункта посвящается выводу этих следствий и иллюстрирующим их примерам. Хотя вывод этот в общем несложен, он связан с определенной техникой, с которой предварительно надо познакомиться. Прежде всего, для изучения отображений состояний удобно расширить эти отображения на все двойственное или преддвойственное пространство алгебры. Для этой цели нужна некоторая информация о разложении линейных функционалов на C^*-алгебрах и алгебрах фон Неймана.

Мы начнем с определения *эрмитова функционала* η на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ как функционала со свойством $\eta(A^*) = \overline{\eta(A)}$. Ясно, что состояния этим свойством эрмитовости обладают и что эрмитов функционал вполне определяется своим сужением на вещественное пространство $\mathfrak{A}_{sa}$ самосопряженных элементов алгебры $\mathfrak{A}$.

Предложение 3.2.7 (йорданово разложение). *Если η — непрерывный линейный функционал на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ (т. е. $\eta \in \mathfrak{A}^*$), то η обладает единственным разложением вида $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, где η_1, η_2 — два эрмитовых функционала. А именно:*

$$\eta_1(A) = (\eta(A) + \overline{\eta(A^*)})/2, \quad \eta_2(A) = (\eta(A) - \overline{\eta(A^*)})/2i.$$

Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана и $\eta \in \mathfrak{M}_*$, то $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{M}_*$.

Если $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана и функционал $\eta \in \mathfrak{M}_*$ эрмитов, то существует единственная пара элементов η_1, $\eta_2 \in \mathfrak{M}_{*+}$ со свойствами

$$\eta = \eta_1 - \eta_2, \quad \|\eta\| = \|\eta_1\| + \|\eta_2\|.$$

Если C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ сопоставить алгебру фон Неймана $\mathfrak{A}'' = \left(\oplus_{\omega \in E_{\mathfrak{A}}} \pi_\omega\right)(\mathfrak{A})''$, то всякий элемент $\eta \in \mathfrak{A}^*$ единственным образом продолжается до σ-слабо непрерывного линейного функционала на $\mathfrak{A}''$ и $\mathfrak{A}''$ тождественна пространству $\mathfrak{A}^{**}$ (второму сопряженному для $\mathfrak{A}$). Если функционал $\eta \in \mathfrak{A}^*$ эрмитов, то существует единственная пара элементов η_1, $\eta_2 \in \mathfrak{A}^*_+$ со свойствами

$$\eta = \eta_1 - \eta_2, \quad \|\eta\| = \|\eta_1\| + \|\eta_2\|.$$

Доказательство. Существование и единственность разложения на эрмитовы функционалы не требуют обсуждения. В случае $\eta \in \mathfrak{M}_*$ мы имеем $\eta(A) = \sum_i (\xi_i, A\psi_i)$, так что $\overline{\eta(A^*)} = \sum_i (\psi_i, A\xi_i)$. Следовательно, $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{M}_*$.

Теперь допустим, что $\eta \in \mathfrak{M}_*$ эрмитов и $\|\eta\| = 1$. В силу σ-слабой компактности $\mathfrak{M}_1$, найдется такой элемент $A \in \mathfrak{M}_1$, что $\eta(A) = 1 = \eta(A^*)$. Поэтому, заменив A на $(A + A^*)/2$, можно считать, что $A = A^*$.

Пусть $W^*(A)$ обозначает абелеву алгебру фон Неймана, порожденную A и $\mathbb{1}$. Представление Гельфанда позволяет рассматривать $W^*(A)$ как алгебру $C(X)$ на отделимом компактном пространстве X. Множество тех $B \in C(X)_{\mathrm{sa}\,1}$, для которых $\eta(B) = 1$, непусто и σ-слабо замкнуто, а значит σ-слабо компактно. По теореме Крейна — Мильмана это множество имеет крайнюю точку B. Легко видеть, что B — крайняя точка также и для множества $C(X)_{\mathrm{sa}\,1}$, так как $\|\eta\| = 1$. Поэтому представитель B в $C(X)$ может принимать значения только в крайних точках промежутка $[-1, 1]$. Значит, $B = P_1 - P_2$, где P_1, P_2 — проекторы, $P_1P_2 = 0$ и $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$.

Далее, положим

$$\eta_1(A) = \eta(P_1A),\ \eta_2(A) = -\eta(P_2A)$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$. Такие η_1, η_2 будут σ-слабо непрерывны, и $\eta = \eta_1 - \eta_2$. Кроме того,

$$(\eta_1 + \eta_2)(\mathbb{1}) = \eta(P_1 - P_2) = 1,$$

$$|(\eta_1 + \eta_2)(A)| = |\eta((P_1 - P_2)A)| \leqslant \|\eta\|\,\|P_1 - P_2\|\,\|A\|.$$

Тем самым $\|\eta_1 + \eta_2\| = 1$, и $\eta_1 + \eta_2$ будет состоянием, в силу предложения 2.3.11.

На $P_1\mathfrak{M}P_1$ норма η_1 равна $\eta(P_1)$, потому что из $\eta(P_1) < \eta(A)$, где $A \in P_1\mathfrak{M}P_1$, следовало бы, что $\|A - P_2\| \leqslant 1$ и $\eta(A - P_2) = \eta(A) - \eta(P_2) > \eta(P_1 - P_2) = 1$, что невозможно. Следовательно, согласно предложению 2.3.11, $\eta_1 \geqslant 0$ на $P_1\mathfrak{M}P_1$. Функционал η_1 эрмитов, так как $\eta_1 = (\eta + (\eta_1 + \eta_2))/2$. Значит,

$$\eta(AP_1) = \eta\overline{(P_1A^*)} = \overline{\eta_1(A^*)} = \eta_1(A) = \eta(P_1A)$$

и

$$\eta_1(A) = \eta(P_1A) = \eta(P_1^2A) = \eta(P_1AP_1) = \eta_1(P_1AP_1).$$

Отсюда вытекает положительность η_1 на всей алгебре $\mathfrak{M}$. Аналогично η_2 положителен и $\|\eta_2\| = -\eta(P_2) = \eta_2(P_2)$, так что $\|\eta_1\| + \|\eta_2\| = \eta(P_1 - P_2) = 1$.

Для всякого $\omega \in \mathfrak{M}_{*+}$ пусть $S(\omega)$ обозначает наименьший из проекторов в $\mathfrak{M}$, обладающих свойством $\omega(S(\omega)) = \|\omega\|$ (равносильно определение $S(\omega)$ как наибольшего из проекторов в $\mathfrak{M}$, для которых $\omega(\mathbb{1} - S(\omega)) = 0$); $S(\omega)$ называется *носителем* ω. Для проверки единственности разложения η полагаем

$$\eta = \eta_1' - \eta_2' = \eta_1 - \eta_2, \quad \eta_1'\| + \|\eta_2'\| = 1,\ \eta_1',\ \eta_2' \in \mathfrak{M}_{*+}.$$

Тогда

$$\eta_1(\mathbb{1}) + \eta_2(\mathbb{1}) = 1 = \eta_1'(\mathbb{1}) + \eta_2'(\mathbb{1}),$$

$$\eta_1(\mathbb{1}) - \eta_2(\mathbb{1}) = \eta(\mathbb{1}) = \eta_1'(\mathbb{1}) - \eta_2'(\mathbb{1})$$

и тем самым $\eta_i(\mathbb{1}) = \eta_i'(\mathbb{1})$, $i = 1, 2$. Так как $S(\eta_1) \leqslant P_1$, то

$$\|\eta_1'\| = \eta_1'(\mathbb{1}) = \eta_1(\mathbb{1}) = \|\eta_1\| = \eta_1(S(\eta_1)) =$$
$$= \eta(S(\eta_1)) = \eta_1'(S(\eta_1)) - \eta_2'(S(\eta_1)).$$

Таким образом, $\eta_2'(S(\eta_1)) = 0$ и $S(\eta_1') \leqslant S(\eta_1)$. Следовательно,

$$\eta_1(A) = \eta(S(\eta_1)A) = \eta_1'(S(\eta_1)A) - \eta_2'(S(\eta_1)A) = \eta_1'(S(\eta_1)A)$$
$$= \eta_1'((S(\eta_1) - S(\eta_1'))A) + \eta_1'(S(\eta_1')A) = \eta_1'(A).$$

Поэтому $\eta_1 = \eta_1'$, так что $\eta_2 = \eta_2'$.

Теперь обратимся к C^*-части доказательства. По теореме 2.3.15 множество $B_{\mathfrak{A}}$ положительных линейных функционалов на $\mathfrak{A}$ с нормой, не превосходящей единицы, слабо* компактно. Следовательно, множество $\mathfrak{K}$ выпуклых линейных комбинаций элементов из $B_{\mathfrak{A}}$ и $-B_{\mathfrak{A}}$ также слабо* компактно. Если $A = A^* \in \mathfrak{A}$, то непосредственное обобщение леммы 2.3.23 позволяет заключить, что

$$\|A\| = \sup\{|\omega(A)|;\ \omega \in E_{\mathfrak{A}}\} = \sup\{\eta(A);\ \eta \in \mathfrak{K}\}.$$

Мы покажем, что всякий эрмитов функционал η с $\|\eta\| \leqslant 1$ лежит в $\mathfrak{K}$. Предположив, что это не так, применим теорему Хана — Банаха к вещественному пространству $\mathfrak{A}_{sa}$. Теорема гарантирует существование таких $A \in \mathfrak{A}_{sa}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\eta(A) > \alpha$, а $\varphi(A) \leqslant \alpha$ при всех $\varphi \in \mathfrak{K}$. Отсюда, учитывая совпадение $-\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}$, выводим, что $|\varphi(A)| \leqslant \alpha$ при всех $\varphi \in \mathfrak{K}$. Значит, $\|A\| \leqslant \alpha$. Но это противоречит условию $\eta(A) > \alpha$, поэтому $\eta \in \mathfrak{K}$. Итак, показано, что всякий эрмитов функционал η на $\mathfrak{A}$ имеет вид $\eta = \eta_1 - \eta_2$, где $\eta_i \in \mathfrak{A}^*_+$. Далее, очевидно, что η_1 и η_2 обладают σ-слабо непрерывными продолжениями $\hat{\eta}_1$ и $\hat{\eta}_2$ на $\mathfrak{A}'' = \left(\bigoplus_{\omega \in E_{\mathfrak{A}}} \pi_\omega\right)(\mathfrak{A})''$. Тем самым и η имеет σ-слабо непрерывное продолжение $\hat{\eta}$. Это продолжение единственно, так как $\mathfrak{A}$ является σ-слабо плотным подмножеством в $\mathfrak{A}''$ и $\|\hat{\eta}\| = \|\eta\|$ по теореме Капланского о плотности (теорема 2.4.16). Из уже доказанного варианта предложения для алгебр фон Неймана следует теперь и его C^*-вариант.

Займемся следствиями теоремы 3.2.3. Сначала убедимся, что аффинные отображения состояний можно отождествить с отображениями, сопряженными к йордановым автоморфизмам. Такого рода двойственность отражает возможность описания преобразований симметрии в физических приложениях двумя методами, эквивалентность которых утверждается в следующей теореме.

Теорема 3.2.8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана, а $N_{\mathfrak{M}} = E_{\mathfrak{M}} \cap \mathfrak{M}_*$ — множество нормальных состояний на $\mathfrak{M}$. Далее, пусть φ_* — аффинное отображение $N_{\mathfrak{M}}$ на себя, т. е.*

$$\varphi_*(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2) = \lambda\varphi_*(\omega_1) + (1-\lambda)\varphi_*(\omega_2)$$

при всех $\lambda \in [0, 1]$, $\omega_1, \omega_2 \in N_{\mathfrak{M}}$. В таком случае существует единственный йорданов автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{M}$, для которого

$$(\varphi_*\omega)(A) = \omega(\varphi(A))$$

при всех $\omega \in N_{\mathfrak{M}}$, $A \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Отображение φ_* единственным образом расширяется до обратимого отображения $\mathfrak{M}_{*+}$ на $\mathfrak{M}_{*+}$, а именно по формуле $\varphi_*(\lambda\omega) = \lambda\varphi_*(\omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Для расширенного отображения имеем $\varphi_*(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1\varphi_*(\omega_1) + \lambda_2\varphi_*(\omega_2)$. Воспользовавшись йордановым разложением, указанным в предложении 3.2.7, расширим φ_* и φ_*^{-1} по линейности (единственным образом) до обратимых линейных отображений $\mathfrak{M}_*$ на $\mathfrak{M}_*$; расширенные отображения будут положительны, и норма их не будет превосходить двух. Следовательно, $\varphi = \varphi_*^*$ существует как обратимое отображение на $\mathfrak{M}$, а φ и φ^{-1} положительны.

Если $\omega \in N_{\mathfrak{M}}$, то $\omega(\varphi(\mathbb{1})) = (\varphi_*\omega)(\mathbb{1}) = 1 = \omega(\mathbb{1})$. Таким образом, $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, и φ — йорданов автоморфизм по теореме 3.2.3.

Отметим, что результат теоремы 3.2.8 можно приспособить и к C^*-случаю. Пусть $\mathfrak{A}$ будет C^*-алгеброй, π — ее представлением, а N_π — множеством π-нормальных состояний (см. определение 2.4.25). В этом случае всякое аффинное обратимое отображение φ_* множества N_π на себя задает, в силу двойственности, йорданов автоморфизм φ алгебры фон Неймана, порожденной π. В частности, если $\pi = \bigoplus\limits_{\omega \in E_{\mathfrak{A}}} \pi_\omega$, то $N_\pi = E_{\mathfrak{A}}$, так что всякое аффинное обратимое отображение φ_* на $E_{\mathfrak{A}}$ определяет йорданов автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}'' = \left(\bigoplus\limits_{\omega \in E_{\mathfrak{A}}} \pi_\omega\right)(\mathfrak{A})''$. Следующая наша цель — показать, что при наложении добавочных условий непрерывности на φ_* этот двойственный йорданов автоморфизм φ задает йорданов автоморфизм алгебры $\pi(\mathfrak{A})$. Тем самым, если π точно, то φ отвечает йорданову автоморфизму абстрактной C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Добавочные условия непрерывности требуют, чтобы φ_* отображало пары близких состояний в пары близких состояний. Понятие близости определяется слабо* равномерной структурой. При физической интерпретации, когда значения, принимаемые в определенных состояниях, представляют результаты физических измерений, смысл условий непрерывности состоит в требовании, чтобы преобразования симметрии не приводили к радикальным отличиям между сходными системами.

В упомянутом выше C^*-варианте теоремы 3.2.8 первоначальное отображение состояний было определено на подмножестве, образованном π-нормальными состояниями. Во многих прикладных задачах также естественно рассматривать специальные подмножества состояний, например локально-нормальные состояния на квазилокальных алгебрах, и этим объясняется то, что в разделе 3.1 мы ограничились изучением $\sigma(X, F)$-непрерывных полугрупп и т. п. Однако, чтобы алгебраическое описание не оказалось отчасти избыточным, необходимо, чтобы соответствующие подмножества состояний были в каком-то смысле определяющими для алгебры. В этом контексте естественным является понятие полного множества состояний.

***Определение* 3.2.9.** *Полным семейством S состояний на C^*-алгебре* $\mathfrak{A}$ называют такое выпуклое подмножество S множества $E_{\mathfrak{A}}$ состояний на $\mathfrak{A}$, которое обладает следующим свойством: если $\omega(A) \geqslant 0$ для всех $\omega \in S$, то $A \geqslant 0$.

В частности, заметим, что нормальные состояния алгебры фон Неймана образуют полное множество состояний. Значит, π-нормальные состояния точного представления π также образуют полное множество состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$.

Обобщение теоремы 3.2.8 на C^*-алгебры будет сформулировано в терминах отображений полных семейств состояний. Эти семейства можно просто охарактеризовать как слабо* плотные подмножества множества всех состояний, только вот вывод такого описания не столь прост. Предварительно мы установим полезный факт:

Предложение 3.2.10. *Пусть S — выпуклое подмножество состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) S — полное множество;
(2) S слабо плотно.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Сперва мы покажем, что для $A \geqslant 0$

$$\sup_{\omega \in S} \omega(A) = \|A\|.$$

Допустим, что это не так, и будем рассматривать состояния $\omega \in S$ как меры $d\mu_\omega$ на спектре $\sigma(A)$ абелевой алгебры $C_0(\sigma(A))$, порожденной A (см. теорему 2.1.11, Б)). Если $\omega(A) \leqslant \lambda < \|A\|$ при всех $\omega \in S$, то все представляющие меры должны иметь на $[\|A\| - \lambda/2, \|A\|] \cap \sigma(A)$ массу, не превосходящую $(\|A\| - \lambda)/(\|A\| - \lambda/2) < 1$. Тем самым существует такая вещественная функция $f \in C_0(\sigma(A))$, что $f(t) < 0$ при $t \geqslant \|A\| - \lambda/2$, но

$$\omega(f(A)) = \int d\mu_\omega(t) f(t) \geqslant 0$$

при всех $\omega \in S$. Однако $f(A)$ не положительно, и это противоречит полноте S.

Далее, мы утверждаем, что для $\varepsilon > 0$ по $A = A^*$ и $\lambda \in \sigma(A)$ можно указать такое $\omega \in S$, что $|\omega(A) - \lambda| < \varepsilon$. Если $\lambda \neq 0$, то выберем положительную функцию $f \in C_0(\sigma(A))$ с $\|f\|_\infty = 1$ так, чтобы $f(t) = 0$ при $|t - \lambda| > \varepsilon'$, где $\varepsilon' = \varepsilon(1 + 2\|A\|)^{-1}$. Предыдущие рассуждения гарантируют существование такого $\omega \in S$, что $\omega(f(A)) \geqslant 1 - \varepsilon'$. Таким образом, представляющая ω мера будет иметь на $[\lambda - \varepsilon', \lambda + \varepsilon']$ массу, превосходящую $1 - \delta$. Поэтому

$$|\omega(A) - \lambda| = \left| \int d\mu_\omega(t)\ (t - \lambda) \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{|t-\lambda| \leqslant \varepsilon'} d\mu_\omega(t)\ (t - \lambda) \right| + \left| \int_{|t-\lambda| > \varepsilon'} d\mu_\omega(t)\ (t - \lambda) \right| =$$

$$= \varepsilon'(1 + 2\|A\|) = \varepsilon.$$

Теперь в случае алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей можно заменить $C_0(\sigma(A))$ на $C(\sigma(A))$, и наши рассуждения остаются в силе и при $\lambda = 0$. Далее, если $\mathbb{1} \notin \mathfrak{A}$, но точка нуль не изолирована в $\sigma(A)$, то наше утверждение справедливо: достаточно аппроксимировать нуль числами $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$. Наконец, если $\mathbb{1} \notin \mathfrak{A}$ и нуль — изолированная точка спектра $\sigma(A)$, то можно выбрать такую функцию $f \in C_0(\sigma(A))$, что $f(t) = 1$ при $t \in \sigma(A) \setminus \{0\}$. Положив $P = f(A)$, видим, что $P \in \mathfrak{A}$ — проектор и $P \neq \mathbb{1}$. Следовательно, найдется $B \in \mathfrak{A}$, такое что $BP - B \neq 0$, и в результате $C = (BP - B)^*(BP - B)/\|BP - B\|^2$ будет положительным, $\|C\| = 1$ и $CP = 0 = PC$. При любом $\varepsilon > 0$ согласно первой части доказательства можно указать такое $\omega \in S$, что $\omega(C) \geqslant 1-\varepsilon^2$, и если $\tilde{\omega}$ обозначает продолжение ω на $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$, то

$$|\omega(P)|^2 = |\tilde{\omega}(P(\mathbb{1}-C))|^2 \leqslant \omega(P)\,\tilde{\omega}((\mathbb{1}-C)^2) \leqslant \|\mathbb{1}-C\|\,\tilde{\omega}(\mathbb{1}-C) < \varepsilon^2.$$

Принимая во внимание, что в силу выбора P имеют место неравенства $-\|A\|P \leqslant A \leqslant \|A\|P$, приходим к оценке $|\omega(A)| \leqslant \varepsilon\|A\|$.

Для завершения доказательства предположим, что полное семейство состояний S не является слабо* плотным, и придем к противоречию. Если $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$ не принадлежит слабому* замыканию выпуклого множества S, то по теореме Хана — Банаха, примененной к паре $\mathfrak{A}^*_{sa}$ и $\mathfrak{A}_{sa}$, найдется такое $A = A^* \in \mathfrak{A}$, что $\omega(A) > 1$ и $\omega'(A) \leqslant 1$ при всех $\omega' \in S$. Полагаем $\varepsilon = \omega(A) - 1 > 0$, и пусть $A = A_+ - A_-$ будет разложением A на положительную и отрицательную части, A_+ и A_-. Пусть E_+ — проектор на область значений A_+, принадлежащий алгебре

$$\mathfrak{A}'' = \left(\bigoplus_{\omega \in E_{\mathfrak{A}}} \pi_\omega\right)(\mathfrak{A})'',$$

и пусть $E_- = \mathbb{1} - E_+$. Тогда $\omega(E_+) + \omega(E_-) = 1$ и, следовательно,

$$0 \leqslant \omega(A_+) = \omega(E_+A_+E_+) \leqslant \|A_+\|\,\omega(E_+).$$

Аналогично

$$0 \leqslant \omega(A_-) \leqslant \|A_-\|\,\omega(E_-).$$

Предыдущими рассуждениями уже установлено, что множества $\{\omega'(A_\pm),\ \omega' \in S\}$ плотны в выпуклых замыканиях множеств $\sigma(A_\pm)$ соответственно. Вдобавок, проведенные оценки показывают, что $\omega(A_\pm)/\|A_\pm\|$ принадлежат соответствующим выпуклым замыканиям. Тем самым имеются состояния $\omega_\pm \in S$, для которых

$$|\omega(E_\pm)\,\omega_\pm(A_\pm) - \omega(A_\pm)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагая $\omega' = \omega(E_+)\,\omega_+ + \omega(E_-)\,\omega_-$, видим, что $\omega' \in S$ и

$$|\omega'(A) - \omega(A)| < \varepsilon.$$

Но так как $\omega(A) = 1 + \varepsilon$ и $\omega'(A) \leqslant 1$, то получено противоречие и, значит, S должно быть слабо* плотным.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если S слабо* плотно и элемент $A = A^*$ не положителен, то для некоторого $\omega \in S$ будет $\omega(A) < 0$. Таким образом, S должно быть полным множеством.

После такого довольно длинного предварительного рассмотрения подмножеств состояний вернемся к изучению аффинных отображений состояний. Основной результат для C^*-случая — следующее обобщение теоремы 3.2.8:

Теорема 3.2.11. *Пусть S — полное множество состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и φ_* — афинное отображение S на S. Предположим еще, что для всякого $A \in \mathfrak{A}$ существует такое $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$-компактное подмножество K_A в $\mathfrak{A}$, что для любых пар $\omega_1, \omega_2 \in S$*

$$|(\varphi_*(\omega_1) - \varphi_*(\omega_2))(A)| \leqslant \sup_{B \in K_A} |(\omega_1 - \omega_2)(B)|,$$

$$|(\varphi_*^{-1}(\omega_1) - \varphi_*^{-1}(\omega_2))(A)| \leqslant \sup_{B \in K_A} |(\omega_1 - \omega_2)(B)|. \qquad (*)$$

При этих условиях существует единственный йорданов автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ со свойством

$$(\varphi_* \omega)(A) = \omega(\varphi(A))$$

для всех $\omega \in S$ и $A \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что множество S слабо* плотно в $E_{\mathfrak{A}}$ и потому плотно также в топологии на $E_{\mathfrak{A}}$, индуцированной топологией Макки $\tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$. Тем самым φ_* и φ_*^{-1} можно единственным образом расширить по непрерывности до аффинных отображений $E_{\mathfrak{A}}$, причем оценки непрерывности $(*)$ распространяются на все пары $\omega_1, \omega_2 \in E_{\mathfrak{A}}$. Кроме того, можно, воспользовавшись йордановым разложением (см. предложение 3.2.7), расширить φ_* до линейного ограниченного отображения на $\mathfrak{A}^*$.

Далее, предположим, что $A = A^* \in \mathfrak{A}$. Если $\omega_1, \omega_2 \in E_{\mathfrak{A}}$, то разность $\omega_1 - \omega_2$ является эрмитовым функционалом и для любого B из компактного множества K_A

$$|(\omega_1 - \omega_2)(B)| \leqslant \left|(\omega_1 - \omega_2)\left(\frac{B + B^*}{2}\right)\right| + \left|(\omega_1 - \omega_2)\left(\frac{B - B^*}{2i}\right)\right|$$

$$\leqslant 2 \sup\left\{(\omega_1 - \omega_2)\left(\pm\frac{B + B^*}{2}\right), \quad (\omega_1 - \omega_2)\left(\pm\frac{B - B^*}{2i}\right)\right\}.$$

Переходя последовательно от K_A к $K_A + K_A^*$, затем к самосопряженной части K_A и, наконец, к $K_A \cup (-K_A)$, можно будет считать, что K_A — компактное уравновешенное подмножество в $\mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}$ и

$$\pm(\varphi_*(\omega_1) - \varphi_*(\omega_2))(A) \leqslant \sup_{B \in K_A} (\omega_1 - \omega_2)(B).$$

Пусть теперь $\eta \in \mathfrak{A}^*$ — произвольный эрмитов функционал со свойством $\eta(\mathbb{1}) = 0$. Если $\eta = \eta_1 - \eta_2$ — йорданово разложение η, то $\|\eta_1\| = \eta_1(\mathbb{1}) = \eta_2(\mathbb{1}) = \|\eta_2\|$. Применяя предыдущее неравенство к $(\eta_1 - \eta_2)/\|\eta_1\|$, получаем

$$\pm(\varphi_* \eta(A) \leqslant \sup_{B \in K_A} \eta(B).$$

Зафиксировав состояние ω_0 на $\mathfrak{A}$, можно всякий эрмитов функционал η на $\mathfrak{A}$ единственным образом представить в виде $\eta = \lambda\omega_0 + \eta'$, где $\lambda = \eta(\mathbb{1}) \in \mathbb{R}$, а η' — такой эрмитов функционал, что $\eta'(\mathbb{1}) = 0$. Выберем в качестве ω_0 слабую* предельную точку последовательности

$$\omega_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \varphi_*^k \omega,$$

построенной по $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$. Имеем $\varphi_* \omega_0 = \omega_0$. Возьмем теперь элемент $A = A^*$ и выберем K_A, содержащее A. Тогда

$$(\varphi_* \eta)(A) = \lambda(\varphi_* \omega_0)(A) + (\varphi_* \eta')(A) \leqslant \lambda\omega_0(A) + \sup_{B \in K_A} \eta'(B)$$

$$\leqslant \sup_{B \in K_A} \lambda\omega_0(B) + \sup_{B \in K_A} \eta'(B) \leqslant \sup_{B \in 2K_A} (\lambda\omega_0 + \eta')(B) = \sup_{B \in 2K_A} \eta(B).$$

Следовательно, $\eta \longmapsto (\varphi_* \eta)(A)$ будет $\tau(\mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}^*, \mathfrak{A}_{\mathrm{sa}})$-непрерывным функционалом из $\mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}^*$ — множества эрмитовых функционалов на $\mathfrak{A}$, или, что то же, пространства, сопряженного вещественному банахову пространству $\mathfrak{A}_{sa}$. По теореме Макки — Аренса, найдется такое $B \in \mathfrak{A}_{sa}$, что

$$(\varphi_*\eta)(A) = \eta(B), \quad \eta \in \mathfrak{A}_{sa}^*.$$

Введем φ так, чтобы $B = \varphi(A)$.

Аналогичное рассмотрение φ_*^{-1} показывает, что φ обратимо, поэтому $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Положительность отображений φ и φ^{-1} очевидна. Заметив еще, что

$$\omega(\varphi(\mathbb{1})) = (\varphi_*\omega)(\mathbb{1}) = 1 = \omega(\mathbb{1}),$$

приходим к равенству $\varphi(1) = 1$, и теперь теорема 3.2.3 позволяет утверждать: φ — йорданов автоморфизм $\mathfrak{A}$.

До сих пор при изучении положительных отображений и йордановых автоморфизмов наше внимание было сосредоточено на свойствах индивидуальных отображений. Теперь мы займемся однопараметрическими группами таких отображений. Все предыдущие результаты естественным образом можно было бы обобщить, однако мы хотим сейчас показать, что, пользуясь свойствами непрерывности группы, можно усилить предшествующие утверждения. В частности, однопараметрическая группа аффинных отображений состояний, обладающая надлежащим свойством сильной непрерывности, приводит к однопараметрической группе *-автоморфизмов, а не просто йордановых автоморфизмов. Этот факт составляет часть содержания приводимого ниже следствия.

***Следствие* 3.2.12.** *Пусть $t \longmapsto \alpha_t$ — сильно непрерывная однопараметрическая группа отображений C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей $\mathbb{1}$, и пусть $\alpha_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *все α_t являются *-автоморфизмами $\mathfrak{A}$;*
(2) *$\|\alpha_t\| \leqslant 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$;*
(3) *$\alpha_t(\mathfrak{A}_+) \subseteq \mathfrak{A}_+$ при всех $t \in \mathbb{R}$;*
(4) *$\alpha_t^*(E_{\mathfrak{A}}) \subseteq E_{\mathfrak{A}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Согласно теореме 3.2.3, достаточно показать, что сильно непрерывная группа α_t йордановых автоморфизмов $\mathfrak{A}$ является группой *-автоморфизмов. Но если π — неприводимое представление $\mathfrak{A}$, то $\pi\circ\alpha_t$ при каждом t — либо морфизм, либо антиморфизм $\mathfrak{A}$, в силу предложения 3.2.2. Из непрерывности $t \longmapsto \pi(\alpha_t(A))$ при каждом $A \in \mathfrak{A}$ легко вывести, что множество $\mathcal{U}$ (соотв. $\mathcal{V}$), состоящее из тех t, для которых $\pi\circ\alpha_t$ — морфизм (соотв. антиморфизм), замкнуто. Следовательно, оба множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ и открыты, и замкнуты.

Поскольку $\mathbb{R}$ связно и $0 \in \mathcal{U}$, то $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, т. е. все $\pi\circ\alpha_t$ — морфизмы. Прямая сумма неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{A}$ по лемме 2.3.23 является точным представлением, поэтому каждый морфизм α_t окажется *-автоморфизмом.

Аналогичная ситуация имеет место для некоторых специальных алгебр фон Неймана и σ-слабо непрерывных групп.

***Следствие* 3.2.13.** *Пусть $t \longmapsto \alpha_t$ — однопараметрическая σ-слабо непрерывная группа отображений алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ и $\alpha_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$. Пусть $N_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_* \cap E_{\mathfrak{M}}$ —*

множество нормальных состояний на $\mathfrak{M}$. Предположим, что $\mathfrak{M}$ — фактор или абелева алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *α_t при каждом $t \in \mathbb{R}$ является *-автоморфизмом $\mathfrak{M}$;*
(2) *$\|\alpha_t\| \leqslant 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$;*
(3) *$\alpha_t(\mathfrak{M}_+) \subseteq \mathfrak{M}_+$ при всех $t \in \mathbb{R}$;*
(4) *$\alpha_t^*(N_{\mathfrak{M}}) \subseteq N_{\mathfrak{M}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. То, что (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), очевидным образом следует из теоремы 3.2.3. Но из условия (3) вытекает, что $\alpha_t(\mathfrak{M}_+) = \mathfrak{M}_+$, $\alpha_t^{-1}(\mathfrak{M}_+) = \mathfrak{M}_+$. Значит, для всякой возрастающей сети A_α в $\mathfrak{M}_+$, сходящейся к A, сеть $\alpha_t(A_\alpha)$ сходится к $\alpha_t(A)$. Тем самым (3) $\Rightarrow$ (4), а импликация (4) $\Rightarrow$ (3) тривиальна. Для проверки импликации (3) $\Rightarrow$ (1) достаточно показать, что всякая σ-слабо непрерывная группа йордановых автоморфизмов $\mathfrak{M}$ есть группа *-автоморфизмов. Такое свойство очевидно в случае абелевой $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — фактор, то, согласно предложению 3.2.2, каждый морфизм α_t — либо автоморфизм, либо антиавтоморфизм. Рассуждения из доказательства предыдущего следствия, опирающиеся на связность $\mathbb{R}$, показывают, что все α_t будут *-автоморфизмами.

Отметим, что для общих алгебр фон Неймана следствие 3.2.13 неверно — можно построить контрпримеры (см. замечания и комментарии к главе).

В качестве иллюстрации этих результатов проведем классификацию всех йордановых автоморфизмов алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, а тем самым и всех порядковых автоморфизмов, или изометрий, φ с $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Эта классификация решает проблему, обсуждавшуюся во введении к данному пункту, — получить характеризацию вигнеровых симметрий. Во введении мы установили уже, что всякая вигнерова симметрия определяет аффинное обратимое отображение φ_* нормальных состояний алгебры фон Неймана $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Но теорема 3.2.8 тогда приводит к заключению, что φ_* сопряжено с некоторым йордановым автоморфизмом φ алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Следующий пример проясняет, как действует φ на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и каково результирующее действие на $\mathfrak{H}$ симметрии Вигнера.

Пример 3.2.14. Так как алгебра $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ — фактор, то всякий йорданов автоморфизм α — либо автоморфизм, либо антиавтоморфизм, по теореме 3.2.3. Предположим сначала, что α — автоморфизм. Пусть Ω — фиксированный единичный вектор в $\mathfrak{H}$ и $E \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ — ортогональный проектор на подпространство $\mathbb{C}\Omega$. Поскольку E — минимальный ненулевой проектор, то же самое верно и для $F = \alpha^{-1}(E)$. Следовательно, $F\mathfrak{H} = \mathbb{C}\xi$, где ξ — некоторый единичный вектор. Определим оператор U на $\mathfrak{H}$ формулой

$$UA\xi = \alpha(A)\Omega, \quad A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}).$$

Из соотношений

$$\|A\xi\| = \|AF\xi\| = \|AF\| = \|\alpha(AF)\| = \|\alpha(A)E\| = \|\alpha(A)E\Omega\| = \|\alpha(A)\Omega\|$$

следует, что U корректно определен и изометричен. Так как область значений U совпадает с $\mathscr{L}(\mathfrak{H})\Omega = \mathfrak{H}$, то U унитарен и $U^* = U^{-1}$ задается соотношением

$$U^*A\Omega = \alpha^{-1}(A)\xi, \quad A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}).$$

Таким образом, для $A, B \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$

$$UAU^*B\Omega = UA\alpha^{-1}(B)\xi = \alpha(A)B\Omega,$$

т. е. $\alpha(A) = UAU^*$. Мы видим, что все автоморфизмы $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ непременно внутренние, и группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathscr{L}(\mathfrak{H}))$ изоморфна группе унитарных операторов в $\mathfrak{H}$, факторизованной по подгруппе $\{\lambda\mathbb{1};\ |\lambda| = 1\}$.

Пусть $\{E_{ij}\}_{i,j}$ — полный набор матричных единиц в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$; зададим на нем

$$\sigma_0(E_{ij}) = E_{ji}.$$

Прямым вычислением проверяется, что σ_0 можно расширить до антиавтоморфизма $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, для которого $\sigma_0^2 = \iota$. Если теперь α — произвольный антиавтоморфизм $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, то $\alpha\circ\sigma_0$ будет автоморфизмом. Таким образом, можно указать такой унитарный оператор $U \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, что

$$\alpha(A) = U\sigma_0(A)U^*.$$

Такова структура произвольного антиавтоморфизма алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$.

Можно воспользоваться этой конструкцией и для классификации непрерывных групп α_t *-автоморфизмов или *-антиавтоморфизмов. При каждом t выберем единичный вектор ξ_t из области значений $\alpha_{-t}(E)$ и введем U_t, полагая

$$U_tA\xi_t = \alpha_t(A)\Omega.$$

Векторы ξ_t определены с точностью до произвольного фазового множителя, и, следовательно, U_t образуют группу с точностью до такого множителя, т. е. $U_sU_tU_{-s-t} = \exp\{i\gamma(s,t)\}$, где $\gamma(s,t) \in \mathbb{R}$, γ — некоторая функция. Тем не менее можно показать, что в случае слабо* непрерывной группы α_t возможен согласованный выбор фаз векторов ξ_t, при котором соответствующие U_t образуют однопараметрическую группу, непрерывную по t в слабой, а значит и в сильной топологии. Фактически этот результат будет получен в следующем пункте несколько иным методом (пример 3.2.35).

Закончим описание вигнеровых симметрий, возможных для систем с гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$, замечанием о том, что любая такая симметрия α расширяется до автоморфизма или антиавтоморфизма φ алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, а действие α на $\mathfrak{H}$ определяется действием φ на проекторы ранга 1 в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Всегда справедливо равенство

$$\alpha(\psi) = U\psi,$$

где U — либо унитарный, либо антиунитарный оператор, определенный с точностью до фазы. Действие однопараметрических групп симметрий Вигнера также указано в следующем пункте (после примера 3.2.35).

Теперь оставим примеры и вернемся к обсуждению йордановых автоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$. Для этой цели удобно иметь дело со стандартной формой алгебры $\mathfrak{M}$, поэтому до конца пункта будет предполагаться, что $\mathfrak{M}$ обладает циклическим и отделяющим вектором Ω, а Δ, J, $\mathscr{P}$ обозначают соответствующие модулярный оператор, модулярную инволюцию и естественный положительный конус. Напомним, что $\mathscr{P}$ определяется как замыкание множества $\{Aj(A)\Omega;\ A \in \mathfrak{M}\}$, где $j(A) = JAJ$; иначе его можно определить как замыкание множества $\{\Delta^{1/4}A\Omega;\ A \in \mathfrak{M}_+\}$ (предложение 2.5.26). Важно также, что элемент

$\xi \in \mathscr{P}$ является одновременно циклическим и отделяющим для $\mathfrak{M}$, если известно, что он либо циклический, либо отделяющий. Кроме того, если $\xi \in \mathscr{P}$ — циклический и отделяющий, то инволюция J_ξ, отвечающая паре $\{\mathfrak{M}, \xi\}$, совпадает с J, а соответствующий положительный конус $\mathscr{P}_\xi$ совпадает с $\mathscr{P}$ (предложение 2.5.30).

Конус $\mathscr{P}$ применялся в разделе 2.5 при доказательстве унитарной выполнимости любого $*$-автоморфизма α алгебры $\mathfrak{M}$, т. е. доказательстве существования такого унитарного $U(\alpha)$, что $\alpha(A) = U(\alpha) A U(\alpha)^*$ при всех $A \in \mathfrak{M}$. Теперь мы используем этот конус для получения описания йордановых автоморфизмов $\mathfrak{M}$.

Теорема 3.2.15. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана с циклическим и отделяющим вектором Ω, и пусть Δ, J, $\mathscr{P}$ обозначают ассоциированные с ними модулярный оператор, модулярную инволюцию и естественный положительный конус. Если U — любой унитарный оператор со свойством $U\mathscr{P} = \mathscr{P}$, то существует и единствен такой йорданов автоморфизм α алгебры $\mathfrak{M}$, что*

$$(\xi, \alpha(A)\xi) = (\xi, UAU^*\xi) \qquad (*)$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$ и $\xi \in \mathscr{P}$.

Наоборот, если α — йорданов автоморфизм $\mathfrak{M}$, то существует единственный унитарный оператор U, для которого $U\mathscr{P} = \mathscr{P}$, и вновь справедливо соотношение $(*)$.

Если в любом из этих случаев $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ — такой проектор, что $A \in \mathfrak{M} \mapsto \alpha(A) E$ — морфизм и $A \in \mathfrak{M} \mapsto \alpha(A)(\mathbb{1} - E)$ — антиморфизм (см. предложение 3.2.2), то

$$UAU^* = \alpha(A) E + J\alpha(A^*) J (\mathbb{1} - E).$$

В доказательстве теоремы существенно используются ранее полученные результаты раздела 2.5, а также некоторые добавочные сведения о геометрии конуса $\mathscr{P}$. В частности, нужны следующие свойства инвариантности $\mathscr{P}$:

Лемма 3.2.16. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана с циклическим и отделяющим вектором Ω, и пусть Δ, J, $\mathscr{P}$ обозначают ассоциированные с ним модулярный оператор, модулярную инволюцию и положительный конус. Если $A \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$, то*

$$\Delta^{it} A \Delta^{-it} = A, \quad JAJ = A^*.$$

Если $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ — проектор и $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}'(\mathbb{1} - E)$, то $\mathfrak{N}$ — алгебра фон Неймана и вектор Ω является циклическим и отделяющим для $\mathfrak{N}$. Соответствующие Δ_0, J_0 и $\mathscr{P}_0$ удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_0 = \Delta E + \Delta^{-1}(\mathbb{1} - E), \quad J_0 = J, \quad \mathscr{P}_0 = \mathscr{P}.$$

Доказательство. Возьмем проектор $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$. В обозначениях раздела 2.5 для любых $A \in \mathfrak{M}$, $A' \in \mathfrak{M}'$ имеем

$$SEA\Omega = A^*E\Omega = EA^*\Omega = ESA\Omega, \ FEA'\Omega = EFA'\Omega.$$

Переходя к замыканиям операторов, получим, согласно предложению 2.5.11,

$$J\Delta^{1/2}E = EJ\Delta^{1/2}, \qquad \Delta^{1/2}JE = E\Delta^{1/2}J.$$

Далее, отметим, что

$$\Delta E = \Delta^{1/2}JJ\Delta^{1/2}E = E\Delta^{1/2}JJ\Delta^{1/2} = E\Delta.$$

Из ограниченности E следует, что E коммутирует с Δ^{it}, а потому и с $\Delta^{1/2}$. Тем самым

$$EJ\Delta^{1/2} = J\Delta^{1/2}E = JE\Delta^{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что $JE = EJ$. Первое утверждение леммы выводим теперь, аппроксимируя A линейными комбинациями проекторов.

Множество $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}'(\mathbb{1} - E)$, очевидно, является алгеброй фон Неймана с коммутантом $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}'E + \mathfrak{M}(\mathbb{1} - E)$, и нетрудно показать, что Ω — циклический и отделяющий вектор для $\mathfrak{N}$. Заметим еще, что вектор $E\Omega$ — циклический и отделяющий для $\mathfrak{M}E$ в $E\mathfrak{H}$. Из предложений 2.5.11 и 2.5.26 легко вывести равенства

$$J_0 = J_0E + J_0(\mathbb{1} - E) = JE + J(\mathbb{1} - E) = J,$$
$$\Delta_0 = \Delta E + \Delta^{-1}(1 - E),$$
$$\mathscr{P}_0 = E\mathscr{P}_0 + (\mathbb{1} - E)\mathscr{P}_0 = E\mathscr{P} + (\mathbb{1} - E)\mathscr{P} = \mathscr{P}.$$

Доказательство теоремы 3.2.15. Мы начнем с доказательства второго утверждения теоремы. Заметим, что предложение 3.2.2 гарантирует существование такого проектора $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$, что отображение $A \longmapsto \alpha(A)E$ — морфизм, а $A \longmapsto \alpha(A)(1 - E)$ — антиморфизм. Введем отображение $\beta\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}'(\mathbb{1} - E)$, задаваемое формулой

$$\beta(A) = \alpha(A)E + J\alpha(A^*)J(\mathbb{1} - E).$$

Если $F \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ — другой проектор с теми же свойствами, что и E, то, как легко видеть, $P = E + F - EF$ определяет абелеву алгебру $P\mathfrak{M} = P\mathfrak{M}'$. Тем самым $\mathfrak{N}$ единственным образом определяется α, так что отображение β единственно, согласно лемме 3.2.16. Это отображение — морфизм; так,

$$\beta(AB) = (\alpha(A)E)(\alpha(B)E) + J\alpha(A^*)\alpha(B^*)(\mathbb{1} - E)J = \beta(A)\beta(B);$$

здесь учтено, что $JE = EJ$. Поскольку β изоморфно отображает $\mathfrak{M}\alpha^{-1}(E)$ (соотв. $\mathfrak{M}\alpha^{-1}(\mathbb{1} - E)$) на $\mathfrak{M}E$ (соотв. $\mathfrak{M}'E$), это изоморфизм. Естественные конусы, ассоциированные с парами $\{\mathfrak{M}, \Omega\}$ и $\{\mathfrak{N}, \Omega\}$, совпадают по лемме 3.2.16. Таким образом, в силу следствия 2.5.32, существует единственный унитарный оператор $U \equiv U(\alpha)$, для которого $U\mathscr{P} = \mathscr{P}$ и $\beta(A) = UAU^*$. Остается установить связь между $U = U(\alpha)$ и α; для этого заметим, что $J\xi = \xi$ при $\xi \in \mathscr{P}$ (предложение 2.5.26, (4)) и

$$\begin{aligned}(\xi, UAU^*\xi) &= (\xi, \beta(A)\xi) = (\xi, \alpha(A)E\xi) + (\alpha(A^*)(1 - E)\xi, \xi)\\ &= (\xi, \alpha(A)E\xi) + (\xi, \alpha(A)(1 - E)\xi) = (\xi, \alpha(A)\xi).\end{aligned}$$

Тем самым мы одновременно получаем и последнее утверждение теоремы. Для доказательства первого утверждения нам потребуется следующая характеризация граней конуса $\mathscr{P}$.

Лемма 3.2.17. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра в стандартной форме и $\xi \in \mathcal{P}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *ξ циклический и отделяющий вектор;*

(2) *множество $Q_\xi = \{\eta \in \mathcal{P};\ \lambda\eta \leqslant \xi$ при некотором $\lambda > 0\}$ плотно в $\mathcal{P}$.*

Если эти условия выполнены, то $\eta \leqslant \xi$ тогда и только тогда, когда $\eta = \Delta_\xi^{1/4} A\xi$ при некотором $A \in \mathfrak{M}_+$ с $\|A\| \leqslant 1$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если вектор ξ — отделяющий, то заключительное утверждение леммы уже доказано в лемме 2.5.40, из которой вдобавок следует, что $Q_\xi = \Delta_\xi^{1/4}\mathfrak{M}_+\xi$. Последнее множество плотно в $\mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}$ согласно предложениям 2.5.26, (1) и 2.5.30, (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что Q_ξ плотно, но вектор ξ — не отделяющий. Тогда должен найтись такой ненулевой проектор $E \in \mathfrak{M}$, что $E\xi = 0$. Однако при этом и $Ej(E)\xi = 0$, и поскольку $Ej(E)\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$(предложение 2.5.26, (5)), мы заключаем, что $Ej(E)\eta = 0$ при всех $\eta \leqslant \xi$. Из плотности Q_ξ в $\mathcal{P}$ и из предложения 2.5.28, (4) следует, что $Ej(E) = 0 = j(E)E$. Далее, пусть F обозначает проектор на подпространство $[\mathfrak{M}\mathfrak{M}'E\mathfrak{H}]$, или, что то же самое, на подпространство $[\mathfrak{M}'\mathfrak{M}j(E)\mathfrak{H}]$. Ясно, что $F \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ и $F \geqslant E$. Но $0 = \mathfrak{M}'Ej(E)\mathfrak{M} = E\mathfrak{M}'\mathfrak{M}j(E)$, следовательно, $EF = 0$. Тем самым $E = EF = 0$, и получено противоречие. Поэтому ξ должен быть отделяющим, а значит и циклическим, по предложению 2.5.30.

Обратимся теперь к первому утверждению теоремы 3.2.15. Для его доказательства возьмем произвольный циклический и отделяющий вектор $\xi \in \mathcal{P}$ и положим $\eta = U^*\xi$. По лемме 3.2.17 при всех $A \in \mathfrak{M}_+$ имеем $\xi \geqslant \Delta_\xi^{1/4}A\xi/\|A\|$. Поэтому $\eta \geqslant U^*\Delta_\xi^{1/4}A\xi/\|A\|$ при всех $A \in \mathfrak{M}_+$, и, вновь применив лемму, видим что вектор η — циклический и отделяющий. Кроме того, при всяком $A \in \mathfrak{M}_+$ должен существовать такой оператор $\alpha_\xi(A) = \alpha(A) \in \mathfrak{M}_+$ с $\|\alpha(A)\| \leqslant \|A\|$, что

$$U\Delta_\eta^{1/4}A\eta = \Delta_\xi^{1/4}\alpha(A)\xi.$$

Отображение α можно расширить по линейности на всю алгебру $\mathfrak{M}$, и единственность эрмитова и ортогонального разложений обеспечивает корректность такого определения. Мы пришли к положительному отображению α на $\mathfrak{M}$, для которого $\alpha(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Повторяя вновь эту конструкцию с заменой U на U^*, устанавливаем существование α^{-1} и его положительность. Таким образом, α — порядковый изоморфизм $\mathfrak{M}$, а импликация (5) $\Rightarrow$ (1) теоремы 3.2.3 показывает, что это йорданов автоморфизм. Пусть $U(\alpha)$ — унитарный элемент, ассоциированный с α согласно доказанной ранее второй части теоремы 3.2.15. Тогда

$$(\xi,\ \alpha(A)\xi) = \left(\xi,\ \Delta_\xi^{1/4}\alpha(A)\xi\right) = \left(\xi,\ U\Delta_\eta^{1/4}A\eta\right) = (\eta,\ A\eta).$$

Отсюда вытекает, что $U(\alpha)^*\xi = \eta = U^*\xi$. Следовательно, сославшись на теорему 2.5.31 и предложение 2.5.30, имеем

$$U(\alpha)\Delta^{1/4}A\eta = \Delta_\xi^{1/4}\alpha(A)\xi = U\Delta_\eta^{1/4}A\eta,$$

и в результате $U(\alpha) = U$. Тем самым показано, что α не зависит от ξ, а связь между U и α следует из доказанной второй части теоремы.

Характеризация йордановых автоморфизмов, содержащаяся в теореме 3.2.15, не лишена некоторых недостатков, будучи связанной с естественным конусом $\mathcal{P}$. Этот конус представляет собой замыкание множества $\Delta^{1/4}\mathfrak{M}_+\Omega$, и хотя $\mathfrak{M}$ и Ω являются первичными объектами теории, модулярный оператор Δ приходится уже конструировать, а эту задачу не всегда просто решить. Итак, применимость критерия $U\mathscr{P} = \mathscr{P}$ для йордановых автоморфизмов ограничена трудностью доступа к модулярному оператору Δ, т. е. к конусу $\mathscr{P}$. Естественно задаться вопросом, и это будет ближайшей темой нашего рассмотрения, нельзя ли вместо конуса $\mathscr{P}$ ввести в предыдущий критерий исходный конус $\mathfrak{M}_+\Omega$ или его замыкание. В следующей теореме показано, что конус $\mathfrak{M}_+\Omega$ действительно может применяться для выделения йордановых автоморфизмов, если эти автоморфизмы удовлетворяют добавочным условиям инвариантности.

Теорема 3.2.18. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана с циклическим и отделяющим вектором Ω, и пусть σ_t — ассоциированная с ним группа модулярных автоморфизмов. Если. U — унитарный оператор, $U\Omega = \Omega$ и*

$$U\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega},\quad U^*\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega},$$

то найдется единственный йорданов автоморфизм α алгебры $\mathfrak{M}$, для которого

$$UA\Omega = \alpha(A)\,\Omega$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$, и этот автоморфизм α обладает свойствами инвариантности

$$(\Omega,\ A\Omega) = (\Omega,\ \alpha(A)\,\Omega),\quad \sigma_t(\alpha(A)) = \alpha(\sigma_t(A))\quad (*)$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$ и $t \in \mathbb{R}$.

Обратно, если α — йорданов автоморфизм, удовлетворяющий условиям (*), *то существует единственный унитарный оператор U, такой что $U\Omega = \Omega$,*

$$U\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}_+\Omega,\quad U^*\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}_+\Omega$$

и при всех $A \in \mathfrak{M}$

$$UA\Omega = \alpha(A)\,\Omega.$$

Кроме того, этот оператор U совпадает с U, фигурирующим в теореме 3.2.15.

Первый существенный ингредиент доказательства — установление связи между U и α, а для этого необходимо доказать, что U отображает конус $\mathfrak{M}_+\Omega$ в себя.

Лемма 3.2.19. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана с циклическим и отделяющим вектором Ω, а T — такой ограниченный оператор, что $T\Omega = \Omega = T^*\Omega$ и*

$$T\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}.$$

В таком случае
$$T\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}_+\Omega.$$

Доказательство. Сперва установим, что $T^*\mathfrak{M}'_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}'_+\Omega$. Возьмем $A' \in \mathfrak{M}'_+$ и $A \in \mathfrak{M}_+$. Тогда
$$(T^*A'\Omega,\ A\Omega) = (A'\Omega,\ TA\Omega) \geqslant 0,$$
так как $TA\Omega \in \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}$. Выберем $A_n \in \mathfrak{M}_+$ так, чтобы $A_n\Omega \to TA\Omega$; при этом
$$(T^*A'\Omega,\ A\Omega) = \lim_n \left(A_n^{1/2}\Omega,\ A'A_n^{1/2}\Omega\right) \leqslant \| A' \| \lim_n \left(\Omega,\ A_n\Omega\right) =$$
$$= \| A' \|\ (\Omega,\ TA\Omega) = \| A' \|\ (\Omega,\ A\Omega).$$
Следовательно, по теореме 2.3.19, существует $B' \in \mathfrak{M}'_+$ с $\| B' \| \leqslant \| A' \|$, для которого
$$(T^*A'\Omega,\ A\Omega) = (B'\Omega,\ A\Omega)$$
при всех $A \in \mathfrak{M}_+$. Поэтому $T^*A'\Omega = B'\Omega$ и $T^*\mathfrak{M}'_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}'_+\Omega$. Если провести те же рассуждения, только поменяв ролями $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, то получим искомое включение $T\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}_+\Omega$.

Доказательство теоремы 3.2.18. Теперь можно перейти к доказательству теоремы. Для $A \in \mathfrak{M}_+$ в силу леммы 3.2.19 существует единственный оператор $\alpha(A) \in \mathfrak{M}_+$ со свойством
$$UA\Omega = \alpha(A)\,\Omega,$$
и $\alpha(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Поскольку U^* также отображает $\mathfrak{M}_+\Omega$ в $\mathfrak{M}_+\Omega$, линейное расширение α на $\mathfrak{M}$ является порядковым автоморфизмом и, следовательно, йордановым автоморфизмом (по теореме 3.2.3). Очевидно, что
$$(\Omega,\ A\Omega) = (\Omega,\ UA\Omega) = (\Omega,\ \alpha(A)\,\Omega).$$
Далее, для $S = J\Delta^{1/2}$ имеем
$$USA\Omega = UA^*\Omega = \alpha(A)^*\,\Omega = SUA\Omega.$$
Переходя к замыканиям, получаем
$$UJ\Delta^{1/2} = J\Delta^{1/2}U,$$
а из единственности полярного разложения выводим
$$UJ = JU, \qquad U\Delta^{1/2} = \Delta^{1/2}U.$$
Оператор U ограничен, поэтому он будет коммутировать со всеми ограниченными функциями от $\Delta^{1/2}$, так что
$$\alpha(\sigma_t(A))\,\Omega = U\Delta^{it}A\Omega = \Delta^{it}UA\Omega = \sigma_t(\alpha(A))\,\Omega.$$
Вектор Ω — отделяющий, следовательно, α и σ_t должны коммутировать.

Для доказательства второго утверждения мы сначала воспользуемся теоремой 3.2.15, согласно которой существует унитарный оператор U со свойствами $U\mathscr{P} = \mathscr{P}$ и пр. Условие инвариантности
$$(\Omega,\ A\Omega) = (\Omega,\ \alpha(A)\,\Omega) = (U^*\Omega,\ AU^*\Omega)$$
в сочетании с теоремой 2.5.31 приводит к равенству $U\Omega = \Omega$. Зная действие U, указанное явно в теореме 2.3.15: $U\Delta^{1/4}A\Omega = \Delta^{1/4}\alpha(A)\,\Omega$, и учитывая перестановочность α и σ_t, получаем
$$U\Delta^{it}\Delta^{1/4}A\Omega = \Delta^{1/4}\alpha(\sigma_t(A))\,\Omega = \Delta^{1/4}\sigma_t(\alpha(A))\,\Omega = \Delta^{it}U\Delta^{1/4}A\Omega.$$

Но множество $\Delta^{1/4}\mathfrak{M}\Omega$ плотно, как вытекает из предложений 2.5.26 и 2.5.28. Поэтому U коммутирует с Δ^{it}. Наконец, выбрав в качестве A целый аналитический элемент для модулярной группы σ_t, легко заключить, что $U\Delta^{1/4}A\Omega = \Delta^{1/4}UA\Omega$. Значит, $\Delta^{1/4}UA\Omega = \Delta^{1/4}\alpha(A)\Omega$, а, следовательно, $UA\Omega = \alpha(A)\Omega$. Но множество целых элементов плотно, так что теорема Капланского о плотности (теорема 2.4.16) позволяет сделать вывод о справедливости включения $U\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}_+\Omega$, и аналогичный вывод верен для U^*.

Критерий, указанный в теореме 3.2.18, будет полезен в пункте 3.2.5 для описания групп автоморфизмов прн наличии инвариантных состояний.

Отметим, что без второго условия инвариантности в (*), $\sigma_t \circ \alpha = \alpha \circ \sigma_t$, теорема неверна, так как существуют такие унитарные элементы U, что $U\Omega = \Omega$, $U\mathscr{P} = \mathscr{P}$, но $U\mathfrak{M}_+\Omega \nsubseteq \mathfrak{M}_+\Omega$. Вот простой пример: возьмем $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}'$, $\Omega_{\mathfrak{N}} = \Omega \oplus \Omega$ и $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $U\mathfrak{N}U^* = \mathfrak{N}'$, $U\Omega_{\mathfrak{N}} = \Omega_{\mathfrak{N}}$, и поэтому $U\mathscr{P} = \mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — естественный конус, соответствующий $\{\mathfrak{N}, \Omega_{\mathfrak{N}}\}$. Однако $\overline{U\mathfrak{N}_+\Omega} = \overline{\mathfrak{N}'_+\Omega} = \overline{\Delta^{1/2}\mathfrak{N}_+\Omega}$, а последний конус обычно не совпадает с $\mathfrak{N}_+\Omega$.

В заключение этого пункта укажем, что помимо рассмотренных нами есть и другие интересные положительные отображения. Следствие 3.2.13 показывает, что всякая сильно непрерывная однопараметрическая группа положительных отображений C^*-алгебры, сохраняющих единицу, автоматически оказывается группой *-автоморфизмов. Это уже не так, если вместо групп рассматриваются полугруппы. Существуют сильно непрерывные полугруппы $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ указанного выше типа, которые удовлетворяют обобщенному неравенству Шварца

$$\alpha_t(A^*A) \geqslant \alpha_t(A)^*\alpha_t(A)$$

и которые нельзя расширить до групп *-автоморфизмов. Следующий пример, встречающийся в теории диффузии, иллюстрирует такую возможность.

Пример 3.2.20. Пусть $\mathfrak{A}$ есть C^*-алгебра $C_0(\mathbb{R}) + \mathbb{C}\mathbb{1}$ ограниченных непрерывных комплекснозначных функций на вещественной прямой, снабженная sup-нормой. Введем отображение $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \alpha_t$, полагая

$$(\alpha_t f)(x) = \begin{cases} (2\pi t)^{-1/2} \int dy e^{-(x-y)^2/2t} f(y), & t > 0, \\ f(x), & t = 0. \end{cases}$$

Стандартными рассуждениями устанавливается, что это C_0-полугруппа с инфинитезимальным генератором $-d^2/dt^2$. Поскольку ядро оператора α_t положительно, эта полугруппа сохраняет положительность, а обобщенное неравенство Шварца верно в силу предложения 3.2.4, так как $\mathfrak{A}$ абелева.

3.2.2. Сбщие свойства дифференцирований

В предыдущем пункте мы охарактеризовали однопараметрические группы $*$-автоморфизмов C^*-алгебр и алгебр фон Неймана, указав ряд присущих им свойств сохранения положительности. Далее мы рассмотрим характеристические свойства генераторов таких однопараметрических групп. В разделе 3.1, где изложены результаты, относящиеся к группам операторов в банаховых пространствах, мы видели, что естественным образом возникает разделение групп на разные типы, отличающиеся свойствами непрерывности. Теперь, рассматривая банаховы алгебры, мы можем вдобавок учесть и возможные отличия в алгебраической структуре пространства. Наше обсуждение будет охватывать равномерно, сильно и слабо непрерывные группы, действующие как на C^*-алгебрах, так и на алгебрах фон Неймана. Подчеркнем, однако, что понятие C_0^*-группы, т. е. слабо* непрерывной группы на алгебре $\mathfrak{A}$, определено только тогда, когда $\mathfrak{A}$ сопряжена как банахово пространство своему предсопряженному. В этом случае $\mathfrak{A}$ автоматически будет алгеброй фон Неймана по теореме Сакаи (п. 2.4.3). Кроме того, можно показать (см. пример 3.2.36 для случая $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$), что C_0-группа, т. е. сильно непрерывная группа $*$-автоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$, автоматически обладает свойством равномерной непрерывности. Таким образом, C_0-группы сочетаются с C^*-алгебрами, C_0^*-группы — с алгебрами фон Неймана, а равномерно непрерывные группы — с этими обеими алгебраическими структурами.

В данном пункте мы в основном анализируем свойства инфинитезимальных генераторов групп автоморфизмов. Это свойства двух сортов. Можно получить условия замыкаемости генераторов, можно также развить функциональное исчисление на области определения генератора. Обе группы фактов интересны и применяются в последующей характеризации групп автоморфизмов, а также при изучении устойчивости групп. При исследовании генераторов более всего используется то их свойство, что они являются дифференцированиями, это свойство служит инфинитезимальным выражением свойства

$$\alpha_t(AB) = \alpha_t(A)\,\alpha_t(B)$$

группы автоморфизмов $t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha_t$. Свойства непрерывности группы сказываются на топологических свойствах генератора; бóльшая часть результатов этого пункта относится к генераторам C_0-групп, т. е. к операторам замкнутым и плотно определенным по норме.

Дадим основное определение, на котором основан весь дальнейший анализ.

Определение 3.2.21. (*Симметрическое*) *дифференцирование* C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ — это линейный оператор δ, действующий из некоторой $*$-подалгебры $D(\delta) \subseteq \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, причем для любых A и B из его области определения $D(\delta)$

(1) $\delta(A)^* = \delta(A^*)$,

(2) $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$.

Часто термин «дифференцирование» употребляют для операторов со свойством (2), не обладающих свойством симметричности $\delta(A)^* = \delta(A^*)$. Но нас будут интересовать только симметрические дифференцирования, поэтому мы позволим себе иногда называть их просто дифференцированиями. Очевидно, что несимметрическое дифференцирование с самосопряженной областью определения всегда можно разложить в сумму $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ симметрических, например $\delta_1(A) = (\delta(A) + \delta(A^*)^*)/2$, $\delta_2(A) = (\delta(A) - \delta(A^*)^*)/2i$. Поэтому до известной степени можно ограничиться изучением симметрических дифференцирований. Отметим, что если $\mathbb{1} \in D(\delta)$, то $\delta(\mathbb{1}) = 0$ вследствие соотношения $\delta(\mathbb{1}) = \delta(\mathbb{1}^2) = 2\delta(\mathbb{1})$.

Дифференцирования возникают как инфинитезимальные генераторы непрерывных групп $*$-автоморфизмов, $A \in \mathfrak{A} \longmapsto \tau_t(A) \in \mathfrak{A}$, $t \in \mathbb{R}$. Два указанных выше определяющих свойства проистекают из соотношений

$$\tau_t(A)^* = \tau_t(A^*), \quad \tau_t(AB) = \tau_t(A)\,\tau_t(B),$$

если их продифференцировать (относительно топологии, в которой непрерывна группа τ). Разумеется, генераторы обладают многими дополнительными свойствами, которые диктуются наличием у $\mathfrak{A}$ структуры банахова пространства. Такие свойства, как замкнутость, диссипативность и пр., подробно обсуждались в разделе 3.1. Ближайшей нашей целью будет установление свойства, обеспечивающего диссипативность дифференцирования. Фактически мы рассмотрим более широкий класс операторов, которые можно рассматривать как прототипы генераторов полугрупп, сохраняющих положительность (см. пример 3.2.20 и замечания перед ним).

Предложение 3.2.22. *Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая C^*-алгебра с единицей $\mathbb{1}$, а δ — такой оператор из $*$-подалгебры $D(\delta) \subseteq \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, что*

(1) $1 \in D(\delta)$;

(2) *если* $A \in D(\delta)$ *и* $A \geqslant 0$, *то* $A^{1/2} \in D(\delta)$;

(3) *если* $A \in D(\delta)$, *то* $\delta(A)^* = \delta(A^*)$ *и* $\delta(A^*A) \geqslant \delta(A^*)A + A^*\delta(A)$.

При этих условиях δ диссипативен.

Доказательство. Если $A \in D(\delta)$, то $A^*A \in D(\delta)$. Пусть η — касательный функционал к A^*A; удобно считать его нормированным: $\|\eta\| = 1$. Мы утверждаем, что η положителен; для проверки достаточно показать, что $\eta(\mathbb{1}) = 1$ (см. предложение 2.3.11). Но если $\eta(\mathbb{1}) = \alpha + i\beta$, то с помощью оценки $\|\mathbb{1} - 2A^*A/\|A\|^2\| \leqslant 1$ выводим

$$\alpha^2 + \beta^2 = |\eta(\mathbb{1})|^2 \leqslant 1,$$

$$(\alpha - 2)^2 + \beta^2 = |\eta(\mathbb{1} - 2A^*A/\|A\|^2)|^2 \leqslant 1.$$

Поэтому $\alpha = 1$ и $\beta = 0$.

Далее, введем $\eta_A \in \mathfrak{A}^*$, положив $\eta_A(B) = \eta(A^*B)$ при $B \in \mathfrak{A}$. Из неравенства Коши — Шварца следует, что $\|\eta_A\| \leqslant \|A\|$. Кроме того,

$$\|A\|^2 = \eta(A^*A) = \eta_A(A) \leqslant \|\eta_A\| \, \|A\|,$$

так что η_A — касательный функционал к A. Вследствие положительности η

$$\overline{\eta_A(B)} = \overline{\eta(A^*B)} = \eta(BA^*).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\eta_A(\delta(A)) &= \eta(A^*\delta(A)) + \eta(\delta(A^*)A) \\ &\leqslant \eta(\delta(A^*A)) = -\eta(\delta(B^2)) + \|A\|^2\eta(\delta(\mathbb{1})), \end{aligned}$$

где $B = (\|A\|^2\,\mathbb{1} - A^*A)^{1/2}$. Однако

$$\delta(\mathbb{1}) = \delta(\mathbb{1}^2) \geqslant \delta(\mathbb{1})\,\mathbb{1} + \mathbb{1}\delta(\mathbb{1}) = 2\delta(\mathbb{1})$$

и, следовательно, $\delta(\mathbb{1}) \leqslant 0$. К тому же

$$-\eta(\delta(B^2)) \leqslant -\eta(\delta(B)B) - \eta(B\delta(B)) = 0;$$

последнее равенство вновь получается применением неравенства Коши — Шварца:

$$|\eta(\delta(B)B)|^2 \leqslant \eta(\delta(B)^2)\,\eta(B^2) = \eta(\delta(B)^2)(\|A\|^2\eta(\mathbb{1}) - \eta(A^*A)) = 0.$$

Комбинируя эти оценки, приходим к неравенству $\operatorname{Re}\eta_A(\delta(A)) \leqslant 0$, т. е. δ диссипативен.

Свойство диссипативности уже обсуждалось в пункте 3.1.2 в связи с C_0-полугруппами. Оно представляет интерес, потому что сразу же приводит к целому ряду заключений. Например, диссипативный оператор δ с плотной по норме областью определения замыкаем по норме и удовлетворяет оценке

$$\|(I - \alpha\delta)(A)\| \geqslant \|A\|$$

при всех $A \in D(\delta)$ и $\alpha \geqslant 0$, согласно леммам 3.1.14 и 3.1.15. Единственная проблема с применением предложения 3.2.22. состоит в том, что область определения дифференцирования не обязательно инвариантна относительно операции извлечения квадратного корня. Если дифференцирование δ замкнуто по норме, то с помощью функционального исчисления, которое развито ниже в этом пункте, можно установить, что $D(\delta)$ будет инвариантна при извлечении квадратного корня из положительных обратимых элементов. Тем не менее можно показать, что в случае замкнутости (по норме) δ и инвариантности $D(\delta)$ при извлечении квадратного корня из положительных элементов δ автоматически оказывается ограниченным. Мы не станем приводить доказательство последнего утверждения, а рассмотрим вместо этого аналогичный результат при $D(\delta) = \mathfrak{A}$. В такой ситуации область определения δ заведомо обладает требуемым свойством инвариантности, и мы быстро получим

Следствие 3.2.23. *Пусть δ — всюду определенное дифференцирование, действующее из C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в бóльшую C^*-алгебру $\mathfrak{B}$. Тогда δ ограничено.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ не имеет единицы, то δ можно расширить на $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathfrak{A}$, положив $\delta(\alpha\mathbb{1} + A) = \delta(A)$. Так или иначе, δ будет удовлетворять условиям предложения 3.2.22, и лемма 3.1.14 обеспечит замыкаемость δ по норме, а значит замкнутость δ. По теореме о замкнутом графике всюду определенный замкнутый по норме оператор автоматически ограничен.

Последнее заключение можно усилить в случае алгебры фон Неймана. Если δ — дифференцирование алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ и существует такая ее C^*-подалгебра $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A} = D(\delta)$ и вдобавок $\mathfrak{A}$ слабо плотна в $\mathfrak{M}$, то δ обладает ограниченным расширением на $\mathfrak{M}$. Такой вывод прямо вытекает из следствия 3.2.23 и результатов о расширении, которые содержит

Предложение 3.2.24. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ реализована ограниченными операторами в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть δ — дифференцирование, действующее из алгебры $\mathfrak{A}$ в ее слабое замыкание $\mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{A} = D(\delta)$ и $\delta(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{M}$. При этих предположениях δ имеет единственное σ-слабо замкнутое ограниченное расширение $\tilde{\delta}$ на $\mathfrak{M}$ и $\tilde{\delta}$ есть дифференцирование $\mathfrak{M}$ с $\|\tilde{\delta}\| = \|\delta\|$.*

Доказательство. Сперва заметим, что следствием 3.2.23 гарантируется ограниченность δ. Затем, для всякого положительного $A \in \mathfrak{A}$ и всякого нормального состояния ω на $\mathfrak{M}$ верна оценка

$$|\omega(\delta(A))| = |\omega(\delta(A^{1/2})A^{1/2} + A^{1/2}\delta(A^{1/2}))| \leqslant 2\|\delta\| (\|A\|\omega(A))^{1/2}.$$

Если A — положительный элемент из $\mathfrak{M}$, то по теореме Капланского о плотности найдется такая сеть $A_\alpha \in \mathfrak{A}$, что $A_\alpha \geqslant 0$, $\|A_\alpha\| \leqslant \|A\|$ и $A_\alpha \to A$ σ-слабо, т. е. в $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-топологии. Пользуясь полученной выше оценкой и йордановым разложением (предложение 3.2.7), показываем, что $\delta(A_\alpha)$ сходится σ-слабо. Зададим $\tilde{\delta}(A)$ формулой $\tilde{\delta}(A) = \lim_\alpha \delta(A_\alpha)$. Далее, учтем, что всякий элемент $A \in \mathfrak{M}$ представи́м в виде $A = A_1 - A_2 + i(A_3 - A_4)$ с помощью четырех положительных элементов A_i, у которых $\|A_i\| \leqslant \|A\|$. Значит, по линейности можно расширить δ на всю алгебру $\mathfrak{M}$. Легко проверить, что полученный оператор $\tilde{\delta}$ на $\mathfrak{M}$ будет дифференцированием, а равенство $\|\tilde{\delta}\| = \|\delta\|$ выводится опять-таки с помощью теоремы Капланского о плотности.

У предложения 3.2.22 есть и другие приложения, которые выходят за рамки изучения ограниченных дифференцирований. Многие дифференцирования РГФ-алгебр тоже имеют области определения, инвариантные относительно взятия квадратного корня. Проиллюстрируем это таким примером.

Пример 3.2.25. Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает РГФ-алгебру, определенную согласно примеру 2.6.12, т. е. $\mathfrak{A}$ представляет собой замыкание по норме семейства $\{\mathfrak{A}_\Lambda\}_{\Lambda \in I_f}$ полных матричных подалгебр $\mathfrak{A}_\Lambda$, где I_f обозначает множество всех конечных подмножеств некоторого множества индексов I. Если $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{A}_{\Lambda_1}$ и $\mathfrak{A}_{\Lambda_2}$ коммутируют. Теперь пусть $\{\Lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ — любое возрастающее семейство подмножеств в I_f, удовлетворяющее условию $\bigcup_n \Lambda_n = I$. Выберем элементы $H_n = H_n^* \in \mathfrak{A}_{\Lambda_n}$ так, чтобы $H_n - H_{n-1}$ коммутировали с $\mathfrak{A}_{\Lambda_{n-1}}$. Можно задать симметрическое дифференцирование δ алгебры $\mathfrak{A}$ следующим образом:

$$D(\delta) = \bigcup_{\Lambda \in I_f} \mathfrak{A}_\Lambda, \qquad \delta(A) = i \lim_{n\to\infty} [H_n, A], \quad A \in D(\delta);$$

существование предела обеспечивается коммутационным условием, наложенным на $H_n - H_{n-1}$. Область $D(\delta)$ инвариантна относительно операции взятия квадратного корня, потому что такой инвариантностью обладает каждая алгебра $\mathfrak{A}_\Lambda$.

Интересно отметить, что эта конструкция допускает обращение. Если δ — дифференцирование с

$$D(\delta) = \bigcup_{\Lambda \in I_f} \mathfrak{A}_\Lambda,$$

а e_{ij} — множество матричных единиц для $\mathfrak{A}_\Lambda$, то

$$\delta(A) = i[H_\Lambda, A]$$

при всех $A \in \mathfrak{A}_\Lambda$, где

$$H_\Lambda = \frac{1}{i} \sum_j \delta(e_{j1}) e_{1j}.$$

Теперь мы рассмотрим другие критерии замыкаемости дифференцирований, обладающие более обширной сферой применимости, чем предложение 3.2.22 или лемма 3.1.27.

Предложение 3.2.26. *Пусть δ — плотно по норме определенное дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Для замыкаемости δ по норме достаточно, чтобы существовало такое состояние ω, что*

(1) $|\omega(\delta(A))| \leqslant L\|A\|$ при всех $A \in D(\delta)$ и некоторой константе $L \geqslant 0$;

(2) представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$ алгебры $\mathfrak{A}$, ассоциированное с ω, точно.

Доказательство. Леммой 3.1.9 установлено, что плотно по норме определенный оператор δ в $\mathfrak{A}$ замыкаем по норме ($= \sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$-$\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$-замыкаем) тогда и только тогда, когда сопряженный оператор δ^* в $\mathfrak{A}^*$ слабо* плотно определен. Поэтому мы сосредоточим усилия на доказательстве плотности $D(\delta^*)$.

Сперва отметим, что, по определению, $\omega \in D(\delta^*)$ и

$$(\delta^*\omega)(A) = \omega(\delta(A)).$$

Кроме того, из основного свойства дифференцирований следует, что

$$\omega(A\delta(B)C) = \omega(\delta(ABC)) - \omega(\delta(A)BC) - \omega(AB\delta(C))$$

при всех $A, B, C \in D(\delta)$, так что

$$|\omega(A\delta(B)C)| \leqslant L\|B\|\,\|\omega\|\,(\|A\|\,\|C\| + \|\delta(A)\|\,\|C\| + \|A\|\,\|\delta(C)\|).$$

Введем функционал $\omega_{A,C}$ как единственное продолжение по непрерывности на $\mathfrak{A}$ функционала на $D(\delta)$

$$B \in D(\delta) \longmapsto \omega(A\delta(B)C) \equiv \omega_{A,C}(B).$$

Ясно, что он также входит в область определения δ^*. Значит, $D(\delta^*)$ содержит подпространство в $\mathfrak{A}^*$, натянутое на множество $\{\omega_{A,C};\ A,\ C \in D(\delta)\}$. Однако это множество $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$-плотно, так как в противном случае по теореме Хана — Банаха нашелся бы ненулевой элемент $B \in \mathfrak{A}$, такой что $\omega_{A,C}(B) = 0$ при всех A, $C \in D(\delta)$. Свойства представлений алгебры в сочетании с плотностью $D(\delta)$ позволят тогда заключить, что $\pi_\omega(B) = 0$, в противоречие с точностью $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$. Тем самым $D(\delta^*)$ обладает требуемой $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$-плотностью, и δ замыкаемо по норме.

Отметим, что в доказательстве предложения 3.2.26 использованы соображения, основанные на эксплуатации двойственности $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$, и область их применения не ограничивается топологией нормы. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, то можно применить в точности те же самые рассуждения и получить для слабой* топологии следующий результат.

Следствие 3.2.27. *Пусть δ — дифференцирование алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ с $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-плотной областью определения. Для $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-$\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-замыкаемости δ достаточно, чтобы нашлось такое состояние $\omega \in \mathfrak{M}_*$, что*

(1) $|\omega(\delta(A))| \leqslant L\|A\|$ *при всех $A \in D(\delta)$ и некотором $L \geqslant 0$,*

(2) *представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$ алгебры $\mathfrak{M}$, ассоциированное с ω, точно.*

Если свойство непрерывности по норме

$$|\omega(\delta(A))| \leqslant L\|A\|,$$

гарантирующее замыкаемость дифференцирования, заменить более сильным условием непрерывности, то можно вывести более подробное описание действия δ на представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$.

Предложение 3.2.28. *Пусть δ — симметрическое дифференцирование, определенное на $*$-подалгебре $\mathfrak{D}$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть $\Omega \in \mathfrak{H}$ — единичный вектор, циклический для $\mathfrak{D}$, и ω — соответствующее ему состояние, т. е.*

$$\omega(A) = (\Omega, A\Omega), \quad A \in \mathfrak{D}.$$

Следующие условия эквивалентны:

(1) *при всех $A \in \mathfrak{D}$ и некотором $L \geqslant 0$*

$$|\omega(\delta(A))| \leqslant L(\omega(A^*A) + \omega(AA^*))^{1/2},$$

(2) *существует симметрический оператор H в $\mathfrak{H}$, для которого*

$$D(H) = \mathfrak{D}\Omega, \quad \delta(A)\psi = i[H, A]\psi$$

при всех $A \in \mathfrak{D}$ и $\psi \in D(H)$.

Если $\mathfrak{D}$ содержит единицу $\mathbb{1}$ и выполнены предыдущие условия, то можно выбрать H так, чтобы

$$\| H\Omega \|^2 \leqslant \frac{L^2}{2}.$$

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). В силу неравенства Коши—Шварца, при $A \in \mathfrak{D}$ имеем

$$| \omega (\delta (A)) | = | (H\Omega,\ A\Omega) - (A^*\Omega,\ H\Omega) | \leqslant \| H\Omega \| (\| A\Omega \| + \| A^*\Omega \|),$$

откуда

$$| \omega (\delta (A)) |^2 \leqslant \| H\Omega \|^2 \left(\sqrt{\omega (A^*A)} + \sqrt{\omega (AA^*)}\right)^2$$
$$\leqslant 2 \| H\Omega \|^2 (\omega (A^*A) + \omega (AA^*)).$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{H} \oplus \overline{\mathfrak{H}}$, где $\overline{\mathfrak{H}}$ обозначает пространство, сопряженное к $\mathfrak{H}$ (см. подстрочное примечание на стр. 78). Пусть $\widehat{\mathfrak{H}}_+$ обозначает подпространство в $\mathfrak{H}_+$, порожденное векторами вида $\{A\Omega,\ A^*\Omega\}$, где $A \in \mathfrak{D}$. Зададим на $\widehat{\mathfrak{H}}_+$ линейный функционал η формулой

$$\eta (\{A\Omega,\ A^*\Omega\}) = i\omega (\delta (A)).$$

Для него, по предположению,

$$| \eta (\{A\Omega,\ A^*\Omega\}) | \leqslant L \| \{A\Omega,\ A^*\Omega\} \|.$$

Тем самым η определен корректно и $\| \eta \| \leqslant L$. Согласно теореме Рисса, найдется такой вектор $\{\varphi,\ \psi\}$ в замыкании $\widehat{\mathfrak{H}}_+$, что

$$i\omega (\delta (A)) = \eta (\{A\Omega,\ A^*\Omega\}) = (\{\varphi,\ \psi\},\ \{A\Omega,\ A^*\Omega\}) =$$
$$= (\varphi,\ A\Omega) + (A^*\Omega,\ \psi).$$

Далее, воспользовавшись симметричностью, находим, что

$$i\omega (\delta (A)) = \eta (\{A\Omega,\ A^*\Omega\}) = (\{\varphi,\ \psi\},\ \{A\Omega,\ A^*\Omega\}) = (\varphi,\ A\Omega) + (A^*\Omega,\ \psi).$$

Взяв полусумму этих двух выражений, получим

$$i^{-1}\omega (\delta (A)) = (\Omega_\delta,\ A\Omega) - (A^*\Omega,\ \Omega_\delta),\ \text{где}\ \Omega_\delta = \frac{\psi - \varphi}{2}.$$

Следующим нашим шагом будет определение оператора H на $D(H) = \mathfrak{D}\Omega$:

$$HA\Omega = i^{-1}\delta (A)\, \Omega + A\Omega_\delta,\quad A \in \mathfrak{D}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$(HA\Omega,\ B\Omega) - (A\Omega,\ HB\Omega) = i^{-1}\omega (\delta (A^*)\, B) - i^{-1}\omega (A^*\delta (B)) +$$
$$+ (\Omega_\delta,\ A^*B\Omega) - (\Omega,\ A^*B\Omega_\delta) = -i^{-1}\, \omega (\delta (A^*B)) + i^{-1}\omega (\delta (A^*B)) = 0.$$

Поскольку множество $\mathfrak{D}\Omega$ плотно в $\mathfrak{H}$, мы убеждаемся в корректности определения H ($A\Omega = 0$ влечет $HA\Omega = 0$), а также в симметричности H. Для произвольных $A,\ B \in \mathfrak{D}$ имеем

$$\delta (A)\, B\Omega = \delta (AB)\, \Omega - A\delta (B)\, \Omega$$
$$= iHAB\Omega - AB\Omega_\delta - AiHB\Omega + AB\Omega_\delta = i\, [H,\ A]\, B\Omega.$$

Наконец, оценка для $\| H\Omega \|$ следует из условия $\delta (\mathbb{1}) = 0$ и выкладки

$$\| H\Omega \|^2 = \| \Omega_\delta \|^2 \leqslant \frac{\| \varphi - \psi \|^2 + \| \varphi + \psi \|^2}{4} = \frac{\| \varphi \|^2 + \| \psi \|^2}{2} = \frac{\| \eta \|^2}{2} \leqslant \frac{L^2}{2}.$$

Предложение 3.2.28 особенно полезно при рассмотрении инвариантных состояний. Если $t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha_t$ — однопараметрическая группа $*$-автоморфизмов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, а ω — состояние, то инвариантность ω означает, что при всех $t \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathfrak{A}$

$$\omega(\alpha_t(A)) = \omega(A).$$

Если группа α сильно непрерывна и имеет генератор δ, то это условие инвариантности равносильно условию в инфинитезимальной форме

$$\omega(\delta(A)) = 0$$

при всех $A \in D(\delta)$. Таким образом, можно применить предложение к δ, действующему на циклическое представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, ассоциированное с ω. Отметим, что в этом случае группа автоморфизмов α выполнима посредством однопараметрической унитарной группы U в $\mathfrak{H}_\omega$:

$$\pi_\omega(\alpha_t(A)) = U_t \pi_\omega(A) U_t^*.$$

Это вытекает из следствия 2.3.17. То же самое следствие позволяет так выбрать U, чтобы $U_t \Omega_\omega = \Omega_\omega$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда простая оценка

$$\| U_t \pi_\omega(A) \Omega_\omega - \pi_\omega(A) \Omega_\omega \| \leqslant \| \alpha_t(A) - A \|$$

показывает, что $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ обладает свойством сильной непрерывности. Если H — самосопряженный генератор группы U, то $\pi_\omega(D(\delta)) \Omega_\omega \subseteq D(H)$ и

$$\pi_\omega(\delta(A)) \psi = i [H, \pi_\omega(A)] \psi$$

при всех $\psi \in \pi_\omega(D(\delta)) \Omega_\omega$. Тем самым симметрический оператор H, упомянутый в условии (2) предложения 3.2.28, можно выбрать самосопряженным. Однако в общем случае для произвольного δ этого нельзя добиться.

По аналогии с предыдущим примером, когда дифференцирование δ было генератором, будем говорить, что состояние ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ инвариантно относительно дифференцирования δ этой алгебры, если выполняется *инфинитезимальное условие* $\omega(\delta(A)) = 0$ при $A \in D(\delta)$.

После знакомства с критериями замыкаемости мы изучим различные свойства областей определения замкнутых дифференцирований. Свойства, о которых пойдет речь, имеют чисто алгебраическую природу. Они часто будут применяться в дальнейшем. Для приобретения некоторых навыков начнем со случая абелевой алгебры.

Если δ — замкнутое по норме дифференцирование абелевой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $A = A^* \in D(\delta)$, области определения δ, то легко проверить, что для любого многочлена P также и $P(A) \in D(\delta)$ и

$$\delta(P(A)) = \delta(A) P'(A).$$

Здесь штрих обозначает производную. Теперь возьмем функцию f с непрерывной первой производной. Как известно, можно выбрать такую последовательность многочленов P_n, что $P_n \to f$ и $P_n' \to f'$ равномерно на спектре A. Тем самым из предыдущей формулы получаем $\delta(P_n(A)) = \delta(A) P_n'(A)$, причем эта последовательность сходится к $\delta(A) f'(A)$. Значит, $f(A) \in D(\delta)$, так как δ замкнуто, и

$$\delta(f(A)) = \delta(A) f'(A).$$

Теперь мы хотим выявить аналоги этих свойств для дифференцирований произвольных C^*-алгебр, а также получить достаточные условия на функцию f, при которых $f(A) \in D(\delta)$, если $A = A^* \in D(\delta)$. Существуют два подхода к построению функционального исчисления такого рода — фурье-анализ и комплексный анализ, и в обоих случаях полезную роль играет

Предложение 3.2.29. *Пусть δ — замкнутое по норме дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей $\mathbb{1}$. Если $A = A^* \in D(\delta)$ и $\lambda \notin \sigma(A)$, спектру A, то $A(\lambda 1 - A)^{-1} \in D(\delta)$ и*

$$\delta(A(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1} = \lambda(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}\delta(A).(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}.$$

Если еще предположить, что $\mathbb{1} \in D(\delta)$, то $(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1} \in D(\delta)$ и

$$\delta((\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}) = (\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}\delta(A)(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}.$$

Доказательство. Обозначим $A_\lambda = A(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$. Если $|\lambda|$ больше спектрального радиуса A, то ряд Неймана

$$A_\lambda = \sum_{n \geqslant 0} (A/\lambda)^{n+1}$$

сходится по норме и $\|A_\lambda\| \leqslant \|A\|(|\lambda| - \|A\|)^{-1}$. Но $A^{n+1} \in D(\delta)$,

$$\delta(A^{n+1}) = \sum_{p=0}^{n} A^p \delta(A) A^{n-p},$$

и двойной ряд

$$\lambda^{-1} \sum_{n \geqslant 0} \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^p \delta(A) \left(\frac{A}{\lambda}\right)^{n-p}$$

также сходится по норме. Значит, $A_\lambda \in D(\delta)$, так как δ замкнуто по норме. Кроме того,

$$\delta(A_\lambda) = \lambda^{-1} \sum_{p \geqslant 0} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^p \delta(A) \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = \lambda(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}\delta(A)(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}.$$

Далее, предположим, что $|\lambda_0| \geqslant \|A\|$, $A_{\lambda_0} \in D(\delta)$ и

$$\left|\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}\right| < \|A_{\lambda_0}\|^{-1} = \inf_{\gamma \in \sigma(A)} |\gamma(\lambda_0-\gamma)^{-1}|^{-1}.$$

Тогда

$$A_\lambda = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0-\lambda}\right) \sum_{n\geqslant 0} \left(\left(\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda}\right) A_{\lambda_0}\right)^{n+1}.$$

В силу тех же соображений, $A_\lambda \in D(\delta)$, и аналогичные вычисления дают нам действие δ на A_λ:

$$\begin{aligned}\delta(A_\lambda) &= \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) \sum_{p\geqslant 0} \left(\left(\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda}\right) A_{\lambda_0}\right)^p \delta(A_{\lambda_0}) \sum_{n\geqslant 0} \left(\left(\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda}\right) A_{\lambda_0}\right)^n \\ &= \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)(\lambda_0 1 - A)(\lambda 1 - A)^{-1}\delta(A_{\lambda_0})\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)(\lambda_0 1 - A)(\lambda 1 - A)^{-1} \\ &= \lambda(\lambda 1 - A)^{-1}\delta(A)(\lambda 1 - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись стандартным приемом аналитического продолжения по λ, заключаем, что $A(\lambda 1 - A)^{-1} \in D(\delta)$ при всех $\lambda \notin \sigma(A)$.

Второе утверждение доказывается по аналогии, но проще.

У приведенного предложения есть непосредственное следствие, относящееся к единичному элементу.

Следствие 3.2.30. *Пусть δ — замкнутое по норме дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей 1. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует положительный обратимый элемент $A \in D(\delta)$;*
(2) $1 \in D(\delta)$.

В частности, если δ определено плотно по норме, то $1 \in D(\delta)$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Берем $A = 1$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Из предложения 3.2.29 следует, что $A(\varepsilon 1 + A)^{-1} \in D(\delta)$ при всех $\varepsilon > 0$ и

$$\delta(A(\varepsilon 1 + A)^{-1} = -\varepsilon(\varepsilon 1 + A)^{-1}\delta(A)(\varepsilon 1 + A)^{-1}.$$

Далее, сеть $A(\varepsilon 1 + A)^{-1}$ сходится по норме к 1, но

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|\delta(A(\varepsilon 1 + A)^{-1}\| \leqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \varepsilon \|A^{-1}\|^2 \|\delta(A)\| = 0.$$

Тем самым $1 \in D(\delta)$, так как δ замкнуто, и $\delta(1) = 0$. Если $D(\delta)$, область определения δ, плотна по норме, можно выбрать $B \in D(\delta)$ так, чтобы $B = B^*$ и $\|1 - B\| < 1$. Легко проверить, что такой элемент B положителен и обратим.

Следствие 3.2.30 упрощает исследование замкнутых и плотно по норме определенных дифференцирований δ, потому что оно позволяет без ограничения общности считать, что в $\mathfrak{A}$ существует единица 1 и $1 \in D(\delta)$. Ведь в случае C^*-алгебры без единицы всегда можно расширить δ до замкнутого по норме дифференцирования $\tilde{\delta}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C}1 + \mathfrak{A}$, полагая $D(\tilde{\delta}) = \mathbb{C}1 + D(\delta)$ и

$$\tilde{\delta}(\lambda 1 + A) = \delta(A), \quad A \in D(\delta),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

Тем самым как при наличии единицы ($\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$), так и при ее отсутствии ($\mathbb{1} \notin \mathfrak{A}$) мы можем свести дело к ситуации с $\mathbb{1} \in D(\delta) \subseteq \mathfrak{A}$.

Теперь рассмотрим поподробнее свойства областей определения. Постоянный объект нашего изучения — замкнутые по норме дифференцирования C^*-алгебр, но, разумеется, сюда подпадают автоматически и слабо* замкнутые дифференцирования алгебр фон Неймана. Как мы упомянули, возможны два разных подхода. Во-первых, по $A = A^* \in D(\delta)$ и функции $z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$, аналитической в некотором открытом односвязном множестве $\sum_f$, содержащем $\sigma(A)$, можно определить $f(A)$ с помощью интегрального представления Коши

$$f(A) = (2\pi i)^{-1} \int_C d\lambda f(\lambda)(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1},$$

где C — простая спрямляемая кривая, которая лежит в $\sum_f$ и внутри которой содержится $\sigma(A)$. Интеграл понимается как предел в смысле сходимости по норме римановых сумм

$$\sum\nolimits_N (f) = (2\pi i)^{-1} \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) f(\lambda_i)(\lambda_i\mathbb{1} - A)^{-1}.$$

Согласно предложению 3.2.29, $A \sum_N (f) \in D(\delta)$ и

$$\delta\left(A \sum\nolimits_N (f)\right) = (2\pi i)^{-1} \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) f(\lambda_i)\lambda_i(\lambda_i\mathbb{1} - A)^{-1}\delta(A)(\lambda_i\mathbb{1} - A)^{-1}.$$

Но указанные здесь суммы сходятся по норме, так что $Af(A) \in D(\delta)$ и

$$\delta(Af(A)) = (2\pi i)^{-1} \int_C d\lambda f(\lambda)\lambda(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}\delta(A)(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}.$$

Аналогично в случае $\mathbb{1} \in D(\delta)$ заключаем, что $f(A) \in D(\delta)$ и

$$\delta(f(A)) = (2\pi i)^{-1} \int_C d\lambda f(\lambda)(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}\delta(A)(\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}.$$

В частности, такого рода рассуждения показывают, что для положительного и обратимого $A \in D(\delta)$ также $A^{1/2} \in D(\delta)$.

Второй подход, основанный на методе преобразования Фурье, более эффективен. Центральное место в нем занимает следующая

Лемма 3.2.31. *Пусть δ — замкнутое по норме дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей, причем предполагается, что*

$\mathbb{1} \in D(\delta)$. Если $A = A^* \in D(\delta)$ и $U_z = \exp\{zA\}$ при $z \in \mathbb{C}$, то $U_z \in D(\delta)$ и

$$\delta(U_z) = z\int_0^1 dtU_{tz}\delta(A)\,U_{(1-t)\,z}.$$

Доказательство. Сперва заметим, что экспоненциальную функцию можно определить с помощью разложения в степенной ряд, откуда вытекает, что подынтегральное выражение $U_{tz}\delta(A)\,U_{(1-t)\,z}$ будет непрерывным по норме. Следовательно, можно понимать рассматриваемый здесь интеграл как риманов. Далее, полезным является и другое возможное определение U_z:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|U_z - \left(\mathbb{1} - \frac{zA}{n}\right)^{-n}\right\| = 0,$$

в справедливости которого можно убедиться, манипулируя сходящимися по норме степенными рядами.

Выберем теперь $n > |z|\,\|A\|$ и заметим, что $(\mathbb{1} - zA/n)^{-1} \in D(\delta)$, в силу предложения 3.2.29. Кроме того,

$$\delta\left(\left(\mathbb{1} - \frac{zA}{n}\right)^{-n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1}\left(\mathbb{1} - \frac{zA}{n}\right)^{-m}\delta\left(\left(\mathbb{1} - \frac{zA}{n}\right)^{-1}\right)\left(\mathbb{1} - \frac{zA}{n}\right)^{-n+m+1}$$

$$= \left(\frac{z}{n}\right)\sum_{m=0}^{n-1}\left(\mathbb{1} - \frac{zA}{n}\right)^{-m-1}\delta(A)\left(\mathbb{1} - \frac{zA}{n}\right)^{-n+m}.$$

Второе равенство получено вторичным применением предложения 3.2.29. С помощью обычных оценок для римановых интегралов убеждаемся, что правая часть последнего выражения сходится по норме к интегралу

$$z\int_0^1 dt\,U_{tz}\delta(A)\,U_{(1-t)\,z}.$$

Остается сослаться на замкнутость δ по норме.

Отметим, что, отказавшись от условия леммы $\mathbb{1} \in D(\delta)$, можно все же получить такой более слабый результат: $AU_z \in D(\delta)$. Это замечание относится и к следующей теореме, в которой развит фурье-анализ для $D(\delta)$.

Теорема 3.2.32. *Пусть δ — замкнутое по норме дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей $\mathbb{1}$, и пусть $\mathbb{1} \in D(\delta)$. Далее, пусть f — функция одной вещественной переменной, имеющая фурье-образ $\hat{f}$, для которого*

$$|\hat{f}| = (2\pi)^{-1/2}\int dp\,|\hat{f}(p)|\,|p| < \infty.$$

При таких предположениях, если $A = A^* \in D(\delta)$, то и $f(A) \in \in D(\delta)$, причем

$$f(A) = (2\pi)^{-1/2} \int dp\, \hat{f}(p)\, e^{ipA},$$

$$\delta(f(A)) = i(2\pi)^{-1/2} \int dp\, \hat{f}(p)\, p \int_0^1 dt e^{itpA}\, \delta(A)\, e^{i(1-t)pA}.$$

Следовательно, верна оценка

$$\|\delta(f(A))\| \leqslant |\hat{f}|\, \|\delta(A)\|.$$

Доказательство. Сначала будем считать, что f непрерывна. Аппроксимируем $f(A)$ суммами Римана

$$\sum\nolimits_N (f) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} (p_i - p_{i-1})\, \hat{f}(p_i)\, e^{ip_iA},$$

о которых нам известно, что $\Sigma_N(f) \in D(\delta)$, а также

$$\delta\left(\sum\nolimits_N (f)\right) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} (p_i - p_{i-1})\, \hat{f}(p_i)\, ip_i \int_0^1 dt e^{itp_iA}\, \delta(A)\, e^{i(1-t)p_iA}$$

(по лемме 3.2.31). Сходимость таких сумм в сочетании с замкнутостью δ по норме приводит к желаемому свойству $D(\delta)$ и выражению для действия δ. Оценка $\|\delta(f(A))\| \leqslant |\hat{f}|\, \|\delta(A)\|$ очевидна. В общем случае используем эту оценку и соображения непрерывности.

Этот результат почти полностью воспроизводит результат для абелевых C^*-алгебр, полученный в начале пункта. Дело в том, что класс функций на спектре $\sigma(A)$ элемента A, обладающих расширениями f на всё $\mathbb{R}$, такими что $|\hat{f}| < \infty$, почти не отличается от множества непрерывно дифференцируемых функций. На самом деле этот класс содержит функции, дважды непрерывно дифференцируемые.

Следствие 3.2.33. *Пусть δ — замкнутое по норме дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей $\mathbb{1}$ и $\mathbb{1} \in D(\delta)$. Для любого элемента $A = A^* \in D(\delta)$ и любой финитной (т. е. имеющей компактный носитель) дважды непрерывно дифференцируемой функции f одной вещественной переменной $f(A) \in D(\delta)$ и*

$$\|\delta(f(A))\| \leqslant \|\delta(A)\| \left(\frac{\pi}{2} \int dx \left| \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{df(x)}{dx} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. По теореме 3.2.32, $f(A) \in D(\delta)$ и

$$\begin{aligned}\|\delta(f(A))\| &\leqslant \|\delta(A)\|\, (2\pi)^{-1/2} \int dp\, |p|\, |\hat{f}(p)| \\ &\leqslant \|\delta(A)\|\, (2\pi)^{-1/2} \int dp\, |p+i|^{-1}\, |p^2 + ip|\, |\hat{f}(p)| \\ &\leqslant \|\delta(A)\| \left(\frac{\pi}{2} \int dp\, |(p^2 + ip)\, \hat{f}(p)|^2\right)^{1/2};\end{aligned}$$

на последнем шаге использовано неравенство Коши—Шварца. Применив неравенство Парсеваля для квадратично-интегрируемых функций, получим

$$\|\delta(f(A))\| \leqslant \|\delta(A)\| \left(\frac{\pi}{2}\int dx \left|\frac{d^2f(x)}{dx^2} - \frac{df(x)}{dx}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Хотя функциями, указанными в теореме 3.2.32, почти исчерпываются все непрерывно дифференцируемые на $\sigma(A)$ функции, но полного совпадения нет. Удивительнее другое: оказывается, что результат теоремы нельзя распространить на все функции, один раз непрерывно дифференцируемые. Можно построить замкнутое по норме и плотно по норме определенное дифференцирование δ для C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, у которого в $D(\delta)$ есть такой элемент $A = A^*$, что для некоторой однократно непрерывно дифференцируемой функции f, заданной на интервале, содержащем $\sigma(A)$, мы имеем $f(A) \notin D(\delta)$. Сконструировать этот пример весьма сложно. Для нас важно, что он вскрывает серьезные отличия в структуре дифференцирований произвольных C^*-алгебр и абелевых C^*-алгебр.

В заключение этого пункта применим полученные результаты для изучения дифференцирований и групп автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Имеются две подходящие для этой цели техники теории возмущений, обе вполне общей природы.

Во-первых, рассмотрим C_0-группу или C_0^*-группу α_t, состоящую из *-автоморфизмов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, с генератором δ. Если δ_P — ограниченное дифференцирование $\mathfrak{A}$, то $\delta + \delta_P$ будет генератором некоторой C_0- или C_0^*-группы α_t^P сохраняющих инволюцию отображений банахова пространства $\mathfrak{A}$ в себя (по теореме 3.1.33). Но все α_t^P будут *-автоморфизмами. Действительно, для $A, B \in D(\delta)$ с помощью свойств дифференцирований получаем

$$\frac{d}{dt}\alpha_{-t}^P\left(\alpha_t^P(A)\,\alpha_t^P(B)\right) = 0.$$

Значит, $\alpha_t^P(AB) = \alpha_t^P(A)\,\alpha_t^P(B)$.

Во-вторых, если δ — дифференцирование C^*-алгебры и $E \in D(\delta)$ — проектор, то можно ввести ограниченное дифференцирование δ_E:

$$\delta_E(A) = i\,[H_E, A], \quad H_E = i\delta(E)\,E - iE\delta(E)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим теперь сумму $\delta^E = \delta + \delta_E$ на $D(\delta)$. Для нее

$$\begin{aligned}\delta^E(E) &= \delta(E) + 2E\delta(E)\,E - \delta(E)\,E - E\delta(E)\\ &= \delta(E - E^2) + 2E\delta(E)\,E = 0;\end{aligned}$$

мы учли, что $E^2 - E = 0$, а потому $E\delta(E^2 - E)E = E\delta(E)E = 0$. Тем самым, если δ — генератор группы $*$-автоморфизмов α_t, то δ^E будет генератором возмущенной группы α_t^E, для которой $\alpha_t^E(E) = E$.

Теперь обратимся к алгебре $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Пример 3.2.34. Пусть δ — замкнутое по норме симметрическое дифференцирование алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Предположим, что его область определения $D(\delta)$ плотна в слабой (сильной) операторной топологии на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и $D(\delta) \cap \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H}) \neq \{0\}$. Сначала мы покажем, что $D(\delta)$ содержит проектор ранга 1. Для этого выберем какой-нибудь ненулевой оператор $B \in D(\delta) \cap \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ и по нему введем $C = B^*B$. Если у C есть собственное значение c и если E_c — соответствующий проектор конечного ранга, то

$$E_c = (2\pi c i)^{-1} \int d\lambda C(\lambda 1 - C)^{-1},$$

где интеграл берется по замкнутой кривой, охватывающей изолированную точку c спектра оператора C. Согласно предложению 3.2.29 и последующему обсуждению, $E_c \in D(\delta)$. Пусть, далее, P — такой проектор ранга 1, что $E_cPE_c = P$; выберем $A_n \in D(\delta)$ так, чтобы $A_n = A_n^*$ и $A_n \to P$ сильно. Тогда $\|E_cA_nE_c - E_cPE_c\| \to 0$, поэтому и $\|E_cA_nE_c - P\| \to 0$. Следовательно, при достаточно больших n оператор $E_cA_nE_c \in D(\delta)$ имеет простое собственное значение в окрестности 1. Если ему соответствует спектральный проектор E, то $E \in D(\delta)$; это вновь проверяется с помощью контурного интеграла. Пусть Ω — единичный вектор из области значений E. Рассмотрим векторное состояние $\omega = \omega_\Omega$. Для него

$$|\omega(\delta(A))| = |\omega(E\delta(A)E)| = |\omega(\delta(EAE)) - \omega(\delta(E)AE) -$$
$$- \omega(EA\delta(E))| \leqslant |\omega(\delta(\omega(A)E))| + |\omega(\delta(E)A)| + |\omega(A\delta(E))|$$
$$\leqslant 3\|\delta(E)\|\{\omega(A^*A) + \omega(AA^*)\}^{1/2}.$$

Поэтому из предложения 3.2.28 следует, что на $D(H) = D(\delta)\Omega$ определен такой симметрический оператор H, что

$$\delta(A) = i[H, A]$$

при всех $A \in D(\delta)$. В частности, всякое слабо* (по норме) плотно определенное и слабо* (по норме) замкнутое дифференцирование алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ с $D(\delta) \cap \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H}) \neq \{0\}$ имеет такой вид. В следующем примере мы увидим, что этот класс дифференцирований включает в себя все генераторы слабо* непрерывных однопараметрических групп автоморфизмов.

Несколько видоизменив проведенные рассуждения, можно показать, что если δ — дифференцирование $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ и $D(\delta)$ содержит оператор конечного ранга, то δ допускает замыкание по норме и его можно расширить до σ-слабо замкнутого дифференцирования $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Для доказательства сначала, используя то, что $D(\delta)$ — плотная $*$-подалгебра в $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$, находим в $D(\delta)$ одномерный проектор E. Затем применяем полученную выше оценку для $\omega(\delta(A))$ в сочетании со следствием 3.2.27. Аналогичным образом доказывается, что всякое дифференцирование алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, содержащее проектор конечного ранга в своей области определения, обладает σ-слабым замыканием.

Обсудив свойства дифференцирований алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, мы можем теперь завершить характеризацию однопараметрических групп $*$-автоморфизмов, начатую в примере 3.2.14. В этом примере было показано, что всякая группа такого типа представима с помощью семейства унитарных операторов U_t в $\mathfrak{H}$ в виде

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^*.$$

Однако осталось еще проверить, что непрерывность $\{\alpha_t\}$ позволяет выбрать операторы U_t так, чтобы они образовывали непрерывную однопараметрическую группу.

Пример 3.2.35. Пусть $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — слабо* непрерывная однопараметрическая группа *-автоморфизмов $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, и пусть δ обозначает слабый* генератор α. В таком случае δ слабо* замкнут, а потому замкнут по норме, а его область определения $D(\delta)$ плотна в слабой операторной топологии на $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Согласно примеру 3.2.14, при всех t имеем $\alpha_t(\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})) = \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$, и сужение отображения $t \longmapsto \alpha_t$ на $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ слабо непрерывно, по предложению 2.6.13. Следовательно, $D(\delta) \cap \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ плотно по норме в $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$. Тем самым приведенные в примере 3.2.34 рассуждения позволяют считать, что $D(\delta)$ содержит некоторый одномерный проектор E. Как было указано перед примером 3.2.34, соответствующее дифференцирование $\delta^E = \delta + \delta_E$ оказывается генератором возмущенной группы *-автоморфизмов α_t^E. К тому же $\alpha_t^E(E) = E$. Возьмем единичный вектор Ω из области значений E и введем на $\mathfrak{H}$ операторы U_t^E, положив

$$U_t^E A\Omega = \alpha_t^E(A)\,\Omega.$$

Легко проверить, что тем самым будет определена унитарная группа. Например, $\left(U_t^E A\Omega,\ U_s^E B\Omega\right) = \omega_\Omega\left(\alpha_t^E\left(A^*\alpha_{s-t}^E(B)\right)\right) = \left(A\Omega,\ \alpha_{s-t}^E(B)\,\Omega\right) = \left(A\Omega,\ U_{s-t}^E B\Omega\right)$; здесь мы воспользовались инвариантностью ω_Ω относительно действия α_t^E, которая вытекает из условия $\alpha_t^E(E) = E$. Группа U_t^E сильно непрерывна, так как

$$\left\|\left(U_t^E - I\right)A\Omega\right\|^2 = 2\omega_\Omega(A^*A) - \omega_\Omega\left(A^*\alpha_t^E(A)\right) - \omega_\Omega\left(\alpha_t^E(A^*)\,A\right).$$

Пусть H^E обозначает самосопряженный генератор U_t^E; с помощью H_E, определенного перед примером 3.2.34, введем $H = H^E - H_E$. Оператор H самосопряжен, и если $U_t = e^{itH}$, то $\alpha_t(A) = U_t A U_t^*$. В этом можно убедиться, например, проверив, что генератором $t \longmapsto U_t A U_t^*$ является $\delta^E - \delta_E = \delta$.

Таким образом, мы установили, что каждая C_0^*-группа *-автоморфизмов α_t алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ имеет представление $\alpha_t(A) = U_t A U_t^*$, где U_t — сильно непрерывная группа унитарных операторов в $\mathfrak{H}$.

Обратимся теперь вновь к обсуждению вигнеровых симметрий, которыми может обладать $\mathfrak{H}$. Пусть $\hat{\psi}$ обозначает луч в $\mathfrak{H}$, а $\hat{\psi} \longmapsto \hat{\alpha}_t(\hat{\psi})$ — однопараметрическая группа вигнеровых симметрий. Из примера 3.2.14 и его обсуждения следует, что $\hat{\alpha}_t$ индуцирует однопараметрическую группу *-автоморфизмов или антилинейных *-автоморфизмов α_t алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и эти автоморфизмы выполнимы с помощью унитарных или антиунитарных операторов U_t, определенных с точностью до фазового множителя:

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^*.$$

Если еще известно, что группа симметрий $\hat{\alpha}_t$ непрерывна в том смысле, что

$$p(\hat{\psi} - \hat{\alpha}_t(\hat{\psi}),\ \hat{\psi} - \hat{\alpha}_t(\hat{\psi})) = \operatorname{Tr}((E_\psi - \alpha_t(E_\psi))^2) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

где E_ψ — проектор, области значений которого принадлежит ψ, то, как легко проверить, группа α_t слабо* непрерывна. Тем самым, согласно следствию 3.2.13, каждый автоморфизм α_t является *-автоморфизмом, и пример 3.2.35 показывает, что фазы для U_t можно выбрать так, чтобы семейство $\{U_t\}$ было сильно непрерывным и удовлетворяло групповому закону

$$U_s U_t = U_{s+t}.$$

Таким образом, непрерывные однопараметрические группы вигнеровых симметрий осуществляются сильно непрерывными однопараметрическими группами унитарных операторов.

Теперь мы завершим обсуждение C_0-групп *-автоморфизмов алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$.

Пример 3.2.36. Пусть $\alpha_t(A) = U_t A U_t^*$ — однопараметрическая группа *-автоморфизмов $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, которая сильно непрерывна, т. е.

$$\lim_{t\to 0} \|\alpha_t(A) - A\| = 0, \quad A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}).$$

Далее, пусть H обозначает инфинитезимальный генератор группы U_t и E_H — его спектральное семейство. Предположим, что спектр H неограничен. Если $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, то нетрудно убедиться, что можно выбрать $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ и a так, чтобы интервалы $I_n = [a_n, a_n + a]$ не пересекались, множества $E_H(I_n)\mathfrak{H}$ были непусты и при всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\sup_n |e^{i(a_n - a_{n+1})t} - 1| \geqslant 2 - \delta, \quad |e^{ita} - 1| < \frac{1}{2}.$$

Выберем единичные векторы $\psi_n \in E_H(I_n)\mathfrak{H}$ и введем V формулой

$$V\psi = \sum_{n\geqslant 0} \psi_n(\psi_{n+1}, \psi).$$

Имеем тогда $\|V\| = 1$ и

$$\left(e^{i(a_n - a_{n+1})t} - 1\right)\psi_n = (\alpha_t(V) - V)\psi_{n+1} - \left(U_t - e^{ia_n t}\right)\psi_n(\psi_{n+1}, U_{-t}\psi_{n+1}) - \\ - e^{ia_n t}\psi_n\left(\psi_{n+1}, \left(U_{-t} - e^{-ia_{n+1}t}\right)\psi_{n+1}\right),$$

так что при $|t| < \varepsilon$

$$2 \leqslant \|\alpha_t(V) - V\| + 1 + \delta.$$

Полученное противоречие означает, что спектр H должен быть ограничен, а значит, α_t будет равномерно непрерывна, потому что $\|\alpha_t(A) - A\| \leqslant 2\|A\| \times$ $\times (\exp\{|t|\|H\|\} - 1)$.

3.2.3. Спектральная теория и ограниченные дифференцирования

В ближайших трех пунктах мы изучим характеристические свойства тех дифференцирований, которые являются генераторами групп *-автоморфизмов C^*-алгебр и алгебр фон Неймана. Если сопоставить эту программу с соответствующей программой, реализованной в разделе 3.1 для групп операторов в банаховых пространствах, то тогда мы начинали с простейшего случая равномерно непрерывных групп и установили, что такое свойство непрерывности эквивалентно ограниченности генератора. Поэтому естественно и сейчас начать с рассмотрения ограниченных дифференцирований. В следствии 3.2.23 было показано, что всюду определенное дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ ограничено, а одним из результатов этого пункта будет утверждение об общем виде ограниченного дифференцирования δ алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$, а именно: $\delta(A) = i[H, A]$ при некотором $H \in \mathfrak{M}$. В доказательстве этого факта мы используем так называемую спектральную теорию однопараметрических групп автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{M}$. Применение здесь спектральной теории имеет тот недостаток, что доказательство теоремы о дифференцированиях довольно сильно затягивается, но это с лихвой окупается тем, что она позволяет получить более общие результаты для групп с полуограниченными (в соответствующем смысле) генераторами.

Автоморфизм α алгебры $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{M}$ называется *внутренним*, если существует унитарный элемент $U \in \mathfrak{A}$ или $\mathfrak{M}$, такой что $\alpha(A) = UAU^*$. Если $t \mapsto \alpha_t$ — однопараметрическая группа автоморфизмов, то множество тех $t \in \mathbb{R}$, для которых автоморфизмы α_t внутренние, очевидно, образует подгруппу в $\mathbb{R}$. Спектральная теория играет важную роль при изучении таких подгрупп, и она обычно применяется при исследовании внутренних автоморфизмов. Теорема о дифференцированиях, упомянутая выше, иллюстрирует один из аспектов такого исследования, другой его аспект проявляется при изучении групп автоморфизмов вида

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^*,$$

для которых унитарные группы U_t имеют положительные генераторы. (По поводу дальнейших результатов см. замечания и комментарии в конце главы.) Имея в виду последующие приложения к калибровочным группам, мы изложим спектральную теорию для общего случая локально-компактных абелевых групп.

На протяжении этого пункта будут применяться следующие обозначения:

G — локально-компактная абелева группа с мерой Хаара dt;

$\widehat{G}$ — двойственная группа для группы G, т. е. группа ее характеров с топологией, введенной в пункте 2.7.1;

$L^1(G)$ — групповая алгебра группы G, т. е. множество L^1-функций на G с алгебраическими операциями

$$f * g(t) = \int ds f(t-s)\, g(s), \quad f^*(t) = \overline{f(-t)},$$

произведение $f * g$ называется *свёрткой* f и g.

Хорошо известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между характерами алгебры $L^1(G)$ и характерами $t \mapsto (\gamma, t)$ группы G, которое задается преобразованием Фурье

$$f \in L^1(G) \mapsto \hat{f}(\gamma) = \int dt f(t)\, \overline{(\gamma, t)}.$$

Таким образом, в данном случае преобразование Гельфанда совпадает с преобразованием Фурье; при этом $L^1(G)$ реализуется как плотная $*$-подалгебра C^*-алгебры $C_0(\widehat{G})$.

Между замкнутыми идеалами $\mathfrak{J}$ в $C_0(\widehat{G})$ и замкнутыми подмножествами $K \subseteq \widehat{G}$ имеется биективное соответствие, при котором идеалу $\mathfrak{J}$ отвечает

$$K = \{\gamma;\ \hat{f}(\gamma) = 0 \text{ для всех } \hat{f} \in \mathfrak{J}\}.$$

Тем самым будет определено отображение множества всех замкнутых $*$-идеалов $\mathfrak{J} \subset L^1(G)$ во множество всех замкнутых подмножеств $K \subseteq \widehat{G}$, если положить

$$K = \{\gamma;\ \hat{f}(\gamma) = 0 \text{ для всех } f \in \mathfrak{J}\}.$$

Это соответствие, вообще говоря, не взаимно-однозначно, но тауберова теорема показывает, что существует лишь один идеал, соответствующий $K = \varnothing$ или одноточечным множествам K (а также некоторым другим специальным множествам K). Нам часто придется привлекать такой результат: при заданных компактном множестве $K \subseteq \widehat{G}$ и открытом множестве $W \supseteq K$ найдется функция $f \in L^1(G)$, для которой $\hat{f}(\gamma) = 1$ при $\gamma \in K$ и $\hat{f}(\gamma) = 0$ при $\gamma \in \widehat{G} \diagdown W$.

Теорема СНАГ (Стоуна—Наймарка—Амброза—Годмана) утверждает, что между непрерывными унитарными представлениями $\{\mathfrak{H}, U\}$ группы G и проекторнозначными мерами dP на $\widehat{G}$ (значениями которых служат проекторы в $\mathfrak{H}$) существует взаимно-однозначное соответствие, задаваемое явно формулой

$$U_t = \int_{\widehat{G}} \overline{(\gamma, t)}\, dP(\gamma).$$

В случае $G = \mathbb{R}$ это просто теорема Стоуна. Далее в этом разделе мы встретимся с частичным обобщением теоремы СНАГ на $\sigma(X, F)$-непрерывные представления U группы G в банаховом пространстве X. Это обобщение получено при ограничениях а)—в) на пару (X, F), сформулированных в начале пункта 3.1.2, а также при добавочном условии $\|U_t\| \leqslant M$ при всех $t \in G$ (где M — подходящая константа). Согласно предложению 3.1.4, такое представление U группы G определяет представление U алгебры $L^1(G)$ ограниченными по норме $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-замкнутыми операторами в X, при этом

$$U(f) = \int dt f(t) U_t, \quad f \in L^1(G),$$

т. е. $U(f * g) = U(f) U(g)$. Иногда мы будем применять и обозначение $U_f = U(f)$.

Теперь введем основные понятия, необходимые при построении элементов спектральной теории для U.

Определение 3.2.37. Пусть $t \mapsto U_t$ — такое $\sigma(X, F)$-непрерывное представление G, что $\|U_t\| \leqslant M$ при всех $t \in G$. Пусть Y — подмножество в X. Введем

$$\mathfrak{J}_Y^U = \{f \in L^1(G);\ U(f) A = 0 \text{ для всех } A \in Y\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{J}_Y^U$ — замкнутый *-идеал в $L^1(G)$. Далее, определим *спектр множества* Y как следующее замкнутое подмножество в $\hat{G}$:

$$\sigma_U(Y) = \{\gamma \in \hat{G};\ \hat{f}(\gamma) = 0 \text{ для всех } f \in \mathfrak{J}_Y^U\}.$$

Спектром представления U называется

$$\sigma(U) = \sigma_U(X).$$

Спектральное подпространство $X^U(E)$, соответствующее подмножеству $E \subseteq \hat{G}$, определяется как

$$X^U(E) = \overline{\{A \in X;\ \sigma_U(A) \subseteq E\}};$$

здесь черта сверху обозначает замыкание в $\sigma(X, F)$-топологии. Наконец, *ассоциированное подпространство* $X_0^U(E)$ введем как $\sigma(X, F)$-замкнутую линейную оболочку элементов вида $U(f) A$, где $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$ и $A \in X$.

Проиллюстрируем эти определения двумя примерами. Сначала рассмотрим непрерывное представление однопараметрической группы унитарными операторами U_t в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Унитарная группа U обладает спектральным разложением

$$U_t = \int dP(p)\, e^{-itp},$$

и для любого замкнутого (или открытого) множества $E \subseteq \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

$$\mathfrak{H}^U(E) = P(E)\, \mathfrak{H}.$$

Таким образом,

$$\sigma(U) = \text{носитель } P = \sigma(H),$$

где H — самосопряженный генератор U. Кроме того, если $\psi \in \mathfrak{H}$, то $\sigma(\psi)$ будет наименьшим замкнутым множеством $E \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$, таким что $P(E)\psi = \psi$. Мы воспользовались здесь отождествлением $\mathbb{R}$ с $\widehat{\mathbb{R}}$, при котором $p \in \mathbb{R}$ соответствует характеру $t \mapsto (p, t) = e^{ipt}$. Сформулированные результаты выводятся без труда, все они вытекают из леммы 3.2.39 и предложения 3.2.40.

Хотя приведенный пример вполне достаточно иллюстрирует, какова природа спектра, он не полностью раскрывает важный алгебраический аспект, присущий спектральным подпространствам. С этой целью возьмем в качестве унитарной группы U_t группу сдвигов в $L^2(\mathbb{R})$:

$$(U_t\psi)(x) = \psi(x - t), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}),$$

и рассмотрим алгебру $L^\infty(\mathbb{R})$ действующих в $L^2(\mathbb{R})$ операторов умножения на функцию. Действие группы сдвигов определено и на $L^\infty(\mathbb{R})$, и можно ввести соответствующие спектральные подпространства. Если E — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$, то $X_0^U(E)$ — это замкнутое подпространство в $L^\infty(\mathbb{R})$, образованное функциями $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ с $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$. Для $f \in X_0^U(E)$ и $\psi \in \mathfrak{H}^U(F)$ рассмотрим теперь произведение $f\psi$. Оно равно

$$(f\psi)(x) = f(x)\psi(x) = \int dp \widehat{f\psi}(p)\, e^{ipx},$$

где

$$\widehat{f\psi}(p) = \int dq \hat{f}(p - q)\, \hat{\psi}(q).$$

В частности, $\operatorname{supp} \widehat{f\psi} \subseteq \overline{E + F}$. Тем самым спектр ψ при умножении на f увеличивается, и прирост соответствует прибавлению чисел из E. Операторы, обладающие таким свойством увеличивать спектральные значения, встречаются в различных областях математической физики. В теории поля их называют операторами рождения и уничтожения, в ряде разделов теории групп и функционального анализа — операторами сдвига, а иногда — поднимающими и опускающими операторами. Такого типа свойство выступает как важнейший довод в пользу рассмотрения спектральных подпространств; с дальнейшим его развитием мы встретимся в предложении 3.2.43.

Предыдущий пример не только поясняет природу спектральных подпространств, но также вводит одно из основных технических средств их исследования — свертку.

Теперь сформулируем некоторые элементарные свойства спектров элементов.

Лемма 3.2.38. *Для $\sigma(X, F)$-непрерывного равномерно ограниченного представления U группы G при любых $A, B \in X$, $f \in \in L^1(G)$ выполняются свойства:*

(1) $\sigma_U(U_t A) = \sigma_U(A)$, $t \in G$;
(2) $\sigma_U(\alpha A + B) \subseteq \sigma_U(A) \cup \sigma_U(B)$;
(3) $\sigma_U(U(f) A) \subseteq \operatorname{supp} \hat{f} \cap \sigma_U(A)$;
(4) *если* $f_1, f_2 \in L^1(G)$ *и* $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ *в некоторой окрестности* $\sigma_U(A)$, *то*

$$U(f_1) A = U(f_2) A.$$

Доказательство. (1) $U(f) U_t A = U(f_t) A$, где $f_t(s) = f(s - t)$. Поскольку $\hat{f}_t(\gamma) = \overline{(\gamma, t)} \hat{f}(\gamma)$, то $\hat{f}_t(\gamma) = 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}(\gamma) = 0$.

(2) Ясно, что $\sigma_U(\alpha A) = \sigma_U(A)$, так что можно считать $\alpha = 1$. Если $\gamma \notin \notin \sigma_U(A) \cup \sigma_U(B)$, то можно найти $f \in \mathfrak{I}_A^U$ с $\hat{f}(\gamma) = 1$ и $g \in \mathfrak{I}_B^U$ с $\hat{g}(\gamma) = 1$. Далее, $f * g \in \mathfrak{I}_{A+B}^U$, так как

$$\begin{aligned} U(f * g)(A + B) &= U(f) U(g)(A + B) = \\ &= U(g) U(f) A + U(f) U(g) B = 0. \end{aligned}$$

Однако $\widehat{f * g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma) \hat{g}(\gamma) = 1$, следовательно, $\gamma \notin \sigma_U(A + B)$.

(3) Если $U(g) A = 0$, то $U(g) U(f) A = U(f) U(g) A = 0$, значит, $\sigma_U(U(f) A) \subseteq \sigma_U(A)$. С другой стороны, если $\hat{g}$ обращается в нуль на $\operatorname{supp} \hat{f}$, то $f * g = 0$, так что $U(g) U(f) A = 0$. Таким образом, $\sigma_U(U(f) A) \subseteq \operatorname{supp} \hat{f}$.

(4) Введем $g = f_1 - f_2$. Нам надо показать, что $U(g) A = 0$. Но $\hat{g}$ обращается в нуль в окрестности спектра $\sigma_U(A)$, поэтому, согласно (3),

$$\sigma_U(U(g) A) \subseteq \operatorname{supp} \hat{g} \cap \sigma_U(A) = \varnothing.$$

Отсюда $U(g) A = 0$.

Далее на очереди рассмотрение свойств спектральных подпространств $X^U(E)$ и $X_0^U(E)$.

Лемма 3.2.39. *Пусть U — равномерно ограниченное $\sigma(X, F)$-непрерывное представление G и E — подмножество в $\hat{G}$. Тогда*

(1) $X_0^U(E) \subseteq X^U(E)$;
(2) $U_t X_0^U(E) = X_0^U(E)$, $U_t X^U(E) = X^U(E)$, $t \in G$;
(3) *если E замкнуто, то*

$$X^U(E) = \{A \in X;\ \sigma_U(A) \subseteq E\}$$

(без замыкания);
(4) *если E открыто, то*

$$X^U(E) = X_0^U(E) = \bigvee \{X^U(K),\ K \subseteq E,\ K \text{ компактно}\},$$

где $\bigvee$ обозначает взятие $\sigma(X, F)$-замкнутой линейной оболочки;

(5) *если E замкнуто, а N пробегает множество всех открытых окрестностей нуля в $\widehat{G}$, то*

$$X^U(E) = \bigcap_N X_0^U(E + N).$$

Доказательство. (1) следует из леммы 3.2.38, (3).

(2) вытекает из леммы 3.2.38, (1) и совпадения supp $\hat{f}_t$ с supp $\hat{f}$.

(3) Требуется показать, что множество в правой части равенства $\sigma(X, F)$-замкнуто. Предположим, что A принадлежит его $\sigma(X, F)$-замыканию. Если $\gamma \notin E$, выберем $f \in L^1(G)$ так, чтобы $\hat{f}(\gamma) = 1$ и $\hat{f} = 0$ в некоторой окрестности E. По лемме 3.2.38, (4), имеем при всех B из интересующего нас множества $U(f)B = 0$. Так как $U(f)$ — оператор $\sigma(X, F)$-$\sigma(X, F)$-непрерывный, то $U(f)A = 0$. Следовательно, $\sigma_U(A) \subseteq E$.

(4) Очевидно, $X^U(E) \supset \bigvee_{K \subseteq E} X^U(K)$. С другой стороны, допустим, что $\sigma_U(A) \subseteq E$. Как известно, $L^1(G)$ обладает аппроксимативной единицей, состоящей из функций, преобразования Фурье которых имеют компактный носитель; поэтому $X = \bigvee_{K \subseteq \widehat{G}} X^U(K)$. Можно аппроксимировать A элементами вида $U(f)A$, где $\hat{f}$ имеет компактный носитель K. Однако, по лемме 3.2.38, (3), $\sigma_U(U(f)A)$ содержится в supp$\hat{f} \cap \sigma_U(A)$ — компактном подмножестве в E. Значит, $X^U(E) = \bigvee_{K \subseteq E} X^U(K)$.

Наконец, для того чтобы получить включение $\bigvee_{K \subseteq E} X^U(K) \subseteq X_0^U(E)$, заметим, что при условии $\sigma_U(A) \subseteq K \subseteq E$ можно найти такую функцию $f \in L^1(G)$, что $\hat{f} = 1$ в некоторой окрестности множества K и $\hat{f} = 0$ в $G \setminus E$. Тогда $U(f)A = A$ по лемме 3.2.38, (4).

(5) Из определения $X^U(E)$ сразу же следует, что

$$X^U(E) = \bigcap_N X^U\,\overline{(E + N)},$$

если E замкнуто, так что, в силу (4),

$$X^U(E) \subseteq X^U(E + N) = X_0^U(E + N) \subseteq X^U\,\overline{(E + N)},$$

т. е. имеет место (5).

Согласно тауберовой теореме, $\sigma_U(A) = \{\gamma\}$ тогда и только тогда, когда $U_t A = \overline{(\gamma, t)}\, A$. Получим более общий результат о концентрации спектра. В случае унитарных групп он известен под названием *критерия Вейля*; с его помощью можно составить интуитивное представление о понятии спектра.

Предложение 3.2.40. *Пусть U — равномерно ограниченное $\sigma(X, F)$-непрерывное представление абелевой локально-компактной группы G. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\gamma_0 \in \sigma(U)$;

(2) *для всех окрестностей E точки γ_0*

$$X_0^U(E) \neq \{0\};$$

(3) *для всех* $\varepsilon > 0$ *и всех компактов* $K \subseteq G$ *существует компактная окрестность* E *точки* γ_0, *такая что* $X^U(E) \neq \{0\}$ *и*

$$\| U_t A - \overline{(\gamma_0, t)} A \| \leqslant \varepsilon \| A \|$$

при всех $A \in X^U(E)$, $t \in K$;

(4) *существует такая сеть (последовательность, если* G *сепарабельна) элементов* $A_\alpha \in X$, *что* $\| A_\alpha \| = 1$ *при всех* α *и*

$$\lim_\alpha \| U_t A_\alpha - \overline{(\gamma_0, t)} A_\alpha \| = 0$$

равномерно по t *на компактах;*

(5) *для всех* $f \in L^1(G)$ *выполняется неравенство*

$$| \hat{f}(\gamma_0) | \leqslant \| U(f) \|_{\mathscr{L}(X)}.$$

Если $G = \mathbb{R}$ *и* $U_t = \exp(tS)$, *то перечисленные условия эквивалентны такому*:

(6) $-i\gamma_0 \in \sigma(S)$, *т. е.*

$$\sigma(S) = -i\sigma(U).$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если $X^U(E) = 0$ для некоторой открытой окрестности E точки γ_0, то выберем $f \in L^1(G)$ так, чтобы $\hat{f}(\gamma_0) = 1$ и $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$. Тогда $U(f) = 0$ по лемме 3.2.39, (4); тем самым $f \in \mathfrak{I}_X^U$ и $\gamma_0 \notin \sigma(U)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть E_1 — компактная окрестность точки γ_0 и $f \in L^1(G)$ выбрана так, что $\hat{f}(\gamma) = 1$ при $\gamma \in E_1$. Каждому $s \in K$ сопоставим функцию $F(s) \in L^1(G)$, определенную соотношением

$$F(s)(t) = f(t - s) - \overline{(\gamma_0, s)} f(t).$$

В таком случае

$$\widehat{F(s)}(\gamma) = (\overline{(\gamma, s)} - \overline{(\gamma_0, s)}) \hat{f}(\gamma).$$

Поскольку $\widehat{F(s)}(\gamma_0) = 0$, то при каждом s найдется такая функция $g \in L^1(G)$, что $\hat{g}(\gamma) = 1$ в окрестности γ_0, а $\| F(s) * g \|_1 < \varepsilon/2$. Это показывает, с учетом непрерывности отображения $s \in K \longmapsto F(s)$ и компактности K, что имеются такая окрестность E_2 у γ_0 и такая функция $g \in L^1(G)$, что $\hat{g}(\gamma) = 1$ на E_2 и $\| F(s) * g \|_1 < \varepsilon$ при $s \in K$.

Пусть E будет компактной окрестностью γ_0, содержащейся во внутренности $E_1 \cap E_2$, и пусть h — такая функция, что $\hat{h}(\gamma) = 1$ в окрестности E, а $\operatorname{supp} \hat{h} \subseteq E_1 \cap E_2$. Тогда $U(h) A = A$ для $A \in X^U(E)$ (лемма 3.2.38, (4)), и при $\gamma \in E_1 \cap E_2$ и $s \in K$

$$\widehat{F(s) * g * h}(\gamma) = (\overline{(\gamma, s)} - \overline{(\gamma_0, s)}) \hat{f}(\gamma) \hat{g}(\gamma) \hat{h}(\gamma) = (\overline{(\gamma, s)} - \overline{(\gamma_0, s)}) \hat{h}(\gamma),$$

откуда при $s \in K$

$$U(F(s) * g * h) = (U_s - \overline{(\gamma_0, s)}) U(h).$$

Следовательно, для $A \in X^U(E)$ и $s \in K$

$$\| U_s A - \overline{(\gamma_0, s)} A \| = \| (U_s - \overline{(\gamma_0, s)}) U(h) A \| =$$
$$= \| U(F(s) * g) U(h) A \| \leqslant \| F(s) * g \|_1 \| U(h) A \| \leqslant \varepsilon \| A \|.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) очевидным образом.

(4) $\Rightarrow$ (5). Для каждого компактного $K \subseteq G$ имеем

$$\|U(f) A_\alpha - \hat{f}(\gamma_0) A_\alpha\| = \left\| \int_G dt f(t)\,(U_t A_\alpha - (\gamma_0, t) A_\alpha) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_K \|U_t A_\alpha - \overline{(\gamma, t)} A_\alpha\| \, \|f\|_1 + (M+1) \int_{G \setminus K} dt\, |f(t)|.$$

Значит, при каждом $\varepsilon > 0$ существует такое A_α, что $\|U(f) A_\alpha\| \geqslant \geqslant |\hat{f}(\gamma_0)| - \varepsilon$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Если $f \in \mathfrak{J}_X^U$, то $U(f) = 0$ по определению, так что $\hat{f}(\gamma_0) = 0$ и $\gamma_0 \in \sigma(U)$.

Наконец, покажем, что условия (1)—(5) эквивалентны (6) в указанном случае.

(6) $\Rightarrow$(4). Если $-i\gamma_0 \in \sigma(S)$, то оператор $i\gamma_0 + S$ не имеет обратного. Но при любом $\varepsilon > 0$ операторы $-i\gamma_0 - \varepsilon - S$ обратимы и

$$(-i\gamma_0 - \varepsilon - S)^{-1} = \int_0^\infty e^{i\gamma_0 t - \varepsilon t} U_t \, dt,$$

согласно предложению 3.1.6. Значит, $\lim_{\varepsilon \to 0} \|(-i\gamma_0 + \varepsilon - S)^{-1}\| = \infty$. Таким образом, существуют такие A_ε, что $A_\varepsilon \in D(S)$, $\|A_\varepsilon\| = 1$ и $\lim_{\varepsilon \to 0} (-i\gamma_0 + + \varepsilon - S) A_\varepsilon = 0$. Тогда $\lim_{\varepsilon \to 0} (-i\gamma_0 - S) A_\varepsilon = 0$ и

$$\|U_t A_\varepsilon - e^{-i\gamma_0 t} A_\varepsilon\| = \left\| \int_0^t ds \frac{d}{ds} U_s e^{-i\gamma_0 (t-s)} A_\varepsilon \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^t ds U_s (S + i\gamma_0) e^{-i\gamma_0 (t-s)} A_\varepsilon \right\| \leqslant M |t| \, \|(S + i\gamma_0) A_\varepsilon\|.$$

(4) $\Rightarrow$ (6). Если A_α обладают указанными в (4) свойствами, то при $\varepsilon > 0$

$$\left\| (-i\gamma_0 + \varepsilon - S)^{-1} A_\alpha - \frac{1}{\varepsilon} A_\alpha \right\| = \left\| \int_0^\infty dt e^{i\gamma_0 t - \varepsilon t} U_t A_\alpha - \int_0^\infty dt e^{-\varepsilon t} A_\alpha \right\| \to 0,$$

когда $\alpha \to \infty$. Поэтому $\|(-i\gamma_0 + \varepsilon - S)^{-1}\| \geqslant 1/\varepsilon$ и, следовательно, не может существовать ограниченного оператора $(-i\gamma_0 + S)^{-1}$.

В предложении 3.1.1 было доказано, что однопараметрическая группа непрерывна по норме тогда и только тогда, когда ее генератор ограничен. Аналогичный результат, привлекающий понятие спектра, формулируется так.

Предложение 3.2.41. *Для $\sigma(X, F)$-непрерывного равномерно ограниченного представления U группы G эквивалентны следующие условия:*

(1) *спектр $\sigma(U)$ компактен;*

(2) *U непрерывно по норме.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\sigma(U)$ компактен и функция $f \in L^1(G)$ выбрана так, что $\hat{f} = 1$ в окрестности $\sigma(U)$. Тогда, по лемме 3.2.38, (4), при всех $A \in X$ имеем $U(f)A = A$. Следовательно,

$$\|(U_t - I)A\| = \|(U_t - I)U(f)A\| = \|(U(f_t) - U(f))A\| \leqslant M\|f_t - f\|_1\|A\|.$$

Поскольку $\|f_t - f\|_1 \to 0$ при $t \to 0$, представление U непрерывно по норме.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если $G = \mathbb{R}$, т. е. $U_t = \exp(tS)$, то из предложения 3.1.1 следует, что $\|S\| < \infty$, а так как $\sigma(S) \subseteq [-\|S\|, \|S\|]$, то условие (1) вытекает из предложения 3.2.40, (6). В общем случае заметим, что для всякой аппроксимативной единицы $\{f_\alpha\}$ алгебры $L^1(G)$ мы имеем $\|U(f_\alpha) - I\| \to 0$. Поэтому если $\mathfrak{A}$ — абелева банахова подалгебра в $\mathscr{L}(X)$, порожденная $U(L^1(G))$, то $I \in \mathfrak{A}$, так что спектр $\mathfrak{A}$ компактен. Если же $\gamma \in \sigma(\mathfrak{A})$, то, в силу предложения 3.2.40, (5), равенство $\chi_\gamma(U(f)) = \hat{f}(\gamma)$ задает характер на $\mathfrak{A}$. В обратную сторону, всякий характер χ на $\mathfrak{A}$ определяет характер на $L^1(G)$ при композиции с U, т. е. существует $\gamma \in \hat{G}$, такое что $\chi(U(f)) = \hat{f}(\gamma)$, но поскольку

$$|\hat{f}(\gamma)| = |\chi(U(f))| \leqslant \|U(f)\|,$$

то из предложения 3.2.40, (5) следует, что $\gamma \in \sigma(U)$. Значит, $\sigma(U) = \sigma(\mathfrak{A})$, а потому $\sigma(U)$ компактен.

Применим теперь только что изложенную спектральную теорию к группам автоморфизмов операторных алгебр. Лемму 3.2.38 можно будет усилить благодаря более богатой структуре таких алгебр.

Лемма 3.2.42. *Пусть α — представление локально-компактной абелевой группы G автоморфизмами C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ или алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$. Предположим, что α слабо (сильно) непрерывно в C^*-случае и σ-слабо непрерывно в случае алгебры фон Неймана. Тогда справедливы следующие утверждения (где $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$ или $\mathfrak{M}$):*

(1) $\sigma_\alpha(A^*) = -\sigma_\alpha(A)$;

(2) $\mathfrak{R}^\alpha(E)^* = \mathfrak{R}^\alpha(-E)$, $E \subseteq \hat{G}$;

(3) $\mathfrak{R}_0^\alpha(E_1)\mathfrak{R}_0^\alpha(E_2) \subseteq \mathfrak{R}_0^\alpha(E_1 + E_2)$, *если E_1, E_2 — открытые подмножества в $\hat{G}$;*

(4) $\mathfrak{R}^\alpha(E_1)\mathfrak{R}^\alpha(E_2) \subseteq \mathfrak{R}^\alpha\overline{(E_1 + E_2)}$, *если E_1, E_2 — замкнутые подмножества в $\hat{G}$;*

(5) $\sigma_\alpha(AB) \subseteq \overline{\sigma_\alpha(A) + \sigma_\alpha(B)}$.

Доказательство. (1) следует из соотношений $\operatorname{supp}\hat{\bar{f}} = -\operatorname{supp}\hat{f}$ и $\alpha(f)(A)^* = \alpha(\bar{f})(A^*)$. Свойство (2) вытекает из (1). Для доказательства (3) замечаем, что в соответствии с леммой 3.2.39, (4) достаточно проверить, что если $f, g \in L^1(G)$ имеют компактные носители $\operatorname{supp}\hat{f}$ и $\operatorname{supp}\hat{g}$ в E_1 и E_2 соответственно, а $A, B \in \mathbb{R}$, то $\alpha(f)(A)\alpha(g)(B) \subseteq \mathfrak{R}^\alpha(E_1 + E_2)$. Поэтому достаточно показать, что для $h \in L^1(G)$ с $\operatorname{supp}\hat{h} \cap (E_1 + E_2) = \varnothing$ будет $\alpha(h)(\alpha(f)(A)\alpha(g)(B)) = 0$. Но

$$\alpha(h)(\alpha(f)(A)\alpha(g)(B)) = \int\int\int dr\,ds\,dt\,h(r)f(t)g(s)\alpha_{r+t}(A)\alpha_{r+s}(B)$$

$$= \int\int\int du\,dv\,dw\,h(u)f(v-u)g(w+v-u)\alpha_v(A)\alpha_{w+v}(B),$$

а

$$\int duh(u)\, f(v-u)\, g(w+v-u) = h*(f\cdot g_w)(v),$$

где $g_w(v) = g(v+w)$. Преобразование Фурье последней функции равно $\hat{h}\cdot(\hat{f}*\hat{g}_w)$, и поскольку $\operatorname{supp}(\hat{f}*\hat{g}_w) \subseteq \operatorname{supp}\hat{f} + \operatorname{supp}\hat{g} \subseteq E_1 + E_2$, то $\hat{h}\cdot(\hat{f}*\hat{g}_w) = 0$. Тем самым, применив теорему Фубини, получим $\alpha(h)(\alpha(f)(A)\,\alpha(g)(B)) = 0$. Наконец, (4) следует из (3) и леммы 3.2.39, (5), а (5) вытекает из (4) и леммы 3.2.39, (3).

Рассмотрим связь между спектральными подпространствами унитарно выполнимой группы автоморфизмов и спектральными подпространствами соответствующей унитарной группы. В частности, приводимое ниже предложение позволяет трактовать элементы некоторых спектральных подпространств как операторы «рождения» или операторы «сдвига» на спектре унитарной группы.

Предложение 3.2.43. *Пусть U — сильно непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со спектральным разложением $U_t = \int e^{-it\gamma}\,dP(\gamma)$. Пусть $\beta_t(A) = U_t A U_t^*$ — та σ-слабо непрерывная однопараметрическая группа автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, которая выполняется группой U. Тогда, каковы бы ни были $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, эквивалентны следующие условия:*

(1) $\sigma_\beta(A) \subseteq [\gamma, \infty)$;

(2) $AP([\lambda, \infty))\,\mathfrak{H} \subseteq P([\lambda+\gamma, \infty))\,\mathfrak{H}$ *при всех* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сперва заметим, что для всякого замкнутого $E \subseteq \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, как нетрудно получить, $P(E)\,\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^U(E)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). По лемме 3.2.39 достаточно показать, что

$$\beta_f(A)\,U(g)\,\psi \in P([\lambda+\gamma-2\varepsilon, \infty))\,\mathfrak{H},$$

где $\psi \in \mathfrak{H}$, f, $g \in L^1(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\hat{f} \subseteq (\gamma-\varepsilon, \infty)$, $\operatorname{supp}\hat{g} \subseteq (\lambda-\varepsilon, \infty)$, т. е. нам надо проверить, что для таких f и g

$$U(h)\,\beta_f(A)\,U(g) = 0,$$

если $\operatorname{supp}\hat{h} \subseteq (-\infty, \lambda+\gamma-2\varepsilon)$. Но

$$U(h)\,\beta_f(A)\,U(g) = \iiint dt\,ds\,dr\,h(t)\,f(s)\,g(r)\,U_{t+s}AU_{-s+r}.$$

После замены переменных $u = t$, $v = s+t$, $w = r-s$, применив теорему Фубини, приходим к равенству

$$U(h)\,\beta_f(A)\,U(g) = \iint k_w(v)\,U_v A U_w\,dv\,dw;$$

здесь $k_w(v) = h*(f\cdot g_w)$, $g_w(s) = g(s+w)$. Имеем $\widehat{k_w} = \hat{h}\,(\hat{f}*\widehat{g_w})$. Поскольку

$$\operatorname{supp}\hat{g}_w = \operatorname{supp}\hat{g} \subseteq (\lambda-\varepsilon, \infty),$$

то

$$\operatorname{supp}(\widehat{f}*\hat{g}_w) \subseteq \overline{\operatorname{supp}\hat{f} + \operatorname{supp}\hat{g}} \subseteq (\gamma+\lambda-2\varepsilon, \infty).$$

Последнее множество имеет пустое пересечение с $\operatorname{supp}\hat{h}$, так что $\widehat{k_w} = 0$, т. е. $U(h)\,\beta_f(A)\,U(g) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть (2) выполнено. Возьмем $\lambda_0 < \gamma$, $\varepsilon = (\gamma-\lambda_0)/5$ и выберем $f \in L^1(\mathbb{R})$ так, чтобы $\hat{f}(\lambda_0) = 1$, $\operatorname{supp}\hat{f} \subset (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$. Нам надо показать,

что $\beta_f(A)=0$. Согласно лемме 3.2.39, для этого достаточно убедиться, что $\beta_f(A)\,U(g)\,\psi=0$, где $g\in L^1(\mathbb{R})$ — любая функция, такая что носитель $\hat{g}$ принадлежит интервалу вида $(\lambda_1-\varepsilon,\ \lambda_1+\varepsilon)$. Но так как $\sigma_u U(g)\,\psi\subseteq[\lambda_1-\varepsilon,\ \lambda_1+\varepsilon]\subseteq([\lambda_1-\varepsilon,\ \infty)$, то из условия (2) следует, что $\sigma_u\beta_f(A)\,U(g)\,\psi\subseteq\subseteq[\lambda_1-\varepsilon+\gamma,\ \infty)$. Поэтому достаточно проверить, что $U(h)\,\beta_f(A)\,U(g)=0$ для любой функции h с $\operatorname{supp}\hat{h}\subseteq[\lambda_1-2\varepsilon+\gamma,\ \infty)$. Применим ту же замену переменных, что и в доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (2), и сохраним те же обозначения. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\hat{f}*\hat{g}_\omega)&\subseteq(\lambda_0-\varepsilon,\ \lambda_0+\varepsilon)+(\lambda_1-\varepsilon,\ \lambda_1+\varepsilon)\\&=(\lambda_0+\lambda_1-2\varepsilon,\ \ \lambda_0+\lambda_1+2\varepsilon)\end{aligned}$$

не пересекается с $[\gamma+\lambda_1-2\varepsilon,\ \infty)$, следовательно, $k_\omega=0$ и $\beta_f(A)=0$.

Следующий результат служит для сравнения двух групп автоморфизмов. А именно можно заключить, что группы совпадают, если спектральные подпространства одной из них содержатся в соответствующих спектральных подпространствах другой. Хотя мы сформулируем и докажем этот результат для алгебр фон Неймана, аналогичное утверждение верно и в случае сильно непрерывных однопараметрических групп *-автоморфизмов C^*-алгебр, причем доказательство по существу то же самое.

Предложение 3.2.44. *Пусть α и β — две σ-слабо непрерывные однопараметрические группы *-автоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$. Если предположить, что $\mathfrak{M}^\alpha[\lambda,\ \infty)\subseteq\mathfrak{M}^\beta[\lambda,\ \infty)$ при всех $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\alpha_t=\beta_t$ при всех $t\in\mathbb{R}$.*

Доказательство. Возьмем $A\in\mathfrak{M}$, $\eta\in\mathfrak{M}_{*+}$ и рассмотрим функцию

$$f(t,\ s)=\eta(\beta_t\alpha_s(A)),\quad t,\ s\in\mathbb{R}.$$

Мы покажем, что на $\mathbb{R}$ существует такая непрерывная функция g, что $f(t,\ s)==g(t+s)$. Из этого выражения для f вытекает, что $f(-t,\ t)=f(0,\ 0)$, т. е. $\beta_{-t}\alpha_t(A)=A$, или $\alpha_t(A)=\beta_t(A)$ при всех t.

Сперва введем обозначение $f(h)$, полагая при всех $h\in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$f(h)=\int\int dt\,ds\,h(t,\ s)\,f(t,\ s).$$

Далее, для $h_1,h_2\in L^1(\mathbb{R})$ с $\operatorname{supp}\hat{h}_1\subseteq(\lambda,\ \infty)$ и $\operatorname{supp}\hat{h}_2\subseteq(-\infty,\ \lambda)$ имеем

$$f(h_1h_2)=\eta\left(\beta_{h_1}\alpha_{h_2}(A)\right)=0,$$

потому что $\alpha_{h_2}(A)\in\mathfrak{M}^\alpha[\lambda,\ \infty)\subseteq\mathfrak{M}^\beta[\lambda,\ \infty)$. Точно так же

$$\begin{aligned}\int\int dt\,ds\bar{h}_2(t)\,\bar{h}_1(s)\,f(t,\ s)&=\overline{\int\int dt\,ds\,h_2(t)\,h_1(s)\,\overline{f(t,\ s)}}\\&=\overline{\int\int dt\,ds\,h_2(t)\,h_1(s)\,\eta(\beta_t\alpha_s(A^*))}=0.\end{aligned}$$

Но $\operatorname{supp}\widehat{\bar{h}_1}\subseteq(-\infty,\ -\lambda)$, $\operatorname{supp}\widehat{\bar{h}_2}\subseteq(-\lambda,\ \infty)$, и, следовательно,

$$f\left(\sum_{i=1}^n h_{1i}h_{2i}\right)=0,$$

каковы бы ни были пары h_{1i}, h_{2i} с $\operatorname{supp}\hat{h}_{1i}\cap\operatorname{supp}\hat{h}_{2i}=\varnothing$. Принимая во внимание оценку $|f(h)|\leqslant\|f\|_\infty\|h\|_1$, легко получить, что $f(h)=0$ при всех $h\in L^1(\mathbb{R}^2)$, у которых фурье-образ $\tilde{h}(p, q)$ бесконечно дифференцируем и имеет компактный носитель, лежащий в области, где $p \neq q$.

Произведя замену переменных s, t на $s+t$, $s-t$, завершаем доказательство с помощью следующей леммы.

Лемма 3.2.45. *Пусть f — ограниченная непрерывная функция двух вещественных переменных. Для $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$ положим*

$$f(h) = \int\int ds\, dt f(s, t) h(s, t).$$

Предположим, что $f(h) = 0$ при всех h, обладающих бесконечно дифференцируемым фурье-образом $\tilde{h}(p, q)$, носитель которого компактен и лежит в области $q \neq 0$. В таком случае

$$f(s, t) = g(s),$$

где g — некоторая ограниченная непрерывная функция.

Доказательство. Сначала отметим, что $f(h) = f(h_\varepsilon)$, где

$$\tilde{h}_\varepsilon(p, q) = \tilde{h}(p, q)\widehat{\chi_\varepsilon}(q),$$

а $\widehat{\chi_\varepsilon}$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, равная единице при $|q| < \varepsilon$. Отметим еще, что

$$|f(h)| \leqslant \|f\|_\infty \|h\|_1.$$

Далее, пусть $h(s, t)$ дифференцируема по t и $h'(s, t) = \partial h(s, t)/\partial t \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$|f(h')| \leqslant \|f\|_\infty \left\|h'_\varepsilon\right\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \|h\|_1 \left\|\chi'_\varepsilon\right\|_1;$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\left\|h'_\varepsilon\right\|_1 = \int\int ds\, dt\, |h'_\varepsilon(s, t)| = \int\int ds\, dt \left|\int dt'\, h(s, t')\chi'_\varepsilon(t-t')\right| \leqslant \|h\|_1 \left\|\chi'_\varepsilon\right\|_1.$$

Выберем теперь χ так, чтобы ее фурье-образ $\hat{\chi}$ был бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем, причем $\hat{\chi}(q) = 1$ при $|q| < 1$. Если положить $\widehat{\chi_\varepsilon}(q) = \hat{\chi}(q/\varepsilon)$, то $\widehat{\chi_\varepsilon}$ удовлетворяет сформулированным выше требованиям и, как легко видеть, $\left\|\check{\chi}'_\varepsilon\right\|_1 = \varepsilon \left\|\check{\chi}'\right\|_1$. Переходя к пределу при ε, стремящемся к нулю, заключаем, что $f(h') = 0$.

Наконец, если функция h имеет финитный и бесконечно дифференцируемый фурье-образ, а h_a вводится равенством $h_a(s, t) = h(s, t+a)$, то

$$f(h_a) - f(h) = \int_0^a db f(h'_b) = 0.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\int\int ds\, dt\, (f(s, t) - f(s, t+a))\, h(s, t) = 0,$$

и поскольку $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, а h пробегает плотное подмножество в $L^1(\mathbb{R}^2)$, то

$$f(s, t) = f(s, t-a) = f(s, 0).$$

После столь внушительной предварительной подготовки по спектральному анализу мы вернемся вновь к теме, обсуждавшейся в начале пункта, — к характеризации равномерно непрерывных однопараметрических групп автоморфизмов алгебр фон Неймана. В предложении 3.2.41 установлено, что эти группы можно охарактеризовать условием компактности их спектра, и мы подойдем к проблеме именно с таких позиций. Следующая теорема, занимающая центральное место в данном пункте, дает описание класса групп с полуограниченным спектром, содержащего класс непрерывных по норме групп. Теорема снабжает нас разнообразной информацией. Во-первых, выясняется, что свойство полуограниченности спектра автоматически влечет выполнимость группы автоморфизмов группой унитарных операторов. Во-вторых, устанавливается, что эти унитарные операторы можно выбрать внутри алгебры, и, в-третьих, что спектр унитарной группы полуограничен, а ее спектральные подпространства тесно связаны со спектральными подпространствами группы автоморфизмов.

Теорема 3.2.46 (теорема Борхерса—Арвесона). *Пусть $t \mapsto \alpha_t$ — однопараметрическая группа *-автоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$, обладающая свойством σ-слабой непрерывности. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует такая сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа $t \mapsto U_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ с неотрицательным спектром, что при всех $A \in \mathfrak{M}$, $t \in \mathbb{R}$*

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^*;$$

(2) *в $\mathfrak{M}$ существует такая сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа $t \mapsto U_t$ с неотрицательным спектром, что $\alpha_t(A) = U_t A U_t^*$ при всех $A \in \mathfrak{M}$, $t \in \mathbb{R}$;*

(3) $$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} [\mathfrak{M}^\alpha [t, \infty) \mathfrak{H}] = \{0\}.$$

Если эти условия выполнены, то можно выбрать в качестве U группу

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itp}\, dP(p),$$

где $P(\cdot)$ — единственная проекторнозначная мера на $\mathbb{R}$, для которой

$$P[t, \infty) \mathfrak{H} = \bigcap_{s<t} [\mathfrak{M}^\alpha [s, \infty) \mathfrak{H}].$$

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Эта импликация не требует комментариев.

(1) $\Rightarrow$ (3). Пусть P — проекторнозначная мера, ассоциированная с U. Тогда $P([t, \infty)) = \mathbb{1}$ при $t \leqslant 0$ и

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} P([t, \infty)) \mathfrak{H} = \{0\}.$$

Согласно предложению 3.2.43, имеем также

$$\mathfrak{M}^\alpha[t, \infty)\,\mathfrak{H} = \mathfrak{M}^\alpha[t, \infty)\,P[0, \infty)\,\mathfrak{H} \subseteq P[t, \infty)\,\mathfrak{H}.$$

Отсюда сразу же вытекает (3).

(3) $\Rightarrow$ (2). Для каждого $t \in \mathbb{R}$ определим Q_t формулой

$$Q_t\mathfrak{H} = \bigcap_{s<t}[\mathfrak{M}^\alpha[s, \infty)\,\mathfrak{H}].$$

Ясно, что Q_t образуют убывающее семейство проекторов, непрерывное слева по t, и $Q_t \to 0$ сильно при $t \to \infty$. Кроме того, $Q_t = \mathbb{1}$ при $t \leqslant 0$. Тем самым на $\mathbb{R}$ имеется единственная проекторнозначная мера P, такая что $P[t, \infty) = Q_t$ при всех t.

Далее, так как $[\mathfrak{M}^\alpha[t, \infty)\,\mathfrak{H}] \in \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}$, то $P[t, \infty) \in \mathfrak{M}$ при всех t. Поэтому

$$U_t = \int e^{-itp}\,dP(p) \in \mathfrak{M}.$$

Но спектр U неотрицателен ввиду условия $P[0, \infty) = \mathbb{1}$. Определим на $\mathfrak{M}$ автоморфизмы β_t, полагая $\beta_t(A) = U_tAU_t^*$. По лемме 3.2.42 при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{M}^\alpha[s, \infty)\,\mathfrak{M}^\alpha[t, \infty) \subseteq \mathfrak{M}^\alpha[t+s, \infty).$$

Значит, при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{M}^\alpha[s, \infty)\,P[t, \infty)\,\mathfrak{H} \subseteq P[s+t, \infty)\,\mathfrak{H}.$$

Из предложения 3.2.43 тогда вытекает, что

$$\mathfrak{M}^\alpha[s, \infty) \subseteq \mathfrak{M}^\beta[s, \infty)$$

при всех $s \in \mathbb{R}$. Но тогда $\alpha_t = \beta_t$ при всех $t \in \mathbb{R}$, согласно предложению 3.2.44.

В качестве немедленного следствия теоремы 3.2.46 мы получим так называемую *теорему о дифференцированиях*, которую мы приводим и в варианте для алгебр фон Неймана, и в C^*-варианте. В C^*-случае результат может быть усилен при надлежащих добавочных условиях (см. замечания и комментарии к главе).

Следствие 3.2.47. *Пусть δ — всюду определенное, а следовательно ограниченное, симметрическое дифференцирование алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$. Тогда существует оператор $H = H^* \in \mathfrak{M}$ с $\|H\| \leqslant \|\delta\|/2$, такой что*

$$\delta(A) = i[H, A]$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Дифференцирование δ ограничено, в силу следствия 3.2.23, поэтому можно ввести непрерывную по норме группу α_t $*$-автоморфизмов $\mathfrak{M}$, действующую по формуле

$$\alpha_t(A) = e^{t\delta}(A) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\delta^n(A).$$

Из предложения 3.2.40 следует, что $\sigma(A) = i\,\sigma(\delta)$, и применение условия (3) того же предложения показывает, что $\mathfrak{M}^\alpha[t, \infty) = \{0\}$ при $t > \|\delta\|$. По теореме Борхерса—Арвесона должна найтись такая сильно непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов U_t с положительным самосопряженным генератором $H_0 \in \mathfrak{M}$, что $\alpha_t(A) = U_t A U_t^*$ при всех $A \in \mathfrak{M}$. Продифференцировав это равенство по t, получим при $t = 0$

$$\delta(A) = i[H_0, A].$$

Явная конструкция U_t, проведенная в теореме Борхерса—Арвесона, показывает, что $\sigma(H_0) \subseteq [0, \|\delta\|]$. Введем $H = H_0 - \|\delta\| \mathbb{1}/2$; для него $\|H\| \leqslant \|\delta\|/2$ и $\delta(A) = i[H, A]$.

Одним из вариантов этого результата в C^*-случае является

Следствие 3.2.48. *Пусть δ — всюду определенное, а потому ограниченное, симметрическое дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Для любого представления π алгебры $\mathfrak{A}$ найдется такой оператор $H = H^* \in \pi(\mathfrak{A})''$, что $\|H\| \leqslant \|\delta\|/2$ и*

$$\pi(\delta(A)) = i[H, \pi(A)]$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Сперва покажем, что если $\mathfrak{J} = \ker \pi$, то $\delta(\mathfrak{J}) \subseteq \mathfrak{J}$. Достаточно показать, что $\delta(A) \in \mathfrak{J}$ для $A \in \mathfrak{J}_+$. Но такие A представимы в виде $A = B^2$ с $B \in \mathfrak{J}$. Значит, $\delta(A) = \delta(B)B + B\delta(B) \in \mathfrak{J}$, так как $\mathfrak{J}$ — идеал. Следовательно, $\delta(\mathfrak{J}) \subseteq \mathfrak{J}$ и определение отображения $\tilde{\delta}$ на $\pi(\mathfrak{A})$ формулой $\tilde{\delta}(\pi(A)) = \pi(\delta(A))$ вполне корректно. Это дифференцирование $\tilde{\delta}$ алгебры $\pi(\mathfrak{A})$ по предложению 3.2.24 имеет единственное σ-слабо замкнутое расширение $\hat{\delta}$ на $\pi(\mathfrak{A})''$, причем $\|\hat{\delta}\| = \|\tilde{\delta}\| \leqslant \|\delta\|$. Остается применить следствие 3.2.47.

Хотя описание инфинитезимальных генераторов было приведено только для групп с компактным спектром, можно аналогичные заключения высказать и для групп с полуограниченным спектром, применив теорему 3.2.46. Генераторы таких групп имеют вид

$$\delta(A) = i[H, A],$$

где самосопряженный оператор H можно выбрать положительным и также присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$. В заключение заметим, что такой выбор H, который гарантирует принадлежность группы $U_t = e^{itH}$, выполняющей автоморфизмы, алгебре $\mathfrak{M}$, не всегда будет самым естественным. Если $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана в стандартной форме, то согласно следствию 2.5.32 существует вторая унитарная группа V_t со свойством

$$\alpha_t(A) = V_t A V_t^* = U_t A U_t^*.$$

Эта группа V_t вводится с помощью естественного конуса $\mathcal{P}$ и однозначно фиксируется требованием $V_t\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$. Однако «внутренняя группа» U_t и «группа естественного конуса» V_t не совпадают. Ситуация здесь следующая: группа $t \mapsto U_t J U_t J$ унитарна и $U_t J U_t J \mathcal{P} = \mathcal{P}$, а $U_t J U_t J A J U_{-t} J U_{-t} = \alpha_t(A)$, так что $V_t = U_t J U_t J$; но это означает, что генератор K группы V_t имеет вид

$$K = H - JHJ.$$

3.2.4. Дифференцирования и группы автоморфизмов

Основной источник интереса к симметрическим дифференцированиям и главная причина их изучения заключаются в том, что они служат генераторами однопараметрических групп автоморфизмов. В этом пункте мы охарактеризуем те дифференцирования, которые являются генераторами групп автоморфизмов. Простейший из критериев такого рода, относящийся к генераторам непрерывных по норме групп, можно извлечь из предложения 3.1.1 и следствия 3.2.23.

Следствие 3.2.49. *Пусть δ — линейный оператор на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$. Эквивалентны следующие условия:*

(1) *δ — симметрическое дифференцирование алгебры $\mathfrak{A}$, определенное на всей этой алгебре;*

(2) *δ — генератор некоторой непрерывной по норме однопараметрической группы *-автоморфизмов $t \mapsto \tau_t$ алгебры $\mathfrak{A}$.*

При их выполнении для каждого представления π алгебры $\mathfrak{A}$ найдется оператор $H = H^* \in \pi(\mathfrak{A})''$, такой что

$$\pi(\tau_t(A)) = e^{itH}\pi(A)e^{-itH}$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$, $t \in \mathbb{R}$.

Последнее из утверждений вытекает из следствия 3.2.48. Итак, в случае непрерывных по норме групп наличная алгебраическая структура гарантирует унитарную осуществимость автоморфизмов во всех представлениях π. Более того, соответствующую унитарную группу U_t можно выбрать внутри алгебры $\pi(\mathfrak{A})''$. Однако это последнее свойство весьма специфично, и не приходится ожндать, чтобы оно было справедливо в общем случае. Например, если алгебра $\mathfrak{A}$ абелева, то в силу сформулированного здесь следствия не существует нетривиальных групп автоморфизмов $\mathfrak{A}$, непрерывных по норме, равно как и нетривиальных ограниченных дифференцирований. С другой стороны, нетрудно построить примеры сильно непрерывных групп с неограниченными дифференцированиями в качестве генераторов; так, сдвиги на $C_0(\mathbb{R})$ порождаются операцией дифференцирования функций. Для таких более общих случаев дифференцирований мы получим критерии, характеризующие генераторы, комбинируя теорию пункта 3.1.2 для банаховых пространств с теорией положительных отображений пункта 3.2.1. Сперва сформулируем одиннадцать таких критериев для C^*-алгебр с единицей.

Теорема 3.2.50. *Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая C^*-алгебра с единицей $\mathbb{1}$, и пусть δ — замкнутый по норме линейный оператор с областью определения $D(\delta)$, плотной в $\mathfrak{A}$ по норме. Генератором сильно непрерывной однопараметрической группы *-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ этот δ будет тогда и только тогда, когда он удовлетво-*

ряет набору условий, в который входит по крайней мере один представитель от каждой из приведенных ниже групп (А), (Б), (В); *пригодны все комбинации условий, за исключением* (А2), (Б2), (В2).

(А1) $D(\delta)$ *является* $*$*-алгеброй, и* δ — *симметрическое дифференцирование* $\mathfrak{A}$;

(А2) $\mathbb{1} \in D(\delta)$ *и* $\delta(\mathbb{1}) = 0$;

(Б1) $(I + \alpha\delta)(D(\delta)) = \mathfrak{A}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(Б2) δ *обладает плотным множеством аналитических элементов*;

(В1) $\|(I + \alpha\delta)(A)\| \geqslant \|A\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in D(\delta)$;

(В2) $(I + \alpha\delta)(A) \geqslant 0$ *влечет* $A \geqslant 0$ *при всех* $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in D(\delta)$;

(В3) δ *и* $-\delta$ *диссипативны.*

После удаления условий (А2) *и* (В2) *утверждение теоремы остается в силе и для* $\mathfrak{A}$ *без единицы.*[1)]

Доказательство. Сперва допустим, что δ является генератором сильно непрерывной однопараметрической группы $t \mapsto \tau_t$ автоморфизмов $\mathfrak{A}$, сохраняющих инволюцию. Для этого случая (А1) и (А2) уже были получены нами во введении к пункту 3.2.2. Каждый из автоморфизмов τ_t будет изометрией, согласно следствию 2.3.4, так что условия (Б1), (Б2), (В1), (В3) вытекают из теорем 3.1.16 и 3.1.19. Поскольку τ_t сохраняют положительность, (В2) следует из формулы для преобразования Лапласа (предложение 3.1.6):

$$(I + \alpha\delta)^{-1}(A) = \int_0^\infty dt e^{-t} \tau_{-\alpha t}(A).$$

Перейдем теперь к доказательству достаточности любой тройки условий ((Аi), (Бj), (Вk)), за исключением (А2), (Б2), (В2), для случая алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей $\mathbb{1}$. Для начала заметим, что (А1) $\Rightarrow$ (А2), согласно следствию 3.2.30, так что можно считать $i = 2$, если пока оставить в стороне тройку ((А1), (Б2), (В2)). По теореме 3.1.19 и замечанию к ней, любая из четырех пар условий ((Бj), (Вk)), где $j = 1, 2$, $k = 1, 3$, гарантирует, что δ будет генератором сильно непрерывной однопараметрической группы изометрий τ_t. Но (А2) влечет при всех t равенство $\tau_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, так что каждое отображение τ_t в силу следствия 3.2.12 окажется $*$-автоморфизмом.

Далее, рассмотрим тройку ((А2), (Б1), (В2)). При выполнении условия (В2), если $(I + \alpha\delta)(A) = 0$, то $\pm A \geqslant 0$ и, следовательно, $A = 0$. Ввиду этого, (Б1) обеспечивает существование $(I + \alpha\delta)^{-1}$. Резольвента $(I + \alpha\delta)^{-1}$ сохраняет положительность, согласно (В2), а из (А2) следует, что $(I + \alpha\delta)^{-1}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Значит, $\|(I + \alpha\delta)^{-1}\| \leqslant 1$, в силу следствия 3.2.6, так что верно (В1). Но мы уже проверили достаточность тройки условий ((А2), (Б1), (В1)).

---

1) Если условие (Б2) заменить условием

(Б2′) самосопряженные аналитические элементы для δ плотны в $\mathfrak{A}_{sa}$,

то все 12 наборов условий так модифицированной теоремы характеризуют генераторы. «Исключительный случай» (А2), (Б2′), (В2) можно рассмотреть почти так же, как случай (А1), (Б2), (В2). Аналогично можно видоизменить теорему 3.2.51 (т. е. из предположений об аналитичности $A = A^*$ и справедливости неравенств $\alpha\mathbb{1} \leqslant A \leqslant \beta\mathbb{1}$ следует, что $\alpha\mathbb{1} \leqslant \tau_t(A) \leqslant \beta\mathbb{1}$ при $|t| < t_A/2$, так что автоморфизмы τ_t изометричны на самосопряженных элементах из $D(\delta)_{a}$, и т. д.).

Остается единственная комбинация ((А1), (Б2), (В2)). Пусть $D(\delta)_a$ обозначает множество аналитических элементов в $D(\delta)$. Для $A \in D(\delta)_a$ положим

$$\tau_t(A) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \delta^n(A) = \lim_{n \to \infty} \left(I + \frac{t}{n} \delta\right)^n (A)$$

при $|t| < t_A$, где t_A — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \|\delta^n(A)\|$. Если $\tau_t(A) \geqslant 0$ при некотором t, то при любом $\varepsilon > 0$ существует такое n, что $(I + (t/n)\delta)^n (A + \varepsilon \mathbb{1})$. Здесь мы использовали (А2). Но тогда $A + \varepsilon \mathbb{1} \geqslant 0$, согласно (В2), и поэтому $A \geqslant 0$. Теперь учтем, что $D(\delta)_a$ является *-алгеброй, так как δ — симметрическое дифференцирование (кстати, $t_{AB} = \min\{t_A, t_B\}$, $t_{A^*} = t_A$). Затем, при всех t с $|t| < t_{A^*A}/2 = t_A/2$.

$$A^*A = \tau_t(\tau_{-t}(A^*A)) \geqslant 0.$$

Отсюда мы заключаем, что $\tau_{-t}(A^*A) \geqslant 0$ при $|t| < t_A/2$. Применив эти рассуждения к положительному аналитическому элементу $\mathbb{1} - A^*A/\|A\|^2$ и пользуясь тем, что $\tau_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, получим

$$0 \leqslant \tau_t(A^*A) \leqslant \|A\|^2 \mathbb{1}, \quad |t| < \frac{t_A}{2}.$$

Поскольку δ — симметрическое дифференцирование, при $|t| < t_A/2$ имеем $\tau_t(A^*A) = \tau_t(A)^* \tau_t(A)$ и тем самым

$$\|\tau_t(A)\| \leqslant \|A\|, \quad |t| < \frac{t_A}{2}.$$

Наконец, это последнее свойство в сочетании с групповым свойством влечет условие изометричности

$$\|\tau_t(A)\| = \|A\|, \quad |t| < \frac{t_A}{2}.$$

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 3.1.19, можно убедиться, что τ расширяется до сильно непрерывной группы изометрий алгебры $\mathfrak{A}$ с генератором δ. Произведя вычисления с аналитическими элементами, можно проверить, что τ будет группой *-автоморфизмов. Последнее замечание в совокупности с теоремой 3.1.19 показывает достаточность всех условий ((А1), (Бi), (Вj)), $i = 1, 2$, $j = 1, 3$, также и для $\mathfrak{A}$ без единицы.

Разумеется, у теоремы 3.2.50 есть аналог для алгебр фон Неймана и σ-слабо непрерывных групп.

Теорема 3.2.51. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана, о которой предполагается еще, что она абелева или фактор. Пусть δ — линейный оператор с областью определения $D(\delta) \subset \mathfrak{M}$, плотной в $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-топологии, и пусть он $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-$\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-замкнут и $\mathbb{1} \in D(\delta)$. При этих предположениях δ будет генератором σ-слабо непрерывной однопараметрической группы *-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда выполняется один из наборов условий* ((Аi), (Бj), (Вk)), *за исключением* ((А2), (Б2), (В2)). *Эти условия таковы:*

(А1) $D(\delta)$ *является *-алгеброй, а δ — симметрическим дифференцированием;*

(А2) $\delta(\mathbb{1}) = 0$;

(Б1) $(I + \alpha\delta)(D(\delta)) = \mathfrak{M}$; $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(Б2) *единичный шар множества аналитических для* δ *элементов* σ-*слабо плотен в единичном шаре алгебры* $\mathfrak{M}$;

(В1) $\|(I + \alpha\delta)(A)\| \geqslant \|A\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in D(\delta)$;

(В2) $(I + \alpha\delta)(A) \geqslant 0$ *влечет* $A \geqslant 0$ *при всех* $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in D(\delta)$.

Теорема остается в силе для произвольной алгебры фон Неймана, если удалить (А2) *и заменить* (Б2) *более слабым условием* (Б2′) *множество аналитических для* δ *элементов* σ-*слабо плотно в* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Сначала заметим, что, согласно следствию 2.3.4 и теореме 2.4.23, всякий автоморфизм τ алгебры фон Неймана автоматически оказывается σ-слабо непрерывной изометрией. Поэтому σ-слабо непрерывная группа автоморфизмов алгебры фон Неймана будет автоматически C_0^*-группой изометрий в смысле определения 3.1.2, так как пространство $\mathfrak{M}$ сопряжено к $\mathfrak{M}_*$ (предложение 2.4.18). Таким образом, применима общая теория C_0^*-групп изометрий, в частности теорема 3.1.19. С помощью следствия 3.2.13 можно провести доказательство примерно так же, как и для C^*-алгебр, и детали мы опустим. Существенно только одно добавочное замечание: если δ — дифференцирование, то аналитические для δ элементы образуют *-алгебру. Следовательно, (Б2′) влечет (Б2) благодаря теореме Капланского о плотности (теорема 2.4.16).

После этого описания генераторов и групп для произвольных алгебр проиллюстрируем ситуацию на примере одного специального класса алгебр. А именно, в оставшейся части данного пункта мы продолжим изучение дифференцироваиий РГФ-алгебр, начатое в примере 3.2.25. Используя функциональное исчисление на областях определения, как в примере 3.2.34, можно показать, что если δ — замкиутое дифференцирование РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$, то существует возрастающая последовательность $\{\mathfrak{A}_n\}$ полных матричных подалгебр в $\mathfrak{A}$, имеющих одну и ту же единицу $\mathbb{1}$, с $\bigcup_n \mathfrak{A}_n \subseteq D(\delta)$, причем $\bigcup_n \mathfrak{A}_n$ плотно в $\mathfrak{A}$. Если δ — генератор, то $\mathfrak{A}_n$ можно выбрать так, чтобы $\bigcup_n \mathfrak{A}_n$ состояло из аналитических для δ элементов, но в этом случае неизвестно, удастся ли выбрать их так, чтобы $\bigcup_n \mathfrak{A}_n$ было существенной областью определения для δ. Этим мотивировано следующее

Предложение 3.2.52. *Если* δ — *дифференцирование* РГФ-*алгебры* $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{n \geqslant 0} \mathfrak{A}_n}$, *определенное на* $D(\delta) = \bigcup_n \mathfrak{A}_n$, *то* δ *допускает замыкание и существуют такие элементы* $H_n = H_n^* \in \mathfrak{A}$, *что*

$$\delta(A) = \delta_n(A) \equiv i\,[H_n, A]$$

при всех $A \in \mathfrak{A}_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Если $(I \pm \delta)(\bigcup_n \mathfrak{A}_n)$ — *плотные в* $\mathfrak{A}$ *множества, то замыкание* $\bar{\delta}$ *дифференцирования* δ *является генератором некоторой* *сильно непрерывной однопараметрической группы *-автоморфизмов τ_t алгебры $\mathfrak{A}$. Кроме того, для всех $A \in \mathfrak{A}$*

$$\tau_t(A) = \lim_{n\to\infty} e^{t\delta_n}(A),$$

причем сходимость (по норме) равномерна по t на компактах.

Доказательство. Существование H_n продемонстрировано в примере 3.2.25. Согласно предложению 3.2.22, $\pm\delta$, а стало быть, и $\pm\bar{\delta}$ диссипативны. Из леммы 3.1.15 следует, что $\|(I+\alpha\bar{\delta})(A)\| \geqslant \|A\|$ при всех $A \in D(\bar{\delta})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Замкнутость $\bar{\delta}$ позволяет заключить, что $(I \pm \bar{\delta})(D(\bar{\delta})) = \mathfrak{A}$, и разложением в ряд Неймана проверяется, что $(I+\alpha\bar{\delta})^{-1}$ существует и $\|(I+\alpha\bar{\delta})^{-1}\| \leqslant 1$. По теореме 3.2.50, ((А1), (Б1), (В1)), оператор $\bar{\delta}$ является генератором группы *-автоморфизмов τ_t. Поскольку $\bigcup_n \mathfrak{A}_n$ составляет существенную область определения $\bar{\delta}$, а а $\delta_m(A) \to \delta(A)$ при $A \in \bigcup_n \mathfrak{A}_n$, то из теоремы 3.1.28 вытекает, что

$$\tau_t(A) = \lim_{n\to\infty} e^{t\delta_n} A$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$, причем сходимость равномерна по t на конечных промежутках.

Теперь рассмотрим условие на последовательность H_n в $\mathfrak{A}$, обеспечивающее плотность множества $(I+\delta)(\bigcup_n \mathfrak{A}_n)$. Физически это условие интерпретируется как условие линейного роста поверхностной энергии конечных подсистем с возрастанием их объема (см. главу 6).

Теорема 3.2.53. *Примем те же обозначения, что и в предложении 3.2.52. Предположим, что имеются такая двойная последовательность*

$$K_{n,m} \in \mathfrak{A}_{n+m},$$

$n = 1, 2, \ldots, m = 0, 1, \ldots,$ и такие константы $M, \alpha > 0$, что

$$\|H_n - K_{n,m}\| \leqslant Mne^{-\alpha m}.$$

*При этих условиях $(I \pm \delta)(\bigcup_n \mathfrak{A}_n)$ плотны в $\mathfrak{A}$ и, следовательно, замыкание $\bar{\delta}$ дифференцирования δ будет генератором некоторой сильно непрерывной однопараметрической группы *-автоморфизмов τ. Далее, для всех $A \in \mathfrak{A}$*

$$\tau_t(A) = \lim_{n\to\infty} e^{itH_n} A e^{-itH_n},$$

причем сходимость (по норме) равномерна по t на конечных промежутках.

Эта теорема сразу же выводится из предложения 3.2.52 и теоремы 3.1.34 с помощью оценки

$$\left\| \delta|_{\mathfrak{A}_n} - \delta_{iK_{n,m}}|_{\mathfrak{A}_n} \right\| \leqslant 2\|H_n - K_{n,m}\|.$$

3.2.5. Пространственные дифференцирования и инвариантные состояния

В пункте 3.2.3 при рассмотрении ограниченных дифференцирований алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ было установлено, что каждое такое дифференцирование имеет вид

$$\delta(A) = i[H, A], \qquad (*)$$

где H — ограниченный оператор, который можно даже выбрать и среди элементов $\mathfrak{M}$. Рассмотрим более общий пример, когда сильно непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов $t \in \mathbb{R} \mapsto U_t$, для которых $U_t \mathfrak{M} U_{-t} \subseteq \mathfrak{M}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, задает семейство отображений

$$A \in \mathfrak{M} \to \alpha_t(A) = U_t A U_t^*.$$

Это слабо* непрерывная группа *-автоморфизмов $\mathfrak{M}$, генератор которой δ имеет вид

$$\delta(A) = i[H, A].$$

В данном случае H является самосопряженным генератором унитарной группы U_t. Теорема Борхерса—Арвесона (теорема 3.2.46) гарантирует, что при условии полуограниченности H его можно выбрать среди операторов, присоединенных к $\mathfrak{M}$.

Эти примеры показывают, что изучение дифференцирований вида $(*)$ представляет интерес; такие дифференцирования мы называем пространственными:

Определение 3.2.54. Симметрическое дифференцирование δ, заданное на некоторой подалгебре C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется *пространственным*, если существует в $\mathfrak{H}$ такой симметрический оператор H с областью определения $D(H)$, что $D(\delta) D(H) \subseteq D(H)$ и на $D(H)$

$$\delta(A) = i[H, A], \quad A \in D(\delta).$$

Мы говорим в таком случае, что H *выполняет* (или *осуществляет*) δ.

Отметим, что в предложении 3.2.28 уже был получен критерий пространственности дифференцирования. А именно, достаточно, чтобы существовало такое состояние $\omega(A) = (\Omega, A\Omega)$ на $\mathfrak{A}$, что Ω — циклический для $\mathfrak{A}$ вектор и

$$|\omega(\delta(A))|^2 \leqslant L\{\omega(A^*A) + \omega(AA^*)\}$$

при всех $A \in D(\delta)$ и некотором $L \geqslant 0$. В частности, этот критерий применим, если ω инвариантно относительно δ, т. е.

$$\omega(\delta(A)) = 0$$

при всех $A \in D(\delta)$. Однако если ω инвариантно, то δ не просто является пространственным — можно еще так выбрать H, чтобы $\Omega \in D(H)$ и

$$H\Omega = 0.$$

Инвариантные состояния особенно важны в физических приложениях, и они будут вторым предметом наших рассмотрений в этом пункте.

Вообще говоря, существует несколько неэквивалентных способов определить пространственное дифференцирование δ. Разные возможности связаны с тем, что коммутаторы $[H, A]$ при неограниченном H — это объекты, не имеющие однозначного определения, и можно принять разные соглашения для придания им смысла. Каждое из этих соглашений приводит к своему определению пространственного дифференцирования. Если, однако, δ выполняется самосопряженным H, то никакой неопределенности не возникает, как показывает следующее

Предложение 3.2.55. *Пусть H — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть*

$$\alpha_t(A) = e^{itH}Ae^{-itH}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}),$$

соответствующая однопараметрическая группа автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Пусть δ обозначает инфинитезимальный генератор этой группы. Если $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, то следующие условия эквивалентны:

(1) $A \in D(\delta)$;

(2) *найдется такая существенная область определения D для H, что полуторалинейная форма*

$$\psi, \varphi \in D \times D \to i(H\psi, A\varphi) - i(\psi, AH\varphi)$$

ограничена;

(3) *найдется такая существенная область определения D для H, что $AD \subseteq D$ и отображение*

$$\psi \in D \mapsto i[H, A]\psi$$

ограничено.

Если условие (2) выполнено, то ограниченным оператором, ассоциированным с указанной полуторалинейной формой, будет $\delta(A)$. Аналогично, ограниченное отображение из условия (3) определяет $\delta(A) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Переходя к замыканиям операторов, убеждаемся, что выполнение (2) и (3) влечет выполнение тех же условий с $D = D(H)$; обратная импликация очевидна. Таким образом, в дальнейшем можно считать $D = D(H)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $A \in D(\delta)$ и $\psi, \varphi \in D(H)$. Тогда

$$(\psi, \delta(A)\varphi) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{(\psi, e^{itH}Ae^{-itH}\varphi) - (\psi, A\varphi)\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}(e^{-itH} - I)\psi, Ae^{-itH}\varphi\right) + \lim_{t\to 0}\left(\psi, A\frac{1}{t}(e^{-itH} - I)\varphi\right) =$$

$$= (-iH\psi, A\varphi) + (\psi, A(-iH)\varphi).$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Предположим, что существует такой ограниченный оператор B, что при $\psi, \varphi \in D(H)$

$$(H\psi, A\varphi) = (\psi, AH\varphi) - i(\psi, B\varphi).$$

Это соотношение показывает, что при фиксированном $\varphi \in D(H)$ функционал $\psi \longmapsto (H\psi, A\varphi)$ непрерывен. Значит, $A\varphi \in D(H^*) = D(H)$, а также $(H\psi, A\varphi) = (\psi, HA\varphi)$. Поэтому

$$(\psi, B\varphi) = i(\psi, [H, A]\varphi).$$

Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) тривиальна, и остается только проверить, что

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что A удовлетворяет условию (2) и B — соответствующий ограниченный оператор. Тот же прием, который был применен в доказательстве первой части теоремы, приводит при $\psi, \varphi \in D(H)$ к равенству

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\psi, (\alpha_{s+t}(A) - \alpha_s(A))\varphi)}{t} = (\psi, \alpha_s(B)\varphi),$$

Следовательно,

$$(\psi, (\alpha_s(A) - A)\varphi) = \int_0^s dt\,(\psi, \alpha_t(B)\varphi),$$

так что мы получаем соотношение

$$\alpha_s(A) = A + \int_0^s dt\alpha_t(B),$$

которое означает, что $A \in D(\delta)$ и $\delta(A) = B$.

Далее, заметим, что пространственное дифференцирование алгебры фон Неймана, которое выполняется самосопряженным оператором H, имеет расширение, порождающее слабо* непрерывную группу *-автоморфизмов α_t алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Явное выражение для α_t таково:

$$\alpha_t(B) = e^{itH}Be^{-itH}$$

при всех $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Используя характеризации генераторов, данные в предыдущем пункте, например теорему 3.2.51, можно вывести некоторые типичные свойства генераторов.

Следствие 3.2.56. *Пусть δ — симметрическое пространственное дифференцирование алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, т. е. при всех $A \in D(\delta)$*

$$\delta(A) = i[H, A].$$

Предположим, что оператор H самосопряжен. Тогда δ имеет $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-замыкание и

$$\|(I-\alpha\delta)(A)\| \geqslant \|A\|$$

при всех $A \in D(\delta)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

После этих предварительных замечаний обратимся к анализу свойств инвариантных состояний. Итак, будут рассматриваться пространственные дифференцирования $\delta(A) = i[H, A]$ операторной алгебры $\mathfrak{M}$ с таким циклическим вектором Ω, для которого $H\Omega = 0$. Полученные в пункте 3.2.4 характеризацни генераторов значительно упрощаются при наличии инвариантного состояния. Вот типичный результат в C^*-случае:

Следствие 3.2.57. *Пусть δ — симметрическое дифференцирование C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, и пусть ω — такое состояние, что $\omega(\delta(A)) = 0$ при всех $A \in D(\delta)$ и, кроме того, ассоциированное с ω представление $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$ точно. Предположим еще, что*

или $\overline{R(I \pm \delta)} = \mathfrak{A}$,

где черта означает замыкание по норме,

или δ обладает плотным множеством аналитических элементов.

При этих условиях δ допускает замыкание по норме и его замыкание $\bar{\delta}$ порождает сильно непрерывную однопараметрическую группу $*$-автоморфизмов $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Дифференцирование δ можно замкнуть, согласно предложению 3.2.26, и замыкание будет пространственным дифференцированием, согласно предложению 3.2.28. Если H обозначает симметрический оператор, выполняющий $\bar{\delta}$, то $H\Omega = 0$ и, следовательно, $\pi(\bar{\delta}(A))\Omega = iH\pi(A)\Omega$ при всех $A \in D(\bar{\delta})$. Любое из двух указанных выше предположений влечет поэтому самосопряженность в существенном оператора H (см. пример 3.1.21). Таким образом, применив следствие 3.2.56, можно заключить, что $\|(I \pm \bar{\delta})(A)\| \geqslant \|A\|$ при всех $A \in D(\bar{\delta})$. Теорема 3.2.50 утверждает теперь, что $\bar{\delta}$ — генератор.

Для последнего следствия имеется утверждение, до некоторой степени обратное. Если $\mathfrak{A}$ — простая C^*-алгебра с единицей и α_t — сильно непрерывная однопараметрическая группа $*$-автоморфизмов с генератором δ, то существует α_t-инвариантное состояние: $\omega(\alpha_t(A)) = \omega(A)$, $A \in \mathfrak{A}$. Представление π_ω автоматически окажется точным, потому что $\mathfrak{A}$ проста и $\omega(\delta(A)) = 0$, $A \in D(\delta)$. Существование ω устанавливается с помощью усреднения состояний семейства $\omega_t(A) = \omega_0(\alpha_t(A))$, при этом мы опираемся на слабую $*$ компактность множества состояний на $\mathfrak{A}$.

У следствия 3.2.57 есть очевидный аналог для случая алгебр фон Неймана, но для них верен и более сильный результат.

Предложение 3.2.58. *Пусть пространственное дифференцирование δ алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ выполняется симметрическим* *оператором H. Предположим, что $\mathfrak{M}$ имеет циклический вектор Ω, для которого $H\Omega = 0$. Предположим также, что существует такая $*$-подалгебра $\mathfrak{D} \subseteq D(\delta)$, что*

(1) *$\mathfrak{D}$ сильно плотна в $\mathfrak{M}$,*

(2) *$\delta(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}$,*

(3) *$\mathfrak{D}\Omega$ состоит из аналитических для H элементов.*

Тогда оператор H существенно самосопряжен, и если $\overline{H}$ — его замыкание, то

$$e^{it\overline{H}}\mathfrak{M}e^{-it\overline{H}} = \mathfrak{M}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Множество $\mathfrak{D}\Omega$ образует плотное множество аналитических для H элементов и $H\mathfrak{D}\Omega \subseteq \mathfrak{D}\Omega$. Поэтому $\overline{H}$ самосопряжен (см. пример 3.1.21). То что мы имеем дело с автоморфизмами, будет доказано, если мы установим, что

$$e^{it\overline{H}}\mathfrak{M}'e^{-it\overline{H}} = \mathfrak{M}',$$

так как тогда

$$\left[e^{it\overline{H}}Ae^{-it\overline{H}}, \ A'\right] = e^{it\overline{H}}\left[A, \ e^{-it\overline{H}}A'e^{it\overline{H}}\right]e^{-it\overline{H}} = 0$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$ и $A' \in \mathfrak{M}'$. Для $A, B, C \in \mathfrak{D}$ и $A' \in \mathfrak{M}'$ определим функцию g формулой

$$g(t) = \left(B\Omega, \ \left[A, \ e^{-it\overline{H}}A'e^{it\overline{H}}\right] C\Omega\right).$$

В силу цикличности Ω и плотности $\mathfrak{D}$, достаточно показать, что $g(t) = 0$ при всех таких наборах A, B, C и A'. Но

$$g(t) = \left(e^{it\overline{H}}A^*B\Omega, \ A'e^{it\overline{H}}C\Omega\right) - \left(e^{it\overline{H}}B\Omega, \ A'e^{it\overline{H}}AC\Omega\right),$$

так что при нашем выборе A, B, C обеспечена аналитичность g. Далее,

$$\begin{aligned}\frac{d^ng}{dt^n}(0) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((iH)^k A^*B\Omega, \ A'(iH)^{n-i}C\Omega\right) \\ &\qquad - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((iH)^{n-k}B\Omega, \ A'(iH)^k AC\Omega\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(A'^*\Omega, \ \delta^k(B^*A)\,\delta^{n-k}(C)\,\Omega\right) \\ &\qquad - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(A'^*\Omega, \ \delta^{n-k}(B^*)\,\delta^k(AC)\,\Omega\right) \\ &= \left(A'^*\Omega, \ \delta^n(B^*AC)\,\Omega\right) - \left(A'^*\Omega, \ \delta^n(B^*AC)\,\Omega\right) = 0.\end{aligned}$$

Тем самым $g(t) = 0$ как аналитическая функция от t, т. е. мы имеем дело с автоморфизмами.

Приведенное предложение подчеркивает роль, которую играют аналитические элементы оператора H, выполняющего дифференцирование, но в дальнейшем исследовании пространственных дифференцирований и инвариантных состояний еще большую роль будут играть свойства множеств $R(I \pm iH)$.

В физических приложениях к описанию динамики или к описанию симметрий особенно важное значение имеет анализ двух типичных случаев.

Один из них возникает обычно в связи с изучением основных состояний. Оператор H интерпретируется как оператор энергии, или гамильтониан, его положительность либо предполагается, либо гарантируется построением. Собственный вектор Ω соответствует тогда состоянию системы с минимальной энергией, т. е. *основному состоянию.*

Во втором случае H не обязательно выступает как гамильтониан, и предположения о положительности не делается. Однако предполагается, что его собственный вектор Ω является циклическим и отделяющим для алгебры фон Неймана. Такая ситуация характерна для описания равновесных состояний при конечной температуре в статистической механике.

Мы рассмотрим для таких двух случаев различные критерии, позволяющие судить, когда дифференцирование порождает группу автоморфизмов. Хотя оба случая имеют свои особенности, следующий результат подчеркивает наличие общности.

Теорема 3.2.59. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с циклическим вектором Ω, а δ — пространственное дифференцирование $\mathfrak{M}$, выполнимое самосопряженным оператором H, для которого $\Omega \in D(H)$ и $H\Omega = 0$. Пусть $D(\bar{\delta})$ обозначает множество*

$$D(\bar{\delta}) = \{A;\ A \in \mathfrak{M},\ i[H, A] = \bar{\delta}(A) \in \mathfrak{M}\},$$

и предположим, что $D(\bar{\delta})\,\Omega$ образует существенную область определения для H. Далее, предположим, что

либо $H \geqslant 0$,
либо Ω — отделяющий вектор для $\mathfrak{M}$.

При таких предположениях эквивалентны следующие условия:

(1) $e^{itH}\mathfrak{M}e^{-itH} = \mathfrak{M},\ t \in \mathbb{R}$;
(2) $e^{itH}\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}_+\Omega,\ t \in \mathbb{R}$;
(3) $e^{itH}\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega},\ t \in \mathbb{R}$;
(4) $(I \pm iH)^{-1}\,\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq D(\bar{\delta})_+\Omega$;
(5) $(I \pm iH)^{-1}\,\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \mathfrak{M}_+\Omega$;
(6) $(I \pm iH)^{-1}\,\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}$.

(Черта обозначает слабое (сильное) замыкание.)

Доказательство. Некоторые импликации очевидны и не связаны с полным перечнем предположений, например (2) $\Rightarrow$ (3) и (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6). А так как $H\Omega = 0$ влечет $e^{itH}\Omega = \Omega$ и из (1) следует, что

$$e^{itH}\mathfrak{M}_+e^{-itH} = \mathfrak{M}_+,$$

то (1) $\Rightarrow$ (2). Условие (1) дает также соотношение

$$\int_0^\infty dt e^{-t} e^{\mp itH} \mathfrak{M}_+ e^{\pm itH} \subseteq D(\bar\delta)_+,$$

и, применив обе его части к Ω, получим

$$(I \pm iH)^{-1} \mathfrak{M}_+\Omega \subseteq D(\bar\delta)_+\,\Omega.$$

Тем самым (1) $\Rightarrow$ (4). Далее, условие (6) в сочетании с простым применением ряда Неймана для резольвенты $(I + i\alpha H)^{-1}$ показывает, что при всех $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(I + i\alpha H)^{-1} \mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}.$$

Поэтому

$$e^{itH}\mathfrak{M}_+\Omega = \lim_{n\to\infty} (I - itH/n)^{-n}\, \mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega},$$

т. е. (6) $\Rightarrow$(3).

В обоих рассматриваемых нами случаях доказательство завершает демонстрация импликации (3) $\Rightarrow$ (1). Только на этом шаге привлекается предположение о существенной области определения. Рассуждения приходится проводить порознь для каждого случая.

Случай $H \geqslant 0$. (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $A \in \mathfrak{M}_{\text{sa}}$, $A' \in \mathfrak{M}'_{\text{sa}}$ и функция g определена формулой

$$g(t) = (A'\Omega,\ U_t A\Omega),$$

где $U_t = e^{itH}$. Положительность H гарантирует возможность аналитически продолжить g в верхнюю полуплоскость, и

$$g(t_1 + it_2) = \left(A'\Omega,\ U_{t_1} e^{-t_2 H} A\Omega\right).$$

Кроме того, при всех $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = (A'\Omega,\ U_t A\Omega) = \lim_{n\to\infty} (A'\Omega,\ B_n\Omega) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (B_n\Omega,\ A'\Omega) = (U_t A\Omega,\ A'\Omega) = \overline{g(t)},$$

где $B_n \in \mathfrak{M}_{\text{sa}}$ выбираются так, что последовательность $B_n\Omega$ сходится к $U_t A\Omega$. Такой выбор возможен ввиду условия (3). Значит, g принимает вещественные значения на вещественной оси, и по принципу симметрии Шварца существует такая целая функция $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{G}(z) = g(z) = \overline{\mathfrak{G}(\bar z)}$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Теперь заметим, что при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$

$$|\mathfrak{G}(z)| = |\mathfrak{G}(\bar z)| \leqslant \|A\Omega\|\, \|A'\Omega\|;$$

следовательно, $\mathfrak{G}$ — константа по теореме Лиувилля. В частности, $g(t) = g(0)$, т. е.

$$(A\Omega,\ U_{-t}A'\Omega) = (A\Omega,\ A'\Omega)$$

при всех $A \in \mathfrak{M}_{\text{sa}}$ и $A' \in \mathfrak{M}'_{\text{sa}}$. Но каждый элемент A из $\mathfrak{M}$ или из $\mathfrak{M}'$ представим в виде $A = B + iC$, где $B, C \in \mathfrak{M}_{\text{sa}}$ или $\mathfrak{M}'_{\text{sa}}$. Поэтому последнее соотношение верно для всех $A \in \mathfrak{M}$ и $A' \in \mathfrak{M}'$, а цикличность Ω приводит к равенству $U_{-t}A'\Omega = A'\Omega$ при всех $A' \in \mathfrak{M}'$. Отсюда $A'\Omega \in D(H)$ и $HA'\Omega = 0$. Далее, $A\psi \in D(H)$, если $\psi \in D(H)$ и $A \in D(\bar\delta)$. Тем самым $AA'\Omega \in D(H)$, что равносильно $A'A\Omega \in D(H)$. Значит,

$$HA'A\Omega = HAA'\Omega = [H, A]\,A'\Omega = A'\,[H, A]\,\Omega = A'HA\Omega.$$

Учитывая, что $D(\bar{\delta})\,\Omega$ — существенная область определения для H, а A' ограничен, получаем $HA'\psi = A'H\psi$ при всех $\psi \in D(H)$, так что

$$(e^{itH}A' - A'e^{itH})\psi = i\int_0^t ds e^{isH}[H, A']e^{i(t-s)H}\psi = 0.$$

Это показывает, что $U_t \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, $U_t\mathfrak{M}U_t^* = \mathfrak{M}$.

Случай отделяющего вектора Ω. (3) $\Rightarrow$ (1). Мы установим эту импликацию неявно, через цепочку (3) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1). На первом шаге вновь используем преобразование Лапласа:

$$(I \pm iH)^{-1}\,\mathfrak{M}_+\Omega = \int_0^\infty dt e^{-t}e^{\mp itH}\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}.$$

Второй шаг состоит в применении леммы 3.2.19 к операторам $T_\pm = (I \pm iH)^{-1}$. Решающий третий шаг в этой цепочке — вывод импликации (5) $\Rightarrow$ (4). Для этого сначала заметим, что, разлагая произвольный элемент $A \in \mathfrak{M}$ на положительные элементы, из

$$(I + iH)^{-1}\,A\Omega = B\Omega$$

можно получить

$$(I + iH)^{-1}\,A^*\Omega = B^*\Omega.$$

Затем зафиксируем $A \in \mathfrak{M}_+$ и $C = C^* \in D(\delta)$. Введем B, полагая

$$(I + iH)^{-1}\,A\Omega = B\Omega.$$

Поскольку

$$\delta(C)\,B\Omega + C\,(I + iH)\,B\Omega = (I + iH)\,CB\Omega,$$

то $CB\Omega \in D(H)$ и $(I + iH)^{-1}\,F\Omega = CB\Omega$, где $F = \delta(C)\,B + CA$. Следовательно,

$$(I + iH)^{-1}F^*\Omega = BC\Omega,$$

т. е. $BC\Omega \in D(H)$ и $(I + iH)\,BC\Omega = AC\Omega + B\delta(C)\,\Omega$. Последнее соотношение переписывается в виде

$$i\,(HB - BH)\,C\Omega = (A - B)\,C\Omega.$$

Теперь его можно распространить по линейности на несамосопряженные $C \in D(\delta)$, и тогда из предложения 3.2.55 следует, что $B \in D(\delta)_+$, т. е. $(I + iH)^{-1}\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq D(\delta)_+\,\Omega$.

Применив те же рассуждения к $(I - iH)^{-1}$, мы убедимся в справедливости (4). Для проверки условия (1) вновь воспользуемся разложением произвольного элемента $\mathfrak{M}$ в линейную комбинацию четырех положительных элементов и из (4) получим

$$(I \pm iH)^{-1}\,\mathfrak{M}\Omega \subseteq D(\bar{\delta})\,\Omega.$$

Поэтому

$$\mathfrak{M}\Omega \subseteq (I \pm iH)\,D(\bar{\delta})\,\Omega = (I \pm \bar{\delta})\,(D(\bar{\delta}))\,\Omega \subseteq \mathfrak{M}\Omega.$$

Поскольку вектор Ω — отделяющий, последнее условие эквивалентно условию

$$(I \pm \bar{\delta})\,(D(\bar{\delta})) = \mathfrak{M}.$$

Но согласно следствию 3.2.56 пространственное дифференцирование $\bar{\delta}$ обладает $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-замыканием и

$$\|\,I + \alpha\bar{\delta})\,(A)\,\| \geqslant \|\,A\,\|$$

при всех $A \in D(\bar{\delta})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Сопоставив все эти факты, мы убеждаемся в $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-непрерывности резольвенты $(I+\alpha\bar{\delta})^{-1}$, так что $\bar{\delta}$ будет $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-замкнутым. Теперь из теоремы 3.2.51 следует (1).

В процессе доказательства теоремы мы фактически получили для случая $H \geqslant 0$ еще и

Следствие 3.2.60. *В предположениях теоремы 3.2.59, при $H \geqslant 0$ эквивалентны следующие условия:*

(1) $e^{itH}\mathfrak{M}e^{-itH} = \mathfrak{M}$, $t \in \mathbb{R}$;

(2) $e^{itH} \in \mathfrak{M}$, $t \in \mathbb{R}$;

(3) $e^{itH}A'\Omega = A'\Omega$, $A' \in \mathfrak{M}'$, $t \in \mathbb{R}$;

(4), (4′) $e^{itH}\mathfrak{M}_{\text{sa}}\Omega \subseteq \mathfrak{M}_{\text{sa}}\Omega$, $(e^{itH}\mathfrak{M}_{\text{sa}}\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_{\text{sa}}\Omega})$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Ясно, что (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (4′), а доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (1) в теореме 3.2.59 содержит цепочку (4′) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

Условия, собранные в этом следствии, типичны для ситуаций, когда $H \geqslant 0$ и изучаются основные состояния; отметим, что условия (2) и (3) заведомо не могут выполняться, если вектор Ω — отделяющий.

Заметим еще, что в предположениях теоремы 3.2.59 можно исключать требование на $D(\overline{\delta})\,\Omega$, если при наличии отделяющего вектора Ω нас интересуют лишь эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (4) и (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6). Более того, без предположения, что $D(\bar{\delta})\,\Omega$ — существенная область определения H, любое из эквивалентных условий (2), (3), (5) или (6) гарантирует по теореме 3.2.18, что отображения $A \in \mathfrak{M}_+ \mapsto \alpha_t(A) \in \mathfrak{M}_+$, $t \in \mathbb{R}$, заданные формулой

$$e^{itH}A\Omega = \alpha_t(A)\,\Omega,$$

расширяются до однопараметрической группы йордановых автоморфизмов алгебры $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — фактор или абелева алгебра, то эти автоморфизмы будут автоматически *-автоморфизмами, согласно следствию 3.2.13, и тогда

$$\alpha_t(A) = e^{itH}Ae^{-itH}.$$

Но для произвольной $\mathfrak{M}$ условие существенной самосопряженности H на $D(\bar{\delta})\,\Omega$ является ключевым при выяснении того, образуют ли α_t группу *-автоморфизмов. Дело не в том, что это условие было использовано нами в доказательстве, — можно привести контрпримеры, когда без него нельзя обойтись. С другой стороны, следующая теорема (теорема 3.2.61) демонстрирует, что такое условие почти достаточно для получения группы *-автоморфизмов и без предположения об инвариантности $\mathfrak{M}_+\Omega$ относительно e^{itH}. Эта теорема обобщает теорему 3.2.59 применительно к случаю отделяющего Ω. Подчеркнем, что здесь не делается явного предположения о σ-слабой плотности области определения δ.

Теорема 3.2.61. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, обладающая циклическим и отделяющим вектором Ω. Пусть H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, такой что $H\Omega = 0$. Введем множество*

$$D(\delta) = \{A \in \mathfrak{M};\ i[H, A] \in \mathfrak{M}\}.$$

Пусть Δ обозначает модулярный оператор, ассоциированный с парой $(\mathfrak{M}, \Omega)$, и пусть $\mathfrak{H}_\#$ — гильбертово пространство графика, отвечающее оператору $\Delta^{1/2}$. Следующие условия эквивалентны:

(1) $e^{itH}\mathfrak{M}e^{-itH} = \mathfrak{M},\ t \in \mathbb{R}$;

(2) (а) $D(\delta)\Omega$ *образует существенную область определения для* H,

(б) H *и* Δ *сильно коммутируют*, т. е.

$$\Delta^{is}H\Delta^{-is} = H,\ s \in \mathbb{R};$$

(3) *сужение H на $D(\delta)\Omega$, рассматриваемое как оператор в $\mathfrak{H}_\#$, в существенном самосопряжено.*

Примечание. *Гильбертово пространство графика* $\mathfrak{H}_\#$ определяется как линейное пространство $D(\Delta^{1/2})$, снабженное скалярным произведением

$$(\psi, \varphi)_\# = (\Delta^{1/2}\psi, \Delta^{1/2}\varphi) + (\psi, \varphi).$$

Так как $\mathfrak{M}\Omega \subseteq D(\Delta^{1/2})$, то сужение H на $D(\delta)\Omega$ будет корректно определенным оператором в $\mathfrak{H}_\#$, поскольку

$$D(\delta)\Omega \subseteq \mathfrak{H}_\#, \quad iHD(\delta)\Omega = \delta(D(\delta))\Omega \subseteq \mathfrak{M}\Omega \subseteq \mathfrak{H}_\#,$$

где $\delta(B) = i[H, B]$ при $B \in D(\delta)$. Это сужение является симметрическим оператором в $\mathfrak{H}_\#$, потому что при всех $A, B \in D(\delta)$ справедливы следующие соотношения, где J — модулярная инволюция, ассоциированная с Ω, а $S = J\Delta^{1/2}$:

$$\begin{aligned}(A\Omega, HB\Omega)_\# &= (A\Omega, HB\Omega) + (\Delta^{1/2}A\Omega, \Delta^{1/2}(-i\delta(B))\Omega) = \\ &= (HA\Omega, B\Omega) - i(S\delta(B)\Omega, SA\Omega) = \\ &= (HA\Omega, B\Omega) - i(\delta(B^*)\Omega, A^*\Omega) = \\ &= (HA\Omega, B\Omega) - (HB^*\Omega, A^*\Omega) = \\ &= (HA\Omega, B\Omega) - (B^*\Omega, HA^*\Omega) = \\ &= (HA\Omega, B\Omega) + (\Delta^{1/2}HA\Omega, \Delta^{1/2}B\Omega) = (HA\Omega, B\Omega)_\#.\end{aligned}$$

Следовательно, условие (3) в формулировке теоремы имеет смысл.

Доказательство. Мы докажем, что (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). На трудном этапе доказательства ((2) $\Rightarrow$ (1)) применены некоторые результаты по группам модулярных автоморфизмов, вывод которых мы отложим до раздела 5.3.

Если выполняется (1), то при всех $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$(I + i\alpha H)D(\delta)\Omega = R(I + \alpha\delta)\Omega = \mathfrak{M}\Omega,$$

согласно предложению 3.2.55 и теореме 3.2.51. Но $\mathfrak{M}\Omega$ представляет собой существенную область определения для $S = J\Delta^{1/2}$, поэтому $\mathfrak{M}\Omega$ плотно в $\mathfrak{H}_{\#}$. Согласно примечанию к теореме, сужение H на $D(\delta)\,\Omega$ — симметрический оператор в $\mathfrak{H}_{\#}$, причем это существенно самосопряженный оператор, как показывает пример 3.1.21.

(3) $\Rightarrow$ (2). Условие (3) позволяет утверждать, что $(I + i\alpha H)\,D(\delta)\,\Omega$ плотно в $\mathfrak{H}_{\#}$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тем самым $(I + i\alpha H)\,D(\delta)\,\Omega$ плотно в $\mathfrak{H}$ относительно обычной нормы, т. е. $D(\delta)\,\Omega$ оказывается для H существенной областью определения. Принимая во внимание, что $\delta(A^*) = \delta(A)^*$ для $A \in D(\delta)$, получаем

$$(I + i\alpha H)\,S\xi = S\,(I + i\alpha H)\,\xi$$

при $\xi \in D(\delta)\,\Omega$ и $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; здесь $S = J\Delta^{1/2}$, как и выше. Таким образом,

$$S\,(I + i\alpha H)^{-1}\eta = (I + i\,\alpha H)^{-1}\,S\eta$$

при всех $\eta \in (I + i\alpha H)\,D(\delta)\,\Omega$. Но согласно (3) множество $(I + i\alpha H)\,D(\delta)\,\Omega$ плотно в $D(\Delta^{1/2}) = D(S)$ по отношению к норме графика, отвечающей $\Delta^{1/2}$. Значит,

$$S\,(I + i\alpha H)^{-1}\,\eta = (I + i\alpha H)^{-1}\,S\eta$$

при всех $\eta \in D(\Delta^{1/2})$, т. е.

$$S\,(I + i\alpha H)^{-1} \supseteq (I + i\alpha H)^{-1}\,S$$

при всех $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Там самым оператор S коммутирует с $(I + i\alpha H)^{-1}$ и его сопряженным $(I - i\alpha H)^{-1}$; поэтому и компоненты его полярного разложения J и $\Delta^{1/2}$ коммутируют с $(I + i\alpha H)^{-1}$. В частности, Δ сильно коммутирует с H.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если $\tilde{\delta}$ — генератор однопараметрической группы $t \longmapsto \tau_t$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, заданной соотношением

$$\tau_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}, \quad A \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}), \ t \in \mathbb{R},$$

то достаточно показать, что $(I + \alpha\tilde{\delta})^{-1}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, потому что

$$\tau_t(A) = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}\,\tilde{\delta}\right)^{-n}(A)$$

(предел этот существует в σ-слабой топологии в силу теоремы 3.1.10), а тем самым $\tau_t(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. С учетом σ-слабой замкнутости δ достаточно будет проверить, что

$$R\,(I + \alpha\delta) \equiv (I + \alpha\delta)\,(D\,(\delta)) \tag{*}$$

σ-слабо плотно в $\mathfrak{M}$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Пусть $t \longmapsto \sigma_t^{\omega}$ обозначает модулярную группу, ассоциированную с парой $(\mathfrak{M}, \Omega)$, где ω — векторное состояние, $\omega(A) = (\Omega, A\Omega)$. Назовем *централизатором* $\mathfrak{M}_{\omega}$ *состояния* ω множество

$$\mathfrak{M}_{\omega} = \left\{A \in \mathfrak{M};\ \sigma_t^{\omega}(A) = A,\ t \in \mathbb{R}\right\} = \{A \in \mathfrak{M};\ \omega(AB) = \omega(BA),\ B \in \mathfrak{M}\}.$$

(Проверку эквивалентности этих двух определений $\mathfrak{M}_{\omega}$ нетрудно произвести, но, чтобы не нарушать порядок изложения, мы отложим ее до предложения 5.3.28.)

Для случая когда ω — следовое состояние (т. е. $\omega(AB) = \omega(BA)$ при всех $A, B \in \mathfrak{M}$), теорема вытекает теперь из следующей леммы.

Лемма 3.2.62. *Примем предположения теоремы* 3.2.61. *Если выполнено условие* (2) *из ее формулировки, то*

$$\mathfrak{M}_{\omega} \subseteq R\,(I + \alpha\delta), \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства плотности $(\mathfrak{M}_\omega \cap R(I+\alpha\delta))\Omega$ в множестве $\mathfrak{M}_\omega\Omega$. Так как $D(\delta)\Omega$ является существенной областью определения для H, то

$$R(I+\alpha\delta)\Omega = (I+i\alpha H)D(\delta)\Omega$$

плотно в $\mathfrak{H}$. Пусть $A \in \mathfrak{M}_\omega$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $B \in R(I+\alpha\delta)$ так, чтобы

$$\|B\Omega - A\Omega\| < \varepsilon.$$

Пусть M обозначает инвариантное среднее на множестве $C_b(\mathbb{R})$ непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}$; иначе говоря, M — состояние на $C_b(\mathbb{R})$, инвариантное относительно сдвигов. Тогда существует (см. замечание к предложению 4.3.42) такая сеть $\{\lambda_i^\alpha, t_i^\alpha, i=1,\dots,n_\alpha\}_\alpha$, что $\lambda_i^\alpha \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n_\alpha}\lambda_i^\alpha = 1$, $t_i^\alpha \in \mathbb{R}$ и

$$M(f) = \lim_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha f(t_i^\alpha)$$

при всех $f \in C_b(\mathbb{R})$. Это инвариантное среднее M задает проектор Φ, отображающий алгебру $\mathfrak{M}$ на централизатор $\mathfrak{M}_\omega$ так, что

$$\varphi(\Phi(C)) = M(\varphi(\sigma^\omega(C)))$$

при всех $C \in \mathfrak{M}$, $\varphi \in \mathfrak{M}_*$. Существование $\Phi(C)$ гарантируется непрерывностью линейного функционала $\varphi \longmapsto M(\varphi(\sigma^\omega(C)))$ на преддвойственном пространстве $\mathfrak{M}_*$ для $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_*^* = \mathfrak{M}$).

Теперь учтем, что $\Delta^{it}H\Delta^{-it} = H$ при всех $t \in \mathbb{R}$, так что множество $R(I+\alpha\delta)$ инвариантно относительно действия σ_t^ω, а из σ-слабой замкнутости $R(I+\alpha\delta)$ следует, что

$$\Phi(B) = \lim_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \sigma^\omega_{t_i^\alpha}(B) \in R(I+\alpha\delta).$$

Кроме того, при всех α

$$\left\|\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \sigma^\omega_{t_i^\alpha}(B)\Omega - A\Omega\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \sigma^\omega_{t_i^\alpha}(B-A)\Omega\right\| =$$

$$= \left\|\sum_j \lambda_j^\alpha \Delta^{it_j^\alpha}(B-A)\Omega\right\| \leqslant \|(B-A)\Omega\| \leqslant \varepsilon,$$

и, следовательно, $\|\Phi(B)\Omega - A\Omega\| \leqslant \varepsilon$. Поэтому $(\mathfrak{M}_\omega \cap R(I+\alpha\delta))\Omega$ плотно в $\mathfrak{M}_\omega\Omega$.

Далее, возьмем $A = A^* \in \mathfrak{M}_\omega$. Для него можно подобрать последовательность $A_n \in R(I+\alpha\delta) \cap \mathfrak{M}_\omega$ со свойством $\|A_n\Omega - A\Omega\| \to 0$. Так как Ω — следовой вектор для $\mathfrak{M}_\omega$, то и

$$\|A_n^*\Omega - A\Omega\| = \|A_n^*\Omega - A^*\Omega\| = \|A_n\Omega - A\Omega\| \to 0.$$

Значит, заменив A_n на $(A_n + A_n^*)/2$, можно, не ограничивая общности, считать $A_n = A_n^* \in R(I+\alpha\delta)$. Рассмотрим операторы $B_n = B_n^* \in D(\delta)$, определенные условием

$$A_n = (I+\alpha\delta)(B_n).$$

Эти $B_n \in \mathfrak{M}_\omega$, так как Δ и H сильно коммутируют и потому $\sigma_t^\omega \circ \delta = \delta \circ \sigma_t^\omega$. Кроме того,

$$B_n\Omega = (I+i\alpha H)^{-1}A_n\Omega \to \psi \equiv (I+i\alpha H)^{-1}A\Omega.$$

Поскольку для $\mathfrak{M}_\omega$ вектор Ω отделяющий, для $\mathfrak{M}'_\omega$ он циклический, и для любого $A' \in \mathfrak{M}'_\omega$ мы имеем $B_n A'\Omega = A' B_n \Omega \to A'\psi$. Таким образом, для последовательности операторов $\{B_n\}$ определен граф-предел с плотной областью определения. Но все B_n самосопряжены и $\|(I \pm iB_n)^{-1}\| \leqslant 1$, так что ссылка на лемму 3.1.27 показывает, что этот граф-предел является оператором. Обозначим его через B.

Далее, положим $\Omega_n = (I \pm iB_n)^{-1}\Omega$ и проведем оценку

$$\|\Omega_n - \Omega_m\| \leqslant \|(I \pm iB_n)^{-1}(B_n - B_m)(I \pm iB_m)^{-1}\Omega\| \leqslant \|(B_n - B_m)(I \pm iB_m)^{-1}\Omega\| = \|(I \mp iB_m)^{-1}(B_n - B_m)\Omega\| \leqslant \|(B_n - B_m)\Omega\|$$

(на третьем шаге здесь учтено, что Ω — следовой вектор для $\mathfrak{M}_\omega$). Отсюда следует, что Ω_n образуют последовательность Коши, и на основании равенства

$$(I \pm iB_n) A'\Omega_n = A'\Omega,$$

справедливого для $A' \in \mathfrak{M}'_\omega$, мы заключаем, что $\mathfrak{M}'_\omega\Omega \subseteq R(I \pm iB)$. Но тогда, по теореме 3.1.28, оператор B самосопряжен и $e^{itB_n} \to e^{itB}$ в сильной топологии равномерно по t на компактах. Тем самым для произвольной бесконечно дифференцируемой функции χ с компактным носителем из представления

$$(\chi(B_n) - \chi(B))\xi = \int dt\hat{\chi}(t)\left(e^{itB_n} - e^{itB}\right)\xi$$

вытекает сильная сходимость $\chi(B_n) \to \chi(B)$. Пусть функция f такова, что $f' = \chi$. Поскольку $B_n \in D(\delta)$, то $f(B_n) \in D(\delta)$ по теореме 3.2.32 и

$$\delta(f(B_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\hat{\chi}(p) \int_0^1 dr e^{irpB_n}\delta(B_n) e^{i(1-r)pB_n}.$$

Следовое свойство Ω на $\mathfrak{M}_\omega$ дает

$$0 = (\Omega, \delta(f(B_n))\Omega) = \left(\Omega, \int_{-\infty}^{\infty} dp\hat{\chi}(p)\, e^{ipB_n}\delta(B_n)\Omega\right) = (\Omega, \chi(B_n)\delta(B_n)\Omega).$$

Отсюда следует, что

$$(\Omega, \chi(B_n) A_n\Omega) = (\Omega, \chi(B_n) B_n\Omega),$$

так как $A_n = (I + \alpha\delta)(B_n)$. Значит, совершив предельный переход в сильной топологии, получим

$$(\Omega, \chi(B) A\,\Omega) = (\Omega, \chi(B) B\Omega).$$

Если χ положительна, то верна оценка

$$|(\Omega, \chi(B) B\Omega)| = \left|\left(\chi(B)^{1/2}\Omega, A\chi(B)^{1/2}\Omega\right)\right| \leqslant \|A\|(\Omega, \chi(B)\Omega).$$

Но Ω — отделяющий вектор, поэтому, согласно спектральной теории, $\|B\| \leqslant \|A\|$. Таким образом, мы доказали, что для $A = A^* \in \mathfrak{M}_\omega$ найдется такой $B = B^* \in \mathfrak{M}_\omega$, что

$$B\Omega = (I + i\alpha H)^{-1}A\Omega.$$

Далее, из соотношения

$$iHJ\Delta^{1/2}C\Omega = J\Delta^{1/2}iHC\Omega,$$

выполняющегося при C из $D(\delta)\Omega$, существенной области определения для H, легко получить, что $(I + i\alpha H)^{-1}$ коммутирует с $S = J\Delta^{1/2}$ (так как $(I + i\alpha H)^{-1}$

коммутирует с $\Delta^{1/2}$). Но тогда с помощью тех же рассуждений, которые были использованы в части доказательства теоремы 3.2.59, относящейся к импликации (3) $\Rightarrow$ (1) в случае отделяющего вектора Ω, мы приходим к выводу: $B \in D(\delta)$ и $A = (I + \alpha\delta)(B)$.

Теперь распространим результат этой леммы на произвольные собственные элементы группы модулярных автоморфизмов.

Лемма 3.2.63. *В предположениях теоремы* 3.2.61, *если выполнено условие* (2) *и если для* $A \in \mathfrak{M}$ *существует* $\lambda > 0$, *такое что*

$$\sigma_t^{\omega}(A) = \lambda^{it} A$$

при всех $t \in \mathbb{R}$, *то*

$$A \in R(I + \alpha\delta)$$

при всех $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Пусть M_2 обозначает алгебру фон Неймана всех 2×2-матриц, действующую в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_2$ матриц того же размера с нормой Гильберта—Шмидта $\|A\|_2^2 = \sum_{ij}|A_{ij}|^2$. Алгебра фон Неймана $\mathfrak{M} \otimes M_2$ действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}_2$. Пусть $\{E_{ij}\}_{i,\ j=1,\ 2}$ — матричные единицы для M_2. Рассмотрим

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \otimes \left(E_{11} + \lambda^{1/2} E_{22}\right) \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}_2.$$

Вектор $\widetilde{\Omega}$ — циклический и отделяющий для $\mathfrak{M} \otimes M_2$; соответствующий ему векторный функционал $\widetilde{\omega}$ задается формулой

$$\widetilde{\omega}\left(\sum_{i,\ j} B_{ij} \otimes E_{ij}\right) = \omega(B_{11}) + \lambda\omega(B_{22}),$$

где $B = \sum_{ij} B_{ij} \otimes E_{ij} \in \mathfrak{M} \otimes M_2$.

Если $\sigma^{\widetilde{\omega}}$ — модулярная группа, ассоциированная с $\widetilde{\omega}$, то легко проверить, что

$$\sigma_t^{\widetilde{\omega}}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_t^{\omega}(B_{11}) & \lambda^{-it}\sigma_t^{\omega}(B_{12}) \\ \lambda^{it}\sigma_t^{\omega}(B_{21}) & \sigma_t^{\omega}(B_{22}) \end{pmatrix}$$

при $B_{ij} \in \mathfrak{M}$. Эту выкладку мы подробно проведем в более общей ситуации, доказывая теорему 5.3.34. В частности, если $\sigma_t^{\omega}(A) = \lambda^{it} A$, то

$$\sigma_t^{\widetilde{\omega}}(A \otimes E_{12}) = A \otimes E_{12},$$

т. е. $A \otimes E_{12}$ принадлежит централизатору для $\widetilde{\omega}$. Рассмотрим теперь дифференцирование $\widetilde{\delta}$ алгебры $\mathfrak{M} \otimes M_2$, которое выполняется посредством оператора $\widetilde{H} = H \otimes I$. Ясно, что

$$D(\widetilde{H}) = \left\{ \xi = \sum_{ij} \xi_{ij} \otimes E_{ij};\ \xi_{ij} \in D(H) \right\}$$

и при $\xi_{ij} \in D(H)$

$$\widetilde{H}\left(\sum_{ij} \xi_{ij} \otimes E_{ij}\right) = \sum_{ij} H\xi_{ij} \otimes E_{ij}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$D(\tilde{\delta}) = \left\{ B = \sum_{ij} B_{ij} \otimes E_{ij};\ B_{ij} \in D(\delta) \right\},$$

$$\tilde{\delta}\left(\sum_{ij} B_{ij} \otimes E_{ij} \right) = \sum_{ij} \delta(B_{ij}) \otimes E_{ij}.$$

Очевидным образом, $\widetilde{\Omega} \in D(\widetilde{H})$ и $\widetilde{H}\widetilde{\Omega} = 0$. Кроме того,

$$D(\widetilde{\delta})\,\widetilde{\Omega} = D(\delta)\,\Omega \otimes \mathfrak{H}_2,$$

чем доказано, что $D(\widetilde{\delta})\,\widetilde{\Omega}$ — существенная область определения для $\widetilde{H}$. Из приведенного выше выражения для $\sigma^{\widetilde{\omega}}$ вытекает, что $\tilde{\delta} \circ \sigma_t^{\widetilde{\omega}} = \sigma_t^{\widetilde{\omega}} \circ \tilde{\delta}$, поэтому $i\widetilde{H}\widetilde{\Delta}^{it} = \widetilde{\Delta}^{it} i\widetilde{H}$, где $\widetilde{\Delta}$ — модулярный оператор, ассоциированный с парой $(\mathfrak{M} \otimes M_2, \widetilde{\Omega})$. Применив лемму 3.2.62 к $\mathfrak{M} \otimes M_2$, $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{H}$, убеждаемся, что $A \otimes E_{12} \in R(I + \alpha\tilde{\delta})$, или, эквивалентно, $A \in R(I + \alpha\delta)$ при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Теперь мы можем доказать эквивалентность (2) $\Longleftrightarrow$ (1) в том специальном случае, когда при некотором $T \neq 0$ автоморфизм σ_T^{ω} — внутренний.

Лемма 3.2.64. *Примем предположения теоремы* 3.2.61 *в сочетании с условием* (2) *той же теоремы. Предположим еще, что существуют число $T > 0$ и унитарный оператор $U \in \mathfrak{M}$, такие что*

$$\sigma_T^{\omega}(A) = UAU^*, \quad A \in \mathfrak{M},$$

причем $U \in D(\delta)$, а

$$\delta(U) = 0.$$

Тогда

$$e^{itH}\mathfrak{M}e^{-itH} = \mathfrak{M}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Допустим сперва, что $U = \mathbb{1}$, т. е. $\sigma_T^{\omega}(A) = A$ при всех $A \in \mathfrak{M}$. Так как σ^{ω} — периодическая группа, то, согласно лемме 3.2.39, (4), собственные подпространства

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ A \in \mathfrak{M};\ \sigma_T^{\omega}(A) = e^{-i(2\pi n/T)t} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

порождают σ-слабо плотную подалгебру в $\mathfrak{M}$. По лемме 3.2.63

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{M}_n \subseteq R(I + \alpha\delta).$$

Следовательно, $R(I + \alpha\delta)$ плотно, и из (∗) вытекает, что

$$e^{itH}\mathfrak{M}e^{-itH} = \mathfrak{M}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Далее перейдем к случаю $\sigma_T^{\omega}(A) = UAU^*$ с $\delta(U) = 0$. Поскольку $\omega(UAU^*) = \omega(\sigma_T^{\omega}(A)) = \omega(A)$ при $A \in \mathfrak{M}$, U должен принадлежать централизатору $\mathfrak{M}_{\omega}$ для ω. Этот централизатор является алгеброй фон Неймана, значит, должен найтись оператор $A = A^* \in \mathfrak{M}_{\omega}$ с $\|A\| \leqslant \pi$, для которого $U = e^{iA}$. Введем

$$B = e^{A/T}.$$

Оператор B положителен и имеет ограниченный обратный, $B^{iT} = U$ и $B \in \mathfrak{M}_\omega$. Кроме того, поскольку $[H, U] = 0$, то $[H, B^\beta] = 0$ при всех $\beta \in \mathbb{C}$. В частности, $B^\beta \in D(\delta)$. Положим

$$\Omega' = B^{-1/2}\Omega.$$

Операторы $B^{1/2}$ и $B^{-1/2}$ ограничены, поэтому вектор Ω' — и циклический, и отделяющий для $\mathfrak{M}$. Соответствующее состояние на $\mathfrak{M}$ обозначим ω', т. е. $\omega'(A) = (\Omega', A\Omega')$. При всех $t \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $\sigma_t^\omega(B^\beta) = B^\beta$; отсюда легко получить, что равенство

$$\sigma_t(A) = B^{-it}\sigma_t^\omega(A) B^{it}$$

определяет однопараметрическую группу автоморфизмов $\mathfrak{M}$ и ω удовлетворяет в смысле определения 5.3.1 условию КМШ по отношению к этой группе. Согласно теореме 5.3.10, группа $\sigma = \sigma^{\omega'}$ есть модулярная группа, ассоциированная с ω'. Но в таком случае

$$\sigma_T^{\omega'}(A) = B^{-iT}\sigma_T^\omega(A) B^{iT} = U^*(UAU^*)U = A$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$, т. е. $\sigma^{\omega'}$ периодична. Поскольку $B^{1/2}, B^{-1/2} \in D(\delta)$, то $D(\delta)\Omega' = D(\delta)\Omega$, так что $D(\delta)\Omega'$ — существенная область определения для H. Далее, $\delta(B^{-it}) = 0$ при всех t и $\delta \circ \sigma_t^\omega = \sigma_t^\omega \circ \delta$; следовательно, $\delta \circ \sigma_t^{\omega'} = \sigma_t^{\omega'} \circ \delta$, а значит, $H\Delta'^{it} = \Delta'^{it}H$, где Δ' — модулярный оператор, ассоциированный с парой $(\mathfrak{M}, \Omega')$. Теперь можно воспользоваться первой частью доказательства этой леммы и заключить, что $e^{itH}\mathfrak{M}e^{-itH} = \mathfrak{M}$.

Для доказательства эквивалентности $(1) \Leftrightarrow (2)$ в теореме 3.2.61 нам нужна еще одна лемма. Предположив справедливость условия (2), зафиксируем число $T > 0$ и рассмотрим дискретное скрещенное произведение $\mathfrak{N} = W^*(\mathfrak{M}, \sigma_T^\omega)$, где $\omega(A) = (\Omega, A\Omega)$, $A \in \mathfrak{M}$. Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}$ обозначает гильбертово пространство

$$\tilde{\mathfrak{H}} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n,$$

где $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда из определения 2.7.3 следует, что $\mathfrak{N}$ является алгеброй фон Неймана, порожденной операторами $\pi(A)$, $A \in \mathfrak{M}$, и U, которые действуют в $\tilde{\mathfrak{H}}$ по формулам

$$(\pi(A)\xi)_n = \sigma_{-nT}^\omega(A)\xi_n, \quad (U\xi)_n = \xi_{n-1},$$

где $\xi = (\xi_n)_n \in \tilde{\mathfrak{H}}$. Отметим, что $U\pi(A)U^* = \pi(\sigma_T^\omega(A))$ при $A \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим вектор $\tilde{\Omega} \in \tilde{\mathfrak{H}}$, определенный условием

$$\tilde{\Omega}_n = \begin{cases} \Omega, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

и положительный векторный функционал $\tilde{\omega}$ на $\mathfrak{N}$, отвечающий $\tilde{\Omega}$.

Лемма 3.2.65. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана с отделяющим и циклическим вектором Ω, а $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$, π, U, $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\omega}$ имеют указанный выше смысл. Тогда*

(1) $\tilde{\Omega}$ *— циклический и отделяющий для $\mathfrak{N}$ вектор;*

(2) *ассоциированная с $\tilde{\omega}$ группа модулярных автоморфизмов $\sigma^{\tilde{\omega}}$ задается соотношениями*

$$\sigma_t^{\tilde{\omega}}(\pi(A)) = \pi\left(\sigma_t^{\omega}(A)\right), \ A \in \mathfrak{M}, \quad \sigma_t^{\tilde{\omega}}(U) = U;$$

(3) $\sigma_T^{\tilde{\omega}}(B) = UBU^*$, $B \in \mathfrak{N}$;

(4) *модулярный оператор $\tilde{\Delta}$, ассоциированный с $\tilde{\Omega}$, определяется из соотношения*

$$\left(\tilde{\Delta}^{it}\xi\right)_n = \Delta^{it}\xi_n, \quad (\xi_n)_n \in \tilde{\mathfrak{H}}.$$

Доказательство. (1) Всякий элемент A алгебры $\mathfrak{M}$, порожденной (как алгебра) $\pi(\mathfrak{M})$ и U, имеет вид

$$A = \sum_{n=-p}^{p} U^n \pi(A_n),$$

где $A_n \in \mathfrak{M}$. Отображения $A \in \mathfrak{N}_0 \longmapsto A_n$ непрерывны в σ-сильной топологии, а $\mathfrak{N}_0$ плотна в $\mathfrak{N}$ относительной этой топологии, поэтому всякий $A \in \mathfrak{N}$ обладает разложением

$$A \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^n \pi(A_n), \ A_n \in \mathfrak{M},$$

которое сходится в том смысле, что

$$A\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^n \pi(A_n)\,\xi$$

при всех $\xi \in \tilde{\mathfrak{H}}$ с носителем, состоящим из конечного набора точек. В частности,

$$A\tilde{\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^n \pi(A_n)\,\tilde{\Omega}.$$

Значит, $(A\tilde{\Omega})_n = A_n\Omega$, а потому $\|A\tilde{\Omega}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\|A_n\Omega\|^2$. Таким образом, $\tilde{\Omega}$ оказывается отделяющим вектором для $\mathfrak{N}$. Все векторы $(\xi_n)_n \in \tilde{\mathfrak{H}}$ с конечным носителем, для которых $\xi_n \in \mathfrak{M}\Omega$, содержатся в $\mathfrak{N}\tilde{\Omega}$, следовательно, $\tilde{\Omega}$ — циклический вектор для $\mathfrak{N}$.

(2) Пусть $t \longmapsto V_t$ — сильно непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов в $\tilde{\mathfrak{H}}$, действующих согласно формуле

$$(V_t\xi)_n = \Delta^{it}\,\xi_n.$$

Тривиально проверяются равенства

$$V_t\pi(A)\,V_t^* = \pi\left(\sigma_t^{\omega}(A)\right), \quad V_tUV_t^* = U.$$

Тем самым V выполняет σ-слабо непрерывную однопараметрическую группу σ^*-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{N}$. Легко убедиться, что по отношению к σ состояние $\tilde{\omega}$ на $\mathfrak{N}_0$ есть состояние КМШ (см. определение 5.3.1 и предложение

5.3.7). Но тогда σ по теореме 5.3.10 является группой модулярных автоморфизмов, ассоциированной с $\tilde{\omega}$.

(3) Если $A \in \mathfrak{M}$, то, согласно (2),

$$\sigma_t^{\tilde{\omega}}(\pi(A)) = \pi\left(\sigma_T^{\omega}(A)\right) = U\pi(A)U^*.$$

К тому же $\sigma_T^{\tilde{\omega}}(U) = U = UUU^*$. Следовательно, $\sigma_T^{\tilde{\omega}}(B) = UBU^*$ при всех $B \in \mathfrak{N}$.

(4) Пусть $A \in \mathfrak{N}_0$, $A = \sum_{n=-p}^{p} U^n\pi(A_n)$. Тогда, в силу (2),

$$(\tilde{\Delta}^{it}A\tilde{\Omega})_n = \left(\sigma_t^{\tilde{\omega}}(A)\tilde{\Omega}\right)_n = \sigma_t^{\omega}(A_n)\,\Omega = \Delta^{it}A_n\Omega,$$

так как $(A\tilde{\Omega})_n = A_n\Omega_n$. Поэтому

$$\tilde{\Delta}^{it} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \Delta^{it}.$$

Конец доказательства теоремы 3.2.61. (2) $\Rightarrow$ (1). Зададим в $\tilde{\mathfrak{H}}$ самосопряженный оператор $\tilde{H}$, полагая

$$D(\tilde{H}) = \left\{ (\xi_n)_n \in \tilde{\mathfrak{H}},\ \xi_n \in D(H),\ \sum_n \|H\xi_n\|^2 < +\infty \right\},\ (\tilde{H}\xi)_n = H\xi_n.$$

Пусть $\tilde{\delta} = i[\tilde{H}, \ \cdot\,]$ обозначает дифференцирование алгебры $\mathfrak{N}$, выполнимое посредством $\tilde{H}$. Мы покажем, что $\mathfrak{N}$, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{H}$, $\tilde{\delta}$ и U удовлетворяют условиям леммы 3.2.64. Очевидно, $\tilde{H}\tilde{\Omega} = 0$. Так как $\delta \circ \sigma_t^{\omega} = \sigma_t^{\omega} \circ \delta$, согласно (2), б), то $\pi(A) \in D(\tilde{\delta})$ и

$$\tilde{\delta}(\pi(A)) = \pi(\delta(A)),$$

если $A \in D(\delta)$. Далее, $U\tilde{H} = \tilde{H}U$, так что $U \in D(\tilde{\delta})$ и $\tilde{\delta}(U) = 0$. Поэтому $D(\tilde{\delta})$ содержит все операторы вида

$$\sum_{n=-p}^{p} U^n\pi(A_n), \quad A_n \in D(\delta).$$

В частности, $D(\tilde{\delta})\tilde{\Omega}$ содержит все векторы $(\xi_n) \in \tilde{\mathfrak{H}}$ с конечным носителем, для которых $\xi_n \in D(\delta)\,\Omega$. Значит, $D(\tilde{\delta})\tilde{\Omega}$ — существенная область определения для $\tilde{H}$. Оператор H коммутирует с Δ^{it}, следовательно, $\tilde{H}$ коммутирует с $\tilde{\Delta}^{it}$, в силу леммы 3.2.65, (4). По той же лемме $\sigma_T^{\tilde{\omega}}$ выполняется оператором U, а так как $[\tilde{H}, U] = 0$, то из леммы 3.2.64 вытекает, что

$$e^{it\tilde{H}}\mathfrak{N}e^{-it\tilde{H}} = \mathfrak{N},\ t \in \mathbb{R}.$$

Пусть теперь P проектирует $\tilde{\mathfrak{H}} = \oplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathfrak{H}_n$ на нулевую компоненту $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$. Тогда для $A \in \mathfrak{N}$, $A \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^n\pi(A_n)$, имеем $PAP^* = A_0$. Кроме того, $e^{it\tilde{H}}P = Pe^{it\tilde{H}}$. Выберем теперь $A \in \mathfrak{M}$. Введем $B = e^{it\tilde{H}}\pi(A)\,e^{-it\tilde{H}} \in \mathfrak{N}$. Пусть

$$B \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^n\pi(B_n), \quad B_n \in \mathfrak{M},$$

— его разложение. Тогда

$$e^{itH}Ae^{-itH} = e^{itH}P\pi(A)P^*e^{-itH} = Pe^{it\widetilde{H}}\pi(A)e^{-it\widetilde{H}}P^* = PBP^* = B_0 \in \mathfrak{M}.$$

Тем самым при всех $t \in \mathbb{R}$ мы имеем $e^{itH}\mathfrak{M}e^{-itH} \subseteq \mathfrak{M}$. Этим доказательство теоремы 3.2.61. завершено.

Замечание 3.2.66. Одним из следствий теоремы 3.2.61, точнее леммы 3.2.62, является такое утверждение. Из предположений:

(1) $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$,

(2) Ω — циклический вектор, задающий след на $\mathfrak{M}$, т. е.

$$(\Omega, AB\Omega) = (\Omega, BA\Omega), \ A, \ B \in \mathfrak{M},$$

(3) δ — пространственное дифференцирование $\mathfrak{M}$, которое выполняется таким оператором $H = H^*$, что $H\Omega = 0$ и $D(\delta)\Omega$ служит существенной областью определения для H,

следует, что

$$e^{itH}\mathfrak{M}e^{-itH} = \mathfrak{M}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Отметим, что в данном случае Ω автоматически окажется отделяющим для $\mathfrak{M}$, так как если $A\Omega = 0$ и $B \in \mathfrak{M}$, то

$$\| AB\Omega \|^2 = (\Omega, B^*A^*AB\Omega) = (\Omega, BB^*A^*A\Omega) = 0$$

и равенство $A = 0$ следует из цикличности Ω. В рассматриваемом случае $\Delta = I$, так что наше следствие вытекает уже из леммы 3.2.62. Предположение (3) можно ослабить, допустив, что δ — это отображение $A \in D(\delta) \subseteq \mathfrak{M} \longmapsto \delta(A) \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — множество всех операторов, присоединенных к $\mathfrak{M}$ и содержащих в своей области определения вектор Ω. Для такого обобщения существенно иметь в виду, что $\mathfrak{N}$ самосопряжено и $\mathfrak{N}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Самосопряженность вытекает из наличия следа. Действительно, пусть $X \in \mathfrak{N}$ и $X = U|X|$ — его полярное разложение. Тогда $U \in \mathfrak{M}$ и $|X|$ присоединен к $\mathfrak{M}$, по лемме 2.5.8. Но если E_n — спектральный проектор для $|X|$, отвечающий промежутку $[0, n]$, то

$$\| XE_n\Omega \| = \| |X| E_n\Omega \| = \| E_n |X| U^*\Omega \| = \| E_nX^*\Omega \|,$$

благодаря следовому свойству Ω. Значит, $\Omega \in D(X^*)$ и $\| X^*\Omega \| = \| X\Omega \|$. Таким образом, $\mathfrak{N}$ самосопряжено. Очевидное включение $\mathfrak{M}\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}$ дополняется следующим из самосопряженности $\mathfrak{N}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Поэтому имеют смысл свойства дифференцирования

$$\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B), \quad \delta(A^*) = \delta(A)^*.$$

Доказательство указанного обобщения можно будет провести, незначительно видоизменив теорему 3.2.59, с тем чтобы установить эквивалентность свойства порождать группу автоморфизмов свойству сохранения положительности

$$(I \pm iH)^{-1}\mathfrak{M}_+\Omega \subseteq \overline{\mathfrak{M}_+\Omega}.$$

Помимо этого, в доказательстве леммы 3.2.62 придется прямо вычислять значение $(\Omega,\ \delta(f)\,\Omega)$.

Если в теореме 3.2.61 считать алгебру $\mathfrak{M}$ абелевой, то речь фактически идет о глобальном существовании решений для некоторого класса дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения такого типа встречаются в формулировке Гамильтона—Лиувилля классической механики. Проиллюстрируем это обстоятельство примером.

Пример 3.2.67. Пусть X — отделимое локально-компактное пространство и μ — заданная на нем вероятностная мера. Например, X могло бы представлять фазовое пространство частиц в классической механике, а μ описывать распределение вероятностей для их координат и импульсов. Если $t \longmapsto T_t$ — непрерывная группа сохраняющих меру гомеоморфизмов X, то T_t определяет сильно непрерывную группу * автоморфизмов $C_0(X)$:

$$(\alpha_t f)(x) = f(T_t x)$$

при $f \in C_0(X)$. Реализовав $C_0(X)$ как C^*-алгебру операторов умножения в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = L^2(X;\ d\mu)$, имеем

$$\alpha_t(f) = U_t f U_t^*,$$

где $t \longmapsto U_t$ — сильно непрерывная унитарная группа, действующая на $\psi \in \in L^2(X;\ d\mu)$ согласно формуле

$$(U_t\psi)(x) = \psi(T_t x).$$

Выберем в качестве Ω функцию, равную единице. Тогда

$$\omega(f) = (\Omega,\ f\Omega) = \int_X d\mu(x)\, f(x)$$

и выполнено условие инвариантности $U_t\Omega = \Omega$. Если δ — генератор группы α_t, то $D(\delta) \subseteq C_0(X) \subseteq L^2(X;\ d\mu)$ и область $D(\delta)$ инвариантна относительно U_t. Отождествив $D(\delta)$ и $D(\delta)\,\Omega$, убеждаемся, что $D(\delta)\,\Omega$ будет существенной областью определения для самосопряженного генератора H группы U_t.

Более общим образом, можно отправляться от группы $t \longmapsto T_t$ сохраняющих меру борелевских автоморфизмов, такой что при всех $f \in L^\infty(X;\ d\mu)$ и $g \in \in L^1(X;\ d\mu)$ непрерывны функции

$$t \longmapsto \int_X d\mu(x)\, f(T_t x)\, g(x).$$

Тогда формулой

$$(\alpha_t f)(x) = f(T_t x)$$

задается σ-слабо непрерывная группа *-автоморфизмов алгебры фон Неймана $L^\infty(X;\ d\mu)$. Как и раньше, $\alpha_t(f) = U_t f U_t^*$, и генераторы δ и H групп α_t и U_t обладают тем свойством, что $D(\delta)$ $(=D(\delta)\,\Omega)$ будет для H существенной областью.

С помощью теоремы 3.2.61 и замечания 3.2.66 мы получим и обратное утверждение. Если в существенном самосопряженный оператор $-i\delta$, действующий из $D(\delta) \subseteq L^\infty(X;\ d\mu)$ в $L^2(X;\ d\mu)$, обладает свойствами

(1) $\delta(fg) = \delta(f)\, g + f\delta(g)$, $f,\ g \in D(\delta)$,
(2) $\delta(\bar{f}) = \overline{\delta(f)}$, $f \in D(\delta)$,
(3) $\Omega \in D(\delta)$,

то из теоремы следует существование σ-слабо непрерывной группы *-автоморфизмов α_t алгебры $L^\infty(X; d\mu)$. Рассматривая борелевские множества в X как проекторы в $L^\infty(X; d\mu)$, мы видим, что группа α_t определяет такую группу сохраняющих меру автоморфизмов T_t пространства X, что

$$(\alpha_t f)(x) = f(T_t x)$$

при всех $f \in L^\infty(X; d\mu)$. Тем самым теорема 3.2.61 может играть роль при интегрировании уравнений движения в классической механике.

Наконец, заметим, что обе части а) и б) условия (2) теоремы 3.2.61 необходимы при установлении условия (1). Хотя формальная выкладка

$$iHJ\Delta^{1/2}A\Omega = iHA^*\Omega = \delta(A)^*\Omega = J\Delta^{1/2}iHA\Omega$$

и демонстрирует коммутативность H и Δ, возникающие в случае неограниченности обоих операторов H и Δ проблемы с областями определения лишают такой вывод доказательной силы. И действительно, если отбросить часть б) условия (2), то теорема становится неверна, как показывает следующий

Пример 3.2.68. Пусть Ω_0 — единичный вектор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_0$. Предположим, что в $\mathfrak{H}_0$ имеются две алгебры фон Неймана, $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, такие что $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}_2$, а вектор Ω_0 для обеих алгебр циклический и отделяющий. (Примеры такого рода встречаются в квантовой теории поля постоянно, так как вектор основного состояния на квазилокальной алгебре будет циклическим и отделяющим для каждой локальной алгебры.) Рассмотрим одномерный тор — группу $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, снабженную мерой Хаара, и зададим действие $\mathbb{T}$ на алгебре фон Неймана $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_0) \oplus \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T}) = L^\infty(\mathscr{L}(\mathfrak{H}_0); \mathbb{T})$ соотношением

$$(\tau_t f)(s) = f(s - t)$$

при всех $f \in L^\infty(\mathscr{L}(\mathfrak{H}_0); \mathbb{T})$. Пусть алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}$ — это подалгебра, состоящая из $f \in L^\infty(\mathscr{L}(\mathfrak{H}_0; \mathbb{T})$, для которых

$$f(s) \in \begin{cases} \mathfrak{N}_1, & 0 \leqslant s < 1/2, \\ \mathfrak{N}_2, & 1/2 \leqslant s < 1. \end{cases}$$

Реализуем $\mathfrak{M}$ как алгебру операторов умножения в $\mathfrak{H} = L^2(\mathfrak{H}_0; \mathbb{T})$, которые на $\xi \in \mathfrak{H}$ действуют согласно формуле $(f\xi)(s) = f(s)\xi(s)$, $f \in L^\infty(\mathscr{L}(\mathfrak{H}_0); \mathbb{T})$. Пусть $\Omega \in \mathfrak{H}$ — такой элемент, что при всех $s \in \mathbb{T}$

$$\Omega(s) = \Omega_0.$$

Для $\mathfrak{M}$ этот Ω будет циклическим и отделяющим. Далее, $U(t)\xi(s) = \xi(s - t)$ определяет на $\mathfrak{H}$ такое унитарное представление группы $\mathbb{T}$, для которого при $f \in L^\infty(\mathscr{L}(\mathfrak{H}_0); \mathbb{T})$

$$\tau_t(f) = U(t) f U(t)^*$$

и $U(t)\Omega = \Omega$. Пусть $\hat{\delta}$ — инфинитезимальный генератор группы τ и $iH = \mathbb{1} \otimes (-d/dt)$ — генератор U. Тогда $D(\hat{\delta})$ состоит из непрерывных по Гёльдеру функций из группы $\mathbb{T}$ в алгебру $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, снабженную топологией нормы. Введем δ на $\mathfrak{M}$ как $\hat{\delta}|_{D(\delta)}$, где

$$D(\delta) = \{f;\ f \in D(\hat{\delta}) \cap \mathfrak{M},\ \hat{\delta}(f) \in \mathfrak{M}\}.$$

Это δ оказывается σ-слабо плотно определенным дифференцированием $\mathfrak{M}$, и $\delta(f) = i[H, f]$ при $f \in \mathfrak{M}$.

Множество $D(\delta)\Omega$ содержит подмножество D, состоящее из всех ξ вида $s \longmapsto f(s)\Omega_0$, где функция $s \longmapsto f(s)$ непрерывна по Гёльдеру и $f(s) \in \mathfrak{N}_1$. Согласно следствию 3.1.7, это D является существенной областью для H, так как $U(t)D = D$, и потому $D(\delta)\Omega$ — также существенная область. Но очевидно, что $U_t \mathfrak{M} U_t^* \neq \mathfrak{M}$, если $t \notin Z$.

3.2.6. Теория аппроксимации для групп автоморфизмов

В разделе 3.1 мы выделили три различных аспекта проблематики, относящейся к устойчивости однопараметрических групп автоморфизмов. А именно, мы обсуждали теорию сходимости, теорию возмущений и теорию аппроксимации. Все результаты раздела 3.1 применимы к однопараметрическим группам *-автоморфизмов топологических алгебр, и наличие алгебраической структуры не добавляет существенно новых штрихов в изложение первого из аспектов (теория сходимости). В разделе 5.4 мы разберем различные алгебраические усовершенствования зависящих от времени рядов теории возмущений [1] и покажем, что результаты пункта 3.1.5 можно значительно уточнить в случае σ-слабо непрерывных однопараметрических групп *-автоморфизмов алгебр фон Неймана. Напомним, что такие группы, согласно следствию 2.3.4 и теореме 2.4.23, являются C_0^*-группами изометрий. В частности, для сравнения двух таких групп, разность которых имеет норму порядка $O(t)$, можно воспользоваться теоремой 3.1.38. Следующий результат усиливает эту теорему.

Предложение 3.2.69. *Пусть σ-слабо непрерывные однопараметрические группы α_t и β_t *-автоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ имеют генераторы δ_α и δ_β соответственно. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\|\alpha_t - \beta_t\| = O(t)$ *при* $t \to 0$;

(2) $D(\delta_\alpha) = D(\delta_\beta)$, *и существует такое ограниченное дифференцирование δ алгебры $\mathfrak{M}$, что*

$$\delta_\alpha(A) - \delta_\beta(A) = \delta(A)$$

при всех $A \in D(\delta_\alpha) = D(\delta_\beta)$.

Замечание. Из доказательства этого предложения и их следствия 3.2.47 видно, что $\|\delta\| = \lim_{t\to 0}\|\alpha_t - \beta_t\|/|t|$. Более того, существует такой оператор $H = H^* \in \mathfrak{M}$, что $\|H\| \leqslant \|\delta\|/2$ и $\delta(A) = i[H, A]$. Отметим, что, усовершенствовав пример 3.1.39,

---

[1] Недавно было доказано, что если δ — генератор сильно непрерывной однопараметрической группы *-автоморфизмов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, а δ' — симметрическое дифференцирование $\mathfrak{A}$, возможно неограниченное, с той же областью определения, что и δ, то δ' — диссипативный оператор и $\delta + \alpha\delta'$ будет генератором при достаточно малых $\alpha \in \mathbb{R}$ [C. J. K. Batty, Small perturbations of C^*-dynamical systems, Commun. Math. Phys., 1979, **68**, № 1, 39—43].

можно показать, что этот результат неверен для C^*-алгебр, даже для простых C^*-алгебр с единицей.

Доказательство. Из теоремы 3.1.38 вытекают импликация (2) $\Rightarrow$ (1), а также совпадение $D(\delta_\alpha) = D(\delta_\beta)$ и ограниченность $\delta_\alpha - \delta_\beta$ по норме на $D(\delta_\alpha)$ при выполнении (1). Но тогда $\delta_\alpha - \delta_\beta$ расширяется по непрерывности до ограниченного дифференцирования δ_0, действующего из C^*-алгебры $\overline{D(\delta_\alpha)}^{\|\cdot\|}$ в $\mathfrak{M}$. Предложение 3.2.24 позволяет заключить, что δ_0 обладает σ-слабо замкнутым расширением δ на $\mathfrak{M}$ с $\|\delta\| = \|\delta_0\|$.

Теперь рассмотрим более общие случаи аппроксимации, чем $O(t)$-случай. Начнем с результатов для унитарных групп в гильбертовом пространстве. Теорему 3.1.36 можно улучшить.

Предложение 3.2.70. *Пусть* $U_t = \exp\{itH\}$ *и* $V_t = \exp\{itK\}$ *— сильно непрерывные унитарные группы в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существуют такие* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\delta_1 > 0$, *что*

$$\| U_t - V_t \| \leqslant \sqrt{2} - \varepsilon_1$$

при $0 \leqslant t \leqslant \delta_1$;

(2) *существуют такие* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$ *и такие ограниченный самосопряженный оператор* P *и унитарный оператор* W, *что*

$$H = W(K + P)W^*,$$

$$\| W^* U_t W - U_t \| \leqslant \sqrt{2} - \varepsilon_2 \text{ при всех } 0 \leqslant t \leqslant \delta_2.$$

Если эти условия выполнены, то можно в качестве W *взять унитарную часть полярного разложения оператора*

$$\Omega = \frac{1}{\delta_1} \int_0^{\delta_1} ds U_s V_{-s}$$

и W *будет удовлетворять оценке* $\| W - I \| \leqslant \sqrt{2} - \varepsilon_1$. *Кроме того,*

$$\| W^* U_t W - U_t \| = \| V_t - U_t \| + O(t),$$

$$\| W^* U_t W - V_t \| = O(t)$$

при $t \to 0$.

Доказательство. Для начала укажем, что импликация (2) $\Rightarrow$ (1) по существу содержится в теореме 3.1.36.

(1) $\Rightarrow$ (2). Нам нужны некоторые результаты о числовой области значений оператора. Напомним, что для ограниченного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ *числовая область значений* $W(A)$ определяется как следующее подмножество в $\mathbb{C}$:

$$W(A) = \{(\psi, A\psi);\ \psi \in \mathfrak{H},\ \|\psi\| = 1\}.$$

Можно показать, что $W(A)$ — выпуклое множество, а его замыкание содержит спектр $\sigma(A)$ оператора A. Если A — нормальный оператор, т. е. $A^*A = AA^*$, то $\overline{W(A)}$ в точности совпадает с выпуклым замыканием спектра. *Сектор* $S(A)$ оператора A определяется как замкнутый конус, порожденный $W(A)$, т. е.

$$S(A) = \overline{\{(\psi,\ A\psi);\ \ \psi \in \mathfrak{H}\}}.$$

Для ограниченного A известно также, что если частично изометрический оператор U в полярном разложении $A = U|A|$ будет унитарным, то $\sigma(U) \subseteq S(A)$.

Теперь с помощью спектральной теории получаем из (1), что

$$W(U_tV_{-t}) \subseteq \{z;\ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant \sqrt{2}\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2/2\}$$

при $0 \leqslant t \leqslant \delta_1$. Введем

$$\Omega = \frac{1}{\delta_1}\int_0^{\delta_1} dsU_sV_{-s}.$$

Выпуклость множества в правой части последнего включения приводит к включению

$$W(\Omega) \subseteq \{z;\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant \sqrt{2}\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2/2\}.$$

В частности, $0 \notin \overline{W(\Omega)} \supseteq \sigma(\Omega)$, т. е. оператор Ω обратим и Ω^{-1} ограничен. Доказательство теоремы 3.1.36 показывает, что

$$\| U_t\Omega V_{-t} - \Omega \| = O(t) = \| V_t\Omega^* U_{-t} - \Omega^* \|.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\| V_t\Omega^*\Omega V_{-t} - \Omega^*\Omega \| &= \| (V_t\Omega^*U_{-t})\ (U_t\Omega V_{-t}) - \Omega^*\Omega \| \\ &\leqslant \| V_t\Omega^*U_{-t} - \Omega^* \|\ \| U_t\Omega V_{-t} \| + \| U_t\Omega V_{-t} - \Omega \| = O(t).\end{aligned}$$

Согласно предложению 3.1.23, оператор $|\Omega|^2$ принадлежит области определения дифференцирования, порождающего группу автоморфизмов алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, выполнимую группой V_t. Тогда, в силу следствия 3.2.33, в область определения этого дифференцирования входит и $|\Omega|^{-1}$. Значит,

$$\| V_t\,|\Omega|^{-1}\,V_{-t} - |\Omega|^{-1} \| = O(t).$$

Далее, обозначив через W унитарную часть полярного разложения Ω, имеем $W = \Omega\,|\Omega|^{-1}$ и

$$\begin{aligned}\| U_tWV_{-t} - W \| &= \| (U_t\Omega V_{-t})\ (V_t\,|\Omega|^{-1}\,V_{-t}) - \Omega\,|\Omega|^{-1} \| \\ &= \| U_t\Omega V_{-t} - \Omega \|\ \|\,|\Omega|^{-1}\| + \|\Omega\|\ \| V_t\,|\Omega|^{-1}\,V_{-t} - |\Omega|^{-1} \| = O(t).\end{aligned}$$

Затем введем операторы $\hat{V}_t = WV_tW^*$. Для них $\| U_t - \hat{V}_t \| = O(t)$. Тем самым генераторы iH и $WiKW^*$ отличаются на ограниченный кососопряженный оператор (пример 3.1.40), так что связь между H и K установлена.

Отметим еще, что $\| W^*U_tW - V_t \| = O(t)$, так как оператор $W^*iHW - iK = iP$ ограничен. Кроме того, соотношение

$$U_t - V_t = U_t - W^*U_tW + W^*U_tW - V_t$$

позволяет заключить, что

$$\| U_t - V_t \| = \| U_t - W^*U_tW \| + O(t).$$

Наконец, поскольку

$$S(\Omega) \subseteq \{z;\ z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z \geqslant (\sqrt{2}\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2/2)\,|\operatorname{Im} z|\},$$

то $S(W)$ содержится в том же самом конусе. Значит, $\sigma(W)$ лежит в этом конусе и $\| W - I \| \leqslant \sqrt{2} - \varepsilon_1$.

Следующей нашей целью будет получение аналога предложения 3.2.70 для σ-слабо непрерывных групп автоморфизмов алгебры фон Неймана. При этом будет применен приведенный выше результат для уннтарных групп, но кроме него понадобятся еще три вида дополнительных сведений, из которых по меньшей мере два представляют и самостоятельный интерес. Во-первых, мы рассмотрим, как соотносятся между собой два автоморфизма алгебры фон Неймана, близкие по норме. Во-вторых, мы получим один результат из теории меры и, в-третьих, один результат когомологического плана о совместной унитарной выполнимости двух групп автоморфнзмов.

Автоморфизмы алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ являются изометрическими операторами, поэтому $\|\alpha - \beta\| = \|\alpha\beta^{-1} - \iota\|$ для любой пары автоморфизмов α, β. Значит, при изучении следствий из условия близости по норме операторов α и β достаточно рассматривать один-единственный оператор $\alpha\beta^{-1}$. Очевидно, $\|\alpha - \iota\| \leqslant \leqslant \|\alpha\| + \|\iota\| = 2$, и замечательным образом из условия $\|\alpha - \iota\| < < 2$ следует, что α — внутренний автоморфизм. Тем самым множество $\mathrm{Inn}\,(\mathfrak{M})$ внутренних автоморфизмов $\mathfrak{M}$ оказывается в точности связной компонентой тождественного отображения ι в множестве $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{M})$ *-автоморфизмов $\mathfrak{M}$, если $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{M})$ наделено топологией нормы.

Теорема 3.2.71. *Пусть α — автоморфизм алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$. Если*

$$\|\alpha - \iota\| < 2,$$

то α — внутренний автоморфизм. Кроме того, в таком случае среди унитарных операторов, выполняющих α, найдется $U \in \mathfrak{M}$, спектр которого лежит в полуплоскости

$$\left\{z;\ \operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2}(4 - \|\alpha - \iota\|^2)^{1/2}\right\},$$

т. е. справедлива оценка

$$\|U - \mathbb{1}\| \leqslant \{2\,(1 - \sqrt{1 - \|\alpha - \iota\|^2/4}\,)\}^{1/2}.$$

Замечание. Условие на спектр U можно выразить более наглядно, сказав, что $\sigma\,(U)$ лежит на дуге единичной окружности, середина которой находится в точке 1, а концы делят пополам дуги, заключенные между 1 и точками, удаленными от 1 на расстояние $\|\alpha - \iota\|$. Указанная в теореме оценка для $\|U - \mathbb{1}\|$ неулучшаема.

Мы не станем доказывать теорему 3.2.71, заметим только, что если $\|\alpha - \iota\| < \sqrt{3}$, то, привлекая технику алгебр Ли, можно показать, что оператор $\delta = \log \alpha$, определенный с помощью контурного интеграла, будет дифференцированием алгебры $\mathfrak{M}$. Согласно следствию 3.2.47, имеется представление $\delta(A) = [H, A]$, где $H \in \mathfrak{M}$, поэтому $\alpha(A) = \exp(\delta)(A) = e^H A e^{-H}$. Если U обозначает унитарную часть полярного разложения e^H, то нетрудно получить выражение $\alpha(A) = UAU^*$.

Для доказательства теоремы при $\|\alpha - \iota\| < 2$ и для установления оценки на $\|U - \mathbb{1}\|$ необходим более длинный путь рассуждений (см. замечания и комментарии к главе).

Если α и β — две σ-слабо непрерывные однопараметрические группы автоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ и $\|\alpha_t - \beta_t\| < 2$ при малых $|t|$, то при таких t автоморфизмы $\gamma_t = \beta_t\alpha_{-t}$ — внутренние, по теореме 3.2.71. Многократно используя тождество для коциклов

$$\gamma_{t+s} = \gamma_t(\alpha_t\gamma_s\alpha_{-t}),$$

можно убедиться, что γ_t будут внутренними при всех $t \in \mathbb{R}$. Тем самым при каждом t существует такой оператор $W_t \in \mathfrak{M}$, что $\beta_t(A) = W_t\alpha_t(A)W_t^*$, $A \in \mathfrak{M}$. Если группа α выполнима посредством сильно непрерывного унитарного представления $t \mapsto U_t$, то хотелось бы так выбрать $t \mapsto W_t$, чтобы и $t \mapsto W_tU_t$ тоже было сильно непрерывным унитарным представлением, и обеспечить, таким образом, унитарную выполнимость группы β. В частности, мы хотим получить

$$W_{t+s}U_{t+s} = W_tU_tW_sU_s,$$

или, равносильно,

$$W_{t+s} = W_t\alpha_t(W_s).$$

В качестве первого шага докажем, что отображение $t \mapsto W_t$ можно выбрать борелевским.

Предложение 3.2.72. *Пусть α_t, β_t — две σ-слабо непрерывные однопараметрические группы *-автоморфизмов алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ с сепарабельным преддвойственным $\mathfrak{M}_*$. Предположим, что при некоторых $0 \leqslant \varepsilon < 2$ и $\delta > 0$*

$$\|\beta_t - \alpha_t\| < \varepsilon,$$

если $|t| < \delta$. Тогда существует такое борелевское отображение $t \mapsto W_t$ из $\mathbb{R}$ в группу $\mathcal{U}(\mathfrak{M})$ унитарных элементов $\mathfrak{M}$, что

$$\beta_t(A) = W_t\alpha_t(A)W_t^*, \quad A \in \mathfrak{M}, \ t \in \mathbb{R},$$

и при $|t| \leqslant \delta$

$$\|W_t - \mathbb{1}\| \leqslant \{2(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4})\}^{1/2}.$$

Доказательство. Существование при каждом t оператора W_t с требуемыми свойствами следует из замечаний, высказанных перед формулировкой предложения, так что остается лишь установить свойство борелевости. Напомним, что топологическое пространство называется *польским*, если оно гомеоморфно полному сепарабельному метрическому пространству. Подмножество польского пространства называется *аналитическим*, если оно является непрерывным образом польского пространства. Нам понадобятся следующие два результата:

(1) Если X_1 и Y_1 — аналитические борелевские пространства и f_1 — взаимно-однозначное борелевское отображение X_1 на Y_1, то f_1 — борелевский изоморфизм.

(2) Если X_2 — польское, а Y_2 — борелевское пространство и f_2: $X_2 \to Y_2$ такое отображение на Y_2, что

(I) прообразом каждой точки из Y_2 служит замкнутое множество в X_2,

(II) образами открытых множеств являются борелевские множества, то существует борелевское отображение g: $Y_2 \to X_2$, для которого $f(g(y)) = y$ при всех $y \in Y_2$. (См. замечания и комментарии.) Отображение g, о котором идет речь во втором утверждении, называют *борелевским сечением*.

Эти результаты мы применим, рассматривая в качестве X_2 пространство $\mathcal{U}(\mathfrak{M})$, снабженное сильной* топологией (которая на $\mathcal{U}(\mathfrak{M})$ эквивалентна слабой и сильной топологиям, как нетрудно проверить). Поскольку $\mathfrak{M}_*$ сепарабельно, X_2 оказывается польским пространством. Всякий автоморфизм $\mathfrak{M}$ имеет сопряженный в $\mathfrak{M}_*$ (теорема 2.4.23), поэтому можно группу $\mathrm{Inn}(\mathfrak{M})$ внутренних автоморфизмов $\mathfrak{M}$ рассматривать как подмножество в $\mathcal{L}(\mathfrak{M}_*)$ — множестве ограниченных линейных операторов на $\mathfrak{M}_*$. Если снабдить $\mathcal{L}(\mathfrak{M}_*)$ топологией поточечной сходимости по норме, то каноническое отображение f_2: $X_2 \equiv Y_2 \equiv \equiv \mathrm{Inn}(\mathfrak{M})$ непрерывно, так что условие (I) в (2) выполняется. С тем чтобы проверить выполнение условия (II), сначала рассмотрим факторотображение f_3: $\mathcal{U}(\mathfrak{M}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{M})/\mathcal{U}(\mathfrak{Z})$, где $\mathcal{U}(\mathfrak{Z})$ — группа унитарных операторов в центре $\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$. Снабдим $\mathcal{U}(\mathfrak{M})/\mathcal{U}(\mathfrak{Z})$ фактортопологией; тогда отображение f_3 непрерывно и открыто. В частности, $X_1 = \mathcal{U}(\mathfrak{M})/\mathcal{U}(\mathfrak{Z})$ оказывается аналитическим борелевским пространством. Аналитическим борелевским пространством является и $Y_1 \equiv Y_2 \equiv \mathrm{Inn}(\mathfrak{M}) = f_2(\mathcal{U}(\mathfrak{M}))$. Каноническое отображение $f_1 : X_1 = = \mathcal{U}(\mathfrak{M})/\mathcal{U}(\mathfrak{Z}) \to Y_1 \equiv \mathrm{Inn}(\mathfrak{M})$ непрерывно и взаимно-однозначно, поэтому из (1) следует, что f_1 — борелевский изоморфизм. Так как f_3 переводит открытые множества в открытые, а f_1 переводит открытые множества в борелевские, то образами открытых множеств при отображении $f_2 = f_1 \circ f_3$ будут борелевские множества. Следовательно, f_2 удовлетворяет условиям (I) и (II) из (2). Поскольку $t \longmapsto \alpha_t$ — группа σ-слабо непрерывная, отображение $t \longmapsto \alpha_t^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_*)$ слабо, а потому и сильно непрерывно, согласно следствию 3.1.8. Тем самым $t \longmapsto (\beta_t \alpha_{-t})^* = \alpha_{-t}^* \beta_t^*$ непрерывно в топологии поточечной сходимости по норме для $\mathcal{L}(\mathfrak{M}_*)$. Следовательно, ссылкой на приведенное выше утверждение (2) устанавливается, что существует такое борелевское отображение $t \in \mathbb{R} \longmapsto W_t' \in \in \mathcal{U}(\mathfrak{M})$, что

$$\beta_t \alpha_{-t}(A) = W_t' A W_t'^*, \quad A \in \mathfrak{M}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Для того чтобы получить оценку на W_t, мы повторим предыдущие рассуждения, полагая

$$Y_2 = Y_1 = \mathrm{Inn}_\varepsilon(\mathfrak{M}) = \{\alpha;\ \alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}),\ \|\alpha - \iota\| \leqslant \varepsilon\},$$

$$X_2 = \mathcal{U}_{\varepsilon'}(\mathfrak{M}) = \{U;\ U \in \mathcal{U}(\mathfrak{M}),\ \|U - \mathbb{1}\| \leqslant \varepsilon'\},$$

где $\varepsilon' = \left\{2\left(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}\right)\right\}^{1/2}$. Тогда Y_2 будет замкнутым подмножеством в $\mathrm{Inn}(\mathfrak{M})$, X_2 — замкнутым подмножеством в $\mathcal{U}(\mathfrak{M})$, и по теореме 3.2.71 и следующему за ней замечанию $Y_2 = f_2(X_2)$. Применив вновь утверждение (2), мы убедимся в существовании борелевского отображения $t \in [-\delta, \delta] \longmapsto W_t'' \in \in \mathcal{U}_{\varepsilon'}(\mathfrak{M})$, и при каждом t этими W_t'' выполняются $\beta_t \alpha_{-t}$. Для завершения доказательства остается положить

$$W_t = \begin{cases} W_t'' & \text{при} \quad |t| \leqslant \delta, \\ W_t' & \text{при} \quad |t| > \delta. \end{cases}$$

Теперь мы хотим видоизменить отображение $t \mapsto W_t$, полученное в предложении 3.2.72, с тем чтобы модифицированное отображение $t \mapsto W_t$ удовлетворяло соотношению для 1-коциклов

$$W_{t+s} = W_t \alpha_t (W_s).$$

Отметим, что с аналогичной ситуацией мы уже сталкивались в теореме 2.7.16 и что у рассматриваемой здесь теоремы есть другие варианты, интересные также в случае, когда $\alpha_t = \iota$ при всех t (см. замечания и комментарии).

Теорема 3.2.73. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана с сепарабельным преддвойственным пространством $\mathfrak{M}_*$, и пусть α, β — две σ-слабо непрерывные однопараметрические группы *-автоморфизмов $\mathfrak{M}$. Предположим, что существуют такие $\delta > 0$ и $0 \leqslant \varepsilon < \sqrt{71}/18 \approx 0.47$, что*

$$\| \beta_t - \alpha_t \| \leqslant \varepsilon \ \textit{при} \ |t| \leqslant \delta.$$

Тогда существует σ-слабо непрерывное отображение $t \in \mathbb{R} \mapsto \Gamma_t \in \mathcal{U}(\mathfrak{M})$ со свойствами:

$$\Gamma_{t+s} = \Gamma_t \alpha_t (\Gamma_s), \quad t, \ s \in \mathbb{R},$$

$$\beta_t (A) = \Gamma_t \alpha_t (A) \Gamma_t^*, \quad t \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathfrak{M},$$

$$\| \Gamma_t - \mathbb{1} \| \leqslant 10 \{2 (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4})\}^{1/2} = 5\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{при} \quad |t| < \delta/4.$$

Доказательство. Согласно предложению 3.2.72, определено такое борелевское отображение $t \in \mathbb{R} \mapsto W_t \in \mathcal{U}(\mathfrak{M})$, что

$$\beta_t (A) = W_t \alpha_t (A) W_t^*, \ A \in \mathfrak{M}, \ t \in \mathbb{R},$$

и при $|t| \leqslant \delta$

$$\| W_t - \mathbb{1} \| \leqslant \varepsilon',$$

где $\varepsilon'^2 = 2 (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4})$. Ввведем

$$z (s, t) = W_s \alpha_s (W_t) W_{s+t}^{-1}.$$

В таком случае

$$z (s, t) A z (s, t)^* = (\beta_s \alpha_{-s}) (\alpha_s \beta_t \alpha_{-t} \alpha_{-s}) (\beta_{s+t} \alpha_{-s-t})^{-1} (A) = A.$$

Следовательно, $z (s, t) \in \mathcal{U}(\mathfrak{Z})$, где $\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$. Непосредственно проверяется, что $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto z (s, t) \in \mathcal{U}(\mathfrak{Z})$ будет 2-коциклом, т. е. при всех $s, t, u \in \mathbb{R}$

$$z (s, 0) = z (0, t) = 1, \quad z (s, t) z (s + t, u) = \alpha_s (z (t, u)) z (s, t + u).$$

Подчеркнем, что $t \mapsto W_t$ окажется 1-коциклом тогда и только тогда, когда $z (s, t) = \mathbb{1}$ при всех s, t. Мы собираемся модифицировать W_t так, чтобы это условие выполнялось.

Из определения z сразу получаем оценку

$$\| z (s, t) - \mathbb{1} \| \leqslant 3\varepsilon' \quad \text{при} \quad |s| + |t| \leqslant \delta.$$

Определим индуктивно $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_t \in \mathcal{U}(\mathfrak{Z})$, полагая

$$\lambda_0 = \mathbb{1}, \quad \lambda_{\delta/2 \cdot (t+n)} = \lambda_{\delta/2 \cdot n} z (\delta/2 \cdot n, \ \delta/2 \cdot t)$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Далее, определим $z'(s, t)$ соотношением

$$z'(s, t) = \lambda_s \alpha_s(\lambda_t) z(s, t) \lambda_{s+t}^{-1}$$

при $s, t \in \mathbb{R}$. Ясно, что z' является 2-коциклом и отображение $s, t \mapsto z'(s, t)$ борелевское. Так как $z'(\delta n/2, \delta t/2) = \lambda_{\delta n/2} \alpha_{\delta n/2}(\lambda_{\delta t/2}) \lambda_{\delta n/2}^{-1}$, а $\lambda_{\delta t/2} = \mathbb{1}$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то

$$z'(p, t) = \mathbb{1} \text{ при } 0 < t \leqslant \delta/2,\ p \in \frac{\delta}{2}\mathbb{Z}.$$

Если $0 \leqslant s$, $t \leqslant \delta/2$ и $s + t \leqslant \delta/2$, то $z'(s, t) = z(s, t)$. Если $0 \leqslant s$, $t \leqslant \delta/2$, но $s + t > \delta/2$, то $\lambda_{s+t} = z(\delta/2, s + t - \delta/2)$ и $z'(s, t) = z(s, t) z(\delta/2, s + t - \delta/2)^{-1}$. Поэтому из $\|z(s, t) - \mathbb{1}\| \leqslant 3\varepsilon'$ при $0 \leqslant s$, $t \leqslant \delta/2$, следует, что

$$\|z'(s, t)\| \leqslant 6\varepsilon' \text{ при } 0 \leqslant s,\ t \leqslant \delta/2.$$

Для продолжения доказательства нам необходима следующая

Лемма 3.2.74. а) *Если z — такой 2-коцикл, что*

$$z(s, t) = \mathbb{1} \text{ *при* } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

то

$$z(s, t) = \mathbb{1} \text{ *при* } s, t \in \mathbb{R}.$$

б) *Если z — такой 2-коцикл, что*

$$z(n, t) = \mathbb{1} \text{ *при* } 0 \leqslant t \leqslant 1,\ n \in \mathbb{Z},$$

то при любом $t \in \mathbb{R}$ функция $s \mapsto \alpha_{-s}(z(s, t))$ периодична с периодом 1.

Доказательство. Их тождества для коциклов, записанного в виде

$$z(n, 1) z(n + 1, t) = \alpha_n(z(1, t)) z(n, 1 + t),$$

с помощью итераций выводится, что в каждом из случаев а) и б) при $t \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{Z}$ мы имеем $z(n, t) = \mathbb{1}$. Записав же это тождество в виде

$$z(-n, n) = \alpha_{-n}(z(n, -t)) z(-n, n - t),$$

мы установим, что $z(n, -t) = \mathbb{1}$ при $t \leqslant n \in \mathbb{Z}$, и в частности $z(n, -1) = \mathbb{1}$ при $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Поэтому по индукции получаем, записывая то же тождество в форме

$$z(n, -1) z(n - 1, t) = \alpha_n(z(-1, t)) z(n, t - 1),$$

что $z(n, t) = \mathbb{1}$ при $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$. Однако в силу предыдущего варианта записи тождества имеем теперь $z(-n, n - t) = \mathbb{1}$ при $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Значит, $z(n, t) = \mathbb{1}$ при $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$. Применяя те же рассуждения, но только с $s\mathbb{Z}$ вместо $\mathbb{Z}$, приходим к а). Чтобы установить б), используем тождество для коциклов в форме

$$z(n, s) z(n + s, t) = \alpha_n(z(s, t)) z(n, s + t).$$

Учитывая, что $z(n, s) = z(n, s + t) = \mathbb{1}$, получаем

$$\alpha_{-n-s}(z(n + s, t)) = \alpha_{-s}(z(s, t)),$$

откуда и следует б).

Теперь возобновим доказательство теоремы 3.2.73.

Отметим, что $z'(p, t) = \mathbb{1}$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta/2$, $p \in (\delta/2)\mathbb{Z}$, так что утверждение б) леммы 3.2.74 гарантирует периодичность функции $s \longmapsto \alpha_{-s}(z'(s, t))$ с периодом $\delta/2$. Значит, оценка

$$\| z'(s, t) - \mathbb{1} \| \leqslant 6\varepsilon'$$

справедлива при всех s, когда $0 \leqslant t \leqslant \delta/2$. Пусть теперь log обозначает главное значение логарифма, определенного на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Из условия $\varepsilon < \sqrt{71}/18$ следует, что $6\varepsilon' < \sqrt{2}$, поэтому, с учетом оценки для z', при $0 \leqslant t \leqslant \delta/2$ будет определено

$$y(s, t) = \log(z'(s, t)).$$

Используя тот факт, что z' — коцикл, получаем

$$y(s, 0) = y(0, t) = 0,$$
$$y(s, t) + y(s + t, u) = \alpha_s(y(t, u)) + y(s, t + u)$$

при $0 \leqslant t, u, t + u \leqslant \varepsilon$. При выводе последнего соотношения учитывается, что для z' справедлива оценка с $\sqrt{2}$. Отображение $s, t \longmapsto y(s, t)$ является борелевским. Введем еще борелевское отображение $c : t \in [0, \delta/2] \longmapsto c(t) \in \mathfrak{Z}_{sa}$ по формуле

$$c(t) = -\frac{2}{\delta} \int_0^{\delta/2} ds\alpha_{-s}(y(s, t)).$$

Периодичность $s \longmapsto \alpha_{-s}(y(s, t))$ дает

$$C(t) = -\frac{2}{\delta} \int_u^{\delta/2+u} ds\alpha_{-s}(y(s, t))$$

при всех $u \in \mathbb{R}$, а простые выкладки, основанные на выведенных выше свойствах y, показывают, что

$$c(s + t) - \alpha_s(c(t)) - c(s) = y(s, t),$$

если $0 \leqslant s, t, s + t \leqslant \delta/2$. Тем самым, определив $\lambda' : t \in [0, \delta/2] \longmapsto \lambda'_t \in \mathfrak{Z}_{sa}$ формулой

$$\lambda'_t = \exp(c(t)),$$

находим, что

$$\lambda'_{s+t}\alpha_s(\lambda'^{-1}_t)\lambda'^{-1}_s = z'(s, t)$$

при $0 \leqslant s, t, s + t \leqslant \delta/2$.

Из оценки $\| z'(s, t) - \mathbb{1} \| \leqslant 6\varepsilon'$ при $0 \leqslant s, t \leqslant \delta/2$ с помощью спектральной теории извлекаем оценки

$$\| y(s, t) \| \leqslant \arccos(1 - (6\varepsilon')^2/2), \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta/2,$$
$$\| c(t) \| \leqslant \arccos(1 - (6\varepsilon')^2/2), \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta/2,$$

и, наконец,

$$\| \lambda'_t - \mathbb{1} \| \leqslant 6\varepsilon'$$

при $0 \leqslant t \leqslant \delta/2$. Теперь расширим отображение $t \in [0, \delta/2] \longmapsto \lambda'_t \in \mathcal{U}(\mathfrak{Z})$ до борелевского отображения всей вещественной прямой $\mathbb{R}$ в $\mathcal{U}(\mathfrak{Z})$ и положим

$$z''(s, t) = \lambda'^{-1}_{s+t} z'(s, t) \lambda'_s \alpha_s(\lambda'_t).$$

Ясно, что z'' будет 2-коциклом и

$$z''(s,\ t) = \mathbb{1} \text{ при } 0 \leqslant s,\ t \leqslant \delta/4.$$

Заменив $\delta/2$ на $\delta/4$ и ε' на 0, мы далее по z'' введем z''' аналогично тому, как z' определялся по z. Сперва при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$ задаем

$$\lambda''_0 = \mathbb{1},\ \lambda''_{\delta(t+n)/4} = \lambda''_{\delta n/4} z''(\delta n/4,\ \delta t/4),$$

а затем полагаем

$$z'''(s,\ t) = \lambda''_s \alpha_s (\lambda''_t)\, z''(s,\ t)\, \lambda''^{-1}_{s+t}.$$

Как и выше, проверяется, что z''' будет 2-коциклом, удовлетворяющим условиям

$$z'''(p,\ t) = \mathbb{1} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta/4,\ p \in (\delta/4)\,\mathbb{Z},$$

$$z'''(s,\ t) = \mathbb{1} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s,\ t \leqslant \delta/4.$$

Следовательно, утверждение а) леммы 3.2.74 дает $z'''(s,\ t) = \mathbb{1}$ при всех s, t. Введя

$$\lambda'''_s = \lambda''_s \lambda'_s \lambda_s,$$

мы будем иметь

$$z(s,\ t) = \lambda'''_{s+t} z'''(s,\ t)\, \lambda'''^{-1}_s \alpha_s \left(\lambda'''^{-1}_t\right) = \lambda'''_{s+t} \lambda'''^{-1}_s \alpha_s \left(\lambda'''^{-1}_t\right).$$

Далее, если положить $\Gamma_s = \lambda'''_s W_s$, то Γ_s окажется 1-коциклом, причем

$$\Gamma_{s+t} = \Gamma_s \alpha_s (\Gamma_t), \qquad \beta_t(A) = \Gamma_t \alpha_t (A)\, \Gamma^*_t.$$

Но отображение $t \longmapsto \Gamma_t$ борелевское, и $\mathfrak{M}_*$ сепарабельно. Поэтому $t \longmapsto \Gamma_t$ непрерывно, как видно из следующего рассуждения. Сепарабельность $\mathfrak{M}_*$ обеспечивает существование точного нормального состояния ω на $\mathfrak{M}$. Если $\mathscr{P}$ — естественный положительный конус, отвечающий циклическому представлению в $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\omega$ (см. определение 2.5.25), а $\varphi \in \mathfrak{M}_{*+} \longmapsto \xi(\varphi) \in \mathscr{P}$ — ассоциированное отображение, определенное в теореме 2.5.31, то из оценки

$$\|\xi(\varphi_1) - \xi(\varphi_2)\|^2 \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

и сепарабельности $\mathfrak{M}_{*+}$ вытекает, что $\mathscr{P}$ — сепарабальное подмножество в $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} = \mathscr{P} - \mathscr{P} + i(\mathscr{P} - \mathscr{P})$, согласно предложению 2.5.26, то $\mathfrak{H}$ сепарабельно. Теперь выберем в качестве $t \longmapsto U_t$ каноническую унитарную группу, выполняющую $t \longmapsto \alpha_t$ (следствие 2.5.32); тогда $t \longmapsto V_t = \Gamma_t U_t$ будет унитарным представлением $\mathbb{R}$, поскольку Γ_t является коциклом. Отображение $t \longmapsto V_t$ борелевское, и $\mathfrak{H}$ сепарабельно, поэтому $t \longmapsto V_t$ сильно непрерывно. Обосновывается этот вывод с помощью регуляризации примерно так же, как в следствии 3.1.8 проводится доказательство того, что из слабой непрерывности следует сильная. Значит, отображение $t \longmapsto \Gamma_t = V_t U_{-t}$ сильно непрерывно.

Наконец, получим оценку на Γ_t. Объединяя полученные ранее оценки

$$\|W_t - \mathbb{1}\| \leqslant \varepsilon', \qquad |t| \leqslant \delta;$$

$$\|\lambda_t - \mathbb{1}\| \leqslant 3\varepsilon', \qquad 0 \leqslant t \leqslant \delta/2;$$

$$\|\lambda'_t - \mathbb{1}\| \leqslant 6\varepsilon', \qquad 0 \leqslant t \leqslant \delta/2;$$

$$\|\lambda''_t - \mathbb{1}\| = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \delta/4,$$

находим, что

$$\|\Gamma_s - \mathbb{1}\| \leqslant \varepsilon' + 3\varepsilon' + 6\varepsilon' = 10\varepsilon' \text{ при } |s| \leqslant \delta/4.$$

Теперь мы заготовили необходимые средства, позволяющие уточнить основную теорему теории аппроксимации (теорему 3.1.36) в случае алгебр фон Неймана.

Теорема 3.2.75. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— алгебра фон Неймана с сепарабельным преддвойственным пространством и* α, β *— две* σ*-слабо непрерывные однопараметрические группы *-автоморфизмов* $\mathfrak{M}$ *с генераторами соответственно* δ_α *и* δ_β. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существуют такое* ε_1, $0 \leqslant \varepsilon_1 < \sqrt{199}/50 \simeq 0.28$, *и такое* $\delta_1 > 0$, *что*

$$\|\alpha_t - \beta_t\| \leqslant \varepsilon_1 \text{ при } |t| \leqslant \delta_1;$$

(2) *существуют такие* ε_2, $0 \leqslant \varepsilon_2 < \sqrt{199}/50$, *и* $\delta_2 > 0$, *такой внутренний автоморфизм* γ *алгебры* $\mathfrak{M}$ *и такое ее ограниченное дифференцирование* δ, *что*

$$\delta_\beta = \gamma(\delta_\alpha + \delta)\gamma^{-1},$$

$$\|\alpha_t \circ \gamma \circ \alpha_{-t} - \gamma\| \leqslant \varepsilon_2 \text{ при } |t| \leqslant \delta_2.$$

Если эти условия удовлетворены, то

$$\|\beta_t - \alpha_t\| = \|\alpha_{-t} \circ \gamma \circ \alpha_t - \gamma\| + O(t)$$

и среди унитарных элементов, выполняющих γ, *найдется такой* $W \in \mathfrak{M}$, *для которого верна оценка*

$$\|W - \mathbb{1}\| \leqslant 10\{2(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2/4})\}^{1/2}.$$

Тем самым $\|\gamma - \iota\| \leqslant 10\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^2)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). По теореме 3.2.73 существует сильно непрерывное отображение $t \in \mathbb{R} \longmapsto \Gamma_t \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ со свойствами

$$\Gamma_{t+s} = \Gamma_t \alpha_t(\Gamma_s), \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

$$\beta_t(A) = \Gamma_t \alpha_t(A)\Gamma_t^*, \qquad A \in \mathfrak{M},\ t \in \mathbb{R},$$

$$\|\Gamma_t - \mathbb{1}\| \leqslant \varepsilon' = 10\{2(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2/4})\}^{1/2} < \sqrt{2},\ |t| < \delta/4.$$

Мы можем, не ограничивая общности, считать, что $\mathfrak{M}$ имеет стандартную форму, так что, согласно следствию 2.5.32, существует группа $t \longmapsto U_t$ на $\mathfrak{H}$, выполняющая α:

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^*, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathfrak{M}.$$

Введем $V_t = \Gamma_t U_t$. Поскольку Γ_t — коцикл, то $t \longmapsto V_t$ является унитарным представлением $\mathbb{R}$ и

$$\beta_t(A) = V_t A V_t^*, \quad t \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathfrak{M}.$$

При $|t| < \delta/4$ имеем

$$\|V_t U_{-h} - \mathbb{1}\| = \|\Gamma_t - \mathbb{1}\| \leqslant \varepsilon' < \sqrt{2}$$

и $\Omega = 4\delta^{-1}\int_0^{\sigma/4} dt\, V_t U_{-t} \in \mathfrak{M}$. Значит, в силу предложения 3.2.70, существует такой унитарный $W \in \mathfrak{M}$, что $\|V_t - WU_tW^*\| = O(t)$. Полагая $\gamma(A) = WAW^*$ и $\hat{\alpha}_t = \gamma\alpha_t\gamma^{-1}$, приходим к оценке

$$\|\beta_t - \hat{\alpha}_t\| \leqslant 2\|V_t - WU_tV^*\| = O(t).$$

Следовательно, по предложению 3.2.69, на $\mathfrak{M}$ имеется такое ограниченное дифференцирование δ', для которого

$$\delta_\beta = \delta_{\hat{\alpha}} + \delta' = \gamma\delta_\alpha\gamma^{-1} + \delta' = \gamma(\delta_\alpha + \delta)\gamma^{-1};$$

здесь $\delta = \gamma^{-1}\delta'\gamma$. Отсюда немедленно следует, что

$$\alpha_t - \gamma\alpha_t\gamma^{-1} = \exp(t\delta_\alpha) - \exp(t\delta_\beta) + \exp(t\delta_\beta) - \exp(t(\delta_\beta - \delta'))$$

и потому

$$\|\alpha_{-t}\gamma\alpha_t - \gamma\| = \|\alpha_t - \gamma\alpha_t\gamma^{-1}\| = \|\alpha_t - \beta_t\| + O(t).$$

Тем самым оценка в (2) вытекает из оценки в (1), и наоборот.

Оценка на $\| W - \mathbb{1} \|$ следует из оценки на $\|\Gamma_t - \mathbb{1}\|$ и предложения 3.2.70.

В заключение заметим, что можно пояснить смысл обоих аналогичных утверждений об аппроксимации (предложения 3.2.70 и теоремы 3.2.75), сопоставив каждое из них со следующими двумя специальными результатами. Сначала рассмотрим сравнение двух унитарных групп U, V в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Если

$$\| U_t - V_t \| = O(t),\ t \to 0,$$

то по теореме 3.1.38 генераторы групп U и V отличаются на ограниченный оператор. Если, однако,

$$\| U_t - V_t \| < \sqrt{2} - \varepsilon_1$$

при всех $t \in \mathbb{R}$, то обязательно найдется унитарный оператор W, такой что

$$U_t = WV_tW^*.$$

Для доказательства этого выберем на $\mathbb{R}$ инвариантное среднее M (определение и обсужденне свойств инвариантных средних см. в пункте 4.3.3) и зададнм Ω равенством $\Omega = M(UV^{-1})$. Если $\mathfrak{N}$ — алгебра фон Неймана, порожденная семейством $\{U_tV_{-t};\ t \in \mathbb{R}\}$, то (корректно определенный) оператор Ω входит в $\mathfrak{N}$ и в чнсловой областн значений Ω нуль не содержится. Следовательно, частично изометрнческий оператор W в полярном разложении $\Omega = W|\Omega|$ оказывается унитарным. Кроме того, соотношенне

$$U_sU_tV_{-t} = U_{s+t}V_{-s-t}V_s$$

влечет $U_s\Omega = \Omega V_s$, и теперь несложно проверить, что $U_tW = WV_t$.

Аналогично рассматривается случай двух σ-слабо непрерывных групп *-автоморфизмов α, β алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$. Если условие (1) теоремы 3.2.75 выполнено при всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. если $\delta_1 = \infty$, то

$$\beta_t = \gamma\alpha_t\gamma^{-1},$$

где γ — внутренний автоморфизм $\mathfrak{M}$. Это устанавливается соединением доказательства теоремы 3.2.75 с предыдущим обсуждением случая унитарных групп.

Таким образом, в каждой из двух указанных утверждений об аппроксимации можно связывать «подталкивание», т. е. ограниченное возмущение, с поведением типа $O(t)$, а «подкручивание», т. е. автоморфизм, считать связанным с близостью по норме при всех t.

ЗАМЕЧАНИЯ И КОММЕНТАРИИ

Пункты 3.1.1 и 3.1.2

Стандартное руководство по теории полугрупп — книга Хилле и Филлипса [[Hil 1]], в которой изложено состояние теории вплоть до 1956 г. Главы, посвященные этой теории, а также результатам, полученным после 1956 г., содержатся в [[But 1]], [[Kat 1]], [[Ree 2]], [[Rie 1]], [[Yos 1]].

Определение полугруппы в [[Hil 1]] отличается от нашего тем, что условие $U_0 = I$ там не накладывается, и это приводит к подробному исследованию поведения U в нуле при различных условиях непрерывности вне нуля. Тем не менее основным объектом изучения в [[Hil 1]] являются C_0-полугруппы, как мы их определили. Понятие C_0^*-полугруппы или $\sigma(X, X_*)$-непрерывной полугруппы, введенное де Леу [Lee 1], исследовано в [[But 1]]. Следует подчеркнуть, что оно не совпадает с понятием сопряженной полугруппы, рассмотренным в [[Hil 1]]. Если для C_0-полугруппы U в банаховом пространстве X ввести сопряженную C_0^*-полугруппу U^* в X^*, перейдя к сопряженным операторам, то сужение U^* на слабо* плотное подпространство X_0^* в X^* будет сильно непрерывно. Это сужение U^* на X_0^*, являющееся C_0-полугруппой, и названо в [[Hil 1]] сопряженной к U полугруппой.

Теория равномерно непрерывных полугрупп также изложена в [[Hil 1]]; создателем ее считается Нагумо [Nagu 1].

Результат следствия 3.1.8 об эквивалентности свойств слабой и сильной непрерывности и дифференцируемости для C_0-полугрупп впервые получил Иосида [Yos 1], который также построил теорию равностепенно непрерывных полугрупп, имеющую много общего с нашим рассмотрением $\sigma(X, F)$-непрерывных полугрупп.

Вариант теоремы 3.1.10 для C_0-полугрупп был независимо доказан в 1948 г. Хилле [[Hil 2]] и Иосидой [Yos 1]. Первый алгоритм вычисления экспоненты принадлежит Иосиде, а второй — Хилле. Лемма 3.1.11, позволяющая переходить от одного алгоритма к другому, получена значительно позже Черновым [Che 1]. Полную характеризацию генераторов C_0-полугрупп, т. е. вариант следствия 3.1.12 для сильно непрерывного случая, почти одновременно дали Феллер [Fel 1], Миядэра [Miy 1] и Филлипс [Phi 1] в 1953 г.

Понятие диссипативного оператора ввели в 1961 г. Люмер и Филлипс [Lum 1]. Ими установлены основные свойства этих операторов (леммы 3.1.14 и 3.1.15) и охарактеризованы сжимающие C_0-полугруппы (теорема 3.1.16). Можно доказать, что для плотно определенного оператора S в банаховом пространстве эквивалентны следующие условия: (1) Операторы $\pm S$ диссипативны и (2) $\|(I+\alpha S)(A)\| \geqslant \|A\|$ при всех $A \in D(S)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (см. [[Dun 1]], том 1, V. 9.5). Вариант теоремы 3.1.19 содержится также в [Lum 1]: если S — замкнутый диссипативный оператор в банаховом пространстве X и для всех A из некоторого плотного в X подмножества $\|S^n A\|^{1/n} = o(n)$ при $n \to \infty$, то S порождает C_0-полугруппу сжатий. Другой вариант этой теоремы был доказан Нельсоном [Nel 1] для унитарных групп в гильбертовом пространстве.

Интересная характеризация областей определения генераторов C_0^*-полугрупп, составляющая содержание предложения 3.1.23, принадлежит де Леу [Lee 1]; она основана на более ранних результатах Бутцера [[But 1]]. Это предложение особенно полезно в теории аппроксимации, где оно позволяет получить решение так называемой проблемы насыщения (см. [[But 1]], гл. 2).

Пункт 3.1.3

Теорему 3.1.26 в C_0-случае часто называют теоремой Троттера—Като. Впервые она была доказана Троттером [Tro 1], а впоследствии доказательство было упрощено Като [Kat 1].

Теорема 3.1.28 принадлежит Курцу [Kur 1], а для частного случая унитарных групп в гильбертовом пространстве тот же результат независимо получили Глимм и Джаффе [Gli 5].

Алгоритм, содержащийся в теореме 3.1.30, предложен Черновым [Che 1]; он является прямым обобщением алгоритмов для произведения полугрупп, впервые изученных Троттером [Tro 2]. Эти алгоритмы, содержащиеся в следствии 3.1.31, часто называют формулами Троттера для произведения полугрупп. В работе Чернова [Che 2] обсуждается их применение для определения суммы неограниченных операторов.

Пункт 3.1.4

Теории возмущений посвящена монография Като [[Kat 1]]. Частично она также изложена у Рида и Саймона [[Ree 2]], Рисса и Сёкефальви-Надя [[Rie 1]], Хилле и Филлипса [[Hil 1]].

Теорема 3.1.34 доказана Браттели и Кисимото [Bra 11], а контрпример, упомянутый в замечании к теореме, можно найти в статье Йёргенсена [Jør 1].

Пункт 3.1.5

Сравнение групп, которому посвящен этот пункт, может рассматриваться как одно из направлений обобщения ряда результатов теории аппроксимации, например предложения 3.1.23. Начало такому направлению положили работа Бухольца и Робертса [Buc 1] и последующая статья Робинсона. Предложение 3.1.35 и теоремы 3.1.38, 3.1.41 взяты из [Rob 6]. Теорема 3.1.36 содержится в статье Браттели, Хёрмэна и Робинсона [Bra 4].

Пункт 3.2.1

Принадлежащую Вигнеру трактовку симметрий и первоначальное доказательство результатов примера 3.2.14 читатель найдет в [[Wign 1]], а более современный вариант изложения — в [Sim 1]. Исходный алгебраический вариант предложения 3.2.2 доказан Джекобсоном и Риккартом [Jac 1], а его C^*-версия принадлежит Кадисону [Kad 4], [Kad 5]. Неравенство из предложения 3.2.4 в случае самосопряженного A известно под названием неравенства Кадисона [Kad 6], а приведенный его вариант, доказанный Стайнспрингом [Sti 1], использует идеи, высказанные Наймарком [[Nai 1]]. Стёрмер доказал в 1963 г., что неравенство это остается в силе, если $\varphi(A)$ предполагается нормальным [Stø1]. Предложение 3.2.5 установили Руссо и Дай [Rus 1], а Робертсон показал [Rober 1], что выпуклая оболочка унитарных элементов содержит открытый единичный шар. Приведенное нами краткое доказательство заимствовано у Педерсена [[Ped 1]]. Превосходный обзор свойств положительных отображений дан в [Stø2]. Что касается классификации произвольных положительных отображений, то это задача необъятная, она сложна даже в случае, когда $\mathfrak{A}$ — алгебра 2×2-матриц, а $\mathfrak{B}$ — алгебра 4×4-матриц [Wor 2].

Йорданово разложение эрмитовых функционалов из двойственного пространства C^*-алгебры (предложение 3.2.7) восходит к работе Гротендика [Gro 1]. В статье [Kad 5] Кадисон ввел понятие полного семейства состояний (определение 3.2.9) и доказал предложение 3.2.10 и теорему 3.2.11; наши доказательства этих утверждений отличаются от первоначальных. В той же статье приведены варианты следствий 3.2.12 и 3.2.13. Пример, показывающий неприменимость следствия 3.2.13 для произвольных алгебр фон Неймана, приведен в [Bra 3].

Тот факт, что все автоморфизмы $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ внутренние, является отличительной особенностью $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$, которая не присуща никакому другому фактору. Классификация автоморфизмов гиперфинитных факторов типа II_1 и II_∞ получена Конном [Con 5, 6]. Им также построен удивительный пример фактора, который не антиизоморфен самому себе [Con 7]. Отметим, что алгебра фон Неймана в стандартной форме антиизоморфна своему коммутанту (этот антиизоморфизм осуществляется отображением $A \mapsto$ $\mapsto JAJ^*$). В примере Конна фактор в стандартном представлении неизоморфен своему коммутанту, поэтому он не может быть антиизоморфен самому себе.

Йордановы автоморфизмы алгебр фон Неймана в стандартной форме были охарактеризованы как унитарные отображения естественного конуса на себя (теорема 3.2.15) независимо Конном [Con 1] и Хаагерупом [Наа 1, 2]. Теорема 3.2.18 ранее не публиковалась, но близкие соображения и лемма 3.2.19 приведены в статье Браттели и Робинсона [Bra 3].

Пункт 3.2.2

Теория ограниченных дифференцирований C^*- и W^*-алгебр была по существу заложена Капланским [Кар 3], который в 1953 г. показал, что каждое дифференцирование δ алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ типа I является внутренним, т. е. $\delta(A) = i[H, A]$ с $H \in \mathfrak{M}$. Тем не менее большого прогресса не наблюдалось до 1965 г., когда появнлась работа Кадисона [Kad 7], послужившая толчком к быстрому развитию теории. Бóльшая часть результатов, полученных к 1970 г., описана в кннге Сакаи [[Sak 1]], а более подробные библиографические указания приведены в замечаниях, касающихся пункта 3.2.3.

Изучение неограниченных дифференцирований началось гораздо позднее, оно было мотивировано главным образом проблемами математической физики, в частности проблемой построения динамикн в статистической механике. Один из ранних результатов принадлежит Робинсону [Rob 7], применившему в 1968 г. технику аналитических векторов для построення C_0-группы изометрий РГФ-алгебры по заданному генератору. Основные события, однако, разыгрались после 1975 г.; онн были в значительиой степени вдохновлены статьямн Сакаи [Sak 2] и Браттели и Робинсона [Bra 5].

Предложение 3.2.22, равно как и идея применить технику диссипативных операторов, принадлежит Кисимото [Kis 1]. Ограниченность всюду определенного дифференцирования (следствие 3.2.23) была ранее доказана Сакаи в работе 1960 г. [Sak 3] с помощью остроумных преобразованнй, привлекавших технику извлечения квадратного корня. Этот результат был улучшеи в 1976 г. в работе Оты [Ôta 1], где показана ограниченность каждого замкнутого по норме дифференцирования δ с областью определения $D(\delta)$, инвариантной относительно извлечения квадратного корня. Доказательство Оты основаио на результате Кунца [Cun 1], показавщего, что полупростая банахова *-алгебра с единицей тогда и только тогда допускает эквивалентную норму, превращающую ее в C^*-алгебру, когда она замкнута относительно операции извлечения квадратного корня из положительных элементов, т. е. самосопряженных элементов с неотрицательным спектром. (Банахова $*$-алгебра полупроста, если она имеет точное $*$-представление в гильбертовом пространстве.)

В виде предложения 3.2.24 переформулирован один результат Кадисона [Kad 7]. Конструкция H_Λ из примера 3.2.25 впервые была приведена Эллиоттом [Ell 2]. Критерий замыкаемости (предложение 3.2.26) принадлежит Чжи [Chi 1], а аналогичный критерий унитарной выполнимости (предложение 3.2.28) — Браттели и Робинсону [Bra 3].

Следует подчеркнуть, что существуют дифференцирования C^*-алгебр, плотно по норме определенные, но не допускающие замыкания. Первые примеры, приведенные Браттели и Робинсоном [Bra 5], были основаны на вычислении производной для функций на канторовом подмножестве единичного отрезка [0, 1]. Такая процедура позволяет определить дифференцирование алгебры непрерывных функций на этом множестве, не имеющее замыкания; с ее помощью строятся и примеры незамыкаемых дифференцирований РГФ-алгебр. Оказывается, если РГФ-алгебра $\mathfrak{A}$ порождается возрастающей последовательностью матричных алгебр $\mathfrak{A}_n$, то можно найти такое дифференцирование δ с плотной по норме областью определения $D(\delta)$, что $\mathfrak{A}_n \subset D(\delta)$ при всех n и $\delta|_{\bigcup_n \mathfrak{A}_n} = 0$, но $\delta \neq 0$. Затем Хёрмэн [Her 1] построил расширение обычной операции дифференцирования на $C(0, 1)$, которое является незамкнутым дифференцированием алгебры $C(0, 1)$. Пока неизвестно, существуют ли незамкнутые дифференцирования алгебры $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ (см. [Bra 5] или пример 3.2.34, где идет речь о дифференцированиях $\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ и $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$).

Функциональное исчисление для элементов из областей определения замкнутых дифференцирований начато Сакаи (см. статьи Браттели и Робинсона [Bra 5], Пауэрса [Pow 2] и Сакаи [Sak 2]). Пауэрсом получена лемма 3.2.31 об операции экспоненцирования, а Сакаи и Браттели—Робинсон получили аналогичный результат для вычисления резольвенты. Однако самым эффективным является, по-видимому, подход к этой проблематике, использующий модифицированную резольвенту, как в предложении 3.2.29. В частности, так можно легко получить следствие 3.2.30, установленное ранее Браттели и Робинсоном с помощью утомительных преобразований [Bra 6]. Теорема 3.2.32 упоминается в [Bra 6], но по сути дела она содержится в статье [Pow 2]. В последней статье имеется также следующее утверждение. Если δ замкнуто по норме и $A = A^* \in D(\delta)$, то $f(A) \in D(\delta)$ для всякой функции f, имеющей непрерывную первую производную.

Однако такое утверждение опровергается явным контрпримером Мак-Интоша [McI 1]. Поскольку A ограничен, вопрос о принадлежности $f(A)$ к $D(\delta)$ зависит лишь от свойств f на интервале, содержащем спектр A, и сводится по существу к выяснению поведения f в окрестности нуля. В примере Мак-Интоша рассматривается функция, которая ведет себя в окрестности нуля как

$$f_\alpha(x) = |x|(\log|\log|x||)^{-\alpha},$$

при $0 \leqslant \alpha < 1$. Мак-Интош также заметил, что для функции g_α с компактным носителем, которая вне нуля дважды непрерывно дифференцируема, а вблизи нуля совпадает с

$$g_\alpha(x) = |x|\,|\log|x||^{-1}(\log|\log|x||)^{-\alpha},$$

выполняются соотношения

$$\int dp\,|\hat{g}_\alpha(p)|\,|p| \begin{cases} < +\infty & \text{при } \alpha > 1, \\ = +\infty & \text{при } 0 \leqslant \alpha < 1. \end{cases}$$

Тем самым $g_\alpha(A) \in D(\delta)$ при $\alpha > 1$ (по теореме 3.2.32). Это накладывает довольно жесткие ограничения на поведение f.

Примеры 3.2.34 и 3.2.35 основаны на изучении дифференцирований алгебр $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ и $\mathscr{LC}(\mathfrak{H})$, проведенном Браттели и Робинсоном в [Bra 5]. Метод поправки δ на ограниченное дифференцирование, с тем чтобы возмущенное дифференцирование δ^E удовлетворяло соотношению $\delta^E(E) = 0$, восходит к Капланскому [Kap 3]. Утверждение относительно вигнеровых симметрий, извлеченное из этих примеров, можно сформулировать и иначе — можно утверждать, что с помощью априорных оценок неограниченных дифференцирований сделан вывод о тривиальности когомологий $\mathbb{R}$.

Пример 3.2.36 — это частный случай приводимого ниже результата Эллиотта [Ell 7], обобщающего более ранние теоремы Кальмана [Kal 1, 2]. Доказательство этого результата основано на обобщении идей, примененных в примере 3.2.36.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана, а $\{\tau_n\}_{n \geqslant 1}$ — последовательность ее $*$-автоморфизмов, сильно сходящаяся к $*$-автоморфизму τ, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \|\tau_n(A) - \tau(A)\| = 0$$

при всех $A \in \mathfrak{M}$. Тогда τ_n сходится к τ по норме, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathfrak{M}\setminus\{0\}} \|\tau_n(A) - \tau(A)\|/\|A\| = 0.$$

Привлекая функциональное исчисление для элементов из областей определения $D(\delta)$, можно исследовать замкнутые дифференцирования РГФ-алгебр. Следующая теорема была доказана

Сакаи для генераторов в его первой статье о неограниченных дифференцированиях [Sak 2], а распространение этого результата на произвольные замкнутые дифференцирования предложено в [Bra 5].

Теорема. *Пусть δ — замкнутое дифференцирование РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда существует такая возрастающая последовательность $\{\mathfrak{A}_n\}$ матричных подалгебр $\mathfrak{A}$, что $\bigcup_n \mathfrak{A}_n \subseteq D(\delta)$ и $\bigcup_n \mathfrak{A}_n$ плотно в $\mathfrak{A}$. Если δ — генератор, то можно выбрать $\bigcup_n \mathfrak{A}_n$ состоящим из аналитических элементов для δ.*

Эта теорема натолкнула ряд авторов на изучение так называемых нормальных дифференцнрований РГФ-алгебр, т. е. дифференцирований δ, обладающих существенной областью определения вида $\bigcup_n \mathfrak{A}_n$, однако до сих пор открыт вопрос о том, все ли генераторы нормальны (в этой связи см. предложения 3.2.52 и 3.2.53).

Другое, более специализированное следствие функционального исчисления на $D(\delta)$ гласит, что нулевое дифференцирование — единственное замыкаемое дифференцирование алгебры непрерывных функций на канторовом множестве. Это объясняется тем, что проекторы из области определения замыкаемого дифференцирования этой алгебры должны быть плотны в множестве всех проекторов, а вследствие абелевости алгебры результат дифференцирования всякого проектора должен быть нулевым элементом.

Пункт 3.2.3

Спектральная теория для абелевых групп автоморфизмов операторных алгебр давно входит в фольклор, известный многим специалистам по математической физике. Например, совершенно стандартной процедурой является регуляризация с помощью функции, имеющей соответствующие свойства носителя в импульсном пространстве. Однако в той форме, как она здесь изложена, теория была развита лишь сравнительно недавно Арвесоном [Arv 1], Борхерсом [Bor 4] и Конном [Con 4]. Предложение 3.2.40 приведено в [Con 4], за исключением пункта (6), который был независимо отмечен разными авторами и впервые, по-видимому, встречается у Икуниси и Накагами [Iku 1]. Предложение 3.2.41 принадлежит Олесену [Ole 1]. Метод доказательства теоремы Борхерса—Арвесона (теоремы 3.2.46) с помощью предложений 3.2.43 и 3.2.44 применялся Арвесоном [Arv 1] и Борхерсом [Bor 4]. Мы внесли в это доказательство несколько упрощений. Первоначальное доказательство Борхерса [Bor 2] опиралось на теорему о дифференцированиях (следствие 3.2.47) и на сложную технику аппроксимации. Для случая когда унитарная группа U, фигурирующая в теореме 3.2.46, имеет основное состояние, в [Bor 2] дано очень простое доказательство (см. следствие 3.2.60). Теорема Борхерса в своей общей форме, приведенной в [Bor 2], относится не к группе $\mathbb{R}$, а к группе $\mathbb{R}^{n+1}$, и вместо условия положительности спектра делается предположение о принадлежности спектра верхнему световому конусу. Подробное рассмотрение этого круга вопросов читатель найдет в главе 8 монографии [[Ped 1]]. Относительно условий, гарантирующих, что и лоренцевы «подталкивания» (бусты) также принадлежат алгебре, см. работу Стритера [Str 1].

Теорема о дифференцированиях (следствие 3.2.47) получена Кадисоном [Kad 7] и Сакаи [Sak 4]. Исходное ее доказательство гораздо короче, но менее прозрачно, чем приведенное нами. Надо отметить, что эта теорема была доказана задолго до разработки математической теории спектров групп автоморфизмов. Дифференцирования C^*-алгебр не обязаны быть внутренними, даже если алгебра имеет единицу. Соответствующая проблематика изучалась рядом авторов, но наиболее полные результаты получили Эллиотт [Ell 3] и Акеманн и Педерсен [Ake 1]. Добавочное осложнение здесь связано с тем, что алгебра может не иметь единицы и потому под внутренним здесь приходится понимать такое дифференцирование δ, которое выполнимо некоторым элементом H, принадлежащим так называемой алгебре мультипликаторов $M(\mathfrak{A})$ рассматриваемой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Напомним, что второе сопряженное пространство $\mathfrak{A}^{**}$ алгебры $\mathfrak{A}$ может рассматриваться как алгебра фон Неймана, содержащая $\mathfrak{A}$ (см. п. 3.2.1). Тогда $M(\mathfrak{A})$ можно определить как множество тех $B \in \mathfrak{A}^{**}$, для которых $B\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}B \subseteq \mathfrak{A}$. Отметим, что $M(\mathfrak{A})$ является C^*-алгеброй и $\mathfrak{A} \subseteq M(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}^{**}$, причем $M(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ имеет единицу. Например, $M(\mathscr{LC}(\mathfrak{H})) = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Всякий мультипликатор, очевидно, задает дифференцирование алгебры, так что приводимая ниже теорема Эллиотта, Акеманна и Педерсена неулучшаема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — сепарабельная C^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *каждое ограниченное дифференцирование $\mathfrak{A}$ выполняется мультипликатором;*

(2) *каждая суммируемая центральная последовательность в $\mathfrak{A}$ тривиальна;*

(3) *$\mathfrak{A}$ представима в виде $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_1$ имеет только тривиальные центральные последовательности, а $\mathfrak{A}_2$ является ограниченной прямой суммой простых C^*-алгебр.*

Центральной последовательностью называется такая равномерно ограниченная последовательность $\{B_n\}$ в C^*-алгебре $\mathfrak{B}$, что $\|[B_n, A]\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при всех $A \in \mathfrak{B}$. Центральная последовательность *суммируема*, если $\Sigma_n B_n$ сходится в сильной операторной топологии на $\mathfrak{B}^{**}$, и *тривиальна*, если в центре M ($\mathfrak{B}$) имеется такая последовательность $\{Z_n\}$, что $\|(B_n - Z_n) A\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при всех $A \in \mathfrak{B}$. Ранее в работе Сакаи [Sak 5] было доказано, что все дифференцирования простых C^*-алгебр определяются мультипликаторами без каких-либо предположений о сепарабельности $\mathfrak{A}$.

При исследовании C^*- и W^*-динамических систем (см. предложение 2.7.1) возникает другое понятие спектра, отличное от спектра Арвесона и более полезное. Рассмотрим для простоты такую W^*-динамическую систему $\{\mathfrak{M}, G, \alpha\}$, что $\mathfrak{M}$ — фактор, а G — локально-компактная абелева группа. Тогда Γ-*спектр* α, иногда именуемый *спектром Конна*, определяется как

$$\Gamma(\alpha) = \bigcap_{E \in \mathfrak{M}^\alpha(\{0\})} \sigma(\alpha \mid \mathfrak{M}_E);$$

здесь E пробегает все ненулевые проекторы в алгебре $\mathfrak{M}^\alpha$ ($\{0\}$) неподвижных элементов. Нетрудно показать, что Γ (α) является замкнутой подгруппой в $\hat{G}$. Для доказательства привлекается та же техника, что и в доказательстве спектральных свойств эргодических систем в пункте 4.3.3 (см. теорему 4.3.33). Следующая теорема, обобщающая теорему о дифференцированиях (следствие 3.2.47), принадлежит Конну [Con 4].

Теорема. *Пусть G — локально-компактная абелева группа, действующая как группа автоморфизмов на факторе $\mathfrak{M}$, и пусть компактна группа $\sigma(\alpha)/\Gamma(\alpha)$. В таком случае ортогональное дополнение*

$$\Gamma(\alpha)^\perp = \{t \in G;\ (\gamma, t) = 1 \text{ при всех } \gamma \in \Gamma(\alpha)\}$$

к множеству Γ (α) состоит из тех $t \in G$, для которых α_t унитарно выполнимы элементами из $\mathfrak{M}^\alpha$ ($\{0\}$).

Отсюда сразу же вытекает следствие для одиночного автоморфизма α: если $\Gamma(\alpha) \neq \mathbb{T}$, то некоторая его степень α^n, $n \geqslant 1$, является внутренним автоморфизмом.

Спектр Γ (α) несет обширную информацию об алгебре неподвижных элементов $\mathfrak{M}^\alpha$ ($\{0\}$) и о скрещенном произведении W ($\mathfrak{M}$, α). Конном [Con 4] доказана следующая

Теорема. *Пусть G — локально-компактная абелева группа, действующая на факторе $\mathfrak{M}$, для которой спектр Γ (α) дискретен. При этих условиях $\sigma(\alpha) = \Gamma(\alpha)$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{M}^\alpha$ ($\{0\}$) — фактор.*

Конну и Такесаки [Con 2] принадлежит такая

Теорема. *Пусть G — локально-компактная группа, действующая на факторе $\mathfrak{M}$. Алгебра W^* ($\mathfrak{M}$, α) является фактором тогда и только тогда, когда $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$.*

У этих трех теорем имеются естественные обобщения на алгебры фон Неймана, не являющиеся факторами, а также на C^*-алгебры. В случае C^*-алгебр естественно заменить факторы не простыми C^*-алгебрами, как можно было бы ожидать, а примарными C^*-алгебрами, которые характеризуются тем, что любые два ненулевых замкнутых двусторонних идеала имеют ненулевое пересечение. Если C^*-алгебра допускает точное неприводимое представление, то, как легко видеть, она примарна; обратное верно для сепарабельных C^*-алгебр [Dix 1]. Различные варианты приведенных трех теорем читатель найдет в [Iku 1], [Ole 2—4], [Kis 2, 3], [Bra 10]. Подробное изложение этих результатов имеется в главе 8 монографии [[Ped 1]].

Пункт 3.2.4

Теоремы 3.2.50 и 3.2.51 имеют несколько первоисточников. Неалгебраические аспекты этих утверждений покрываются «банаховой» теорией (изложенной в разделе 3.1). К числу свежих алгебраических элементов относятся свойство резольвенты сохранять положительность — условие (B2), которое впервые было рассмотрено в работе Браттели и Робинсона [Bra 6], и свойство $\delta(\mathbb{1}) = 0$ — условие (A2), которое было предложено Кисимото [Kis 1] в качестве замены свойства быть дифференцированием.

Первое утверждение предложения 3.2.52 получено Эллиоттом [Ell 2], а остальные вытекают из результатов статей Пауэрса и Сакаи [Pow 3, 4], посвященных РГФ-алгебрам, или из результатов статьи Браттели и Робинсона [Bra 5]. Теорема 3.2.53, доказанная Браттели и Кисимото [Bra 11], представляет собой пример применения техники разложения нестационарной теории возмущений для построения динамики квантовых спиновых систем.

Пункт 3.2.5

Пространственные дифференцирования, возникающие при наличии инвариантных состояний, рассматривались в работах Браттели и Робинсона [Bra 5, 6] и Пауэрса и Сакаи [Pow 3, 4], а общая теория, изложенная в данном пункте, была впервые опубликована в [Bra 3]. Обобщение предложения 3.2.58, в котором вместо аналитических элементов привлекаются квазианалитические, было дано Браттели, Хёрмэном и Робинсоном [Bra 7]. Теорема 3.2.59 для отделяющего вектора Ω приведена в [Bra 3]. При анализе случая $H \geqslant 0$ используются соображения, близкие к раннему варианту доказательства теоремы Борхерса—Арвесона [Bor 2] (см. также обзорную статью Кадисона [Kad 8]).

Теорема 3.2.61 для общего случая была доказана Браттели и Хаагерупом [Bra 9], а ее вариант для следового состояния, который по существу содержится в лемме 3.2.62, был ранее установлен Браттели и Робинсоном в [Bra 8]. Последней статье предшествовала статья Галлавотти и Пульвиренти [Gal 1], в которой теорема доказана для абелевых алгебр фон Неймана. Такие алгебры рассматривались ими в связи с проблематикой классической статистической механики, очерченной в примере 3.2.67, а доказательство строилось по аналогии с доказательством теоремы Томиты—Такесаки. Отметим, что существует аналогия между леммой 2.5.12 и некоторыми результатами, полученными в доказательстве леммы 3.2.62. Лемма 3.2.65 представляет собой частный случай результатов по дуальным весам, полученных Дигернесом [Dig 1] и Хаагерупом [Haa 4]. Заключительный пример 3.2.68 был дан в [Bra 9], где также доказано, что в качестве $\mathfrak{M}$ можно выбрать алгебру фон Неймана типа I.

Пункт 3.2.6

Все результаты этого пункта взяты из работы Браттели, Хёрмэна и Робинсона [Bra 4]. Основная проблема — сравнение «близких» групп автоморфизмов — была выдвинута Бухольцем и Робертсом [Buc 1], получившими вариант главной теоремы (теоремы 3.2.75), где вместо ε_1, ε_2 фигурирует $o(1)$ при $t \to 0$. Способ доказательства, основанный на применении когомологий и сглаживания коциклов (теорема 3.2.73 и лемма 3.2.74), также принадлежит Бухольцу и Робертсу.

Для доказательства предложения 3.2.70, усиливающего теорему 3.1.35 об унитарных группах, привлечена по предложению Хаагерупа техника, использующая числовые области значений операторов.

Сведения о числовых областях значений, которые нам понадобились, можно найти в [[Bon 1]], за исключением результата о секторе унитарной части полярного разложения, который доказан Вороновичем в [Wor 3].

Теорема 3.2.71 получена Кадисоном и Рингроузом [Kad 9]. Она хорошо изложена в разделе 8.7 книги [[Ped 1]]. Там же можно найти и доказательство следующего результата Борхерса [Bor 3], связывающего спектральный радиус $\rho(\alpha - \iota)$ с $\|\alpha - \iota\|$:

Теорема. *Пусть α есть $*$-автоморфизм C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Если $\|\alpha - \iota\| < 2$ или если $\rho(\alpha - \iota) < \sqrt{3}$, то*

$$\rho(\alpha - \iota) = \|\alpha - \iota\|.$$

Константа $\sqrt{3}$ неулучшаема; Сакаи [Sak 6] построил пример внешнего автоморфизма α алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$, для которого $\rho(\alpha - \iota) = \sqrt{3}$. В этом примере $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N} \otimes \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ —

некоторый фактор, не являющийся фактором типа I, а α совершает циклическую перестановку, т. е.

$$\alpha (A \otimes B \otimes C) = C \otimes A \otimes B.$$

Тогда $\sigma (\alpha)$ состоит из тройки кубических корней из единицы, так что $\rho (\alpha - \iota) = \sqrt{3}$.

Использованные в доказательстве предложения 3.2.72 результаты по теории меры ((1) и (2)) можно найти в [[Arv 1]]; результат (2) по существу был получен Диксмье [Dix 2].

Другим вариантом теоремы 3.2.73 является следующая принадлежащая Конну [Con 4]

Теорема. *Если $\mathfrak{M}$ — фактор с сепарабельным преддвойственным пространством $\mathfrak{M}_*$ и $t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha_t$, β_t — пара таких σ-слабо непрерывных представлений группы $\mathbb{R}$ автоморфизмами $\mathfrak{M}$, что автоморфизмы $\beta_t\alpha_{-t}$ — внутренние при всех $t \in \mathbb{R}$, то существует σ-слабо непрерывный унитарный коцикл $t \mapsto \Gamma_t \in \mathfrak{M}$, связывающий α и β.*

Чуть более общий результат можно найти в [Han 1]. Другой вариант теоремы, в котором не предполагается, что $\mathfrak{M}$ — фактор, и не используется сепарабельность $\mathfrak{M}_*$, состоит в утверждении, что при условии $\|\alpha_t - \beta_t\| = o(1)$, $t \mapsto 0$, существует непрерывный по норме коцикл $t \mapsto \Gamma_t$, связывающий α и β [Buc 1]. Небольшое предостережение: теоремы такого рода крайне чувствительны к тому, идет ли речь о группе $\mathbb{R}$ или о циклической группе. Приведем поучительный пример. Пусть $\mathfrak{M} = M_2$ (алгебра 2×2-матриц) и $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Пусть a, $b \in G$ — образующие G, для которых $a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$, и U, V — матрицы

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $UV + VU = 0$, $U^2 = \mathbb{1}$, $V^2 = \mathbb{1}$. Отсюда следует, что равенства

$$\alpha_a (A) = UAU^*, \ \alpha_b (A) = VAV^*$$

определяют унитарное представление группы G в $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{M})$, причем всё множество $\alpha\,(G)$ состоит из внутренних автоморфизмов. Если бы нашлось унитарное представление $t \in G \mapsto U_t$ группы G, выполняющее α, то в силу соотношения

$$\alpha_t (U_s) = U_t U_s U_{-t} = U_s$$

все U_s, $s \in G$, содержались бы в алгебре $\mathfrak{M}^\alpha$ неподвижных элементов. Но явным вычислением проверяется, что $\mathfrak{M}^\alpha = \mathbb{C}\mathbb{1}$. Следовательно, не существует такого унитарного представления.

Применение инвариантных средних для получения результатов о равномерной аппроксимации, сформулированных в конце пункта, восходит к статье Фудзии, Фуруты и Мацумото [Fuj 1].

4. ТЕОРИЯ РАЗЛОЖЕНИЙ

4.1. Общая теория

4.1.1. Введение

В задачу теории разложения, или декомпозиции, входит выражение объектов, обладающих сложной структурой, через более простые компоненты. Не существует общего правила, объясняющего, что́ подразумевается под «более простыми компонентами», вопрос этот каждый раз решается конкретно. В теории операторных алгебр обычно изучают два взаимодополняющих вида разложений — разложение состояний и разложение представлений. В этой главе мы опишем главным образом теорию, относящуюся к состояниям, но тесная связь, существующая между состояниями и представлениями, позволит нам выявить и применить также свойства разложений представлений.

Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает C^*-алгебру с единицей $\mathbb{1}$. Состояния $E_{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathfrak{A}$ образуют выпуклое подмножество в двойственном пространстве $\mathfrak{A}^*$, причем $E_{\mathfrak{A}}$ компактно в слабой *, или $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$-топологии (см. теорему 2.3.15). Как правило, нас интересуют разложения данного состояния ω, представляющие это состояние в виде выпуклой комбинации состояний, являющихся крайними точками некоторого замкнутого выпуклого подмножества K в $E_{\mathfrak{A}}$. Множество K может быть прямо определено каким-либо физическим условием; скажем, K может задаваться как множество состояний, инвариантных относительно некоторой группы *-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Оно может определяться и неявно; например, если $\mathfrak{B}$ — абелева подалгебра фон Неймана, содержащаяся в коммутанте $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ представления $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, ассоциированного с ω, то в качестве K можно выбрать слабое * замыкание множества

$$K_{\mathfrak{B}} = \{\omega_T;\ \omega_T \in E_{\mathfrak{A}},\ \omega_T(A) = (T\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega),\ T \in \mathfrak{B}\}.$$

Мы рассмотрим различные возможности:

(1) *экстремальное разложение*, когда $K = E_{\mathfrak{A}}$ и производится попытка разложить состояние ω по чистым состояниям;

(2) *центральное разложение*, когда $\mathfrak{B} = \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ (центр алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$) и целью является выразить ω в виде суперпозиции факторных состояний;

(3) *разложение на бесконечности*: если ω — локально-нормальное состояние квазилокальной алгебры, то можно ввести алгебру на бесконечности $\mathfrak{Z}_\omega^\perp \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ (см. определение 2.6.4 и теорему 2.6.5) и попытаться выразить ω в виде комбинации состояний с тривиальными алгебрами на бесконечности;

(4) *эргодическое разложение*: если $g \in G \mapsto \tau_g \in \operatorname{Aut} \mathfrak{A}$ задает группу *-автоморфизмов $\mathfrak{A}$, а K — множество τ_g-инвариантных состояний:

$$K = \{\omega;\ \omega \in E_{\mathfrak{A}},\ \omega(\tau_g(A)) = \omega(A),\ g \in G,\ A \in \mathfrak{A}\},$$

то K будет замкнутым выпуклым подмножеством в $E_{\mathfrak{A}}$ и разложение инвариантного состояния по экстремальным инвариантным состояниям называется эргодическим разложением; естественным образом возникают и различные модификации, например разложение по состояниям, инвариантным относительно подгруппы.

В каждой из перечисленных ситуаций для рассматриваемого состояния $\omega \in K$ мы пытаемся найти разложение вида

$$\omega(A) = \int d\mu(\omega')\, \omega'(A),$$

где μ — мера, сосредоточенная на множестве $\mathscr{E}(K)$ крайних, или экстремальных, точек K. В исследованиях такого рода переплетаются различные аспекты, относящиеся к геометрии, теории меры и алгебре, но их до некоторой степени удается различать. Прежде всего мы изучим, игнорируя наличие алгебраической структуры, разложение точек ω выпуклого компактного подмножества K локально-выпуклого отделимого топологического векторного пространства[1]. Геометрически это соответствует барицентрическому разложению, выражающему ω через экстремальные точки, или, иначе говоря, изучению мер, сосредоточенных на $\mathscr{E}(K)$ и имеющих фиксированный центр тяжести (барицентр) ω. Подобные разложения представляют огромный интерес, если такая барицентрическая мера единственна.

Общую теорию барицентрических разложений можно разделить на две части. Сначала в множестве положительных мер на K вводят отношение порядка $\prec$, полагая по определению: $\nu \prec \mu$

[1] Под разложением элемента ω подразумевается интегральное представление вида $\omega = \int_K \omega' d\mu(\omega')$, иначе говоря, представление ω посредством некоторой меры μ, распределенной на выпуклом компакте K в пространстве X. Интеграл понимается в слабом смысле, т. е. $f(\omega) = \int_K d\mu(\omega')\, f(\omega')$ для всякого непрерывного линейного функционала f на X. Далее рассматриваются главным образом меры μ, сосредоточенные на $\mathscr{E}(K)$; в таком случае говорят о разложении ω по крайним точкам. — *Прим. перев.*

тогда и только тогда, когда $\nu(f) \leqslant \mu(f)$ для всех выпуклых непрерывных вещественных функций f на K. Если ν и μ имеют один и тот же барицентр, то соотношение $\nu \prec \mu$ указывает на то, что носитель μ «удален дальше» от барицентра, т. е. носитель большей (в смысле введенного отношения порядка) меры «ближе» к границе K. Поэтому в качестве первого шага к построению экстремальных разложений пытаются построить максимальные меры с фиксированным барицентром ω. Такие меры обязательно существуют, их можно охарактеризовать некоторыми по сути дела геометрическими свойствами. Аналогично, существование единственной максимальной меры для каждого $\omega \in K$ эквивалентно геометрическому свойству K — свойству быть симплексом (см. п. 4.1.2).

После изучения максимальных мер второй важный шаг — выяснить, в каком смысле эти меры сосредоточены на множестве крайних точек $\mathscr{E}(K)$. На первый взгляд кажется резонным предположение, что измеримости $\mathscr{E}(K)$ достаточно для того, чтобы $\mu(\mathscr{E}(K)) = 1$ для всякой максимальной вероятностной меры. Но это не так — один из небольших сюрпризов теории барицентрических разложений. Если $\mathscr{E}(K)$ — борелевское множество и вероятностная мера μ удовлетворяет условию $\mu(\mathscr{E}(K)) = 1$, то мера μ максимальна, но вот в обратную сторону, существуют примеры, когда $\mathscr{E}(K)$ борелевское, μ максимальна, а $\mu(\mathscr{E}(K)) = 0$. Тем не менее можно показать, что всякая максимальная вероятностная мера μ *псевдососредоточена* на $\mathscr{E}(K)$ в том смысле, что $\mu(B) = 1$ для каждого бэровского множества B, содержащего $\mathscr{E}(K)$. В частности, если бы $\mathscr{E}(K)$ было бэровским множеством, то μ была бы сосредоточена на $\mathscr{E}(K)$. К сожалению, $\mathscr{E}(K)$ оказывается бэровским в том и только том случае, когда K метризуемо (см. замечания и комментарии к главе), и поэтому полученное условие имеет ограниченную область применимости. Однако изучение носителей вероятностных мер с фиксированным барицентром ω часто можно свести к изучению граней[1)] F_ω множества K, а метризуемости и прочих свойств F_ω обычно достаточно для обеспечения того, чтобы носитель μ принадлежал $\mathscr{E}(K)$. Таким образом, в проблеме исследования максимальных мер играет роль структура граней множества K.

Далее, очертим алгебраические аспекты теории разложений, которые возникают, если подмножество K принадлежит пространству $E_{\mathfrak{A}}$ состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Полезно сначала рас-

---

[1)] *Грань* F компактного выпуклого множества K определяется как подмножество в K, обладающее тем свойством, что если $\omega \in F$ и $\omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i$ — конечная линейная комбинация элементов $\omega_i \in K$, то $\omega_i \in F$ при $i = 1, \ldots, n$. В отличие от стандартного употребления термина, в этой книге мы не предполагаем, что грань является замкнутым подмножеством K.

смотреть разложение данного состояния ω в конечную выпуклую комбинацию состояний ω_i:

$$\omega(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i(A), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Для перевода на язык теории меры определим аффинные функционалы $\widehat{A}$ на $E_{\mathfrak{A}}$, полагая

$$\widehat{A}(\omega) = \omega(A)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$, и введем диракову, или точечную, меру δ_ω. Ясно, что

$$\widehat{A}(\omega) = \mu(\widehat{A}), \qquad \mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i}.$$

Теперь заметим, что $\lambda_i \omega_i \leqslant \omega$, а значит, по теореме 2.3.19,

$$\lambda_i \omega_i(A) = (T_i \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega),$$

где T_i — некоторый положительный оператор из коммутанта $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Тем самым разложение ω соответствует конечному разложению единицы

$$\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

в коммутанте $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Интуиция подсказывает, что более общим интегральным разложениям ω соответствуют аналогичные, но уже континуальные разложения $\mathbb{1}$ в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, и в этом плане возникает тесная связь с операторными разложениями.

Простейшая форма конечного разложения возникает, когда T_i являются взаимно ортогональными проекторами P_i в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. В этом случае, как легко видеть, представление $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$ будет прямой суммой представлений $(\mathfrak{H}_{\omega_i}, \pi_{\omega_i})$. Поэтому можно говорить о разложении на ортогональные, или независимые, компоненты. Семейство $\{P_i\}$ порождает конечномерную подалгебру $\mathfrak{B}$ в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, и конечные ортогональные разложения такого типа находятся во взаимно-однозначном соответствии с алгебрами $\mathfrak{B}$. Для большей ясности перепишем разложение ω с помощью проекционного оператора $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$. Имеем

$$P\psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} (P_i \Omega_\omega, \psi) P_i \Omega_\omega,$$

$$\lambda_i = (\Omega_\omega, P_i \Omega_\omega), \; \lambda_i \omega_i(A) = (P_i \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega).$$

Воспользовавшись ортогональностью P_i и тем, что $P_i \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, для ассоциированной с нашим разложением меры μ получаем

$$\mu(\hat{A}_1\hat{A}_2 \ldots \hat{A}_m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i(A_1)\,\omega_i(A_2) \ldots \omega_i(A_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-(m-1)} (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1) P_i \Omega_\omega) \cdot$$

$$\cdot (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_2) P_i \Omega_\omega) \ldots (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_m) P_i \Omega_\omega)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_{m-1}=1}^{n} \lambda_{i_2}^{-1} \ldots \lambda_{i_{m-1}}^{-1} (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1) P_i \Omega_\omega) \cdot$$

$$\cdot (P_{i_1}\Omega_\omega, \pi_\omega(A_2) P_{i_2}\Omega_\omega) \ldots (P_{i_{m-1}}\Omega_\omega, \pi_\omega(A_m)\Omega_\omega)$$

$$= (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1) P \pi_\omega(A_2) P \ldots P \pi_\omega(A_m)\Omega_\omega).$$

Эта выкладка, кроме всего прочего, показывает, что семейство $\{P\pi_\omega(A)P;\ A \in \mathfrak{A}\}$ порождает абелеву алгебру в пространстве $P\mathfrak{H}_\omega$. Более того, она указывает алгоритм построения более общих мер μ, исходя из проекторов P, для которых $P\Omega_\omega = \Omega_\omega$, а алгебра $P\pi_\omega(\mathfrak{A})''P$ абелева. Располагая таким P, можно проверить, что соотношениями

$$\mu(\hat{A}_1\hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1) P\, \pi_\omega(A_2) P \ldots P\pi_\omega(A_n)\Omega_\omega) \qquad (*)$$

задается мера μ с барицентром ω. Оказывается, меры из этого класса (ортогональные меры) приводятся во взаимно-однозначное соответствие с указанными проекторами P, а также во взаимно-однозначное соответствие с абелевыми алгебрами фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Соответствующие друг другу объекты связаны правилами типа $(*)$ и

$$P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega],\quad \mathfrak{B} = \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup P\}' \text{ и т. д.}$$

Интересно также, что отношение порядка $\prec$ для ортогональных мер отвечает упорядочению по включению для соответствующих абелевых алгебр $\mathfrak{B}$ и обычному упорядочению для соответствующих проекторов. В частности, меры, которые максимальны среди ортогональных мер, возникают из максимальных абелевых подалгебр фон Неймана $\mathfrak{B}$ в коммутанте при спектральном разложении $\mathfrak{B}$. При достаточно хороших условиях, например при наличии свойств метризуемости, максимальные ортогональные меры будут максимальны и в множестве всех мер с заданным барицентром.

Алгебраическая структура позволяет также установить, что меры обладают хорошими свойствами, и в том случае, когда $\mathfrak{A}$ несепарабельна, а $E_{\mathfrak{A}}$ неметризуемо. Здесь имеются два разных подхода. Один состоит в отыскании подходящих граней для $E_{\mathfrak{A}}$

с хорошими свойствами сепарабельности; примером могут служить локально-нормальные состояния квазилокальной алгебры, для которой локальные подалгебры изоморфны некоторым $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Эту точку зрения мы проводим в разделах 4.2 и 4.3. Второй подход более существенно опирается на структуру представления, связанного с состоянием, разложение которого изучается. Метризуемость $E_{\mathfrak{A}}$ можно по сути дела заменить условием сепарабельности пространства представления $\mathfrak{H}_\omega$. Обсуждению этого подхода посвящен раздел 4.4. Структура представления, по-видимому, исключительио важиа также при изучении разложений на бесконечности.

4.1.2. Барицентрические разложения

В этом пункте мы изучим барицентрические разложеиия точек выпуклого компактного подмножества в локально-выпуклом топологическом векториом пространстве. Классический геометрический результат — теорема Каратеодори—Минковского — утверждает, что всякая точка выпуклого компактного подмножества K в ν-мерном эвклидовом простраистве $\mathbb{R}^\nu$ может быть представлена как выпуклая комбинация не более чем $\nu + 1$ крайних точек K. Тем самым всякая точка является барицентром некоторого конечного набора точечных масс, сосредоточенных в крайних точках K. Эта теорема утверждает, далее, что разложеиие по крайним точкам единственно тогда и только тогда, когда K — симплекс, т. е. когда K аффинно изоморфно множеству с проективными координатами $\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu+1});\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_i \lambda_i = 1\}$. Наша цель — получить аналог этой теоремы для более общих, бесконечномерных пространств. Сперва мы введем ряд обозначений, которые будут употребляться в этом пункте, и напомним различные общие положения.

Пусть K обозначает выпуклое компактное подмножество вещественного локально-выпуклого топологического векторного пространства X, а $\mathscr{E}(K)$ — множество крайних точек K. Символ $C(K)$ будет обозначать вещественные непрерывные функции на K, $S(K)$ — вещественные непрерывные выпуклые фуикции и $A(K)$ — вещественные непрерывные аффинные функции, т. е. $S(K) = \{f \in C(K);\ f(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2) \leqslant \lambda f(\omega_1) + (1-\lambda) f(\omega_2)$ при всех $\omega_1, \omega_2 \in K$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$, а $A(K) = \{f \in C(K);\ f(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2) = \lambda f(\omega_1) + (1-\lambda) f(\omega_2)$ при всех $\omega_1, \omega_2 \in K$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} = S(K) \cap (-S(K))$. Если $f, g \in C(K)$, то $f \geqslant g$ означает, что $f(\omega) - g(\omega) \geqslant 0$ при всех $\omega \in K$.

Множество $M_+(K)$ положительных мер Радона на K образует подмножество сопряженного к $C(K)$ пространства, которое можно наделить слабой* топологией, т. е. $\sigma(C(K)^*, C(K))$-топологией.

Положительные меры Радона с единичной нормой, т. е. вероятностные меры, мы обозначаем через $M_1(K)$.

Далее, отметим, что в силу компактности K его *борелевские подмножества* могут быть определены как элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}$, порожденной замкнутыми (или открытыми) подмножествами K. *Положительные регулярные меры Бореля*, или *борелевские меры*, задаются как такие положительные счетно-аддитивные функции μ, определенные на множествах из $\mathfrak{B}$, что

$$\mu(B) = \inf\{\mu(C);\ B \subset C,\ C \text{ открыто}\}$$
$$= \sup\{\mu(C);\ B \subset C,\ C \text{ замкнуто}\}.$$

Теоремой Рисса устанавливается взаимно-однозначное соответствие между положительными регулярными мерами Бореля и такими мерами Радона из $M_+(K)$, что $\mu(K) = \|\mu\|$. Мы пользуемся стандартным обозначением для интегралов

$$\mu(f) = \int d\mu(\omega)\, f(\omega),\ f \in C(K),$$

которое отражает это соответствие.

К борелевским множествам в K относятся все счетные объединения замкнутых множеств и все счетные пересечения открытых множеств; множества такого типа именуются соответственно *множествами типа* F_σ и G_δ (или F_σ- и G_δ-*множествами*). *Бэровские множества* компакта K определяются как элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}_0$, порожденной замкнутыми G_δ-множествами или открытыми F_σ-множествами в K. Эта σ-алгебра $\mathfrak{B}_0$ является наименьшей σ-алгеброй подмножеств K, относительно которой измеримы все непрерывные функции на K. Всякая мера μ_0 на $\mathfrak{B}_0$ называется *мерой Бэра*, или *бэровской мерой*. Мера Бэра автоматически регулярна и обладает единственным расширением до регулярной меры Бореля на $\mathfrak{B}$. Поскольку сужение на $\mathfrak{B}_0$ меры Бореля является мерой Бэра, имеется взаимно-однозначное соответствие между мерами Радона μ, регулярными мерами Бореля $d\mu$ и мерами Бэра $d\mu_0$, а именно:

$$\mu(f) = \int d\mu(\omega)\, f(\omega) = \int d\mu_0(\omega)\, f(\omega),\ f \in C(K).$$

В дальнейшем термин «мера» будет применяться для обозначения любого из трех введенных типов мер.

Носитель меры $\mu \in M_+(K)$ определяется как наименьшее замкнутое подмножество $C \subseteq K$, для которого $\mu(C) = \mu(K)$. Существование такого подмножества гарантируется регулярностью μ. Аналогично, говорят, что μ *сосредоточена* на борелевском множестве $B \subseteq K$, если $\mu(B) = \mu(K)$. Далее, мера μ называется *псевдососредоточенной* на произвольном множестве $A \subseteq$ $\subseteq K$, если $\mu(B) = 0$ для любого бэровского множества B, такого что $B \cap A = \varnothing$. Хотя упомянутые сейчас понятия по видимости аналогичны, следует подчеркнуть, что аналогия эта довольно обманчива. Существуют примеры, когда

(1) A — борелевское множество,
(2) μ псевдососредоточена на A,
(3) $\mu(A) = 0$.

Если μ сосредоточена на A, то мы будем называть A *множеством сосредоточения меры*, и сходным образом определяется *множество псевдосорсредоточения*. Больше употребимо понятие множества сосредоточения, но и второе понятие находит естественные применения в общей теории, которая изложена ниже.

Мера Дирака, или точечная мера, с носителем ω обозначается символом δ_ω. Таким образом, $\delta_\omega(f) = f(\omega)$ для любой функции $f \in C(K)$. Всякая мера μ с конечным носителем $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ представляет собой суперпозицию

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i}$$

мер Дирака с коэффициентами $\lambda_i \geqslant 0$. При этом

$$\mu(K) = \|\mu\| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Наконец, отметим, что меры $M_+(K)$ образуют положительный конус, наделенный естественным отношением порядка: $\mu \geqslant \nu$ означает, что $\mu(f) \geqslant \nu(f)$ для всех положительных $f \in C(K)$. У этого конуса есть интересное геометрическое свойство, которым мы будем в дальнейшем пользоваться. Отношение порядка $\geqslant$ превращает его в *решетку*, иными словами, для всякой пары μ, $\nu \in M_+(K)$ определены точная верхняя грань $\mu \vee \nu$ и точная нижняя грань $\mu \wedge \nu$, принадлежащие $M_+(K)$. Явные выражения для этих граней таковы:

$$\mu \vee \nu = (\mu - \nu)_+ + \nu, \quad \mu \wedge \nu = \nu - (\mu - \nu)_-,$$

где $(\mu - \nu)_\pm$ обозначает положительную или отрицательную часть незнакоопределенной меры $\mu - \nu$.

После этой прелюдии введем понятие *барицентра* $b(\mu)$ меры $\mu \in M_1(K)$, полагая

$$b(\mu) = \int d\mu(\omega)\, \omega;$$

здесь интеграл понимается в слабом смысле. Далее, определим множество $M_\omega(K)$ как подмножество в $M_1(K)$, состоящее из всех мер с барицентром ω, т. е.

$$M_\omega(K) = \{\mu;\ \mu \in M_1(K),\ b(\mu) = \omega\}.$$

Существование барицентра для произвольной меры не вполне очевидно, оно демонстрируется в следующем предложении, где также приводится полезная аппроксимационная процедура.

***Предложение* 4.1.1.** *Если* $\mu \in M_1(K)$, *то существует единственная точка* $b(\mu) \in K$, *барицентр* μ, *такая что*

$$f(b(\mu)) = \mu(f) = \int d\mu(\omega') f(\omega')$$

при всех $f \in A(K)$. *Более того, существует сеть* $\mu_\alpha \in M_1(K)$, *состоящая из мер с конечными носителями, которая слабо* сходится к* μ *и удовлетворяет условию*

$$b(\mu_\alpha) = b(\mu).$$

Доказательство. Если носитель μ конечен, т. е. $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i}$ с $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum_i \lambda_i = 1$, то $b(\mu)$, очевидно, существует и

$$b(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i .$$

Так как множество K выпукло, то $b(\mu) \in K$. Но всякая мера $\mu \in M_1(K)$ может быть аппроксимирована в слабой* топологии сетью мер $\mu_\alpha \in M_1(K)$ с конечными носителями (это просто аппроксимация интеграла римановыми суммами). Барицентры $b(\mu_\alpha)$ мер μ_α должны лежать в K, а компактность K гарантирует существование сходящейся подсети $\{b(\mu_{\alpha'})\}$. Пусть $b(\mu) \in K$ будет пределом этой подсети; тогда

$$f(b(\mu)) = \lim_{\alpha'} f(b(\mu_{\alpha'})) = \lim_{\alpha'} \mu_{\alpha'}(f) = \mu(f)$$

при всех $f \in A(K)$. Но элемент $b(\mu)$, разумеется, единствен, потому, что функции из $A(K)$ разделяют точки K по теореме Хана—Банаха. Таким образом, барицентр $b(\mu)$ существует.

Далее, рассмотрим все конечные разбиения $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ компакта K на бэровские подмножества U_i. Эти разбиения образуют направленное множество, если под соотношением порядка $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ понимать, что всякое $V_i \in \mathcal{V}$ является подмножеством некоторого $U_j \in \mathcal{U}$. Пусть χ_i обозначает характеристическую функцию, или индикатор, множества U_i; зададим λ_i и μ_i, полагая $\lambda_i = \mu(U_i)$ и $\lambda_i\, d\mu_i = \chi_i\, d\mu$. Пусть $\omega_i = b(\mu_i)$ и меры $\mu_{\mathcal{U}} \in M_1(K)$ определены соотношением

$$\mu_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i}.$$

Носитель такой меры конечен и

$$b(\mu_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b(\mu_i) = b\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i\right) = b(\mu).$$

Кроме того, если $f \in C(K)$, то

$$|\mu_{\mathcal{U}}(f) - \mu(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f(\omega_i) - \mu_i(f)| \leqslant \sup_i \sup_{\omega \in U_i} |f(\omega_i) - f(\omega)|.$$

Наконец, по $\varepsilon > 0$ выберем такое конечное семейство открытых множеств G_i, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $x, y, \in G_i$ и также $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Зададим U_i формулой

$$U_i = G_i \setminus \bigcap_{j<i} G_j.$$

Тогда $\left|\mu_{\mathcal{U}}(f) - \mu(f)\right| < \varepsilon$. Поэтому $\mu_{\mathcal{U}}(f) \to \mu(f)$ для всякой $f \in C(K)$, т. е. $\mu_{\mathcal{U}}$ слабо* сходится к μ.

Теперь вернемся к проблеме барицентрических разложений, т. е. каждому $\omega \in K$ попытаемся сопоставить меру $\mu \in M_\omega(K)$, сосредоточенную на множестве крайних точек $\mathscr{E}(K)$. Следуя программе, изложенной во вводном пункте, мы сначала зададим на $M_+(K)$ отношение порядка.

Определение 4.1.2. *Отношение порядка* $\succ$ на $M_+(K)$ задается условием: $\mu \succ \nu$ тогда и только тогда, когда $\mu(f) \geqslant \nu(f)$ при всех $f \in S(K)$.

Не вполне очевидно, что отношение $\succ$ действительно вводит в $M_+(K)$ (частичное) упорядочение. Ясно, что $\succ$ рефлексивно ($\mu \succ \mu$) и транзитивно ($\mu \succ \nu$, $\nu \succ \rho \Rightarrow \mu \succ \rho$), но надо проверить антисимметричность, т. е. что $\mu \succ \nu$, $\nu \succ \mu \Rightarrow \mu = \nu$. В следующем предложении как раз и производится такая проверка и устанавливается, что всякая точка $\omega \in K$ является барицентром некоторой максимальной меры (под максимальностью μ подразумевается, что $\nu \succ \mu \Rightarrow \nu = \mu$).

Предложение 4.1.3. *Отношение* $\succ$ *в* $M_+(K)$ *есть отношение порядка. Если* $\mu \succ \nu$, *то* $\|\mu\| = \|\nu\|$, *а если вдобавок* $\|\mu\| = \|\nu\| = 1$, *то* $b(\mu) = b(\nu)$. *Кроме того,* $\mu \in M_\omega(K)$ *тогда и только тогда, когда* $\mu \succ \delta_\omega$.

Всякая точка $\omega \in K$ *является барицентром некоторой меры* $\mu \in M_1(K)$, *максимальной в смысле упорядочения* $\succ$.

Доказательство. Если $\mu \succ \nu$ и $\nu \succ \mu$, то $\mu(f) = \nu(f)$ для всякой функции $f \in S(K)$. Отсюда вытекает, что $\mu(f - g) = \nu(f - g)$ для любых пар $f, g \in S(K)$, и для заключения о совпадении μ и ν достаточно проверить, что $S(K) - S(K)$ равномерно плотно в $C(K)$.

Лемма 4.1.4. *Множество* $S(K) - S(K)$ *равномерно плотно в* $C(K)$, *т. е. всякая вещественная непрерывная функция на* K *может быть равномерно аппроксимирована разностями вещественных непрерывных выпуклых функций.*

Доказательство. Теорема Хана—Банаха гарантирует, что непрерывные аффинные функции разделяют точки множества K. Поэтому из теоремы Стоуна—Вейерштрасса следует, что вещественные полиномы от элементов $A(K)$ равномерно плотны в $C(K)$. Но всякий вещественный полином, аргументы которого пробегают компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, может быть представлен в виде разности двух выпуклых функций на этом подмножестве, например

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left[P(x_1, x_2 \ldots, x_n) + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right] - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

при достаточно больших λ. Комбинируя эти факты, получаем требуемый результат.

Конец доказательства теоремы 4.1.3. Согласно лемме 4.1.4, отношение $\succ$ антисимметрично и потому задает упорядочение. Заметим еще, что если $f \in A(K)$, то $f \in S(K)$ и $-f \in S(K)$. Значит, $\mu \succ \nu$ влечет равенство $\mu(f) = \nu(f)$. В частности,

$$\|\mu\| = \int d\mu(\omega) = \int d\nu(\omega) = \|\nu\|$$

и при $\mu, \nu \in M_1(K)$ имеем также

$$b(\mu) = \int d\mu(\omega)\, \omega = \int d\nu(\omega)\, \omega = b(\nu);$$

последние интегралы понимаются в слабом смысле. В частности, $\mu \succ \delta_\omega$ влечет $\mu \in M_\omega(K)$. В обратную сторону, если $\mu \in M_\omega(K)$, то предложение 4.1.1 показывает, что μ является слабым* пределом сети $\mu_\alpha \in M_\omega(K)$ мер с конечным носителем. Тем самым, если $f \in S(K)$, то

$$f(\omega) = f(b(\mu_\alpha)) \leqslant \mu_\alpha(f)$$

вследствие выпуклости. Переходя к пределу, получим $\mu(f) \geqslant f(\omega)$, или, что равносильно, $\mu \succ \delta_\omega$.

Наконец, существование максимальной меры $\mu \succ \delta_\omega$ последует из леммы Цорна, если показать, что всякая сеть мер $\{\mu_\alpha\}$, вполне упорядоченная отношением $\succ$, имеет верхнюю грань. Но для $f \in S(K)$ сеть $\{\mu_\alpha(f)\}$ монотонно возрастает, а норма $\|\mu_\alpha\|$ не зависит от α. Тогда леммой 4.1.4 гарантируется сходимость $\{\mu_\alpha\}$ в слабой* топологии. Пределом оказывается, очевидно, положительная мера Радона, мажорирующая все μ_α.

Частичную характеризацию упорядочения $\succ$, содержащуюся в предложении 4.1.3, можно значительно расширить. Если мера $\nu \in M_1(K)$ имеет конечный носитель:

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i},$$

и $\mu \succ \nu$, то, как можно показать,

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i,$$

где $\mu_i \succ \delta_{\omega_i}$. Аналогичный результат о сравнении мер справедлив и в общем случае, и с его помощью можно вполне охарактеризовать рассматриваемое отношение порядка. Поскольку на данной стадии такие подробности нам не нужны, мы отложим эту характеризацию до раздела 4.2 (см. предложение 4.2.1).

Предложением 4.1.3 установлено существование максимальных мер, и интуитивно-геометрическое понимание введенного отношения порядка подсказывает, что максимальные меры должны быть сосредоточены в некотором смысле на множестве крайних точек. Для того чтобы локализовать носитель максимальной меры, мы используем геометрические свойства выпуклых функций, а именно привлечем понятие верхней обёртывающей.

Определение 4.1.5. Если $f \in C(K)$, то ее *верхняя обёртывающая*[1] определяется как функция

$$\bar{f}(\omega) = \inf\{g(\omega);\ -g \in S(K),\ g \geqslant f\}.$$

Если $f \in S(K)$, то *ассоциированным* с ней *граничным множеством* $\partial_f(K)$ называется множество

$$\partial_f(K) = \{\omega;\ \omega \in K,\ f(\omega) = \bar{f}(\omega)\}.$$

Подчеркнем, что верхняя обертывающая $\bar{f}$ может быть разрывна, несмотря на то, что f непрерывна. Тем не менее, поскольку $\bar{f}$ является нижней обертывающей для семейства вогнутых непрерывных функций, она вогнута и полунепрерывна сверху. Граничное множество включает в себя те точки, где выпуклая функция f совпадает со своей вогнутой верхней обертывающей $\bar{f}$, так что точки максимума f туда заведомо входят. Элементарные свойства $\bar{f}$ и $\partial_f(K)$ резюмирует

Предложение 4.1.6. *Если $f \in C(K)$, то верхняя обертывающая $\bar{f}$ вогнута, полунепрерывна сверху и, следовательно, измерима. Если $\mu \in M_+(K)$, то*

$$\mu(\bar{f}) = \inf\{\mu(g);\ \ -g \in S(K),\ g \geqslant f\}.$$

Если $f \in S(K)$, то ассоциированное граничное множество $\partial_f(K)$ является множеством типа G_δ, а значит борелевским множеством.

Доказательство. Вогнутость и полунепрерывность сверху сразу следуют из определения $\bar{f}$. Полунепрерывность сверху равносильна открытости множеств $\{\omega;\ \bar{f}(\omega) < a\}$, так что $\bar{f}$ измерима относительно борелевской σ-алгебры.

Если $S_f = \{g;\ -g \in S(K),\ g \geqslant f\}$, то для любой пары $g_1, g_2 \in S_f$ и точная нижняя грань $g_1 \wedge g_2 \in S_f$. Таким образом, S_f представляет собой поточечно убывающую сеть непрерывных функций с пределом $\bar{f}$. Выражение для $\mu(\bar{f})$ получаем теперь из теоремы о монотонной сходимости.

Наконец, так как f непрерывна, функция $\bar{f}-f$ полунепрерывна сверху, и множества

$$S_n = \{\omega;\ \omega \in K;\ \ \bar{f}(\omega) - f(\omega) < 1/n\}$$

открыты. Но $\bar{f} \geqslant f$, следовательно, $\partial_f(K) = \bigcap_{n \geqslant 0} S_n$.

Следующая теорема дает фундаментальную характеризацию максимальных мер. В основном она подтверждает догадку о том, что максимальная мера сосредоточена на множествах, на которых выпуклые функции достигают максимальных значений, т. е. на которых $f = \bar{f}$.

[1] Используется также термин «верхняя огибающая». — *Прим. перев.*

Теорема 4.1.7. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого пространства X, и пусть $\mu \in M_+(K)$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *мера μ максимальна относительно упорядочения $\succ$ в $M_+(K)$;*

(2) *μ сосредоточена на всяком граничном множестве $\partial_f(K)$, т. е.*

$$\mu(\partial_f(K)) = \|\mu\|, \quad f \in S(K);$$

(3) *$\mu(\bar{f}) = \mu(f)$ при всех $f \in C(K)$.*

Отметим, что условие (2) по определению эквивалентно совпадению $\mu(\bar{f}) = \mu(f)$ для всех $f \in S(K)$.

Эквивалентность трех перечисленных в теореме условий выводится с помощью более подробного исследования свойств обертывающих $\bar{f}$ для элементов $f \in C(K)$. Необходимая нам информация суммирована в двух леммах.

Лемма 4.1.8. *Если $\bar{f}$ — верхняя обертывающая для $f \in C(K)$, то множество*

$$S = \{(\omega, t);\ (\omega, t) \in K \times \mathbb{R},\ t \leqslant \bar{f}(\omega)\}$$

совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой S' множества

$$\{(\omega, t);\ (\omega, t) \in K \times \mathbb{R},\ t \leqslant f(\omega)\}.$$

Доказательство. Функция $\bar{f}$ вогнута, полунепрерывна сверху и $\bar{f} \geqslant f$. Значит, S выпукло, замкнуто и $S' \subseteq S$. Предположим теперь, что нашлась такая пара $(\omega_0, t_0) \in S$, что $(\omega_0, t_0) \notin S'$. Из теоремы Хана—Банаха следует существование непрерывного линейного функционала g на $X \times \mathbb{R}$ со свойствами $g(\omega_0, t_0) > 1$ и $g(\omega, t) \leqslant 1$ при $t \leqslant f(\omega)$. Такой g должен иметь вид $g(\omega, t) = h(\omega) + \lambda \cdot t$, где h — непрерывный линейный функционал на X. Тем самым

$$h(\omega_0) + \lambda t_0 > 1 \text{ и } h(\omega) + \lambda f(\omega) \leqslant 1$$

при всех $\omega \in K$. Выбрав $\omega = \omega_0$ и вычтя эти неравенства одно из другого, придем к неравенству $\lambda(f(\omega_0) - t_0) < 0$. Но поскольку $\omega_0 \in K$ и $t_0 > f(\omega_0)$, то с необходимостью $\lambda > 0$. Отсюда вытекает, что $\omega \longmapsto (1 - h(\omega))/\lambda$ является аффинной непрерывной функцией, которая мажорирует f и удовлетворяет неравенству $t_0 > (1 - h(\omega_0))/\lambda \geqslant \bar{f}(\omega_0)$. Полученное противоречие с предположением $t_0 \leqslant \bar{f}(\omega_0)$ показывает, что $S' = S$.

Лемма 4.1.9. *Если $\bar{f}$ — верхняя обёртывающая для $f \in C(K)$, то*

$$\bar{f}(\omega) = \sup\{\mu(f);\ \mu \succ \delta_\omega,\ \mu \text{ имеет конечный носитель}\}.$$

Тем самым для любой пары $f, g \in C(K)$

$$(\overline{f + g})(\omega) \leqslant \bar{f}(\omega) + \bar{g}(\omega).$$

Доказательство. Если $\mu \succ \delta_\omega$ и носитель μ конечен, то $\mu = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i}$, причем набор чисел $\lambda_i \geqslant 0$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i = \omega.$$

Но тогда
$$\bar{f}(\omega) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{f}(\omega_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\omega_i) = \mu(f);$$
здесь первое неравенство следует из вогнутости $\bar{f}$. Далее, по лемме 4.1.8 найдутся такие $\lambda_i^\alpha \geqslant 0$, $\omega_i^\alpha \in K$, $t_i^\alpha \in \mathbb{R}$ и $n_\alpha > 0$, что
$$\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = 1, \quad t_i^\alpha \leqslant f\left(\omega_i^\alpha\right),$$
$$\lim_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \omega_i^\alpha = \omega, \quad \lim_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha t_i^\alpha = \bar{f}(\omega).$$
Введем сеть μ_α формулой
$$\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \delta_{\omega_i^\alpha};$$
у нее есть слабо* сходящаяся подсеть $\{\mu_{\alpha'}\}$. Если μ обозначает предел этой подсети, то
$$b(\mu) = \lim_{\alpha'} b(\mu_{\alpha'}) = \omega,$$
$$\mu(f) = \lim_{\alpha'} \mu_{\alpha'}(f) \geqslant \lim_{\alpha'} \sum_{i=1}^{n_{\alpha'}} \lambda_i^{\alpha'} t_i^{\alpha'} = \bar{f}(\omega).$$
Но, согласно предложению 4.1.1, можно аппроксимировать μ в слабой* топологии мерами с конечным носителем, имеющими барицентр $b(\mu)$ и единичную норму. Тем самым $\bar{f}(\omega)$ меньше, чем супремум, указанный в лемме. Но выше мы уже установили противоположное неравенство, так что требуемое равенство получено.

Второе утверждение леммы вытекает из первого; достаточно учесть, что супремум суммы не превосходит суммы супремумов.

Доказательство теоремы 4.1.7. Обратимся теперь к доказательству теоремы.

(1) $\Rightarrow$ (2). Положим $p(g) = \mu(\bar{g})$ для $g \in C(K)$. При всех $\lambda \geqslant 0$ и $g \in C(K)$ имеем $p(\lambda g) = \lambda p(g)$. Кроме того, по лемме 4.1.9, при всех $g, h \in C(K)$ должно выполняться неравенство $p(g+h) \leqslant p(g) + p(h)$. Тем самым, в силу теоремы Хана—Банаха, можно найти линейный функционал ν на $C(K)$, такой что $\nu(f) = \mu(\bar{f})$ для некоторой функции $f \in S(K)$ и $\nu(g) \leqslant \mu(\bar{g})$ для всех $g \in C(K)$. Если взять $g \leqslant 0$, то $\bar{g} \leqslant 0$ и $\nu(g) \leqslant \mu(\bar{g}) \leqslant 0$. Таким образом, $\nu \in M_+(K)$. Если же $-g \in S(K)$, то $g = \bar{g}$ и $\nu(g) \leqslant \mu(\bar{g}) = \mu(g)$, а это влечет $\nu \succ \mu$. По предположению μ максимальна, так что $\nu = \mu$ и потому
$$\mu(f) = \nu(f) = \mu(\bar{f})$$
для той самой выделенной $f \in S(K)$, т. е. μ сосредоточена на $\partial_f(K)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Отображение $f \in C(K) \longmapsto \mu(\bar{f})$ субаддитивно по лемме 4.1.9. Значит,
$$\mu(\bar{f}) - \mu(\bar{g}) \leqslant \mu(\overline{f-g}) \leqslant \mu(\bar{f}) + \mu((\overline{-g}))$$
при всех f, $g \in C(K)$. Но $\mu(\bar{f}) = \mu(f)$ для $f \in S(K)$ по предположению, и $(\overline{-g}) = -g$ для $g \in S(K)$ по определению. Тем самым
$$\mu(f) - \mu(g) \leqslant \mu(\overline{f-g}) \leqslant \mu(f) - \mu(g)$$

при всех f, $g \in S(K)$, или, равносильно, $\mu(f-g) = \mu(\overline{f-g})$ при всех f, $g \in S(K)$. Из леммы 4.1.4 получаем тогда, что $\mu(h) = \mu(\bar{h})$ при всех $h \in C(K)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что $\nu \succ \mu$. Если $h \in C(K)$, то, согласно предложению 4.1.6,

$$\begin{aligned}\nu(\bar{h}) &= \inf\{\nu(g);\ -g \in S(K),\ g \geqslant h\} \\ &\leqslant \inf\{\mu(g);\ -g \in S(K),\ g \geqslant h\} = \mu(\bar{h}).\end{aligned}$$

Поэтому с учетом неравенства $\bar{h} \geqslant h$ имеем

$$\nu(h) \leqslant \nu(\bar{h}) \leqslant \mu(\bar{h}) = \mu(h).$$

Таким образом, $\nu(h) \leqslant \mu(h)$. Заменяя h на $-h$, получаем неравенство $\nu(h) \geqslant \mu(h)$, так что $\mu = \nu$, т. е. μ максимальна.

Теорема 4.1.7 показывает, что максимальные меры сосредоточены на каждом из граничных множеств $\partial_f(K)$. Покажем теперь, что множество $\mathscr{E}(K)$ крайних точек K в точности совпадает с пересечением всех $\partial_f(K)$. Тем самым можно считать, что в некотором слабом смысле максимальные меры сосредоточены на $\mathscr{E}(K)$, но при такой интерпретации надо соблюдать осторожность, потому что $\mathscr{E}(K)$ не обязано быть измеримым. К более подробному обсуждению этого вопроса мы вернемся, получив описание $\mathscr{E}(K)$.

Предложение 4.1.10. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого топологического векторного пространства. Множество $\mathscr{E}(K)$ крайних точек K и граничные множества $\partial_f(K)$ связаны соотношением*

$$\mathscr{E}(K) = \bigcap_{f \in S(K)} \partial_f(K).$$

Поэтому если $B \subseteq \mathscr{E}(K)$ — борелевское множество и $\mu(B) = \|\mu\|$ для некоторой меры $\mu \in M_+(K)$, то μ максимальна.

Доказательство. Если $\omega \in K$, но $\omega \notin \mathscr{E}(K)$, то $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ для некоторых $\omega_1, \omega_2 \in K$, причем $\omega_1 \neq \omega_2$. Пусть f — любая аффинная непрерывная функция с $f(\omega_1) \neq f(\omega_2)$. Тогда

$$f^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = \frac{(f(\omega_1)+f(\omega_2))^2}{4} = \frac{f^2(\omega_1)+f^2(\omega_2)}{2} - \frac{(f(\omega_1)+f(\omega_2)^2}{4}.$$

Тем самым, если $-g \in S(K)$ и $g \geqslant f^2$, то

$$g(\omega) \geqslant \frac{g(\omega_1)+g(\omega_2)}{2} \geqslant \frac{f^2(\omega_1)+f^2(\omega_2)}{2} > f^2(\omega).$$

Поэтому

$$\bar{f}^2(\omega) \geqslant \frac{f^2(\omega_1)+f^2(\omega_2)}{2} > f^2(\omega).$$

В частности, $\omega \notin \partial_{f^2}(K)$, так что

$$\mathscr{E}(K) \supseteq \bigcap_{f \in S(K)} \partial_f(K).$$

Обратно, если $\omega \notin \partial_f(K)$ для некоторой $f \in S(K)$, то $\bar{f}(\omega) > f(\omega)$ и по лемме 4.1.9 существует мера $\mu \in M_1(K)$ с конечным носителем и барицентром ω, для которой $\mu(f) > f(\omega)$. Значит, если $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i}$, то, во-первых,

$$b(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i = \omega$$

и, во-вторых,

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\omega_i) > f(\omega).$$

Из этих двух соотношений следует, что $\omega \notin \mathscr{E}(K)$ и потому

$$\mathscr{E}(K) \subseteq \bigcap_{f \in S(K)} \partial_f(K).$$

Два полученных противоположных включения устанавливают требуемое равенство.

Последнее утверждение теоремы получим, заметив, что для $f \in S(K)$ верно равенство $\mu(\partial_f(K)) = \|\mu\|$, так что μ максимальна по теореме 4.1.7.

Каждое из граничных множеств $\partial_f(K)$ борелевское, и даже типа G_δ, согласно предложению 4.1.6, однако $\mathscr{E}(K)$ не обязано быть борелевским, будучи пересечением несчетного семейства $\partial_f(K)$. И действительно, можно построить примеры, в которых $\mathscr{E}(K)$ не является борелевским. Поэтому не самоочевидно, в каком смысле максимальные меры сосредоточены на $\mathscr{E}(K)$, и именно в этом месте естественно обратиться к понятию псевдососредоточенности.

Теорема 4.1.11. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого топологического векторного пространства. Тогда каждая максимальная мера $\mu \in M_1(K)$ псевдососредоточена на множестве крайних точек $\mathscr{E}(K)$, т. е. $\mu(B) = 1$ для всякого бэровского множества B, содержащего $\mathscr{E}(K)$.*

Если вдобавок K метризуемо, то его бэровские и борелевские множества совпадают, $\mathscr{E}(K)$ является G_δ-множеством и следующие условия эквивалентны:

(1) $\nu \in M_1(K)$ *максимальна;*

(2) $\nu(\mathscr{E}(K)) = 1$.

Доказательство первого утверждения теоремы основывается на двух леммах, которые интересны и сами по себе. В частности, первая из них дает нам некий принцип максимума, который будет применен в главе 6 при обсуждении вариационных принципов для равновесных состояний.

Лемма 4.1.12. (принцип максимума Бауэра). *Пусть функция f на компактном выпуклом множестве K выпукла и полунепрерывна сверху. Тогда f достигает максимума в крайней точке K.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \sup_{\omega \in K} f(\omega) < +\infty$. Положим $F = \{\omega;\ f(\omega) = \alpha\}$. Множество F замкнуто и непусто, благодаря условиям компактности и полунепрерывности. Кроме того, F устойчиво в K в том смысле, что если $\mu \in M_\omega(K)$, а $\omega \in F$, то μ сосредоточена на F. Замкнутые устойчивые в K подмножества F образуют направленное множество (относительно упорядочения по включению). Поэтому, будучи компактным, K в силу леммы Цорна должно содержать некоторое минимальное непустое устойчивое подмножество $F_0 \subset F$. Предположим, что в F_0 имеются две разные точки ω_1 и ω_2. По теореме Хана—Банаха найдется непрерывный линейный функционал g, такой что $g(\omega_1) > g(\omega_2)$. Пусть

$$G = \{\omega;\quad g(\omega) = \sup_{\omega' \in F_0} g(\omega')\} \cap F_0.$$

Ясно, что G устойчиво как подмножество F_0, а потому и как подмножество K, так как F_0 устойчиво в K. Но поскольку $\omega_2 \notin G$, это противоречит минимальности F_0; следовательно, $F_0 = \{\omega_0\}$, где ω_0 — некоторая точка K, и устойчивость F_0 требует, чтобы $\omega_0 \in \mathscr{E}(K)$.

Лемма 4.1.13. *Пусть мера μ максимальна, и пусть убывающая последовательность положительных $f_n \in C(K)$ сходится поточечно к нулю на $\mathscr{E}(K)$. При этих предположениях*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = 0.$$

Доказательство. Сперва мы покажем, что при каждом n найдется функция $g_n \in S(K)$, для которой $g_n \leqslant f_n$ и

$$\mu(f_n) - \mu(g_n) < \varepsilon.$$

Для этого достаточно заметить, что $\mu(f_n) = -\mu((\overline{-f_n}))$ (по теореме 4.1.7) и

$$\mu((\overline{-f_n})) = \inf\{\mu(-g);\quad g \in S(K),\ g \leqslant f_n\}$$

(согласно предложению 4.1.6). Во-вторых, мы утверждаем, что можно выбрать g_n, образующие монотонно убывающую последовательность. Докажем это по индукции. Выберем g_{n+1} так, чтобы $0 \leqslant g_{n+1} \leqslant g_n \wedge f_{n+1}$ и при этом

$$\mu(g_n \wedge f_{n+1}) - \mu(g_{n+1}) < \varepsilon + \mu(g_n) - \mu(f_n).$$

Это возможно в силу предыдущих рассуждений. Далее,

$$\mu(g_n) + \mu(f_{n+1}) = \mu(g_n \wedge f_{n+1}) + \mu(g_n \vee f_{n+1}) \leqslant \mu(g_n \wedge f_{n+1}) + \mu(f_n),$$

следовательно, $\mu(f_{n+1}) - \mu(g_{n+1}) < \varepsilon$. В-третьих, пусть f_n сходится к f, и g_n сходится к g. Мы имеем

$$0 \leqslant \mu(f) \leqslant \mu(g) + \varepsilon.$$

Теперь, по предположению, $f = 0$ на $\mathscr{E}(K)$ и, значит, $g = 0$ на $\mathscr{E}(K)$. Но g выпукла и полунепрерывна сверху, так что $g = 0$ на K, по лемме 4.1.2, и $0 \leqslant \mu(f) \leqslant \varepsilon$.

Обратимся к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 4.1.11. Мера μ регулярна, а σ-алгебра бэровских множеств порождается компактными G_δ-подмножествами K, поэтому достаточно проверить, что $\mu(C) = 0$ для всякого компактного G_δ-множества C, для которого $C \cap \mathscr{E}(K) = \varnothing$. По лемме Урысона существует такая ограниченная последовательность положительных функций $f_n \in C(K)$, что $f_n(\omega) = 1$ при $\omega \in C$, а при $\omega \notin C$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = 0.$$

Поэтому

$$0 \leqslant \mu(C) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = 0$$

(по лемме 4.1.13).

Предположим теперь, что K метризуемо, и пусть C — произвольное замкнутое подмножество K. Введем множества C_n:

$$C_n = \left\{\omega;\quad d(\omega, \omega') < \frac{1}{n} \text{ для некоторого } \omega' \in C\right\};$$

здесь d — метрика на K. Множества C_n открыты и $C = \bigcap_{n\geqslant 1} C_n$, т. е. C — бэровское множество. Таким образом, бэровские и борелевские множества совпадают.

Мы докажем, что множество $\mathscr{E}(K)$ борелевское, установив более сильный результат: $\mathscr{E}(K) = \partial_f(K)$ при надлежащем выборе $f \in S(K)$.

Будучи метризуемым компактом, множество K сепарабельно, и, заменяя, если необходимо, метрику d на $d/(1+d)$, можно считать, что $d(\omega', \omega'') \leqslant 1$ для всех пар $\omega', \omega'' \in K$. Пусть теперь $\{\omega_n\}$ — плотная последовательность точек в K. Зададим $f \in C(K)$ равенством

$$f(\omega) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} d(\omega_n, \omega)^2.$$

Ясно, что $f \in S(K)$. Далее, для любых $\omega', \omega'' \in K$, $\omega' \neq \omega''$, можно указать n, при котором ω_n ближе к ω', чем к ω'', поэтому функция $d(\omega_n, \cdot)$, а стало быть, и f строго выпуклы на отрезке $[\omega', \omega'']$. С помощью первой выкладки из доказательства предложения 4.1.10 получим

$$\bar{f}\left(\frac{\omega' + \omega''}{2}\right) > f\left(\frac{\omega' + \omega''}{2}\right).$$

Этим установлено, что если $\omega \in K$, но $\omega \notin \partial_f(K)$, то $\omega \notin \partial_f(K)$. Поэтому $\mathscr{E}(K) \supseteq \partial_f(K)$. Предложение 4.1.10 позволяет теперь заключить, что $\mathscr{E}(K) = \partial_f(K)$, так что, в силу предложения 4.1.6, $\mathscr{E}(K)$ есть множество типа G_δ.

Наконец, (1) $\Rightarrow$ (2) согласно первой части теоремы, а импликация (2) $\Rightarrow$ (1) содержится в предложении 4.1.10.

Замечание. В несколько более слабой форме второе утверждение теоремы 4.1.11 можно распространить на некоторые специальные подмножества K. Борелевское подмножество F называется *устойчивой гранью* K, если из $\omega \in F$ и $\mu \succ \delta_\omega$ следует, что μ сосредоточена на F. Если устойчивая грань F метризуема и сепарабельна, то, рассуждая аналогично предыдущему, можно доказать, что $\mathscr{E}(F) = \partial_f(K) \cap F = \mathscr{E}(K) \cap F$ для подходящей функции $f \in S(K)$. Очевидно, $\mathscr{E}(F) = \mathscr{E}(K) \cap F$, и если f строится, как выше, с помощью точек $\omega_n \in F$, то точно так же проверяется, что $\omega \in F$, $\omega \notin \mathscr{E}(F)$ влечет $\omega \notin \partial_f(K)$. Поэтому $\mathscr{E}(F) \supseteq \partial_f(K) \cap F$, и из предложения 4.1.10 вновь следует равенство множеств. Тем самым, при условии $\mu \succ \delta_\omega$ для $\omega \in F$, мера μ максимальна тогда и только тогда, когда $\mu(\mathscr{E}(F)) = 1$. С аналогичными утверждениями об устойчивых гранях мы встретимся в пункте 4.1.4.

Теорема 4.1.11 вместе с предложением 4.1.3 показывает, что всякая точка $\omega \in K$ является барицентром некоторой максимальной вероятностной меры и максимальные меры псевдососредоточены на $\mathscr{E}(K)$. В самых удачных случаях, например при метризуемости K, максимальные меры действительно будут сосредоточены на $\mathscr{E}(K)$. Теперь мы выведем условия, гарантирующие, что каждая точка $\omega \in K$ окажется барицентром единственной максимальной меры.

Для того чтобы сформулировать эти условия единственности, удобно предположить, что K является основанием выпуклого конуса с вершиной в нуле [1]. К этому случаю всегда можно перейти, заменив X на $\mathbb{R} \times X$, отождествив K с $\{1\} \times K$ и взяв в качестве C конус, порожденный $\{1\} \times K$. Хотя существует много способов реализовать K как основание конуса C, все такие конусы будут линейно изоморфны, потому что каждая точка конуса имеет вид $\lambda\omega$ с $\lambda \geqslant 0$ и $\omega \in K$. Поэтому аффинные свойства C зависят лишь от афинных свойств K и не зависят от способа погружения.

На конусе C можно задать естественное упорядочение, полагая $\xi \geqslant \eta$ тогда и только тогда, когда $\xi - \eta \in C$, и мы будем говорить, что C является *решеткой*, если это отношение порядка задает структуру решетки. Компактное выпуклое множество K, служащее основанием для конуса C, называется *симплексом*, если C является решеткой. Отметим, что данное определение симплекса в точности соответствует обычному определению для конечномерного случая. Действительно, ν-мерный симплекс $\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu+1});\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_i \lambda_i = 1\}$ служит основанием $(\nu + 1)$-мерного конуса $\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu+1});\ \lambda_i \geqslant 0\}$. Более общий пример симплекса доставляет множество всех вероятностных мер $M_1(K)$. Это множество образует основание конуса $C = M_+(K)$, а в начале пункта было отмечено, что C является решеткой. Несколько менее очевиден пример, доставляемый следующим предложением:

Предложение 4.1.14. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого пространства, и пусть M — подмножество в $M_+(K)$, состоящее из мер, максимальных относительно упорядочения $\succ$. Тогда M будет выпуклым подконусом в $M_+(K)$, и всякая сумма или интеграл мер из M содержится в M. Далее, из условий $\mu \in M$ и $\nu \ll \mu$ следует, что $\nu \in M$. Наконец, M — решетка.*

---

[1] Основанием выпуклого конуса P с вершиной в точке 0 называется всякое выпуклое подмножество $K \subset P$, такое, что $0 \notin K$ и любой ненулевой элемент $\varphi \in P$ единственным образом представим в виде $\varphi = \lambda\omega$, где $\lambda > 0$ и $\omega \in K$.

Доказательство. По теореме 4.1.7 мера μ максимальна тогда и только тогда, когда $\mu(\bar{f}-f)=0$ при всех $f \in S(K)$. Это сразу же позволяет заключить, что суммы и интегралы максимальных мер максимальны и что максимальные меры образуют подконус конуса $M_+(K)$. Но если $f \in S(K)$, то $\bar{f}-f \geqslant 0$ и из $\nu \leqslant \mu$ в сочетании с $\mu(\bar{f}-f)=0$ следует, что $\nu(\bar{f}-f)=0$, т. е. что ν максимальна.

Теперь для точной нижней грани $\mu \wedge \nu$ мер $\mu, \nu \in M$ мы имеем $\mu \wedge \nu \leqslant \mu$, так что $\mu \wedge \nu \in M$. Более того, если $\rho \in M_+(K)$ и $\rho \leqslant \mu$, $\rho \leqslant \nu$, то $\rho \in M$, а поскольку $\mu \wedge \nu - \rho \leqslant \mu \wedge \nu \in M$, то $\mu \wedge \nu - \rho \in M$. Итак, $\mu \wedge \nu$ оказывается точной нижней гранью μ и ν по отношению к естественному упорядочению конуса M. Но $\mu \vee \nu = \mu + \nu - \mu \wedge \nu \leqslant \mu + \nu \in M$, следовательно $\mu \vee \nu \in M$. Тем самым M —решетка.

Это предложение применяется при установлении следующей характеризации единственности барицентрических разложений по максимальным мерам.

Теорема 4.1.15. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого пространства. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *всякая точка $\omega \in K$ является барицентром единственной максимальной меры;*

(2) *K является симплексом;*

(3) *верхняя обёртывающая $\bar{f}$ каждой функции $f \in S(K)$ есть аффинная функция.*

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mu \in M_\omega(K)$. Мы сначала покажем, что $\bar{f}(\omega)=\mu(\bar{f})$. Пусть сеть $\{\mu_\alpha\}$ в $M_\omega(K)$, состоящая из мер с конечным носителем, сходится к μ в слабой* топологии. Существование $\{\mu_\alpha\}$ гарантируется предложением 4.1.1. Если взять $g \in -S(K)$ и $g \geqslant f$, то

$$\bar{f}(\omega)=\mu_\alpha(\bar{f}) \leqslant \mu_\alpha(g) \leqslant g(\omega)$$

(первое равенство опирается на аффинность $\bar{f}$). Следовательно,

$$\bar{f}(\omega) \leqslant \mu(g) \leqslant g(\omega).$$

Переходя к инфимуму по g и применяя предложение 4.1.6, получим

$$\bar{f}(\omega) \leqslant \mu(\bar{f}) = \bar{f}(\omega).$$

Теперь предположим, что μ_1, μ_2 — максимальные меры с барицентром ω. Таким образом, при всех $\bar{f} \in S(K)$

$$\mu_1(\bar{f})=\mu_1(f), \quad \mu_2(\bar{f})=\mu_2(f),$$

а значит,

$$\mu_1(f)=\mu_1(\bar{f})=\bar{f}(\omega)=\mu_2(\bar{f})=\mu_2(f).$$

Из равенства $\mu_1(f)=\mu_2(f)$ при всех $f \in S(K)$ следует, что $\mu_1(g-h)= =\mu_2(g-h)$ при всех $g, h \in S(K)$. Поэтому $\mu_1=\mu_2$ (по лемме 4.1.4), т. е. максимальная мера с барицентром ω единственна.

(1) $\Rightarrow$ (2). Согласно предложению 4.1.14, конус максимальных мер M есть решетка, так что максимальные меры $\mu \in M_1(K)$ образуют симплекс M_1. Но отображение $\mu \longmapsto \omega = b(\mu)$ задает линейный изоморфизм M_1 и K. Тем самым K — симплекс.

(2) $\Rightarrow$ (3). Для доказательства этой импликации удобно расширить область определения каждой функции $f \in C(K)$, продолжив f по однородности на

конус C с основанием K, т. е. положив $f(\lambda\omega) = \lambda f(\omega)$ при $\omega \in K$, $\lambda \geqslant 0$. Заметим, что выпуклость f отвечает *субаддитивности* продолженной функции:

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y), \quad x, y \in C,$$

а вогнутость — *супераддитивности:*

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \quad x, y \in C.$$

Далее, если $f \in S(K)$, то верхняя обёртывающая $\bar{f}$ вогнута и ее продолжение на C автоматически супераддитивно. Поэтому мы докажем, что $\bar{f}$ аффинна, если установим, что ее продолжение также и субаддитивно, а значит линейно. Доказательство основано на следующем свойстве разложения для решеток.

Лемма 4.1.16. *Пусть C — конус, являющийся решеткой по отношению к естественному упорядочению. Пусть x, $y \in C$ и*

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} z_i,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n \in C$. Тогда найдутся такие x_i, $y_i \in C$, что $x_i + y_i = z_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ и

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Доказательство. Сначала возьмем $n = 2$ и зададим явно

$$x_1 = z_1 \wedge x, \qquad y_1 = z_1 - z_1 \wedge x,$$

$$x_2 = x_1 - z_1 \wedge x, \quad y_2 = z_2 - x + z_1 \wedge x.$$

Легко проверить все нужные соотношения, за исключением, быть может, включения $y_2 \in C$. Но здесь можно учесть, что, сдвинув точную верхнюю грань пары элементов, мы получим точную верхнюю грань для сдвинутых элементов, а следовательно,

$$y_2 = z_1 \wedge x + (z_2 - x) = (z_1 + (z_2 - x)) \wedge (x + (z_2 - x)) = y \wedge z_2 \in C.$$

В общем случае (при $n > 2$) используем итерационную процедуру. Сначала результат для $n = 2$ применяем к

$$x + y = z_1 + \sum_{i=2}^{n} z_i$$

и получаем, что $z_1 = x_1 + y_1$ и

$$\sum_{i=2}^{n} z_i = t + t',$$

где $x_1 + t = x$ и $y_1 + t' = y$. Затем вторично тот же результат применяем к

$$t + t' = z_2 + \sum_{i=3}^{n} z_i.$$

После $n - 1$ шагов приходим к утверждению леммы.

Теперь вернемся к доказательству импликации (2) $\Rightarrow$ (3) в теореме 4.1.15. По лемме 4.1.9 при $f \in C(K)$ имеем

$$\bar{f}(x+y) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(z_i);\quad z_i \in C,\quad \sum_{i=1}^{n} z_i = x+y\right\},$$

а по лемме 4.1.16

$$\bar{f}(x+y) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i+y_i);\quad x_i,\ y_i \in C,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = x,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = y\right\}.$$

Для $f \in C(K)$ в силу выпуклости получим

$$\bar{f}(x+y) \leqslant \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i);\quad x_i \in C,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = x\right\} + \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(y_i);\quad y_i \in C,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = y\right\} = \bar{f}(x) + \bar{f}(y).$$

Таким образом, $\bar{f}$ на C и субаддитивна, и супераддитивна, т. е. $\bar{f}$ аддитивна на C и аффинна на K.

Известны и другие полезные для приложений характеризации единственности барицентрического разложения, не покрываемые теоремой 4.1.15. Простой и полезный пример дает нам

Следствие 4.1.17. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого топологического векторного пространства. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *всякая точка $\omega \in K$ является барицентром единственной максимальной меры μ_ω;*

(2) *существует аффинное отображение $\omega \in K \mapsto \nu_\omega \in M_1(K)$ точек ω в меры ν_ω с барицентром ω.*

При выполнении этих условий $\mu_\omega = \nu_\omega$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если $\omega_1, \omega_2 \in K$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то мера $\lambda\mu_{\omega_1} + (1-\lambda)\mu_{\omega_2}$ максимальна, так как максимальные меры образуют конус (предложение 4.1.14). Но

$$b(\lambda\mu_{\omega_1} + (1-\lambda)\mu_{\omega_2}) = \lambda b(\mu_{\omega_1}) + (1-\lambda)\, b(\mu_{\omega_2}) = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\,\omega_2.$$

Вследствие предположенной единственности, $\lambda\mu_{\omega_1} + (1-\lambda)\mu_{\omega_2} = \mu_{\lambda\omega_1+(1-\lambda)\omega_2}$, и отображение $\omega \mapsto \mu_\omega$ аффинно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Для установления того факта, что ν_ω — единственная максимальная мера из $M_\omega(K)$, надо показать, что $\nu \prec \nu_\omega$, если $\nu \in M_\omega(K)$. Сперва заметим, что ν можно аппроксимировать в слабой* топологии сетью мер с конечным носителем (согласно предложению 4.1.1). Если

$$\nu^\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \delta_{\omega_i^\alpha},$$

где $\lambda_i^\alpha \geqslant 0$, и $f \in S(K)$, то

$$\nu^\alpha(f) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha f(\omega_i^\alpha) \leqslant \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \nu_{\omega_i^\alpha}(f),$$

так как $\nu_\omega \succ \delta_\omega$, в силу предложения 4.1.3. Отображение $\omega \mapsto \nu_\omega$ аффинно, поэтому

$$\nu^\alpha(f) \leqslant \nu_{\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \omega_i^\alpha}(f) = \nu_\omega(f).$$

Наконец, после предельного перехода получаем $\nu(f) \leqslant \nu_\omega(f)$, т. е. $\nu \prec \nu_\omega$.

Замечание. Вероятно, следует подчеркнуть: задачу определения того, в каком смысле максимальная мера сосредоточена на $\mathscr{E}(K)$, не упрощает предположение, что K — симплекс. В самом деле, можно привести пример симплекса K с такой точкой $\omega \in K$, что

(1) $\mathscr{E}(K)$ будет борелевским подмножеством K;

(2) единственная максимальная мера $\mu_\omega \in M_\omega(K)$ удовлетворяет условию $\mu_\omega(\mathscr{E}(K)) = 0$.

Даже если единственная максимальная мера μ_ω сосредоточена на $\mathscr{E}(K)$, это не означает, что не могут существовать другие меры $\mu \in M_\omega(K)$, $\mu \neq \mu_\omega$, псевдосредоточенные на $\mathscr{E}(K)$. И действительно, можно указать симплекс K и его точку ω со следующими свойствами:

(1) $\mathscr{E}(K)$ — борелевское подмножество K;

(2) единственная максимальная мера $\mu_\omega \in M_\omega(K)$ удовлетворяет условию $\mu_\omega(\mathscr{E}(K)) = 1$;

(3) существует такая мера $\mu \in M_\omega(K)$, что $\mu(\mathscr{E}(K)) = 0$ и $\mu(B) = 0$ для всякого G_δ-подмножества B с $B \cap \mathscr{E}(K) = \varnothing$.

Рассмотренным в этом пункте типом разложения гарантируется наличие представления вида

$$f(b(\mu)) = \int d\mu(\omega) f(\omega)$$

при всех $f \in A(K)$, где $\mu \in M_1(K)$. Естественно поинтересоваться, до какой степени можно ослабить условие непрерывности f, сохранив это представление. Мы завершим этот пункт доказательством справедливости барицентрического представления для аффинных полунепрерывных функций, а значит и для сумм и разностей таких функций.

Следствие 4.1.18. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого топологического векторного пространства, а f — аффинная полунепрерывная сверху функция на K. Если $\mu \in M_1(K)$ имеет барицентр $b(\mu)$, то*

$$f(b(\mu)) = \int d\mu(\omega) f(\omega).$$

Доказательство. Сперва заметим, что f совпадает со своей верхней обёртывающей:

$$f(\omega) = \inf\{g(\omega); \quad -g \in S(K), \ g \geqslant f\}.$$

Этот факт устанавливается так же, как доказывается лемма 4.1.8. Затем с помощью той же аппроксимационной техники, которая привлекалась для вывода импликации (3) $\Rightarrow$ (1) в теореме 4.1.15, получаем

$$f(b(\mu)) = \mu_\alpha(f) \leqslant \mu_\alpha(g) \leqslant g(b(\mu))$$

при всех $g \in -S(K)$, удовлетворяющих условию $g \geqslant f$. Следовательно,

$$f(b(\mu)) \leqslant \mu(g) \leqslant g(b(\mu)).$$

Взяв инфимум по g и применив предложение 4.1.6, получим $f(b(\mu)) = \mu(f)$.

4.1.3. Ортогональные меры

В предыдущем пункте мы обсудили общую теорию барицентрического разложения, а в этом пункте рассмотрим некоторые аспекты этой теории в применении к пространствам состояний C^*-алгебр. На протяжении всего пункта $E_{\mathfrak{A}}$ будет обозначать выпуклое слабо* компактное множество состояний на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей. Большая часть пункта посвящена изучению некоторого подкласса класса мер $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ с барицентром ω. Эти специальные меры — ортогональные меры — уже кратко обсуждались во введении к настоящему разделу. Они находятся во взаимно-однозначном соответствии с абелевыми подалгебрами фон Неймана, содержащимися в коммутанте $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ циклического представления, ассоциированного с ω. Кроме того, существует взаимно-однозначное соответствие между этими мерами и такими проекторами P в $\mathfrak{H}_\omega$, что $P\Omega_\omega = \Omega_\omega$ и $P\pi_\omega(\mathfrak{A})P$ порождает абелеву алгебру на $P\mathfrak{H}_\omega$. Первый из основных результатов данного пункта — установление упомянутых соответствий, а второй — демонстрация сохранения естественного порядка при таких соответствиях. В частности, с максимальными абелевыми подалгебрами в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ связаны меры, которые максимальны среди ортогональных мер. Ниже, в пункте 4.2.1, этот результат будет усилен, и мы покажем, что при хороших обстоятельствах, например в случае метризуемости $E_{\mathfrak{A}}$, максимальные ортогональные меры окажутся максимальными в $M_+(K)$, и именно это оправдывает введение ортогональных мер.

В данном пункте будут использоваться стандартные алгебраические обозначения, введенные в главе 2, наряду с новыми обозначениями, введенными в предыдущем пункте. Кроме того, с каждым элементом C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ мы свяжем непрерывную аффинную функцию $\hat{A}$ на пространстве состояний $E_{\mathfrak{A}}$, определив ее равенством

$$\hat{A}(\omega) = \omega(A).$$

Отметим, что согласно теореме Хана—Банаха все аффинные непрерывные функции на $E_{\mathfrak{A}}$ имеют такой вид.

Для того чтобы ввести понятие ортогональной меры μ на $E_{\mathfrak{A}}$, сначала необходимо познакомиться с понятием ортогональных состояний. Существует несколько возможных определений, которые согласованы между собой, как показывает приводимая ниже

Лемма 4.1.19. *Пусть* ω_1, ω_2 — *положительные линейные функционалы на* C^*-*алгебре* $\mathfrak{A}$ *и* $\omega = \omega_1 + \omega_2$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *если* ω' — *положительный линейный функционал на* $\mathfrak{A}$, *удовлетворяющий условиям* $\omega' \leqslant \omega_1$ *и* $\omega' \leqslant \omega_2$, *то* $\omega' = 0$;

(2) *существует такой проектор* $P \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, *что*

$$\omega_1(A) = (P\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega), \quad \omega_2(A) = ((\mathbb{1} - P)\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega)$$

(3) *представление, ассоциированное с* ω, *является прямой суммой представлений, ассоциированных с* ω_1 *и* ω_2:

$$\mathfrak{H}_\omega = \mathfrak{H}_{\omega_1} \oplus \mathfrak{H}_{\omega_2}, \quad \pi_\omega = \pi_{\omega_1} \oplus \pi_{\omega_2}, \quad \Omega_\omega = \Omega_{\omega_1} \oplus \Omega_{\omega_2}.$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). По теореме 2.3.19 существует такой оператор T, что $0 \leqslant T \leqslant \mathbb{1}$, $T \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и

$$\omega_1(A) = (T\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega).$$

Введем $T' = T(\mathbb{1} - T)$; тогда $0 \leqslant T' \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и линейный функционал ω', определенный равенством

$$\omega'(A) = (T(\mathbb{1} - T)\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega),$$

будет положительным. Но $T' \leqslant T$ и $T' \leqslant \mathbb{1} - T$. Значит, $\omega' \leqslant \omega_1$, $\omega' \leqslant \omega_2$, и условие (1) в сочетании с цикличностью Ω_ω влечет равенство $T(\mathbb{1} - T) = 0$, т. е. T — проектор.

(2) $\Rightarrow$ (1). Вновь с помощью теоремы 2.3.19 выберем положительный оператор $T' \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, для которого

$$\omega'(A) = (T'\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega).$$

Теперь, если $\omega' \leqslant \omega_1$ и $\omega' \leqslant \omega_2$, то $T' \leqslant P$ и $T' \leqslant \mathbb{1} - P$. Но тогда $0 \leqslant PT'P \leqslant P(\mathbb{1} - P)P = 0$ и $0 \leqslant (\mathbb{1} - P)T'(\mathbb{1} - P) \leqslant (\mathbb{1} - P)P(\mathbb{1} - P) = 0$. Следовательно, $(T')^{1/2}P = 0 = (T')^{1/2}(\mathbb{1} - P)$, так что $(T')^{1/2} = 0$. Тем самым $\omega' = 0$ и условие (1) выполняется.

(2) $\Rightarrow$ (3). Если взять $(\mathfrak{H}_1, \pi_1, \Omega_1) = (P\mathfrak{H}_\omega, P\pi_\omega, P\Omega\ )$, то из утверждения теоремы 2.3.16 о единственности следует, что $(\mathfrak{H}_1, \pi_1, \Omega_1) \simeq (\mathfrak{H}_{\omega_1}, \pi_{\omega_1}, \Omega_{\omega_1})$. Аналогично $(\mathfrak{H}_{\omega_2}, \pi_{\omega_2}, \Omega_{\omega_2}) \simeq ((\mathbb{1} - P)\mathfrak{H}_\omega, (\mathbb{1} - P)\pi_\omega, (\mathbb{1} - P)\Omega_\omega)$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть P — ортогональный проектор в $\mathfrak{H}_\omega$ с областью значений $\mathfrak{H}_{\omega_1}$. Тогда ясно, что $P \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, и ω_1, ω_2 связаны с ω так, как утверждается.

Каждое из условий леммы 4.1.19 указывает на определенную независимость функционалов ω_1 и ω_2 друг от друга, которую мы будем называть ортогональностью.

Определение 4.1.20. Если положительные линейные функционалы ω_1, ω_2 на $\mathfrak{A}$ удовлетворяют любому из эквивалентных условий леммы 4.1.19, то их называют *ортогональными* и пишут $\omega_1 \perp \omega_2$.

Пусть μ — положительная регулярная мера Бореля на $E_{\mathfrak{A}}$. Если для любого борелевского $S \subseteq E_{\mathfrak{A}}$

$$\left(\int_S d\mu(\omega')\,\omega'\right) \perp \left(\int_{E_{\mathfrak{A}}\setminus S} d\mu(\omega')\,\omega'\right),$$

то μ называется *ортогональной мерой* на $E_{\mathfrak{A}}$. Множество ортогональных вероятностных мер на $E_{\mathfrak{A}}$ с барицентром ω обозначается $\mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ или просто $\mathcal{O}_\omega$.

Теоремой 2.3.19 было установлено, что если два положительных линейных функционала ω и ω_1 на $\mathfrak{A}$ связаны условием $\omega_1 \leqslant \omega$, то существует такой положительный оператор $T \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, что

$$\omega_1(A) = (T\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\,\Omega_\omega)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Мы получим теперь непрерывный аналог этого результата, который будет нашим первым существенным средством при установлении связи между ортогональными мерами из класса $\mathcal{O}_\omega$ и абелевыми подалгебрами в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$.

Лемма 4.1.21. *Если $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, то существует единственное линейное отображение*

$$\varkappa_\mu\colon f \in L^\infty(\mu) \longmapsto \varkappa_\mu(f) \in \pi_\omega(\mathfrak{A})',$$

удовлетворяющее соотношению

$$(\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega) = \int d\mu(\omega')\,f(\omega')\,\omega'(A).$$

Это отображение является положительным и сжимающим.

Если $L^\infty(\mu)$ снабдить $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$-топологией, а $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ — слабой операторной топологией, то отображение $f \mapsto \varkappa_\mu(f)$ непрерывно.

Доказательство. По $f \in L^\infty(\mu)$ определим линейный функционал b_f на $\mathfrak{A}$, полагая

$$b_f(A) = \int d\mu(\omega')\,f(\omega')\,\omega'(A).$$

Если $A \geqslant 0$, то

$$|b_f(A)| \leqslant \|f\|_\infty \int d\mu(\omega')\,\omega'(A) = \|f\|_\infty\,\omega(A).$$

Кроме того, если $f \geqslant 0$, то b_f положителен. Тем самым при $f \geqslant 0$ теоремой 2.3.19 утверждается существование положительного оператора $\varkappa_\mu(f) \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, для которого

$$b_f(A) = (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega),\quad \|\varkappa_\mu(f)\| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Но каждый элемент $f \in L^\infty(\mu)$ представим как линейная комбинация четырех положительных элементов из $L^\infty(\mu)$, поэтому $\varkappa_\mu(f)$ получается соответствующей суперпозицией. Оценка $\|\varkappa_\mu(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$ следует из общей оценки для b_f.

Далее заметим, что

$$(\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega) = \int d\mu(\omega')\, f(\omega')\, \omega'(A^*B).$$

Поскольку $\pi_\omega(\mathfrak{A})\,\Omega_\omega$ плотно в $\mathfrak{H}_\omega$ и $\|\varkappa_\mu(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$, то $f \longmapsto (\psi, \varkappa_\mu(f)\,\varphi)$ непрерывно в $\sigma(L^\infty, L^1)$-топологии на единичном шаре пространства $L^\infty(\mu)$ при всех $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}_\omega$. Наше утверждение о непрерывности следует теперь из теоремы Крейна—Шмульяна.

Лемма 4.1.19 предоставляет нам три равносильных способа описания свойства ортогональности двух функционалов. Второй из них по существу представляет собой некоторое условие на отображение $\varkappa_\mu$, введенное в лемме 4.1.21, и следующее предложение показывает, что ортогональность меры μ можно выразить в виде алгебраического условия на $\varkappa_\mu$.

Предложение 4.1.22 (теорема Томиты). *Пусть μ — положительная регулярная мера Бореля на $E_{\mathfrak{A}}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *мера μ ортогональна;*

(2) *отображение $f \longmapsto \varkappa_\mu(f)$ задает *-изоморфизм $L^\infty(\mu)$ и $\varkappa_\mu(L^\infty(\mu)) \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$;*

(3) *отображение $f \longmapsto \varkappa_\mu(f)$ есть *-морфизм. Если эти условия выполнены, то*

$$\mathfrak{B} = \{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty(\mu)\}$$

является абелевой подалгеброй фон Неймана в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что μ ортогональна. По лемме 4.1.21 отображение $f \longmapsto \varkappa_\mu(f)$ линейно и положительно. Если f — проектор, то найдется такое борелевское множество $S \subseteq E_{\mathfrak{A}}$, что $f = \chi_S$, индикатору множества S. Но по предположению

$$\int_S d\mu(\omega')\,\omega' + \int_{E_{\mathfrak{A}} \setminus S} d\mu(\omega')\,\omega' = \omega \text{ и } \int_S d\mu(\omega')\,\omega' \perp \int_{E_{\mathfrak{A}} \setminus S} d\mu(\omega')\,\omega'.$$

Значит, согласно лемме 4.1.19, $\varkappa_\mu(f)$ будет проектором. Если f и g — ортогональные проекторы, то $f \leqslant 1 - g$.[1] Следовательно, $\varkappa_\mu(f) \leqslant \mathbb{1} - \varkappa_\mu(g)$ и $\varkappa_\mu(f)\,\varkappa_\mu(g) = 0$. Теперь, если f и g — произвольные проекторы из $L^\infty(\mu)$, то каждая из пар $\{f(1-g), fg\}$, $\{fg, (\mathbb{1}-f)\,g\}$ и $\{f(\mathbb{1}-g), (\mathbb{1}-f)\,g\}$ состоит из ортогональных проекторов. Тем самым из разложений

$$f = fg + f(1-g) \text{ и } g = gf + g(1-f)$$

вытекает, что $\varkappa_\mu(fg) = \varkappa_\mu(f)\,\varkappa_\mu(g)$. Далее, любые элементы $f, g \in L^\infty(\mu)$ можно аппроксимировать по норме линейными комбинациями проекторов, поэтому,

---

[1]) Здесь f и g рассматриваются как элементы алгебры фон Неймана $L^\infty(\mu)$ в пространстве $L^2(\mu)$, а 1 обозначает единицу этой алгебры. — *Прим. перев.*

ввиду оценки $\|\varkappa_\mu(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$, соотношение $\varkappa_\mu(fg) = \varkappa_\mu(f)\varkappa_\mu(g)$ выполняется для всех $f, g \in L^\infty(\mu)$, т. е. $\varkappa_\mu$ является $*$-морфизмом. Наконец, для $f \in L^\infty(\mu)$

$$\|\varkappa_\mu(f)\Omega_\omega\|^2 = (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(\bar{f}f)\Omega_\omega) = \int d\mu(\omega') \, | f(\omega') |^2,$$

так что отображение $\varkappa_\mu$ точное.

(2) $\Rightarrow$ (3). Эта импликация тривиальна.

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что выполнено (3), и рассмотрим произвольное борелевское множество S в $E_{\mathfrak{A}}$. Операторы $\varkappa_\mu(\chi_S)$ и $\varkappa_\mu(\chi_{E_{\mathfrak{A}}\setminus S})$ будут взаимно ортогональными проекторами с суммой $\mathbb{1}$, поэтому, по лемме 4.1.19,

$$\int_S d\mu(\omega')\,\omega' \perp \int_{E_{\mathfrak{A}}\setminus S} d\mu(\omega')\,\omega',$$

т. е. μ ортогональна.

Докажем последнее утверждение предложения. Пусть B_α образуют равномерно ограниченную слабо* сходящуюся сеть элементов из $\mathfrak{B}$ с пределом B. Так как $\varkappa_\mu$ изометрично, сеть $\varkappa_\mu^{-1}(B_\alpha)$ равномерно ограничена в $L^\infty(\mu)$, и у нее должна найтись слабо* сходящаяся подсеть с пределом f. В силу непрерывности $\varkappa_\mu$ должно выполняться равенство $\varkappa_\mu(f) = B$. Следовательно, единичный шар в $\mathfrak{B}$ слабо* замкнут (по теореме 2.4.11).

Рассмотренное предложение позволяет нам частично локализовать ортогональные меры $\mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ в множестве всех мер из $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$.

Следствие 4.1.23. *Если* $\mu \in \mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, *то* $\mu \in \mathcal{E}(M_\omega(E_{\mathfrak{A}}))$.

Доказательство. Предположим, что $\mu \notin \mathcal{E}(M_\omega(E_{\mathfrak{A}}))$. Тогда $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$, где $\mu_1, \mu_2 \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ и $\mu_1 \neq \mu_2$. Поскольку $0 < \mu_1 < 2\mu$, то при некоторой функции h, $0 < h \in L^\infty(\mu)$, должно выполняться равенство $\mu_1 = h\mu$, а так как $\mu_1 \neq \mu$, то $1 - h > 0$. Имеем

$$(\Omega_\omega, \varkappa_\mu(1-h)\pi_\omega(A)\Omega_\omega) = \int d\mu(\omega')(1-h(\omega'))\hat{A}(\omega') = \mu(\hat{A}) - \mu_1(\hat{A}) = 0$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, $\varkappa_\mu(1-h) = 0$. Однако это приводит к заключению, что $1 - h = 0$, в противоречие с установленным выше.

Крайние точки множества $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ обычно называют *симплициальными мерами*. Нетрудно показать, что обладающая конечным носителем мера $\mu = \sum \lambda_i \delta_{\omega_i} \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ симплициальна тогда и только тогда, когда состояния $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ аффинно независимы. Позднее мы получим более общую характеризацию симплициальных мер в том же плане (лемма 4.2.3). Следствие 4.1.23 показывает, что ортогональные меры симплициальны, но в общем понятия ортогональности, максимальности и симплициальности связаны довольно слабо. Для двух несовпадающих максимальных мер $\mu_1, \mu_2 \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ мера $(\mu_1 + \mu_2)/2$ максимальна в $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ (согласно предложению 4.1.14), но не симплициальна.

Если, однако, имеется единственная максимальная мера $\mu_\omega \in$ $\in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, то она симплициальна (в силу того же предложения 4.1.14). В пункте 4.2.1 мы покажем, что из единственности максимальной меры μ_ω следует, что она ортогональна, а потому симплициальна. Далее, отметим, что для $\omega \notin \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ точечная мера δ_ω ортогональна, симплициальна, но не максимальна. Приведем еще один пример симплициальной меры, которая максимальна, но не ортогональна.

Пример 4.1.24. Пусть M_2 — алгебра 2×2-матриц в двумерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_2$. Выберем три единичных вектора ψ_1, ψ_2, ψ_3 так, чтобы каждая пара векторов была линейно независима. Определим состояния ω_1, ω_2, ω^3 на M_2 равенствами $\omega_i(A) = (\psi_i, A\psi_i)$ и введем меру μ с барицентром $\omega =$ $= (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)/3$, положив

$$\mu = \frac{\delta_{\omega_1} + \delta_{\omega_2} + \delta_{\omega_3}}{3}.$$

Сразу же можно убедиться, что μ не ортогональна, но из предложения 4.1.10 следует ее максимальность; сосредоточена μ на множестве чистых состояний $\mathscr{E}(M_2)$ алгебры M_2. Кроме того, $\mu \in \mathscr{E}(M_\omega(E_{M_2}))$. Действительно, предположив противное, мы должны допустить существование такой меры $\mu_1 \in M_\omega(E_{M_2})$, что $0 < \mu_1 < 2\mu$, но это невозможно, в силу аффинной независимости состояний ω_1, ω_2, ω_3.

После этих предварительных рассмотрений обратимся к проблеме характеризации ортогональных мер в терминах абелевых алгебр и проекторов.

Теорема 4.1.25. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей. Существует взаимно-однозначное соответствие между следующими тремя множествами:*

множеством всех ортогональных мер $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$;

множеством всех абелевых подалгебр фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$;

множеством всех ортогональных проекторов P в $\mathfrak{H}_\omega$, таких что

$$P\Omega_\omega = \Omega_\omega,\ P\pi_\omega(\mathfrak{A})P \subseteq \{P\pi_\omega(\mathfrak{A})P\}'.$$

Если μ, $\mathfrak{B}$, P соответствуют друг другу, то

(1) $\mathfrak{B} = \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup P\}'$;

(2) $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$;

(3) $\mu(\hat{A}_1\hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1)P\pi_\omega(A_2)P \ldots P\pi_\omega(A)_n\Omega_\omega)$;

(4) *алгебра $\mathfrak{B}$ является *-изоморфной образу $L^\infty(\mu)$ при отображении $\varkappa_\mu$: $f \in L^\infty(\mu) \mapsto \varkappa_\mu(f) \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, которое задается соотношением*

$$(\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f)\pi_\omega(A)\Omega_\omega) = \int d\mu(\omega')f(\omega')\hat{A}(\omega'),$$

и для $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\varkappa_\mu(\hat{A})\pi_\omega(B)\Omega_\omega = \pi_\omega(B)P\pi_\omega(A)\Omega_\omega.$$

Замечание. В дополнение к четырем соотношениям, указанным в теореме, существует и прямой способ построения μ по заданной алгебре $\mathfrak{B}$; мы опишем его в лемме 4.1.26. Кроме того, соответствие между $\mathfrak{B}$ и P остается в силе, даже если $\mathfrak{A}$ не имеет единицы, потому что единицу всегда можно присоединить.

Доказательство. Предложение 4.1.22 позволяет сопоставить каждой ортогональной мере абелеву подалгебру фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, а именно

$$\mathfrak{B} = \{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty(\mu)\}.$$

Если $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$ и $B = B^* \in \mathfrak{B}$, то $BP = PBP = (PBP)^* = PB$, так что $\mathfrak{B} \subseteq P'$. Далее, если $f \in L^\infty(\mu)$ и $A \in \mathfrak{A}$, то

$$(\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\varkappa_\mu(\widehat{A})\,\Omega_\omega) = (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f\widehat{A})\,\Omega_\omega) = \mu(f\widehat{A}) = (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega).$$

Поэтому $\varkappa_\mu(\widehat{A})\,\Omega_\omega = P\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega$; повторно применяя $\varkappa_\mu(\widehat{A}_i)$ и используя тот факт, что $\varkappa_\mu(\widehat{A})\,P = P\varkappa_\mu(\widehat{A})$, придем к равенству

$$\varkappa_\mu(\widehat{A}_1)\ \ldots\ \varkappa_\mu(\widehat{A}_n)\,\Omega_\omega = P\pi_\omega(A_1)\,P\ \ldots\ P\pi_\omega(A_n)\,\Omega_\omega.$$

Это дает нам

$$\begin{aligned}\mu(\widehat{A}_1\widehat{A}_2\ \ldots\ \widehat{A}_n) &= (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(\widehat{A}_1\widehat{A}_2\ \ldots\ \widehat{A}_n)\,\Omega_\omega)\\ &= (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(\widehat{A}_1)\,\varkappa_\mu(\widehat{A}_2)\ \ldots\ \varkappa_\mu(\widehat{A}_n(\Omega_\omega) =\\ &= (\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A_1)\,P\pi_\omega(A_2)\,P\ \ldots\ P\pi_\omega(A_n)\,\Omega_\omega),\end{aligned}$$

т. е. свойства (3) и (4), указанные в теореме, справедливы при надлежащем выборе P и $\mathfrak{B} \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup P\}'$.

Теперь предположим, что задана абелева подалгебра фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Если $\mathfrak{N}$ — конечномерная подалгебра фон Неймана в $\mathfrak{B}$, то она порождается некоторым конечным семейством $P_1, P_2, \ldots, P_n$ взаимно ортогональных проекторов, и с $\mathfrak{N}$ можно связать ортогональную меру $\mu_{\mathfrak{N}}$ по правилу, уже указанному во введении к разделу:

$$\lambda_i = (\Omega_\omega,\ P_i\Omega_\omega),\ \ \lambda_i\omega_i(A) = (P_i\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\,\Omega_\omega),\ \ \mu_{\mathfrak{N}} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{\omega_i}.$$

Заметим, что вектор Ω_ω, циклический для $\pi_\omega(\mathfrak{A})$, будет отделяющим для $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, согласно предложению 2.5.3, так что $\lambda_i > 0$. Выкладка, проведенная во введении, показывает, что

$$\mu_{\mathfrak{N}}(\widehat{A}_1\widehat{A}_2\ \ldots\ \widehat{A}_m) = (\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A_1)\,P_{\mathfrak{N}}\pi_\omega(A_2)\,P_{\mathfrak{N}}\ \ldots\ P_{\mathfrak{N}}\pi_\omega(A_m)\,\Omega_\omega)$$

при всех $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathfrak{A}$, где $P_{\mathfrak{N}} = [\mathfrak{N}\Omega_\omega]$. Подчеркнем, что в силу этой формулы все $P_{\mathfrak{N}}\pi_\omega(A)\,P_{\mathfrak{N}}$ коммутируют. Аналогичное свойство операторов $P_{\mathfrak{B}}\pi_\omega(A)\,P_{\mathfrak{B}}$ устанавливается с помощью аппроксимации, опирающейся на второе утверждение следующей леммы.

Лемма 4.1.26. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — абелева подалгебра фон Неймана в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, а $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — конечномерные* *подалгебры фон Неймана в* $\mathfrak{B}$. *Пусть* $\mu_{\mathfrak{M}}$ *и* $\mu_{\mathfrak{N}}$ *обозначают ассоциированные с* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *ортогональные меры, введенные, как указано в предыдущем абзаце. Если* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, *то* $\mu_{\mathfrak{N}} \prec \mu_{\mathfrak{M}}$.

При упорядочении по включению подалгебры $\mathfrak{N}$ *образуют направленное множество, и сеть* $\mu_{\mathfrak{N}}$ *сходится в* $\sigma\left(C(E_{\mathfrak{A}})^*, C(E_{\mathfrak{A}})\right)$-*топологии к ортогональной мере* $\mu_{\mathfrak{B}}$, *причем*

$$\mu_{\mathfrak{B}}(\widehat{A}_1\widehat{A}_2 \ldots \widehat{A}_n) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1) P_{\mathfrak{B}} \pi_\omega(A_2) P_{\mathfrak{B}} \ldots P_{\mathfrak{B}} \pi_\omega(A_n) \Omega_\omega) \quad (*)$$

при всех $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$; *здесь* $P_{\mathfrak{B}} = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$.

Доказательство. Алгебры $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ порождаются конечными семействами $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ взаимно ортогональных проекторов. Если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, то каждый $P_i \in \mathfrak{N}$ имеет вид

$$P_i = \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} Q_j.$$

Полагая $\lambda_i = (\Omega_\omega, P_i\Omega_\omega)$ и $\lambda'_j = (\Omega_\omega, Q_j\Omega_\omega)$, имеем

$$\lambda_i = \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} \lambda'_j.$$

Обсуждение свойств мер $\mu_{\mathfrak{N}}$, $\mu_{\mathfrak{M}}$, предшествующее лемме, указывает на наличие представлений

$$\mu_{\mathfrak{N}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i}, \quad \mu_{\mathfrak{M}} = \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j \delta_{\omega_j},$$

где состояния ω_i и ω'_j связаны соотношением

$$\lambda_i \omega_i = \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} \lambda'_j \omega'_j.$$

Теперь простыми выкладками с использованием выпуклости и определения отношения порядка $\prec$ устанавливается, что $\mu_{\mathfrak{N}} \prec \mu_{\mathfrak{M}}$.

Далее, заметим, что

$$\mu_{\mathfrak{N}}(\widehat{A}_1\widehat{A}_2 \ldots \widehat{A}_n) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1) P_{\mathfrak{N}} \pi_\omega(A_2) P_{\mathfrak{N}} \ldots P_{\mathfrak{N}} \pi_\omega(A_n) \Omega_\omega),$$

где $P_{\mathfrak{N}} = [\mathfrak{N}\Omega_\omega]$. Сеть $P_{\mathfrak{N}}$ сходится слабо, а потому и сильно к $P_{\mathfrak{B}} = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$. Поэтому

$$\lim_{\mathfrak{N}} \mu_{\mathfrak{N}}(\widehat{A}_1\widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_n) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1) P_{\mathfrak{B}} \pi_\omega(A_2) P_{\mathfrak{B}} \ldots P_{\mathfrak{B}} \pi_\omega(A_n) \Omega_\omega.$$

Но $\widehat{A}_i$ разделяют точки $E_{\mathfrak{A}}$, следовательно, полиномы от $\widehat{A}_i$ плотны в $C(E_{\mathfrak{A}})$ по норме, в силу теоремы Стоуна—Вейерштрасса. Тем самым сеть $\mu_{\mathfrak{N}}$ сходится в слабой* топологии, т. е. $\sigma\left(C(E_{\mathfrak{A}})^*, C(E_{\mathfrak{A}})\right)$-топологии, а слабая* компактность $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ гарантирует, что пределом окажется мера $\mu_{\mathfrak{B}} \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, удовлетворяющая требуемому соотношению (∗). Поскольку

$$\mu_{\mathfrak{B}}(\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\hat{A}_4) = \mu_{\mathfrak{B}}(\hat{A}_1\hat{A}_3\hat{A}_2\hat{A}_4),$$

мы можем заключить, что операторы $P_{\mathfrak{B}}\pi_\omega(A)P_{\mathfrak{B}}$ коммутируют на $P_{\mathfrak{B}}\mathfrak{H}_\omega$.

Отметим, что тем самым установлено соответствие между $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и проекторами $P_{\mathfrak{B}}$ того типа, который указан при описании третьего из множеств, фигурирующих в теореме 4.1.25. Теперь покажем, что если P — произвольный проектор этого типа, то соотношениями

$$\mu(\hat{A}_1\hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n) = (\Omega_\omega \pi_\omega(A_1) P\pi_\omega(A_2) P \ldots P\pi_\omega(A_n)\Omega_\omega) \qquad (**)$$

определяется ортогональная мера. Этим будет получено соотношение (3) упомянутой теоремы, а также завершено доказательство леммы.

Для демонстрации того, что (∗∗) задает непрерывный положительной линейный функционал μ на $C(E_{\mathfrak{A}})$, рассмотрим гельфандовское представление $C(K)$ абелевой C^*-алгебры, порожденной $P\pi_\omega(\mathfrak{A})P$. Если $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — полином, то

$$\begin{aligned}
|(\Omega_\omega, F(P\pi_\omega(A_1)P, \ldots, P\pi_\omega(A_n)P)\Omega_\omega)| &\leqslant \\
\leqslant \|F(P\pi_\omega(A_1)P, \ldots, P\pi_\omega(A_n)P)\| \\
= \sup_{\varphi\in K} |F((P\pi_\omega(A_1)P)(\varphi), \ldots, (P\pi_\omega(A_n)P)(\varphi))| &\leqslant \\
\leqslant \sup_{\varphi\in E_{\mathfrak{A}}} |F(\hat{A}_1(\varphi), \ldots, \hat{A}_n(\varphi))|.
\end{aligned}$$

Последняя оценка верна, так как $A \longmapsto (P\pi_\omega(A)P)(\varphi)$ при каждом $\varphi \in K$ является состоянием на $\mathfrak{A}$. По теореме Стоуна—Вейерштрасса найдется такая линейная функция μ на $C(E_{\mathfrak{A}})$, что

$$\mu(F(\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_n)) = (\Omega_\omega, F(P\pi_\omega(A_1)P, \ldots, P\pi_\omega(A_n)P)\Omega_\omega)$$

для полиномов F. Поскольку $\mu(\hat{1}) = (\Omega_\omega, P\Omega_\omega) = 1$ и $\|\mu\| \leqslant 1$ согласно полученной выше оценке, μ оказывается в силу предложения 2.3.11 положительной мерой Радона. Остается доказать ортогональность μ.

Для этого сначала заметим, что

$$\mu(\hat{A}_1\hat{A}_2) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1)P\pi_\omega(A_2)\Omega_\omega) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1)\varkappa_\mu(\hat{A}_2)\Omega_\omega),$$

где $\varkappa_\mu$ — отображение, введенное в лемме 4.1.21. Используя цикличность, получаем

$$\varkappa_\mu(\hat{A})\Omega_\omega = P\pi_\omega(A)\Omega_\omega$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Но в таком случае

$$\begin{aligned}
(\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1)\varkappa_\mu(\hat{A}_2)\varkappa_\mu(\hat{A}_3)\Omega_\omega) &= (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_2)P\pi_\omega(A_1)P\pi_\omega(A_3)\Omega_\omega) \\
&= \mu(\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1)\varkappa_\mu(\hat{A}_2\hat{A}_3)\Omega_\omega).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\varkappa_\mu(\hat{A}_2)\varkappa_\mu(\hat{A}_3) = \varkappa_\mu(\hat{A}_2\hat{A}_3)$ и при всех $A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$

$$\varkappa_\mu(\hat{A}_2\hat{A}_3)\Omega_\omega = P\pi_\omega(A_2)P\pi_\omega(A_3)\Omega_\omega.$$

Последовательно повторяя это рассуждение, придем к равенству

$$\varkappa_{\mu}(\widehat{A}_1\widehat{A}_2 \ldots \widehat{A}_n) = \varkappa_{\mu}(\widehat{A}_1)\varkappa_{\mu}(\widehat{A}_2) \ldots \varkappa_{\mu}(\widehat{A}_n);$$

следовательно, для всякого полинома $\mathscr{P}$

$$\varkappa_{\mu}(\mathscr{P}(\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_n)) = \mathscr{P}(\varkappa_{\mu}(\widehat{A}_1), \varkappa_{\mu}(\widehat{A}_2), \ldots, \varkappa_{\mu}(\widehat{A}_n)).$$

Но $\|\varkappa_{\mu}(f)\| \leqslant \|f\|_{\infty}$ при всех $f \in L^{\infty}(\mu)$, так что, вторично применив теорему Стоуна—Вейерштрасса, а затем теорему Капланского о плотности, получим

$$\varkappa_{\mu}(fg) = \varkappa_{\mu}(f)\varkappa_{\mu}(g)$$

при всех $f, g \in L^{\infty}(\mu)$. Таким образом, μ ортогональна, согласно предложению 4.1.22.

Конец доказательства теоремы 4.1.25. Для элементов μ, $\mathfrak{B}$, P трех множеств, указанных в теореме, мы уже определили, как задаются соответствия $\mu \longmapsto \mathfrak{B}_{\mu}$, $\mathfrak{B} \longmapsto P_{\mathfrak{B}}$ и $P \longmapsto \mu_P$. Остается показать, что эти отображения согласованы, т. е. что, пройдя по такой цепочке, мы вернемся к исходной мере. Соображения, высказанные в начале доказательства, обосновывают равенство

$$\mu(\widehat{A}_1\widehat{A}_2 \ldots \widehat{A}_n) = \left(\Omega_{\omega}, \pi_{\omega}(A_1) P_{\mathfrak{B}_{\mu}} \pi_{\omega}(A_2) P_{\mathfrak{B}_{\mu}} \ldots P_{\mathfrak{B}_{\mu}} \pi_{\omega}(A_2) \Omega_{\omega}\right),$$

а согласно лемме 4.1.26

$$\mu_{P_{\mathfrak{B}_{\mu}}}(\widehat{A}_1\widehat{A}_2 \ldots \widehat{A}_n) = \left(\Omega_{\omega}, \pi_{\omega}(A_1) P_{\mathfrak{B}_{\mu}} \pi_{\omega}(A_2) P_{\mathfrak{B}_{\mu}} \ldots P_{\mathfrak{B}_{\mu}} \pi_{\omega}(A_n) \Omega_{\omega}\right).$$

Заключительный шаг — применение теоремы Стоуна—Вейерштрасса — дает нам требуемое совпадение мер и показывает, что три наши множества находятся во взаимно-однозначном соответствии.

Единственное не доказанное еще соотношение — это соотношение (1) в теореме 4.1.25. Начиная доказательство, мы проверили, что $\mathfrak{B} \subseteq \{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup P\}'$. Но если $C \in \{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup P\}'$, то

$$C\Omega_{\omega} = CP\Omega_{\omega} = PC\Omega_{\omega} \in [\mathfrak{B}\Omega_{\omega}].$$

Значит, $C \in \mathfrak{B}$ и $\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup P\}' \subseteq \mathfrak{B}$, как показывает следующая

Лемма 4.1.27. *Пусть $\mathfrak{M}$ — абелева алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с отделяющим вектором Ω. Пусть $\mathfrak{N}$ — абелева подалгебра фон Неймана в $\mathfrak{M}$. Тогда для $A \in \mathfrak{M}$ из условия $A\Omega \in [\mathfrak{N}\Omega]$ следует, что $A \in \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Если $P = [\mathfrak{N}\Omega]$, то соответствие $B \in \mathfrak{N} \longmapsto BP$ определяет *-изоморфизм. Вектор Ω — циклический и отделяющий для $\mathfrak{N}P$ в $[\mathfrak{N}\Omega]$. Согласно предложению 2.5.9, существует замкнутый оператор Q, присоединенный к $\mathfrak{N}$, такой что $\Omega \in D(Q) = D(Q^*)$ и $A\Omega = Q\Omega$. Тогда для любого $A' \in \mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{N}'$ имеем

$$AA'\Omega = A'A\Omega = A'Q\Omega = QA'\Omega,$$

т. е. $A|_{\mathfrak{M}'\Omega} = Q|_{\mathfrak{M}'\Omega}$. Поскольку Ω цикличен для $\mathfrak{M}'$ (предложение 2.5.3) и Q замкнут, то Q ограничен и $A = Q$.

Теорема 4.1.25 приводит множество ортогональных мер $\mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ в прямое соответствие с множеством абелевых алгебр фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и с множеством проекторов $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$. Каждое из этих множеств обладает естественным упорядочением, и мы хотим показать, что указанные соответствия сохраняют порядок.

Теорема 4.1.28. *Пусть* μ *и* ν *— ортогональные меры на* $E_{\mathfrak{A}}$ *с барицентром* ω, *а* $\mathfrak{B}_\mu$, P_μ *и* $\mathfrak{B}_\nu$, P_ν *— отвечающие им согласно теореме* 4.1.25 *абелевы подалгебры в* $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ *и ортогональные проекторы. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mu \succ \nu$;

(2) $\mathfrak{B}_\mu \supseteq \mathfrak{B}_\nu$;

(3) $P_\mu \geqslant P_\nu$;

(4) $\mu(|\widehat{A} - \mu(\widehat{A})|^2) \geqslant \nu(|\widehat{A} - \nu(\widehat{A})|^2)$, $A \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Мы докажем, что (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (4). Это очевидно, так как $\mu(\widehat{A}) = \nu(\widehat{A}) = \widehat{A}(\omega)$ и $\widehat{A}^*\widehat{A}$ — выпуклая функция.

(4) $\Rightarrow$ (3). Справедливо соотношение

$$\mu(\widehat{A}^*\widehat{A}) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A^*) P_\mu \pi_\omega(A) \Omega_\omega) = (\pi_\omega(A)\Omega_\omega, P_\mu\pi_\omega(A)\Omega_\omega).$$

Но $\mu(\widehat{A}^*\widehat{A}) \geqslant \nu(\widehat{A}^*\widehat{A})$, поэтому

$$(\pi_\omega(A)\Omega_\omega, P_\mu\pi_\omega(A)\Omega_\omega) \geqslant (\pi_\omega(A)\Omega_\omega, P_\nu\pi_\omega(A)\Omega_\omega)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Поскольку Ω_ω — циклический вектор для $\pi_\omega(\mathfrak{A})$, отсюда следует, что $P_\mu \geqslant P_\nu$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Вектор Ω_ω — циклический для $\pi_\omega(\mathfrak{A})$, а значит, в силу предложения 2.5.3, отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Из леммы 4.1.27 вытекает, что

$$\mathfrak{B}_\mu = \{B;\ B \in \pi_\omega(\mathfrak{A})',\ B\Omega_\omega \in P_\mu\mathfrak{H}\},$$

и аналогично устроена алгебра $\mathfrak{B}_\nu$. Следовательно, $P_\mu \geqslant P_\nu$ влечет $\mathfrak{B}_\mu \supseteq \mathfrak{B}_\nu$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Согласно предложению 4.1.26, множество мер $\mu_{\mathfrak{N}}$ образует возрастающую сеть (по отношению к упорядочению $\prec$), когда $\mathfrak{N}$ пробегает множество всех конечномерных подалгебр в $\mathfrak{B}_\mu$, и пределом этой сети в слабой* топологии является μ. Поэтому можно выбрать $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{B}_\mu$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}_\mu$ так, чтобы $\mu_{\mathfrak{N}} \succ \mu_{\mathfrak{M}}$ и $\mu_{\mathfrak{N}} \to \mu$, $\mu_{\mathfrak{M}} \to \nu$. Переходя к пределу, заключаем, что $\mu \succ \nu$.

Теорема 4.1.28 не только отождествляет упорядочения в трех множествах, рассмотренных в теореме 4.1.25, она также показывает, что упорядочение $\prec$ на ортогональных мерах согласуется с упорядочением их среднеквадратичных уклонений Δ_μ, Δ_ν, где

$$\Delta_\mu(A) = \sqrt{\mu(|\widehat{A} - \mu(\widehat{A})|^2)}\,;$$

величины Δ_μ выступают как естественный показатель разброса мер μ вокруг средних значений $\mu(A) = \omega(A)$. Бо̀льшая (в смысле отношения $\prec$) мера имеет и больший разброс. Так как мы рассматриваем меры μ и ν с фиксированным барицентром, то $\mu(\widehat{A}) = \omega(A) = \nu(\widehat{A})$ и соотношение $\Delta_\mu(A) \geqslant \Delta_\nu(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, равносильно соотношению

$$\mu(\widehat{A}^*\widehat{A}) \geqslant \nu(\widehat{A}^*\widehat{A})$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Далее, если $A = A_1 + iA_2$, где A_1, A_2 самосопряжены, то

$$\mu(\widehat{A}^*\widehat{A}) = \mu(\widehat{A}_1^2) + \mu(\widehat{A}_2^2),$$

поэтому указанное выше соотношение равносильно также соотношению

$$\mu(\widehat{A}^2) \geqslant \nu(\widehat{A}^2)$$

при всех $A = A^* \in \mathfrak{A}$. Так как множество $\{\widehat{A};\ A = A^* \in \mathfrak{A}\}$ в точности совпадает с множеством вещественных аффинных непрерывных функций на $E_\mathfrak{A}$, то естественно возникает вопрос, всегда ли упорядочение $\succ$ можно охарактеризовать подобным образом. Отрицательный ответ на этот вопрос дает приводимый ниже пример 4.1.29. Таким образом, совпадение упорядочения $\succ$ с упорядочением среднеквадратичных уклонений оказывается специфическим свойством ортогональных мер.

Пример 4.1.29. Пусть шестиугольник K представляет собой выпуклую оболочку двух равносторонних треугольников с общим центром O, расположенных, как показано на рис. 1. Если вероятностная мера μ сосредоточена в точках A, B, C, причем $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$, а вероятностная мера ν сосредоточена в D, E, F и $\nu(D) = \nu(E) = \nu(F)$, то μ и ν имеют общий барицентр, а именно общий центр O двух наших равносторонних треугольников. Если расстояние от середины отрезка BC до вершины F достаточно мало, то можно проверить, что $\mu(f^2) \geqslant \nu(f^2)$ для всех $f \in A(K)$. Тем не менее μ и ν не сравнимы относительно $\succ$, так как обе меры максимальны.

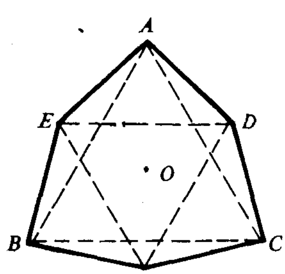

Рис. 1

Заметим еще, что очевидным следствием теоремы 4.1.28 является такое утверждение: мера μ максимальна в множестве ортогональных мер $\mathcal{O}_\omega(E_\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда соответствующая абелева алгебра фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ будет максимальной абелевой подалгеброй. В этом случае μ будет также максимальна и в множестве $M_\omega(E_\mathfrak{A})$ всех мер с барицентром ω [1].

4.1.4. Борелевская структура пространства состояний

Проведенное в пункте 4.1.2 рассмотрение барицентрического разложения точек выпуклого компактного множества K показало, что чрезвычайно важны свойства измеримости множества крайних точек $\mathscr{E}(K)$ по отношению к мерам на K. В этом пункте мы обсудим подобные свойства в случае, когда K есть $E_\mathfrak{A}$, пространство состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей. Оно образует выпуклое слабо* компактное подмножество сопряженного к $\mathfrak{A}$ пространства $\mathfrak{A}^*$, а его крайние точки — точки $\mathscr{E}(E_\mathfrak{A})$ — в точности совпадают с чистыми состояниями.

Сперва заметим, что если $\mathfrak{A}$ сепарабельна, то $E_\mathfrak{A}$ метризуемо. В самом деле, с помощью последовательности $\{A_n\}_{n\geq 1}$, плотной в единичном шаре $\mathfrak{A}$, можно ввести метрику d на $E_\mathfrak{A}$:

$$d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n\geq 1} \frac{|(\omega_1 - \omega_2)(A)|}{2^n}.$$

Так как множество $E_\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathfrak{A}^*$, то легко видеть, что слабая* топология на $E_\mathfrak{A}$ совпадает с топологией, определяемой этой метрикой. В результате можно заключить (на основании теоремы 4.1.11), что множество чистых состояиий $\mathscr{E}(E_\mathfrak{A})$ является G_δ-подмножеством в $E_\mathfrak{A}$.

Для произвольиой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, как и в случае крайних точек произвольного выпуклого множества, множество чистых состояний может быть весьма патологическим. Сначала мы приведем ряд примеров. Первый из них демонстрирует ситуацию, в которой множество чистых состояний обладает полезным свойством замкнутости.

Пример 4.1.30. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ абелева. Тогда $\mathscr{E}(E_\mathfrak{A})$ будет множеством характеров на $\mathfrak{A}$, в силу предложения 2.3.27. Следовательно, $\mathscr{E}(E_\mathfrak{A})$ замкнуто в $E_\mathfrak{A}$, и тем самым крайние точки заведомо образуют борелевское множество. Хотя $\mathscr{E}(E_\mathfrak{A})$ не обязано быть бэровским множеством, применив теорему Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала к $\mathfrak{A} = C(\mathscr{E}(E_\mathfrak{A}))$, мы

[1] См. Henrichs R. W. On decomposition theory for unitary representations of locally compact groups. J. Funct. Anal., 1979, 31, 101—114. — *Прим. авторов к русскому изданию.*

получим единственное разложение всякого состояния ω на $\mathfrak{A}$ по чистым состояниям:

$$\omega(A) = \int d\mu_0(\omega')\,\widehat{A}(\omega').$$

Так как множество $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ борелевское, можно отождествить единственную регулярную максимальную меру Бореля $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ с мерой Рисса, положив $\mu(B) = \mu_0(B \cap \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}))$ для любого борелевского $B \subseteq E_{\mathfrak{A}}$.

Предыдущий пример можно обобщить. Назовем C^*-алгебру *n-мерно однородной*, или *однородной степени n*, если все ее неприводимые представления n-мерны. Например, C^*-алгебра абелева тогда и только тогда, когда она одномерно однородна. Всякая n-мерно однородная C^*-алгебра локально устроена как $M_n \otimes C(K) = C(M_n, K)$, где K — компактное множество, а M_n — полная матричная алгебра $n \times n$-матриц. Множество чистых состояний n-мерно однородной C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ замкнуто в $E_{\mathfrak{A}}$, и обратно, «почти верно», что из замкнутости $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ в $E_{\mathfrak{A}}$ следует представимость $\mathfrak{A}$ в виде конечной прямой суммы n-мерно однородных C^*-алгебр. Оговорка «почти» необходима из-за примеров типа

$$\mathfrak{A} = \left\{ f;\ f \in C(M_2;\ [0, 1]),\ f(0) \in \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Однако верно, что $\mathfrak{A}$ является конечной прямой суммой однородных по размерности алгебр, если $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ компактно, а его подмножество, состоящее из характеров, открыто в $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$; см. замечания и комментарии в конце главы.

Следующий пример призван показать, что множество чистых состояний вовсе не обязательно замкнуто; фактически оно даже может быть плотным в пространстве всех состояний.

Пример 4.1.31. Пусть $\mathfrak{A}$ — РГФ-алгебра (см. пример 2.6.12 и последующее примечание). Это значит, что $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{A}_n},$$

где $\{\mathfrak{A}_n\}_{n \geq 1}$ — возрастающая последовательность полных матричных алгебр, имеющих общую единицу. Мы утверждаем, что множество чистых состояний $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ слабо* плотно в $E_{\mathfrak{A}}$. Для доказательства плотности достаточно показать, что сужение произвольного состояния ω на всякую подалгебру $\mathfrak{A}_n$ обладает продолжением до чистого состояния на $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}_n = M_{[n]}$ — алгебра $[n] \times [n]$-матриц[1], то по теореме 2.4.21 существует положительный оператор $\rho \in M_{[n]}$ с $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$, такой что

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A),\quad A \in M_{[n]}.$$

[1] Здесь $n \in \mathbb{N} \mapsto [n] \in \mathbb{N}$ — возрастающая функция. — *Прим. перев.*

Выберем $m > n$ столь большим, чтобы $[m] > [n]^2$. Поскольку единица у M_m и M_n общая, число $[m]/[n]$ должно быть целым и $M_{[m]} = M_{[m]/[n]} \otimes M_{[n]}$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{[n]}$ образуют ортонормированный базис для $l^2(1, \ldots, [n])$, причем $\rho\xi_i = \lambda_i\xi_i$, а $\eta_1, \ldots, \eta_{[m]/[n]}$ образуют ортонормированный базис для $l^2(1, \ldots, [m]/[n])$. Тогда

$$M_{[m]} = \mathscr{L}(l^2(1, \ldots, [n])) \otimes \mathscr{L}(l^2(1, \ldots, [m]/[n])).$$

Рассмотрим векторное состояние ω_1 на $M_{[m]}$, определяемое вектором

$$\Omega = \sum_{i=1}^{[n]} \lambda_i^{1/2}\xi_i \otimes \eta_i.$$

Для $A = A \otimes \mathbb{1} \in M_{[n]}$ имеем

$$\omega_1(A) = \sum_{i=1}^{[n]} \sum_{j=1}^{[n]} \lambda_i^{1/2}\lambda_j^{1/2}(\xi_i \otimes \eta_i, A\xi_j \otimes \eta_j) = \sum_{i=1}^{[n]} \lambda_i(\xi_i, A\xi_i) = \operatorname{Tr}(\rho A) = \omega(A).$$

Следовательно, ω_1 является продолжением ω на $M_{[m]} \subseteq \mathfrak{A}$. Но ω_1 — чистое состояние на $M_{[m]}$, поэтому его можно продолжить до чистого состояния на $\mathfrak{A}$, согласно предложению 2.3.24.

Этот пример отнюдь не из ряда вон выходящий. В доказательстве предложения 2.6.15 было показано, что если C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет точное неприводимое представление π в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со свойством

$$\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{A}) = \{0\},$$

то векторные в этом представлении состояния плотны в $E_{\mathfrak{A}}$. Следовательно $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ плотно в $E_{\mathfrak{A}}$. Более общим образом, $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ будет плотно в $E_{\mathfrak{A}}$ также и в случае, когда ни в одном из неприводимых представлений $\pi(\mathfrak{A})$ не содержит компактных операторов. Алгебры такого типа называют *антилиминальными*. Квазилокальные алгебры, встречающиеся в математической физике, примером которых служат РГФ-алгебры, всегда антилиминальны.

После этих подготовительных примеров рассмотрим ситуацию, когда подмножества пространства состояний обладают хорошими свойствами измеримости. Предположения, сформулированные в следующем определении, мотивированы по существу структурой локально-нормальных состояний квазилокальной алгебры, обсуждавшихся нами в разделе 2.6. Эти предположения лежат в основе первого подхода к преодолению трудностей, возникающих при разложении состояний и связанных с проблемами измеримости. Второй подход основан на более слабом предположении о сепарабельности пространства представления, ассоциированного с изучаемым состоянием; ему посвящен раздел 4.4.

Определение 4.1.32 Пусть $\mathfrak{C}$ обозначает C^*-алгебру с единицей, а F — некоторое подмножество пространства состояний $E_{\mathfrak{C}}$.

Будем говорить, что F удовлетворяет *условию сепарабельности* S, если существует такая последовательность $\{\mathfrak{C}_n\}_{n\geqslant 1}$, состоящая из C^*-подалгебр $\mathfrak{C}$, что $\bigcup_{n\geqslant 1}\mathfrak{C}_n$ плотно в $\mathfrak{C}$, каждая $\mathfrak{C}_n$ содержит замкнутый двусторонний сепарабельный идеал $\mathfrak{J}_n$ и

$$F=\left\{\omega;\ \omega\in E_{\mathfrak{C}},\ \left\|\omega\middle|_{\mathfrak{J}_n}\right\|=1,\ n\geqslant 1\right\}.$$

Простейшее применение это определение находит, когда $\mathfrak{C}$ сепарабельна и $\mathfrak{J}_n=\mathfrak{C}$ при всех $n\geqslant 1$. В таком случае пространство состояний $E_{\mathfrak{C}}$ метризуемо и борелевская структура на $E_{\mathfrak{C}}$ совпадает с бэровской. Мы собираемся изучить эти две структуры для подмножеств $F\subseteq E_{\mathfrak{C}}$, удовлетворяющих условию S, но предварительно нам потребуется

Лемма 4.1.33. *Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый двусторонний идеал C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Если ω — состояние на $\mathfrak{A}$, то существует, и притом только одно, состояние $\tilde{\omega}$ на $\mathfrak{A}$, которое является продолжением ω. Если $(\mathfrak{H}_{\tilde{\omega}},\ \pi_{\tilde{\omega}},\ \Omega_{\tilde{\omega}})$ — циклическое представление $\mathfrak{A}$, ассоциированное с $\tilde{\omega}$, то $\pi_{\tilde{\omega}}(\mathfrak{J})$ сильно плотно в $\pi_{\tilde{\omega}}(\mathfrak{A})''$.*

Доказательство. Можно считать, что $\mathfrak{A}$ имеет единицу $\mathbb{1}$. Существование продолжения $\tilde{\omega}$ для ω следует из предложения 2.3.24. Согласно предложению 2.3.11, существует аппроксимативная единица $\{E_\alpha\}$ для $\mathfrak{J}$, такая что

$$\lim_\alpha \omega\left(E_\alpha^2\right)=\lim_\alpha \omega\left(E_\alpha\right)=1=\tilde{\omega}(\mathbb{1}).$$

Если $A\in\mathfrak{A}$, то

$$|\tilde{\omega}(E_\alpha A-A)|=|\tilde{\omega}((\mathbb{1}-E_\alpha)A|\leqslant\tilde{\omega}((\mathbb{1}-E_\alpha)^2)^{1/2}\,\tilde{\omega}(A^*A)^{1/2}\to 0$$

при $\alpha\to\infty$. Следовательно,

$$\tilde{\omega}(A)=\lim_\alpha\tilde{\omega}(E_\alpha A)=\lim_\alpha\omega(E_\alpha A),$$

и эта формула показывает, что продолжение $\tilde{\omega}$ единственно.

Теперь, воспользовавшись предельным свойством $\{E_\alpha\}$, получаем, что $\lim_\alpha \pi_{\tilde{\omega}}\left(E_\alpha\right)\Omega_{\tilde{\omega}}=\Omega_{\tilde{\omega}}$. Таким образом, $\lim_\alpha\pi_{\tilde{\omega}}(AE_\alpha)\Omega_{\tilde{\omega}}=\pi_{\tilde{\omega}}(A)\Omega_{\tilde{\omega}}$ при всех $A\in\mathfrak{A}$, поэтому $\pi_{\tilde{\omega}}(\mathfrak{J})\Omega_{\tilde{\omega}}$ плотно в $\mathfrak{H}_{\tilde{\omega}}$. Если $A\in\mathfrak{A}$ и $B\in\mathfrak{J}$, то

$$\pi_{\tilde{\omega}}\left(AE_\alpha\right)\pi_{\tilde{\omega}}(B)\,\Omega_{\tilde{\omega}}=\pi_{\tilde{\omega}}(A)\,\pi_{\tilde{\omega}}\left(E_\alpha A\right)\Omega_{\tilde{\omega}}\to\pi_{\tilde{\omega}}(A)\,\pi_{\tilde{\omega}}(B)\,\Omega_{\tilde{\omega}}$$

при $\alpha\to\infty$. Отсюда видно, что $\pi_{\tilde{\omega}}\left(AE_\alpha\right)$ сходится сильно к $\pi_{\tilde{\omega}}(A)$, так что $\pi_{\tilde{\omega}}(\mathfrak{J})''=\pi_{\tilde{\omega}}(\mathfrak{A})''$.

Теперь мы можем заняться условием сепарабельности S.

Предложение 4.1.34. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{C}$ имеет единицу, и пусть $F\subseteq E_{\mathfrak{C}}$ удовлетворяет условию сепарабельности S. При этих предположениях*

(1) *F является устойчивой гранью $E_{\mathfrak{C}}$;*

(2) *F — бэровское множество;*

(3) *крайние точки множества F образуют бэровское подмножество, и существует выпуклая непрерывная функция f на $E_{\mathfrak{C}}$, такая что*

$$\mathscr{E}(F) = \partial_f\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap F,$$

где $\partial_f\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$ — граничное множество, ассоциированное с f;

(4) *если $\omega \in F$, то гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\omega$ соответствующего представления сепарабельно.*

Доказательство. Сначала докажем свойство (2). Пусть $\{A_{n,k}\}_{k\geqslant 1}$ — счетное плотное подмножество в единичном шаре множества самосопряженных элементов идеала $\mathfrak{J}_n$, $n \geqslant 1$. Состояние ω принадлежит F тогда и только тогда, когда

$$\sup_{k\geqslant 1} \omega(A_{n,k}) = 1, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$F = \bigcap_{n,\, m\geqslant 1} V_{n,m}, \quad \text{где} \quad V_{n,m} = \bigcup_{p\geqslant 1} V_{n,m,p},$$

$$V_{n,m,p} = \bigcap_{q\geqslant 1} \left\{\omega;\ \omega \in E_{\mathfrak{C}},\ \omega(A_{n,p}) > 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{q}\right\}$$

$$= \left\{\omega;\ \omega \in E_{\mathfrak{C}},\ \omega(A_{n,p}) \geqslant 1 - \frac{1}{m}\right\}.$$

Ясно, что $V_{n,m,p}$ замкнуто, и, значит, будучи счетным пересечением открытых множеств, оно является компактным множеством типа G_δ. Следовательно, F — бэровское множество.

Затем докажем свойство (1). (Понятие устойчивой грани было введено в замечании после доказательства теоремы 4.1.11.) Множество F обладает этим свойством тогда и только тогда, когда из условий $\omega \in F$ и $\mu \succ \delta_\omega$ следует, что мера μ сосредоточена на множестве F. Но если $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где μ_1 сосредоточена на $V_{n,m}$, а μ_2 — на его дополнении, то

$$\omega(A_{n,k}) = \mu_1(\widehat{A}_{n,k}) + \mu_2(\widehat{A}_{n,k}) \leqslant (1 - \|\mu_2\|) + \|\mu_2\|(1 - 1/m) = 1 - \|\mu_2\|/m.$$

Поскольку $\sup_k \omega(A_{n,k}) = 1$, то с необходимостью $\|\mu_2\| = 0$, так что $\mu(F) = 1$.

Обратимся теперь к доказательству свойства (3). Пусть $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ обозначает линейное пространство вещественных двойных последовательностей, снабженное топологией поточечной сходимости. Зададим отображение $t: E_{\mathfrak{C}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ формулой

$$t(\omega) = \{\widehat{A}_{n,k}(\omega)\}_{n,\, k\geqslant 1}.$$

Отображение t аффинно и непрерывно, поэтому образом $E_{\mathfrak{C}}$ будет компактное выпуклое подмножество пространства $[-1, 1]^{\mathbb{N}^2}$. Последнее пространство метризуемо и сепарабельно, поэтому теми же свойствами обладает и $t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$. Можно, например, снабдить $t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$ метрикой

$$d(t(\omega_1), t(\omega_2)) = \sum_{n,\, k\geqslant 1} 2^{-k-n} \,|\, \widehat{A}_{n,k}(\omega_1 - \omega_2) \,|.$$

В соответствии с теоремой 4.1.11 и замечанием после ее доказательства, множество $\mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right)$ борелевское. Но метризуемость и компактность $t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$ гарантируют, что борелевские и бэровские множества совпадают. Итак, $\mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right)$ — бэровское множество. Поскольку t непрерывно, а $E_{\mathfrak{C}}$ компактно, можно утверждать, что множество $t^{-1}\left(\mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right)\right)$ бэровское. Покажем, что

$$t^{-1}\left(\mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right)\right) \cap F = \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap F,$$

откуда будет следовать, что множество $\mathscr{E}(F) = \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap F$ бэровское. Для доказательства выписанного равенства прежде всего заметим, что $t(F)$ — грань для $t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$. Действительно, $t(F)$ состоит из двойных последовательностей, которые при каждом n принимают значения, сколь угодно близкие к 1, при возрастании k, так что свойство грани выполнено. Важно также заметить, что сужение t на F точно. В самом деле, семейство $\{A_{n,k}\}_{n,k\geq 1}$ отделяет сужения на $\bigcup_n \mathfrak{F}_n$ состояний $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$. Но каждое $\omega \in F$ единственным образом определяется своим сужением на $\bigcup_n \mathfrak{F}_n$, в силу леммы 4.1.33 и предположений, сделанных в определении 4.1.32. Значит, отображение $t|_F$ точно.

Далее, всякое $\omega \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap F$ будет крайней точкой в F, а $t(\omega)$ — крайней точкой в $t(F)$, так как t, суженное на F, точно. Но $t(F)$ — грань для $t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$, следовательно, $t(\omega) \in \mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right)$, т. е. $\mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap F \subseteq t^{-1}\left(\mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right)\right) \cap F$. В обратную сторону, если $\omega \in t^{-1}\left(\mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right)\right) \cap F$, то $t(\omega) \in \mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right) \cap t(F) = \mathscr{E}(t(F))$, так как $t(F)$ — грань. Но поскольку сужение t на F точно, то $t(\mathscr{E}(F)) = \mathscr{E}(t(F))$ и поэтому $t^{-1}\left(\mathscr{E}\left(t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right)\right) \cap F \subseteq \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap F$.

Наконец, вследствие метризуемости и сепарабельности $t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$, на $t\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$ существует строго выпуклая непрерывная функция g. Процедура построения такой g описана в доказательстве теоремы 4.1.1. Определим на $E_{\mathfrak{C}}$ функцию f соотношением

$$f(\omega) = g(t(\omega)), \quad \omega \in E_{\mathfrak{C}}.$$

Ясно, что f выпукла, непрерывна и, более того, строго выпукла на F, ибо $t|_F$ — аффинный изоморфизм F. Отсюда вытекает, что если $\omega \in F$, но $\omega \notin \mathscr{E}(F)$, то $\omega \notin \partial_f\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$, т. е.

$$\mathscr{E}(F) \supseteq \partial_f\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap F.$$

Совпадение этих множеств следует теперь из предложения 4.1.10 и соотношения $\mathscr{E}(F) = \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap F$.

Остается доказать свойство (4). Если $\omega \in F$, то $\pi_\omega(\mathfrak{F}_n)\Omega_\omega$ плотно в $\pi_\omega(\mathfrak{C}_n)\Omega_\omega$, согласно последнему утверждению леммы 4.1.33. Поскольку $\bigcup_n \mathfrak{C}_n$ плотно в $\mathfrak{C}$, то $\left(\bigcup_n \pi_\omega(\mathfrak{F}_n)\right)\Omega_\omega$ плотно в $\mathfrak{H}_\omega$, следовательно, $\mathfrak{H}_\omega$ сепарабельно.

Простейший случай, когда применимо предложение 4.1.34, — это случай, когда $\mathfrak{C}$ сепарабельна и $F = E_{\mathfrak{C}}$. Предыдущий результат тогда содержится в теореме 4.1.11 и ее доказательстве. Менее тривиальный случай описан в следующем примере.

Пример 4.1.35. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана и $N_{\mathfrak{M}} = E_{\mathfrak{M}} \cap \mathfrak{M}_*$ — множество ее нормальных состояний.

(1) $N_{\mathfrak{M}}$ — *грань в* $E_{\mathfrak{M}}$.

Мы должны показать, что если $\varphi \in E_{\mathfrak{M}}$ и $\varphi < \lambda\omega$, где $\omega \in N_{\mathfrak{M}}$, то $\varphi \in N_{\mathfrak{M}}$. Но по теореме 2.3.19 существует такой оператор $T \in \pi_\omega(\mathfrak{M})'_+$, что $\varphi(A) = (T\Omega_\omega, \pi_\omega(A)T\Omega_\omega)$. Остается воспользоваться нормальностью представления π_ω.

(2) *$N_{\mathfrak{M}}$ плотно в $E_{\mathfrak{M}}$.*

Это следует из предложения 3.2.10.

(3) *$N_{\mathfrak{M}}$ замкнуто в топологии нормы, и $N_{\mathfrak{M}}$ секвенциально полно в слабой* топологии.*

Поскольку $\mathfrak{M}_*$—банахово пространство, первое утверждение очевидно. Второе мы не станем доказывать (см. замечания и комментарии).

(4) *Если $\mathfrak{M}$ — фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве, то эквивалентны следующие условия:*

(I) *$N_{\mathfrak{M}}$ — устойчивая грань в $E_{\mathfrak{M}}$;*

(II) *$\mathfrak{M}$ — фактор типа I, т. е. $\mathfrak{M} \simeq \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ для некоторого $\mathfrak{H}$.*

Если эти условия выполнены, то $\mathscr{E}(N_{\mathfrak{M}})$ будет бэровским подмножеством в $E_{\mathfrak{M}}$. Если они не выполнены, то существует такое борелевское подмножество $G \subset E_{\mathfrak{M}}$, что

а) *на G сосредоточены все максимальные в $M_+(E_{\mathfrak{M}})$ меры,*

б) $G \cap N_{\mathfrak{M}} = \varnothing$.

Доказательство. (II) $\Rightarrow$ (I). Если $\mathfrak{M} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, то

$$N_{\mathfrak{M}} = \{\omega \in E_{\mathfrak{M}};\ \|\omega|_{\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})}\| = 1\},$$

согласно предложению 2.6.14. Значит, $N_{\mathfrak{M}}$— устойчивая грань и множество $\mathscr{E}(N_{\mathfrak{M}})$ — бэровское, в силу предложения 4.1.34. В этом случае, как легко видеть, $\mathscr{E}(N_{\mathfrak{M}})$ в точности совпадает с множеством векторных состояний на $\mathfrak{M} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$.

(I) $\Rightarrow$ (II). Поскольку $\mathfrak{M}$ — фактор в сепарабельном пространстве, его единичный шар $\mathfrak{M}_1$ метризуем в слабой топологии, и, так как этот шар компактен в слабой топологии, его положительная часть $\mathfrak{M}_{1+}$ содержит счетное плотное семейство $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$. Но тогда $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ отделяет точки в $N_{\mathfrak{M}}$, поэтому функция $f \in S(E_{\mathfrak{M}})$, заданная формулой

$$f(\omega) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\omega(A_n)^2,$$

строго выпукла на $N_{\mathfrak{M}}$. Следовательно,

$$\partial_f(E_{\mathfrak{M}}) \cap N_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathscr{E}(N_{\mathfrak{M}}) = \mathscr{E}(E_{\mathfrak{M}}) \cap N_{\mathfrak{M}};$$

последнее равенство следует из того, что $N_{\mathfrak{M}}$ — грань для $E_{\mathfrak{M}}$. Но если фактор $\mathfrak{M}$ не принадлежит к типу I, он не имеет нормальных чистых состояний, как показывают предложение 2.4.22 и теорема 2.4.24. В самом деле, если ω — чистое нормальное состояние $\mathfrak{M}$, то $\pi_\omega(\mathfrak{M}) \simeq \mathfrak{M}$, $\pi_\omega(\mathfrak{M}) = \pi_\omega(\mathfrak{M})''$ и $\pi_\omega(\mathfrak{M})'' = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\omega)$, так что $\mathfrak{M} \simeq \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\omega)$. Значит, $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{M}}) \cap N_{\mathfrak{M}} = \varnothing$. Кроме того, по теореме 4.1.7 все максимальные вероятностные меры на $E_{\mathfrak{M}}$ сосредоточены на

$G = \partial_f (E_{\mathfrak{M}})$, и, так как $G \cap N_{\mathfrak{M}} = \varnothing$, множество $N_{\mathfrak{M}}$ не может быть устойчивой гранью.

Из утверждения (4) можно вывести следующее утверждение:

(5). *Пусть* $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_n \mathfrak{A}_n}$ — *квазилокальная алгебра. Если каждая алгебра* $\mathfrak{A}_n$ *имеет вид* $\mathfrak{A}_n = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_n)$, *причем все* $\mathfrak{H}_n$ *сепарабельны, то локально-нормальные состояния на* $\mathfrak{A}$ *образуют бэровское подмножество в* $E_{\mathfrak{A}}$, *служащее его устойчивой гранью. Если каждая* $\mathfrak{A}_n$ *является фактором в сепарабельном гильбертовом пространстве, и притом фактором не типа* I, *то множество локально-нормальных состояний не образует устойчивой грани; оно содержится в некотором борелевском множестве, имеющем меру нуль для всякой минимальной меры.*

Всё предыдущее рассмотрение было нацелено на характеризацию свойств множества чистых состояний C^*-алгебры. Такие свойства играют главную роль при изучении барицентрического разложения состояния по чистым состояниям. Но представляют интерес и другие типы разложений; так, может возникнуть потребность представить ω в виде суперпозиции факторных состояний, т. е. состояний, для которых алгебра фон Неймана $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — фактор. Таким образом, надо изучить и свойства множества факторных состояний на $\mathfrak{A}$. Одним из методов получения информации о таких множествах состояний является погружение $\mathfrak{A}$ в бóльшую C^*-алгебру $\mathfrak{C}$, выбранную так, чтобы чистые состояния на $\mathfrak{C}$ при сужении на $\mathfrak{A}$ оказывались фактор-состояииями $\mathfrak{A}$. Тогда полученную нами информацию о чистых состояниях на $\mathfrak{C}$ можно перевести в информацию о факторных состояниях $\mathfrak{A}$. Для применения этого метода необходимы некоторые дополнительные сведения из теории меры.

Пусть K — отделимое компактное пространство и μ — положительная мера Радона на K. Подмножество $E \subseteq K$ называется μ-*пренебрежимым*, если существует такое борелевское F, что $E \subseteq F$ и $\mu(F) = 0$. Далее, множество $E \subseteq K$ называют μ-*измеримым*, если найдется такое борелевское F, что $(E \cup F) \setminus (E \cap F)$ будет μ-пренебрежимым. Ясно, что μ-измеримые множества образуют σ-алгебру и μ можно продолжить до меры на этой σ-алгебре, положив $\mu(E) = \mu(F)$.

Множества типа $F_{\sigma\delta}$, или $F_{\sigma\delta}$-*множества*, — это подмножества в K, представимые в виде счетного пересечения счетных объединений замкнутых множеств. Подмножество $E \subseteq K$ называется *аналитическим*, если существуют отделимое компактное пространство G, $F_{\sigma\delta}$-подмножество $B \subseteq G$ и непрерывное отображение $f: B \to K$, такие что $f(B) = E$. Множество $\mathscr{A}$ аналитических подмножеств в K содержит все борелевские множества и замкнуто относительно взятия счетных объединений и счетных пересечений. Но $\mathscr{A}$ не замкнуто относительно операции перехода к дополнению множества. В действительности, если $E \in \mathscr{A}$ и $K \setminus E \in \mathscr{A}$, то множество E борелевское. Полезным свойством аналитических множеств является их μ-измеримость для всякой регулярной меры Бореля μ на K. Кроме того, для аналитических множеств E выполняется соотношение

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(U),\ E \subseteq U,\ U \text{ открыто}\}\\ &= \sup\{\mu(V),\ V \subseteq E,\ V \text{ компактно}\}.\end{aligned}$$

Поскольку $\mu(K) < +\infty$, отсюда следует, что найдутся такие G_δ-множество G и F_σ-множество F, что $F \subseteq E \subseteq G$ и $\mu(G \setminus F) = 0$, т. е. $G \setminus E$ и $E \setminus F$ будут μ-пренебрежимы.

Наконец, если μ — положительная мера Радона, то мы говорим, что μ *сосредоточена* на μ-измеримом множестве E, если $\mu(E) = \mu(K)$. Этим определением понятие множества сосредоточения меры распространяется на множества более общие, чем борелевские.

Все эти понятия мы привлечем, исследуя отображения множества состояний C^*-алгебры в множество состояний ее C^*-подалгебры. Некоторые наиболее очевидные факты резюмирует.

Лемма 4.1.36. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{C}$ и ее C^*-подалгебра $\mathfrak{A}$ имеют общий единичный элемент. Определим отображение сужения r: $E_{\mathfrak{C}} \to E_{\mathfrak{A}}$ формулой $(r\omega)(A) = \omega(A)$, $A \in \mathfrak{A}$. Тогда если F — бэровское (соотв. борелевское) подмножество в $E_{\mathfrak{A}}$, то $r^{-1}(F)$ является бэровским (соотв. борелевским) подмножеством в $E_{\mathfrak{C}}$. Наоборот, если G — борелевское подмножество в $E_{\mathfrak{C}}$, то $r(G)$ — аналитическое подмножество в $E_{\mathfrak{A}}$.*

Далее, пусть $\tilde{\mu}$ — положительная регулярная мера Бореля на $E_{\mathfrak{C}}$ и на борелевских подмножествах $F \subseteq E_{\mathfrak{A}}$ задана мера μ соотношением

$$\mu(F) = \tilde{\mu}(r^{-1}(F)).$$

В таком случае μ — регулярная мера Бореля на $E_{\mathfrak{A}}$. Для всякого μ-измеримого $F \subseteq E_{\mathfrak{A}}$ прообраз $r^{-1}(F) \subseteq E_{\mathfrak{C}}$ будет $\tilde{\mu}$-измерим. Далее, если G — борелевское подмножество в $E_{\mathfrak{C}}$, то

$$\mu(r(G)) \geqslant \tilde{\mu}(G).$$

Следовательно, если $\tilde{\mu}$ сосредоточена на G, то μ сосредоточена на $r(G)$, а фактически даже на некотором F_σ-подмножестве в $r(G)$.

Все утверждения леммы вытекают из сделанных ранее замечаний и того факта, что отображение сужения r непрерывно, если $E_{\mathfrak{C}}$ и $E_{\mathfrak{A}}$ снабжены своими слабыми* топологиями.

Этот пункт мы завершим описанием свойств отображения r при определенных предположениях о взаимосвязи $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$. А именно, нас интересуют условия, при которых r осуществляет связь между чистыми состояниями на $\mathfrak{C}$ и факторными состояниями на $\mathfrak{A}$. Следующее предложение будет полезно в дальнейшем при обсуждении экстремальных и центральных разложений состояния.

Предложение 4.1.37. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две C^*-подалгебры C^*-алгебры $\mathfrak{C}$. Предположим, что $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ имеют общую единицу, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ порождает $\mathfrak{C}$ как C^*-алгебру. Отображение сужения $r: E_{\mathfrak{C}} \to E_{\mathfrak{A}}$, задаваемое формулой $(r\omega)(A) = \omega(A)$ при всех $A \in \mathfrak{A}$, отображает $E_{\mathfrak{C}}$ на $E_{\mathfrak{A}}$ и является слабо*-слабо* непрерывным. Далее,*

$$\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}) \subseteq r(\mathscr{E}(E_{\mathfrak{C}})) \subseteq F_{\mathfrak{A}},$$

где $F_{\mathfrak{A}}$ обозначает множество факторных состояний $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{B}$ абелева, то $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}) = r(\mathscr{E}(E_{\mathfrak{C}}))$.

Доказательство. Непрерывность r очевидна. Из предложения 2.3.24 следует, что r является отображением *на* и $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}) \subseteq r(\mathscr{E}(E_{\mathfrak{C}}))$.

Пусть ω — чистое состояние на $\mathfrak{C}$, а $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ — ассоциированное циклическое представление. Так как $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ и $\pi_\omega(\mathfrak{B})$ порождают неприводимое множество $\pi_\omega(\mathfrak{C})$, то

$$\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \pi_\omega(\mathfrak{B})\}'' = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\omega).$$

Пусть проектор P принадлежит $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Так как $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{B})'$, то $P \in \pi_\omega(\mathfrak{B})'$ и поэтому $P \in \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \pi_\omega(\mathfrak{B})\}' = \pi(\mathfrak{C})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$. Следовательно, $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$, а значит, $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — фактор. Но отображение $A \longmapsto \pi_\omega(A)[\pi_\omega(\mathfrak{A})\Omega_\omega]$ совпадает с представлением $\mathfrak{A}$, ассоциированным с состоянием $r\omega$, так что $r\omega$ — факторное состояние $\mathfrak{A}$.

Наконец, если $\mathfrak{B}$ абелева, то $\mathfrak{B}$ содержится в центре $\mathfrak{C}$. Тогда для $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{C}})$

$$\pi_\omega(\mathfrak{B}) \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{C}) \cap \pi_\omega(\mathfrak{C})' = \mathbb{C}\mathbb{1}.$$

Поскольку $\pi_\omega(\mathfrak{C})$ совпадает с C^*-алгеброй, порожденной $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ и $\pi_\omega(\mathfrak{B})$, мы имеем $\pi_\omega(\mathfrak{A}) = \pi_\omega(\mathfrak{C})$, следовательно, $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ — неприводимый набор операторов. Тем самым $r\omega$ — чистое состояние и $r(\mathscr{E}(E_{\mathfrak{C}})) \subseteq \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$. Обратное включение уже было доказано, так что $r(\mathscr{E}(E_{\mathfrak{C}})) = \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$.

4.2. Экстремальные, центральные и субцентральные разложения

4.2.1. Экстремальные разложения

В этом разделе мы применим общую теорию, развитую в предыдущем разделе, к некоторым определенным типам разложений состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей. Начнем с изучения *экстремальных разложений* состояния ω на $\mathfrak{A}$, т. е. разложений по чистым состояниям.

Экстремальные разложения ω строятся с помощью ортогональных мер, описанных в пункте 4.1.3. Теорема 4.1.25 сопоставляет каждой абелевой подалгебре фон Неймана $\mathfrak{B}$ в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ ортогональную меру $\mu_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, а теорема 4.1.28 утверждает, что максимальной абелевой $\mathfrak{B}$ соответствует максимальная $\mu_{\mathfrak{B}}$ в в $\mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$. Последний результат не оптимален, и можно в дополнение к нему показать, что $\mu_{\mathfrak{B}}$ псевдососредоточена на $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$. Тем самым при некоторых весьма общих условиях, скажем для всех сепарабельных $\mathfrak{A}$, можно заключить, что максимальные ортогональные меры максимальны в $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ и сосредоточены на $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$. На этом пути мы и приходим к разложению искомого типа.

Для того чтобы получить эту уточненную характеризацию максимальных ортогональных мер, мы сначала рассмотрим простейшую ситуацию, когда алгебра $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ абелева, и убедимся, что соответствующая $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ ортогональная мера действительно максимальна. Никакие добавочные предположения об $\mathfrak{A}$ при этом не нужны. Затем, опираясь на этот результат и привлекая отображение сужения, введенное в пункте 4.1.4, мы установим результаты для более общих ситуаций, когда $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ неабелева. Даже в случае абелевой $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ изложение несколько пространно, потому что приходится заниматься сравнением ортогональных мер с неортогональными. А для целей эффективного сравнения необходимо более глубокое, чем требовалось ранее, понимание порядковой структуры, определяемой отношением $\prec$.

Следующий результат дает характеризацию отношения $\prec$ в общем контексте выпуклых компактных множеств. Он показывает, что две меры μ и ν сравнимы тогда и только тогда, когда они сравнимы покомпонентно.

Предложение 4.2.1 (теорема Картье—Фелла—Мейера). *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого пространства, а μ, $\nu \in M_\omega(K)$ — меры с барицентром ω. Следующие условия эквивалентны;*

(1) $\nu \prec \mu$;

(2) *для всякой выпуклой комбинации*

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i$$

с $\nu_i \in M_{\omega_i}(K)$ существует соответствующая выпуклая комбинация

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

с $\mu_i \in M_{\omega_i}(K)$;

(3) *выполнено условие (2), и вдобавок все $\mu_i \succ \nu_i$.*

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (2) очевидным образом.

(1) $\Rightarrow$ (3). Сперва зададим отображение p из $C(K)^n$ в $\mathbb{R}$ формулой

$$p(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i(\bar{f}_i),$$

где $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Очевидно, что p однородно, а по лемме 4.1.9 оно также субаддитивно.

Далее, пусть Y обозначает подпространство в $C(K)^n$, образованное векторами вида $\boldsymbol{f} = (f, f, \ldots, f)$. Определим линейный функционал φ на Y, положив $\varphi(\boldsymbol{f}) = \mu(f)$. Так как $\nu \prec \mu$, то, согласно предложению 4.1.6, $\nu(\bar{f}) \geqslant \mu(\bar{f}) \geqslant \mu(f)$. Поэтому

$$\varphi(\boldsymbol{f}) \leqslant \nu(\bar{f}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i(\bar{f}) = p(\boldsymbol{f}).$$

Из теоремы Хана — Банаха следует, что φ обладает непрерывным линейным продолжением на $C(K)^n$, и если сохранить за ним обозначение φ, то $\varphi(\boldsymbol{f}) \leqslant p(\boldsymbol{f})$. В явном виде имеем

$$-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i\left(\overline{(-f_i)}\right) \leqslant \varphi(\boldsymbol{f}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i(\bar{f}_i). \qquad (*)$$

Теперь, для $f_i \geqslant 0$ также и $-\overline{(-f_i)} \geqslant 0$, так что функционал φ положителен, причем

$$|\varphi(\boldsymbol{f})| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f_i\|_\infty.$$

Введем μ_k равенством

$$\lambda_k \mu_k(f) = \varphi(\boldsymbol{f}_k),$$

где $\boldsymbol{f}_k$ — вектор с k-й компонентой, равной f, и с нулевыми остальными компонентами. Из $(*)$ вытекает, что $\mu_k(1) = 1$ (здесь 1 в левой части обозначает функцию, тождественно равную единице) и, значит, μ_k — вероятностная мера. Далее, имеем

$$\mu_k(f) \leqslant \nu_k(\bar{f}).$$

Но если $f \in S(K)$, то $\overline{(-f)} = -f$, поэтому

$$\mu_k(f) \geqslant \nu_k(f).$$

Таким образом, $\mu_k \succ \nu_k$. Наконец, выбрав $\boldsymbol{f} = (f, f, \ldots, f)$, получим

$$\mu(f) = \varphi(\boldsymbol{f}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(f).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Возьмем $f \in S(K)$ и рассмотрим все конечные разбиения $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ компакта K на бэровские множества U_i. Пусть χ_i обозначает индикатор множества U_i, а λ_i и ν_i определены соотношениями $\lambda_i = \nu(U_i)$ и $\lambda_i d\nu_i = \chi_i d\nu$. Тогда $\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i$ и по предположению существует разложение $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$, такое что у мер μ_i и ν_i общий барицентр ω_i. Согласно предложению 4.1.1, каждую μ_i можно аппроксимировать мерами с конечным носителем и тем же барицентром ω_i. Используя выпуклость и совершая соответствующий предельный переход, получаем

$$f(\omega_i) \leqslant \mu_i(f).$$

Кроме того,

$$\nu_i(f) \leqslant f(\omega_i) + \sup_{\omega \in U_i} |f(\omega_i) - f(\omega)|.$$

Поэтому

$$\nu(f) \leqslant \mu(f) + \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{\omega \in U_i} |f(\omega_i) - f(\omega)|.$$

Наконец, для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно подобрать U_i так же, как в доказательстве предложения 4.1.1, с тем чтобы обеспечить выполнение неравенства $\nu(f) \leqslant \mu(f) + \varepsilon$. Следовательно, $\nu \prec \mu$.

Теперь воспользуемся этим результатом, чтобы частично охарактеризовать отношение порядка $\succ$ на пространстве состояний C^*-алгебры. Если мера μ симплициальна, т. е. $\mu \in \mathscr{E}(M_\omega(E_{\mathfrak{A}}))$ при некотором $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$, то следующее предложение вполне характеризует соотношение $\mu \succ \nu$ через включение соответствующих множеств операторов $\varkappa_\mu(f)$, $\varkappa_\nu(f) \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$.

Предложение 4.2.2. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей, а μ, ν — две меры из $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$. Пусть $L^\infty_{1+}(\mu)$ обозначает положительную часть единичного шара в $L^\infty(\mu)$. Рассмотрим два условия:*

(1) $\mu \succ \nu$;

(2) $\{\varkappa_\mu(g);\ g \in L^\infty_{1+}(\mu)\} \supseteq \{\varkappa_\nu(f);\ f \in L^\infty_{1+}(\nu)\}$.

Всегда (1) *влечет* (2), *а если $\mu \in \mathscr{E}(M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, то и* (2) *влечет* (1).

Доказательство. Предположим, что $\mu \succ \nu$, и возьмем $f \in L^\infty_{1+}(\nu)$. Введем ν_1 и ν_2 формулами

$$\nu_1(g) = \frac{\nu(fg)}{\nu(f)}, \quad \nu_2(g) = \frac{\nu((1-f)g)}{\nu(1-f)}.$$

Тогда $\nu = \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2$, где $\lambda = \nu(f)$. Поэтому, в силу предложения 4.2.1, существует такое разложение $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$, что μ_i и ν_i имеют общий барицентр ω_i. Так как $\lambda\mu_i \leqslant \mu$, найдется такая функция $g \in L^\infty_{1+}(\mu)$, что $\lambda d\mu_1 = g d\mu$. Далее, имеем

$$(\Omega_\omega,\ \varkappa_\nu(f)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega) = \nu(f\hat{A}) = \lambda\nu_1(\hat{A}) = \lambda\mu_1(\hat{A})$$
$$= \mu(g\hat{A}) = (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(g)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Поэтому $\varkappa_\nu(f) = \varkappa_\mu(g)$ (ввиду цикличности), т. е. условие (2) выполнено.

Для доказательства обратной импликации необходимо применить свойства симплициальных мер. Следующая лемма дает достаточно полную характеризацию таких мер, и хотя содержащаяся в ней информация далеко не вся используется в доказательстве предложения 4.2.2, тем не менее она представляет самостоятельный интерес.

Лемма 4.2.3. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей, и пусть $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ — вероятностная мера с барицентром ω. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mu \in \mathscr{E}(M_\omega(E_{\mathfrak{A}}))$;

(2) *отображение $f \in L^\infty(\mu) \to \varkappa_\mu(f) \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ точно;*

(3) *множество аффинных непрерывных функций на $E_{\mathfrak{A}}$ плотно в $L^1(\mu)$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (3). Если условие (3) нарушается, то найдется функция $f \in L^\infty(\mu)$, для которой $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $\mu(f\hat{A}) = 0$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. В частности, $\mu(f) = 0$. Введем $\mu_{1\pm f}$ по формуле

$$\mu_{1\pm f}(g) = \mu((1 \pm f) g).$$

Тогда $\mu_{1\pm f}(\hat{A}) = \mu(\hat{A}) = \omega(A)$. Поэтому $\mu_{1\pm f} \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ и

$$\mu = \frac{\mu_{1+f} + \mu_{1-f}}{2},$$

т. е. условие (1) нарушается.

(3) $\Rightarrow$ (2). Если бы отображение $f \longmapsto \varkappa_\mu(f)$ не было точным, то можно было бы указать ненулевую f, для которой оператор $\varkappa_\mu(f)$ равен нулю, а значит,

$$\mu(f\hat{A}) = (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f)\, \pi_\omega(A)\, \Omega_\omega) = 0$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Тем самым аффинные функции не были бы плотны в $L^1(\mu)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если $\mu \notin \mathscr{E}(M_\omega(E_{\mathfrak{A}}))$, то $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$, где μ_1, μ_2 — две несовпадающие меры из $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$. Поскольку $\mu_1 \leqslant 2\mu$, найдется ненулевая $f \in L^\infty(\mu)$, для которой $\mu_1(g) = \mu((1 + f) g)$. Тогда имеем

$$\omega(A) = \mu_1(\hat{A}) = \mu(\hat{A}) + \mu(f\hat{A}) = \omega(A) + (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f)\, \pi_\omega(A)\, \Omega_\omega).$$

Вследствие цикличности $\varkappa_\mu(f) = 0$, так что (2) нарушается.

Конец доказательства предложения 4.2.2. Предположим, что выполнено (2) и $\mu \in \mathscr{E}(M_\omega(E_{\mathfrak{A}}))$. Пусть $\nu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_i$ — выпуклая комбинация вероятностных мер ν_i. Так как $\lambda_i \nu_i \leqslant \nu$, то существуют $f_i \in L^\infty_{1+}(\nu)$, такие что $\lambda_i d\nu_i = f_i\, d\nu$. Ясно, что $\sum_{i=1}^n f_i = 1$. Выберем такие $g_i \in L^\infty_{1+}(\mu)$, что $\varkappa_\mu(g_i) = \varkappa_\nu(f_i)$, и определим μ_i соотношениями $\lambda_i d\mu_i = g_i d\mu$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_i \hat{A}(b(\mu_i)) &= \lambda_i \mu_i(\hat{A}) = \mu(g_i \hat{A}) = (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(g_i)\, \pi_\omega(A)\, \Omega_\omega) \\ &= (\Omega_\omega, \varkappa_\nu(f_i)\, \pi_\omega(A)\, \Omega_\omega) = \nu(f_i \hat{A}) = \lambda_i \nu_i(\hat{A}) = \lambda_i \hat{A}(b(\nu_i)). \end{aligned}$$

Значит, $b(\mu_i)$ и $b(\nu_i)$, барицентры мер μ_i и ν_i, совпадают. Однако

$$\mathbb{1} = \varkappa_\nu\left(\sum_{i=1}^n f_i\right) = \sum_{i=1}^n \varkappa_\nu(f_i) = \sum_{i=1}^n \varkappa_\mu(g_i) = \varkappa_\mu\left(\sum_{i=1}^n g_i\right).$$

Теперь применим лемму 4.2.3; отображение $\varkappa_\mu$ точно, так как $\mu \in \mathscr{E}(M_\omega(E_{\mathfrak{A}}))$. Поэтому $\sum_{i=1}^n g_i = 1$ и $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$. С помощью предложения 4.2.1 сразу же получаем соотношение $\mu \succ \nu$.

Теперь мы подошли к первому из основных результатов этого пункта — к характеризации единственности максимальных мер, имеющих барицентром заданное состояние.

Теорема 4.2.4. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей и $P = [\pi_\omega(\mathfrak{A})'\Omega_\omega]$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) существует единственная максимальная вероятностная мера μ с барицентром ω;

(2) коммутант $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ абелев;

(3) $P\pi_\omega(\mathfrak{A})P$ порождает абелеву алгебру фон Неймана.

Если эти условия выполнены, то μ окажется ортогональной мерой, отвечающей алгебре $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$.

Доказательство. Эквивалентность условий (2) и (3) вытекает из соображений, высказанных в пункте 4.1.3. Теоремой 4.1.25 установлено, что, когда $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ абелев, $P\pi_\omega(\mathfrak{A})P$ порождает абелеву алгебру, и наоборот. Таким образом, достаточно проверить эквивалентность условий (1) и (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть μ — ортогональная мера, соответствующая $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Согласно предложению 4.1.22, отображение $\varkappa_\mu$: $f \in L^\infty(\mu) \longmapsto \varkappa_\mu(f) \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ является $*$-изоморфизмом и

$$\pi_\omega(\mathfrak{A})' = \{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty(\mu)\}.$$

Это отображение автоматически изометрично, поэтому

$$(\pi_\omega(\mathfrak{A})')_{1+} = \{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty_{1+}(\mu)\},$$

где $(\pi_\omega(\mathfrak{A})')_{1+}$ обозначает положительную часть единичного шара в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Если $\nu \in M_\omega(E_\mathfrak{A})$, то

$$\{\varkappa_\nu(g);\ g \in L^\infty_{1+}(\nu)\} \subseteq (\pi_\omega(\mathfrak{A})')_{1+} \subseteq \{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty_{1+}(\mu)\}.$$

Но $\mu \in \mathscr{E}(M_\omega(E_\mathfrak{A}))$, в силу следствия 4.1.23, так что $\nu \prec \mu$, согласно предложению 4.2.2. Таким образом, μ — единственная максимальная мера в $M_\omega(E_\mathfrak{A})$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Если μ — единственная максимальная мера в $M_\omega(E_\mathfrak{A})$, то $\mu \in \mathscr{E}(M_\omega(E_\mathfrak{A}))$, как видно из рассуждений, проведенных после следствия 4.1.23. Пусть $\nu \in \mathscr{O}_\omega(E_\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}_\nu$ — соответствующая абелева подалгебра фон Неймана в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$; тогда

$$(\mathfrak{B}_\nu)_{1+} = \{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty_{1+}(\nu)\} \subseteq \{\varkappa_\mu(g);\ g \in L^\infty_{1+}(\mu)\};$$

равенство было обосновано при доказательстве импликации (2) $\Rightarrow$ (1), а включение следует из предложения 4.2.2, так как $\nu \prec \mu$. Поскольку это включение справедливо для всех $\nu \in \mathscr{O}_\omega(E_\mathfrak{A})$, мы делаем вывод, что

$$(\pi_\omega(\mathfrak{A})')_{1+} = \bigcup_{\nu \in \mathscr{O}_\omega} (\mathfrak{B}_\nu)_{1+} \subseteq \{\varkappa_\mu(g);\ g \in L^\infty_{1+}(\mu)\} \subseteq (\pi_\omega(\mathfrak{A})')_{1+},$$

а потому и $(\pi_\omega(\mathfrak{A})')_{1+} = \{\varkappa_\mu(g);\ g \in L^\infty_{1+}(\mu)\}$. Тем самым положительное точное отображение $\varkappa_\mu$ оказывается порядковым изоморфизмом $L^\infty(\mu)$ на $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. По теореме 3.2.3, $\varkappa_\mu$ должно быть йордановым изоморфизмом. Но это приводит к соотношению

$$\varkappa_\mu(fg) = \frac{\varkappa_\mu(fg + gf)}{2} = \frac{\varkappa_\mu(f)\varkappa_\mu(g) + \varkappa_\mu(g)\varkappa_\mu(f)}{2},$$

а приняв во внимание наблюдение (3), сформулированное в ходе доказательства предложения 3.2.2, получаем

$$(\varkappa_\mu(f)\,\varkappa_\mu(g) - \varkappa_\mu(g)\,\varkappa_\mu(f))^2 = 0.$$

Таким образом, алгебра $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ абелева.

Если условия теоремы 4.2.4 выполнены, т. е. $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ абелева, то соответствующая максимальная мера μ будет псевдососредоточена на множестве чистых состояний $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$. Если $\mathfrak{A}$ сепарабельна или если ω принадлежит грани, удовлетворяющей условию сепарабельности S (см. определение 4.1.32), то можно вывести, что μ сосредоточена на $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$. Следующий результат является прямым обобщением такого вывода.

Теорема 4.2.5. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей. Пусть $\mathfrak{B}$ — максимальная абелева подалгебра в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и μ — соответствующая ей мера на пространстве состояний $E_{\mathfrak{A}}$. Тогда μ псевдососредоточена на множестве чистых состояний $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ алгебры $\mathfrak{A}$.*

Кроме того, если ω содержится в грани F, удовлетворяющей условию сепарабельности S, то множество крайних точек $\mathscr{E}(F)$ этой грани есть бэровское подмножество в $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$ и

$$\mu(\mathscr{E}(F)) = 1.$$

В частности, при этом добавочном условии μ максимальна в $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$.

Доказательство. Мы можем, не ограничивая общности, считать π_ω точным представлением. Ведь если $\mathfrak{J} = \ker \pi_\omega$ и $\rho\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$, то φ будет чистым состоянием на $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда $\varphi \circ \rho$ будет чистым состоянием на $\mathfrak{A}$, но состояния указанного вида образуют в $E_{\mathfrak{A}}$ слабо* замкнутое подмножество.

Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{H}_\omega$ порождается $\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \mathfrak{B}$. Мы можем рассматривать $\mathfrak{A}$ $(= \pi_\omega(\mathfrak{A}))$ как подалгебру в $\mathfrak{C}$, а так как $\mathfrak{B}$ — максимальная абелева подалгебра в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}'$. Далее, продолжим ω до состояния $\tilde{\omega}$ на $\mathfrak{C}$, полагая $\tilde{\omega}(C) = (\Omega_\omega, C\Omega_\omega)$ при всех $C \in \mathfrak{C}$, и пусть $\tilde{\mu} \in \mathcal{O}_{\tilde{\omega}}(E_{\mathfrak{C}})$ — та ортогональная мера, которая соответствует $\mathfrak{B}$. По теореме 4.2.4 мера $\tilde{\mu}$ максимальна в $M_{\tilde{\omega}}(E_{\mathfrak{C}})$ и потому псевдососредоточена на $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{C}})$ (теорема 4.1.11).

Затем мы можем записать $\omega = r\tilde{\omega}$, где r — отображение сужения $E_{\mathfrak{C}} \to E_{\mathfrak{A}}$, введенное в лемме 4.1.36. Но

$$\tilde{\mu}(\widehat{C}_1\widehat{C}_2 \ldots \widehat{C}_n) = (\Omega_\omega, C_1PC_2P \ldots PC_n\Omega_\omega)$$

при $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathfrak{C}$ и $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$. Поэтому $r^*\tilde{\mu} = \mu$, где r^* — сопряженное к r отображение, а ортогональная мера $\mu \in \mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ соответствует $\mathfrak{B}$. Теперь, если B — бэровское подмножество в $E_{\mathfrak{A}}$, содержащее $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$, то $r^{-1}B$ будет бэровским подмножеством в $E_{\mathfrak{C}}$, содержащим $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{C}})$, согласно предложению 4.1.37. Следовательно, $\mu(B) = \tilde{\mu}(r^{-1}B) = 1$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{A}$ содержит такую последовательность C^*-подалгебр $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\geqslant 1}$, что $\mathfrak{A} = \bigcup_n \mathfrak{A}_n$ и каждая $\mathfrak{A}_n$ содержит сепарабельный идеал $\mathfrak{G}_n$, и пусть

$$\omega \in F = \left\{ \varphi;\ \varphi \in E_{\mathfrak{A}},\ \left\| \varphi \big|_{\mathfrak{G}_n} \right\| = 1,\ n = 1,\ 2,\ \ldots \right\}.$$

Тогда, согласно предложению 4.1.34, пространство $\mathfrak{H}_\omega$ сепарабельно. Следовательно, $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\omega)$ сепарабельна в слабой операторной топологии. Поэтому $\mathfrak{B}$ содержит сепарабельную C^*-подалгебру $\mathfrak{B}_0$, такую что $\mathfrak{B}_0$ слабо плотна в $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{C}$ обозначает C^*-алгебру, порожденную $\pi_\omega(\mathfrak{A})\ (=\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}_0$, а $\mathfrak{C}_n$ обозначает C^*-алгебру, порожденную $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{A}_n$; пусть, наконец, C^*-алгебра $\mathfrak{J}_n$ порождается $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{G}_n$. Так как $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}'$, то $\mathfrak{J}_n$ — сепарабельный идеал в $\mathfrak{C}_n$, и $\bigcup_n \mathfrak{C}_n$ плотно в $\mathfrak{C}$. Введем

$$\tilde{F} = \left\{ \tilde{\varphi};\ \tilde{\varphi} \in E_{\mathfrak{C}},\ \left\| \tilde{\varphi} \big|_{\mathfrak{J}_n} \right\| = 1,\ n = 1,\ 2,\ \ldots \right\}.$$

Тогда $\tilde{\omega} \in \tilde{F}$. Поскольку $\mathfrak{C}' = \mathfrak{B}$ абелева, из предложения 4.1.34 и теоремы 4.2.4 следует, что $\mathscr{E}(\tilde{F})$ является бэровским множеством вида $\partial_f\left(E_{\mathfrak{C}}\right) \cap \tilde{F}$ при некоторой функции $f \in S\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$, причем $\tilde{\mu}\left(\partial_f\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right) = 1$, $\tilde{\mu}(\tilde{F}) = 1$; поэтому $\tilde{\mu}(\mathscr{E}(\tilde{F})) = 1$. Далее, $r(\mathscr{E}(\tilde{F})) \subseteq \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$, в силу предложения 4.1.37, и $r(\mathscr{E}(\tilde{F}))$ содержит некоторое F_σ-множество U с $\mu(U) = 1$, по лемме 4.1.36. Применение предложения 4.1.34 показывает тогда, что $\mu(U \cap F) = 1$. Но поскольку $U \cap F \subseteq \mathscr{E}(F)$, а множество $\mathscr{E}(F)$ бэровское, то $\mu(\mathscr{E}(F)) = 1$. Так как $\mathscr{E}(F) \subseteq \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}\right) \subseteq \partial_f\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$ при всех $f \in S\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$, то μ максимальна в $M_\omega\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$, по теореме 4.1.7.

Обсуждение экстремальных разложений мы завершим двумя примерами, иллюстрирующими некоторые структуры, возникающие в пространстве состояний. Хотя теорема 4.2.4 и дает критерий того, когда данное состояние $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$ является барицентром единственной максимальной меры, мы не рассматривали условий, гарантирующих, что каждое $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$ обладает таким свойством. Общая теория барицентрических разложений (теорема 4.1.15) говорит нам, что это эквивалентно тому, что $E_{\mathfrak{A}}$ — симплекс, и первый из примеров показывает, что это имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ абелева.

Пример 4.2.6. *Для C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ эквивалентны следующие условия:*

(1) *пространство состояний $E_{\mathfrak{A}}$ — симплекс;*

(2) *$\mathfrak{A}$ абелева;*

(3) *положительные элементы $\mathfrak{A}_+$ алгебры $\mathfrak{A}$ образуют решетку.*

Указанная эквивалентность не зависит от наличия единицы у алгебры $\mathfrak{A}$. Доказательство для общего случая сводится к частному присоединением единицы. Отметим еще, что абелеву $\mathfrak{A}$ можно отождествить с $C(X)$, где X — пространство характеров на $\mathfrak{A}$, как показано в теореме 2.1.11, (A) пункта 2.3.5, а $E_{\mathfrak{A}}$ соответствует множеству вероятностных мер на $C(X)$. Тем самым (2) $\Rightarrow$ (1) и (2) $\Rightarrow$ (3). Установим теперь импликацию, обратную к первой из этих импликаций.

(1) $\Rightarrow$ (2). Предположив, что (2) не выполнено, мы допускаем наличие двух таких A, $B \in \mathfrak{A}$, для которых $AB - BA = C \neq 0$. Кроме того, лемма 2.3.23 гарантирует существование такого чистого состояния ω на $\mathfrak{A}$, что $\omega(C^*C) = \|C\|^2$. Гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\omega$ ассоциированного с ω неприводимого представления $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega)$ не может быть одномерным, иначе мы имели бы $\pi_\omega(C) = 0$. Пусть ψ_1 и ψ_2 — любые два ортогональных единичных вектора в $\mathfrak{H}_\omega$ и $\omega_i(A) = (\psi_i, \pi_\omega(A)\psi_i)$ при $A \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2$. Введем также состояния $\omega_\pm$:

$$\omega_\pm(A) = ((\psi_1 \pm \psi_2), \pi_\omega(A)(\psi_1 \pm \psi_2))/2, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Для таких состояний $\omega_1(A) + \omega_2(A) = \omega_+(A) + \omega_-(A)$. Следовательно, две несовпадающие максимальные меры $(\delta_{\omega_1} + \delta_{\omega_2})/2$ и $(\delta_{\omega_+} + \delta_{\omega_-})/2$ имеют один и тот же барицентр, т. е. $E_\mathfrak{A}$ — не симплекс.

Для завершения доказательства покажем, что (3) влечет (1).

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть φ — произвольный эрмитов функционал на $\mathfrak{A}$ и $\varphi^{(+)}$ определяется по формуле

$$\varphi^{(+)}(A) = \sup\{\varphi(B);\ 0 \leqslant B \leqslant A\}.$$

Функционал $\varphi^{(+)}$, очевидно, ограничен; докажем его линейность. Для этого возьмем $0 \leqslant B \leqslant A_1 + A_2$, где $A_i \geqslant 0$; из свойств решетки следует существование таких B_1, B_2, что $B = B_1 + B_2$ и $0 \leqslant B_1 \leqslant A_1$, $0 \leqslant B_2 \leqslant A_2$. Действительно, можно задать $B_1 = A_1 \wedge B$, $B_2 = B - B_1$. Очевидно, $0 \leqslant B_1 \leqslant A_1$ и $0 \leqslant B_2$, но $B - A_2 \leqslant B$ и $B - A_2 \leqslant A_1$. Поэтому $B - A_2 \leqslant A_1 \wedge B$, что равносильно $B_2 \leqslant A_2$. С помощью установленного разложения получаем

$$\begin{aligned}\varphi^{(+)}(A_1 + A_2) &= \sup\{\varphi(B_1 + B_2);\ 0 \leqslant B_1 \leqslant A_1,\ 0 \leqslant B_2 \leqslant A_2\}\\ &= \varphi^{(+)}(A_1) + \varphi^{(+)}(A_2).\end{aligned}$$

Пусть теперь ω_1 и ω_2 — положительные линейные функционалы на $\mathfrak{A}$. Положим

$$\omega_1 \vee \omega_2 = (\omega_1 - \omega_2)^{(+)} + \omega_2.$$

При $A \geqslant 0$ и $\varepsilon \geqslant 0$ найдется такой элемент B, что $0 \leqslant B \leqslant A$ и

$$(\omega_1 - \omega_2)^{(+)}(A) \leqslant \omega_1(B) - \omega_2(B) + \varepsilon.$$

Поэтому если $\omega \geqslant \omega_1$ и $\omega \geqslant \omega_2$, то

$$(\omega_1 \vee \omega_2)(A) \leqslant \omega_1(B) + \omega_2(A - B) + \varepsilon \leqslant \omega(A) + \varepsilon,$$

т. е. $\omega_1 \vee \omega_2$ является точной верхней гранью ω_1 и ω_2. Аналогичными рассуждениями устанавливается существование точной нижней грани ω_1, ω_2 и явное выражение для нее

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 - (\omega_1 - \omega_2)^{(+)}.$$

Следовательно, положительные функционалы на $\mathfrak{A}$ образуют решетку и $E_\mathfrak{A}$ — симплекс.

Отметим, что введенный в доказательстве функционал $\varphi^{(+)}$ — это в точности положительная часть φ_+ функционала φ в йордановом разложении. Отрицательную часть φ_- можно вычислять по аналогичной формуле, и очевидно соотношение $\varphi_- = -(\varphi)_+$.

Пример 4.2.7. Рассмотрим C^*-алгебру $\mathfrak{A} = M_2$, состоящую из всех 2×2-матриц с комплексными элементами. Пример 4.2.6 показывает, что $E_\mathfrak{A}$ — не симплекс, а сейчас мы установим, что $E_\mathfrak{A}$ аффинно изоморфно единичному шару в $\mathbb{R}^3$.

Введем матрицы Паули σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 в $\mathfrak{A}_{sa}$:

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Вещественная линейная оболочка набора $\{\sigma_i\}$ совпадает с $\mathfrak{A}_{sa}$. Если $\sum_i\alpha_i\sigma_i\in$ $\in\mathfrak{A}_{sa}$, то, как легко видеть,

$$\operatorname{Tr}\Big(\sum_i\alpha_i\sigma_i\Big)=2\alpha_0,\ \det\Big(\sum_i\alpha_i\sigma_i\Big)=\alpha_0^2-\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2.$$

Значит, $\sum_i\alpha_i\sigma_i\in\mathfrak{A}_+$ тогда и только тогда, когда $\alpha_0\geqslant 0$ и $\alpha_0^2\geqslant\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$, т. е. $\mathfrak{A}_+$ можно отождествить с положительным световым конусом пространства Минковского.

Всякое состояние $\omega\in E_{\mathfrak{A}}$ задается единственной положительной матрицей $\rho\in\mathfrak{A}_+$ с $\operatorname{Tr}(\rho)=1$ по формуле $\omega(A)=\operatorname{Tr}(\rho A)$. Отображение $\omega\mapsto\rho$ аффинно. Таким образом, $E_{\mathfrak{A}}$ аффинно изоморфно множеству

$$\left\{(\alpha_i)\in\mathbb{R}^4;\ \alpha_0=\frac{1}{2},\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\leqslant\frac{1}{4}\right\},$$

т. е. $E_{\mathfrak{A}}$ аффинно изоморфно единичному шару в $\mathbb{R}^3$.

Легко также построить естественный положительный конус $\mathscr{P}_\tau$, ассоциированный с M_2 в представлении, определенном по $\tau=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}$. В самом деле, $\{2^{-1/2}\pi_\tau(\sigma_i)\,\Omega_\tau\}_{0\leqslant i\leqslant 3}$ образует ортонормированный базис для $\mathfrak{H}_\tau$, а так как τ — след, то $\mathscr{P}_\tau=\pi_\tau(\mathfrak{A}_+)\,\Omega_\tau$. Тем самым $\mathfrak{H}_\tau$ можно отождествить с гильбертовым пространством $\mathbb{C}^4$ так, что при этом

$$\mathscr{P}_\tau=\{(\alpha_i)\in\mathbb{R}^4;\ \alpha_0\geqslant 0,\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\leqslant\alpha_0^2\},$$

т. е. $\mathscr{P}_\tau$ просто оказывается положительным световым конусом в пространстве Минковского.

В общем случае нетрудно показать, что для чистых состояний ω_1, ω_2 произвольной C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей грань, порожденная $\{\omega_1,\ \omega_2\}$ в $E_{\mathfrak{A}}$, либо совпадает с отрезком, соединяющим ω_1 и ω_2 (если π_{ω_1} и π_{ω_2} неэквивалентны), либо аффинно изоморфна единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ (если $\omega_1\neq\omega_2$ и π_{ω_1} эквивалентно π_{ω_2}). Таково важное абстрактное свойство выпуклого компактного множества $E_{\mathfrak{A}}$.

4.2.2. Центральные и субцентральные разложения

В этом пункте мы изучаем разложения состояния ω, которые связаны с подалгебрами фон Неймана центра $\mathfrak{Z}_\omega=\pi_\omega(\mathfrak{A})''\cap$ $\cap\,\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ представления $(\mathfrak{H}_\omega,\ \pi_\omega)$. Ортогональная мера, соответствующая $\mathfrak{Z}_\omega$, называется обычно *центральной мерой*, а о мерах, соответствующих подалгебрам фон Неймана алгебры $\mathfrak{Z}_\omega$, мы будем говорить как о *субцентральных мерах*. Этот класс мер особенно важен для физических приложений, так как элементы $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ интерпретируются как наблюдаемые для системы в состоянии ω, а центр $\mathfrak{Z}_\omega$ соответствует множеству инвариантов системы. Центральная мера задает распределение вероятностей значений этих инвариантов, и ассоциированное с мерой разложение ω выражает ω через те состояния, в которых инварианты принимают определенные значения. Отдельные подалгебры в $\mathfrak{Z}_\omega$, такие как коммутантная алгебра $\mathfrak{Z}_\omega^c$ и алгебра на бесконечности $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$, введенные определением 2.6.4, могут иметь особое физическое значение, поэтому и соответствующие субцентральные разложения представляют особый интерес.

Мы начнем с того, что покажем, как можно охарактеризовать субцентральные меры усиленным условием ортогональности. Сперва напомним, что два представления π_1 и π_2 C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ квазиэквивалентны, если всякое π_1-нормальное состояние π_2-нормально и верно обратное. Дополнительным к понятию квазиэквивалентности является понятие дизъюнктности. Мы будем говорить, что представления π_1 и π_2 *дизъюнктны*, и писать $\pi_1 \circ\!\!\!\!\mid\; \pi_2$, если ни одно π_1-нормальное состояние не будет π_2-нормальным и наоборот. Соответственно два положительных линейных функционала ω_1 и ω_2 на $\mathfrak{A}$ называют *дизъюнктными* и пишут $\omega_1 \circ\!\!\!\!\mid\; \omega_2$, если дизъюнктны π_{ω_1} и π_{ω_2}. Для абелевой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ понятия квазиэквивалентности и дизъюнктности сводятся к понятиям эквивалентности и дизъюнктности регулярных мер Бореля.

Немедленным следствием определения является утверждение: тогда и только тогда $\pi_1 \circ\!\!\!\!\mid\; \pi_2$, когда π_1 и π_2 не имеют квазиэквивалентных подпредставлений, а это в свою очередь эквивалентно отсутствию у π_1 и π_2 унитарно эквивалентных подпредставлений (теорема 2.4.26). Для наших целей полезной окажется такая характеризация дизъюнктности состояний:

Лемма 4.2.8. *Пусть ω_1, ω_2 — два положительных линейных функционала на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ и $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Следующие условия эквивалентны;*

(1) *ω_1 и ω_2 дизъюнктны;*

(2) *существует такой проектор $P \in \pi_\omega'(\mathfrak{A})_\omega \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, что*
$$\omega_1(A) = (\Omega_\omega,\ P\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega),\quad \omega_2(A) = (\Omega_\omega,\ (1 - P)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega).$$

В частности, из дизъюнктности ω_1 и ω_2 следует их ортогональность.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если ω' — положительный линейный функционал, такой что $\omega' \leqslant \omega_1$ и $\omega' \leqslant \omega_2$, то ω' и π_{ω_1}-нормален и π_{ω_2}-нормален. Следовательно, $\omega' = 0$. Из леммы 4.1.19 вытекает, что $\omega_1 \perp \omega_2$, и можно утверждать, что существует проектор $P \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, для которого
$$\omega_1(A) = (\Omega_\omega,\ P\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega)$$
и т. д. Пусть $B \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, $\xi \in P\mathfrak{H}_\omega$. Рассмотрим положительный функционал ω', заданный формулой
$$\omega'(A) = ((1 - P)\,B\xi,\ \pi_\omega(A)\,(1 - P)\,B\xi).$$

Он, очевидно, π_{ω_2}-нормален, а так как

$$\omega'(A) \leqslant \|(\mathbb{1} - P) B\|^2 (\xi, \pi_\omega(A)\xi)$$

при $A \geqslant 0$, то он также и π_{ω_1}-нормален. Тогда $\omega' = 0$, и поэтому $(\mathbb{1} - P) BP = 0$ при всех $B \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Тем самым $P \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, т. е. $P \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если выполнено (2), то не существует частично изометрических операторов U в $\mathfrak{H}_\omega$, содержащихся в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, для которых $(\mathbb{1} - P) UP = U$. Но это равносильно отсутствию унитарно эквивалентных подпредставлений у π_{ω_1} и π_{ω_2}, так что $\omega_1 \overset{|}{\circ} \omega_2$.

Другую характеризацию субцентральных мер дает

Предложение 4.2.9. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей, и пусть $\mu \in M_\omega(E_\mathfrak{A})$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *для всякого борелевского множества $S \subseteq E_\mathfrak{A}$*

$$\left(\int_S d\mu(\omega')\,\omega'\right) \overset{|}{\circ} \left(\int_{E_\mathfrak{A} \setminus S} d\mu(\omega')\,\omega'\right);$$

(2) *мера μ субцентральна, т. е. она ортогональна и соответствующая ей абелева подалгебра $\varkappa_\mu(L^\infty(\mu))$ в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ содержится в центре $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ представления $\pi_\omega(\mathfrak{A})$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Ортогональность μ и свойство $\varkappa_\mu$ переводить проекторы из $L^\infty(\mu)$ в центральные проекторы вытекают из леммы 4.2.8. Так как $\varkappa_\mu$ — это *-изоморфизм, согласно предложению 4.1.22, то $\varkappa_\mu(L^\infty(\mu))$ содержится в центре алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если S — борелевское множество, то $\varkappa_\mu(\chi_S)$ и $\varkappa_\mu\left(\chi_{E_\mathfrak{A} \setminus S}\right)$ будут взаимно ортогональными проекторами в центре алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, дающими в сумме $\mathbb{1}$, поэтому имеем

$$\left(\int_S d\mu(\omega')\,\omega'\right) \overset{|}{\circ} \left(\int_{E_\mathfrak{A} \setminus S} d\mu(\omega')\,\omega'\right),$$

приняв во внимание равенство

$$\int_S d\mu(\omega')\,\omega'(A) = (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(\chi_S)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega)$$

и лемму 4.2.8.

Из теоремы 4.1.28 следует, что центральная мера $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ — это наименьшая из мер в $M_\omega(E_\mathfrak{A})$, которая больше любой субцентральной меры. Кроме того, согласно лемме 4.1.26, $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ является слабым* пределом монотонной сети субцентральных мер с конечным носителем. Позже будет показано, что при надлежащих предположениях о сепарабельности мера $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ оказывается наибольшей из мер, которые меньше, чем любая максимальная мера с барицентром ω. Сначала, однако, мы получим тот естественный результат, что $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ псевдососредоточена на множестве факторных состояний $F_{\mathfrak{A}}$, а при наложении некоторых требований сепарабельности даже будет сосредоточена на $F_{\mathfrak{A}}$.

Теорема 4.2.10. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей и $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ — ассоциированная с ним центральная мера. Тогда $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ псевдососредоточена на множестве $F_{\mathfrak{A}}$ факторных состояний $\mathfrak{A}$. Если вдобавок известно, что ω содержится в некоторой грани F, удовлетворяющей условию сепарабельности S, то $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ сосредоточена на таком подмножестве $G \subseteq E_{\mathfrak{A}}$, которое*

(1) *является F_σ-подмножеством в $E_{\mathfrak{A}}$;*

(2) *содержится в $F_{\mathfrak{A}} \cap F$.*

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства теоремы 4.2.5. Можно считать представление π_ω точным и рассматривать $\mathfrak{A}$ как C^*-подалгебру C^*-алгебры $\mathfrak{C}$, порожденной $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ и $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Коммутантом $\mathfrak{C}$ будет $\mathfrak{C}' = \mathfrak{Z}_\omega = \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Пусть $\tilde{\omega}$ обозначает продолжение ω на $\mathfrak{C}$, заданное формулой

$$\tilde{\omega}(C) = (\Omega_\omega, C\Omega_\omega), \quad C \in \mathfrak{C},$$

и пусть $\tilde{\mu}$ — элемент из $\mathcal{O}_{\tilde{\omega}}\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$, отвечающий $\mathfrak{Z}_\omega = \mathfrak{Z}_{\tilde{\omega}}$. Если $r\colon E_{\mathfrak{C}} \to E_{\mathfrak{A}}$ обозначает отображение сужения, то $r\tilde{\omega} = \omega$ и $\mu = \tilde{\mu} \circ r^{-1}$. Последнее равенство следует из соотношения

$$\tilde{\mu}(\widehat{C_1}\widehat{C_2} \ldots \widehat{C_n}) = (\Omega_\omega, C_1PC_2P \ldots PC_n\Omega_\omega),$$

где $P = [\mathfrak{Z}_\omega\Omega_\omega] = [\mathfrak{Z}_{\tilde{\omega}}\Omega_{\tilde{\omega}}]$.

Далее, мера $\tilde{\mu}$ максимальна в $M_{\tilde{\omega}}\left(E_{\mathfrak{C}}\right)$ по теореме 4.2.4, и с помощью теоремы 4.1.11 мы заключаем, что $\tilde{\mu}$ псевдососредоточена на чистых состояниях алгебры $\mathfrak{C}$. Затем, согласно предложению 4.1.37, имеем $r\left(\mathcal{E}\left(E_{\mathfrak{C}}\right)\right) \subseteq F_{\mathfrak{A}}$, и, следовательно, μ псевдососредоточена на $F_{\mathfrak{A}}$ по лемме 4.1.36.

Теперь рассмотрим второе утверждение теоремы. Пусть $\{\mathfrak{A}_n\}_{n \geqslant 1}$ — последовательность C^*-подалгебр в $\mathfrak{A}$, такая что $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_n \mathfrak{A}_n}$, и пусть $\mathfrak{G}_n$ — сепарабельные идеалы в $\mathfrak{A}_n$ со свойством

$$F = \left\{\varphi;\ \varphi \in E_{\mathfrak{A}},\ \left\|\varphi\Big|_{\mathfrak{G}_n}\right\| = 1,\ n \geqslant 1\right\}.$$

Если $\omega \in F$, то $\mathfrak{H}_\omega$ сепарабельно, в силу предложения 4.1.34, а рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 4.2.5, показывают, что найдется сепарабельная C^*-подалгебра $\mathfrak{B}_0 \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, которая слабо плотна в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Переопределим $\mathfrak{C}$ как C^*-алгебру, порожденную $\mathfrak{B}_0$ и $\pi_\omega(\mathfrak{A})$, и воспроизведем доказательство теоремы 4.2.5. Мы получим F_σ-множество $U \subseteq F_{\mathfrak{A}}$, для которого $\mu(U) = 1$. Поскольку грань F устойчива, $\mu(F) = 1$, поэтому $\mu(F \cap U) = 1$. Вследствие регулярности меры Бореля μ существует такое F_σ-подмножество $G \subseteq F \cap U \subseteq F \cap F_{\mathfrak{A}}$, что $\mu(G) = 1$.

Замечание. В простейшем случае, подпадающем под условия теоремы 4.2.10, — случае сепарабельной $\mathfrak{A}$ — можно доказать, что множество факторных состояний $F_{\mathfrak{A}}$ образует борелевское подмножество в $E_{\mathfrak{A}}$ (см. замечания и комментарии в конце главы).

Пример 4.2.11. В качестве применения предыдущей теоремы рассмотрим локально-нормальные состояния квазилокальной алгебры, которую построим следующим образом. Пусть I — счетное семейство индексов, а I_f — направленное множество конечных подмножеств в I, упорядоченное по включению. Каждому $\alpha \in I$ сопоставим сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\alpha$, а каждому $\Lambda \in I_f$ — тензорное произведение $\mathfrak{H}_\Lambda = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{H}_\alpha$ и положим $\mathfrak{A}_\Lambda = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\Lambda)$.

Если C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ порождается объединением всех $\mathfrak{A}_\Lambda$, то $\mathfrak{A}$ квазилокальна в смысле определения 2.6.3. Состояние ω на $\mathfrak{A}$ локально-нормально в смысле определения 2.6.6 тогда и только тогда, когда $\omega \in F$, где

$$F = \left\{ \omega;\ \omega \in E_{\mathfrak{A}},\ \left\| \omega \big|_{\mathscr{LC}(\mathfrak{H}_\Lambda)} \right\| = 1,\ \Lambda \in I_f \right\}$$

(ср. с примером 4.1.35, (5)). Теперь рассмотрим алгебру на бесконечности

$$\mathfrak{Z}_\omega^\perp = \bigcap_{\Lambda \in I_f} \left(\bigcup_{\Lambda' \cap \Lambda = \varnothing} \pi_\omega(\mathfrak{A}_{\Lambda'}) \right)''.$$

Согласно теореме 2.6.10, $\mathfrak{Z}_\omega^\perp = \mathfrak{Z}_\omega$, поэтому центральное разложение совпадает с разложением на бесконечности, и наоборот. Кроме того, теоремы 2.6.10 и 4.2.10 позволяют заключить, что соответствующая мера $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ сосредоточена на некотором F_σ-подмножестве, состоящем из тех локально-нормальных состояний, для которых алгебра на бесконечности тривиальна.

В заключение раздела выведем геометрическую характеризацию центральных мер, упоминавшуюся перед теоремой 4.2.10.

Теорема 4.2.12. *Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей. Всякая субцентральная мера $\nu \in \mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ мажорируется любой из максимальных мер $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$.*

В обратную сторону, если $\omega \in F$, где грань $F \subseteq E_{\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию сепарабельности S, то центральная мера $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$ будет наибольшей мерой в $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, которая мажорируется всеми максимальными мерами из $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что субцентральная мера $\nu \in \mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ и произвольная мера $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ имеют общую верхнюю грань $\rho \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$. Вследствие максимальности μ имеем $\rho = \mu$ и $\mu \succ \nu$. Меру ν можно аппроксимировать в слабой* топологии субцентральными мерами ν_α с конечным носителем (согласно лемме 4.1.26), а μ можно аппроксимировать мерами μ_α с конечным носителем. Таким образом, достаточно построить сеть $\rho_\alpha \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ со свойствами $\nu_\alpha \prec \rho_\alpha$, $\mu_\alpha \prec \rho_\alpha$, ибо для всякой слабо* предельной точки ρ этой сети будет $\nu \prec \rho$ и $\mu \prec \rho$. Приведенные соображения позволяют свести проблему к отысканию общей верхней грани для двух мер μ, $\nu \in M_\omega(E_\mathfrak{A})$ с конечным носителем, причем мера ν предполагается субцентральной. Пусть

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\omega_i}, \quad \nu = \sum_{j=1}^{n'} \lambda'_j \delta_{\omega'_j}.$$

Введем $T_i = \varkappa_\mu(\chi_{\{\omega_i\}})$, $Z_j = \varkappa_\nu\left(\chi_{\{\omega'_j\}}\right)$, где χ_S обозначает индикатор подмножества $S \subseteq E_\mathfrak{A}$. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = \mathbb{1} = \sum_{j=1}^{n'} Z_j$$

и, кроме того, при всех $A \in \mathfrak{A}$

$$\lambda_i \omega_i(A) = (T_i \Omega_\omega, \ \pi_\omega(A) \Omega_\omega), \ \lambda'_j \omega'_j(A) = (Z_j \Omega_\omega, \ \pi_\omega(A) \Omega_\omega).$$

Поскольку T_i и Z_j положительны, а $Z_j \in \mathfrak{Z}_\omega$, произведения $T_i Z_j$ — положительные операторы. Введем теперь λ_{ij} и ω_{ij} по формулам

$$\lambda_{ij} = (T_i Z_j \Omega_\omega, \ \Omega_\omega), \quad \lambda_{ij} \omega_{ij}(A) = (T_i Z_j \Omega_\omega, \ \pi_\omega(A) \Omega_\omega)$$

и рассмотрим меру

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} \lambda_{ij} \delta_{\omega_{ij}}.$$

Имеем

$$\lambda_i \omega_i = \sum_{j=1}^{n'} \lambda_{ij} \omega_{ij}, \quad \lambda'_j \omega'_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \omega_{ij},$$

и простое применение свойства выпуклости дает $\rho \succ \mu$, $\rho \succ \nu$.

Для доказательства обратного утверждения надо показать, что каждая мера $\mu \in M_\omega(E_\mathfrak{A})$, которая мажорируется всякой максимальной мерой из $M_\omega(E_\mathfrak{A})$, будет также мажорироваться центральной мерой $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$. Если $\omega \in F$, где грань F удовлетворяет условию сепарабельности S, то по теореме 4.2.5 максимальные ортогональные меры из $\mathcal{O}_\omega(E_\mathfrak{A})$ максимальны в $M_\omega(E_\mathfrak{A})$. Тем самым $\{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty_{1+}(\mu)\}$ содержится в каждой максимальной абелевой подалгебре фон Неймана в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Значит,

$$\{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty_{1+}(\mu)\} \subseteq (\mathfrak{Z}_\omega)_{1+},$$

где $(\mathfrak{Z}_\omega)_{1+}$ обозначает положительную часть единичного шара в $\mathfrak{Z}_\omega$. Но поскольку

$$(\mathfrak{Z}_\omega)_{1+} = \left\{\varkappa_{\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}}(f);\ f \in L^\infty_{1+}\left(\mu_{\mathfrak{Z}_\omega}\right)\right\}$$

и $\mu_{\mathfrak{Z}_\omega} \in \mathscr{E}(M_\omega(E_\mathfrak{A}))$ (в силу следствия 4.1.23), можно применить предложение 4.2.2 и получить $\mu \prec \mu_{\mathfrak{Z}_\omega}$.

4.3. Инвариантные состояния

4.3.1. Эргодические разложения

Изложение теории разложения для состояний мы завершим рассмотрением состояний, инвариантных относительно некоторой группы *-автоморфизов. Объектами нашего изучения в данном разделе будут и C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ с единицей и группа G, допускающая представление *-автоморфизмами $\mathfrak{A}$. Действие G на $\mathfrak{A}$ будем записывать так:

$$A \in \mathfrak{A} \mapsto \tau_g(A) \in \mathfrak{A}$$

при всех $g \in G$. Состояние ω на $\mathfrak{A}$ называют *G-инвариантным*, если

$$\omega(A) = \omega(\tau_g(A))$$

при всех $g \in G$ и $A \in \mathfrak{A}$. Состояния $E_{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathfrak{A}$ образуют выпуклое слабо* компактное подмножество двойственного к $\mathfrak{A}$ пространства $\mathfrak{A}^*$, а G-инвариантные состояния, как легко видеть, образуют выпуклое и слабо* замкнутое, а потому компактное подмножество в $E_{\mathfrak{A}}$. Это множество инвариантных состояний обозначим через $E_{\mathfrak{A}}^G$. Нашей целью будет получить разложение состояния $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$, выразив его через крайние точки множества $E_{\mathfrak{A}}^G$. Эти экстремальные G-инвариантные состояния, элементы множества $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$, обычно именуют *эргодическими состояниями* или *G-эргодическими состояниями*, имея в виду их относительную «чистоту» (неразложимость) среди всех инвариантных состояний. Соответствующее разложение поэтому естественно называть *эргодическим разложением* состояния ω.

Наше изложе́ние будет проведено в три этапа. В данном пункте мы исследуем существование и единственность эргодического разложения. В пункте 4.3.2 и 4.3.3 мы дадим разнообразные характеризации множества эргодических состояний, а в пункте 4.3.4 рассмотрим, как производится разложение G-эргодического состояния по состояниям менее инвариантным, скажем инвариантным лишь относительно некоторой подгруппы $H \subseteq G$. В физических приложениях группа G выступает как группа симметрий системы, а G-инвариантность ω отражает наличие этих симметрий, когда система находится в состоянии ω. Чистым симметричным фазам системы соответствуют G-эргодические состояния, а разложение по отношению к подгруппе отвечает исследованию нарушенных симметрий.

Сначала напомним, что, согласно следствию 2.3.17, в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_\omega$ циклического представления $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, построенного по G-инвариантному состоянию ω, существует представление G унитарными операторами $U_\omega(G)$. Это представление единственным образом определяется двумя требованиями:

$$U_\omega(g)\,\pi_\omega(A)\,U_\omega(g)^* = \pi_\omega(\tau_g(A))$$

при $A \in \mathfrak{A}$, $g \in G$ и

$$U_\omega(g)\,\Omega_\omega = \Omega_\omega$$

при $g \in G$. На протяжении этого раздела мы часто будем применять обозначение $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, U_\omega, \Omega_\omega)$ для четверки, состоящей из пространства, двух представлений и циклического вектора.

Полезно также задать действие τ^* группы G на двойственном пространстве $\mathfrak{A}^*$:

$$(\tau_g^*\varphi) = \varphi(\tau_{g^{-1}}(A))$$

при $g \in G$, $A \in \mathfrak{A}$ и $\varphi \in \mathfrak{A}^*$.

Так определенное τ^* действительно будет представлением группы:

$$(\tau_{g_1g_2}^*\varphi)(A) = \varphi(\tau_{(g_1g_2)^{-1}}(A)) = \varphi\left(\tau_{g_2^{-1}}\tau_{g_1^{-1}}(A)\right) = (\tau_{g_1}^*\tau_{g_2}^*\varphi)(A).$$

Вторично переходя к сопряженным объектам, можно ввести действие G на алгебре $C(E_\mathfrak{A})$ непрерывных функций на $E_\mathfrak{A}$. Если бэровская мера μ на $E_\mathfrak{A}$ инвариантна относительно такого действия, то можно его распространить и на $L^\infty(\mu)$. Для простоты обозначений за результирующим действием сохраним обозначение τ. Таким образом,

$$(\tau_g f)(\omega) = f(\tau_{g^{-1}}^*\omega)$$

для $f \in L^\infty(\mu)$ и $\omega \in E_\mathfrak{A}$.

Предложение 4.3.1. *Пусть $g \in G \mapsto \tau_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ — представление группы G *-автоморфизмами C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, и пусть на $\mathfrak{A}$ имеется G-инвариантное состояние ω. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между следующими тремя множествами:*

(1) *множество всех ортогональных мер μ на $E_\mathfrak{A}$ с барицентром ω, которые удовлетворяют условию инвариантности*

$$\mu(\tau_g(f_1)f_2) = \mu(f_1f_2)$$

при всех $f_1, f_2 \in L^\infty(\mu)$ и $g \in G$;

(2) *множество всех абелевых подалгебр фон Неймана $\mathfrak{B}$ коммутанта*

$$\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}';$$

(3) *множество всех ортогональных проекторов P в $\mathfrak{H}_\omega$, таких что*

$$P\Omega_\omega = \Omega_\omega, \quad U_\omega(g)P = P, \quad P\pi_\omega(\mathfrak{A})P \subseteq \{P\pi_\omega(\mathfrak{A})P\}'.$$

Доказательство. Теоремой 4.1.25 уже установлено взаимно-однозначное соответствие между ортогональными мерами μ, абелевыми алгебрами фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и такими проекторами P, что $P\Omega_\omega = \Omega_\omega$, $P\pi_\omega(\mathfrak{A})P \subseteq$

$\subseteq \{P\pi_\omega(\mathfrak{A})P\}'$. Остается соединить этот результат со свойствами инвариантности, а это легко сделать с помощью явных выражений для соответствий между элементами μ, $\mathfrak{B}$, P, найденных в теореме 4.1.25.

Сначала предположим, что μ удовлетворяет указанному условию инвариантности. Тогда

$$(\Omega_\omega, \pi_\omega(A)U_\omega(g)\varkappa_\mu(f)U_\omega(g^{-1})\pi_\omega(B)\Omega_\omega) =$$
$$= (\Omega_\omega, \pi_\omega(\tau_{g^{-1}}(A))\varkappa_\mu(f)\pi_\omega(\tau_{g^{-1}}(B))\Omega_\omega) = \mu(f\tau_{g^{-1}}(\widehat{AB})) =$$
$$= \mu(f\widehat{AB}) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\varkappa_\mu(f)\pi_\omega(B)\Omega_\omega)$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$, $g \in G$ и $f \in L^\infty(\mu)$. Поэтому свойство цикличности дает нам

$$U_\omega(g)\varkappa_\mu(f)U_\omega(g)^* = \varkappa_\mu(f).$$

Но $\mathfrak{B} = \{\varkappa_\mu(f);\ f \in L^\infty(\mu)\}$, следовательно, $\mathfrak{B} \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$.

Затем предположим, что $\mathfrak{B} \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$, и заметим, что $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$. Отсюда сразу же получаем $U_\omega(g)P = P$.

Наконец, если P входит в множество (3), описанное в предложении, то верны равенства

$$\mu\left(\widehat{\tau_{g_1}(A_1)}\,\widehat{\tau_{g_2}(A_2)}\ \ldots\ \widehat{\tau_{g_n}(A_n)}\right) =$$
$$= \left(\Omega_\omega, \pi_\omega\left(\tau_{g_1}(A_1)\right)P\pi_\omega\left(\tau_{g_2}(A_2)\right)P\ \ldots\ P\pi_\omega\left(\tau_{g_n}(A_n)\right)\Omega_\omega\right) =$$
$$= (\Omega_\omega, \pi_\omega(A_1)P\pi_\omega(A_2)P\ \ldots\ P\pi_\omega(A_n)\Omega_\omega) = \mu(\widehat{A}_1\widehat{A}_2\ \ldots\ \widehat{A}_n)$$

при всех $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$. Но каждую функцию $f \in C(E_\mathfrak{A})$ по теореме Стоуна — Вейерштрасса можно равномерно аппроксимировать полиномами $\mathscr{P}$ от $\widehat{A}_i$, а так как τ изометрично, то $\tau_g\mathscr{P}$ равномерно по $g \in G$ аппроксимируют $\tau_g f$. С помощью этих двух аппроксимаций мы заключаем, что $\mu((\tau_g f_1)f_2) = \mu(f_1 f_2)$ при всех $f_1, f_2 \in C(E_\mathfrak{A})$ и $g \in G$.

На описанные в предложении 4.3.1 инвариантные ортогональные меры естественным образом переносятся все свойства упорядочения ортогональных мер, описанные в теореме 4.1.28. Так если $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — две абелевы подалгебры фон Неймана в $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$, а $\mu_{\mathfrak{B}_1}$, $\mu_{\mathfrak{B}_2}$ — соответствующие меры, то $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2 \Leftrightarrow \mu_{\mathfrak{B}_1} \prec \mu_{\mathfrak{B}_2}$ и т. д.

Приводимый ниже результат касается свойств носителей таких ортогональных мер.

***Предложение* 4.3.2.** *Пусть выполнены предположения предложения* 4.3.1. *Если ортогональная мера μ имеет барицентром ω, то следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mu(\tau_g(f_1)f_2) = \mu(f_1 f_2)$ *при всех* $f_1, f_2 \in C(E_\mathfrak{A})$ *и* $g \in G$;

(2) *носитель μ содержится в слабо* замкнутом множестве $E^G_\mathfrak{A}$, образованном G-инвариантными состояниями.*

Далее, если μ удовлетворяет этим условиям и максимальна, то она псевдососредоточена на множестве эргодических состояний

$\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$, а если, кроме того, ω содержится в некоторой грани F для $E_{\mathfrak{A}}^G$, удовлетворяющей условию сепарабельности S, то μ сосредоточена на $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$.

Доказательство. Очевидно, (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\mathfrak{B} \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$ — абелева алгебра фон Неймана, отвечающая μ при соответствии, описанном в предложении 4.3.1, и пусть $\mathfrak{N}$ — конечномерная абелева подалгебра фон Неймана в $\mathfrak{B}$. Ортогональная мера $\mu_{\mathfrak{N}}$, соответствующая $\mathfrak{N}$, обладает свойством инвариантности и имеет конечный носитель $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Но каждое $\omega_i \in E_{\mathfrak{A}}^G$, потому что

$$\omega_i(A) = \frac{(P_i\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega)}{(\Omega_\omega, P_i\Omega_\omega)}, \quad A \in \mathfrak{A},$$

где P_i — некоторый проектор из $\mathfrak{N}$. По лемме 4.1.26 семейство мер $\mu_{\mathfrak{N}}$ сходится в слабой* топологии к μ, поэтому $\mu_{\mathfrak{N}}$ также сходится в слабой* топологии на $C(E_{\mathfrak{A}}^G)^*$ к мере $\nu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^G)$, которая получается сужением μ на $E_{\mathfrak{A}}^G$. Таким образом, $\mu(E_{\mathfrak{A}}^G) = \nu(E_{\mathfrak{A}}^G) = 1$, т. е. носитель μ содержится в $E_{\mathfrak{A}}^G$.

Если две ортогональные меры $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ удовлетворяют условию инвариантности, то их можно рассматривать как меры на $E_{\mathfrak{A}}^G$, т. е. $\nu_1, \nu_2 \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^G)$. Мы сперва установим, что соотношение $\nu_1 \succ \nu_2$ в $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ влечет $\nu_1 \succ \nu_2$ в $M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^G)$. Для этого достаточно заметить, что всякая функция $f \in S(E_{\mathfrak{A}}^G)$ обладает выпуклым и полунепрерывным снизу продолжением $\hat{f}$ на $E_{\mathfrak{A}}$, которое получается, если задать $\hat{f}(\omega) = +\infty$ при $\omega \in E_{\mathfrak{A}} \diagdown E_{\mathfrak{A}}^G$. Тем самым, с учетом отношения порядка, мы имеем

$$\nu_1(f) = \nu_1(\hat{f}) \geqslant \nu_2(\hat{f}) = \nu_2(f).$$

В результате мы видим, что инвариантная ортогональная мера, максимальная в $M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, будет максимальной и в $M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^G)$, а утверждение о псевдососредоточенности следует из теоремы 4.1.11. Далее, заметим, что в предложении 4.1.34 было получено представление $\mathscr{E}(F) = \partial_f(E_{\mathfrak{A}}) \cap F$ для $f \in S(E_{\mathfrak{A}})$, строго выпуклых на F. Поэтому, определив $F^G = F \cap E_{\mathfrak{A}}^G$, мы убеждаемся, что F^G — грань в $E_{\mathfrak{A}}^G$, которая удовлетворяет условию сепарабельности S, и

$$\mathscr{E}(F^G) = \partial_f(E_{\mathfrak{A}}^G) \cap F^G \subseteq \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G),$$

так как f строго выпукла и на $F^G \subseteq F$. Но грань F устойчива, а μ сосредоточена на $F \cap E_{\mathfrak{A}}^G$, согласно (2). Тем самым μ сосредоточена на $\partial_f(E_{\mathfrak{A}}^G)$, по теореме 4.1.7.

Дадим теперь характеризацию максимальных мер с фиксированным барицентром $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$.

Предложение 4.3.3. *Пусть выполнены предположения предложения 4.3.1. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^G)$ *содержит единственную максимальную меру* ν;

(2) *коммутант* $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$ *абелев.*

Если эти условия выполнены, то ν *есть ортогональная мера, соответствующая* $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$.

Доказательство. Дело сводится к повторению доказательства эквивалентности (1) $\Rightarrow$ (2) в теореме 4.2.4. Заменяя $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ на $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$, замечаем, что если ν — мера G-инвариантная и с барицентром ω, то $\{\varkappa_\nu(f);\ f \in L^\infty(\nu)\} \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$. Включение это выводится из равенства

$$\nu\left(f\tau_{g^{-1}}(\widehat{AB})\right) = \nu(f\widehat{AB})$$

при помощи выкладки, проделанной в начале доказательства предложения 4.3.1.

Следующая наша цель — установить более удобные критерии единственности максимальной ортогональной меры $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^G)$. Отметим, что в случае, когда ω принадлежит грани F в $E_{\mathfrak{A}}^G$, удовлетворяющей условию сепарабельности S, такая единственная мера μ будет сосредоточена на множестве G-эргодических состояний $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$, как показывает предпоследнее предложение. Таким образом, в этом случае единственность максимальной ортогональной μ на $E_{\mathfrak{A}}^G$ соответствует единственности эргодического разложения. В дальнейшем мы рассматриваем проблему единственности, не обращаясь более к вопросу о множествах сосредоточения меры μ.

Для продвижения в изучении эргодических разложений мы привлечем новое техническое средство. Это результат, который обычно называют эргодической теоремой. Мы неоднократно будем применять его к унитарному представлению $U_\omega(G)$ группы G в $\mathfrak{H}_\omega$. Поскольку мы не делаем никаких предположений о непрерывности $g \mapsto U_\omega(g)$, нам понадобится довольно абстрактный вариант этой теоремы.

Теорема 4.3.4 (эргодическая теорема Алаоглу—Биркгофа). *Пусть* $\mathscr{U}$ — *семейство ограниченных операторов в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *удовлетворяющее условиям*

(1) $\|U\| \leqslant 1$ *при всех* $U \in \mathscr{U}$;

(2) $U_1U_2 \in \mathscr{U}$ *при всех* $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$.

Пусть E — *ортогональный проектор на подпространство в* $\mathfrak{H}$, *состоящее из векторов, инвариантных относительно всех* $U \in \mathscr{U}$, *т. е.*

$$E\mathfrak{H} = \{\psi;\ U\psi = \psi \text{ при всех } U \in \mathscr{U}\}.$$

Тогда E *содержится в сильном замыкании выпуклой оболочки* Co $(\mathscr{U})$ *семейства* $\mathscr{U}$.

Доказательство. Сначала заметим, что для $\psi \in E\mathfrak{H}$ и $U \in \mathcal{U}$

$$\|\psi\|^2 = (U\psi, \psi) = (\psi, U^*\psi) \leqslant \|\psi\| \, \|U^*\psi\| \leqslant \|\psi\|^2.$$

Поэтому $(\psi, U^*\psi) = \|\psi\|^2$ и $\|U^*\psi\| = \|\psi\|$. Тем самым

$$\|U^*\psi - \psi\|^2 = \|U^*\psi\|^2 - (U^*\psi, \psi) - (\psi, U^*\psi) + \|\psi\|^2 = 0$$

и, значит, $U^*\psi = \psi$. Следовательно, если $\varphi \in (E\mathfrak{H})^{\perp}$, то

$$(U\varphi, \psi) = (\varphi, U^*\psi) = (\varphi, \psi) = 0$$

и $U\varphi \in (E\mathfrak{H})^{\perp}$. Рассмотрим затем выпуклое множество

$$C_\varphi = \{\chi;\ \chi = X\varphi,\ X \in \mathrm{Co}(\mathcal{U})\}.$$

Так как каждое выпуклое подмножество в $\mathfrak{H}$ содержит единственный элемент с минимальной нормой, должен найтись минимальный по норме элемент $\chi \in \overline{C_\varphi} \subseteq (E\mathfrak{H})^{\perp}$. Но тогда для всякого $U \in \mathcal{U}$ мы имеем $\|U\chi\| \leqslant \|\chi\|$ и, значит, в силу минимальности χ, $U\chi = \chi$. Таким образом, $\chi = 0$.

Далее, если χ — произвольный элемент из $\mathfrak{H}$, он обладает единственным разложением $\chi = \psi + \varphi$ с $\psi \in E\mathfrak{H}$ и $\varphi \in (E\mathfrak{H})^{\perp}$. Повторение проведенных рассуждений дает нам

$$\inf_{X \in \mathrm{Co}(\mathcal{U})} \|X\chi - \psi\| = \inf_{X \in \mathrm{Co}(\mathcal{U})} \|X\varphi\| = 0.$$

Наконец, можно применить такие же рассуждения к семейству

$$\mathcal{U}_n = \{U \oplus U \oplus \ldots \oplus U;\ U \in \mathcal{U}\},$$

действующему на прямую сумму n копий $\mathfrak{H}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и любых $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \mathfrak{H}$ можно найти элемент $X \in \mathrm{Co}(\mathcal{U})$, такой что

$$\sum_{i=1}^{n} \|X\chi_i - E\chi_i\|^2 < \varepsilon.$$

Отметим, что, поскольку E принадлежит сильному замыканию $\mathrm{Co}(\mathcal{U})$, всегда можно выбрать такую сеть элементов $X_\alpha \in \mathrm{Co}(\mathcal{U})$,

$$X_\alpha = \sum_i \lambda_i^\alpha U_i,$$

которая сильно сходится к E. Мы применим сейчас этот результат к представлениям группы G унитарными операторами; можно было бы пойти дальше и утверждать, что такие аппроксимации можно получать как некоторые усреднения, или средние, на группе. Такая интерпретация в терминах средних значений дает интуитивное объяснение примененному выше предельному переходу, ее также полезно иметь в виду для понимания ряда предельных процедур, которые нам встретятся ниже. Тем не менее она не является абсолютно необходимой для развития теории эргодических разложений, и мы продолжим изложение без этого добавочного украшения (см. замечания и комментарии).

Пример 4.3.5. Пусть $x \in \mathbb{R}^\nu \mapsto U(x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ —слабо (сильно) непрерывное унитарное представление группы трансляций в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть E обозначает ортогональный проектор на подпространство $\mathfrak{H}$, состоящее из векторов, инвариантных относительно всех $U(x)$. Пусть еще имеется сеть Λ_α борелевских подмножеств $\mathbb{R}^\nu$ со свойством

$$\lim_\alpha \frac{|\Lambda_\alpha \Delta (\Lambda_\alpha + y)|}{|\Lambda_\alpha|} = 0$$

при всех $y \in \mathbb{R}^\nu$, где $|\Lambda|$ обозначает лебегову меру множества Λ и $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Тогда

$$\lim_\alpha \left\| \left(\frac{1}{|\Lambda_\alpha|} \int_{\Lambda_\alpha} dx U(x) - E \right) \psi \right\| = 0, \ \psi \in \mathfrak{H}.$$

Для проверки этого сначала заметим, что результат тривиален, если $\psi \in E\mathfrak{H}$. Затем возьмем $\psi \in (E\mathfrak{H})^\perp$ и по $y \in \mathbb{R}^\nu$ введем $\psi_y = (\mathbb{1} - U(y))\psi$. В таком случае

$$\left\| \left(\frac{1}{|\Lambda_\alpha|} \int_{\Lambda_\alpha} dx U(x) - E \right) \psi_y \right\| = \left\| \frac{1}{|\Lambda_\alpha|} \int_{\Lambda_\alpha \Delta (\Lambda_\alpha + y)} dx U(x) \psi \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\psi\| \, |\Lambda_\alpha \Delta (\Lambda_\alpha + y)|}{|\Lambda_\alpha|},$$

и отсюда опять следует нужный результат. Наконец, если вектор φ ортогонален множеству

$$\mathfrak{D} = \{\psi_y;\ \psi \in (E\mathfrak{H})^\perp,\ y \in \mathbb{R}^\nu\},$$

то $(\mathbb{1} - U(y))\varphi \in E\mathfrak{H}$ при всех $y \in \mathbb{R}^\nu$. Но $E(\mathbb{1} - U(y))\varphi = 0$, так что $(\mathbb{1} - U(y))\varphi = 0$. Тем самым $\varphi \in E\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{D}^\perp = E\mathfrak{H}$. Следовательно, нами установлено существование предела на подмножестве, линейная оболочка которого плотна в $\mathfrak{H}$, так что предел существует при всех $\psi \in \mathfrak{H}$.

При построении теории эргодических разложений решающую роль играют условия, связанные с асимптотической коммутативностью пар элементов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, когда один из элементов сдвигается под действием τ группы автоморфизмов G. Эти условия обычно выступают под общим названием *асимптотической абелевости*.

Такие условия мы будем рассматривать в форме

$$\inf_{A' \in \mathrm{Co}\,(\tau_G(A))} |\omega([A', B])| = 0$$

для каждой пары $A, B \in \mathfrak{A}$ и некоторого подкласса состояний ω. Здесь мы обозначаем через $\mathrm{Co}\,(\tau_G(A))$ выпуклую оболочку множества $\tau_G(A) = \{\tau_g(A);\ g \in G\}$. Термин «асимптотическая абелевость» объясняется тем, что в конкретных приложениях, когда G наделена топологической структурой, сформулированное условие обычно удовлетворяется при выборе $A' = \tau_g(A)$ и последующем движении g, выводящем g из любого компактного подмножества G. Мы продемонстрируем, как, уточняя это условие, можно будет охарактеризовать единственность эргодического разложения, субцентральность таких разложений и эргодические свойства множества экстремальных состояний $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^{G})$. Подчеркнем, что получаемые при этом критерии особенно полезны, так как условия асимптотической абелевости часто выполняются в сильной и легко проверяемой форме, такой, как коммутативность в смысле нормы

$$\inf_{g \in G} \| [\tau_g(A),\ B] \| = 0.$$

Мы начнем с того, что сразу же аккуратно введем две формы условия асимптотической абелевости, которые будут применяться.

Определение 4.3.6. Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет единицу, и пусть у группы G есть представление *-автоморфизмами $\mathfrak{A}$, $g \in G \mapsto \tau_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Для каждого $A \in \mathfrak{A}$ обозначим через $\mathrm{Co}(\tau_G(A))$ выпуклую оболочку множества $\{\tau_g(A);\ g \in G\} = \tau_G(A)$. Предположим еще, что ω — некоторое G-инвариантное состояние на $\mathfrak{A}$.

Пару $(\mathfrak{A},\ \omega)$ назовем *G-абелевой*, если

$$\inf_{A' \in \mathrm{Co}(\tau_G(A))} |\omega'([A',\ B])| = 0$$

для всех $A,\ B \in \mathfrak{A}$ и всех G-инвариантных векторных состояний ω' в представлении π_ω.

Пару $(\mathfrak{A},\ \omega)$ назовем *G-центральной*, если

$$\inf_{A' \in \mathrm{Co}(\tau_G(A))} |\omega''([A',\ B])| = 0$$

для всех $A,\ B \in \mathfrak{A}$ и всех состояний ω'', для которых найдутся такое $\lambda > 0$ и такое G-инвариантное векторное в представлении π_ω состояние ω', что $\omega'' < \lambda\,\omega'$.

Отметим, что если $\mathfrak{A}$ абелева, то оба эти условия выполняются для любой группы автоморфизмов G. Далее, если H — подгруппа в G и пара $(\mathfrak{A},\ \omega)$ является H-абелевой или H-центральной, то она автоматически будет G-абелевой или G-центральной.

Наша цель — показать, что пара $(\mathfrak{A},\ \omega)$ является G-абелевой тогда и только тогда, когда каждое из некоторого достаточно большого числа G-инвариантных состояний ω' служит барицентром меры μ, единственной максимальной среди мер с таким барицентром, удовлетворяющих условию

$$\mu(\tau_g(f_1) f_2) = \mu(f_1 f_2), \quad f_1,\ f_2 \in C(E_{\mathfrak{A}}).$$

Вслед за этим мы покажем, что G-центральность характеризует ситуацию, в которой соответствующая мера μ субцентральна.

Предложение 4.3.7. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет единицу, пусть группа G допускает представление $g \in G \mapsto \tau_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$, и пусть* *существует G-инвариантное состояние* ω *на* $\mathfrak{A}$. *Обозначим через* E_ω *ортогональный проектор в* $\mathfrak{H}_\omega$ *на подпространство, образованное векторами, инвариантными относительно* $U_\omega(G)$, *и рассмотрим следующие условия:*

(1) *пара* $(\mathfrak{A}, \omega)$ *является G-абелевой;*
(2) *множество* $E_\omega\pi_\omega(\mathfrak{A})E_\omega$ *абелево* [1];
(3) *коммутант* $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$ *абелев;*
(4) *существует единственная максимальная мера* $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^G)$.

Эти условия связаны между собой так: $(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$, *а если вектор* Ω_ω — *отделяющий для* $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, *то* $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Достаточно доказать (2) для самосопряженных операторов. Выберем $\varepsilon > 0$, $A = A^* \in \mathfrak{A}$ и $\psi \in E_\omega\mathfrak{H}$; тогда, в силу предложения 4.3.4, существует выпуклая комбинация $S_\lambda(U_\omega)$ операторов $U_\omega(g)$:

$$S_\lambda(U_\omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_\omega(g_i),$$

такая что $\|(S_\lambda(U_\omega) - E_\omega)\pi_\omega(A)\psi\| < \varepsilon/2$. Поэтому, определив $S_\lambda(\tau(A))$ равенством

$$S_\lambda(\tau(A)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_{g_i}(A),$$

выбрав любую другую выпуклую комбинацию $S_\mu(U_\omega)$ операторов $U_\omega(g)$ и соответствующую ей выпуклую комбинацию $S_\mu(\tau(A))$ операторов $\tau_g(A)$, мы получим

$$\|E_\omega\pi_\omega(A)\psi - \pi_\omega(S_\mu S_\lambda(\tau(A)))\psi\| = \|S_\mu(U_\omega)[E_\omega\pi_\omega(A)\psi - \pi_\omega(S_\lambda(\tau(A)))\psi]\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Там самым

$$|(\psi, \pi_\omega(A)E_\omega\pi_\omega(B)\psi) - (\psi, \pi_\omega(B)E_\omega\pi_\omega(A)\psi)| \leqslant \varepsilon\|B\|\,\|\psi\| + |(\psi, \pi_\omega([S_\mu S_\lambda(\tau(A)), B])\psi)|.$$

Но выпуклая комбинация S_μ все еще произвольна, поэтому, применив условие (1), находим

$$(\psi, [E_\omega\pi_\omega(A)E_\omega, E_\omega\pi_\omega(B)E_\omega]\psi) = 0.$$

Ввиду произвольности $\psi \in E_\omega\mathfrak{H}$ отсюда следует (2).

$(2) \Rightarrow (1)$. Если $S_\lambda(\tau(A))$ обозначает упомянутую выше выпуклую комбинацию в $\tau_G(A)$, то по условию (2) получаем

$$|(\psi, \pi_\omega([S_\lambda(\tau(A)), B])\psi)| \leqslant \|B\|\,\|(S_\lambda(U_\omega) - E_\omega)\pi_\omega(A)\psi\| + \|B\|\,\|(S_\lambda(U_\omega) - E_\omega)\pi_\omega(A^*)\psi\|,$$

и условие (1) следует из предложения 4.3.4.

$(2) \Rightarrow (3)$. Прежде всего заметим, что так как $E_\omega\Omega_\omega = \Omega_\omega$ и $E_\omega\pi_\omega(\mathfrak{A})E_\omega$ абелево, то основная характеризация ортогональных мер (теорема 4.1.25) ставит

[1] Условие (2) не означает, что $E_\omega\pi_\omega(\mathfrak{A})E_\omega$ является алгеброй, а только то, что коммутируют операторы, входящие в $E_\omega\pi_\omega(\mathfrak{A})E_\omega$.

E_ω в соответствие абелевой алгебре фон Неймана $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup E_\omega\}'$. Но, согласно предложению 4.3.4, $E_\omega \in U_\omega(G)''$. Следовательно,

$$\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup E_\omega\}'' \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'' \text{ и } \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}' \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup E_\omega\}'.$$

Тем самым $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$ — абелева алгебра.

Условия (3) и (4) эквивалентны согласно предложению 4.3.3.

Наконец, предположим, что Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ вектор, и докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (2).

Пусть $\mathfrak{B}_\omega = \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$. Из теоремы 4.1.25 и предложения 4.3.1 следует, что $\mathfrak{B}_\omega$ находится в соответствии с проектором $P = [\mathfrak{B}_\omega\Omega_\omega]$, обладающим свойствами $U_\omega(g)P = P$ и $P\pi_\omega(A)P \subseteq \{P\pi_\omega(\mathfrak{A})P\}'$. В частности, $P \leqslant E_\omega$, и для установления условия (2) достаточно доказать, что $P = E_\omega$. Но это равенство эквивалентно цикличности вектора Ω_ω для $\pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(G)'$ в $E_\omega\mathfrak{H}_\omega$. Так как вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, он автоматически цикличен для $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, согласно предложению 2.5.3. Требуемый вывод мы получим, применив результат следующего ниже предложения 4.3.8 к $\mathfrak{M} = \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. В частности, это предложение позволяет сопоставить каждому $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$

$$M(A) \in \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(G)',$$

причем $M(A)\Omega_\omega = E_\omega A\Omega_\omega$. Следовательно,

$$\overline{\{M(A)\Omega_\omega;\ A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'\}} = E_\omega\mathfrak{H}_\omega,$$

благодаря цикличности.

Отметим, что импликация (3) $\Rightarrow$ (2) в предложении 4.3.7 неверна в общем случае. Простой пример получим, взяв любую неабелеву $\mathfrak{A}$, а в качестве G — одноточечную группу. Тем самым $U_\omega(G)$ состоит из единичного оператора в $\mathfrak{H}_\omega$, условие (3) эквивалентно абелевости $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, а условие (2) эквивалентно абелевости $\pi_\omega(\mathfrak{A})$. Однако для всех ω это невозможно. Тем не менее известны достаточно общие случаи, когда эта импликация верна, и для их исследования нам понадобится следующее обобщение эргодической теоремы на группы автоморфизмов алгебры фон Неймана.

Предложение 4.3.8 (Ковач и Сюч). *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $g \in G \mapsto U(g) \in \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ — унитарное представление группы G в $\mathfrak{H}$, такое что $U(g)\mathfrak{M}U(g)^* \subseteq \mathfrak{M}$ при всех $g \in G$. Определим $\mathfrak{M}^G = \mathfrak{M} \cap U(G)'$, и пусть E_0 обозначает проектор на подпространство всех $U(G)$-инвариантных векторов в $\mathfrak{H}$.*

Если $F_0 \equiv [\mathfrak{M}'E_0] = \mathbb{1}$, *то существует единственная нормальная G-инвариантная проекция M алгебры $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}^G$. Кроме того, выполняются следующие свойства:*

(1) *M — положительное и точное отображение, т. е. для $A \geqslant 0$ из $M(A) = 0$ следует $A = 0$;*

(2) *$\{M(A)\} = \mathfrak{M}^G \cap \overline{\operatorname{Co}\tau_G(A)}$ при всех $A \in \mathfrak{M}$, где $\overline{\operatorname{Co}\tau_G(A)}$ обозначает слабо замкнутую выпуклую оболочку множества $\{\tau_g(A);\ g \in G\}$; здесь $\tau_g(A) = U(g)AU(g)^*$;*

(3) *$M(A)$ является тем единственным элементом в $\mathfrak{M}$, для которого*

$$M(A)E_0 = E_0AE_0;$$

(4) *нормальное состояние* ω *на* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда* G-*инвариантно, когда*

$$\omega(A) = \omega(M(A)), \quad A \in \mathfrak{M},$$

т. е. $\omega = (\omega \mid_{\mathfrak{M}^G}) \circ M$.

Если $F_0 \neq \mathbb{1}$, *то* $F_0 \in \mathfrak{M}^G \cap (\mathfrak{M}^G)'$ *и сформулированные утверждения верны с заменой* $\mathfrak{M}$ *на* $F_0\mathfrak{M}F_0$ *и* $\mathfrak{M}^G$ *на* $(F_0\mathfrak{M}F_0)^G = \mathfrak{M}^G F_0$.

Доказательство. По эргодической теореме (теореме 4.3.4) в Co $(U(G))$ существует сеть $\sum_i \lambda_i^\alpha U(g_i^\alpha)$, которая сильно сходится к E_0. Если $A \in \mathfrak{M}$, то

$$E_0AE_0 = s\text{-}\lim_\alpha \sum_i \lambda_i^\alpha U(g_i^\alpha) AE_0 = s\text{-}\lim_\alpha \sum_i \lambda_i^\alpha U(g_i^\alpha) AU(g_i^\alpha)^* E_0.$$

В силу теоремы Алаоглу — Бурбаки и предложения 2.4.18, шар $\mathfrak{M}_1$ слабо компактен, поэтому у равномерно ограниченной сети $\sum_i \lambda_i^\alpha U(g_i^\alpha) AU(g_i^\alpha)^*$ имеется слабо сходящаяся подсеть $\sum_i \lambda_i^\beta U(g_i^\beta) AU(g_i^\beta)^*$ с пределом $B \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $E_0AE_0 = BE_0$. Так как $F_0 = \mathbb{1}$, то $E_0\mathfrak{H}$ — циклическое для $\mathfrak{M}'$ и потому отделяющее для $\mathfrak{M}$ множество. Значит, приведенное соотношение определяет $B \in \mathfrak{M}$ единственным образом, и можно ввести отображение M, задав $M(A) = B$. Отображение M, очевидно, линейно и G-инвариантно. Его положительность ясна из построения B, а точность следует из того, что $E_0\mathfrak{H}$ — отделяющее для $\mathfrak{M}$. Если $A \geqslant 0$, то $M(A) = 0$ и $0 = E_0AE_0 = (A^{1/2}E_0)^*(A^{1/2}E_0)$, так что $A^{1/2}E_0 = 0$ и $A^{1/2} = 0$, т. е. $A = 0$. Так как

$$U(g) BU(g)^{-1} E_0 = U(g) BE_0 = U(g) E_0AE_0 = E_0AE_0 = BE_0,$$

то $M(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}^G$. Обратно, если $B \in \mathfrak{M}^G$, то $M(B) = B$ по построению, так что M — проекция на $\mathfrak{M}^G$. Если $B_1 \in \mathfrak{M}^G \cap \overline{\{\mathrm{Co}\,\tau_G(A)\}}$, то

$$B_1E_0 = E_0B_1E_0 = E_0AE_0 = BE_0$$

и, следовательно, $B_1 = B$ и

$$\{M(A)\} = \mathfrak{M}^G \cap \overline{\{\mathrm{Co}(\tau_G(A))\}}.$$

Если $\xi \in \mathfrak{H}$ — вектор вида $\xi = B'\xi_0$, где $\xi_0 \in E_0\mathfrak{H}$ и $B' \in \mathfrak{M}'$, то для $A \geqslant 0$
$(B'\xi_0, M(A) B'\xi_0) = (B'M(A)^{1/2} \xi_0, B'M(A)^{1/2} \xi_0) \leqslant$

$$\leqslant \|B'\|^2 (\xi_0, M(A) \xi_0) = \|B'\|^2 (\xi_0, M(A) E_0\xi_0) = \|B'\|^2 (\xi_0, A\xi_0).$$

Следовательно, соответствие $A \longmapsto (B'\xi_0, M(A) B'\xi_0)$ определяет нормальный положительный функционал. Так как $F_0 = \mathbb{1}$, эти нормальные функционалы порождают плотное по норме подпространство в $\mathfrak{M}_*$; значит, M нормально. Если ω — нормальное G-инвариантное состояние на $\mathfrak{M}$, то

$$\omega(A) = \lim_\beta \omega\left(\sum_i \lambda_i^\beta U(g_i^\beta) AU(g_i^\beta)^*\right) = \omega(M(A)).$$

Поэтому $\omega = \left(\omega \Big|_{\mathfrak{M}^G}\right) \circ M$, и тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между нормальными состояниями на $\mathfrak{M}^G$ и нормальными G-инвариантными состояниями на $\mathfrak{M}$.

Если $F_0 \neq \mathbb{1}$, то, учитывая, что $U(g)\mathfrak{M}'U(g)^{-1} = \mathfrak{M}'$ при всех $g \in G$ и $F_0 = [\mathfrak{M}'E_0]$, мы имеем $U(g) F_0 = F_0U(g)$. Значит, $F_0 \in \mathfrak{M} \cap U(G)' = \mathfrak{M}^G$.

Далее, если $A \in \mathfrak{M}^G$, то $A\mathfrak{M}'E_0 = \mathfrak{M}'AE_0 = \mathfrak{M}'E_0A$, поэтому $F_0 \in (\mathfrak{M}^G)'$. Последнее из утверждений предложения доказывается теперь применением первого утверждения к алгебре фон Неймана $F_0\mathfrak{M}F_0$, на которой действуют унитарные на $F_0\mathfrak{H}$ операторы $U(g)F_0$.

Полученный результат можно употребить для вывода главной характеризации единственности G-инвариантных максимальных мер.

Теорема 4.3.9. *Пусть $g \in G \mapsto \tau_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ — представление группы G *-автоморфизмами C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Далее, пусть имеется G-инвариантное состояние ω на $\mathfrak{A}$, и пусть E_ω — ортогональный проектор в $\mathfrak{H}_\omega$ на подпространство, образованное $U_\omega(G)$-инвариантными векторами. Наконец, пусть $N_\omega{}^G$ обозначает множество всех π_ω-нормальных G-инвариантных состояний на $\mathfrak{A}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G-абелевой;*

(2) *каждое $\omega' \in N_\omega^G$ служит барицентром единственной максимальной меры $\mu' \in M_{\omega'}(E_{\mathfrak{A}}^G)$;*

(3) *$\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}'$ является абелевым при всех $\omega' \in N_\omega^G$;*

(4) *$\{E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})E_{\omega'}\}$ абелево при всех $\omega' \in N_\omega^G$.*

Доказательство. В предложении 4.3.7 уже установлены импликации (1) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3); остается доказать, что (2) $\Rightarrow$ (4).

Положим $F_\omega = [\pi_\omega(\mathfrak{A})'E_\omega]$ и $\mathfrak{M} = F_\omega\pi_\omega(\mathfrak{A})''F_\omega$. Затем определим действие τ на $\mathfrak{M}$:

$$\tau_g(A) = U_\omega(g)AU_\omega(g)^*,$$

и введем соответствующую единственную нормальную G-инвариантную проекцию $M: \mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{M}^G$, описанную в предложении 4.3.8. Далее, каждое $\omega' \in N_\omega^G$ продолжим на $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ по σ-слабой непрерывности. Пусть $\hat{\omega}$ обозначает сужение ω на $\mathfrak{M}$. Так как $F_\omega \geqslant E_\omega$, то $\omega(F_\omega) = 1$ и $\hat{\omega}$ — состояние на $\mathfrak{M}$. Также отметим, что

$$N_{\hat{\omega}}^G = \{\omega';\ \omega' \in N_\omega^G,\ \omega'(F_\omega) = 1\}.$$

Теперь рассмотрим $\overline{N_\omega^G}$ — слабое* замыкание множества N_ω^G. Из предложения 4.1.14 следует, что максимальные вероятностные меры на $\overline{N_\omega^G}$ образуют симплекс. Тем самым условие (2) с учетом очевидного линейного изоморфизма показывает, что N_ω^G — тоже симплекс. Но если состояния ω_1, $\omega_2 \in N_\omega^G$ таковы, что $(\omega_1 + \omega_2)/2 \in N_{\hat{\omega}}^G$, а $\omega_1 \vee \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2$ обозначают соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани, то из соотношений

$$\frac{(\omega_1 + \omega_2)(F_\omega)}{2} = \frac{(\omega_1 \vee \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_2)(F_\omega)}{2} = 1$$

вытекает, что ω_1, ω_2, $\omega_1 \vee \omega_2$, $\omega_1 \wedge \omega_2 \in N_{\hat{\omega}}^G$. Таким образом, $N_{\hat{\omega}}^G$ одновременно оказывается и гранью в N_ω^G, и симплексом. Согласно предложению 4.3.8, при отождествлении $\omega' = \omega \circ M$ совпадут N_ω^G и $N_{\mathfrak{M}^G}$, а так как $N_{\mathfrak{M}^G}$ — симплекс, то алгебра $\mathfrak{M}^G$ абелева, согласно примеру 4.2.6. Далее,

$$E_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' E_\omega = E_\omega F_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' F_\omega E_\omega = E_\omega \mathfrak{M} E_\omega = E_\omega M(\mathfrak{M}) E_\omega = E_\omega \mathfrak{M}^G E_\omega,$$

а поскольку $E_\omega \in (\mathfrak{M}^G)'$, то $E_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' E_\omega$ абелево. Наконец, из включения $N_{\omega'}^G \subseteq N_\omega^G$ при $\omega' \in N_\omega^G$ следует по тем же самым соображениям, что $E_{\omega'} \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' E_{\omega'}$ абелево при всех $\omega' \in N_\omega^G$.

Один из выводов, которые можно теперь сделать, заключается в том, что коммутационное свойство, применявшееся в определении G-абелевости, на самом деле эквивалентно гораздо более сильному и более «равномерному» свойству коммутативности.

Следствие 4.3.10. *Примем обозначения и предположения теоремы 4.3.9. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G-абелевой;*

(2) *для любого $A \in \mathfrak{A}$ существует в выпуклой оболочке множества $\{\tau_g(A);\ g \in G\}$ такая сеть A_α, что*

$$\lim_\alpha \omega'([\tau_g(A_\alpha),\ B]) = 0$$

при всех $\omega' \in N_\omega^G$ и всех $B \in \mathfrak{A}$ равномерно по $g \in G$.

Доказательство. Ясно, что (2) $\Rightarrow$ (1), но и (1) $\Rightarrow$ (2), в силу оценки, использованной при доказательстве импликации (2) $\Rightarrow$ (1) в предложении 4.3.7. А именно, если

$$S_\lambda(\tau(A)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_{g_i}(A)$$

и $\omega'(A) = (\psi, \pi_\omega(A)\psi)$, то

$$|(\psi, \pi_\omega([\tau_g S_\lambda(\tau(A)), B])\psi)| \leqslant \|B\|\,\|(S_\lambda(U_\omega) - E_\omega)\pi_\omega(A)\psi\| + \\ + \|B\|\,\|(S_\lambda(U_\omega) - E_\omega)\pi_\omega(A^*)\psi\|.$$

Следствие 4.3.11. *Примем обозначения и предположения теоремы 4.3.9. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G-абелевой при всех $\omega \in E_\mathfrak{A}^G$;*

(2) *$E_\mathfrak{A}^G$ является симплексом;*

(3) *алгебра $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$ абелева при всех $\omega \in E_\mathfrak{A}^G$;*

(4) *$\{E_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A}) E_\omega\}$ абелево при всех $\omega \in E_\mathfrak{A}^G$.*

Это следствие является «глобальным» вариантом предложения 4.3.7, которое относится к случаю одного $\omega \in E_\mathfrak{A}^G$, и теоремы 4.3.9, которая касается случая множества π_ω-нормальных G-инвариантных состояний N_ω^G. Этот глобальный вариант немедленно следует из локального (из теоремы 4.3.9), однако любопытно, что эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4) можно простыми рассуждениями установить и непосредственно. В частности, импликация (1) $\Rightarrow$ (2) довольно часто играет роль в приложениях, потому что условие (1) легко проверяемо, а свойство симплексности в сочетании с некоторым свойством сепарабельности гарантирует наличие единственного эргодического разложения у каждого $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$.

Прямое доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (4) получается просто по аналогии с доказательством импликации (1) $\Rightarrow$ (2) в примере 4.2.6, а именно, предположив, что $\{E_{\omega}\pi_{\omega}(\mathfrak{A})\,E_{\omega}\}$ не абелево, можно построить две разные максимальные меры в $M_{\omega}\left(E_{\mathfrak{A}}^{G}\right)$.

Доказательство импликации (4) $\Rightarrow$ (1) содержится в доказательстве предложения 4.3.7. Оно сводится к элементарной выкладке.

Наконец, импликацию (1) $\Rightarrow$ (2) можно получить с помощью эргодической теоремы и следствия 4.1.17. Идея доказательства такова. Сначала устанавливается, что для каждого $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$ и любых $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$

$$(\Omega_{\omega},\ \pi_{\omega}(A_1)\,E_{\omega}\pi_{\omega}(A_2)\,E_{\omega}\ \ldots\ E_{\omega}\pi_{\omega}(A_n)\,\Omega_{\omega}) = \\ = \lim_{\alpha}\omega\left(S_{\lambda^{\alpha}}(\tau(A_1))\,S_{\lambda^{\alpha}}(\tau(A_2))\ \ldots\ S_{\lambda^{\alpha}}(\tau(A_n))\right),$$

где $S_{\lambda^{\alpha}}(\tau(A))$ обозначает подходящую сеть выпуклых комбинаций элементов из $\tau_G(A)$:

$$S_{\lambda^{\alpha}}(\tau(A)) = \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \lambda_i^{\alpha}\tau_{g_i^{\alpha}}(A).$$

Это легко устроить, выбрав сеть так, чтобы соответствующие комбинации $S_{\lambda^{\alpha}}(U_{\omega})$ элементов $U_{\omega}(G)$:

$$S_{\lambda^{\alpha}}(U_{\omega}) = \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \lambda_i^{\alpha} U_{\omega}(g_i^{\alpha}),$$

сильно сходились к E_{ω} на $\mathfrak{H}_{\omega}$. Затем на $C\left(E_{\mathfrak{A}}^{G}\right)$ задается линейный функционал μ_{ω} формулой

$$\mu_{\omega}(\hat{A}_1\ \ldots\ \hat{A}_n) = (\Omega_{\omega},\ \pi_{\omega}(A_1)\,E_{\omega}\pi_{\omega}(A_2)\,E_{\omega}\ \ldots\ E_{\omega}\pi_{\omega}(A_n)\,\Omega_{\omega}).$$

В силу предположенной G-абелевости, $\{E_{\omega}\pi_{\omega}(\mathfrak{A})\,E_{\omega}\}$ абелево, поэтому из теоремы Стоуна—Вейерштрасса и из спектрального анализа, проведенного в доказательстве теоремы 4.1.25, следует, что μ_{ω} определяет на $E_{\mathfrak{A}}^{G}$ вероятностную меру с барицентром ω. Далее, для тех $\omega' \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$, для которых при некотором $\lambda > 0$ выполняется неравенство $\omega' < \lambda\,\omega$, мы имеем

$$\omega'(A) = (C\Omega_{\omega},\ \pi_{\omega}(A)\,\Omega_{\omega}),$$

где $C \in \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(G)'$, как показывает теорема 2.3.19 в сочетании с простыми соображениями инвариантности. Поэтому

$$\begin{aligned}
&(C\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A_1)E_\omega\pi_\omega(A_2)E_\omega \ldots E_\omega\pi_\omega(A_n)\Omega_\omega) = \\
&\quad = \lim_\alpha \omega'\left(S_{\lambda^\alpha}(\tau(A_1)) \ldots S_{\lambda^\alpha}(\tau(A_n))\right) = \\
&\quad = (\Omega_{\omega'},\ \pi_{\omega'}(A_1)E_{\omega'}\pi_{\omega'}(A_2)E_{\omega'} \ldots E_{\omega'}\pi_{\omega'}(A_n)\Omega_{\omega'}) = \\
&\qquad\qquad = \mu_{\omega'}(\widehat{A}_1\widehat{A}_2 \ldots \widehat{A}_n).
\end{aligned}$$

Тем самым отображение $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G \mapsto \mu_\omega \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^G)$ аффинно и $E_{\mathfrak{A}}^G$ — симплекс, согласно следствию 4.1.17. В следующем пункте мы покажем, что эти симплексы $E_{\mathfrak{A}}^G$, образованные инвариантными состояниями, часто обладают необычным геометрическим свойством: их крайние точки слабо* плотны (см. пример 4.3.26).

После такого рассмотрения следствий G-абелевости обратимся к более сильному свойству G-центральности. Начнем с двух характеризаций этого свойства.

Предложение 4.3.12. *Пусть на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ задано представление группы G *-автоморфизмами, $g \in G \mapsto \tau_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$, и на $\mathfrak{A}$ имеется G-инвариантное состояние ω. Следующие условия эквивалентны:*

(1) пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G-центральной;

(2) $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' \cap U_{\omega'}(G)'\}F_{\omega'} = \{\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'\}F_{\omega'}$ при всех $\omega' \in N_\omega^G$, где $F_{\omega'} = [\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'E_{\omega'}]$, $E_{\omega'}$ обозначает проектор на подпространство $U_{\omega'}(G)$-инвариантных векторов в $\mathfrak{H}_{\omega'}$, а $\mathfrak{Z}_{\omega'}$ — центр алгебры $\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})''$.

Доказательство. Для всякого $A \in \mathfrak{A}$ будем через $M_{\omega'}(A)$ обозначать среднее значение оператора $F_{\omega'}\pi_{\omega'}(A)F_{\omega'}$, как оно определено в предложении 4.3.8. Мы покажем, что каждое из условий (1), (2) эквивалентно условию

(3) $(\psi, [M_{\omega'}(A), F_{\omega'}\pi_{\omega'}(B)F_{\omega'}]\psi) = 0$ *при всех* $A, B \in \mathfrak{A}$, $\psi \in F_{\omega'}\mathfrak{H}_{\omega'}$ *и* $\omega' \in N_\omega^G$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\omega' \in N_\omega^G$, и пусть ω'' — состояние, которое мажорируется некоторым кратным состояния ω'. В таком случае по теореме 2.3.19 можно представить ω'' в виде

$$\omega''(A) = (\Omega_{\omega''},\ \pi_{\omega'}(A)\,\Omega_{\omega''}),$$

где $\Omega_{\omega''} = C\Omega_{\omega'}$ при некотором $C = C^* \in \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'$. Примем теперь во внимание, что среднее $M_{\omega'}(A)$ является слабым пределом сети $\pi_{\omega'}(S_{\lambda^\alpha}(\tau(A)))F_{\omega'}$, где $S_{\lambda^\alpha}(\tau(A))$ — это сеть выпуклых комбинаций элементов $\tau_g(A)$:

$$S_{\lambda^\alpha}(\tau(A)) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \tau_{g_i^\alpha}(A).$$

Сославшись на доказательство предложения 4.3.7, мы можем выбрать эту сеть так, чтобы соответствующие комбинации

$$S_{\lambda^\alpha}(U_{\omega'}) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha U_{\omega'}(g_i^\alpha)$$

сильно сходились к $E_{\omega'}$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
&(\Omega_{\omega''}, [M_{\omega'}(A), F_{\omega'}\pi_{\omega'}(B) F_{\omega'}]\, \Omega_{\omega''}) \\
&\qquad = \lim_\alpha (\Omega_{\omega'}, [\pi_{\omega'}(S_{\lambda^\alpha}(\tau(A))) F_{\omega'}, F_{\omega'}\pi_{\omega'}(B) F_{\omega'}]\, C^2\Omega_{\omega'}) \\
&\qquad = (\Omega_{\omega'}, \pi_{\omega'}(A) E_{\omega'}\pi_{\omega'}(B) C^2\Omega_{\omega'}) - (\Omega_{\omega'}, \pi_{\omega'}(B) E_{\omega'}\pi_{\omega'}(A) C^2\Omega_{\omega'}) \\
&\qquad = \lim_\alpha (\Omega_{\omega'}, [\pi_{\omega'}(S_{\lambda^\alpha}(\tau(A))) F_{\omega'}, \pi_{\omega'}(B)]\, C^2\Omega_{\omega'}) \\
&\qquad = (\Omega_{\omega''}, [M_{\omega'}(A), \pi_{\omega'}(B)]\, \Omega_{\omega''}) = \lim_\alpha \omega''([S_{\lambda^\alpha}(\tau(A)), B]).
\end{aligned}$$

Следовательно, (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\omega' \in N_\omega^G$. Если вектор ψ в $\mathfrak{H}_{\omega'}$ инвариантен относительно $U_{\omega'}(G)$ и $A = A^*$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую выпуклую комбинацию $S_\lambda(\tau(A))$ в $\tau_G(A)$:

$$S_\lambda(\tau(A)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_{g_i}(A),$$

для которой

$$\| (\pi_{\omega'}(S_\lambda(\tau(A))) - M_{\omega'}(A))\, \psi \| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

После этого можно выбрать выпуклую комбинацию $S_\mu(U_{\omega'})$ в $U_{\omega'}(G)$ так, чтобы

$$\| (S_\mu(U_{\omega'}) - E_{\omega'})\, \pi_{\omega'}(S_\lambda(\tau(A)))\, \psi \| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Образуем вторичную выпуклую комбинацию $S_\mu S_\lambda(\tau(A))$; для нее

$$\| (\pi_{\omega'}(S_\mu S_\lambda(\tau(A))) - M_{\omega'}(A))\, \psi \| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Наконец, построим третичную выпуклую комбинацию $S_\rho S_\mu S_\lambda(\tau(A))$ элементов из $\tau_G(S_\mu S_\lambda(\tau(A)))$; для нее по-прежнему

$$\| (\pi_{\omega'}(S_\rho S_\mu S_\lambda(\tau(A))) - M_{\omega'}(A))\, \psi \| < \frac{\varepsilon}{6},$$

$$\| \pi_{\omega'}(S_\rho S_\mu S_\lambda(\tau(A)))\, \psi - E_{\omega'}\pi_{\omega'}(A)\, \psi \| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Теперь, если $C = C^* \in \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'$ и $B = B^* \in \mathfrak{A}$, то

$$\begin{aligned}
&|(C\psi, [M_{\omega'}(A), F_{\omega'}\pi_{\omega'}(B) F_{\omega'}]\, C\psi)| = 2\, |\operatorname{Im}(C^2\psi, \pi_{\omega'}(B) F_{\omega'} M_{\omega'}(A)\, \psi)| \\
&\qquad \leqslant (\varepsilon/3)\, \|C\|^2 \|B\| + 2\, |\operatorname{Im}(C^2\psi, \pi_{\omega'}(B) F_{\omega'}\pi_{\omega'}(S_\rho S_\mu S_\lambda(\tau(A)))\, \psi)| \\
&\qquad \leqslant (2\varepsilon/3)\, \|C\|^2 \|B\| + 2\, |\operatorname{Im}(C^2\psi, \pi_{\omega'}(B) E_{\omega'}\pi_{\omega'}(A)\, \psi)| \\
&\qquad \leqslant \varepsilon \|C\|^2 \|B\| + 2\, |\operatorname{Im}(C^2\psi, \pi_{\omega'}(B)\, \pi_{\omega'}(S_\rho S_\mu S_\lambda(\tau(A)))\, \psi)| \\
&\qquad = \varepsilon \|C\|^2 \|B\| + |(C\psi, \pi_{\omega'}([S_\rho S_\mu S_\lambda(\tau(A)), B])\, C\psi)|;
\end{aligned}$$

здесь мы сначала воспользовались выбором S_λ, затем выбором S_μ и также эксплуатировали очевидное соотношение $F_{\omega'}E_{\omega'} = E_{\omega'}$. Мы все еще свободны в выборе выпуклой комбинации S_ρ, так что условие (1) влечет

$$(C\psi,\ [M_{\omega'}(A),\ F_{\omega'}\pi_{\omega'}(B)\, F_{\omega'}]\, C\psi) = 0$$

для самосопряженных A, $B \in \mathfrak{A}$ и $C = C^* \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Но условие (3) тогда прямо вытекает из плотности, благодаря тождеству поляризации.

(2) $\Rightarrow$ (3). Вновь пусть $\omega' \in N_\omega^G$. Условие (2) означает, что для каждого $A \in \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})$ имеется элемент $C \in \mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'$, такой что $M_{\omega'}(A)\, F_{\omega'} = CF_{\omega'}$. Следовательно,

$$[M_{\omega'}(A),\ F_{\omega'}\pi_{\omega'}(B)\, F_{\omega'}] = [C,\ F_{\omega'}\pi_{\omega'}(B)\, F_{\omega'}] = 0,$$

так как $F_{\omega'} \in \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})''$. Итак, условие (3) выполнено.

Остается доказать, что (3) $\Rightarrow$ (2), а для этого нам необходима следующая

Лемма 4.3.13. *Если E — ортогональный проектор в алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}$, действующей в $\mathfrak{H}$, и $\mathfrak{M}_E$ — редуцированная алгебра фон Неймана $E\mathfrak{M}E$ в $E\mathfrak{H}$, то*

$$(\mathfrak{M}_E)' = (\mathfrak{M}')_E.$$

Кроме того, если $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{Z}_E$ является центром $\mathfrak{M}_E$.

Доказательство. Очевидно, что $(\mathfrak{M}_E)' \supseteq \mathfrak{M}'E$ и, значит, $(\mathfrak{M}'E)' \supseteq \mathfrak{M}_E'' = \mathfrak{M}_E$. Наоборот, если T действует в $E\mathfrak{H}$ и $T \in (\mathfrak{M}'E)' \subseteq \{E\}'$, то $TE \in \mathfrak{M}$, или $T \in \mathfrak{M}_E$, и $(\mathfrak{M}'E)' \subseteq \mathfrak{M}_E$. Тем самым $\mathfrak{M}_E = (\mathfrak{M}'E)'$.

Ясно также, что $\mathfrak{Z}_E$ содержится в центре $\mathfrak{M}_E$. Если, однако, $T \in \mathfrak{M}_E \cap \mathfrak{M}_E'$, то $T = T'E$ с $T' \in \mathfrak{M}'$. Пусть $F = [\mathfrak{M}E]$; тогда $F \in \mathfrak{Z}$, и мы утверждаем, что FT' лежит в $\mathfrak{Z}_F$. Для проверки заметим, что отображение $S \in \mathfrak{M}'_F \longmapsto SE \in \mathfrak{M}'_E$ является морфизмом и, более того, изоморфизмом, так как $F = [\mathfrak{M}E]$. Значит, раз $T'E$ лежит в центре алгебры $\mathfrak{M}'_E$, то обязательно $T'F$ содержится в центре $\mathfrak{Z}_F$ алгебры $\mathfrak{M}_F$. Следовательно, $T'F \in \mathfrak{Z}$ и $T = (T'F)\, E \in \mathfrak{Z}_E$.

Конец доказательства предложения 4.3.12. Если $\omega' \in N_\omega^G$ и $\mathfrak{M}^G = \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' \cap U_{\omega'}(G)'$, то условие (3) утверждает, что

$$\mathfrak{M}^G F_{\omega'} = F_{\omega'}\mathfrak{M}^G F_{\omega'} \subseteq \left(F_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' F_{\omega'}\right)'.$$

Но $F_{\omega'} \in \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})''$, поэтому из леммы 4.3.13 следует, что

$$(F_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' F_{\omega'})' = F_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})' F_{\omega'} = \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})' F_{\omega'}.$$

Комбинируя эти соотношения, приходим к включению

$$\mathfrak{M}^G F_{\omega'} \subseteq \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})' F_{\omega'}.$$

Но тогда

$$\mathfrak{M}^G F_{\omega'} \subseteq \left(\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' \cap U_{\omega'}(G)' \cap \pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'\right) F_{\omega'} = \left(\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'\right) F_{\omega'}.$$

Обратное включение, однако, очевидно, так как $\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)' \subseteq \mathfrak{M}^G$. Таким образом, (2) выполнено.

Теперь мы подошли ко второму главному результату теории эргодических разложений.

Теорема 4.3.14. *Пусть $g \in G \mapsto \tau_g \in \mathrm{Aut}(G)$ — представление группы G *-автоморфизмами C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть существует G-инвариантное состояние ω на $\mathfrak{A}$, и пусть E_ω обозначает ортогональный проектор на подпространство в $\mathfrak{H}_\omega$, образованное векторами, инвариантными относительно $U_\omega(G)$. Пусть еще N_ω^G обозначает множество всех π_ω-нормальных G-инвариантных состояний на $\mathfrak{A}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G-центральной;*

(2) *каждое $\omega' \in N_\omega^G$ служит барицентром единственной максимальной меры $\mu' \in M_{\omega'}(E_{\mathfrak{A}}^G)$, и эта мера субцентральна;*

(3) $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}' = \mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'$ *при всех* $\omega' \in N_\omega^G$, *где $\mathfrak{Z}_{\omega'}$ — центр алгебры $\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})''$;*

(4) *семейство $\{E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})E_{\omega'}\}$ абелево, и*

$$\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}'' \cap \{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}' = \mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'$$

при всех $\omega' \in N_\omega^G$.

Доказательство. Прежде всего рассмотрим условия (2) и (3). Если (2) имеет место, то μ' — ортогональная мера, соответствующая $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}'$ согласно предложению 4.3.3, а по определению субцентральной меры

$$\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}' \subseteq \mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'.$$

Поскольку противоположное включение тривиально, условие (3) выполняется. Обратно, если (3) верно, то алгебра $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}'$ абелева, так что условие (2) следует из предложения 4.3.3.

Следующим шагом будет доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (3), но для этого нужна

Лемма 4.3.15. *Пусть абелева алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ имеет циклический вектор Ω. Тогда $\mathfrak{M}$ — максимальная абелева алгебра, т. е. $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$, то вектор Ω — отделяющий для $\mathfrak{M}$, в силу предложения 2.5.3. Если Δ и J — модулярный оператор и модулярная инволюция, ассоциированные с $(\mathfrak{M}, \Omega)$, то $\Delta = 1$ и $J = S$, потому что $\|SA\Omega\|^2 = \|A^*\Omega\|^2 = \|A\Omega\|^2$.

Но в таком случае $JAJB\Omega = JAB^*\Omega = BA^*\Omega = A^*B\Omega$. Следовательно, $JAJ = A^*$. Поскольку $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$ по теореме 2.5.14, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}'$.

Конец доказательства теоремы 4.3.14. (1) $\Rightarrow$ (3). Согласно теореме 4.3.9, условие (1) влечет абелевость $\{E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})E_{\omega'}\}$. Кроме того, если $\mathfrak{M} = \{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}''$, то

$$E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})''E_{\omega'} = E_{\omega'}\mathfrak{M}E_{\omega'}.$$

Далее, $E_{\omega'} \in U_{\omega'}(G)'' \subseteq \mathfrak{M}$ по эргодической теореме. Но $E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})E_{\omega'}$ имеет в $E_{\omega'}\mathfrak{H}_{\omega'}$ циклический вектор $\Omega_{\omega'}$, поэтому, последовательно применяя леммы 4.3.15 и 4.3.13, получаем

$$E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'E_{\omega'} = (E_{\omega'}\mathfrak{M}E_{\omega'})''E_{\omega'} = E_{\omega'}\mathfrak{M}'E_{\omega'}.$$

В таком случае

$$\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})' \cap U_{\omega'}(G)'\} E_{\omega'} = \{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' \cap U_{\omega'}(G)'\} E_{\omega'} = \{\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'\} E_{\omega'};$$

второе равенство следует из условия (2) предложения 4.3.12. Наконец, $E_{\omega'}\mathfrak{H}_{\omega'}$ циклично для $\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})''$, а потому

$$\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})' \cap U_{\omega'}(G)' = \mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'.$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Так как центр $\mathfrak{Z}_{\omega'}$ абелев, то автоматически абелевым будет $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}'$, поэтому, по теореме 4.3.9, абелево $E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) E_{\omega'}$. Положив опять

$$\mathfrak{M} = \{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}'',$$

получаем

$$\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)' \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}' = \mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)';$$

два первых включения здесь тривиальны, а третье следует из условия (3).

(4) $\Rightarrow$ (3). Вновь заметим, что $E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' E_{\omega'} = E_{\omega'}\mathfrak{M}E_{\omega'}$ и $E_{\omega'} \in U_{\omega'}(G)'' \subseteq \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} = \{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}''$. Поскольку $E_{\omega'}\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' E_{\omega'}$ абелево, те же рассуждения, которые доказывают импликацию (1) $\Rightarrow$ (3), дают $E_{\omega'}\mathfrak{M}E_{\omega'} = E_{\omega'}\mathfrak{M}'E_{\omega'}$. Далее, применив второе утверждение леммы 4.3.13, получим

$$E_{\omega'}\mathfrak{M}'E_{\omega'} = E_{\omega'}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}') E_{\omega'}.$$

Поэтому условие (4) приводит к равенству

$$\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}' E_{\omega'} = \{\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'\} E_{\omega'}.$$

Наконец, $E_{\omega'}\mathfrak{H}_{\omega'}$ циклично для $\pi_{\omega}(\mathfrak{A})''$, так что (3) выполняется.

(3) $\Rightarrow$ (1). В силу предложения 4.3.12 достаточно доказать, что

$$\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' \cap U_{\omega'}(G)'\} F_{\omega'} = \{\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'\} F_{\omega'}.$$

Для этого рассмотрим отображение $\varkappa_\mu$, ассоциированное с ортогональной мерой μ, отвечающей $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}'$, и отображение M, построенное в предложении 4.3.8. Для $A \in \mathfrak{A}$ имеем

$$M(A) E_{\omega'} = E_{\omega'}\pi_{\omega'}(A) E_{\omega'} = \varkappa_\mu(\widehat{A}) E_{\omega'}.$$

Образ отображения $\varkappa_\mu$ содержится в $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega'}(G)\}'$, а последнее множество входит в $\mathfrak{Z}_{\omega'}$ по условию (3). Поэтому, умножив последнее соотношение на $\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'$, находим, что

$$M(A) F_{\omega'} = \varkappa_\mu(\widehat{A}) F_{\omega'} \subseteq \{\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'\} F_{\omega'}.$$

Учитывая, что образ $\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})''$ при отображении M совпадает с $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' \cap U_{\omega'}(G)'\} F_{\omega'}$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'\} F_{\omega'} &\subseteq \{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})'' \cap U_{\omega'}(G)'\} F_{\omega'} \\ &\subseteq \{\mathfrak{Z}_{\omega'} \cap U_{\omega'}(G)'\} F_{\omega'},\end{aligned}$$

и этим завершается доказательство.

Как это было и со свойством G-абелевости, свойство G-центральности в действительности равносильно некоторому на первый взгляд значительно более сильному коммутационному свойству.

Следствие 4.3.16. *Примем предположения теоремы* 4.3.14. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *пара* $(\mathfrak{A}, \omega)$ *является G-центральной;*

(2) *для всякого* $A \in \mathfrak{A}$ *существует сеть* A_α *в выпуклой оболочке множества* $\{\tau_g(A);\ g \in G\}$, *такая что*

$$\lim_\alpha \omega''([\tau_g(A_\alpha), B]) = 0$$

при всех ω'', *удовлетворяющих неравенству* $\omega'' < \lambda\,\omega'$ *для некоторых* $\lambda > 0$ *и* $\omega' \in N_\omega^G$, *и при всех* $B \in \mathfrak{A}$, *равномерно по* $g \in G$.

Условие (2) очевидным образом влечет (1), а для проверки обратной импликации надо воспроизвести оценки, использованные в доказательстве предложения 4.3.12. Сначала выбирается сеть $S_\lambda{}^\alpha(\tau(A))$ выпуклых комбинаций элементов из $\tau_G(A)$, для которой сеть $\pi_\omega(S_\lambda{}^\alpha(\tau(A)))\,E_\omega$ сильно сходится к $M_\omega(A)\,E_\omega$. Затем выбирается такая вторая сеть $S_\mu{}^\beta$ выпуклых комбинаций в $U_\omega(G)$, что $S_\mu{}^\beta(U_\omega)$ сильно сходится к E_ω. После этого вводится $A_{\alpha,\beta}$ формулой

$$A_{\alpha,\beta} = S_\mu{}^\beta S_\lambda{}^\alpha(\tau(A))$$

и с помощью оценок, применявшихся в доказательстве предложения 4.3.12, проверяется, что эта двойная сеть сходится, и притом равномерно по g.

4.3.2. Эргодические состояния

В предыдущем пункте мы рассмотрели разложение G-инвариантных состояний с помощью максимальных ортогональных мер на пространстве $E_{\mathfrak{A}}^G$. Эта теория выступает как прямое обобщение теории разложения для состояний абелевой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$; свойство абелевости заменяется свойством G-абелевости или G-центральности, а вместо множества состояний $E_{\mathfrak{A}}$ рассматривается множество G-инвариантных состояний $E_{\mathfrak{A}}^G$. Таким образом, множество G-эргодических состояний $\mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^G\right)$ соответствует множеству чистых состояний $\mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$ абелевой алгебры, и можно рассчитывать, что они обладают сходными свойствами. В этом пункте мы проанализируем такую аналогию в случае произвольной группы G, а в следующем пункте изучим дальнейшие подробности для случая локально-компактных абелевых групп, действие которых непрерывно. В обоих этих пунктах мы считаем, что G действует как группа *-автоморфизмов τ алгебры $\mathfrak{A}$, причем несущественно, есть ли у $\mathfrak{A}$ единица.

Чистые состояния абелевой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ обладают рядом отличительных черт. Прежде всего, они порождают неприводимые представления, которые автоматически будут одномерными; далее, согласно следствию 2.3.21, они факторизуются, т. е. удовлетворяют соотношению мультипликативности

$$\omega(AB) = \omega(A)\,\omega(B)$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$. Каждое из этих свойств имеет аналог для случая G-эргодических состояний, однако теперь в игру решающим образом входят группа G и ее представление $U_\omega(G)$. Пусть E_ω обозначает ортогональный проектор в $\mathfrak{H}_\omega$ на подпространство, состоящее из векторов, инвариантных относительно $U_\omega(G)$. В приведенной ниже таблице перечислены эквивалентные свойства для состояния ω на абелевой алгебре, а также аналоги этих свойств для G-абелевой пары $(\mathfrak{A}, \omega)$ (впоследствии будет доказана эквивалентность свойств и во втором столбце).

Абелев случай	G-абелев случай
$\mathfrak{H}_\omega$ одномерно	$E_\omega\mathfrak{H}_\omega$ одномерно
$\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}})$	$\omega \in \mathscr{E}\left(E^{G}_{\mathfrak{A}}\right)$
$\pi_\omega(\mathfrak{A})$ непрнводимо	$\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}$ неприводимо
$\omega(AB) = \omega(A)\,\omega(B)$	$\inf\limits_{A' \in \mathrm{Co}\,\tau_G(A)} \lvert \omega(A'B) - \omega(A)\,\omega(B) \rvert = 0$

(В нижней строке второго столбца символ $\mathrm{Co}\tau_G(A)$ по-прежнему обозначает выпуклую оболочку множества $\{\tau_g(A);\ g \in G\}$.)

Свойство «приближенной» факторизации, фигурирующее в G-абелевом случае, часто называют *кластерным*[1] *свойством* (или *свойством перемешивания*). В дальнейшем нам встретятся более общие кластерные свойства типа

$$\inf_{B' \in \mathrm{Co}\,\tau_G(B)} \lvert \omega(AB'C) - \omega(AC)\,\omega(B) \rvert = 0.$$

Кластерное свойство с двумя элементами-сомножителями эквивалентно спектральному свойству группы $U_\omega(G)$, состоящему в одномерности проектора E_ω, и при довольно общих предположениях можно вывести и более сильные спектральные ограничения из кластерных свойств с тремя элементами. На этом мы остановимся в пункте 4.3.3.

Некоторые из эквивалентностей между свойствами, указанными в правом столбце таблицы, не зависят от предположения о G-абелевости пары $(\mathfrak{A}, \omega)$. Мы начнем с результата, который характеризует понятия неприводимости и эргодичности.

[1] От английского cluster (гроздь, кисть, связка, пучок, группа). — *Прим. ред.*

Теорема 4.3.17. *Сопоставим состоянию $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$ ортогональный проектор E_{ω} на подпространство векторов из $\mathfrak{H}_{\omega}$, инвариантных относительно $U_{\omega}(G)$, и пусть $\mathbb{1}_{\omega}$ обозначает единичный оператор в $\mathfrak{H}_{\omega}$. Рассмотрим следующие условия:*

(1) ранг E_{ω} равен единице;

(2) состояние $\omega \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{G}\right)$, т. е. состояние ω является G-эргодическим;

(3) $\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega}(G)\}''$ — неприводимая алгебра в $\mathfrak{H}_{\omega}$;

(4) $\{\mathfrak{Z}_{\omega} \cap U_{\omega}(G)'\} = \{\mathbb{C}\mathbb{1}_{\omega}\}$, где $\mathfrak{Z}_{\omega} = \pi_{\omega}(\mathfrak{A})'' \cap \pi_{\omega}(\mathfrak{A})'$.

В общем случае (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4).

Если дополнительно предположить G-абелевость пары $(\mathfrak{A}, \omega)$, то (2) $\Rightarrow$ (1), а в случае G-центральности $(\mathfrak{A}, \omega)$ все приведенные условия эквивалентны.

Доказательство. (2) $\Leftrightarrow$ (3). Опираясь на теорему 2.3.19 и G-инвариантность ω, мы легко проверяем, что (2) нарушается тогда и только тогда, когда существует ненулевой самосопряженный оператор $T \in \{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega}(G)\}'$, который не пропорционален $\mathbb{1}_{\omega}$. Последнее же условие, согласно предложению 2.3.8, равносильно нарушению (3). Тем самым условия (2) и (3) неверны, а потому и верны одновременно.

(1) $\Rightarrow$ (3). По предположению, E_{ω} проектирует на подпространство, натянутое на Ω_{ω}. Из цикличности этого вектора для $\pi_{\omega}(\mathfrak{A})$ следует неприводимость $\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup E_{\omega}\}$, но эргодическая теорема (предложение 4.3.4) показывает, однако, что $\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup E_{\omega}\} \subseteq \{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega}(G)\}''$, так что последнее множество неприводимо.

(3) $\Rightarrow$ (4). Условие (3) эквивалентно тому, что $\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A})' \cap U_{\omega}(G)'\} = \{\mathbb{C}\mathbb{1}_{\omega}\}$. Но

$$\{\mathfrak{Z}_{\omega} \cap U_{\omega}(G)'\} \subseteq \{\pi_{\omega}(\mathfrak{A})' \cap U_{\omega}(G)'\},$$

поэтому (4) выполняется.

Далее, допустим, что пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G-абелевой. Если $\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega}(G)\}$ — неприводимое операторное семейство в $\mathfrak{H}_{\omega}$, то $E_{\omega}\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega}(G)\}E_{\omega}$ неприводимо в $E_{\omega}\mathfrak{H}_{\omega}$. Но

$$E_{\omega}\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega}(G)\}E_{\omega} = E_{\omega}\pi_{\omega}(\mathfrak{A})E_{\omega},$$

а последнее множество операторов абелево, в силу предложения 4.3.7. Таким образом, E_{ω} должен иметь ранг единица, т. е. (3) $\Rightarrow$ (1).

Наконец, при условии G-центральности $(\mathfrak{A}, \omega)$ имеем по теореме 4.3.14

$$\{\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup U_{\omega}(G)\}' = \{\mathfrak{Z}_{\omega} \cap U_{\omega}(G)'\},$$

поэтому (4) $\Rightarrow$ (3).

Отметим, что в случае алгебры $\mathfrak{A} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, если взять в качестве ω какое-нибудь векторное состояние, а в качестве G — группу из одного элемента, представленную тождественным автоморфизмом, то условие (2) будет выполнено, а (1) нарушено, в предположении что размерность $\mathfrak{H}$ превосходит единицу. Таким образом, G-абелевость необходима для импликации (2) $\Rightarrow$ (1). Следующий пример показывает необходимость G-центральности для импликации (4) $\Rightarrow$ (3).

Пример 4.3.18. Пусть $\mathfrak{A} = M_2$ — алгебра комплексных 2×2-матриц $\{A_{ij}\}$, группа G состоит из диагональных унитарных элементов $g \in \mathfrak{A}$ и $\tau_g(A) = gAg^{-1}$. Тогда G-инвариантные состояния $\mathfrak{A}$ имеют вид

$$\omega_\lambda(\{A_{ij}\}) = \lambda A_{11} + (1-\lambda) A_{22}$$

при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, и существуют два несовпадающих G-эргодических состояния ω_0 и ω_1. Далее, $E_{\omega_\lambda} = [\pi_{\omega_\lambda}(D)\,\Omega_{\omega_\lambda}]$, где D — множество диагональных матриц, следовательно, пара $(\mathfrak{A}, \omega_\lambda)$ является G-абелевой. Но при $\lambda \neq 0$ или 1 состояние ω_λ не будет G-эргодическим. Тем не менее $\mathfrak{Z}_{\omega_\lambda} \cap U_{\omega_\lambda}(G)' = \{\mathbb{C}\mathbb{1}_{\omega_\lambda}\}$. Тем самым импликация (4) $\Rightarrow$ (3) в теореме 4.3.17 не имеет места, и потому $(\mathfrak{A}, \omega_\lambda)$ не может быть G-центральной. Отметим, что при λ, не равном 0 или 1, вектор Ω_{ω_λ} для $\pi_{\omega_\lambda}(\mathfrak{A})$ будет отделяющим. Этим обстоятельством мы в дальнейшем воспользуемся.

Пусть $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$. Условие (4) теоремы 4.3.17:

$$\{\mathfrak{Z}_\omega \cap U_\omega(G)'\} = \{\mathbb{C}\mathbb{1}_\omega\},$$

иногда называют условием *центральной эргодичности*, а соответствующие состояния именуют *центрально-эргодическими*. Свойства эквивалентности и дизъюнктности для таких состояний представляют определенный интерес, и следующая теорема обобщает предложение 2.4.27 на случай центрально-эргодических состояний.

Теорема 4.3.19. *Если $\omega_1, \omega_2 \in E_{\mathfrak{A}}^G$ — центрально-эргодические состояния, то они либо квазиэквивалентны, либо дизъюнктны, причем квазиэквивалентны они тогда и только тогда, когда $(\omega_1 + \omega_2)/2$ центрально-эргодично. Более того, следующие два условия эквивалентны:*

(1) *все центрально-эргодические состояния эргодичны, т. е. для $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$*

$$\text{если } \mathfrak{Z}_\omega \cap U_\omega(G)' = \{\mathbb{C}\mathbb{1}_\omega\}, \text{ то } \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(G)' = \{\mathbb{C}\mathbb{1}_\omega\};$$

(2) *если состояния ω_1 и ω_2 центрально-эргодичны, то либо $\omega_1 = \omega_2$, либо $\omega_1 \perp \omega_2$.*

В частности, если пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ при всех $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$ является G-центральной, то все центрально-эргодические состояния будут эргодическими и любые два центрально-эргодических состояния ω_1, ω_2 или совпадают, или дизъюнктны.

Доказательство. Предположим, что $\omega_1, \omega_2 \in E_{\mathfrak{A}}^G$ центрально-эргодичны, и рассмотрим соответствующие представления $(\mathfrak{H}_i, \pi_i, U_i, \Omega_i)$, $i = 1, 2$. Введем

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \quad \pi = \pi_1 \oplus \pi_2, \quad U = U_1 \oplus U_2,$$

$$\mathfrak{Z} = \pi(\mathfrak{A})'' \cap \pi(\mathfrak{A})', \quad \mathfrak{Z}^G = \mathfrak{Z} \cap U(G)',$$

$$P_1 = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}_1} \oplus 0, \quad P_2 = 0 \oplus \mathbb{1}_{\mathfrak{H}_2},$$

$$E = [\pi(\mathfrak{A})(\Omega_1 \oplus \Omega_2)], \quad P = [\pi(\mathfrak{A})' P_1 \mathfrak{H}].$$

Поскольку $P_1 \in \pi(\mathfrak{A})'$, то $P \in \pi(\mathfrak{A})'' \cap \pi(\mathfrak{A})'$. Кроме того, так как $P_1 \in U(G)'$, а $U(g)\,\pi(\mathfrak{A})'\,U(g)^* = \pi(\mathfrak{A})'$ при всех $g \in G$, то $P \in U(G)'$, и можно заключить, что $P \in \mathfrak{Z}^G$.

Очевидно, $PP_1 = P_1P = P_1$. Положим $Q = PP_2 = P_2P$; тогда $Q \in \pi(\mathfrak{A})'$. Тем самым оператор P_2Q, рассматриваемый как оператор в $\mathfrak{H}_2$, содержится в $\pi_2(\mathfrak{A})'$. Кроме того, $Q \in U(G)'$, следовательно, $P_2Q \in U(G)'$. Но раз $P \in \pi(\mathfrak{A})''$, должна найтись такая сеть $\{A_\alpha\} \subset \mathfrak{A}$, что $\pi(A_\alpha) \to P$ сильно, а тогда $\pi(A_\alpha)\,P_2 = \pi_2(A_\alpha) \to QP_2$. Следовательно, $QP_2 \in \pi_2(\mathfrak{A})''$ и, наконец, $P_2Q \in \pi_2(\mathfrak{A})'' \cap \pi_2(\mathfrak{A})' \cap U_2(G)' = \mathfrak{Z}_2^G = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}_2}$; последнее равенство опирается на центральную эргодичность ω_2.

Мы приходим к выводу, что для $P = [\pi(\mathfrak{A})'\,P_1\mathfrak{H}]$ имеются две возможности:

$$\text{а) } P = P_1; \text{ б) } P = P_1 + P_2 = 1_{\mathfrak{H}}.$$

Если выполняется а), то $P_1 \in \pi(\mathfrak{A})''$. Поэтому для всякой частичной изометрии $U \in \pi(\mathfrak{A})'$ будет $UP_1 = P_1U$. Значит, π_1 и π_2 не имеют унитарно эквивалентных подпредставлений, и, стало быть, они дизъюнктны в соответствии с замечаниями, сделанными перед леммой 4.2.8. Если $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, то $\pi_\omega(A) = \pi(A)\,E$ и P_1E совпадает с некоторым нетривиальным проектором в $\mathfrak{Z}_\omega^G$. Следовательно, ω не может быть центрально-эргодическим.

Если выполняется б), то $\pi(\mathfrak{A})'\,P_1\mathfrak{H}$ плотно в $\mathfrak{H}$, и с помощью полярного разложения мы получаем, что для всякого ненулевого проектора из $\pi_2(\mathfrak{A})'$ существует такой ненулевой частично изометрический оператор $U \in \pi(\mathfrak{A})'$, что $UU^* \leqslant Q_0$, $U^*U \leqslant P_1$. Тем самым $Q_0\pi_2$ содержит подпредставление, которое унитарно эквивалентно некоторому подпредставлению представления π_1. Меняя ролями π_1 и π_2, убеждаемся, что всякое подпредставление представления π_1 содержит представление, унитарно эквивалентное некоторому подпредставлению представления π_2; значит, π_1 и π_2 квазиэквивалентны, по теореме 2.4.26. В таком случае $\mathfrak{Z}^G = \mathbb{C}P = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}}$, и $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ оказывается центрально-эргодическим по тем же соображениям, что и в случае а).

Теперь докажем эквивалентность фигурирующих в теореме условий (1) и (2).

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть ω_1 и ω_2 — два недизъюнктных центрально-эргодических состояния в $E_{\mathfrak{A}}^G$. Тогда ω_1 и ω_2 квазиэквивалентны, а $(\omega_1 + \omega_2)/2$ центрально-эргодично, согласно первой части теоремы. Но в этом случае $(\omega_1 + \omega_2)/2 \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^G\right)$ по условию (1), поэтому $\omega_1 = \omega_2 = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть ω — центрально-эргодическое состояние, и пусть $\omega_1, \omega_2 \in E_{\mathfrak{A}}^G$ таковы, что $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Поскольку $\omega_i \leqslant 2\omega$, по теореме 2.3.19 должны найтись такие векторы $\Omega_i \in \mathfrak{H}_\omega$, что

$$\omega_i(A) = (\Omega_i, \pi_\omega(A)\,\Omega_i), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Значит, π_{ω_i} унитарно эквивалентно подпредставлению представления π_ω, определенному проектором $P_i = [\pi_\omega(\mathfrak{A})\,\Omega_i] \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Но тогда $\mathfrak{Z}_{\omega_i} = P_i\mathfrak{Z}_\omega$ по лемме 4.3.13, и потому $\mathfrak{Z}_{\omega_i}^G = P_i\mathfrak{Z}_\omega^G = \mathbb{C}P_i$. Следовательно, ω_1 и ω_2 центрально-эргодичны, а так как и $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ — центрально-эргодическое состояние, то, согласно первой части теоремы, ω_1 и ω_2 квазиэквивалентны. Но тогда $\omega_1 = \omega_2$ по условию (2), так что ω — крайняя точка в $E_{\mathfrak{A}}^G$, т. е. ω — эргодическое состояние.

Последнее утверждение теоремы следует из импликации (4) $\Rightarrow$ (2) теоремы 4.3.17 в сочетании с импликацией (1) $\Rightarrow$ (2) настоящей теоремы.

Возвратимся теперь к изучению критериев эргодичности. Следующий результат показывает, что условия G-абелевости и G-центральности в теореме 4.3.17 можно до некоторой степени заменить требованием, чтобы вектор Ω_ω был отделяющим.

Теорема 4.3.20. *Примем обозначения теоремы 4.3.17 и рассмотрим следующие условия:*

(1) $\{\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(G)'\} = \{\mathbb{C}\mathbb{1}_\omega\}$;

(2) *проектор* E_ω *одномерен*;

(3) $\omega \in \mathscr{E}\left(E^G_{\mathfrak{A}}\right)$, *т. е. состояние* ω *является* G*-эргодическим;*

(4) $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}$ *неприводимо в* $\mathfrak{H}_\omega$.

Имеют место импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.

Кроме того, из (1) *следует, что вектор* Ω_ω *— отделяющий для* $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$. *Обратно, если* Ω_ω *— отделяющий вектор для* $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, *то все четыре условия эквивалентны.*

Доказательство. Сначала предположим, что выполняется (1), и введем $P_\omega = [\pi_\omega(\mathfrak{A})'\,\Omega_\omega]$. Ясно, что

$$P_\omega \in \{\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(G)'\}.$$

Тем самым $P_\omega = \mathbb{1}_\omega$ по предположению. Следовательно, вектор Ω_ω — циклический для $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, согласно предложению 2.5.3.

$(1) \Rightarrow (2)$. Предложением 4.3.8 гарантируется существование единственной нормальной G-инвариантной проекции $M: \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \to \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(G)'$ со свойством $M(A)\,E_\omega = E_\omega A E_\omega$. Тем самым, если $M(\pi_\omega(\mathfrak{A})'') = \mathbb{C}\mathbb{1}_\omega$, то E_ω имеет ранг 1.

Импликации $(2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ следуют из теоремы 4.3.17.

Наконец, предположим, что вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, и пусть Δ, J — модулярный оператор и модулярная инволюция, ассоциированные с парой $(\pi_\omega(\mathfrak{A})'', \Omega_\omega)$. Поскольку

$$J\Delta^{1/2}U_\omega(g)\,A\Omega_\omega = S\tau_g(A)\,\Omega_\omega = \tau_g(A^*)\,\Omega_\omega = U_\omega(g)\,J\Delta^{1/2}A\Omega_\omega$$

при $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, а $\pi_\omega(\mathfrak{A})''\,\Omega_\omega$ образует существенную область определения для $\Delta^{1/2}$, то $J\Delta^{1/2}U_\omega(g) = U_\omega(g)\,J\Delta^{1/2}$. Вследствие единственности полярного разложения имеем $JU_\omega(g) = U_\omega(g)\,J$. Но $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' = J\pi_\omega(\mathfrak{A})'J$, так что

$$\{\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(G)'\} = J\,\{\pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(G)'\}\,J.$$

Таким образом, $(4) \Rightarrow (1)$.

Теорема 4.3.20 является аналогом теоремы 4.3.17, однако в ней опущено условие центральной эргодичности $\mathfrak{Z}_\omega \cap U_\omega(G)' = \mathbb{C}\mathbb{1}_\omega$ и введено другое условие $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(G)' = \mathbb{C}\mathbb{1}_\omega$. Мы уже, однако, отмечали в примере 4.3.18, что из центральной эргодичности не следует эргодичность ω, даже если вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Следующий пример дополняет картину, демонстрируя, что эргодичность ω не обязана повлечь свойство $\{\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(G)'\} = \{\mathbb{C}\mathbb{1}_\omega\}$ даже при условии G-центральности $(\mathfrak{A}, \omega)$.

Пример 4.3.21. Пусть $\mathfrak{A} = \mathscr{L}(\mathfrak{H})$, причем размерность $\mathfrak{H}$ выше единицы, и пусть U — унитарный оператор с простым собственным значением единица, которому отвечает «единственный» нормированный собственный вектор Ω. Пусть $G = \mathbb{Z}$ и $\tau_n(A) = U^n A U^{-n}$, $A \in \mathfrak{A}$. Состояние ω, определенное формулой

$$\omega(A) = (\Omega, A\Omega),$$

G-инвариантно, и проектор E_ω одномерен, с областью значений $\mathbb{C}\Omega$. Поэтому ω будет G-эргодическим, а также и единственным π_ω-нормальным G-инвариантным состоянием. Значит, G-центральная пара $(\mathfrak{A}, \omega)$, так как $\pi_\omega(\mathfrak{A})' = \mathfrak{Z}_\omega = \mathbb{C}1_\omega$. Тем не менее существуют нетривиальные $A \in \mathfrak{A}$, которые коммутируют с U, например сам U, следовательно, условие (1) теоремы 4.3.20 не выполнено.

Займемся теперь характеризацией эргодичности посредством кластерных свойств. Критерии, содержащиеся в последующих теоремах, не служат непосредственно критериями эргодичности, а представляют собой условия одномерности проектора E_ω на множество инвариантных векторов. Тем самым можно будет получать критерии эргодичности с помощью теорем 4.3.17 и 4.3.20. Приводимый ниже результат, по сути дела, является алгебраической перефразировкой эргодической теоремы.

***Теорема* 4.3.22.** *Пусть $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$ и E_ω обозначает ортогональный проектор на подпространство в $\mathfrak{H}_\omega$, образованное векторами, инвариантными относительно $U_\omega(G)$. Далее, для всякого $A \in \mathfrak{A}$ пусть $\operatorname{Co}\tau_G(A)$ обозначает выпуклую оболочку множества $\{\tau_g(A);\ g \in G\}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *ранг E_ω равен единице;*

(2) $\inf_{B' \in \operatorname{Co}\tau_G(B)} |\omega(AB') - \omega(A)\,\omega(B)| = 0$ *при всех A, $B \in \mathfrak{A}$;*

(3) *для любого $B \in \mathfrak{A}$ существует такая сеть $\{B_\alpha\} \subseteq \operatorname{Co}\tau_g(B)$, что*

$$\lim_\alpha |\omega(A\tau_g(B_\alpha)) - \omega(A)\,\omega(B)| = 0$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$ равномерно по $g \in G$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (3). По эргодической теореме (предложение 4.3.4) найдется такая сеть $\{S_\lambda^\alpha(U_\omega)\}$ выпуклых комбинаций операторов $U_\omega(g)$:

$$S_\lambda^\alpha(U_\omega) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha U_\omega(g_i^\alpha),$$

что $U_\omega(g)\,S_\lambda^\alpha(U_\omega)$ сильно сходится в $\mathfrak{H}_\omega$ равномерно по g к одномерному проектору E_ω на $\mathbb{C}\Omega_\omega$. Следовательно, для $B_\alpha = S_\lambda^\alpha(\tau(B))$, где

$$S_\lambda^\alpha(\tau(B)) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \tau_{g_i^\alpha}(B),$$

равномерно по g

$$\lim_\alpha |\omega(A\tau_g(B_\alpha)) - \omega(A)\,\omega(B)| = 0.$$

(3) $\Rightarrow$ (2). Это очевидно

(2) $\Rightarrow$ (1). При фиксированном $\varepsilon > 0$ с помощью эргодической теоремы можно выбрать для каждого $B \in \mathfrak{A}$ такой $B' \in \operatorname{Co} \tau_G(B)$, что

$$\|(\pi_\omega(B') - E_\omega \pi_\omega(B)\Omega_\omega\| < \varepsilon.$$

Тем самым

$$\begin{aligned} &|(\Omega_\omega, \pi_\omega(A) E_\omega \pi_\omega(B)\Omega_\omega) - (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega)(\Omega_\omega, \pi_\omega(B)\Omega_\omega)| \\ &\qquad = |(\Omega_\omega, \pi_\omega(A') E_\omega \pi_\omega(B)\Omega_\omega) - (\Omega_\omega \pi_\omega(A)\Omega_\omega)(\Omega_\omega, \pi_\omega(B')\Omega_\omega)| \\ &\qquad \leqslant \varepsilon\|A\| + |\omega(A'B') - \omega(A)\omega(B')| \end{aligned}$$

при всех $A' \in \operatorname{Co}\tau_G(A)$. Следовательно, условие (2) влечет

$$(\Omega_\omega, \pi_\omega(A) E_\omega \pi_\omega(B)\Omega_\omega) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega)(\Omega_\omega, \pi_\omega(B)\Omega_\omega),$$

и, в силу цикличности, E_ω оказывается одномерным проектором на $\mathbb{C}\Omega_\omega$.

Следующая теорема показывает, что свойство одномерности E_ω может быть также охарактеризовано трехэлементным кластерным свойством, если вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$.

Теорема 4.3.23. *Примем предположения и обозначения теоремы* 4.3.22. *Рассмотрим условия:*

(1) *ранг E_ω равен единице;*

(2) $\inf_{B' \in \operatorname{Co}\tau_G(B)} |\omega(AB'C) - \omega(AC)\omega(B)| = 0$
при всех $A, B, C \in \mathfrak{A}$;

(3) *для всякого $B \in \mathfrak{A}$ существует сеть $\{B_\alpha\} \subseteq \operatorname{Co}\tau_G(B)$, такая что*

$$\lim_\alpha |\omega(A\tau_g(B_\alpha)C) - \omega(AC)\omega(B)| = 0$$

при всех $A, C \in \mathfrak{A}$ равномерно по $g \in G$.
Справедливы импликации (1) $\Leftarrow$ (2) $\Leftarrow$ (3), *а если вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то все три условия эквивалентны.*

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (2). Это очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если $\mathfrak{A}$ обладает единицей $\mathbb{1}$, то, взяв $C = \mathbb{1}$, мы убедимся, что наше условие (2) влечет условие (2) из теоремы 4.3.22. Но последнее условие эквивалентно (1). Если $\mathfrak{A}$ не обладает единицей, то выберем по $\varepsilon > 0$ такой C, что $\|\pi_\omega(C)\Omega_\omega - \Omega_\omega\| < \varepsilon$. Тогда

$$|\omega(AB') - \omega(A)\omega(B)| \leqslant 2\varepsilon\|A\|\|B\| + |\omega(AB'C) - \omega(AC)\omega(B)|.$$

Требуемое заключение вновь следует из теоремы 4.3.22.

Наконец, предположим, что вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, и рассмотрим импликацию (1) $\Rightarrow$ (3).

Если E_ω — проектор ранга 1, то по теореме 4.3.22 существует сеть $\{B_\alpha\} \subseteq \operatorname{Co}\tau_G(B)$, такая что сеть $\pi_\omega(\tau_g(B_\alpha))\Omega_\omega$ слабо сходится к $\omega(B)\Omega$. Если, однако, вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то он цикличен для $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и поэтому $\pi_\omega(\tau_g(B_\alpha))$ слабо сходится к $\omega(B)\mathbb{1}_\omega$. Но это эквивалентно условию (3).

Отметим, что пример 4.3.21 относится к ситуации, когда Ω_ω — единственный $U_\omega(G)$-инвариантный вектор в $\mathfrak{H}_\omega$; следовательно, кластерные свойства теоремы 4.3.22 будут выполнены. Тем не менее условия (2) и (3) теоремы 4.3.23 не удовлетворяются в этом примере, так как $\mathfrak{A}$ содержит много нетривиальных элементов, которые инвариантны относительно действия τ группы G. Таким образом, условия теоремы 4.3.23 в общем случае не эквивалентны. Однако имеется целый ряд ситуаций, в которых гарантируется эквивалентность. Например, свойство Ω_ω быть отделяющим, которое предполагается в теореме 4.3.23, может быть заменено одной из форм асимптотической абелевости. В частности, если G-инвариантное состояние ω удовлетворяет условию

$$\inf_{B' \in \operatorname{Co} \tau_G(B)} |\omega(A[B', C])| = 0$$

при всех $A, B, C \in \mathfrak{A}$, то из равномерности сходимости, утверждаемой в условии (3) теоремы 4.3.22, следует, что двухэлементное кластерное свойство

$$\inf_{B' \in \operatorname{Co} \tau_G(B)} |\omega(AB') - \omega(A)\omega(B)| = 0, \quad A, B \in \mathfrak{A},$$

эквивалентно трехэлементному кластерному свойству

$$\inf_{B' \in \operatorname{Co} \tau_G(B)} |\omega(AB'C) - \omega(AC)\omega(B)| = 0.$$

Предыдущие результаты описывают общие связи между кластерными свойствами, эргодичностью и спектральными свойствами, т. е. единственностью Ω_ω. Без дальнейших предположений о структуре группы G или о непрерывности ее действия трудно развить теорию дальше, и получаемые результаты фрагментарны. Поэтому в следующем пункте мы обратимся к важному случаю локально-компактных абелевых групп с непрерывным действием, но сперва завершим общее рассмотрение несколькими замечаниями о направлениях, в которых происходило развитие теории, а также тремя примерами.

Сначала заметим, что при надлежащих алгебраических предположениях G-эргодичность ω эквивалентна существованию сети $\{B_\alpha\} \subseteq \operatorname{Co} \tau_G(B)$, такой что

$$\lim_\alpha |\omega(AB_\alpha) - \omega(A)\omega(B)| = 0$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$. Такое выражение кластерности в терминах выпуклых комбинаций можно интерпретировать как абстрактный способ сказать, что функции $g \in G \mapsto \omega(A\tau_g(B)) \in \mathbb{C}$ имеют среднее значение $\omega(A)\,\omega(B)$. Существуют разные способы придать смысл этому понятию среднего значения. Для произвольной группы G можно рассмотреть множество ограниченных функций на G, таких что замкнутые по норме выпуклые оболочки их левых и правых сдвигов содержат константы; речь идет о множестве *почти-периодических функций* (см. пункт 4.3.4). Для каждой из таких функций набор соответствующих констант сводится к одной-единственной, которую, очевидно, можно интерпретировать как среднее значение. Эргодическая теорема утверждает, что матричные элементы всякого унитарного представления $U(G)$ обладают средним значением в этом смысле. Иначе, можно определить *инвариантное среднее* как состояние C^*-алгебры $C_b(G)$ ограниченных непрерывных функций на G, которое инвариантно при левых (или правых) сдвигах. Даже если такого рода среднее существует, оно не обязано быть единственным, но оно совпадает с предыдущим средним для почти-периодических функций. Полностью игнорируя этимологию, группы с инвариантными средними в указанном смысле называют *аменабельными* [1]. Не всякая группа такова, но для аменабельных групп средние значения можно строить явно с помощью различных методов, и кластерные свойства допускают различные переформулировки в соответствии с такими методами. Например, если $G = \mathbb{R}^\nu$ и $U_\omega(\mathbb{R}^\nu)$ непрерывно, то рассмотренная выше форма кластерности эквивалентна свойству

$$\lim_\alpha \frac{1}{|\Lambda_\alpha|} \int_{\Lambda_\alpha} dx\, \omega(A\tau_x(B)) = \omega(A)\,\omega(B),$$

где множества Λ_α удовлетворяют условиям, описанным в примере 4.3.5; эта эквивалентность вытекает из того же примера. В следующем пункте мы применим усреднение на локально-компактных абелевых группах.

Заметим еще, что имеются другие, более сильные кластерные свойства, которыми можно пользоваться для классификации более сильных эргодических свойств. Например, можно изучать такие ω, для которых в выпуклой оболочке функций с кластерным свойством содержится нуль, т. е. такие ω, что

$$0 \in \mathrm{Co}\{|\omega(A\tau_g(B)) - \omega(A)\,\omega(B)|;\ g \in G\}$$

при всех $A,\ B \in \mathfrak{A}$. Подчеркнем, что это было бы невозможно при наличии у $U_\omega(G)$ неинвариантного собственного вектора, так что такое кластерное условие на ω влечет более сильные утверждения о спектральных свойствах U_ω. Можно, далее, ввести некоторую частичную иерархию в множестве G-эргодических состояний при помощи спектральных свойств (см. примеры 4.3.28 и 4.3.34). Интересна также задача изучения состояний, для которых найдется сеть $g^\alpha \in G$, такая что

$$\lim_\alpha |\omega(A\tau_{g^\alpha}(B)) - \omega(A)\,\omega(B)| = 0$$

при всех $A,\ B \in \mathfrak{A}$. Такого типа кластерное свойство встречается в классической эргодической теории, а следующий пример

[1] Калька с английского amenable (послушный, сговорчивый, поддающийся). — *Прим. ред.*

показывает, что оно может возникать и в общей некоммутативной теории по причинам довольно неожиданным.

Пример 4.3.24. (сильное перемешивание). Пусть группа G действует *-автоморфизмами τ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$. Предположим, что существует такая сеть $g^{\alpha} \in G$, что при всех $A, B \in \mathfrak{A}$ выполняется условие асимптотической абелевости

$$\lim_{\alpha} \| [A, \tau_{g^{\alpha}}(B)] \| = 0.$$

Если состояние ω на $\mathfrak{A}$ *факторное*, т. е. $\pi_{\omega}(\mathfrak{A})''$ — фактор, то кластерное свойство

$$\lim_{\alpha} | \omega(A\tau_{g^{\alpha}}(B)) - \omega(A)\,\omega(\tau_{g^{\alpha}}(B)) | = 0$$

удовлетворяется при всех $A, B \in \mathfrak{A}$. Для проверки этого сначала заметим, что, поскольку $\pi_{\omega}(\mathfrak{A})'$ — фактор, C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{H}_{\omega}$, порожденная $\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup \pi_{\omega}(\mathfrak{A})'$, неприводима. Затем учтем, что вектор $\eta_A = \pi_{\omega}(A)\,\Omega_{\omega} - \omega(A)\,\Omega_{\omega}$ ортогонален Ω_{ω}. Поэтому существует такой эрмитов оператор $T \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}_{\omega})$, что

$$T\eta_A = 0, \ T\Omega_{\omega} = \Omega_{\omega}.$$

По теореме Кадисона о транзитивности, приведенной в замечаниях и комментариях к пункту 2.4.2, оператор T можно выбрать в $\mathfrak{B}$. Таким образом, вводя C_1 и C_2 формулами

$$C_1 = T(\pi_{\omega}(A) - \omega(A)\,\mathbb{1}_{\omega}), \quad C_2 = (\mathbb{1}_{\omega} - T)(\pi_{\omega}(A) - \omega(A)\,\mathbb{1}_{\omega}),$$

получаем, что $C_1\Omega_{\omega} = 0$, $C_2^*\Omega_{\omega} = 0$ и $\pi_{\omega}(A) = \omega(A)\,\mathbb{1}_{\omega} + C_1 + C_2$. Поэтому

$$\omega(A\tau_{g^{\alpha}}(B)) - \omega(A)\,\omega(\tau_{g^{\alpha}}(B)) = (\Omega_{\omega}, [C_1, \pi_{\omega}(\tau_{g^{\alpha}}(B))]\,\Omega_{\omega}).$$

Но $C_1 \in \mathfrak{B}$, значит, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие конечные семейства $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $B_i \in \pi_{\omega}(\mathfrak{A})'$, что

$$\left\| C_1 - \sum_{i=1}^{n} \pi_{\omega}(A_i)\,B_i \right\| < \frac{\varepsilon}{\|B\|}.$$

Тем самым

$$| \omega(A\tau_{g^{\alpha}}(B)) - \omega(A)\,\omega(\tau_{g^{\alpha}}(B)) | < \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \|B_i\| \| [A_i, \tau_{g^{\alpha}}(B)] \|.$$

Отсюда сразу же следует кластерное свойство.

Отметим, что в проведенном рассуждении G-инвариантность ω не использовалась. Если предположить G-инвариантность ω и существование последовательности сетей $\{g_i^{\alpha}\}_{i \geq 1} \subseteq G$, таких что

$$\lim_{\alpha} \left\| \left[A, \tau_{(g_i^{\alpha})^{-1} g_j^{\alpha}}(B)\right] \right\| = 0$$

при всех $i \neq j$ и всех $A, B \in \mathfrak{A}$, то можно вывести *многоэлементное кластерное свойство*

$$\lim_{\alpha} \left| \omega\left(\tau_{g_1^{\alpha}}(A_1)\,\tau_{g_2^{\alpha}}(A_2)\ \ldots\ \tau_{g_n^{\alpha}}(A_n)\right) - \omega(A_1)\,\omega(A_2) \ldots \omega(A_n) \right| = 0$$

при всех $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$. Для этого достаточно $n - 1$ раз применить предыдущее рассуждение, последовательно выбирая

$$A = A_k, \quad B = \tau_{(g_k^{\alpha})^{-1} g_{k+1}^{\alpha}}(A_{k+1}) \ldots \tau_{(g_k^{\alpha})^{-1} g_n^{\alpha}}(A_n), \ k = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

При $G = \mathbb{R}^\nu$ часто встречаются ситуации, когда

$$\lim_{|x| \to \infty} \| [A, \tau_x(B)] \| = 0$$

для всех $A, B \in \mathfrak{A}$, и в таких случаях можно заключить, что каждое $\mathbb{R}^\nu$-инвариантное факторное состояние ω обладает свойством

$$\lim | \omega(\tau_{x_1}(A_1) \tau_{x_2}(A_2) \ldots \tau_{x_n}(A_n)) - \omega(A_1)\omega(A_2) \ldots \omega(A_n) | = 0$$

при всех $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ и всех $n \geqslant 2$. Здесь подразумевается, что $|x_i - x_j|$ стремится к бесконечности для всякой пары индексов $i \neq j$. Последнее кластерное свойство для случая $\nu = 1$ было введено в классической эргодической теории под названием *сильного перемешивания всех порядков*. При $n = 2$ это свойство называется просто *сильным перемешиванием*.

Условие равномерной асимптотической абелевости

$$\lim_{\alpha} \| [A, \tau_{g^\alpha}(B)] \| = 0$$

играло решающую роль в последнем примере. Равномерность позволяет нам убедиться, что перемешивание имеет место в каждом факторном состоянии ω. Это условие представляет интерес еще и потому, что оно, очевидно, влечет G-абелевость и G-центральность каждого G-инвариантного состояния. Имеются и другие виды асимптотической абелевости, которые сильнее, чем G-абелевость, но слабее, чем приведенное выше условие. Хотя ни один из других видов асимптотической абелевости, по-видимому, не обладает столь общей видовой характеристикой, как G-абелевость или G-центральность (под этим мы подразумеваем структуру, описанную в теоремах 4.3.9 и 4.3.14), но в примерах они встречаются и интересны для определенных задач. Так, например, пару $(\mathfrak{A}, \omega)$ обычно называют *слабо асимптотически абелевой*, если имеется такая сеть $g^\alpha \in G$, что

$$\lim_{\alpha} (\varphi, \pi_\omega([A, \tau_{g^\alpha}(B)]\psi) = 0$$

для всех $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_\omega$ и $A, B \in \mathfrak{A}$. *Слабую асимптотическую абелевость в среднем* определяют, заменяя здесь поточечный предел средним значением. Пример 4.3.24 позволяет немедленно применить эти понятия. Если пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ слабо асимптотически абелева, а ω — факторное состояние, то ω обладает сильным перемешиванием, а если система асимптотически абелева в среднем, то и перемешивание также происходит в среднем. Доказательство обоих утверждений не отличается от доказательства, проведенного в примере 4.3.24. Отметим, однако, что доказательство наличия перемешивания всех порядков решающим образом зависит от равномерности асимптотической абелевости.

Если ω — точное факторное состояние, т. е. $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — фактор, а Ω_ω — отделяющий вектор для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то слабая асимптотическая абелевость и сильная кластерность (сильное перемешивание) фактически эквивалентны. Предыдущее обсуждение показывает, что слабая асимптотическая абелевость влечет кластерность, а для проверки обратного утверждения мы заметим, что условие кластерности

$$\lim_{\alpha} | \omega (A \tau_{g^\alpha} (B)) - \omega (A) \omega (\tau_{g^\alpha} (B)) | = 0$$

при всех A, $B \in \mathfrak{A}$ эквивалентно свойству

$$\lim_{\alpha} | (\psi, (\pi_\omega (\tau_{g^\alpha} (B)) - \omega (\tau_{g^\alpha} (B)) \mathbb{1}_\omega) \Omega_\omega)| = 0$$

при всех $B \in \mathfrak{A}$, $\psi \in \mathfrak{H}_\omega$. Но вектор Ω_ω — циклический для $\pi_\omega (\mathfrak{A})'$, согласно предложению 2.5.3, и, следовательно, последнее свойство эквивалентно тому, что

$$\lim_{\alpha} | (\psi, \pi_\omega (\tau_{g^\alpha} (B)) - \omega (\tau_{g^\alpha} (B)) \mathbb{1}_\omega) \varphi) | = 0$$

при всех φ, $\psi \in \mathfrak{H}_\omega$. Слабая асимптотическая абелевость следует отсюда немедленно. Опять-таки этот результат не требует G-инвариантности ω, но при наличии G-инвариантности слабая асимптотическая абелевость оказывается эквивалентной сильной кластерности (сильному перемешиванию) всех порядков.

В этом месте стоит упомянуть об одной взаимосвязи между топологиями и типами пределов. Если пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ слабо асимптотически абелева для всех $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$, то из теоремы Хана—Банаха следует, что

$$\inf_{B' \in \operatorname{Co} \tau_G (B)} \| [A, B'] \| = 0$$

при всех A, $B \in \mathfrak{A}$, т. е. выполнено условие равномерной асимптотической абелевости в среднем. Это частный случай общей *теоремы Мазура*, которая гласит, что если последовательность непрерывных линейных функционалов на банаховом пространстве слабо сходится, то некоторая выпуклая комбинация элементов этой последовательности сходится равномерно.

Мы хотим также подчеркнуть, что критерии эргодичности иногда можно усилить, приняв во внимание структуру конкретной группы G. Фактически такого рода обобщения мало употреблялись, но они интересны для приложений в математической физике, где особенно важны специальные группы симметрии, такие как группа Пуанкаре или эвклидова группа. Мы проиллюстрируем это обстоятельство примером, связанным с эвклидовой группой $\mathbb{E}^\nu$. Эта группа состоит из группы трансляций $\mathbb{R}^\nu$ и ортогональной группы $\mathbb{O}^\nu$ вращений пространства $\mathbb{R}^\nu$. Предположим, что эти группы действуют непрерывно на $\mathfrak{A}$ и ω является $\mathbb{E}^\nu$-инвариантным и $^\nu\mathbb{R}$-эргодическим состоянием. Кроме того, предположим, что Ω_ω — егинственный (с точностью до фазового множителя)

$U_\omega(\mathbb{R}^\nu)$-инвариантный единичный вектор в $\mathfrak{H}_\omega$. Тогда из примера 4.3.5 следует, что ω удовлетворяет условию кластерности

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{(2L)^\nu}\int\limits_{|x_1|\leqslant L,\ \ldots,\ |x_\nu|\leqslant L} dx\,\omega(A\tau_x(B))=\omega(A)\,\omega(B)$$

при всех A, $B\in\mathfrak{A}$. Инвариантность ω относительно вращений позволяет заключить, однако, что верно также более сильное условие кластерности

$$\lim_{|x|\to\infty}\omega(A\tau_x(B))=\omega(A)\,\omega(B)$$

при всех A, $B\in\mathfrak{A}$. Это умозаключение основано на приеме сглаживания по вращениям, который описан в следующем примере.

Пример 4.3.25. Пусть U: $(x, R)\longmapsto U(x, R)$ — сильно непрерывное унитарное представление в $\mathfrak{H}$ эвклидовой группы $\mathbb{E}^\nu$ с $\nu\geqslant 2$. Если E — проектор на подпространство в $\mathfrak{H}$, образованное векторами, инвариантными относительно $U(\mathbb{R}^\nu, 1)$, то, как можно показать,

$$\lim_{|x|\to\infty}(\varphi, U(x, 1)\psi)=(\varphi, E\psi)$$

при всех φ, $\psi\in\mathfrak{H}$. Доказательство основано на процедуре регуляризации, связанной со сглаживанием по вращениям. Пусть $\mathcal{N}$ обозначает такую окрестность единичного элемента группы вращений, что

$$\|\psi\|\,\|U(0, R)\varphi-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad \|\varphi\|\,\|U(0, R)\psi-\psi\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $R\in\mathcal{N}$. Тогда для всякой положительной C^∞-функции f с носителем в $\mathcal{N}$, интеграл от которой равен единице, имеем

$$\left|\int dRf(R)(\varphi, U(0, R)^*U(x, 1)U(0, R)\psi)-(\varphi, U(x, 1)\psi)\right|<\varepsilon$$

и, следовательно,

$$|(\varphi, U(x,1)\psi)-(\varphi, E\psi)|\leqslant\left|\int d(\varphi, E(p)\psi)\int dRf(R)\,e^{i(Rp)x}\right|+\varepsilon,$$

где E обозначает спектральную меру U, измененную в точке $\{0\}$ так, чтобы приписать этой точке нулевой вес. Достаточно показать, что найдется функция f указанного типа, для которой

$$\lim_{|x|\to\infty}\int dR\,f(R)\,e^{i(Rp)x}=0$$

равномерно по p на компактных подмножествах $\mathbb{R}^\nu\setminus\{0\}$. Это нетрудно сделать, но детали мы опустим.

В заключение рассмотрим одно геометрическое свойство множества G-эргодических состояний, которое проявляется во многих приложениях. Следствием 4.3.11 установлено, что если для всякого $\omega\in E^G_{\mathfrak{A}}$ пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ будет G-абелевой, то $E^G_{\mathfrak{A}}$ будет симплексом. Следующий пример показывает, что множество $\mathscr{E}(E^G_{\mathfrak{A}})$ крайних точек такого симплекса может оказаться плотным. Это свойство плотности напоминает плотность множества чистых состояний, установленную в примере 4.1.31, однако оно еще интереснее в случае симплекса. Добавочным замечательным обстоятельством является существование единственного (с точностью до аффинных изоморфизмов) симплекса, крайние точки которого образуют плотное множество (см. замечания и комментарии). Тем самым различные пространства G-инвариантных состояний, описанные в следующем примере, аффинно изоморфны.

Пример 4.3.26. Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает РГФ-алгебру, введенную в примерах 2.6.12, 3.2.25 и 4.1.31, но только возьмем в качестве множества индексов $I = \mathbb{Z}^\nu$. Для $x \in \mathbb{Z}^\nu$ пусть $\mathfrak{H}_x$ обозначает соответствующее гильбертово пространство (см. пример 2.6.12), и предположим, что размерность $\mathfrak{H}_x$ от x не зависит. Далее, для каждого $a \in \mathbb{Z}^\nu$ выберем унитарное отображение $V_x(a)\colon \mathfrak{H}_x \to \mathfrak{H}_{x+a}$ так, чтобы $V_x(0)$ равнялось тождественному отображению на $\mathfrak{H}_x$ и $V_x(a_1 + a_2) = V_{x+a_2}(a_1)\, V_x(a_2)$. Кроме того, для всякого конечного подмножества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ определим $V_\Lambda(a)$ формулой

$$V_\Lambda(a) = \bigotimes_{x \in \Lambda} V_x(a).$$

Таким образом, $V_{a+\Lambda}(-a) = V_\Lambda(a)^*$. Теперь можно задать действие τ группы $\mathbb{Z}^\nu$ на $\mathfrak{A}$, введя $*$-автоморфизмы τ_a:

$$\tau_a(A) = V_\Lambda(a)\, A V_{\Lambda+a}(-a)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}_\Lambda$. Тем самым τ оказывается определенным на объединении всех $\mathfrak{A}_\Lambda$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, и изометрические $*$-автоморфизмы τ_a можно по непрерывности продолжить на $\mathfrak{A}$. Отметим, что если $A \in \mathfrak{A}_\Lambda$, то $\tau_x(A) \in \mathfrak{A}_{\Lambda+x}$. Мы хотим показать, что $\mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{\mathbb{Z}^\nu}\right)$ плотно в $E_{\mathfrak{A}}^{\mathbb{Z}^\nu}$. Для доказательства обозначим через Λ_L куб

$$\Lambda_L = \{x;\ x = \{x_1, x_2, \ldots, x_\nu\},\ |x_\nu| \leqslant L\}$$

и заметим, что для $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$ сужение ω на $\mathfrak{A}_{\Lambda_L}$ определяется матрицей плотности ρ_{Λ_L}:

$$\omega(A) = \operatorname{Tr}_{\mathfrak{H}_{\Lambda_L}}\left(\rho_{\Lambda_L} A\right), \quad A \in \mathfrak{A}_{\Lambda_L}.$$

Далее, если $A \in \mathfrak{A}_{\Lambda_0}$, то

$$\omega(A) = \operatorname{Tr}_{\mathfrak{H}_{\Lambda_L}}\left(\rho_{\Lambda_L} \tau_x(A)\right)$$

при всех $x \in \mathbb{Z}^\nu$, для которых $\Lambda_0 + x \subset \Lambda_L$. Теперь мы построим некоторую периодическую аппроксимацию ω_L состояния ω, применив следующую процедуру. Пусть $\{\Lambda_L^n\}_{n \geqslant 1}$ обозначает последовательность попарно непересекающихся множеств, полученных сдвигами Λ_L, объединение которых равно $\mathbb{Z}^\nu$. Для каждого конечного $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ найдется такое конечное множество I_Λ положительных целых чисел, что

$$\Lambda \subseteq \bigcup_{n \in I_\Lambda} \Lambda_L^n,$$

и мы введем функционал ω_L на $\mathfrak{A}_L$, полагая

$$\omega_L(A) = \mathrm{Tr}\left(\left(\bigotimes_{n \in I_\Lambda} \rho_{\Lambda_L^n}\right) A\right)$$

$\left(\text{матрицы } \rho_{\Lambda_L^n} \text{ — это матрицы плотности, определенные по } \omega\right)$. Тем самым ω_L задается на объединении всех $\mathfrak{A}_\Lambda$, и по непрерывности можно продолжить этот функционал до состояния на $\mathfrak{A}$. Далее, введем $\mathbb{Z}^\nu$-инвариантное состояние $\tilde{\omega}_L$, полагая

$$\tilde{\omega}_L(A) = |\Lambda_L|^{-1} \sum_{x \in \Lambda_L} \omega_L(\tau_x(A)),$$

где $|\Lambda_L| = (2L+1)^\nu$ — это число точек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^\nu$, содержащихся в Λ_L. Легко получить, что для $A \in \mathfrak{A}_\Lambda$

$$\begin{aligned} |\omega(A) - \tilde{\omega}_L(A)| &\leqslant |\Lambda_L|^{-1} \sum_{\substack{x \in \Lambda_L \\ x+\Lambda \not\subset \Lambda_L}} |\omega_L(\tau_x(A)) - \omega(A)| \\ &\leqslant 2\|A\| \, |\Lambda_L|^{-1} \sum_{\substack{x \in \Lambda_L \\ x+\Lambda \not\subset \Lambda_L}} 1 \underset{L\to\infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

так что сеть $\tilde{\omega}_L$ сходится к ω в слабой* топологии. Покажем еще, что $\tilde{\omega}_L \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{Z^\nu}\right)$. Для этого сначала заметим, что $\mathfrak{A}$ асимптотически абелева в сильном смысле:

$$\lim_{|x|\to\infty} \|[A, \tau_x(B)]\| = 0.$$

Это свойство легко усмотреть для A, $B \in \mathfrak{A}_\Lambda$, а для произвольных A, B оно верно по непрерывности. В силу теоремы 4.3.17, $\tilde{\omega}_L \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{Z^\nu}\right)$ тогда и только тогда, когда ω удовлетворяет условию кластерности (2) из теоремы 4.3.22. Но если A, $B \in \mathfrak{A}_\Lambda$ и

$$B' = |\Lambda_{L'}|^{-1} \sum_{y \in \Lambda_{L'}} \tau_y(B),$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{L'\to\infty} \tilde{\omega}_L(AB') &= \lim_{L'\to\infty} |\Lambda_L|^{-1} |\Lambda_{L'}|^{-1} \sum_{\substack{x \in \Lambda_L \\ y \in \Lambda_{L'}}} \omega_L(\tau_x(A)\tau_{x+y}(B)) \\ &= |\Lambda_L|^{-1} \sum_{x \in \Lambda_L} \omega_L(\tau_x(A)) \tilde{\omega}_L(B) = \tilde{\omega}_L(A)\tilde{\omega}_L(B). \end{aligned}$$

Для любых A и B кластерное свойство получается теперь по непрерывности; поэтому $\tilde{\omega}_L \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{Z^\nu}\right)$.

Наконец, учитывая асимптотическую абелевость, с помощью следствия 4.3.11 заключаем, что $E_{\mathfrak{A}}^{Z^\nu}$ — симплекс.

4.3.3. Локально-компактные абелевы группы

В этом пункте мы продолжим изучение G-инвариантных и G-эргодических состояний ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$, сделав некоторые предположения о группе G и ее действии τ. Во-первых, мы предположим, что G — локально-компактная абелева группа, а во-вторых, что ее унитарное представление $U_\omega(G)$, порожденное ω, сильно непрерывно. Второе предположение выполняется автоматически, если действие τ на $\mathfrak{A}$ сильно или, что равносильно, слабо непрерывно. Будем пользоваться обозначениями, уже применявшимися ранее в пунктах 2.7.1 и 3.2.3. В частности, $\widehat{G}$ обозначает двойственную группу, или группу характеров G, а dP_ω — проекторнозначную меру, ассоциированную с $U_\omega(G)$ по теореме СНАГ, так что спектральное разложение $U_\omega(G)$ имеет вид

$$U_\omega(t) = \int_{\widehat{G}} dP_\omega(\gamma)\,\overline{(\gamma, t)}.$$

Целью данного пункта является изучение спектра $\sigma(U_\omega)$ группы $U_\omega(G)$ и спектра $\sigma(\hat{\tau})$ группы автоморфизмов $\hat{\tau}$ алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, полученной каноническим расширением:

$$\hat{\tau}_t(A) = U_\omega(t)\,AU_\omega(t)^*$$

для $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Вслед за этим рассматриваются спектры группы $\hat{\tau}$, действующей на $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Формальное определение этих спектров дано в определении 3.2.37; подчеркнем, что $\sigma(U_\omega)$ в точности совпадает с носителем P_ω. Отметим, что если $f \in L^1(G)$ и $\hat{\tau}_f(A)$, $U_\omega(f)$ обозначают регуляризованные операторы

$$\hat{\tau}_f(A) = \int dt\,f(t)\,\hat{\tau}_t(A), \quad U_\omega(f) = \int dt\,f(t)\,U_\omega(t),$$

то

$$U_\omega(f)\,A\Omega_\omega = \hat{\tau}_f(A)\,\Omega_\omega$$

при всех $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Но если $\operatorname{supp}\hat{f} \cap \sigma(\hat{\tau}) = \varnothing$, то $\hat{\tau}_f(A) = 0$ при всех $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, а вследствие цикличности обязательно $U_\omega(f) = 0$. Это показывает, что $\sigma(U_\omega) \subseteq \sigma(\hat{\tau})$, но обратного включения в общем случае нет, как нетрудно убедиться, взяв $G = \mathbb{R}$ и выбрав U_ω так, чтобы $\sigma(U_\omega) \subseteq [0, \infty)$. Тем не менее мы познакомимся и с ситуациями, когда оба спектра совпадают.

Интерес представляют также *точечные спектры* $\sigma_p(U_\omega)$ группы $U_\omega(G)$ и $\sigma_p(\hat{\tau})$ группы $\hat{\tau}$. Точечный спектр для $U_\omega(G)$ определяется непосредственно:

$$\sigma_p(U_\omega) = \{\gamma;\ \gamma \in \widehat{G},\ P_\omega(\{\gamma\}) \neq 0\},$$

т. е. $\gamma \in \sigma_p(U_\omega)$ тогда и только тогда, когда существует такой ненулевой собственный вектор $\psi_\gamma \in \mathfrak{H}_\omega$, для которого

$$U_\omega(t)\,\psi_\gamma = \overline{(\gamma, t)}\,\psi_\gamma$$

при всех $t \in G$. Аналогично точечный спектр $\sigma_p(\hat{\tau})$ определяется как множество характеров γ, для которых $\mathfrak{M}^{\tau}(\{\gamma\}) \neq 0$, т. е. для которых можно найти ненулевые $A_\gamma \in \mathfrak{M} \equiv \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, удовлетворяющие уравнению

$$\hat{\tau}_t(A_\gamma) = \overline{(\gamma, t)}\,A_\gamma$$

при всех $t \in G$. Мы хотим выяснить связь между $\sigma_p(U_\omega)$ и $\sigma_p(\hat{\tau})$.

На протяжении всего этого пункта помимо указанных выше предположений и обозначений используется еще обозначение

$$P[\gamma] = P(\{\gamma\}).$$

Для групповой операции мы, как правило, применяем аддитивную запись, но иногда, для сокращения записи, и мультипликативную, т. е. вместо $\gamma_1 + \gamma_2$ пишем $\gamma_1\gamma_2$, а вместо $-\gamma$ пишем γ^{-1}. Наконец, с $\sigma_p(U_\omega)$ мы свяжем проектор $\widehat{P}_\omega$, задаваемый равенством

$$\widehat{P}_\omega = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} P_\omega[\gamma].$$

Подпространство $\widehat{P}_\omega\mathfrak{H}_\omega$ будет именоваться *подпространством $U_\omega(G)$-почти-периодических векторов*. Мотивировку читатель найдет в пункте 4.3.4.

Первый и наиболее полный из спектральных результатов относится к G-эргодическим точным состояниям.

Теорема 4.3.27. *Пусть $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$, группа G локально-компактна и абелева, соответствующее унитарное представление $U_\omega(G)$ сильно непрерывно, и пусть dP_ω обозначает проекторнозначную спектральную меру для $U_\omega(G)$.*

Если Ω_ω — отделяющий вектор для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то справедливы следующие утверждения:

(1) $\sigma(U_\omega) = \sigma(\hat{\tau})$, $\sigma_p(U_\omega) = \sigma_p(\hat{\tau})$ *и оба множества симметричны, т. е. замкнуты относительно операции перехода к обратному элементу $\gamma \mapsto -\gamma$ в $\widehat{G}$;*

(2) *при условии G-эргодичности ω для каждого $\gamma \in \sigma_p(U_\omega) = \sigma_p(\hat{\tau})$ существуют единичный вектор $\psi_\gamma \in \mathfrak{H}_\omega$ и унитарный оператор $V_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, такие что*

$$U_\omega(t)\,\psi_\gamma = \overline{(\gamma, t)}\,\psi_\gamma, \quad \hat{\tau}_t(V_\gamma) = \overline{(\gamma, t)}\,V_\gamma,$$

причем ψ_γ и V_γ определены единственным образом, с точностью до фазы;

(3) *если* ω *является G-эргодическим, то оба множества* $\sigma(U_\omega)$ *и* $\sigma_p(U_\omega)$ *суть полугруппы в* $\widehat{G}$;

(4) *введем* а н н у л я т о р H_ω *множества* $\sigma_p(U_\omega)$ *как замкнутую подгруппу в* G, *определенную равенством*

$$H_\omega = \{t;\ t \in G,\ (\gamma, t) = 1 \text{ при всех } \gamma \in \sigma_p(U_\omega)\};$$

если ω *является G-эргодическим, то*

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(\widehat{\tau})\}'' = \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \widehat{P}'_\omega$$

$$\subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap E_\omega(H_\omega)' = \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)',$$

где $\widehat{P}_\omega$ — *проектор на подпространство* $U_\omega(G)$-*почти-периодических векторов, а* $E_\omega(H_\omega)$ — *проектор на подпространство* $U_\omega(H_\omega)$-*инвариантных векторов. Равенство всех четырех множеств, входящих в последнее соотношение, имеет место в том и только том случае, когда* $E_\omega(H_\omega) = \widehat{P}_\omega$, *что, в частности, выполняется, когда спектр* $\sigma_p(U_\omega)$ *счетен и замкнут.*

Доказательство. Мы постоянно пользуемся тем, что отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ вектор Ω_ω является циклическим для $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, согласно предложению 2.5.3.

(1) Если $\hat\tau_f$ и $U_\omega(f)$ обозначают регуляризации $\hat\tau$ и U_ω с помощью $f \in L^1(G)$, то из соотношения

$$U_\omega(f)\, A\Omega_\omega = \hat\tau_f(A)\,\Omega_\omega$$

следует, что $U_\omega(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $\hat\tau_f = 0$, так как вектор Ω_ω — отделяющий. Следовательно, $\sigma(U_\omega) = \sigma(\hat\tau)$, по определению 3.2.37.

Далее, отметим, что для $A_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, удовлетворяющего уравнению $\hat\tau_t(A_\gamma) = \overline{(\gamma, t)}\, A_\gamma$, вектор $\psi_\gamma = A_\gamma\Omega_\omega$ будет удовлетворять уравнению

$$U_\omega(t)\,\psi_\gamma = \hat\tau_t(A_\gamma)\,\Omega_\omega = \overline{(\gamma, t)}\,\psi_\gamma.$$

Поэтому $\sigma_p(\hat\tau) \subseteq \sigma_p(U_\omega)$. В обратную сторону, если $\gamma \in \sigma_p(U_\omega)$, выберем такой оператор $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, что $P_\omega[\gamma]\, A\Omega_\omega \neq 0$. Подпространство $P_\omega[\gamma]\,\mathfrak{H}_\omega$ в $\mathfrak{H}_\omega$ образовано векторами, инвариантными относительно унитарного представления $t \longmapsto (\gamma, t)\, U_\omega(t)$ группы G. Поэтому, в силу предложения 4.3.4, существует сеть

$$S_{\lambda^\alpha}(\gamma U_\omega) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \left(\gamma, t_i^\alpha\right) U_\omega\left(t_i^\alpha\right)$$

выпуклых комбинаций элементов γU_ω, которая сильно сходится к $P_\omega[\gamma]$. Рассмотрим соответствующую сеть

$$S_{\lambda^\alpha}(\gamma\hat\tau(A)) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \left(\gamma, t_i^\alpha\right) \hat\tau_{t_i^\alpha}(A)$$

выпуклых комбинаций элементов $\gamma\hat\tau(A)$. Для нее $\|S_{\lambda^\alpha}(\gamma\hat\tau(A))\| \leqslant \|A\|$, и $S_{\lambda^\alpha}(\gamma\hat\tau(A))$ сильно сходится на плотном подпространстве $\pi_\omega(\mathfrak{A})'\,\Omega_\omega$. Значит, $S_{\lambda^\alpha}(\gamma\hat\tau(A))$ сильно сходится к некоторому ограниченному оператору A_γ. Ясно, что $A_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, $\|A_\gamma\| \leqslant \|A\|$ и

$$A_\gamma C\Omega_\omega = CP_\omega[\gamma]\, A\Omega_\omega$$

при всех $C \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Специальный выбор $C = \mathbb{1}_\omega$ приводит к $A_\gamma \neq 0$, и в этом случае

$$\hat{\tau}_t(A_\gamma) C\Omega_\omega = U_\omega(t) A_\gamma (U_\omega(t)^* C U_\omega(t))\Omega_\omega = C U_\omega(t) P_\omega[\gamma] A\Omega_\omega = \\ = \overline{(\gamma, t)} A_\gamma C\Omega_\omega$$

при всех $C \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Таким образом, $\hat{\tau}_t(A_\gamma) = (\gamma, t) A_\gamma$ и $\sigma_p(U_\omega) \subseteq \sigma_p(\hat{\tau})$. Вместе с уже установленным противоположным включением это дает равенство точечных спектров.

Симметричность $\sigma(\hat{\tau})$ вытекает из леммы 3.2.42, а симметричность $\sigma_p(\hat{\tau})$ — из соотношения

$$\hat{\tau}_t(A_\gamma^*) = \hat{\tau}_t(A_\gamma)^* = (\gamma, t) A_\gamma^* = \overline{(\gamma^{-1}, t)} A_\gamma^*.$$

(2) Предположим G-эргодичность ω. Если A_γ обозначает собственный элемент для $\hat{\tau}$, построенный выше, то $A_\gamma^* A_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(G)'$. Тогда по теореме 4.3.20 этот оператор $A_\gamma^* A_\gamma$ должен иметь вид $\lambda_A \mathbb{1}_\omega$, где $\lambda_A \neq 0$. Следовательно, $|A_\gamma| = \lambda_A^{1/2} \mathbb{1}_\omega \neq 0$, и если $A_\gamma = V_\gamma |A_\gamma|$ — полярное разложение A_γ, то оператор V_γ унитарен. Сразу же получаем для него

$$\hat{\tau}_t(V_\gamma) = \frac{\hat{\tau}_t(A_\gamma)}{\lambda_A^{1/2}} = \overline{(\gamma, t)} V_\gamma,$$

т. е. V_γ — также собственный элемент $\hat{\tau}$. Если $W_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — любой другой унитарный собственный элемент, то

$$\hat{\tau}_t(W_\gamma^* V_\gamma) = \hat{\tau}_t(W_\gamma)^* \hat{\tau}_t(V_\gamma) = W_\gamma^* V_\gamma.$$

Таким образом, $W_\gamma^* V_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(G)'$, и вторичная ссылка на теорему 4.3.20 показывает, что $W_\gamma^* V_\gamma$ кратен единичному оператору, т. е. W_γ отличается от V_γ не более чем фазовым множителем.

Теперь учтем, что $\{A_\gamma \Omega_\omega;\ A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''\}$ должно быть плотно в $P_\omega[\gamma]\mathfrak{H}_\omega$, так как $A_\gamma \Omega_\omega = P_\omega[\gamma] A\Omega_\omega$. Следовательно, $P_\omega[\gamma]\mathfrak{H}_\omega$ должно состоять из кратных $V_\gamma \Omega_\omega$ векторов, т. е. ранг проектора $P_\omega[\gamma]$ равен единице и, значит, нормированный собственный вектор $U_\omega(G)$ единствен с точностью до фазового множителя.

(3) Если $\gamma_1, \gamma_2 \in \sigma_p(\hat{\tau})$ и $V_{\gamma_1}, V_{\gamma_2}$ — соответствующие им унитарные собственные элементы, то и оператор $V_{\gamma_1} V_{\gamma_2}$ унитарен и удовлетворяет уравнению

$$\hat{\tau}_t(V_{\gamma_1} V_{\gamma_2}) = \overline{(\gamma_1, t)}\,\overline{(\gamma_2, t)} V_{\gamma_1} V_{\gamma_2} = \overline{(\gamma_1 \gamma_2, t)} V_{\gamma_1} V_{\gamma_2}.$$

Тем самым $\gamma_1 + \gamma_2 (\equiv \gamma_1 \gamma_2) \in \sigma_p(\hat{\tau})$, и это свойство аддитивности спектра в сочетании с установленной ранее симметричностью показывает, что $\sigma_p(\hat{\tau}) (= \sigma_p(U_\omega))$ является подгруппой в $\hat{G}$.

Предположим теперь, что $\gamma_1, \gamma_2 \in \sigma(U_\omega)$, и пусть N — произвольная окрестность для $\gamma_1 + \gamma_2$. Если M — окрестность единицы в $\hat{G}$, такая что $\gamma_1 + \gamma_2 + M \subseteq N$, то эквивалентность (1) $\Longleftrightarrow$ (2) из предложения 3.2.40 обеспечивает существование таких функций $f_1, f_2 \in L^1(G)$, что $\operatorname{supp} f_i \subseteq \gamma_i + M$, а $U_\omega(f_i) \neq 0$. Поэтому найдутся такие $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, что соответствующие им регуляризации $\hat{\tau}_{f_i}(A_i)$ удовлетворяют условию

$$\hat{\tau}_{f_i}(A_i)\Omega_\omega \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, $\sigma_{\hat{\tau}}(\hat{\tau}_{f_i}(A_i)) \subseteq \gamma_i + M$; здесь мы употребили обозначения спектральных подпространств, введенные в пункте 3.2.3. Далее, на основании лемм

3.2.38 и 3.2.42 можно заключить, что $\sigma_{\hat{\tau}}(\hat{\tau}_t(\hat{\tau}_{f_1}(A_1))\hat{\tau}_{f_2}(A_2)) \subseteq \gamma_1 + \gamma_2 + M + M$ при всех $t \in G$. Значит, если удастся показать, что

$$\hat{\tau}_t(\hat{\tau}_{f_1}(A_1))\hat{\tau}_{f_2}(A_2)\Omega_\omega \neq 0$$

при некотором $t \in G$, то предложение 3.2.40 позволит утверждать, что $\gamma_1 + \gamma_2 \in \sigma(U_\omega)$. Но действительно,

$$\|\hat{\tau}_t(\hat{\tau}_{f_1}(A_1))\hat{\tau}_{f_2}(A_2)\Omega_\omega\|^2 = \omega(\hat{\tau}_{f_2}(A_2)^*\hat{\tau}_t(\hat{\tau}_{f_1}(A_1)^*\hat{\tau}_{f_1}(A_1))\hat{\tau}_{f_2}(A_2)),$$

а G-эргодичность ω дает

$$\inf_{A \in \operatorname{Co}\tau_G(\hat{\tau}_{f_1}(A_1)^*\hat{\tau}_{f_1}(A_1))} |\omega(\hat{\tau}_{f_2}(A_2)^* A\hat{\tau}_{f_2}(A_2)) - \omega(\hat{\tau}_{f_2}(A_2^*)\hat{\tau}_{f_2}(A_2))\,\omega(\hat{\tau}_{f_1}(A_1^*)\hat{\tau}_{f_1}(A_1))| = 0,$$

согласно теореме 4.3.23. Итак, требуемое заключение верно и $\sigma(U_\omega)(= \sigma(\hat{\tau}))$ аддитивен. Аддитивность в сочетании с симметричностью, установленной в доказательстве (1), означает, что $\sigma(U_\omega)$ — подгруппа в $\widehat{G}$.

(4) Соотношения $(\gamma, t_1 + t_2) = (\gamma, t_1)(\gamma, t_2)$ и $(\gamma, -t) = \overline{(\gamma, t)}$ показывают, что H_ω — подгруппа в G. Замкнутость этой подгруппы следует из непрерывности $t \longmapsto (\gamma, t)$. Из определения H_ω и уравнения, которому удовлетворяет собственный элемент V_γ, вытекает, что $V_\gamma \in U_\omega(H_\omega)'$; поэтому

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(\hat{\tau})\}'' \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)'.$$

Но если V_γ и ψ_{γ_1} обозначают собственные элементы для $\hat{\tau}$ и $U_\omega(G)$, то

$$U_\omega(t)V_\gamma\psi_{\gamma_1} = \overline{(\gamma\gamma_1, t)}\,V_\gamma\psi_{\gamma_1},$$

так что

$$V_\gamma P_\omega[\gamma_1] = P_\omega[\gamma\gamma_1]V_\gamma P_\omega[\gamma_1].$$

Переходя здесь к сопряженным операторам и учитывая, что $V_\gamma^* = V_{\gamma^{-1}}$, получаем

$$P_\omega[\gamma_1]V_\gamma = P_\omega[\gamma_1]V_\gamma P_\omega[\gamma^{-1}\gamma_1].$$

Поэтому

$$\widehat{P}_\omega V_\gamma = \sum_{\gamma_1} P_\omega[\gamma_1]V_\gamma P_\omega[\gamma^{-1}\gamma_1] = \sum_{\gamma_1} P_\omega[\gamma\gamma_1]V_\gamma P_\omega[\gamma_1] = V_\gamma\widehat{P}_\omega$$

и, следовательно,

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(\hat{\tau})\}'' \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \widehat{P}_\omega'.$$

Обратно, если $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \widehat{P}_\omega'$, то $\widehat{P}_\omega A\Omega_\omega = A\Omega_\omega$. Отсюда следует, что

$$A\Omega_\omega = \sum_\gamma A_\gamma\Omega_\omega,$$

где $A_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — собственные элементы, построенные в доказательстве утверждения (2). Более общим образом,

$$AC\Omega_\omega = \sum_\gamma A_\gamma C\Omega_\omega$$

при всех $C \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Тем самым, если $X \in \{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(\hat{\tau})\}'$, то

$$(C_1\Omega_\omega, [A, X]C_2\Omega_\omega) = \sum_\gamma \{(A_\gamma^* C_1\Omega_\omega, XC_2\Omega_\omega) - (C_1\Omega_\omega, XA_\gamma C_2\Omega_\omega)\} = 0$$

при всех $C_1, C_2 \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, так как $[A_\gamma, X]=0$. Значит, $A \in \{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(\hat{\tau})\}''$ и

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(\hat{\tau})\}'' = \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap \widehat{P}'_\omega \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)'.$$

Но по эргодической теореме $E_\omega(H_\omega) \in U_\omega(H_\omega)''$ и потому

$$\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap E_\omega(H_\omega)' \supseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)'.$$

Таким образом, если $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap E_\omega(H_\omega)'$ и $t \in H_\omega$, то

$$U_\omega(t) A U_\omega(-t)\,\Omega_\omega = U_\omega(t) A \Omega_\omega = E_\omega(H_\omega) A \Omega_\omega = A\Omega_\omega,$$

а так как вектор Ω_ω — отделяющий, то $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)'$, т. е.

$$\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap E_\omega(H_\omega)' = \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)'.$$

Если $E_\omega(H_\omega) = \widehat{P}_\omega$, то все четыре множества совпадают. Обратно, их равенство дает

$$\widehat{P}_\omega = [\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(\hat{\tau})\}''\,\Omega_\omega] = [\{\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)'\}\,\Omega_\omega] = E_\omega(H_\omega).$$

Наконец, предположим замкнутость $\sigma_p(U_\omega)$. Тогда двойственная к H_ω группа $\widehat{H}_\omega$ имеет вид $\widehat{H}_\omega = \widehat{G}/\sigma_p(U_\omega)$. Пусть $\varphi\colon \gamma \in \widehat{G} \longmapsto \gamma + \sigma_p(U_\omega) \in \widehat{H}_\omega$ — естественный гомоморфизм $\widehat{G}$ на $\widehat{H}_\omega$; всякое борелевское подмножество в $\widehat{H}_\omega$ является образом некоторого борелевского подмножества в $\widehat{G}$ при отображении φ. Введем для $\psi \in \mathfrak{H}_\omega$ спектральную меру μ_ψ на $\widehat{G}$ соотношением

$$(\psi, U_\omega(t)\,\psi) = \int_{\widehat{G}} d\mu_\psi(\gamma)\,\overline{(\gamma, t)}$$

при $t \in G$ и определим спектральную меру ν_ψ как «сужение» μ_ψ на $\widehat{H}_\omega$, т. е.

$$(\psi, U_\omega(s)\,\psi) = \int_{\widehat{H}_\omega} d\nu_\psi(\gamma)\,\overline{(\gamma, s)}$$

при $s \in \widehat{H}_\omega$. Тогда для любого борелевского $S \subseteq \widehat{H}_\omega$

$$\nu_\psi(S) = \mu_\psi(\varphi^{-1}(S)).$$

В частности,

$$\nu_\psi(\{0\}) = \mu_\psi(\{\sigma_p(U_\omega)\}).$$

Предположим теперь, что $\sigma_p(U_\omega)$ — счетное множество, и рассмотрим возрастающую последовательность его конечных подмножеств S_n с индикаторами χ_{S_n}, такую что $\bigcup_n S_n = \sigma_p(U_\omega)$. Каждому такому подмножеству соответствует оператор проектирования $P_n \leqslant \widehat{P}_\omega$, и

$$\mu_\psi(S_n) = \mu_\psi(\chi_{S_n}) = (\psi, P_n\psi).$$

Последовательность P_n слабо сходится к $\widehat{P}_\omega$, а χ_{S_n} образуют равномерно ограниченную последовательность, которая поточечно сходится к индикатору множества $\sigma_p(U_\omega)$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\mu_\psi(\{\sigma_p(U_\omega)\}) = \lim_{n\to\infty} \mu_\psi(\chi_{S_n}) = \lim_{n\to\infty} (\psi, P_n\psi) = (\psi, \widehat{P}_\omega\psi).$$

Поэтому

$$(\psi, E_\omega(H_\omega)\,\psi) = \nu_\psi(\{0\}) = \mu_\psi(\{\sigma_p(U_\omega)\}) = (\chi, \widehat{P}_\omega\psi)$$

и, окончательно, $E_\omega(H_\omega) = \widehat{P}_\omega$.

Замечание. Последнее равенство представляет собой результат, относящийся к унитарным представлениям U группы G и не зависящий от наличия структуры алгебры. Если точечный спектр $\sigma_p(U)$ представления U образует замкнутую счетную подгруппу в $\widehat{G}$ и H — аннулятор этой подгруппы, то соответствующее равенство верно, но те же самые рассуждения показывают, что сужение U_H представления U на H не имеет в точечном спектре других точек, кроме точки 0.

Полученные в предыдущей теореме результаты о структуре точечного спектра найдут применение при анализе нарушенных симметрий. Отметим, что если $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$ и у $U_\omega(G)$ есть собственные векторы, не пропорциональные Ω_ω, то ω не эргодично для стабилизирующей группы H_ω. Это вытекает из теоремы 4.3.27, поскольку

$$\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)' \supseteq \{V_\gamma; \gamma \in \sigma_p(\hat{\tau})\}'' \neq \mathbb{C}\mathbb{1}_\omega.$$

Если спектр $\sigma_p(U_\omega)$ счетен и замкнут, то общая алгебраическая картина упрощается за счет равенства $E_\omega(H_\omega) = \widehat{P}_\omega$. В частности, имеет место совпадение

$$\{V_\gamma; \gamma \in \sigma_p(U_\omega)\}'' = \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega).$$

Это интересно потому, что алгебра, стоящая в левой части равенства, имеет тенденцию быть абелевой. Единственность V_γ приводит с необходимостью к тому, что $\gamma \mapsto V_\gamma$ образует, с точностью до фазового множителя, представление абелевой группы $\sigma_p(U_\omega)$. **Поэтому V_γ будут коммутировать, если удается выбрать множители так, чтобы получить истинное представление группы. Такой выбор, очевидно, возможен, если группа $\sigma_p(U_\omega)$ циклическая, но он возможен и в более общих ситуациях.[1] Такие алгебраические упрощения будут важны при последующем обсуждении теории разложения для G-эргодических состояний с нетривиальным точечным спектром $\sigma_p(U_\omega)$. Мы вернемся к этим вопросам в пункте 4.3.4, а пока сразу же проиллюстрируем примером, насколько ограничивает произвол в отношении спектра предыдущий результат.**

Пример 4.3.28. Пусть $G = \mathbb{R}$ и G-эргодическое состояние ω таково, что U_ω непрерывно, а Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ вектор. Спектр $\sigma(U_\omega)(= \sigma(\hat{\tau}))$ оказывается тогда замкнутой подгруппой $\widehat{\mathbb{R}}$ $(= \mathbb{R})$, содержащей $\{0\}$. Имеются три возможности:

(1) $\sigma(U_\omega) = \sigma_p(U_\omega) = \{0\}$;
(2) $\sigma(U_\omega) = \sigma_p(U_\omega)$ изоморфен Z;
(3) $\sigma(U_\omega) = \mathbb{R}$.

[1] Более подробно этот вопрос обсуждается в замечаниях и комментариях к пункту 3.2.6.

Во втором случае алгебра $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ абелева, согласно сделанным выше замечаниям. В третьем случае для $\sigma_p(U_\omega)$ есть в свою очередь три возможности:

(3_1) $\sigma_p(U_\omega) = \{0\}$;

(3_2) $\sigma_p(U_\omega)$ изоморфен $\mathbb{Z}$;

(3_3) $\sigma_p(U_\omega)$ образует плотную подгруппу в $\mathbb{R}$.

Первой из них отвечает $H_\omega = \mathbb{R}$, второй отвечает H_ω, изоморфная $\mathbb{Z}$, а третьей — тривиальная H_ω.

Отметим, что в случае (3_2) алгебра $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' \cap U_\omega(H_\omega)'$ абелева, согласно замечаниям, сделанным перед примером.

Если $G = \mathbb{R}^\nu$ и $\sigma(U_\omega) = \mathbb{R}^\nu$, то для спектра $\sigma_p(U_\omega)$ имеется много возможностей; например, может оказаться, что

$$\sigma_p(U_\omega) = \mathbb{Z}^{\nu_1} \times \{0\}, \quad \text{где} \quad \nu^1 \leqslant \nu.$$

Свойства точечного спектра для G-инвариантных состояний, описанные в теореме 4.3.27, можно установить и другими, независимыми рассуждениями, интересными еще и тем, что они характеризуют $\sigma_p(U_\omega)$ и т. п. через алгебраические свойства проектора $\widehat{P}_\omega$ на подпространство почти-периодических векторов. При предположениях теоремы можно доказать, что

$$\widehat{P}_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \widehat{P}_\omega = (\widehat{P}_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})' \widehat{P}_\omega)',$$

а это условие в свою очередь эквивалентно тому, что

$$P_\omega[\gamma_1] A P_\omega[\gamma\gamma_1] B P_\omega[\gamma_2] = P_\omega[\gamma_1] B P_\omega[\gamma_2\gamma^{-1}] A P_\omega[\gamma_2]$$

при всех $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, $B \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$. Последнее условие позволяет выявить свойства спектра, и соответствующую цепочку рассуждений мы проведем ниже для состояний ω, которым отвечает вектор Ω_ω, не отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$.

Накопленный нами опыт разложения G-инвариантных состояний показывает, что к одной и той же общей эргодической структуре мы приходим, или располагая отделяющим вектором Ω_ω для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, или при выполнении некоторой слабой формы условия асимптотической абелевости $(\mathfrak{A}, \omega)$. С такой ситуацией мы часто встречаемся в случае точечного спектра, и соответствующая форма коммутационного свойства обобщает условие G-абелевости.

***Определение* 4.3.29.** Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает C^*-алгебру, G — локально-компактную абелеву группу, допускающую представление *-автоморфизмами τ алгебры $\mathfrak{A}$, а ω — такое G-инвариантное состояние $\mathfrak{A}$, что соответствующее унитарное представление U_ω группы G сильно непрерывно. Пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ называется *G_Γ-абелевой*, если

$$\inf_{A' \in \mathrm{Co}\,\gamma\tau(A)} |\langle\varphi_1, \pi_\omega([A', B])\varphi_2\rangle| = 0$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$, $\gamma \in \widehat{G}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \widehat{P}_\omega \mathfrak{H}_\omega$, где $\mathrm{Co}\,\gamma\tau(A)$ обозначает выпуклую оболочку множества $\{(\gamma, t)\,\tau_t(A);\ t \in G\}$.

В следующем пункте мы покажем, что свойство G_Γ-абелевости характеризует единственность максимальных мер $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, которые сосредоточены на соответствующем классе периодических или почти-периодических состояний. Тем самым G_Γ-абелевости присущ ряд свойств, характерных для G-абелевости. Точно таким же образом, как G-абелевость можно охарактеризовать коммутативностью $\{E_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' E_\omega\}$ (предложение 4.3.7), так и G_Γ-абелевость характеризуется коммутативностью $\{\widehat{P}_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \widehat{P}_\omega\}$. Кроме того, это свойство можно охарактеризовать с помощью инвариантных средних. Такие средние были кратко обсуждены в пункте 4.3.2 в контексте произвольных групп G; в случае локально-компактных абелевых G сравнительно просто установить их существование.

Прежде всего рассмотрим C^*-алгебру $C_b(G)$ ограниченных непрерывных функций на G, снабженную обычной sup-нормой. Группа G действует как группа *-автоморфизмов τ алгебры $C_b(G)$, а именно $(\tau_t f)(t') = f(tt')$. Сопряженные операторы задают действие G на двойственном пространстве $C_b(G)^*$, и выпуклое множество всех состояний инвариантно относительно этого действия. Так как G абелева, то теорема Маркова—Какутани о неподвижной точке гарантирует существование G-инвариантных состояний на $C_b(G)$; такие состояния и называются *инвариантными средними*. Аналогично можно определить инвариантные средние над всякой C^*-подалгеброй в $C_b(G)$, которая инвариантна относительно τ. Инвариантными средними часто можно пользоваться вместо сетей выпуклых комбинаций, применявшихся нами ранее. Для демонстрации такой возможности рассмотрим сильно непрерывное унитарное представление U группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Применяя инвариантное среднее M к функциям

$$t \in G \longmapsto (\varphi, U(t)\psi) \in C_b(G),$$

мы задаем ограниченный линейный оператор E в $\mathfrak{H}$, для которого

$$M((\varphi, U\psi)) = (\varphi, E\psi).$$

Согласно эргодической теореме (предложение 4.3.4), существует сеть $\sum_i \lambda_i^\alpha U(t_i^\alpha)$ в Co $(U(G))$, такая что $\sum_i \lambda_i^\alpha U(t_i^\alpha) \to E_0$ сильно, где E_0 — ортогональный проектор на подпространство U-инвариантных вакторов. Но это обусловливает сходимость функций $t \longmapsto \sum_i \lambda_i^\alpha (\varphi, U(t) U(t_i)\psi)$ к $(\varphi, E_0\psi)$, равномерную по t. Таким образом, инвариантность M влечет

$$(\varphi, E\psi) = M((\varphi, U\psi) = M\left(\sum_i \lambda_i^\alpha (\varphi, UU(t_i)\psi\right) = (\varphi, E_0\psi).$$

Итак, E оказывается ортогональным проектором на подпространство в $\mathfrak{H}$, порожденное U-инвариантными векторами. В результате получается другой вариант эргодической теоремы для представления U: для каждого инвариантного среднего $M(\dot{U}) = E$. С помощью этого утверждения можно переформулировать определение G-абелевости. А именно, пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G-абелевой тогда и только тогда, когда

$$M(\omega'([\tau(A), B])) = 0$$

для всех $A, B \in \mathfrak{A}$ и всех G-инвариантных векторных состояний ω' в представлении π_ω. Аналогичную переформулировку определения G_Γ-абелевости содержит

Предложение 4.3.30. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *пара* $(\mathfrak{A}, \omega)$ *является* G_Γ*-абелевой;*

(2) $M((\varphi_1, \pi_\omega([\gamma^{-1}\tau(A), B])\varphi_2) = 0$ *при всех* $A, B \in \mathfrak{A}$, $\gamma \in \hat{G}$ *и* $\varphi_1, \varphi_2 \in \hat{P}_\omega \mathfrak{H}_\omega$ *для некоторого инвариантного среднего* M;

(3) $\{\hat{P}_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \hat{P}_\omega\}$ — *абелево семейство;*

(4) $P_\omega[\gamma_1] A P_\omega[\gamma\gamma_1] B P_\omega[\gamma_2] = P_\omega[\gamma_1] B P_\omega[\gamma_2\gamma^{-1}] A P_\omega[\gamma_2]$ *при всех* $A, B \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$ *и всех* $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$.

Доказательство. Начнем с доказательства эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (4), а затем установим, что (3) $\Leftrightarrow$ (4) и (2) $\Leftrightarrow$ (4).

(1) $\Leftrightarrow$ (4). Областью значений $P_\omega[\gamma]$ является подпространство в $\mathfrak{H}_\omega$, инвариантное относительно унитарного представления γU_ω группы G. Поэтому при фиксированных $\varepsilon > 0$ и векторе ψ_1 из конечного подмножества $\mathscr{K} \subset \mathfrak{H}_\omega$ можно найти такую выпуклую комбинацию S_λ операторов из $\gamma\gamma_1 U_\omega$:

$$S_\lambda(\gamma\gamma_1 U_\omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\gamma\gamma_1, t_i) U_\omega(t_i),$$

для которой

$$\|(S_\lambda(\gamma\gamma_1 U_\omega) - P_\omega[\gamma\gamma_1])\psi_1\| < \varepsilon/2.$$

Это опять следует из предложения 4.3.4. Аналогично если $\psi_2 \in \mathscr{K}$, то, вторично применив это предложение к унитарному представлению $\gamma\gamma_1 U_\omega \oplus \gamma^{-1}\gamma_2 U_\omega$ в $\mathfrak{H}_\omega \oplus \mathfrak{H}_\omega$, убеждаемся, что выбор S_λ можно подчинить условию

$$\|(S_\lambda(\gamma^{-1}\gamma_2 U_\omega) - P_\omega[\gamma^{-1}\gamma_2])\psi_2\| < \varepsilon/2.$$

Далее, заметим, что для любой другой выпуклой комбинации S_μ

$$\|(S_\mu(\gamma\gamma_1 U_\omega) S_\lambda(\gamma\gamma_1 U_\omega) - P_\omega[\gamma\gamma_1])\psi_1\| < \varepsilon/2,$$

$$\|(S_\mu(\gamma^{-1}\gamma_2 U_\omega) S_\lambda(\gamma^{-1}\gamma_2 U_\omega) - P_\omega[\gamma^{-1}\gamma_2])\psi_2\| < \varepsilon/2.$$

Это — следствие инвариантности и ограниченности; например,

$$S_\mu(\gamma\gamma_1 U_\omega) P_\omega[\gamma_1\gamma] = P_\omega[\gamma_1\gamma]$$

и $\|S_\mu(\gamma\gamma_1 U_\omega)\| \leqslant 1$. Если взять $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, $\varphi_i \in P_\omega[\gamma_i]\mathfrak{H}_\omega$, а $S_\mu S_\lambda(\gamma^{-1}\hat{\tau}(A)) \in \mathrm{Co}\gamma^{-1}\hat{\tau}(A)$ задать формулой

$$S_\mu S_\lambda(\gamma^{-1}\hat{\tau}(A)) = \sum_{i,\ j} \lambda_i \mu_j(\gamma^{-1}, t_i t_j)\hat{\tau}_{t_i t_j}(A),$$

то получим

$$S_\mu S_\lambda(\gamma^{-1}\hat{\tau}(A))^* \varphi_1 = S_\mu(\gamma\gamma_1 U_\omega) S_\lambda(\gamma\gamma_1 U_\omega) A^* \varphi_1,$$

$$S_\mu S_\lambda(\gamma^{-1}\hat{\tau}(A)) \varphi_2 = S_\mu(\gamma^{-1}\gamma_2 U_\omega) S_\lambda(\gamma^{-1}\gamma_2 U_\omega) A \varphi_2.$$

Поэтому при $\psi_1 = A^*\varphi_1$ и $\psi_2 = A\varphi_2$ имеем

$$|(\varphi_1, (AP_\omega[\gamma_1\gamma]B - BP_\omega[\gamma_2\gamma^{-1}]A)\varphi_2) - (\varphi_1, [S_\mu S_\lambda(\gamma^{-1}\hat{\tau}(A)), B]\varphi_2)| < \varepsilon.$$

Но выпуклая комбинация S_μ у нас произвольна, следовательно, (1) $\Rightarrow$ (4), а (4) $\Rightarrow$ (1) для φ_i такого специального вида: $\varphi_i = P_\omega[\gamma_i]\chi_i$. Условие (1) мы устанавливаем теперь, аппроксимируя $\varphi_i \in \widehat{P}_\omega\mathfrak{H}_\omega$ конечными суперпозициями векторов вида $P_\omega[\gamma_i]\chi_i$.

(3) $\Longleftrightarrow$ (4). Условие (3) получается из (4), если произвести суммирование по γ, γ_1, $\gamma_2 \in \widehat{G}$. Обратно, если $\varphi_i = P_\omega[\gamma_i]\chi_i$, то

$$(\varphi_1, \hat{\tau}_t(A)\widehat{P}_\omega B\varphi_2) = (\varphi_1, B\widehat{P}_\omega\hat{\tau}_t(A)\varphi_2)$$

при всех A, $B \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, а разложения

$$\widehat{P}_\omega = \sum_{\gamma\in\widehat{G}} P_\omega[\gamma\gamma_1] = \sum_{\gamma\in\widehat{G}} P_\omega[\gamma^{-1}\gamma_2]$$

дают нам

$$\sum_{\gamma\in\widehat{G}} \overline{(\gamma, t)}(\varphi_1, AP_\omega[\gamma_1\gamma]B\varphi_2) = \sum_{\gamma\in\widehat{G}} \overline{(\gamma, t)}(\varphi_1, BP_\omega[\gamma^{-1}\gamma_2]A\varphi_2).$$

Условие (4) вытекает из ортогональности характеров γ_i (применяем преобразование Фурье).

(2) $\Longleftrightarrow$ (4). Пусть $\varphi_i = P_\omega[\gamma_i]\chi_i$. Тогда

$$\begin{aligned}
&M((\varphi_1, \pi_\omega([\gamma^{-1}\hat{\tau}(A), B])\varphi_2)) \\
&\quad = M((\varphi_1, (\pi_\omega(A)(\gamma\gamma_1)^{-1}U_\omega^{-1}\pi_\omega(B) - \pi_\omega(B)\gamma_2\gamma^{-1}U_\omega\pi_\omega(A))\varphi_2)) \\
&\quad = (\varphi_1, (\pi_\omega(A)P_\omega[\gamma\gamma_1]\pi_\omega(B) - \pi_\omega(B)P_\omega[\gamma_2\gamma^{-1}]\pi_\omega(A))\varphi_2);
\end{aligned}$$

мы воспользовались тем, что $P_\omega[\gamma\gamma_1]$ — проектор на подпространство векторов, инвариантных относительно унитарного представления $\gamma\gamma_1 U_\omega$, и потому $M(\gamma\gamma_1 U_\omega) = P_\omega[\gamma\gamma_1]$. Полученная формула и доказывает требуемую эквивалентность.

Установленное предложение позволяет нам вывести заключения относительно точечного спектра, аналогичные заключениям теоремы 4.3.27.

Теорема 4.3.31. *Пусть $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$, где G — локально-компактная абелева группа, и пусть пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G_Γ-абелевой. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\sigma_p(U_\omega) \subseteq \sigma_p(\hat{\tau})$, и оба множества симметричны;*

(2) *если $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$, т. е. ω является G-эргодическим, то для каждого $\gamma \in \sigma_p(U_\omega)$ существуют единичный вектор $\psi_\gamma \in \mathfrak{H}_\omega$ и унитарный элемент $V_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, такие что*

$$U_\omega(t)\psi_\gamma = \overline{(\gamma, t)}\psi_\gamma, \quad \hat{\tau}_t(V_\gamma) = \overline{(\gamma, t)}V_\gamma,$$

причем ψ_γ и V_γ определены единственным образом с точностью до фазового множителя;

(3) *если* $\omega \in \mathscr{E}(E^G_{\mathfrak{A}})$, *то* $\sigma_p(U_\omega)$ *является подгруппой в* $\hat{G}$. *Если* H_ω — *аннулятор* $\sigma_p(U_\omega)$, *то*

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(U_\omega)\}'' = \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap \hat{P}_\omega''$$
$$\subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap E_\omega(H_\omega)' = \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(H_\omega)',$$

где $\hat{P}_\omega$ — *проектор на подпространство, порожденное* $U_\omega(G)$-*почти-периодическими векторами, а* $E_\omega(H_\omega)$ — *проектор на подпространство* $U_\omega(H_\omega)$-*инвариантных векторов. Фигурирующие в последних соотношениях четыре множества равны тогда и только тогда, когда* $E_\omega(H_\omega) = \hat{P}_\omega$; *в частности, это так, когда* $\sigma_p(U_\omega)$ *счетен и замкнут*;

(4) *если* $\hat{P}_\omega$ *равен* $\mathbb{1}_\omega$, *то* $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — *максимальная абелева алгебра.*

Доказательство. (1) Условие (4) предложения 4.3.30 влечет

$$(\Omega_\omega,\ AP_\omega[\gamma]\,B\Omega_\omega) = (\Omega_\omega,\ BP_\omega[\gamma^{-1}]\,A\Omega_\omega)$$

при всех $A, B \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Тем самым для $\gamma \in \sigma_p(U_\omega)$ также и $\gamma^{-1} \in \sigma_p(U_\omega)$, так что $\sigma_p(U_\omega)$ симметричен. Кроме того, если $\hat{\tau}_t(A) = \overline{(\gamma,\ t)}\,A$, то

$$\hat{\tau}_t(A^*) = (\gamma,\ t)\,A^* = \overline{(-\gamma,\ t)}\,A^*,$$

так что симметричен и $\sigma_p(\hat{\tau})$. Далее, пусть $\gamma \in \sigma_p(U_\omega)$ и $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$ таковы, что $P_\omega[\gamma]\,A\Omega_\omega \neq 0$. Если M — инвариантное среднее на $Cb(G)$, то можно определить ограниченный оператор A_γ соотношением

$$(\varphi,\ A_\gamma\psi) = M((\varphi,\ \gamma\hat{\tau}(A)\,\psi)),$$

а поскольку

$$(\varphi,\ A_\gamma\Omega_\omega) = M((\varphi,\ \gamma U_\omega\ A\Omega_\omega)) = (\varphi,\ P_\omega[\gamma]\,A\Omega_\omega),$$

то $A_\gamma \neq 0$. Легко видеть, что $\hat{\tau}_t(A_\gamma) = \overline{(\gamma,\ t)}\,A_\gamma$, поэтому $\sigma_p(U_\omega) \subseteq \sigma_p(\hat{\tau})$.

(2), (3) Пусть $\gamma \in \sigma_p(U_\omega)$ и $\omega \in \mathscr{E}(E^G_{\mathfrak{A}})$. Множество $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cap U_\omega(G)\}$ неприводимо в $\mathfrak{H}_\omega$ по теореме 4.3.17, и тем самым $P_\omega[\gamma]\,\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}\,P_\omega[\gamma]$ неприводимо в $P_\omega[\gamma]\,\mathfrak{H}_\omega$. Но

$$P_\omega[\gamma]\,\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}\,P_\omega[\gamma] = P_\omega[\gamma]\,\pi_\omega(\mathfrak{A})\,P_\omega[\gamma],$$

а ввиду G-абелевости $(\mathfrak{A},\ \omega)$, в правой части равенства стоит абелево множество (см. предложение 4.3.30). Значит, ранг проектора $P_\omega[\gamma]$ должен равняться единице, и этим установлены существование ψ_γ и его единственность с точностью до фазы.

Затем выбираем $A \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$ так, чтобы $P_\omega[\gamma]\,A\Omega_\omega \neq 0$. Если B — любой другой элемент из $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то

$$\|BP_\omega[\gamma]\,A\Omega_\omega\|^2 = (\Omega_\omega,\ A^*P_\omega[\gamma]\,B^*BP_\omega[\gamma]\,A\Omega_\omega)$$
$$= (\Omega_\omega,\ A^*P_\omega[\gamma]\,AP_\omega[0]B^*B\Omega_\omega)$$

вследствие условия (4) предложения 4.3.30 (в аддитивных обозначениях 0 служит единицей группы $\hat{G}$). Но в предыдущем абзаце было отмечено, что ранг $P_\omega[0]$ — единица, а $\Omega_\omega \in P_\omega[0]\,\mathfrak{H}_\omega$. Тем самым

$$\|BP_\omega[\gamma]\,A\Omega_\omega\|^2 = \|B\Omega_\omega\|^2\,\|P_\omega[\gamma]\,A\Omega_\omega\|^2 \leqslant \|A\|^2\,\|B\Omega_\omega\|^2.$$

Следовательно, можно задать ограниченный оператор A_γ соотношением

$$A_\gamma B\Omega_\omega = BP_\omega\,[\gamma]\,A\Omega_\omega$$

с последующим продолжением по непрерывности. Очевидно, $\|A_\gamma\| \leqslant \|A\|$, и легко подсчитать, что $\hat{\tau}_t(A_\gamma) = \overline{(\gamma,\ t)}\,A_\gamma$. Кроме того, $A_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, поскольку при $B,\ C \in \pi_\omega(\mathfrak{A})''$

$$CA_\gamma B\Omega_\omega = CBP_\omega\,[\gamma]\,A\Omega_\omega = A_\gamma CB\Omega_\omega.$$

Далее, $A_\gamma^* A_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(G)'$, поэтому при условии G-эргодичности ω он будет ненулевым кратным единицы: $A_\gamma^* A_\gamma = \lambda \mathbb{1}_\omega$. Унитарный элемент $V_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$, входящий в полярное разложение оператора A_γ, будет тогда собственным для $\hat{\tau}$, и доказательство утверждения (2) и свойства $\sigma_p(U_\omega)$ быть подгруппой вполне аналогично доказательству таких свойств в теореме 4.3.27. Теперь заметим, что $\widehat{P}_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' \widehat{P}_\omega$ абелево и $\widehat{P}_\omega \Omega_\omega = \Omega_\omega$. Таким образом, коммутант $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cap \widehat{P}_\omega\}'$ абелев в силу общего результата о соответствии для ортогональных мер (теоремы 4.1.25). Но верно также и равенство $[\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(U_\omega)\}''\,\Omega_\omega] = \widehat{P}_\omega$, так что по той же теореме

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(U_\omega)\}'' = \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'.$$

Доказательство соотношений

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(U_\omega)\}'' \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap V_\omega(H_\omega)' = \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap E_\omega(H_\omega)'$$

совпадает с рассуждениями в доказательстве утверждения (4) теоремы 4.3.27; надо лишь поменять ролями $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ и $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Наконец, $\widehat{P}_\omega = E_\omega(H_\omega)$ влечет равенство всех четырех множеств, а при их совпадении

$$\widehat{P}_\omega = [\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'\,\Omega_\omega] = [\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup E_\omega(H_\omega)\}''\Omega_\omega] = E_\omega(H_\omega),$$

в силу соответствия, установленного в теореме 4.1.25. Тот факт, что равенство $\widehat{P}_\omega = E_\omega(H_\omega)$ обеспечивается замкнутостью и счетностью $\sigma_p(U_\omega)$, доказывается в точности так же, как в теореме 4.3.27.

(4) Если $\widehat{P}_\omega = \mathbb{1}_\omega$, то из условия (3) предложения 4.3.30 в сочетании с леммой 4.3.15 следует, что $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — максимальная абелева алгебра.

Следствие 4.3.32. *Пусть $\omega \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{G}\right)$, где G — локально-компактная абелева группа, а $\mathfrak{A}$ имеет единицу. Предположим, что точечный спектр $\sigma_p(U_\omega)$ группы $U_\omega(G)$ образует счетную замкнутую подгруппу в $\widehat{G}$, и пусть H_ω обозначает ее аннулятор. Следующие условия эквивалентны:*

(1) G_Γ-абелевость пары $(\mathfrak{A},\ \omega)$;

(2) H_ω-абелевость пары $(\mathfrak{A},\ \omega)$;

(3) существование единственной максимальной меры $\mu' \in M_{\omega'}\left(E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}\right)$ для каждого H_ω-инвариантного π_ω-нормального состояния ω'.

При добавочном предположении о цикличности $\sigma_p(U_\omega)$ эти условия выполняются.

Доказательство. Из третьего утверждения теоремы 4.3.31 следует, что

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(U_\omega)\}'' = \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap \widehat{P}_\omega' = \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(H_\omega)';$$

но G_{Γ}-абелевость $(\mathfrak{A}, \omega)$ имеет место тогда и только тогда, когда вторая алгебра в этой цепочке абелева (предложение 4.3.30), а H_ω-абелевость равносильна абелевости третьей алгебры. Таким образом, (1) $\Longleftrightarrow$ (2). Эквивалентность (2) $\Longleftrightarrow$ (3) следует из теоремы 4.3.9, примененной к H_ω. Наконец, цикличность $\sigma_p(U_\omega)$ и единственность V_γ гарантируют, что $\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_p(U_\omega)\}''$ — абелева алгебра, так что выполнены все три условия.

Заметим мимоходом, что последнее утверждение следствия неверно в случае произвольного $\sigma_p(U_\omega)$.

После проведенного обсуждения точечного спектра мы займемся анализом полного спектра, предположив кластерность ω — более сильное условие, чем эргодичность. Отметим, что, вообще говоря, нельзя ожидать, что спектры $\sigma(U_\omega)$ и $\sigma(\hat{\tau})$ будут совпадать, как нельзя ожидать и симметричности $\sigma(U_\omega)$, поскольку уже при $G = \mathbb{R}$ существует много контрпримеров. Тем не менее возможна аддитивность $\sigma(U_\omega)$.

Теорема 4.33.3. *Пусть $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$, где G — локально-компактная абелева группа, и предположим, что соответствующее унитарное представление $U_\omega(G)$ группы G сильно непрерывно. Далее предположим, что*

$$\inf_{A' \in \operatorname{Co} \hat{\tau}_G(A)} |\omega(BA'C) - \omega(A)\omega(BC)| = 0$$

при всех $A, B, C \in \mathfrak{A}$. Тогда спектр $\sigma(U_\omega)$ аддитивен.

Доказательство. Доказательство ничем не отличается от доказательства аддитивности, проведенного в теореме 4.3.27, (3). Для $\gamma_1, \gamma_2 \in \sigma(U_\omega)$ образуем такие регуляризованные элементы $\hat{\tau}_{f_1}(A_1)$, $\hat{\tau}_{f_2}(A_2)$, спектры которых лежат соответственно в окрестностях точек γ_1, γ_2 и для которых $\hat{\tau}_{f_i}(A_i)\Omega_\omega \neq 0$, $i = 1, 2$. Затем с помощью кластерного свойства доказываем, что $\hat{\tau}_t(\hat{\tau}_{f_1}(A_1))\hat{\tau}_{f_2}(A_2)\Omega_\omega$ — ненулевой вектор в $\mathfrak{H}_\omega$ при некотором $t \in G$, а спектр этого элемента лежит в окрестности точки $\gamma_1 + \gamma_2$.

Замечание. Если в теореме 4.3.33 группа G устроена как произведение двух подгрупп G_1 и G_2, то свойство аддитивности спектров $U_\omega|_{G_1}$ и $U_\omega|_{G_2}$ вытекает уже из трехэлементного кластерного свойства для одной G_2. Интересно также, что это кластерное свойство обеспечивает аддитивность спектра $U_\omega|_{G_1}$, даже если G_2 не является локально-компактной абелевой группой.

Отметим, что условие кластерности в теореме 4.3.33 влечет эргодичность ω, в силу теорем 4.3.17 и 4.3.23. Кроме того, если вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то кластерное свойство эквивалентно эргодичности по теоремам 4.3.20 и 4.3.23. Отметим еще, что если кластерное свойство будет обладать несколько большей равномерностью, например если

$$\inf_{A' \in \operatorname{Co} \gamma\hat{\tau}(A)} |\omega(B\hat{\tau}_t(A')C) - \omega(A)\omega(BC)| = 0$$

при всех $A, B, C \in \mathfrak{A}$ равномерно по $t \in G$, то, как легко убедиться,

$$\inf_{A_1' \in \operatorname{Co} \gamma\hat{t}(A_1)} |\omega(B[A_1', A_2]C)| = 0$$

при всех $A_1, A_2, C \in \mathfrak{A}$. Поэтому пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ оказывается G_Γ-абелевой и применимы результаты теоремы 4.3.31, относящиеся к точечному спектру. Рассмотрим конкретный пример такого рода.

Пример 4.3.34. Пусть $G = \mathbb{R}$ и ω — такое $\mathbb{R}$-эргодическое состояние, что $t \longmapsto U_\omega(t)$ сильно непрерывно и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \, |\omega(B[\tau_t(A_1), A_2]C)| = 0.$$

Тогда пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ будет G_Γ-абелевой, а из теоремы 4.3.17 и примера 4.3.5 следует, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \, \omega(B\tau_t(A)C) = \omega(A)\,\omega(BC).$$

Поэтому, согласно теоремам 4.3.31 и 4.3.33, спектр $\sigma_p(U_\omega)$ образует замкнутую подгруппу в $\mathbb{R}$, а $\sigma(U_\omega)$ является замкнутым аддитивным подмножеством в $\mathbb{R}$. Прежде всего, имеется такая возможность:

(1) $\sigma(U_\omega) \subseteq [0, \infty)$ или $\sigma(U_\omega) \subseteq (-\infty, 0]$ и $\sigma_p(U_\omega) = \{0\}$.

Далее остаются две возможности: либо все точки в $\sigma(U_\omega)$ изолированы, либо нет; в первом из этих случаев $\sigma(U_\omega) = \sigma_p(U_\omega)$ и, следовательно,

(2) $\sigma(U_\omega) = \{0\}$ или $\sigma(U_\omega)$ изоморфен $\mathbb{Z}$; в обеих ситуациях $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ — максимальная абелева алгебра.

В последнем оставшемся случае найдутся такие $a, b > 0$, что $a, -b \in \sigma(U_\omega)$ и одна из точек, скажем a, не изолирована в $\sigma(U_\omega)$. (Если точка 0 не является изолированной, требуется незначительное изменение в рассуждениях.) Вследствие аддитивности получаем при всех $m, n \in \mathbb{Z}_+$

$$ma - nb \in \sigma(U_\omega).$$

Если a и b несоизмеримы, то $\sigma(U_\omega)$ — плотное подмножество в $\mathbb{R}$, так что $\sigma(U_\omega) = \mathbb{R}$. Если же a и b соизмеримы, то при некоторых положительных m, $n \in \mathbb{Z}$ имеем $ma = nb \equiv c$. Эта точка $c = ma$ не изолирована, и $\pm c \in \sigma(U_\omega)$. Тогда 0 не будет изолированной точкой, поэтому $\sigma(U_\omega)$ содержит по крайней мере один из полуинтервалов $\pm[0, \infty)$. Благодаря аддитивности, $\sigma(U_\omega) = \mathbb{R}$, так что третья возможность такова:

(3) $\sigma(U_\omega) = \mathbb{R}$ и либо $\sigma_p(U_\omega) = \{0\}$, либо $\sigma_p(U_\omega)$ изоморфен $\mathbb{Z}$, либо $\sigma_p(U_\omega)$ — плотная подгруппа в $\mathbb{R}$.

Укажем еще, что в случае (1) из теоремы Борхерса — Арвесона (теоремы 3.2.46) следует, что $U_\omega(\mathbb{R}) \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Таким образом, эргодичность, которая эквивалентна свойству

$$\pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap U_\omega(\mathbb{R})' = \mathbb{C}1_\omega,$$

приводит к равенству $\pi_\omega(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}1_\omega$, или $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\omega)$. Более общим образом, можно доказать, что $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ является алгеброй фон Неймана типа III тогда и только тогда, когда сужение ω_{Ω_ω} на $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ не является следовым состоянием (см. замечания и комментарии).

Мы завершим этот пункт описанием метода выделения точечного спектра унитарной группы и критерия сводимости $\sigma_p(U_\omega)$

к единственной точке $\{0\}$. Начнем с того, что эргодическую теорему можно переформулировать в виде следующего на вид довольно сильно отличающегося от нее утверждения.

Лемма 4.3.35. *Пусть U — сильно непрерывное унитарное представление локально-компактной абелевой группы G, действующее в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть M — инвариантное среднее на $C_b(G)$. Тогда*

$$M(|(\varphi, U\psi)|^2) = \sum_{\gamma \in \sigma_p(U)} |(\varphi, P[\gamma]\psi)|^2$$

при всех $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$, где P — спектральный проектор, а $\sigma_p(U)$ — точечный спектр $U(G)$.

Доказательство. Пусть $\overline{\mathfrak{H}}$ обозначает пространство, сопряженное к $\mathfrak{H}$ (см. подстрочное примечание на стр. 78) и $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \otimes \overline{\mathfrak{H}}$. Каждому $\varphi \in \mathfrak{H}$ сопоставим $\widehat{\varphi} = \varphi \otimes \overline{\varphi} \in \widehat{\mathfrak{H}}$. Введем еще $\overline{U}$ на $\overline{\mathfrak{H}}$, полагая $\overline{U}(t)\overline{\varphi} = \overline{U(t)^*\varphi}$, и определим $\widehat{U} = U \otimes \overline{U}^*$. Имеем

$$(\widehat{\varphi}, \widehat{U}(t)\widehat{\psi}) = (\varphi, U(t)\psi)(\overline{\varphi}, \overline{U(t)^*\psi}) = (\varphi, U(t)\psi)(\overline{\varphi}, \overline{U(t)\psi}) = \\ = |(\varphi, U(t)\psi)|^2.$$

Кроме того,

$$\widehat{U}(t)\varphi \otimes \overline{\psi} = \int dP(\gamma_1)\varphi \otimes \int \overline{dP(\gamma_2)}\,\overline{\psi}\,\overline{(\gamma_1\gamma_2^{-1}, t)},$$

поэтому проекторнозначная мера P, ассоциированная с U, удовлетворяет соотношению

$$d\widehat{P}(\gamma) = \int dP(\gamma_1) \otimes d\overline{P}(\gamma^{-1}\gamma_1).$$

Воспользовавшись тем, что свертка дискретной меры с непрерывной непрерывна, легко получить, что проектор $\widehat{E}$ на подпространство в $\widehat{\mathfrak{H}}$, образованное $\widehat{U}$-инвариантными векторами, имеет вид

$$\widehat{E} = \sum_{\gamma \in \sigma_p(U)} P[\gamma] \otimes \overline{P}[\gamma].$$

Поэтому

$$(\widehat{\varphi}, \widehat{E}\widehat{\psi}) = \sum_{\gamma \in \sigma_p(U)} (\varphi, P[\gamma]\psi)(\overline{\varphi}, \overline{P[\gamma]}\,\overline{\psi}) = \\ = \sum_{\gamma \in \sigma_p(U)} |(\varphi, P[\gamma]\psi)|^2.$$

Тем самым утверждение леммы равносильно эргодической теореме для $\widehat{U}$, т. е. $M(\widehat{U}) = \widehat{E}$.

Существование инвариантного среднего на $C_b(G)$ позволяет переформулировать некоторые критерии эргодичности, приведенные в предыдущем пункте. Например, легко заключить, что если

$\omega \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$ и E_ω — ортогональный проектор на подпространство в $\mathfrak{H}_\omega$, образованное векторами, инвариантными относительно $U_\omega(G)$, то E_ω одномерен тогда и только тогда, когда

$$M(\omega(A\tau(B)) - \omega(A)\,\omega(B)) = 0$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$, где M — некоторое инвариантное среднее. Кроме того, если вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то это условие эквивалентно тому, что

$$M(\omega(A\tau(B)\,C) - \omega(AC)\,\omega(B)) = 0$$

при всех $A, B, C \in \mathfrak{A}$.

Последний критерий допускает следующее обобщение.

Предложение 4.3.36. *Пусть $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$, где G — локально-компактная абелева группа, и предположим, что соответствующее ее унитарное представление U_ω сильно непрерывно. Рассмотрим условия:*

(1) Ω_ω *— единственный с точностью до фазового множителя (нормированный) собственный вектор для $U_\omega(G)$;*

(2) $M(|\omega(A\tau(B)) - \omega(A)\,\omega(B)|) = 0$ *для некоторого инвариантного среднего M при всех $A, B \in \mathfrak{A}$;*

(3) $M(|\omega(A\tau(B)\,C) - \omega(AC)\,\omega(B)|) = 0$ *для некоторого инвариантного среднего M при всех $A, B, C \in \mathfrak{A}$.*

Связь их такова: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftarrow$ (3), *а если вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то все три условия эквивалентны.*

Доказательство. Сначала отметим, что M, будучи состоянием на $C_b(G)$, удовлетворяет неравенству Коши — Шварца (лемма 2.3.10), так что

$$M(|f|)^2 \leqslant M(|f|^2) \leqslant M(|f|)\,\|f\|_\infty$$

при всех $f \in C_b(G)$. Поэтому условие (2) эквивалентно тому, что

$$M(|\omega(A\tau(B)) - \omega(A)\,\omega(B)|^2) = 0$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$.

Введем теперь φ_A и ψ_B, положив

$$\varphi_A = \pi_\omega(A)^*\,\Omega_\omega - \omega(A)\,\Omega_\omega, \quad \psi_B = \pi_\omega(B)\,\Omega_\omega - \omega(B)\,\Omega_\omega.$$

Тогда $|(\varphi_A, U_\omega(t)\,\psi_B)|^2 = |\omega(A\tau_t(B)) - \omega(A)\,\omega(B)|^2$ и, согласно лемме 4.3.35,

$$M(|\omega(A\tau(B)) - \omega(A)\,\omega(B)|^2) = \sum_{\gamma \in \sigma_p(U_\omega)} |(\varphi_A, P_\omega[\gamma]\,\psi_B)|^2.$$

Условие (2) равносильно тому, что каждый член в правой части равен нулю. Отсюда легко получить эквивалентность условий (2) и (1).

Импликацию (3) $\Rightarrow$ (2) проверяем, выбрав в качестве C единицу, если $\mathfrak{A}$ обладает единицей, или аппроксимируя Ω_ω векторами $\pi_\omega(C)\,\Omega_\omega$, в общем случае. Обратная импликация для отделяющего Ω_ω следует из условия

$$M(|(\varphi, \pi_\omega(\tau(B))\,\psi) - (\varphi, \psi)\,\omega(B)|) = 0$$

при всех $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_\omega$ и $B \in \mathfrak{A}$, которое, как нетрудно заметить, равносильно (3). Но по предположению вектор Ω_ω для $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ циклический, так что указанное условие эквивалентно тому, что

$$M\left(\left|(\varphi, C\pi_\omega(\tau(B))\,\Omega_\omega) - (\varphi, C\Omega_\omega)\,\omega(B)\right|\right) = 0$$

при всех $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$, $C \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и $B \in \mathfrak{A}$, а это последнее условие вытекает из эквивалентного (2) условия

$$M\left(\left|(\varphi, \pi_\omega(\tau(B))\,\Omega_\omega) - (\varphi, \Omega_\omega)\,\omega(B)\right|\right) = 0$$

при всех $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$ и $B \in \mathfrak{A}$.

Второе условие из предложения 4.3.36 впервые было найдено в классической эргодической теории, т. е. в случае абелевой $\mathfrak{A}$ и $G = \mathbb{R}$; его обычно называют свойством *слабого перемешивания.*

4.3.4. Нарушенная симметрия

На протяжении всего этого раздела нашей основной задачей было разложение заданного G-инвариантного состояния по G-эргодическим состояниям. В данном пункте мы рассмотрим разложение G-эргодического состояния по состояниям с более низкой симметрией.

Имеются разные способы разложить данное G-эргодическое состояние на состояния, не обладающие G-инвариантностью. Например, если $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ не является фактором, то можно рассмотреть центральное разложение ω, обсуждавшееся в пункте 4.2.2. Что касается состояний, по которым проводится такое разложение, то существуют такие возможности:

(1) Они могут удержать инвариантность относительно некоторой подгруппы H группы G. Так происходит, если $\mathfrak{Z}_\omega \subseteq U_\omega(H)'$. Отметим, что в этом случае при условии H-центральности пары $(\mathfrak{A}, \omega)$ по теореме 4.3.14 мы имеем $\mathfrak{Z}_\omega = \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(H)\}'$, и центральное разложение совпадает с H-эргодическим. Таким образом, с точки зрения центрального разложения H будет естественной группой симметрии для ω.

(2) Они могут потерять всю инвариантность, но тем не менее сохранить некоторые следы симметрии, такие как почти-периодичность. Такое поведение возникает, если действие G на $\mathfrak{Z}_\omega$ имеет в некотором смысле много периодов.

(3) Они могут просто утратить любые формы инвариантности и симметрии.

Первые две ситуации, в которых сохраняется какая-то остаточная симметрия, особенно интересны, и именно такого рода разложения мы намерены изучить. Подобные разложения связаны с явлениями спонтанного нарушения симметрии, встречающимися в физике.

Сперва мы разберем, как производится разложение G-эргодических состояний по состояниям, инвариантным относительно нормальной подгруппы H, и установим условия, при которых разложение соответствует усреднению по факторгруппе G/H. После этого мы ограничимся локально-компактными абелевыми группами и рассмотрим разложения по почти-периодическим состояниям. Существование нетривиальных разложений и выбор естественной группы симметрий оказываются тесно связанными со свойствами точечного спектра, обсуждавшимися в предыдущем пункте.

Начнем с результата о существовании разложения по отношению к нормальной подгруппе. Он интересен тем, что не требует никаких специальных предположений о структуре $\mathfrak{A}$, кроме непрерывности действия группы.

Теорема 4.3.37. *Пусть G — топологическая группа, а H—такая ее нормальная подгруппа, что факторгруппа G/H компактна. Пусть $d\dot{g}$ обозначает нормированную меру Хаара на G/H. Предположим, что G действует как сильно непрерывная группа*-автоморфизмов τ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей, и пусть $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$. Тогда найдется вероятностная мера μ_ω с барицентром ω, сосредоточенная на некотором замкнутом подмножестве в $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^H)$, а потому максимальная относительно упорядочения $\succ$. Кроме того, существует $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^H)$, такое что*

$$\mu_\omega(f) = \int_{G/H} d\dot{g} f(\tau_{\dot{g}}^* \tilde{\omega})$$

для каждой функции $f \in C(E_{\mathfrak{A}}^H)$ и, в частности,

$$\omega(A) = \int_{G/H} d\dot{g}\, \tilde{\omega}(\tau_g(A))$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Если пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является H-абелевой, то μ_ω — единственная максимальная мера на $E_{\mathfrak{A}}^H$ с барицентром ω и она совпадает с ортогональной мерой, соответствующей $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(H)\}'$.

Доказательство. Если взять $A \in \mathfrak{A}$ и $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^H$, то $\hat{A}(\tau_g^*\omega)$ будет ограниченной непрерывной функцией на G, инвариантной относительно сдвигов на элементы из H. Поэтому она определяет ограниченную непрерывную функцию на G/H. Введем среднее от $\hat{A}$ по группе G/H формулой

$$\langle \hat{A} \rangle(\omega) = \int_{G/H} d\dot{g} \hat{A}(\tau_g^*\omega) = \int_{G/H} d\dot{g}\, \omega(\tau_{g^{-1}}(A))$$

и докажем, что $\langle \hat{A} \rangle$ непрерывно на $E_{\mathfrak{A}}^H$.

Пусть $\dot{g}$ обозначает образ $\dot{g}$ при отображении p группы G на факторгруппу G/H. Тогда $\omega(\tau_{\dot{g}}(A)) = \omega(\tau_{\dot{g}}(A))$. Для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in G$ найдется такая открытая окрестность $N(g)$ точки g, что

$$\left\|\tau_g(A) - \tau_{g'}(A)\right\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

при всех $g' \in N(g)$. Это — следствие сильной непрерывности τ. Но из открытости p вытекает, что $\dot{N}(\dot{g}) = p(N(g))$ является открытой окрестностью для $\dot{g} \in \in G/H$, а поскольку для каждого $\dot{g}' \in \dot{N}(\dot{g})$ существует $g' \in p^{-1}(\dot{g}') \cap N(g)$, то с необходимостью

$$\left|\omega\left(\tau_{\dot{g}}(A)\right) - \omega\left(\tau_{\dot{g}'}(A)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

при всех $\dot{g}' \in \dot{N}(\dot{g})$. Далее, пусть $N(g_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — набор окрестностей, выбранных так, чтобы соответствующие $\dot{N}(\dot{g}_i)$ покрывали компактное пространство G/H. Рассмотрим какое-либо состояние $\omega' \in E^H_{\mathfrak{A}}$ со свойством

$$\left|\omega\left(\tau_{\dot{g}_i}(A)\right) - \omega'\left(\tau_{\dot{g}_i}(A)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как каждый элемент $\dot{g} \in G/H$ должен содержаться в каком-то $\dot{N}(\dot{g}_i)$, то

$$\left|\omega\left(\tau_{\dot{g}}(A)\right) - \omega'\left(\tau_{\dot{g}}(A)\right)\right| \leqslant \left|\omega\left(\tau_{\dot{g}}(A)\right) - \omega\left(\tau_{\dot{g}_i}(A)\right)\right| + \left|\omega\left(\tau_{\dot{g}_i}(A)\right) - \omega'\left(\tau_{\dot{g}_i}(A)\right)\right| + \left|\omega'\left(\tau_{\dot{g}_i}(A)\right) - \omega'\left(\tau_{\dot{g}_i}(A)\right)\right| < \varepsilon$$

при всех $\dot{g} \in G/H$. Поэтому $\omega'\left(\tau_{\dot{g}}(A)\right)$ сходятся к $\omega\left(\tau_{\dot{g}}(A)\right)$ равномерно по $\dot{g} \in \in G/H$, если ω' сходятся в слабой* топологии к ω. Тем самым $\omega \in E^H_{\mathfrak{A}} \longmapsto \longmapsto \langle\widehat{A}\rangle(\omega)$ непрерывно.

Теперь определим среднее от $\omega \in E^H_{\mathfrak{A}}$, положив

$$\langle\omega\rangle(A) = \int\limits_{G/H} d\dot{g}\, \omega\left(\tau_{\dot{g}}(A)\right) = \langle\widehat{A}\rangle(\omega).$$

Ясно, что $\langle\omega\rangle \in E^G_{\mathfrak{A}}$ и $\langle\omega\rangle = \omega$ для всех $\omega \in E^G_{\mathfrak{A}}$. Для фиксированного $\omega \in \in \mathscr{E}\left(E^G_{\mathfrak{A}}\right)$ введем множество

$$K_\omega = \left\{\omega';\ \omega' \in E^H_{\mathfrak{A}},\ \langle\omega'\rangle(A) = \omega(A) \text{ при всех } A \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Из непрерывности $\langle\widehat{A}\rangle$ следует замкнутость множеств

$$\left\{\omega';\ \omega' \in E^H_{\mathfrak{A}},\quad \langle\omega'\rangle(A) = \omega(A)\right\},$$

так что K_ω — замкнутое подмножество компактного множества $E^H_{\mathfrak{A}}$. Это K_ω выпукло и непусто (так как $\omega \in K_\omega$), значит, обладает крайними точками.

Мы утверждаем, что $\mathscr{E}\left(K_\omega\right) \subseteq \mathscr{E}\left(E^H_{\mathfrak{A}}\right)$. Действительно, если это не так, то найдется $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}(K_\omega)$, такое что

$$\tilde{\omega} = \lambda\tilde{\omega}_1 + (1 - \lambda)\,\tilde{\omega}_2,$$

где $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2 \in E_{\mathfrak{A}}^H$ не совпадают с $\tilde{\omega}$, а $0 < \lambda < 1$. Поскольку $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}(K_\omega)$, то либо $\tilde{\omega}_1 \notin K_\omega$, либо $\tilde{\omega}_2 \notin K_\omega$. Допустим, $\tilde{\omega}_1 \notin K_\omega$. Тогда $\langle\tilde{\omega}_1\rangle \neq \omega$. Но

$$\omega = \langle\tilde{\omega}\rangle = \lambda\langle\tilde{\omega}_1\rangle + (1-\lambda)\langle\tilde{\omega}_2\rangle,$$

в противоречие с предположением, что $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$. Поэтому $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$.

Если взять $f \in C(E_{\mathfrak{A}}^H)$, то при $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}(K_\omega)$ функция $f(\tau_g^*\tilde{\omega})$ на G непрерывна и инвариантна относительно правых сдвигов на элементы из H, и можно задать

$$\mu_\omega(f) = \int_{G/H} d\dot{g}\, f\left(\tau_{\dot{g}}^*\tilde{\omega}\right).$$

Функционал μ_ω на $C(E_{\mathfrak{A}}^H)$ положителен, т. е. это положительная мера Радона. Орбита $\mathcal{O}_{\tilde{\omega}} = \{\tau_{\dot{g}}^*\tilde{\omega};\ \dot{g} \in G/H\}$, проходящая через $\tilde{\omega}$, замкнута, так как группа G/H компактна. Далее, если $\dot{g} \in G/H$, то τ^* является аффинным изоморфизмом $E_{\mathfrak{A}}^H$ на $E_{\mathfrak{A}}^H$ и потому отображает $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^H)$ на $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^H)$. Таким образом, $\mathcal{O}_{\tilde{\omega}}$ будет замкнутым подмножеством в $\mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^H)$. Но $\mathcal{O}_{\tilde{\omega}}$ является множеством сосредоточения для μ_ω, так что μ_ω максимальна, согласно предложению 4.1.10. Для всякого $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu_\omega(\hat{A}) = \langle\hat{A}\rangle(\tilde{\omega}) = \langle\tilde{\omega}\rangle(A) = \omega(A);$$

значит, μ_ω имеет барицентр ω.

Наконец, если пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ будет H-абелевой, то алгебра $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(H)\}'$ абелева, согласно предложению 4.3.7, и соответствующая ей ортогональная мера — это μ_ω, как показывает четвертое утверждение предложения 4.3.7.

Последнее утверждение доказанной теоремы представляет наибольший интерес — оно описывает ситуацию, в которой разложение по G-эргодическим состояниям существует в надлежащей форме и единственно. Заметим, что $\tilde{\omega}$, фигурирующее в разложении, также единственно в том смысле, что любое другое $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^H)$, которое приводит к аналогичному разложению, должно принадлежать орбите $\mathcal{O}_{\tilde{\omega}}$ группы $\tau^*(G/H)$, проходящей через $\tilde{\omega}$. Дадим теперь другой вариант этой теоремы, ослабив требования на непрерывность действия G, но введя некоторое предположение о сепарабельности. В отличие от проведенного выше доказательства существование требуемого разложения мы установим, используя H-абелевость $(\mathfrak{A}, \omega)$. Отметим, что такая теорема применима к σ-слабо непрерывным группам *-автоморфизмов алгебр фон Неймана.

Теорема 4.3.38. *Пусть G—топологическая группа, а H — ее замкнутая нормальная подгруппа, такая что факторгруппа G/H компактна. Пусть $d\dot{g}$ обозначает нормированную меру Хаара на G/H. Предположим, что G действует как группа *-автоморфизмов τ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей. Предположим, что для $\omega \in$*

$\in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$ *пара* $(\mathfrak{A}, \omega)$ *является* H*-абелевой, а унитарное представление* U_ω *группы* G *слабо непрерывно.*

Если ω *принадлежит грани* F *в* $E_{\mathfrak{A}}^H$, *которая удовлетворяет условию сепарабельности* S, *то существует такое* $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^H) \cap F$, *что отображение* $\dot{g} \in G/H \mapsto \tau_{\dot{g}}^* \tilde{\omega}$ *оказывается* $d\dot{g}$*-измеримым и*

$$\omega(A) = \int_{G/H} d\dot{g}\,\tilde{\omega}(\tau_{\dot{g}}(A))$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. *Это разложение совпадает с тем, которое задается единственной максимальной мерой* $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^H)$, *т. е. ортогональной мерой, соответствующей алгебре* $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(H)\}'$, *и для каждой функции* $f \in C(E_{\mathfrak{A}}^H)$

$$\mu(f) = \int_{G/H} d\dot{g}\, f(\tau_{\dot{g}}^* \tilde{\omega}).$$

Доказательство. В силу предложения 4.3.7, коммутант $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(H)\}'$ абелев, так как H-абелева пара $(\mathfrak{A}, \omega)$. Следовательно, предложение 4.3.3 показывает, что $M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^H)$ содержит единственную максимальную меру μ, причем это та ортогональная мера, которая соответствует $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(H)\}'$. Возьмем теперь $f \in C(E_{\mathfrak{A}}^H)$; действие τ на f задается формулой

$$(\tau_g f)(\omega') = f(\tau_g^* \omega'),$$

но действие это не предполагается непрерывным, что создает определенные трудности. Мы обойдем их, воспользовавшись свойствами μ.

Прежде всего, в силу инвариантности μ, для любых A, $B \in \mathfrak{A}$ и $f \in C(E_{\mathfrak{A}}^H)$ получим

$$\varkappa_\mu(\tau_g f) = U_\omega(g)\, \varkappa_\mu(f)\, U_\omega(g)^{-1}$$

с помощью простой выкладки

$$\begin{aligned}(\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\, \varkappa_\mu(\tau_g f)\, \pi_\omega(B)\, \Omega_\omega) &= \mu(\widehat{AB}\tau_g f) = \mu(\tau_{g^{-1}}(\widehat{AB})\, f) = \\ &= (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\, U_\omega(g)\, \varkappa_\mu(f)\, U_\omega(g)^{-1}\, \pi_\omega(B)\, \Omega_\omega)\end{aligned}$$

(G-инвариантность μ следует из ее единственности). Далее, пусть E_ω обозначает проектор на подпространство в $\mathfrak{H}_\omega$, порожденное $U_\omega(H)$-инвариантными векторами. Основное соответствие для ортогональных мер приводит к равенству

$$E_\omega \mathfrak{H}_\omega = [\{\varkappa_\mu(f);\ f \in C(E_{\mathfrak{A}}^H)\}''\, \Omega_\omega];$$

кроме того,

$$\begin{aligned}\mu(\tau_g(f)\, f_n) = (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(\tau_g(f)\, f_n)\, \Omega_\omega) &= (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f)\, U_\omega(g)^*\, \varkappa_\mu(f_n)\, \Omega_\omega) = \\ &= (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f)\, U_\omega(\dot{g})^*\, E_\omega \varkappa_\mu(f_n)\, \Omega_\omega)\end{aligned}$$

при всех f, $f_n \in C(E_{\mathfrak{A}}^H)$, где $\dot{g}$ обозначает образ g в G/H. Заметим теперь, что равенство

$$\int_{G/H} d\dot{g}\, U_\omega(\dot{g})\, E_\omega = E_\omega(G)$$

определяет проектор на некоторое подпространство пространства $U_\omega(G)$-инвариантных векторов. Но из H-абелевости пары $(\mathfrak{A}, \omega)$ следует ее G-абелевость, и $\omega \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{G}\right)$. Тем самым, по теореме 4.3.17, ранг проектора $E_\omega(G)$ равен единице, т. е. $E_\omega(G)$ проектирует на $\mathbb{C}\Omega_\omega$. Отсюда мы заключаем, что функция

$$g \in G \longmapsto \mu\left(\left(\tau_g f\right) f_n\right) = \mu\left(\left(\tau_{\dot g} f\right) f_n\right)$$

непрерывна на G/H при всех $f, f_n \in C\left(E_{\mathfrak{A}}^{H}\right)$ и

$$\int\limits_{G/H} d\dot g \mu\left(\left(\tau_{\dot g} f\right) f_n\right) = \mu(f)\,\mu(f_n).$$

Согласно предложению 4.1.34, грань F устойчива. Значит, μ сосредоточена на F. Кроме того, μ сосредоточена на $\mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{H}\right)$, в силу предложения 4.3.2. Поэтому μ сосредоточена на $F \cap \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{H}\right)$, и должно найтись $\tilde\omega \in F \cap \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{H}\right)$, которое содержится в носителе μ. Условие сепарабельности S (определение 4.1.32) предполагает наличие двусторонних идеалов $\mathfrak{J}_n$, $n \geqslant 1$; пусть $\{A_{n,m}\}_{m \geqslant 1}$ — счетное плотное подмножество самосопряженных элементов в $\mathfrak{J}_n$. Введем последовательность слабых* окрестностей $N_p(\tilde\omega)$, $p \geqslant 1$, состояния $\tilde\omega$:

$$N_p(\tilde\omega) = \left\{\omega';\ \omega' \in E_{\mathfrak{A}}^{H},\ \left|\left(\tilde\omega - \omega'\right)\left(A_{n,m}\right)\right| < 1/p \text{ для } 1 \leqslant n,\, m \leqslant p\right\}.$$

Тогда

$$\{\tilde\omega\} = \bigcap_{p \geqslant 1} N_p(\tilde\omega) \cap F.$$

Если функции $f_p \in C\left(E_{\mathfrak{A}}^{H}\right)$, $p \geqslant 2$, выбрать так, чтобы $0 \leqslant f_p \leqslant 1$, $f_p\left(\omega'\right) = 1$ при $\omega' \in N_p(\tilde\omega)$ и $f_p\left(\omega'\right) = 0$ при $\omega' \in E_{\mathfrak{A}}^{H} \setminus N_{p-1}(\tilde\omega)$, то

$$\left|\frac{\mu\left(\left(\tau_{\dot g} f\right) f_p\right)}{\mu(f_p)}\right| \leqslant \|f\|,$$

а также

$$\lim_{p \to \infty}\left|\frac{\mu\left(\left(\tau_{\dot g} f\right) f_p\right)}{\mu(f_p)} - \left(\tau_{\dot g} f\right)(\tilde\omega)\right| = 0$$

для $f \in C\left(E_{\mathfrak{A}}^{H}\right)$ при каждом $\dot g \in G/H$. Поэтому из теоремы Лебега о мажорированной сходимости следуют $d\dot g$-измеримость функции $\dot g \in G/H \longmapsto (\tau_{\dot g} f)(\tilde\omega)$ и равенство

$$\int\limits_{G/H} d\dot g\left(\tau_{\dot g} f\right)(\tilde\omega) = \lim_{p \to \infty} \int\limits_{G/H} d\dot g \mu\left(\left(\tau_{\dot g} f\right)/\mu(f_p)\right) = \mu(f).$$

В частности,

$$\omega(A) = \mu(\hat A) = \int\limits_{G/H} d\dot g\,\omega\left(\tau_{\dot g}(A)\right).$$

Хотя приведенные теоремы доказывают существование разложения G-эргодического состояния по отношению к некоторой нормальной подгруппе H, но никакого естественного выбора H они не подсказывают. Если ограничиться классом локально-компактных абелевых групп G, то выбор H можно непосредственно увязать со свойствами точечного спектра $\sigma_p(U_\omega)$ группы U_ω. Напомним, что при $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^{G})$ точечный спектр U_ω образует подгруппу в $\widehat{G}$, если вектор Ω_ω — отделяющий для $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ (теорема 4.3.27) или если пара $(\mathfrak{A}\ \ \omega)$ является G_Γ-абелевой. Все собственные векторы для $U_\omega(G)$ будут инвариантны относительно $U_\omega(H_\omega)$ (теорема 4.3.31), где H_ω — аннулятор $\sigma_p(U_\omega)$. Это показывает, что ω не может быть H_ω-эргодическим и должны найтись нетривиальные разложения по отношению к самой подгруппе H_ω или любой ее подгруппе. Но теперь учтем, что группа G/H_ω двойственна группе $\sigma_p(U_\omega)$ и что G/H_ω компактна тогда и только тогда, когда $\sigma_p(U_\omega)$ дискретна. Таким образом, получено

Следствие 4.3.39. *Пусть $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^{G})$, где G — локально-компактная абелева группа, а $\mathfrak{A}$ имеет единицу. Предположим, что точечный спектр $\sigma_p(U_\omega)$ группы $U_\omega(G)$ образует дискретную подгруппу в G, и пусть H_ω обозначает ее аннулятор. Если пара $(\mathfrak{A},\ \omega)$ является $H\omega$-абелевой и если ω принадлежит грани F в $E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}$, удовлетворяющей условию сепарабельности S, то найдется такое $\tilde{\omega} \in \in F \cap \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}\right)$, что $\dot{t} \in G/H_\omega \mapsto \tau_{\dot{t}}^{*}\tilde{\omega}$ измеримо по мере Хаара $d\dot{t}$ на G/H_ω и*

$$\omega(A) = \int_{G/H_\omega} d\dot{t}\, \tilde{\omega}(\tau_{\dot{t}}(A))$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$.

Этот результат прямо копирует теорему 4.3.38, но в данном конкретном случае можно уточнить заключения относительно $\tilde{\omega}$.

Приведенные выше соображения о точечном спектре могут навести на мысль, что его аннулятор — это естественная группа симметрий системы. Но рассмотрение физических примеров показывает, что естественные группы симметрий характеризуются тем, что должны улучшаться кластерные свойства состояний, по которым производится эргодическое разложение. В этом отношении интересно, что, действительно, при сделанных в следствии предположениях удается доказать, что состояние $\tilde{\omega}$ можно выбрать так, что оно будет слабо перемешивающим для H_ω, т. е.

$$M(|\tilde{\omega}(A_\tau(B)) - \tilde{\omega}(A)\tilde{\omega}(B)|) = 0$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$, где M — произвольное инвариантное среднее на $C_b(H_\omega)$. Доказательство этого утверждения основано, однако, на некоторых результатах теории представлений и будет дано в следующем разделе (см. теорему 4.4.12). По-видимому, вполне разумна гипотеза, что улучшение кластерных свойств является хорошей характеризацией естественной группы симметрий, но положение дел неясно, так как результатов такого типа очень мало.

Разложения по отношению к нормальным подгруппам обладают рядом характеристических свойств. Поскольку множество состояний, по которым производится разложение, образует орбиту $\{\tau_{\dot g}^*\tilde\omega;\ \dot g \in G/H\}$ одного фиксированного состояния под действием факторгруппы G/H, эти состояния одновременно обладают разного рода алгебраическими свойствами; например, H-абелевой или H-центральной пара $(\mathfrak{A},\ \tau_{\dot g}^*\tilde\omega)$ будет тогда и только тогда, когда H-абелева или H-центральна пара $(\mathfrak{A},\ \tilde\omega)$. Таким образом, если эта пара H-центральна, то, слегка видоизменив последнее утверждение теоремы 4.3.19, можно убедиться, что разные состояния $\tau_{\dot g}^*\tilde\omega$, принадлежащие орбите, порождают дизъюнктные представления $\mathfrak{A}$. Тем не менее возникающие при этом унитарные представления H связаны унитарной эквивалентностью, которая устанавливается следующим образом.

Представление, ассоциированное с $\tau_{\dot g}^*\tilde\omega$, для простоты обозначим через $(\mathfrak{H}_{\dot g}, \pi_{\dot g}, U_{\dot g}, \Omega_{\dot g})$, а ассоциированное с $\tilde\omega$ — через $(\mathfrak{H}, \pi, U, \Omega)$. Введем отображение $V_{\dot g}$ из $\mathfrak{H}_{\dot g}$ в $\mathfrak{H}$:

$$V_{\dot g}\pi_{\dot g}(A)\,\Omega_{\dot g} = \pi(\tau_{\dot g}(A))\,\Omega.$$

Поскольку

$$\|V_{\dot g}\pi_{\dot g}(A)\,\Omega_{\dot g}\|^2 = \tilde\omega(\tau_{\dot g}(A^*A)) = \|\pi_{\dot g}(A)\,\Omega_{\dot g}\|^2,$$

можно продолжить $V_{\dot g}$ до изометрического отображения. Но $V_{\dot g}$ обратимо, так как

$$V_{\dot g}^{-1}\pi(A)\,\Omega = \pi_{\dot g}(\tau_{\dot g^{-1}}(A))\,\Omega_{\dot g}$$

определяет изометрический обратный оператор. Поэтому $V_{\dot g}$ — унитарное отображение $\mathfrak{H}_{\dot g}$ на $\mathfrak{H}$. Далее, проверив, что

$$\begin{aligned}(V_{\dot g}\pi_{\dot g}(A)\,\Omega_{\dot g},\ U(h)\,V_{\dot g}\pi_{\dot g}(B)\,\Omega_{\dot g}) &= (\pi(\tau_{\dot g}(A))\,\Omega,\ \pi(\tau_h\tau_{\dot g}(B))\,\Omega)\\ = (\pi(\tau_{\dot g}(A))\,\Omega,\ \pi(\tau_{\dot g}\tau_{\dot g^{-1}h\dot g}(B))\,\Omega) &= (V_{\dot g}\pi_{\dot g}(A)\,\Omega_{\dot g},\ V_{\dot g}\pi_{\dot g}(\tau_{\dot g^{-1}h\dot g}(B))\Omega_{\dot g})\\ &= (\pi_{\dot g}(A)\,\Omega_{\dot g},\ U_{\dot g}(\dot g^{-1}h\dot g)\,\pi_{\dot g}(B)\,\Omega_{\dot g})\end{aligned}$$

при всех $h \in H$, получаем

$$V_{\dot g}^*U(h)\,V_{\dot g} = U_{\dot g}(\dot g^{-1}h\dot g).$$

Тем самым унитарное представление $U_{\dot g}(H)$ унитарно эквивалентно унитарному представлению $U(\dot gH\dot g^{-1})$. В частности, если группа G абелева, то $U_{\dot g}(H)$ и $U(H)$ унитарно эквивалентны. Более общим образом, эквивалентны представления из семейства $U_{\dot g}(\dot g^{-1}H\dot g)$, учитывающие подкручивание состояния вдоль орбиты факторгруппы.

Далее, обратимся к почти-периодическим разложениям G-эргодических состояний для локально-компактных абелевых групп

G. Сначала необходимо привести ряд основных положений, относящихся к почти-периодическим функциям.

Пусть $L^\infty(G)$ обозначает пространство ограниченных функций на G, снабженное нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in G} |f(t)|,$$

а $C_b(G)$ обозначает C^*-алгебру ограниченных непрерывных функций на G. Алгебру *тригонометрических функций* $T(G)$ определим как банахову *-подалгебру в $C_b(G)$, образованную конечными линейными комбинациями характеров группы G, а C^*-алгебру $A(G)$, полученную равномерным замыканием $T(G)$, назовем алгеброй *почти-периодических функций*.

Согласно данному определению, функция f почти-периодична тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом семейства конечных линейных комбинаций характеров группы G. Известны и другие характеристические свойства функций $f \in A(G)$, а также первоначальное определение Бора в терминах приближенных периодов. Если τ обозначает действие G на ограниченные функции, т. е. $(\tau_t f)(t') = f(t + t')$, то $t \in G$ называется *ε-периодом* функции f в том и только том случае, когда

$$\|\tau_t f - f\|_\infty < \varepsilon.$$

При таком определении следующие условия эквивалентны (см. замечания и комментарии):

(1) $f \in A(G)$;

(2) f непрерывна, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное подмножество $B \subseteq G$, что $A_\varepsilon + B = G$, где A_ε обозначает множество всех ε-периодов f;

(3) $f \in L^\infty(G)$, и равномерное замыкание орбиты $\{\tau_t f;\ t \in G\}$ компактно в $L^\infty(G)$.

Эквивалентность условий (2) и (3) станет более прозрачной, если заметить, что множество в полном метрическом пространстве имеет компактное замыкание тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено. Таким образом, условие (3) равносильно такому утверждению: для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор элементов $t_1, t_2, \ldots, t_n \in G$, для которого

$$\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\tau_t f - \tau_{t_i} f\|_\infty < \varepsilon$$

при всех $t \in G$. Но это равносильно тому, что для всякого $t \in G$ найдется такой элемент $t' \in B = \{t_1, \ldots, t_n\}$, что $t - t'$ является ε-периодом f.

Предположим, теперь, что G действует как группа *-автоморфизмов τ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей. Естественно назвать состояние ω на $\mathfrak{A}$ *почти-периодическим*, если функции $t \in G \mapsto \omega(\tau_t(A))$ входят в $A(G)$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Если $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$ обозначает множество таких состояний, то $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$ выпукло, но не обязательно слабо* компактно. С этим связаны определенные трудности на пути построения теории разложения по почти-периодическим состояниям. Тем не менее для ортогональных мер справедлив следующий результат.

Предложение 4.3.40. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет единицу, локально-компактная абелева группа G допускает представление τ в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ и имеется G-инвариантное состояние ω на $\mathfrak{A}$. Предположим, что представление U_ω сильно непрерывно, и обозначим проектор на подпространство $U_\omega(G)$-почти-периодических векторов через $\hat{P}_\omega$. Существует взаимно-однозначное соответствие между*

(1) *ортогональными мерами μ на $E_{\mathfrak{A}}$ с барицентром ω, обладающими свойством:*

$$t \in C \mapsto \mu(\tau_t(f_1) f_2)$$

— *почти-периодическая функция при всех $f_1, f_2 \in C(E_{\mathfrak{A}})$;*

(2) *абелевыми подалгебрами фон Неймана $\mathfrak{B}$ в коммутанте* $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \hat{P}_\omega\}'$;

(3) *ортогональными проекторами P в $\mathfrak{H}_\omega$, для которых*

$$P\Omega_\omega = \Omega_\omega, \quad P \leqslant \hat{P}_\omega, \quad P\pi_\omega(\mathfrak{A}) P \subseteq \{P\pi_\omega(\mathfrak{A}) P\}'.$$

Замечание. Это предложение абсолютно аналогично соответствующему результату для инвариантных состояний (предложение 4.3.1). Отметим, что в условии (2) упомянутого предложения фигурирует

$$\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}' = \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup E_\omega\}',$$

где E_ω — проектор на подпространство $U_\omega(G)$-инвариантных векторов (равенство этих коммутантов получено в ходе доказательства утверждения (4) теоремы 4.3.27). Кроме того, свойство $U_\omega(g) P = P$ в условии (3) предложения 4.3.1 можно переписать в виде $P \leqslant E_\omega$.

Доказательство. Мы вновь воспользуемся установленными в теореме 4.1.25 общими результатами о соответствии между ортогональными мерами μ, абелевыми подалгебрами фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и проекторами P, такими что $P\Omega_\omega = \Omega_\omega$ и $P\pi_\omega(\mathfrak{A}) P \subseteq \{P\pi_\omega(\mathfrak{A}) P\}'$. Нашей задачей будет учесть условия почти-периодичности.

(1) $\Rightarrow$ (2). Если μ удовлетворяет условию почти-периодичности, то функция

$$t \in G \mapsto (\Omega_\omega, \pi_\omega(A) U_\omega(t) \varkappa_\mu(f) \Omega_\omega) = \mu(\tau_{-t}(\hat{A}) f)$$

при любых $A \in \mathfrak{A}$ и $f \in C\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$ будет почти-периодической. Вследствие цикличности $[\varkappa_\mu(f)\,\Omega_\omega] \leqslant \widehat{P}_\omega$. Далее, заметим, что

$$\varkappa_\mu(f)\,U_\omega(t)\,\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega = \pi_\omega(\tau_t(B))\,\varkappa_\mu(f)\,\Omega_\omega = \pi_\omega(\tau_t(B))\,\widehat{P}_\omega\varkappa_\mu(f)\,\Omega_\omega = \sum_{\gamma\in\widehat{G}}(\gamma,t)\,U_\omega(t)\,\pi_\omega(B)\,P_\omega[\gamma]\,\varkappa_\mu(f)\,\Omega_\omega.$$

Принимая во внимание, что

$$(\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\widehat{P}_\omega\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega) = \sum_{\gamma'\in\widehat{G}} M\,(\gamma'\,(\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,U_\omega\pi_\omega(B)\,\Omega)),$$

имеем

$$\begin{aligned}(\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\widehat{P}_\omega\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega) &= \\ &= \sum_{\gamma',\,\gamma\in\widehat{G}} M\,(\gamma'\gamma\,(\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ U_\omega\pi_\omega(B)\,P_\omega[\gamma]\,\varkappa_\mu(f)\,\Omega_\omega)) \\ &= \sum_{\gamma',\gamma\in\widehat{G}} (\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ P_\omega[\gamma'\gamma]\,\pi_\omega(B)\,P_\omega[\gamma]\,\varkappa_\mu(f)\,\Omega_\omega) \\ &= (\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ \widehat{P}_\omega\pi_\omega(B)\,\widehat{P}_\omega\varkappa_\mu(f)\,\Omega_\omega) = (\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ \widehat{P}_\omega\varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega).\end{aligned}$$

Это означает, что $\varkappa_\mu(f) \in \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega{}'\}$. Но $\mathfrak{B}=\left\{\varkappa_\mu(f);\ f\in C\left(E_{\mathfrak{A}}\right)\right\}''$, так что $\mathfrak{B} \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'$. Тем самым мы установили импликацию (1) $\Rightarrow$ (2), а из равенства $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$ немедленно следует, что $P \leqslant \widehat{P}_\omega$, т. е. (2) $\Rightarrow$ (3). Остается доказать, что (3) $\Rightarrow$ (1). Но

$$\begin{aligned}\mu(\tau_t(f_1)\,f_2) &= (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f_1)\,U_\omega(t)^{-1}\varkappa_\mu(f_2)\,\Omega_\omega) = \\ &= (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f_1)\,U_\omega(t)^{-1}\,\hat{P}_\omega\varkappa_\mu(f_2)\,\Omega_\omega),\end{aligned}$$

согласно основной структурной теореме для ортогональных мер (теореме 4.1.25), и, таким образом, эта функция почти-периодична при всех $f_1,\ f_2 \in C\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$.

Следующий результат характеризует основные свойства мер, введенных в предложении 4.3.40.

Предложение 4.3.41. *Пусть локально-компактная абелева группа G действует на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей как группа *-автоморфизмов $\tau(G)$, и пусть состояние ω является G-инвариантным, а представление U_ω сильно непрерывно. Если $\mu \in \mathcal{O}_\omega\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$ и функция*

$$t\in G \longmapsto \mu(\tau_t(f_1)\,f_2)$$

почти-периодична при всех $f_1,\ f_2 \in C\left(E_{\mathfrak{A}}\right)$, то носитель меры μ содержится в слабом замыкании $\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A\,(G)}$ выпуклого множества $E_{\mathfrak{A}}^{A\,(G)}$ почти-периодических состояний. Если к тому же μ максимальна, то она псевдососредоточена на $\mathscr{E}\left(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A\,(G)}\right)$, а если ω содержится в гра-*

ни F, удовлетворяющей условию сепарабельности S, то μ сосредоточена на $\mathscr{E}\left(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right)$.

Если коммутант $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'$ абелев, то $M_\omega\left(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right)$ содержит единственную максимальную меру. Обратно, если $M_\omega\left(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right)$ содержит единственную максимальную меру со свойством $\mu(\tau(f_1)f_2) \in A(G)$ при всех $f_1, f_2 \in C(\overline{E}_{\mathfrak{A}})$, то $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'$ абелев. В обоих случаях μ оказывается ортогональной мерой, соответствующей $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'$.

Доказательство. Доказательство проводится по аналогии с доказательствами предложений 4.3.2 и 4.3.3, только условие инвариантности заменяется условием почти-периодичности. Первое утверждение устанавливается простым повторением соображений, использованных в случае предложения 4.3.2, но для второго утверждения требуется незначительное изменение в рассуждениях.

Сначала рассмотрим меру $\nu \in M_\omega\left(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right)$ с конечным носителем в $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$; тогда с помощью выкладок, проведенных в доказательстве предложения 4.3.40, приходим к включению

$$\left\{\varkappa_\nu(f);\ f \in C\left(E_{\mathfrak{A}}\right) \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\right\}'.$$

Здесь важно, чтобы $\nu(\tau(f_1)f_2) \in A(G)$, но это следует из предположений о носителе ν. Если же коммутант $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'$ абелев, то он определяет ортогональную меру μ на $E_{\mathfrak{A}}$, согласно предложению 4.3.40, и эта мера удовлетворяет условию почти-периодичности $\mu(\tau(f_1)f_2) \in A(G)$. Следовательно, повторив доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (1) из теоремы 4.2.4, получим соотношение $\mu \succ \nu$. Но меры из $M_\omega\left(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right)$ с конечным носителем в $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$ слабо* плотны, поэтому $\mu \succ \nu$ при всех $\nu \in M_\omega\left(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right)$, т. е. μ максимальна. Если, наоборот, имеется единственная максимальная мера μ, удовлетворяющая условию почти-периодичности, то, согласно предложению 4.3.40,

$$\left\{\varkappa_\mu(f);\ f \in C\left(E_{\mathfrak{A}}\right)\right\} \subseteq \left\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\right\}'.$$

Но доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2) из теоремы 4.2.4 показывает, что эти две алгебры абелевы и совпадают.

Рассмотрим еще разложение G-эргодического состояния по почти-периодическим в случае G-абелевости пары $(\mathfrak{A}, \omega)$. Это свойство равносильно абелевости $\widehat{P}_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A}) \widehat{P}_\omega$, согласно предложению 4.3.30, а тогда основное соответствие для ортогональных мер влечет абелевость $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'$. Тем самым, в силу предложения 4.3.41, существует единственная максимальная мера $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}}^{A(G)})$. Привлекательна была бы интерпретация разложения ω, задаваемого мерой μ, как разложения ω по почти-периодическим состояниям, но трудность здесь в том, что μ заведомо сосредоточена лишь на слабом* замыкании $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$, а не обязательно на самом $E_{\mathfrak{A}}^{A\,(G)}$. Тем не менее мы сейчас покажем, что μ эквивалентна эргодической мере m на отделимом компактном пространстве M, на котором определено почти-периодическое действие группы G. В данном контексте эргодичность m означает, что мера всякого m-измеримого G-инвариантного подмножества в M либо нуль, либо единица. Именно это свойство позволяет провести аналогию с рассмотренными выше разложениямн относительно подгруппы, когда для любой точки носителя μ орбита под действием группы имела меру единица.

Предложение 4.3.42. *Пусть $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^{G}$, где $\mathfrak{A}$—алгебра с единицей, и пусть μ — ортогональная G-инвариантная мера с барицентром ω, т. е. $\mu(\tau_g(f)) = \mu(f)$ при всех $f \in C(E_{\mathfrak{A}})$ и $g \in G$. Существуют отделимое компактное пространство M, действие $\hat{\tau}^*$ группы G на M, G-инвариантная бэровская мера m на M и сохраняющий меру $*$-изоморфизм $\varkappa$ пространства $L^\infty(E_{\mathfrak{A}}, \mu)$ на $L^\infty(M, m)$, коммутирующий с действием G.*

Если пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ будет G-абелевой, а $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^{G})$, то m эргодична для действия $\hat{\tau}^*$.

Если вдобавок G локально-компактна и абелева, пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G_Γ-абелевой, а μ — та ортогональная мера, которая соответствует проектору $\hat{P}_\omega$ на подпространство $U_\omega(G)$-почти-периодических векторов, то M можно выбрать так, чтобы действие τ^* было почти-периодическим, т. е. чтобы орбита $\{\hat{\tau}_t\varphi;\ t \in G\}$ всякой функции $\varphi \in C(M)$ имела компактное замыкание в $C(M)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ — абелева подалгебра фон Неймана в коммутанте, соответствующая μ. Благодаря G-инвариантности μ

$$U_\omega(g)\,\mathfrak{B}U_\omega(g)^{-1} \subseteq \mathfrak{B}$$

при всех $g \in G$, поэтому можно определить группу автоморфизмов $\hat{\tau}$ алгебры $\mathfrak{B}$ с помощью формулы

$$\hat{\tau}_g(B) = U_\omega(g)\,BU_\omega(g)^{-1}.$$

Рассмотрим G-инвариантное состояние m на $\mathfrak{B}$, задаваемое равенством

$$m(B) = (\Omega_\omega, B\Omega_\omega)$$

при $B \in \mathfrak{B}$. Это m можно отождествить с вероятностной мерой на спектре M алгебры $\mathfrak{B}$, причем носитель этой меры совпадает с M, так как вектор Ω_ω — отделяющий для $\mathfrak{B}$. Далее, можно отождествить $\mathfrak{B}$ с $L^\infty(M, m)$, а действие $\hat{\tau}$ группы G на $\mathfrak{B}$ задает сопряженное действие $\hat{\tau}^*$ той же группы на M. Инволютивный изоморфизм $\varkappa$, переводящий $L^\infty(E_{\mathfrak{A}}, \mu)$ в $L^\infty(M, m)$, задается тогда с помощью линейного отображения $\varkappa_\mu$, ассоциированного с μ по лемме 4.1.21:

$$f \in L^\infty(E_{\mathfrak{A}}, \mu) \longmapsto \varkappa(f) = \varkappa_\mu(f) \in \mathfrak{B} = L^\infty(M, m).$$

Отметим, что

$$\varkappa(\tau_g f) = \varkappa_\mu(\tau_g f) = U_\omega(g)\,\varkappa_\mu(f)\,U_\omega(g)^{-1} = \widehat{\tau}_g^*\varkappa(f);$$

ковариантный закон преобразования для $\varkappa_\mu$ выводится из G-инвариантности μ при помощи соотношений, полученных в доказательстве теоремы 4.3.38. Кроме того,

$$m(\varkappa(f)) = (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f)\,\Omega_\omega) = \mu(f).$$

Предположим теперь G-абелевость пары $(\mathfrak{A}, \omega)$. Условие $\omega \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^G\right)$ тогда равносильно тому, что Ω_ω будет единственным с точностью до множителя $U_\omega(G)$-инвариантным вектором в $\mathfrak{H}_\omega$ (в соответствии с теоремой 4.3.17). Тем самым, если $P \in \mathfrak{B}$ — проектор на G-инвариантное m-измеримое множество, то $\widehat{\tau}_g(P) = P$ и поэтому

$$U_\omega(g)\,P\Omega_\omega = P\Omega_\omega = \lambda\Omega_\omega$$

при всех $g \in G$ и некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Но для $\mathfrak{B}$ вектор Ω_ω отделяющий, так как $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$; следовательно, $P = \mathbb{1}$ или 0. Итак, m — эргодическая мера для действия группы G.

Наконец, если $\omega \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^G\right)$ и пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ является G-абелевой, то для унитарных собственных элементов $V_\gamma \in \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ группы автоморфизмов $\widehat{\tau}$

$$\{V_\gamma;\ \gamma \in \sigma_{\mathrm{p}}(U_\omega)\}'' = \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}',$$

в силу теоремы 4.3.31. Пусть $\mathfrak{B}_0$ обозначает C^*-алгебру, порожденную $\{V_\gamma, \gamma \in \sigma_{\mathrm{p}}(U_\omega)\}$; тогда $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0'' = \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'$ будет алгеброй фон Неймана, ассоциированной с ортогональной мерой, определенной по $\widehat{P}_\omega$. Таким образом, M можно заменить в предыдущей конструкции на спектр алгебры $\mathfrak{B}_0$, так что $\mathfrak{B}_0 = C(M) \subseteq L^\infty(M, m) = \mathfrak{B}$. Поскольку всякий элемент $B \in \mathfrak{B}_0$ является равномерным пределом полиномов от собственных элементов группы $\hat{\tau}$, то $\hat{\tau}$ действует на $\mathfrak{B}_0$ сильно непрерывно, а равномерное замыкание орбиты $\{\tau_t(B);\ t \in G\}$ компактно. Последнее вытекает из рассуждений, дающих характеризацию почти-периодичности, указанную перед предложением 4.3.40.

Замечание. Если в первом утверждении предложения предположить сепарабельность $[\mathfrak{B}\Omega_\omega]$, где $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ — алгебра фон Неймана, ассоциированная с μ, то можно усилить заключение о *-изоморфизме $\varkappa$. Общий результат фон Неймана (см. замечания и комментарии) показывает, что существуют такие подмножества $E_\mu \subseteq E_{\mathfrak{A}}$ с $\mu(E_\mu) = 1$ и $M_m \subseteq M$ с $m(M_m) = 1$ и такой борелевский изоморфизм η из E_μ в M_m, что

$$f(\eta\omega) = (\varkappa^{-1}f)(\omega)$$

при всех $\omega \in E_\mu$ и $f \in L^\infty(M, m)$.

Последнее утверждение предложения 4.3.42 можно усилить, располагая более подробной информацией о носителе ортогональной меры μ, ассоциированной с $\widehat{P}_\omega$. Наша следующая цель — показать, что если носитель μ содержится в $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$, то соответствующее разложение ω можно часто выразить как усреднение состояния $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right)$ по его орбите. Для доказательства этого результата и для проведения аналогии с предыдущими разложениями относительно нормальной подгруппы полезно располагать еще одной, четвертой характеризацией почти-периодических функций — в терминах компактификации G.

Если G — локально-компактная абелева группа, то мы обозначаем через $\widehat{G}_d$ ее двойственную группу, снабженную дискретной топологией. Согласно теории двойственности Понтрягина группа $\overline{G}$, двойственная к $\widehat{G}_d$, является компактной группой. Рассмотрим отображение α группы G в $\overline{G}$, заданное формулой

$$(\gamma, t) = (\alpha t, \gamma)$$

при всех $t \in G$ и $\gamma \in \widehat{G}_d$. Можно показать, что α оказывается непрерывным изоморфизмом G на плотную подгруппу $\alpha(G)$ в $\overline{G}$. Группу $\overline{G}$ обычно называют *боровской компактификацией* (или *компактификацией Бора*) группы G. Ею можно воспользоваться для того, чтобы охарактеризовать множество почти-периодических функций $A(G)$ следующим критерием.

Пусть f — ограниченная функция на G; тогда эквивалентны следующие условия:

(1) $f \in A(G)$;

(2) имеется такая функция $h \in G(\overline{G})$, что

$$f(t) = h(\alpha t) \text{ при всех } t \in G.$$

Отметим, что вследствие плотности $\alpha(G)$ в $\overline{G}$ данная характеризация устанавливает такой $*$-изоморфизм α: $f \in C(\overline{G}) \longmapsto \alpha f \in A(G)$, что

$$(\alpha f)(t) = f(\alpha t) \text{ при всех } t \in G.$$

Далее, упомянем, что определено действие τ группы G на $A(G)$, задаваемое формулой $(\tau_t f)(t') = f(t + t')$, и существованием единственной меры Хаара $d\bar{t}$ на $\overline{G}$ гарантируется существование инвариантного среднего M на $A(G)$. При всех $f \in C(\overline{G})$ выполняется соотношение

$$M(\alpha f) = \int_{\overline{G}} d\bar{t}\, f(\bar{t}).$$

Существование и единственность среднего M можно установить и с помощью других характеризаций $A(G)$. Например, можно задать M как линейный функционал на $A(G)$, удовлетворяющий условиям: $M(\gamma) = 0$ для всякого характера γ, отличного от тождественного характера ι, а $M(\iota) = 1$. Действительно, пусть M' — любое инвариантное среднее на $A(G)$. Если $\gamma \in \overline{G}$, то

$$(\tau_t \gamma, t') = (\gamma, tt') = (\gamma, t)(\gamma, t')$$

и, следовательно,

$$M'(\tau_t\gamma) = M'(\gamma) = (\gamma, t)\, M'(\gamma)$$

при всех $t \in G$. Значит, $M'(\gamma) = 0$ при всех γ, кроме ι. Тем самым инвариантное среднее M будет определено единственным образом на $T(G)$, а по непрерывности оно единственным образом продолжается на $A(G)$. Третью характеризацию M можно дать в терминах орбит $\{\tau_t f;\ t \in G\}$. Для каждой функции $f \in A(G)$ можно проверить, что замкнутая выпуклая оболочка ассоциированной с ней орбиты содержит единственную константу $M(f)$, и эти константы определяют инвариантное среднее.

Вернемся теперь к характеризации почти-периодических разложений.

Предложение 4.3.43. *Пусть* $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^{G})$, *где* G — *локально-компактная абелева группа и* $\mathfrak{A}$ *имеет единицу, и предположим* G_Γ — *абелевость пары* $(\mathfrak{A}, \omega)$. *Пусть* $H_\omega \subseteq G$ *обозначает аннулятор точечного спектра* $\sigma_p(U_\omega)$ *унитарной группы* $U_\omega(G)$, *а* μ — *ортогональную меру, соответствующую проектору* $\widehat{P}_\omega$ *на подпространство* $U_\omega(G)$-*почти-периодических векторов. Предположим также, что*

(1) ω *содержится в грани* F, *которая удовлетворяет условию сепарабельности* S;

(2) *носитель* μ *содержится в* $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$.

Тогда найдется такое $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}) \cap E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}$, *что*

$$f(\omega) = M(f(\tau^* \tilde{\omega}))$$

при всех $f \in C(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)})$, ***где*** M ***обозначает единственное инвариантное среднее на*** $A(G/H_\omega)$. ***В частности,***

$$\omega(A) = M(\tilde{\omega}(\tau(A)))$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Согласно предложению 4.3.30, из G_Γ-абелевости $(\mathfrak{A}, \omega)$ следует абелевость $\widehat{P}_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A}) \widehat{P}_\omega$, и в силу основного соответствия для ортогональных мер будет абелевым $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}'$. Тогда из предложения 4.3.41 вытекает, что μ сосредоточена на $\mathscr{E}(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)})$. Пусть S_μ обозначает носитель μ. Теорема 4.3.31 показывает, что $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup \widehat{P}_\omega\}' \subseteq \{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup E_\omega(H_\omega)\}'$. Поэтому, применнв предложение 4.3.2 с $G = H_\omega$, мы заключаем что $S_\mu \subseteq E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}$. Но по предположению $S_\mu \subseteq E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$, следовательно,

$$S_\mu \subseteq \mathscr{E}(\overline{E}_{\mathfrak{A}}^{A(G)}) \cap E_{\mathfrak{A}}^{A(G)} \cap E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega} \subseteq \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}) \cap E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}.$$

Наконец, μ сосредоточена на F, и, значит, она сосредоточена на $F \cap \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right) \cap \cap E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}$.

Теперь заметим, что G-инвариантность μ влечет для $\tilde{\omega} \in S_\mu$ условие $\tau_t^* \tilde{\omega} \in S_\mu$ при всех $t \in G$, и поэтому τ определяет действие G на $C(S_\mu)$. Далее, всякой почти-периодической функции на G отвечает некоторая непрерывная функция на боровской компактификации $\overline{G}$ группы G. Тем самым можно задать действие τ^* группы $\overline{G}$ на каждое $\omega \in S_\mu \subseteq E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$, а переходя к сопряженным операторам, определить действие $\bar{\tau}$ на $f \in C(S_\mu)$. Возникающая функция $\bar{t} \in \overline{G} \longmapsto \bar{\tau}_{\bar{t}} f$ будет непрерывна. Но если f, $f_n \in C(S_\mu)$, то

$$\mu(\tau_t(t) f_n) = (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f) U_\omega(t)^{-1} \varkappa_\mu(f_n) \Omega_\omega) =$$

$$= (\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f) U_\omega(t)^{-1} \hat{P}_\omega \varkappa_\mu(f_n) \Omega_\omega)$$

в соответствии с основной структурной теоремой для ортогональных мер (теоремой 4.1.25) и ковариантным законом преобразования для $\varkappa_\mu$, полученным в ходе доказательства теоремы 4.3.38. Таким образом,

$$\mu(\tau_t(f) f_n) = \sum_{\gamma \in \sigma_p(U_\omega)} (\gamma, t)(\Omega_\omega, \varkappa_\mu(f) P_\omega[\gamma] \varkappa_\mu(f_n) \Omega_\omega).$$

В частности, $\mu(\tau(f) f_n) \in A(G/H_\omega)$ и

$$M(\mu(\tau(f) f_n)) = \mu(f) \mu(f_n),$$

поскольку $M(\gamma) = 0$ при всех $\gamma \in \hat{G}$, кроме ι, а $P_\omega[\iota]$, по теореме 4.3.31, (2), оказывается проектором на $\mathbf{C}\Omega_\omega$. Последнее соотношение, выраженное в терминах $\overline{G/H_\omega}$, приводит к равенству

$$\mu(f) = \mu(f_n)^{-1} \int_{\overline{G/H_\omega}} d\bar{t} \mu(\bar{\tau}_{\bar{t}}(f) f_n),$$

где $d\bar{t}$ обозначает меру Хаара. Воспроизведя основанные на теореме Лебега о мажорированной сходимости рассуждения из доказательства теоремы 4.3.38, можно установить, что

$$\mu(f) = \int_{\overline{G/H_\omega}} d\bar{t} f(\bar{\tau}_{\bar{t}}^* \tilde{\omega})$$

для любых $\tilde{\omega} \in S_\mu \cap \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}\right) \cap \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}\right)$.

Подчеркнем, что $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)} \cap E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega} = E_{\mathfrak{A}}^{A(G/H_\omega)}$, т. е. разложение действительно происходит по состояниям почти-периодическим относительно факторгруппы G/H_ω.

Предложение 4.3.43 неудовлетворительно в том плане, что опирается на предположение о вложении носителя μ в $E_{\mathfrak{A}}^{A(G)}$. Проиллюстрируем природу этого предположения, рассмотрев случай дискретного спектра $\sigma_p(U_\omega)$, когда G/H_ω с необходимостью компактна. Тогда G/H_ω совпадает со своей компактификацией, $A(G/H_\omega) = C(G/H_\omega)$, и орбиты $\dot{t} \in G/H_\omega \longmapsto \tilde{\omega}(\tau_{\dot{t}}(A))$ автоматически непрерывны для любого $\tilde{\omega} \in E_{\mathfrak{A}}^{A\,(G/H_\omega)}$ и любого $A \in \mathfrak{A}$. Таким образом, предложение 4.3.43 приводит к разложению для $\omega \in \mathscr{E}\,(E_{\mathfrak{A}}^{G})$ того же типа, что и указанное в следствии 4.3.39 разложение

$$\omega(A) = \int\limits_{G/H_\omega} dt\tilde{\omega}\,(\tau_t(A)).$$

Однако предположением о носителе μ обеспечивается непрерывность $\tau_t^*\tilde{\omega}$, которой в общем случае может и не быть. Разумеется, если τ сильно непрерывно действует на $\mathfrak{A}$, то для соответствующего частного случая предложение 4.3.43 совпадает со следствием 4.3.39. Для того чтобы избавиться от предположения о носителе μ, но все же представить разложение ω как усреднение вдоль орбиты другого состояния, обладающего эргодическими свойствами, оказывается необходимым расширить понятие почти-периодического состояния. При этом требуется найти аналог понятия измеримости орбиты, т. е. корректное понятие почти-периодичности должно быть связано с измеримостью орбиты по отношению к мере Хаара на $\bar{G}$.

В заключение отметим, что неясно, какие кластерные свойства характеризуют $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}\,(E_{\mathfrak{A}}^{A\,(G)})$, однако для ω и $\tilde{\omega}$, взаимосвязанных так же, как в предложении 4.3.43, нетрудно показать, что

$$M\,(\tilde{\omega}\,(A\tau\,(B))) = \tilde{\omega}\,(A)\,\omega\,(B).$$

4.4. Пространственное разложение

До сих пор в этой главе мы интересовались разложением заданного состояния ω операторной алгебры $\mathfrak{A}$ по другим состояниям. Согласно общей схеме этих разложений, развитой в пункте 4.1.3, надлежит выбрать абелеву подалгебру фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega\,(\mathfrak{A})'$ и разложить ω «над спектром $\mathfrak{B}$». Если $\mathfrak{B}$ конечномерна, т. е. $\mathfrak{B}$ натягивается на конечную последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n$ взаимно ортогональных проекторов с $\sum_{i=1}^{n} P_i = \mathbb{1}$, то разложение ω принимает вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i,$$

где $\lambda_i\omega_i\,(A) = (\Omega_\omega,\; P_i\pi_\omega\,(A)\,\Omega_\omega)$. С этим разложением ω тесно связано пространственное разложение представления

$$(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega),$$

ибо, задав

$$\mathfrak{H}_i = P_i\mathfrak{H}_\omega, \quad \pi_i = P_i\pi_\omega,$$

$$\Omega_i = \frac{P_i\Omega_\omega}{\|P_i\Omega_\omega\|},$$

мы отождествим $(\mathfrak{H}_i, \pi_i, \Omega_i)$ с $(\mathfrak{H}_{\omega_i}, \pi_{\omega_i}, \Omega_{\omega_i})$, и тогда

$$\mathfrak{H}_\omega = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{H}_{\omega_i}, \quad \pi_\omega = \bigoplus_{i=1}^{n} \pi_{\omega_i}.$$

Это разложение представления π_ω называется *пространственным разложением* π_ω, определенным алгеброй $\mathfrak{B}$. Обобщению такого понятия на произвольные абелевы подалгебры фон Неймана $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$ и посвящен данный пункт. Конечно, в общем случае разложение имеет вид прямого интеграла, а не прямой суммы, так что вначале требуется изложить теорию прямых интегралов гильбертовых пространств. Оказывается, что удовлетворительную теорию такого рода удается построить только при наличии надлежащих свойств сепарабельности — как у пространств с мерой, так и у гильбертовых пространств. Поскольку эта теория подробным образом освещена в большинстве стандартных руководств по операторным алгебрам, мы в основном ограничимся обзором результатов. Бóльшая часть проблем здесь относится к теории меры, а доказательства проводятся в том же духе, что и доказательство предложения 4.1.34.

Изучение разложения состояний при помощи разложения представлений обладает рядом преимуществ перед разобранным выше подходом, опирающимся почти исключительно на свойства состояний. Например, для того чтобы получить «хорошие» свойства носителей максимальных ортогональных мер μ_ω, встречающихся в экстремальных, центральных и эргодических разложениях, мы постоянно предполагали, что ω лежит в грани F, удовлетворяющей условию сепарабельности S. Хотя это предположение естественно в приложениях теории разложения к квазилокальным алгебрам, оно выглядит довольно искусственным в общей постановке. Теория представлений позволит нам заключить, что меры μ_ω имеют хорошие носители при более слабом и естественном предположении о сепарабельности пространства представления $\mathfrak{H}_\omega$. Кроме того, можно использовать разложение представлений для получения результатов о разложениях состояний по отношению к алгебре на бесконечности и для доказательства того, что разложение эргодического состояния по отношению к нормальной подгруппе приводит к улучшенным кластерным свойствам.

4.4.1. Общая теория

Сначала напомним, что конечная положительная мера μ на измеримом пространстве Z называется *стандартной мерой*, если существует такое μ-пренебрежимое подмножество $E \subseteq Z$, что $Z \setminus E$ является стандартным пространством с мерой, т. е. борелевская структура на $Z \setminus E$ задается некоторым польским пространством (полным сепарабельным метрическим пространством). Отметим, в частности, что если $E_{\mathfrak{A}}$ — пространство состояний C^*-алгебры с единицей, грань $F \subseteq E_{\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию сепарабельности S, $\omega \in$ F и μ — мера Бэра с барицентром ω, то μ сосредоточена на F, согласно предложению 4.1.34, и легко проверить, что μ — стандартная мера.

Предположим, что мера μ на Z стандартна и что каждому $z \in Z$ сопоставлено гильбертово пространство $\mathfrak{H}(z)$. Тогда при условиях, которые будут оговорены ниже, можно определить прямой интеграл гильбертовых пространств

$$\mathfrak{H} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z).$$

Известны два эквивалентных определения этого объекта. Один из подходов отличают краткость и конкретность, но он несколько искусствен с общей точки зрения, а другой хотя и длиннее, но более естествен и лучше применим. Мы опишем оба подхода.

Определение 4.4.1А. Пусть задана последовательность раз и навсегда выбранных гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_2 \subseteq \ldots$ $\ldots \subseteq \mathfrak{H}_{\aleph_0}$, в которой индекс пространства совпадает с его размерностью. Пусть $\{Z_n\}$ — разбиение Z на измеримые подмножества. Для $z \in Z_n$ полагаем $\mathfrak{H}(z) = \mathfrak{H}_n$. Тогда

$$\mathfrak{H} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z)$$

определяется как множество всех функций f на Z, таких что

(I) $f(z) \in \mathfrak{H}_n \subseteq \mathfrak{H}_{\aleph_0}$ при $z \in Z_n$;

(II) функция $z \longmapsto f(z) \in \mathfrak{H}_{\aleph_0}$ является μ-измеримой, т. е. μ-измеримы функции $z \longmapsto (\xi, f(z))$ при всех $\xi \in \mathfrak{H}_{\aleph_0}$;

(III) $\int_Z d\mu(z)\, \| f(z) \|^2 < \infty$.

(Заметьте, что (II) и сепарабельность $\mathfrak{H}_{\aleph_0}$ влекут измеримость функции $z \longmapsto \|f(z)\|^2$.)

Линейные операции вводятся очевидным образом, а скалярное произведение задается формулой

$$(f,\ g) = \int\limits_Z d\mu\,(z)\,(f\,(z),\ g\,(z)).$$

Пространство $\mathfrak{H}$ называют *прямым интегралом гильбертовых пространств* $\mathfrak{H}\,(z)$.

При другом определении на семейство пространств приходится наложить условие, которое при определении 4.4.1А выполнено тривиальным образом.

Определение 4.4.1Б. Пусть $\mathscr{F}$ обозначает пространство функций на Z, таких что $\xi\,(z) \in \mathfrak{H}\,(z)$ при каждом $z \in Z$. Семейство $\{\mathfrak{H}\,(z);\ z \in Z\}$ называется *измеримым*, если существует последовательность функций $\{\xi_n\}$ в $\mathscr{F}$, такая что

(1) функция $z \longmapsto (\xi_n\,(z),\ \xi_m\,(z))$ измерима по мере μ на Z при всех $n,\ m$;

(2) множество $\{\xi_n\,(z);\ n = 1,\ 2,\ \ldots\}$ плотно в $\mathfrak{H}\,(z)$ при каждом $z \in Z$.

Если семейство $\{\mathfrak{H}\,(z)\}$ измеримо, а V — линейное подпространство в $\mathscr{F}$, то V называется *измеримым* в том случае, когда

(1′) для любых $\xi,\ \eta \in V$ измерима функция $z \longmapsto (\xi\,(z),\ \eta\,(z))$;

(2′) имеется счетное семейство $\{\xi_n;\ n = 1,\ 2,\ \ldots\}$ V, такое что множество $\{\xi_n\,(z);\ n = 1,\ 2,\ \ldots\}$ плотно в $\mathfrak{H}\,(z)$ при каждом $z \in Z$.

По лемме Цорна всякое подпространство, удовлетворяющее условиям (1′) и (2′), содержится в некотором максимальном подпространстве $V \subseteq \mathscr{F}$, удовлетворяющем этим условиям.

Рассмотрим в таком максимальном V множество $\mathfrak{H}$, состоящее из элементов ξ, для которых

$$\int\limits_Z d\mu\,(z)\,\|\,\xi\,(z)\|^2 < \infty\,.$$

Тогда $\mathfrak{H}$ оказывается гильбертовым пространством, если ввести скалярное произведение формулой

$$(\xi,\,\eta) = \int\limits_Z d\mu\,(z)\,(\xi\,(z),\eta\,(z)).$$

Будем называть $\mathfrak{H}$ *прямым интегралом семейства* $\{\mathfrak{H}\,(z)\}$ и писать

$$\mathfrak{H} = \int\limits_Z^{\oplus} d\mu\,(z)\,\mathfrak{H}\,(z).$$

Эквивалентность определений 4.4.1А и 4.4.1Б, а также независимость второго определения от конкретного выбора максимального измеримого подпространства V следуют из приводимой ниже структурной теоремы. Метод ее доказательства напоминает процесс ортогонализации Грама—Шмидта.

Теорема 5.4.2. *Пусть* μ — *стандартная мера на* Z, $\{\mathfrak{H}(z), z \in Z\}$ — *измеримое семейство гильбертовых пространств и* $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{H}_{\aleph_0}$ — *возрастающая последовательность гильбертовых пространств, причем* $\dim \mathfrak{H}_n = n$. *Если обозначить*

$$Z_n = \{z \in Z; \quad \dim \mathfrak{H}(z) = n\},$$

то Z_n *образуют разбиение* Z *на измеримые подмножества.*

Если V — *максимальное измеримое подмножество в* $\mathcal{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ — *ассоциированное с ним гильбертово пространство, то существует унитарный оператор*

$$U : \mathfrak{H} \to \bigoplus_{n=1}^{\aleph_0} (L^2(Z_n, d\mu) \otimes \mathfrak{H}_n),$$

который действует следующим образом: для каждого $z \in Z_n \subseteq Z$ *имеется унитарный оператор* $U(z)\colon \mathfrak{H}(z) \to \mathfrak{H}_n$, *и если* $\xi \in \mathfrak{H}$, *то*

$$(U\xi)(z) = U(z)\,\xi(z).$$

Здесь мы рассматриваем $\bigoplus\limits_{n=1}^{\aleph_0} (L^2(Z_n; d\mu) \otimes \mathfrak{H}_n)$ *как множество функций* η *из* Z *в* $\mathfrak{H}_{\aleph_0}$, *таких что* $\eta(z) \in \mathfrak{H}_n$ *при* $z \in Z_n$.

Немедленным следствием этой теоремы является такое заключение: если V_0, V_1 — два максимальных измеримых подпространства в $\mathcal{F}$ и $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_1$ — ассоциированные с ними гильбертовы пространства, то при каждом $z \in Z$ существует унитарный оператор $V(z)$ в $\mathfrak{H}(z)$, такой что соотношением

$$(V\xi)(z) = V(z)\,\xi(z), \; \xi \in \mathfrak{H}_0,$$

задается унитарный оператор $V\colon \mathfrak{H}_0 \to \mathfrak{H}_1$. Следовательно, интеграл

$$\mathfrak{H}_0 = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\,\mathfrak{H}(z)$$

определен единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности указанного типа.

Поскольку мера μ стандартна, гильбертово пространство $\int\limits_Z^{\oplus} d\mu(z)\,\mathfrak{H}(z)$ сепарабельно. Полезно также отметить, что если подпространство

$$V \subseteq \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\,\mathfrak{H}(z)$$

обладает свойствами:

(1) $\{\xi(z),\ \xi \in V\}$ плотно в $\mathfrak{H}(z)$ при каждом $z \in Z$;

(2) для любых $\xi \in V$ и $f \in L^\infty(Z, d\mu)$ равенство $(f\xi)(z) = f(z)\,\xi(z)$ определяет элемент подпространства V,

то V плотно в $\int_Z^\oplus d\mu(z)\,\mathfrak{H}(z)$ (разумеется, можно воспользоваться этим, чтобы определить прямой интеграл, не прибегая к максимальным измеримым подпространствам). Доказательство совсем просто. Если $\xi \in V^\perp$, то

$$\int d\mu(z)\, f(z)\,(\xi(z),\ \eta(z)) = 0$$

при всех $f \in L^\infty(Z; d\mu)$ и $\eta \in V$. Поэтому $(\xi(z), \eta(z)) = 0$ для μ-почти всех z, т. е. $\xi(z) = 0$ для μ-почти всех z, или $\xi = 0$. С аналогичными результатами мы встретимся и позже, например в теореме 4.4.5.

Введем теперь понятия разложимого и диагонализируемого операторов в прямом интеграле гильбертовых пространств $\mathfrak{H} = \int_Z^\oplus d\mu(z)\,\mathfrak{H}(z)$, определенном по максимальному измеримому подпространству V. Для каждого $z \in Z$ пусть $T(z) \in \mathscr{L}(\mathfrak{H}(z))$. Если $(z \longmapsto T(z)\,\xi(z)) \in V$ при всяком $\xi \in V$, то $z \longmapsto T(z)$ называется *измеримым семейством операторов*. В таком случае будет измерима функция $z \longmapsto \|T(z)\|$. Если эта функция существенно ограничена, то $\xi \in \mathfrak{H}$ влечет $T\xi \in \mathfrak{H}$, где вектор $T\xi$ определяется соотношением

$$(T\xi)(z) = T(z)\,\xi(z).$$

Отображение $\xi \longmapsto T\xi$ задает ограниченный оператор T в $\mathfrak{H}$. Любой оператор такого вида называется *разложимым* и обозначается так:

$$T = \int_Z^\oplus d\mu(z)\, T(z).$$

Ясно, что вместе с T и S разложимыми окажутся $T + S$, TS и T^* и что

$$T + S = \int_Z^\oplus d\mu(z)\,(T(z) + S(z)),$$

$$TS = \int_Z^\oplus d\mu(z)\,(T(z)\,S(z)),$$

$$T^* = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, T(z)^*,$$

$$\|T\| = \operatorname{ess\,sup}\{\|T(z)\|;\quad z \in Z\}.$$

Если оператор T разложим и вдобавок при каждом z оператор $T(z)$ в $\mathfrak{H}(z)$ скалярен, то T называют *диагонализуемым оператором*. Воспользовавшись отождествлением

$$\int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z) = \bigoplus_{n=1}^{\aleph_0} (L^2(Z_n, d\mu) \otimes \mathfrak{H}_n),$$

можно убедиться, что множество разложимых операторов совпадает с алгеброй фон Неймана

$$\bigoplus_{n=1}^{\aleph_0} (L^\infty(Z_n\, d\mu) \otimes \mathscr{L}(\mathfrak{H}_n)),$$

а диагонализуемые операторы образуют ее абелеву подалгебру

$$\bigoplus_{n=1}^{\aleph_0} (L^\infty(Z_n, d\mu) \otimes 1_{\mathfrak{H}_n}).$$

Последняя алгебра является центром первой, и мы теперь покажем, что в таком виде представима всякая абелева алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Теорема 4.4.3. *Пусть $\mathfrak{Z}$ — абелева алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда существуют стандартная мера μ на измеримом пространстве Z, измеримое семейство $z \longmapsto \mathfrak{H}(z)$ гильбертовых пространств и унитарное отображение*

$$U: \mathfrak{H} \to \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z),$$

такие что $U\mathfrak{Z}U^*$ совпадает с алгеброй диагонализуемых операторов в пространстве

$$\int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z).$$

Эта теорема уже была доказана нами при наличии у $\mathfrak{Z}$ циклического и отделяющего вектора во вводных замечаниях к разделу 2.5. В таком случае все $\mathfrak{H}(z)$ будут одномерными. Применение структурной теоремы для изоморфизмов между алгебрами фон Неймана (см. теорему 2.4.26) сводит доказательство теоремы 4.4.3 к техническому упражнению.

Упомянем еще некоторые результаты об общем виде алгебр фон Неймана $\mathfrak{M}$, состоящих из разложимых операторов и содержащих диагонализуемые операторы $\mathfrak{Z}$, т. е. $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Z}'$.

***Определение* 4.4.4.** Пусть μ — стандартная мера на Z и $z \mapsto \mathfrak{H}(z)$ — измеримое семейство гильбертовых пространств на Z с прямым интегралом $\mathfrak{H} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z)$. Пусть при каждом z задана алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}(z)$ в $\mathfrak{H}(z)$. Семейство

$$\{\mathfrak{M}(z);\quad z \in Z\}$$

называется *измеримым семейством алгебр фон Неймана*, если в $\mathfrak{H}$ существует последовательность разложимых операторов

$$A_n = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, A_n(z),$$

такая что $\mathfrak{M}(z)$ оказывается алгеброй фон Неймана, порожденной $\{A_n(z);\ n = 1, 2, \ldots\}$, для почти всех z. В такой ситуацин алгебру фон Неймана $\mathfrak{M} = (\{A_n;\ n = 1, 2, \ldots\} \cup \mathfrak{Z}''$, порожденную операторами $\{A_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ и диагонализуемыми операторами, называют *прямым интегралом семейства* $\{\mathfrak{M}(z)\}$ и обозначают так:

$$\mathfrak{M} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{M}(z).$$

Эту терминологию оправдывает следующая теорема, которая показывает, что последовательность $\{A_n\}$ в определении $\mathfrak{M}$ играет сугубо вспомогательную роль. Доказательство опирается на теорему о бикоммутанте и использует принадлежность $\mathfrak{Z}$ центру $\mathfrak{M}$.

Теорема 4.4.5. *Если* $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — *два прямых интеграла алгебр фон Неймана, то* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}(z) \subseteq \mathfrak{N}(z)$ *для почти всех* $z \in Z$.

В частности, $\mathfrak{M}$ *единственным образом определяется измеримым семейством* $\{\mathfrak{M}(z)\}$, *т. е. оператор* A *содержится в* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, когда* A *разложим и* $A(z) \in \mathfrak{M}(z)$ *при почти всех* $z \in Z$.

Поскольку всякая алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве сепарабельна в σ-слабой топологии, из определения 4.4.4 следует, что алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z)$ является прямым интегралом тогда и только тогда, когда $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Z}'$. Следовательно, теорема 4.4.5 характеризует такой класс алгебр фон Неймана. Следующее предложение не содержит неожиданностей; в нем показано, что операция взятия прямого интеграла коммутирует с операциями счетного пересечения и взятия коммутанта в множестве таких алгебр фон Неймана.

Предложение 4.4.6. *Пусть мера* μ *стандартна и* $\mathfrak{H} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z)$ — *прямой интеграл гильбертовых пространств.*

а) *Если алгебра* $\mathfrak{M}$ *в* $\mathfrak{H}$ *является прямым интегралом алгебр фон Неймана:*

$$\mathfrak{M} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{M}(z),$$

то $\mathfrak{M}'$ *имеет вид*

$$\mathfrak{M}' = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{M}'(z).$$

б) *Если в* $\mathfrak{H}$ *задана последовательность* $\mathfrak{M}_n$ *прямых интегралов алгебр фон Неймана:*

$$\mathfrak{M}_n = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{M}_n(z),$$

то пересечение $\mathfrak{M}_n$ *также является прямым интегралом алегбр фон Неймана и*

$$\bigcap_n \mathfrak{M}_n = \int_Z^{\oplus} d\mu(z) \left(\bigcap_n \mathfrak{M}_n(z)\right)$$

Интересное следствие этого результата мы получим, рассмотрев разложение $\mathfrak{H} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z)$ пространства $\mathfrak{H}$, соответствующее центру $\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ по теореме 4.4.3. Воспользовавшись утверждением а) и положив $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}'$ в б), мы придем к равенству

$$\mathfrak{Z} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, (\mathfrak{M}(z) \cap \mathfrak{M}(z)').$$

Но так как $\mathfrak{Z}$ в точности состоит из диагонализуемых операторов в $\mathfrak{H}$, мы убеждаемся, что при почти всех $z \in Z$

$$\mathfrak{M}(z) \cap \mathfrak{M}(z)' = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}(z)},$$

т. е. $\mathfrak{M}(z)$ при почти всех z оказывается фактором. Тем самым проблема классификации алгебр фон Неймана с сепарабельным преддвойственным пространством сводится к двум проблемам: классификации стандартных мер и классификации факторов с сепарабельным преддвойственным пространством. Как известно, всякое стандартное измеримое пространство Z либо счетно, и тогда все его подмножества измеримы, либо изоморфно единичному отрезку $[0, 1]$, снабженному обычной борелевской структурой. Таким образом, основную трудность представляет проблема классификации факторов, которую мы уже кратко обсуждали в пункте 2.7.3.

Обратимся теперь к самой важной теме данного пункта — разложению представлений. Пусть заданы стандартное пространство (Z, μ), прямой интеграл гильбертовых пространств

$$\mathfrak{H} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z)$$

и $(\mathfrak{H}, \pi)$ — такое невырожденное представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}$, что каждый оператор $\pi(A)$ разложим. Воспользовавшись сепарабельностью, с помощью обычных рассуждений нетрудно показать, что для μ-почти всех $z \in Z$ существует такое представление $\pi(z)$ алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}(z)$, что $z \mapsto \pi(z)(A)$ измеримо и

$$\pi(A) = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \pi(z)(A)$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. Разумеется, в таком случае говорят, что $z \mapsto \pi(z)$ измеримо, и пишут

$$\pi = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \pi(z).$$

Из теоремы 4.4.3 и вышеупомянутого факта сразу же вытекает

Теорема 4.4.7. *Пусть π—невырожденное представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}$ — абелева подалгебра фон Неймана коммутанта $\pi(\mathfrak{A})'$. Тогда существуют стандартное измеримое пространство Z, положительная ограниченная мера μ на Z, измеримое семейство $z \mapsto \mathfrak{H}(z)$ гильбертовых пространств на Z, измеримое семейство $z \mapsto \pi(z)$ представлений $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}(z)$ и унитарное отображение*

$$U : \mathfrak{H} \to \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z),$$

такие что $U \mathfrak{B} U^*$ совпадает с множеством диагонализуемых операторов в $\int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z)$ и при всех $A \in \mathfrak{A}$

$$U \pi(A) U^* = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \pi(z)(A),$$

Это важнейшая теорема для пространственных разложений представлений, и в общей постановке сразу же напрашиваются два естественных выбора для $\mathfrak{B}$:

(1) $\mathfrak{B}$ — максимальная абелева в $\pi(\mathfrak{A})'$ (экстремальное разложение);

(2) $\mathfrak{B} = \pi(\mathfrak{A})' \cap \pi(\mathfrak{A})''$ (факторное разложение).

Приводимое ниже следствие является аналогом теорем 4.2.5 и 4.2.10 для пространственных разложений. Действительно, из теоремы 4.4.9 следующего пункта вытекает, что обе эти теоремы можно вывести из следствия в том случае, когда ω содержится в грани F, удовлетворяющей условию сепарабельности S. Тем самым возникает доказательство этих теорем без применения теории барицентрических разложений, а в том случае, когда ω порождает представление в сепарабельном гильбертовом пространстве, мы получаем обобщение на этот случай утверждений указанных теорем о свойствах множеств сосредоточения меры.

Следствие 4.4.8. *Пусть π — невырожденное представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ — абелева подалгебра фон Неймана в $\pi(\mathfrak{A})'$ и*

$$\pi = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \pi(z)$$

— разложение π, соответствующее $\mathfrak{B}$.

а) *Эквивалентны следующие условия:*

(1) *$\pi(z)$ неприводимо для μ-почти всех $z \in Z$;*

(2) *$\mathfrak{B}$ — максимальная абелева подалгебра в $\pi(\mathfrak{A})'$.*

б) *Если $\mathfrak{B} = \pi(\mathfrak{A})'' \cap \pi(\mathfrak{A})''$, то $\pi(z)$ — фактор-представление для μ-почти каждого $z \in Z$, и в этом случае*

$$\pi(\mathfrak{A})'' = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, (\pi(z)(\mathfrak{A}))''.$$

Доказательство. (a1) $\Rightarrow$ (a2). Предположим неприводимость $\pi(z)$ для почти всех z и возьмем $A \in \mathfrak{B}' \cap \pi(\mathfrak{A})'$. Так как $A \in \mathfrak{B}'$, то оператор A разложим:

$$A = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, A(z).$$

Но для каждого $B \in \mathfrak{A}$ выполняется равенство $\pi(B)A = A\pi(B)$. Поэтому

$$\pi(z)(B)\, A(z) = A(z)\, \pi(z)(B)$$

для почти всех z. Из σ-слабой сепарабельности $\pi(\mathfrak{A})''$ следует, что $A(z) \in \in (\pi(z)(\mathfrak{A}))' = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}(z)}$ для μ-почти всех z. Следовательно, A диагонализуем и $A \in \mathfrak{B}$.

(а2) $\Rightarrow$ (а1). Если $\mathfrak{B}$ — максимальная абелева подалгебра в $\pi(\mathfrak{A})'$, то $\mathfrak{B}'$ порождается, как алгебра фон Неймана, $\pi(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}$. Согласно определению 4.4.4, тогда

$$\mathfrak{B}' = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\,(\pi(z)(\mathfrak{A}))''$$

и, значит, в силу предложения 4.4.6, а),

$$\mathfrak{B} = \int_Z^{\oplus} d\mu(z)\,(\pi(z)(\mathfrak{A}))'.$$

Но так как $\mathfrak{B}$ состоит в точности из диагонализуемых операторов в $\mathfrak{H}$, то $(\pi(z)(\mathfrak{A}))' = \mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathfrak{H}(z)}$ для μ-почти всех z.

(б). Это утверждение сразу же следует из предложения 4.4.6, а) и б), и определения 4.4.4.

4.4.2. Пространственное разложение и разложение состояний

В этом пункте мы установим связь между пространственными разложениями, рассмотренными в пункте 4.4.1, и теорией разложения состояний, изложенной ранее. Мы также воспользуемся этой связью для доказательства двух результатов о свойствах множеств сосредоточения ортогональных мер, которые не могли быть доказаны прежними средствами.

Пусть состояние ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей содержится в грани F, удовлетворяющей условию сепарабельности S (определение 4.1.32). Если $\mu \in M_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, т. е. μ — мера Бэра с барицентром ω, то из предложения 4.1.34 следует, что μ можно рассматривать как меру на F. Следовательно, μ оказывается стандартной мерой на F. Каждому $\omega' \in F$ сопоставим $\mathfrak{H}(\omega') = \mathfrak{H}_{\omega'}$ — гильбертово пространство представления, ассоциированного с ω'. Мы покажем, что $\omega' \in F \mapsto \mathfrak{H}(\omega')$ образует семейство гильбертовых пространств в смысле определения 4.4.1Б. Для этого, как и при доказательстве предложения 4.1.34, выберем применявшуюся для выявления свойств грани F последовательность $\{A_{n,k}\}_{n,k\geq 1}$ элементов $\mathfrak{A}$, с тем небольшим отличием, что теперь мы при каждом n считаем множество $\{A_{n,k}\}_{k\geq 1}$ плотным во всём идеале $\mathfrak{I}_n$. В силу леммы 4.1.33, последовательность $\{\pi_{\omega'}(A_{n,k})\}_{n,k\geq 1}$ будет сильно плотна в $\pi_{\omega'}(\mathfrak{A})''$ для любого $\omega' \in F$, так что $\{\pi_{\omega'}(A_{n,k})\Omega_{\omega'}\}_{n,k\geq 1}$ плотно в $\mathfrak{H}(\omega')$ для любого $\omega' \in F$. Поскольку отображение

$$\omega' \in F \mapsto (\pi_{\omega'}(A_{m,l})\Omega_{\omega'},\ \pi_{\omega'}(A_{n,k})\Omega_{\omega'}) = \omega'(A^*_{m,l}A_{n,k})$$

непрерывно, а потому измеримо, $\omega' \in F \mapsto \mathfrak{H}(\omega')$ образует измеримое семейство гильбертовых пространств, и можно ввести прямой интеграл

$$\mathfrak{H}_\mu = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\, \mathfrak{H}(\omega').$$

Для всякого $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}_\mu$ возникает измеримое семейство операторов $\omega' \mapsto \pi_{\omega'}(A)$, и можно образовать прямой интеграл представлений

$$\pi_\mu = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\, \pi_{\omega'}.$$

Пусть $\Omega_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ обозначает следующий единичный вектор:

$$\Omega_\mu = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\, \Omega_{\omega'}.$$

Тогда при всех $A \in \mathfrak{A}$

$$(\Omega_\mu,\ \pi_\mu(A)\,\Omega_\mu) = \int_F d\mu(\omega')\,(\Omega_{\omega'},\ \pi_{\omega'}(A)\,\Omega_{\omega'}) =$$

$$= \int_F d\mu(\omega')\,\omega'(A) = \omega(A) = (\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\,\Omega_\omega).$$

Введем проектор

$$E_\mu = [\pi_\mu(\mathfrak{A})\,\Omega_\mu] \in \pi_\mu(\mathfrak{A})'.$$

По теореме 2.3.16, определенная на $\mathfrak{H}_\omega$ изометрия U с областью значений $E_\mu \mathfrak{H}_\mu$ в $\mathfrak{H}_\mu$, заданная соотношением

$$U\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega = \pi_\mu(A)\,\Omega_\mu,$$

устанавливает унитарную эквивалентность представлений π_ω и $E_\mu \pi_\mu$. Замечательным обстоятельством является то, что $E_\mu = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}_\mu}$ в том и только том случае, когда мера μ на $E_\mathfrak{A}$ ортогональна. Помимо всего прочего этим обеспечивается структурная связь между пространственными разложениями и разложениями состояний, т. е. связь между теоремой 4.1.25 и теоремой 4.4.7.

Теорема 4.4.9 (теорема Эффроса). *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ обладает единицей, грань $F \subseteq E_\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию сепарабельности S, а бэровская вероятностная мера μ на $E_\mathfrak{A}$ имеет барицентром $\omega \in F$. Рассмотрим описанное перед теоремой представление*

$$\pi_\mu = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\, \pi_{\omega'}$$

— прямой интеграл представлений алгебры $\mathfrak{A}$, *— действующее в пространстве*

$$\mathfrak{H}_\mu = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\,\mathfrak{H}_{\omega'},$$

и пусть E_μ *обозначает проектор в* $\mathfrak{H}_\mu$ *на область значений изометрии* $U:\mathfrak{H}_\omega \to \mathfrak{H}_\mu$, *устанавливающей каноническую унитарную эквивалентность* π_ω *и* $E_\mu\pi_\mu$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $E_\mu = 1_{\mathfrak{H}_\mu}$;

(2) μ *— ортогональная мера.*

Если эти условия выполнены, то $\pi_\mu = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\,\pi_{\omega'}$ *совпадает с разложением* π_μ *в прямой интеграл то отношению к абелевой подалгебре фон Неймана* $\mathfrak{B}_\mu \subseteq \pi_\mu(\mathfrak{A})'$, *соответствующей ортогональной мере* μ.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). В обозначениях, введенных перед теоремой, условие (1) равносильно цикличности Ω_μ для π_μ, или же унитарности U. Мы хотим показать, что отображение

$$f \in L^\infty(\mu) \longmapsto \varkappa_\mu(f) \in \pi_\omega(\mathfrak{A})',$$

определенное в лемме 4.1.21, обязано быть *-морфизмом, а тогда из теоремы Томиты (предложение 4.1.22) последует ортогональность μ.

Пусть $f \to T(f)$ обозначает естественный *-изоморфизм между $L^\infty(\mu)$ и диагонализуемыми операторами в $\mathfrak{H}_\mu = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\,\mathfrak{H}_{\omega'}$, т. е. для $f \in L^\infty(\mu)$

$$T(f) = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\,f(\omega')\,1_{\mathfrak{H}_{\omega'}}.$$

Из цепочки равенств

$$(\pi_\mu(A)\,\Omega_\mu,\ U\varkappa_\mu(f)\,U^*\pi_\mu(B)\,\Omega_\mu) = (\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega)$$

$$= (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(A^*B)\,\Omega_\omega) = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\,f(\omega')\,\omega'(A^*B)$$

$$= \int_F^\oplus d\mu(\omega')\,(\pi_{\omega'}(A)\,\Omega_{\omega'},\ f(\omega')\,1_{\mathfrak{H}_{\omega'}}\pi_{\omega'}(B)\,\Omega_{\omega'})$$

$$= (\pi_\mu(A)\,\Omega_\mu,\ T(f)\,\pi_\mu(B)\,\Omega_\mu)$$

мы выводим: $\varkappa_\mu(f) = U^*T(f)\,U$, так что $f \longmapsto \varkappa_\mu(f)$, — действительно, *-морфизм. Отметим еще, что $U\mathfrak{B}_\mu U^*$ совпадает с множеством диагонализуемых операторов в $\mathfrak{H}_\mu$, а $\pi_\omega = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\,\pi_{\omega'}$ в этом случае оказывается пространственным разложением представления π_ω, отвечающим $\mathfrak{B}_\mu \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})'$. Этим доказывается последнее утверждение теоремы.

(2) $\Rightarrow$ (1). Сначала напомним, что линейная оболочка множества

$$\{T(f)\,\pi_\mu(A_{n,k})\,\Omega_\mu;\quad f\in L^\infty(\mu);\quad n,\ k\geqslant 1\}$$

плотна в $\mathfrak{H}_\mu = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\,\mathfrak{H}_{\omega'}$, согласно замечаниям, сделанным после теоремы 4.4.2. Таким образом, для доказательства цикличности Ω_μ для π_μ надо показать, что при любых $\varepsilon > 0$, $f\in L^\infty(\mu)$ и $A\in\mathfrak{A}$ существует такой элемент $B\in\mathfrak{A}$, что

$$\|\pi_\mu(B)\,\Omega_\mu - T(f)\,\pi_\mu(A)\,\Omega_\mu\| > \varepsilon.$$

Но

$$\begin{aligned}\|\pi_\mu(B)\,\Omega_\mu - T(f)\,\pi_\mu(A)\,\Omega_\mu\|^2 &= (\Omega_\mu,\ \pi_\mu(B^*B)\,\Omega_\mu) - (\Omega_\mu,\ T(f)\,\pi_\mu(B^*A)\,\Omega_\mu)\\ &\quad - (\Omega_\mu,\ T(\bar f)\,\pi_\mu(A^*B)\,\Omega_\mu) + (\Omega_\mu,\ T(\bar f f)\,\pi_\mu(A^*A)\,\Omega_\mu)\\ &= \int_F d\mu(\omega')\,\omega'(B^*B) - \int_F d\mu(\omega')\,f(\omega')\,\omega'(B^*A)\,-\\ &\quad - \int_F d\mu(\omega')\,\overline{f(\omega')}\,\omega'(A^*B) + \int_F d\mu(\omega')\,|f(\omega')|^2\,\omega'(A^*A)\\ &= (\Omega_\omega,\ \pi_\omega(B^*B)\,\Omega_\omega) - (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(B^*A)\,\Omega_\omega)\\ &\quad - (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(\bar f)\,\pi_\omega(A^*B)\,\Omega_\omega) + (\Omega_\omega,\ \varkappa_\mu(\bar f f)\,\pi_\omega(A^*A)\,\Omega_\omega).\end{aligned}$$

Если мера μ ортогональна, то $\varkappa_\mu(\bar f f) = \varkappa_\mu(f)^*\,\varkappa_\mu(f)$ по теореме Томиты; следовательно,

$$\|\pi_\mu(B)\,\Omega_\mu - T(f)\,\pi_\mu(A)\,\Omega_\mu\|^2 = \|\pi_\omega(B)\,\Omega_\omega - \varkappa_\mu(f)\,\pi_\omega(A)\,\Omega_\omega\|^2.$$

Ввиду цикличности Ω_ω для π_ω, последнее выражение можно сделать меньше ε^2 за счет надлежащего выбора B.

Замечание. Даже если μ не ортогональна, из последней части доказательства ясно, что линейная оболочка множеств $T(f)\,E_\mu\mathfrak{H}_\mu$, $f\in L^\infty(\mu)$, плотна в $\mathfrak{H}_\mu$. Поскольку $T(f)\in\pi_\mu(\mathfrak{A})'$, представления π_ω и π_μ квазиэквивалентны при всех $\mu\in M_\omega(E_\mathfrak{A})$ (см. определение 2.4.25).

Если ω — такое состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей, что $\mathfrak{H}_\omega$ сепарабельно, а $\mu\in\mathcal{O}_\omega(E_\mathfrak{A})$, то μ изоморфна стандартной мере, как показывает следующее рассуждение. Абелева подалгебра $\mathfrak{B}\subset\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, соответствующая μ, изоморфна $L^\infty(\mu)$, согласно предложению 4.1.22. Но так как $\mathfrak{B}$ действует в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_\omega$, то $L^\infty(\mu)$ содержит некоторую σ-слабо плотную сепарабельную C^*-подалгебру $\mathfrak{C}$. Если $\mathfrak{C} = C(X)$ — гельфандовское представление $\mathfrak{C}$, то пространство X компактно, отделимо и удовлетворяет второй аксиоме счетности, а потому метризуемо. Мера μ задает на $L^\infty(\mu)$ нормальное состояние, сужение которого определяет состояние на $C(X)$. Это состояние представимо регулярной мерой Бореля μ_0 на X, и вложением $C(X)$ в $L^\infty(\mu)$ определяется $*$-изоморфизм $L^\infty(X,\ d\mu_0)$ на

$L^\infty(E_{\mathfrak{A}}, d\mu)$. Отождествляя измеримые подмножества, факторизованные по множествам нулевой меры, с соответствующими проекторами, убеждаемся, что этот *-изоморфизм сохраняет меру, так что μ будет *-изоморфна в указанном смысле стандартной мере μ_0. Значит, повторив процедуру, описанную в начале пункта, и применив метод доказательства теоремы 4.4.9, можно произвести следующее отождествление:

$$\pi_\omega = \int_{E_{\mathfrak{A}}}^{\oplus} d\mu(\omega')\, \pi_{\omega'}.$$

Теперь мы можем частично обобщить теоремы 4.2.5 и 4.2.10 и предложение 4.3.2.

Теорема 4.4.10. *Пусть состояние ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей таково, что сепарабельно гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\omega$ соответствующего представления. Пусть $\mathfrak{B}$ — абелева подалгебра фон Неймана в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, и пусть ей соответствует ортогональная мера $\mu \in \mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$.*

(1) Если $\mathfrak{B}$ — максимальная абелева подалгебра коммутанта $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, то существует такое μ-измеримое подмножество $B \subseteq E_{\mathfrak{A}}$, состоящее из чистых состояний, что $\mu(B) = 1$.

(2) Если $\mathfrak{B} = \pi_\omega(\mathfrak{A})' \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, то существует μ-измеримое подмножество $B \subseteq E_{\mathfrak{A}}$, состоящее из факторных состояний, с $\mu(B) = 1$.

*(3) Если G — группа и $g \in G \mapsto \tau_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ — ее представление *-автоморфизмами $\mathfrak{A}$, $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$ и $\mathfrak{B}$ — максимальная абелева подалгебра в $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$, то существует μ-измеримое подмножество $B \subseteq E_{\mathfrak{A}}$, состоящее из G-эргодических состояний, с $\mu(B) = 1$.*

Доказательство. (1) и (2) сразу вытекают из следствия 4.4.8. Что касается (3), то, замечая, что (согласно предложению 4.3.2) носитель μ содержится в $E_{\mathfrak{A}}^G$, можно записать

$$\pi_\omega = \int_{E_{\mathfrak{A}}^G}^{\oplus} d\mu(\omega')\, \pi_{\omega'}, \quad \Omega_\omega = \int_{E_{\mathfrak{A}}^G}^{\oplus} d\mu(\omega')\, \Omega_{\omega'}.$$

Но тогда при всех $A \in \mathfrak{A}$

$$U_\omega(g)\, \pi_\omega(A)\, \Omega_\omega = \pi_\omega(\tau_g(A))\, \Omega_\omega$$

$$= \int_{E_{\mathfrak{A}}^G}^{\oplus} d\mu(\omega')\, \pi_{\omega'}(\tau_g(A))\, \Omega_{\omega'} = \int_{E_{\mathfrak{A}}^G}^{\oplus} d\mu(\omega')\, U_{\omega'}(g)\, \pi_{\omega'}(A)\, \Omega_{\omega'},$$

и, значит, операторы $U_\omega(g)$ разложимы:

$$U_\omega(g) = \int\limits_{E_{\mathfrak{A}}^G}^{\oplus} d\mu(\omega')\, U_{\omega'}(g).$$

Так как $\mathfrak{B}$ — максимальная абелева подалгебра в $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}'$, то множество разложимых операторов

$$\mathfrak{B}' = \int\limits_{E_{\mathfrak{A}}^G}^{\oplus} d\mu(\omega')\, \mathscr{L}(\mathfrak{H}_{\omega'})$$

представляет собой алгебру фон Неймана, порожденную самой $\mathfrak{B}$ и операторами

$$\pi_\omega(A) = \int\limits_{E_{\mathfrak{A}}^G}^{\oplus} d\mu(\omega')\, \pi_{\omega'}(A), \quad A \in \mathfrak{A},$$

$$U_\omega(g) = \int\limits_{E_{\mathfrak{A}}^G}^{\oplus} d\mu(\omega')\, U_{\omega'}(g), \quad g \in G.$$

По теореме 4.4.5 для μ-почти всех ω' справедливо равенство $\{\pi_{\omega'}(\mathfrak{A}) \cup \cup U_{\omega'}(G)\}'' = \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\omega)$, которое равносильно эргодичности ω' по теореме 4.3.17.

Далее, рассмотрим разложение на бесконечности. Пусть $(\mathfrak{A}, \{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in I})$ — квазилокальная алгебра, введенная определением 2.6.3. Пусть ω — состояние на $\mathfrak{A}$ и

$$\mathfrak{Z}_\omega^\perp = \bigcap_{\alpha \in I} \Big(\bigcup_{\beta \perp \alpha} \pi_\omega(\mathfrak{A}_\beta)\Big)''$$

— соответствующая алгебра на бесконечности (определение 2.6.4). В теореме 2.6.5 было доказано, что $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$ является подалгеброй центра $\mathfrak{Z}_\omega$ алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, и там же были охарактеризованы состояния с тривиальной алгеброй на бесконечности. Теперь мы докажем, что при наложении определенных условий сепарабельности ортогональная мера, соответствующая разложению ω на бесконечности т. е. разложению, определенному по $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$, сосредоточена на некотором измеримом подмножестве состояний с тривиальной алгеброй на бесконечности.

Теорема 4.4.11. *Пусть ω — состояние квазилокальной алгебры $(\mathfrak{A}, \{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in I})$. Предположим, что*

(1) существует возрастающая последовательность $\{\alpha_n\}_{n \geqslant 1}$ в I, такая что для любого $\alpha \in I$ найдется n с $\alpha_n > \alpha$;

(2) каждая алгебра $\mathfrak{A}_{\alpha_n}$ содержит сепарабельный замкнутый двусторонний идеал $\mathfrak{I}_n$, такой что $\|\omega|_{\mathfrak{I}_n}\| = 1$.

Тогда ортогональная мера μ, соответствующая алгебре на бесконечности $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$, сосредоточена на некотором измеримом множестве, состоящем из состояний с тривиальной алгеброй на бесконечности.

Доказательство. Поскольку для любого $\omega' \in E_{\mathfrak{A}}$

$$\mathfrak{Z}_{\omega'}^\perp = \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{\beta\perp\alpha_n} \pi_{\omega'}(\mathfrak{A}_\beta)\right)'',$$

согласно условию (1) определения 2.6.3, мы можем, не теряя общности, считать $I = \{1, 2, \ldots\}$ и положить $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_{\alpha_n}$. По предположению (2) состояние ω содержится в грани $F \subseteq E_{\mathfrak{A}}$, удовлетворяющей условию сепарабельности S (определение 4.1.32). Поэтому, по теореме 4.4.9, разложение π_ω в прямой интеграл, соответствующее $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$, имеет вид

$$\pi_\omega = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\, \pi_{\omega'}.$$

Для всякого $\omega' \in F$ введем

$$\mathfrak{B}_{\omega', n} = \left\{\bigcup_{\beta\perp\alpha_n} \pi_{\omega'}(\mathfrak{A}_\beta)\right\}''.$$

Тогда $\mathfrak{Z}_{\omega'}^\perp = \bigcap_n \mathfrak{B}_{\omega', n}$. Так как $\mathfrak{Z}_\omega^\perp \subseteq \mathfrak{B}_{\omega, n}$ при каждом n, то из определения 4.4.4 следует, что

$$\mathfrak{B}_{\omega, n} = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\, \mathfrak{B}_{\omega', n}.$$

Согласно предложению 4.4.6, б), имеем

$$\mathfrak{Z}_\omega^\perp = \bigcap_n \mathfrak{B}_{\omega, n} = \int_F^\oplus d\mu(\omega') \left(\bigcap_n \mathfrak{B}_{\omega', n}\right) = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\, \mathfrak{Z}_{\omega'}^\perp.$$

Но $\mathfrak{Z}_\omega^\perp$ состоит в точности из диагонализуемых операторов в разложении $\pi_\omega = \int_F^\oplus d\mu(\omega')\, \pi_{\omega'}$, поэтому $\mathfrak{Z}_{\omega'}^\perp = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}_{\omega'}}$ для μ-почти всех $\omega' \in F$.

В заключение мы применим теорию пространственного разложения для усиления предшествующего результата (следствия 4.3.39) об эргодическом разложении по отношению к подгруппе. Следующий результат описывает ситуацию, в которой эргодическое разложение фактически оказывается разложением по слабо перемешивающим состояниям, т. е. состояниям с более высокой степенью эргодичности, чем можно было бы ожидать.

Теорема 4.4.12. *Пусть $\omega \in \mathscr{E}(E_{\mathfrak{A}}^G)$, где G — локально-компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, которая сильно непрерывно действует на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с еди-*

ницей. Предположим, что точечный спектр $\sigma_p(U_\omega)$ группы $U_\omega(G)$ является дискретной подгруппой в $\widehat{G}$, и пусть H_ω обозначает ее аннулятор. Предположим G_Γ-абелевость пары $(\mathfrak{A}, \omega)$, и пусть ω принадлежит грани F, удовлетворяющей условию сепарабельности S. Пусть $\tilde{\omega}$ обозначает такое состояние $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{H_\omega}\right) \cap F$, что отображение $\dot{t} \in G/H_\omega \mapsto \tau_t^* \tilde{\omega}$ измеримо по мере Хаара $d\dot{t}$ на G/H_ω и

$$\omega(A) = \int\limits_{G/H_\omega} d\dot{t}\,\tilde{\omega}(\tau_t(A))$$

при всех $A \in \mathfrak{A}$. При этих условиях $\tilde{\omega}$ обладает слабым перемешиванием по отношению к H_ω, т. е.

$$M\left(|\tilde{\omega}(A\tau(B)) - \tilde{\omega}(A)\,\tilde{\omega}(B)|\right) = 0$$

для всех $A, B \in \mathfrak{A}$ и любого инвариантного среднего M на $C_b(G)$.

Доказательство. Сначала отметим, что, будучи дискретным, спектр $\sigma_p(U_\omega)$, автоматически замкнут. Топология на двойственной группе определяется так, что $\widehat{G}$ будет удовлетворять второй аксиоме счетности, если ей удовлетворяет G. Тем самым дискретный спектр $\sigma_p(U_\omega) \subseteq \widehat{G}$ должен быть счетным, а тогда, согласно следствию 4.3.32, пара $(\mathfrak{A}, \omega)$ должна быть H_ω-абелевой.

Существование $\tilde{\omega}$ вытекает из следствия 4.3.39. Из доказательства этого следствия также видно, что

$$f \in C\left(E_{\mathfrak{A}}\right) \mapsto \mu(f) = \int\limits_{G/H_\omega} d\dot{t} f\left(\tau_t^* \tilde{\omega}\right)$$

определяет ортогональную меру на $E_{\mathfrak{A}}$. Но поскольку G/H_ω тоже удовлетворяет второй аксиоме счетности, то мера μ стандартна, и из теоремы 4.4.9 следует, что пространственное разложение π_ω, соответствующее μ, существует и имеет вид

$$\mathfrak{H}_\omega = \int\limits_{G/H_\omega}^{\oplus} d\dot{t}\, \mathfrak{H}_{\tau_t^* \tilde{\omega}}, \quad \pi_\omega = \int\limits_{G/H_\omega}^{\oplus} d\dot{t}\, \pi_{\tau_t^* \tilde{\omega}}.$$

Поэтому векторы вида $\displaystyle\int\limits_{G/H_\omega}^{\oplus} d\dot{t} f(\dot{t})\, \pi_{\tau_t^* \tilde{\omega}}(A)\, \Omega_{\tau_t^* \tilde{\omega}}$,

где $A \in \mathfrak{A}$ и $f \in L^\infty(G/H_\omega)$, плотны в $\mathfrak{H}_\omega$, согласно замечаниям после теоремы 4.4.2.

Далее, так как топологическая группа G удовлетворяет второй аксиоме счетности, она метризуема (см. замечания и комментарии), а поскольку G локально-компактна, она полна в этой метрике. Таким образом, G является польским топологическим пространством. Так как отображение $G \to G/H_\omega$ непрерывно и открыто, то из результата (2), использованного в доказательстве предложения 3.2.72, следует существование такого борелевского отображения η: $G/H_\omega \to G$, что $\dot{\eta}(\dot{t}) = \dot{t}$.

Теперь введем изометрию $U\colon \mathfrak{H}_{\tilde\omega} \to \mathfrak{H}_\omega = \int_{G/H_\omega}^{\oplus} dt\, \mathfrak{H}_{\tau_t^*\tilde\omega}$ следующим образом. Для $A \in \mathfrak{A}$ положим

$$U\pi_{\tilde\omega}(A)\,\Omega_{\tilde\omega} = \int_{G/H_\omega}^{\oplus} dt\, \pi_{\tau_t^*\tilde\omega}\left(\tau_{\eta(t)^{-1}}(A)\right)\Omega_{\tau_t^*\tilde\omega}.$$

Этим равенством определяется вектор в $\mathfrak{H}_\omega = \int_{G/H_\omega}^{\oplus} dt\, \mathfrak{H}_{\tau_t^*\tilde\omega}$, потому что при $f \in L^\infty(G/H_\omega)$ и $B \in \mathfrak{A}$ отображение

$$t \longmapsto \left(f(t)\,\pi_{\tau_t^*\tilde\omega}(B)\,\Omega_{\tau_t^*\tilde\omega},\ \pi_{\tau_t^*\tilde\omega}\left(\tau_{\eta(t)^{-1}}(A)\right)\Omega_{\tau_t^*\tilde\omega}\right) = \overline{f(t)}\,\tilde\omega\left(\tau_{\eta(t)}(B^*)\,A\right)$$

будет борелевским вследствие непрерывности $t \longmapsto \tau_t$. Поэтому $U\pi_{\tilde\omega}(A)\,\Omega_{\tilde\omega} \in \mathfrak{H}_\omega$, согласно определению 4.4.1Б.

После этого заметим, что

$$\| U\pi_\omega(A)\,\Omega_{\tilde\omega}\|^2 = \int_{G/H_\omega} dt\,\tau_t^*\tilde\omega\left(\tau_{\eta(t)^{-1}}(A^*A)\right) = \int_{G/H_\omega} dt\,\tilde\omega(A^*A) =$$
$$= \tilde\omega(A^*A) = \|\pi_{\tilde\omega}(A)\,\Omega_{\tilde\omega}\|^2.$$

Таким образом, U является корректно определенной изометрией из $\mathfrak{H}_{\tilde\omega}$ в $\mathfrak{H}_\omega$. При $s \in H_\omega$ мы имеем также

$$UU_{\tilde\omega}(s)\,\pi_{\tilde\omega}(A)\,\Omega_{\tilde\omega} = U\pi_{\tilde\omega}\left(\tau_s(A)\right)\Omega_{\tilde\omega} =$$
$$= \int_{G/H_\omega}^{\oplus} dt\,\pi_{\tau_t^*\tilde\omega}\left(\tau_{\eta(t)^{-1}s}(A)\right)\Omega_{\tau_t^*\tilde\omega} = \int_{G/H_\omega}^{\oplus} dt\,U_{\tau_t^*\tilde\omega}(s)\,\pi_{\tau_t^*\tilde\omega}\left(\tau_{\eta(t)^{-1}}(A)\right)\Omega_{\tau_t^*\tilde\omega} =$$
$$= U_\omega(s)\,U\pi_{\tilde\omega}(A)\,\Omega_{\tilde\omega},$$

где

$$\Omega_{\tilde\omega} = \int_{G/H_\omega}^{\oplus} dt\,\Omega_{\tau_t^*\tilde\omega}.$$

Отсюда

$$U_\omega(s) = \int_{G/H_\omega}^{\oplus} dt\,U_{\tau_t^*\tilde\omega}(s).$$

В результате мы получаем

$$UU_{\tilde\omega}(t) = U_\omega(t)\,U,\quad t \in H_\omega,$$

т. е. $t \longmapsto U_{\tilde\omega}(t)$ унитарно эквивалентно некоторому подпредставлению представления $t \longmapsto U_\omega(t)$. Но точечный спектр $\sigma_p(U_\omega)$, как мы уже указывали, замкнут и счетен. Тем самым, согласно замечанию к теореме 4.3.27, сужение U_ω на H_ω не имеет точечного спектра, за исключением точки нуль. Поскольку $U_{\tilde\omega}$ унитарно эквивалентно некоторому подпредставлению представления U_ω/H_ω, то $U_{\tilde\omega}$ не имеет иного точечного спектра, кроме нуля. Так как $\tilde\omega$ обладает H_ω-эргодичностью, то из предложения 4.3.36 следует, что $\tilde{\omega}$ является слабо H_ω-перемешивающим, т. е.

$$M(|\tilde{\omega}(A\tau(B)) - \tilde{\omega}(A)\tilde{\omega}(B)|) = 0$$

для всех $A, B \in \mathfrak{A}$ и всех инвариантных средних M на $C_b(H_\omega)$.

ЗАМЕЧАНИЯ И КОММЕНТАРИИ

Пункт 4.1.2

Начало современной теории барицентрических разложений положили исследования Шоке. В 1956 г. он установил, что каждая точка ω метризуемого компактного выпуклого множества K является барицентром некоторой вероятностной меры μ_ω, сосредоточенной на G_δ-множестве крайних точек $\mathscr{E}(K)$. Примерно в то же время он ввел общее понятие симплекса и доказал, что каждая точка $\omega \in K$ служит барицентром некоторой единственной максимальной меры тогда и только тогда, когда K — симплекс. Эти утверждения, содержащиеся в теоремах 4.1.11 и 4.1.15, послужили основой дальнейшего развития теории. (См. [Cho 1—4].)

Следующий значительный вклад внесла совместная работа Бишопа и де Леу [Bis 1]. Эти авторы первыми ввели порядковую структуру в множестве положительных мер $M_+(K)$. Их отношение порядка $\gg$, отличающееся от использованного нами отношения $\succ$, вводилось следующим образом:

$$\mu \gg \nu \Leftrightarrow \mu(f^2) \geqslant \nu(f^2) \text{ при всех } f \in A(K).$$

Эти два отношения в общем случае не совпадают (см. пример 4.1.29, принадлежащий Скау [Ska 1]). Отношение $\succ$ ввел впоследствии Шоке. Наличие порядковой структуры позволило применить лемму Цорна для доказательства существования максимальных мер с заданным барицентром (предложение 4.1.3), а также позволило изучать разложения для неметризуемых K. В частности, Бишоп и де Леу показали, что максимальные меры в $M_1(K)$ псевдососредоточены на $\mathscr{E}(K)$, и построили примеры, демонстрирующие, что при неметризуемом K множество $\mathscr{E}(K)$ может иметь крайне патологические свойства с точки зрения теории меры. Мокободский позднее построил пример (упомянутый в замечании перед следствием 4.1.18) такого симплекса K, что $\mathscr{E}(K)$ — борелевское подмножество в K, но $\mu_\omega(\mathscr{E}(K)) = 0$ [Mok 1]. В 1972 г. Мак-Гиббон получил довольно неожиданный результат об автоматической метризуемости K при условии, что $\mathscr{E}(K)$ — бэровское множество. Фактически для метризуемости K достаточно, чтобы множество $\mathscr{E}(K)$ было аналитическим [MacG1].

Первый общий обзор развития теории разложений за период 1956—1963 гг. был сделан Шоке и Мейером [Cho 6]. Эта статья, содержавшая много новых результатов и усовершенствований, в течение ряда лет служила основным источником сведений по данному предмету. Впоследствии появилось много великолепных изложений теории, например [[Alf 1]], [[Cho 1]], [Lan 1], [[Phe 1]].

Пункт 4.1.3

Алгебраическая теория разложений «моложе», и обзорных статей по ней гораздо меньше. Частично эта теория описана в главе 3 книги Сакаи [[Sak 1]], а на наше изложение оказало значительное влияние статья Скау [Ska 1].

Первые исследования по теории разложений в терминах мер на пространстве $E_{\mathfrak{A}}$ состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ предпринял Сигал в 1951 г. [Seg 2], но общая теория возникла значительно позже. У нее было два главных источника: во-первых, понятие ортогональной меры, которое ввел в 1956 г. Томита [Tomi 2], и, во-вторых, результаты об инвариантных состояниях, полученные Кастлером, Робинсоном и Рюэлем в 1966 г. (см. замечания к пункту 4.3.1). В частности, Рюэль первым применил теорию Шоке к разложению состояний.

Томита доказал наличие взаимно-однозначного соответствия между ортогональными мерами в $\mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$ и абелевыми подалгебрами в $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$, т. е. соответствия между первым и вторым множествами в теореме 4.1.25. Наша формулировка теоремы 4.1.25 комбинирует результаты разных авторов, и неясно даже, кому ее следует приписать. Соответствие между вторым и третьим множествами явно фигурирует в статье Рюэля [Rue 1] и неявно в статье Скау [Ska 1]. Две эти работы содержат также варианты второй основной структурной теоремы об ортогональных мерах (теоремы 4.1.28).

Условие (4) теоремы 4.1.28 эквивалентно условию $\mu \gg \nu$, где $\gg$ обозначает упорядочение Бишопа — де Леу, о котором шла речь в замечаниях к пункту 4.1.2. Таким образом, для ортогональных мер отношения порядка $\gg$ и $\succ$ совпадают. Эта эквивалентность впервые была отмечена Скау [Ska 1]. Ключевая для наших доказательств структурных теорем лемма 4.1.27 неявно была дана Рюэлем [Rue 1] и явно Скау [Ska 2].

Пункт 4.1.4

Результаты об n-мерно однородных C^*-алгебрах, упомянутые перед примером 4.1.31, были получены независимо Феллом [Fell 1] и Такесаки и Томиямой [Tak 4]. Эти статьи также содержат анализ глобальной структуры n-мерно однородных C^*-алгебр, которые, в отличие от случая алгебр фон Неймана, не обязаны иметь вид $M_n \otimes C_0(X)$, где пространство X локально-компактно и отделимо. Например, существует трехмерно однородная C^*-алгебра над шестимерной сферой, не содержащая других проекторов, кроме 0 и $\mathbb{1}$.

Условие сепарабельности S было впервые введено Рюэлем [Rue 2] для последующего приложения к изучению локально-нормальных состояний на квазилокальной алгебре. Обобщение этого условия имеется в [Rue 1]. Хотя Рюэль не подчеркивал геометрических аспектов и аспектов теории меры, относящихся к множеству F состояний, удовлетворяющих условию сепарабельности S, доказательство предложения 4.1.34 по существу содержится в [Rue 1] и [Rue 2].

Секвенциальная полнота множества $N_{\mathfrak{M}}$ нормальных состояний алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ доказана Акеманном [Ake 2].

Подробности об аналитических множествах и прочих близких понятиях можно найти в [[Cho 1]]. В частности, мы воспользовались теоремой 9.7 этой монографии (теоремой о емкости), чтобы выяснить свойства измеримости аналитических множеств.

Отображение сужения в теории разложения состояний применялось очень давно, по крайней мере уже в ранней работе Томиты [Tomi 3].

Пункт 4.2.1

Теорема Картье—Фелла—Мейера (предложение 4.2.1), появившаяся в работе [Car 2] в контексте общих компактных выпуклых множеств, была краеугольным камнем в доказательствах структурных теорем для ортогональных мер, данных Рюэлем и Скау. Этот результат может рассматриваться как естественное обобщение порядковых свойств конечных последовательностей вещественных чисел, описанных гораздо раньше Харди, Литтлвудом и Пойа (см. [[Hard 1, стр. 45]]).

Предложение 4.2.2 принадлежит Скау [Ska 1].

Лемма 4.2.3 комбинирует результат Скау [Ska 1] ((1)$\Leftrightarrow$(2)) и результат Дугласа ((1)$\Leftrightarrow$(3)). Последняя эквивалентность была установлена Дугласом в [Dou 1] для случая произвольного выпуклого компактного K.

Теорема 4.2.4 и разновидность теоремы 4.2.5 содержатся в [Ska 1]. Более ранний вариант теоремы 4.2.4, утверждающий максимальность ортогональных мер безо всяких условий сепарабельности для $\mathfrak{A}$, встречается в [[Sak 1]], но данное там доказательство неполно. Однако неизвестны и опровержения такого утверждения.

Пример 4.2.6 можно извлечь из работ Шермана [She 1] и Фукамии, Мисоноу и Такэды [Fuk 2].

Пункт 4.2.2

Центральное разложение состояний было изучено Сакаи в 1965 г. [Sak 1]. Его определение центральной меры отличается от принятого нами, но легко убедиться, что оба понятия совпадают. Подробное изложение теории центрального разложения по Сакаи приведено в [[Sak 1]]; там же доказано, что факторные состояния $F_{\mathfrak{A}}$ на сепарабельной по норме C*-алгебре $\mathfrak{A}$ образуют борелевское подмножество в $E_{\mathfrak{A}}$.

Первое исследование центрального разложения с помощью теории Шоке было проведено Вильсом [Wil 1], который позднее анонсировал геометрическую характеризацию центральных мер, содержащуюся в теореме 4.2.12 [Wil 2]. Вильс также распространил понятие центральной меры на случай произвольных компактных выпуклых множеств в отделимых локально-выпуклых пространствах. Детали такого обобщения читатель найдет в [[Alf 1]] и [Wil 3].

Пункты 4.3.1 и 4.3.2

Изучение G-инвариантных состояний было начато Сигалом, который ввел термин «G-эргодичность» и охарактеризовал эргодичность неприводимостью множества $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}$ еще в 1951 г. [Seg 3]. Однако основные события в этой области разыгрались значительно позднее и были обусловлены главным образом проблемами математической физики.

В начале 60-х годов разными авторами исследовалась проблема неприводимости релятивистских квантовых полей. Существенным моментом при этом являлось изучение $\mathbb{R}$-инвариантных состояний ω, для которых $\sigma(U_\omega) \subseteq [0, \infty)$. Было выяснено, что такое спектральное условие в сочетании с некоторой коммутативностью влечет свойство $U_\omega(\mathbb{R}) \subseteq \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, а потому свойства эргодичности и чистоты ω совпадают (пример 4.3.34). Кроме того, эргодичность была охарактеризована «единственностью вакуума», т. е. единственностью, с точностью до множителя, $U_\omega(G)$-инвариантного вектора. Последнее свойство указывало на то, что разложение ω по чистым состояниям определяется «диагонализацией» операторов

$$E_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A})'' E_\omega,$$

и появились различные виды разложений, несущих на себе отпечаток разложения относительно ортогональной меры, соответствующей E_ω (см., например, [Ara 5], [Bor 1], [Ree 1], [Rue 3]).

Проводившееся в это же время изучение моделей нерелятивистской теории поля указывало на то, что G-инвариантные состояния ω, для которых неприводимо $\{\pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G)\}$, играют главную роль в описании термодинамического равновесия, однако понятие G-эргодичности было утеряно (см., например, [Ага 8, 9], [Haag 3], [Rob 3]. Наконец, в 1966 г. Доплихер, Кастлер и Робинсон [Dop 1] получили вариант теорем 4.3.17 и 4.3.22, охарактеризовав эргодические состояния для группы $\mathbb{R}^\nu$. (В этой статье впервые появилось предложенное Робинсоном понятие асимптотической абелевости.) После этого Кастлер и Робинсон [Kas 1] и Рюэль [Rue 2] независимо дали изложение результатов по теории эргодического разложения состояний. В их статьях содержалась бóльшая часть элементов, необходимых для построения полной теории в представленном выше виде, как то: теория Шоке, асимптотическая абелевость, спектральный анализ, разложение по подгруппе и т. д.; они инициировали поток работ по данной тематике.

Предложенная Рюэлем конструкция эргодического разложения была подготовлена предшествующим изучением состояний классической статистической механики, которое позволило на интуитивном уровне осознать структуру ортогональной меры [Rue 4]. Рассмотрим для простоты C^*-алгебру $\mathfrak{A}$, порожденную одним элементом A и его сдвигами $\tau_x(A)$, $x \in \mathbb{R}^3$, под действием группы $\mathbb{R}^3$. Можно интерпретировать ее физически как описание системы с одной наблюдаемой A, скажем, числом частиц в начале координат, а $\tau_x(A)$ соответствует той же наблюдаемой в точке x. С A и всякой подсистемой $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^3$ можно ассоциировать макроскопическую наблюдаемую

$$A_\Lambda = \frac{1}{|\Lambda|} \int_\Lambda dx\, \tau_x(A);$$

например, A_Λ в данном случае будет истолкована как плотность частиц в объеме Λ. Распределение значений таких макроскопических наблюдаемых в состоянии ω полностью задается тогда набором моментов $\omega((A_\Lambda)^n)$. Но если ω обладает $\mathbb{R}^3$-инвариантностью, т. е. система однородна в пространстве, то распределение, не зависящее от размеров области, определяется моментами для бесконечного объема Λ, т. е. величинами

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \omega((A_\Lambda)^n) = \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{|\Lambda|^n} \int_{\Lambda^n} dx_1 \ldots dx_n\, (\Omega_\omega, \pi_\omega(A) U_\omega(x_2 - x_1) \pi_\omega(A) \ldots$$
$$\ldots U_\omega(x_n - x_{n-1}) \pi_\omega(A) \Omega_\omega) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A) E_\omega \pi_\omega(A) E_\omega \ldots$$
$$\ldots E_\omega \pi_\omega(A) \Omega_\omega).$$

Таким образом, значение на A^n ортогональной меры μ, соответствующей E_ω, представляет n-й момент распределения значений макроскопической наблюдаемой. В состоянии ω эта наблюдаемая имеет точное значение тогда и только тогда, когда $\mu(\widehat{A^n}) = \mu(\widehat{A})^n$, а это как раз выражает свойство $\mathbb{R}^3$-эргодичности ω. Поэтому такая модель наводит на мысль характеризовать чистые термодинамические фазы эргодическими состояниями.

Понятие G-абелевости было введено Лэнфордом и Рюэлем [Lan 3], которые определили ее как свойство абелевости $E_\omega \pi_\omega(\mathfrak{A}) E_\omega$, для всех $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$. Затем они доказали, что это определение совпадает с приведенным в данной книге при всех $\omega \in E_{\mathfrak{A}}^G$, т. е. установили эквивалентность условий (1) и (2) предложения 4.3.7. В [Kas 1] было впервые указано, что свойство G-абелевости является достаточным условием существования единственного эргодического разложения для локально-компактной абелевой G, а общий результат был получен в [Lan 3]. Тот факт, что единственность барицентрического разложения для всех нормальных инвариантных состояний влечет G-абелевость (теорема 4.3.9), впервые был опубликован в записках семинаров Данг Нгока и Гишардэ [Dan 1], [[Gui 2]]. Понятие центральности было введено Доплихером, Кастлером и Стёрмером [Dop 2], а теорема 4.3.14 также впервые появилась в [Dan 1], [[Gui 2]]. Абстрактная форма эргодической теоремы (предложение 4.3.4) была дана в [Ala 1], а ее алгебраический вариант (предложение 4.3.8) — в [Kov 1].

Во многих ранних исследованиях, посвященных эргодическим состояниям, применялось какое-либо из средних на группе G для выражения соответствующего условия асимптотической абелевости и т. п., и тем самым результаты удавалось получить лишь для аменабельных групп. Напомним, что локально-компактная топологическая группа G называется аменабельной, если C^*-алгебра $C_b(G)$ ограниченных непрерывных функций на G обладает состоянием M, инвариантным относительно правых сдвигов. Не все группы аменабельны, но в этот класс попадают, во всяком случае, компактные группы, локально-компактные абелевы, а также локально-компактные разрешимые группы. Кроме того, любая замкнутая подгруппа аменабельной группы аменабельна, равно как и факторгруппа G/H аменабельной G по ее замкнутой нормальной подгруппе H. Обратно, если аменабельны H и G/H, то аменабельна и G. Некомпактные полупростые группы Ли неаменабельны; неаменабельна и свободная группа с двумя образующими. Имеется масса эквивалентных условий, характеризующих аменабельность; к примеру, критерием в случае локально-компактной группы G служит наличие для каждого компактного $K \subseteq G$ сети борелевских множеств $U_\alpha \subseteq G$ с $\mu(U_\alpha) < \infty$, для которой

$$\lim_\alpha \mu(gU_\alpha \Delta U_\alpha)/\mu(U_\alpha) = 0$$

при всех $g \in K$; здесь μ — некоторая фиксированная мера Хаара. Сетью U_α можно воспользоваться для явного задания инвариантного среднего:

$$M(f) = \lim_{\alpha} \frac{1}{\mu(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} d\mu(g) f(g).$$

Так обобщается среднее, применявшееся в примере 4.3.5 (см. [[Gre 1]]).

Другой подход к теории, пригодный для произвольных групп G, состоит во введении среднего на некотором подпространстве пространства $B(G)$ ограниченных функций на G. Следуя Годману [God 1], Доплихер и Кастлер [Dop 3] рассматривали множество тех $f \in B(G)$, для которых выпуклые оболочки их левых и правых сдвигов содержат константу. Такая константа единственна и определяет среднее $M(f)$ функции f. Указанное множество содержит функции положительного типа на G, так что для матричных элементов унитарных представлений G средние определены. Трудности при этом подходе связаны с тем, что не очевидно существование средних для функций типа

$$g \in G \longmapsto \omega([\tau_g(A),\ B])$$

и приходится добавлять такую гипотезу.

Наряду с G-абелевостью и G-центральностью вводились более сильные коммутационные свойства; обсуждение их и связей между ними читатель найдет в [Dop 2]. Примеры 4.3.18 и 4.3.21 взяты из этой статьи.

Нами не затронут аспект теории разложения, связанный с разложением положительных линейных функционалов на *-алгебрах неограниченных операторов, скажем разложением функционалов Вайтмана на так называемой алгебре Борхерса. Такая теория сталкивается с патологиями, не имеющими аналогов в C^*-случае; так, у абелевых *-алгебр имеются бесконечномерные неприводимые *-представления, а также могут существовать экстремальные вайтмановские функционалы, не обладающие свойством кластерности. Эти проблемы проанализированы в серии статей Борхерса и Ингвасона [Bor 5], [Yng 1].

Первый вариант теоремы 4.3.19 появился в [Kas 1], его улучшил Стёрмер [Stø 3], а окончательный результат установил Нагель [Nag 1].

То обстоятельство, что в характеризации эргодических состояний асимптотическую абелевость можно заменить свойством вектора Ω_ω быть отделяющим, было отмечено Ядчиком [Jad 1], получившим результаты, близкие к теоремам 4.3.20 и 4.3.23.

Пример 4.3.24 основан на идее, содержащейся в [Kas 1]. Обсуждение и интерпретацию свойств перемешивания в классической эргодической теории можно найти у Арнольда и Авэ [[Arn 1]].

Теорему Мазура, цитированную при рассмотрении свойства асимптотической абелевости, можно найти в книге Иосиды [[Yos 1]]. Она сразу же выводится из того факта, что если K — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства X и $x \in X \setminus K$, то можно указать такой непрерывный аффинный функционал φ на X, что $\varphi(x) > 0$ и $\varphi(K) \subseteq (-\infty, 0]$.

Пример 4.3.25 взят из [Rob 4].

Пример 4.3.26 принадлежит Рюэлю. Первый пример метризуемого симплекса, крайние точки которого образуют плотное множество, был построен Пульсеном [Pou 1] в 1961 г., а Линденштраусс, Ольсен и Штернфельд в 1976 г. показали, что этот симплекс с точностью до аффинного гомеоморфизма единствен [Lin 1]. Эти авторы также доказали, что *симплекс Пульсена* S однороден в том смысле, что всякий аффинный гомеоморфизм между двумя гранями F_1 и F_2 в S можио продолжить до аффинного автоморфизма S. Кроме того, они доказали универсальность S, т. е. возможность реализовать всякий метризуемый симплекс в виде замкнутой грани симплекса S. Фактически симплекс Пульсена характеризуется во множестве метризуемых симплексов однородностью и уииверсальностью. Другая крайность — это симплексы K, для которых множество $\mathscr{E}(K)$ замкнуто. Такие симплексы обычно называют *симплексами Бауэра*; они сводятся к вероятностным мерам на отделимых локально-компактных пространствах. (См., например, [[Alf 1]].)

Пункты 4.3.3 и 4.3.4

Теорема 4.3.27 получена в [Jad 1], а теорема 4.3.31 — в [Kas 1.] В последней работе также введено понятие G_Γ-абелевости. Аддитивность полного спектра при условиях теоремы 4.3.33 известна давно. Идея доказательства может быть найдена уже в работе 1961 г. [Wig 1].

Условие принадлежности фактора к типу III, данное в примере 4.3.34, принадлежит Стёрмеру [Stø4], но впервые такого типа результат был получен Хугенхольцем [Hug 1].

Теорема 4.3.37 взята из работы [Rob 4]. Она, в сущности, принадлежит Жинибру. Первый результат такого рода встречается в [Kas 1] (для локально-компактных абелевых групп). Теорема 4.3.38 доказана Робинсоном [Rob 5].

Эквивалентность различных условий, характеризующих почти-периодические функции, которой мы воспользовались, обсуждается в [[Dix 2]]. На самом деле теорию можно обобщить на неабелевы группы, если заменить характеры на коэффициенты неприводимых конечномерных унитарных представлений. В этом контексте результаты о точечном спектре для G-эргодического состояния были частично обобщены Доплихером и Кастлером [Dop 3].

Предложение 4.3.42 имеется в [Rue 1]. В этой статье также приведено уточнение последнего из утверждений предложения и, в частности, дано разложение $\omega \in \mathscr{E}\left(E_{\mathfrak{A}}^{G}\right)$ вида

$$\omega(A)=\int_{G} d\bar{g}\, \varkappa(\widehat{A})\left(\tau_{\bar{g}}^{*} x\right)$$

при некотором $x \in M$. Действие $\bar{G}$ на M оказывается транзитивным, поэтому данное разложение не зависит от выбора $x \in M$. Кроме того, если принять предположения о сепарабельности, сформулированные перед предложением 4.3.42, то можно записать $\varkappa(\widehat{A})\left(\tau_{\bar{g}}^{*} x\right)=\widehat{A}\left(\eta^{-1} \tau_{\bar{g}}^{*} x\right)$, где η — борелевский изоморфизм, определяющий $\varkappa$, который переводит $E_{\mu} \subseteq E_{\mathfrak{A}}$ в $M_{m} \subseteq M$. Возникает соблазн воспользоваться тем, что $\varkappa$ коммутирует с действием G, и записать $\eta^{-1} \tau_{\bar{g}}^{*} x=\eta^{-1} \tau_{g}^{*} \eta \tilde{\omega}=\tau_{\bar{g}}^{*} \tilde{\omega}$ при некотором $\tilde{\omega} \in E_{\mu}$. К сожалению, это трудно обосновать, за исключением тривиального случая конечной группы G.

Упомянутый в замечании после предложения 4.3.42 результат фон Неймана можно найти в [[Dix 1, приложение IV]].

Пункт 4.4.1

Теория пространственного разложения восходит к фон Нейману [Neu 3], она не претерпела с тех пор существенных изменений. Мы следовали подходам, принятым в [[Dix 1, 2]], [[Sak 1]], [[Sch 1]]. Классификацию стандартных измеримых пространств, упомянутую после предложения 4.4.6, получил Макки [Mac 1].

Пункт 4.4.2

Теорема 4.4.9 и последующее замечание взяты из работы Эффроса [Eff 3]. Разложение на бесконечности (теорема 4.4.1) было изучено Рюэлем [Rue 1], а свойство слабого перемешивания из теоремы 4.4.12 было установлено Кастлером и Робинсоном [Kas 1]. Доказательство метризуемости локально-компактной группы, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, можно найти в [[Hew 1, теореме 8.3]].

ЛИТЕРАТУРА[1]

Учебники и монографии

[[Alf 1]] Alfsen, E.
Compact Convex Sets and Boundary Integrals. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1971).

[[Arnl]] Arnold, V. I., and A. Avez.
Problèmes ergodiques de la mecanique classique. Gauthier–Villars, Paris (1967).

[[Arv 1]] Arveson, W.
An Invitation to C-Algebras.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1976).

[[Bon 1]] Bonsall, F. F., and J. Duncan.
Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and Elements of Normed Algebras, Cambridge University Press, Cambridge (1971).

[[Bou 1]]* Bourbaki, N.
Espaces vectoriels topologiques. Hermann, Paris (1955, 1966).

[[But 1]] Butzer, P. L., and H. Berens.
Semi-Groups of Operators and Approximation Theory. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1967).

[[Cho 1]] Choquet G.
Lectures on Analysis (J. Marsden, T. Lance, and S. Gelbart, eds.). Benjamin, New York (1969).

[[Dav 1]] Davies, E. B.
Quantum theory of open systems. Academic Press, New York (1976).

[[Dix 1]] Dixmier, J.
Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann), 2nd ed. Gauthier–Villars, Paris (1969).

[[Dix 2]]* Dixmier, J.
Les C-algèbres et leurs représentations.* Gauthier–Villars, Paris (1964).

[[Dun 1]]* Dunford, N. and J. T. Schwartz. *Linear Operators*, Vol. I–III. Wiley-Interscience, New York–London–Sydney–Toronto (1971).

[1] Звездочки отсылают к приведенному в конце списку работ, имеющихся в переводе или являющихся переводом с русского; первые помечены одной звездочкой, вторые — двумя. — *Прим. ред.*

[[Eva 1]] Evans, D. E., and J. T. Lewis.
Dilations of irreversible evolutions in algebraic quantum theories. Comm. Dublin Inst. for Advanced Studies, Series A, **24** (1977).

[[Gre 1]]* Greenleaf, F. P.
Invariant Means on Topological Groups. van Nostrand-Reinhold, New York-Toronto-London-Melbourne (1969).

[[Gui 1]] Guichardet, A.
Special topics in topological algebras. Gordon & Breach, New York (1968).

[[Gui 2]] Guichardet, A.
Systèmes dynamiques non commutatifs. Societé Mathematique de France Asterisque 13-14 (1974).

[[Hard 1]]* Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Polya.
Inequalities, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge (1952).

[[Hew 1]]* Hewitt, E., and K. A. Ross.
Abstract Harmonic Analysis I. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1963).

[[Hil 1]]* Hille, E., and R. S. Phillips.
Functional Analysis and Semi-Groups, rev. ed. American Mathematical Society Colloq. Publ. Vol. 31, Providence, R. I. (1957).

[[Hil 2]]* Hille, E.
Functional Analysis and Semi-Groups. American Mathematical Society, New York (1948).

[[Kat 1]]* Kato, T.
Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976).

[[Köt 1]] Köthe, G.
Topologische Lineare Räume, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1966).

[[Mac 1]] Mackey, G. W.
The Theory of Unitary Group Representations. University of Chicago Press, Chicago-London (1976).

[[Nai 1]]** Naimark, M. A.
Normed Algebras. Wolters-Noordhoff, Groningen (1972).

[[Neu 1]] von Neumann, J.
Collected Works. Pergamon Press, New York (1961).

[[Neu 2]]* von Neumann, J.
Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton University Press, Princeton (1955).

[[Ped 1]] Pedersen, G. K.
Introduction to C^*-Algebra Theory. Academic Press, New York-San Francisco-London (1979).

[[Phe 1]]* Phelps, R. R.
Lectures on Choquet's Theorem. Van Nostrand–Reinhold, New York–Toronto–London–Melbourne (1966).

[[Ree 1]]* Reed, M., and B. Simon.
Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis. Academic Press, New York–San Francisco–London (1973).

[[Ree 2]]* Reed, M., and B. Simon.
Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press, New York–San Francisco–London (1975).

[[Rie 1]]* Riesz, F., and B. Sz-Nagy.
Lecons d'analyse fonctionnelle, 6th ed. Gauthier–Villars, Paris (1972).

[[Rud 1]]* Rudin, W.
Real and Complex Analysis, 2nd ed. McGraw–Hill, New York (1974).

[[Rud 2]] Rudin, W.
Functional Analysis. McGraw–Hill, New York (1973).

[[Sak 1]] Sakai, S.
C^*-Algebras and W^*-Algebras. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1971).

[[Sch 1]] Schwartz, J.
W^*-Algebras, Gordon & Breach, New York (1967).

[[Sto 1]] Stone, M. H.
Linear Transformations in Hilbert Spaces and Their Applications to Analysis. American Mathematical Society Colloq. Publ. Vol. 15, New York (1932).

[[Str 1]] Streit, L.
Quantum Dynamics Models and Mathematics. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1976).

[[Tit 1]]* Titchmarsh, E. C.
The Theory of Functions, 2nd ed. Oxford University Press, Oxford (1939).

[[Wae 1]] van der Waerden, B. L.
Sources of Quantum Mechanics. North–Holland, Amsterdam (1967).

[[Wign 1]]* Wigner, E. P.
Gruppentheorie und Ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atmospektren. Friedr. Vieweg, Braunschweig (1931).

[[Yos 1]]* Yosida, K.
Functional Analysis, 2nd ed. Springer-Verlag. Berlin–Heidelberg–New York (1968).

Статьи

[Ake 1] Akemann, C. A., and G. K. Pedersen.
Central sequences and inner derivations of separable C^*-algebras, *Amer. J. Math.* (to appear).

[Ake 2] Akemann, C. A.
The dual space of an operator algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.* **126** (1967), 286–302.

[Ala 1] Alaoglu, L., and G. Birkhoff.
General ergodic theorems, *Ann. Math.* **41** (1940), 293–309.

[Ara 1] Araki, H., and G. Elliott.
On the definition of C^*-algebras, *Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ.* **9** (1973), 93–112.

[Ara 2] Araki, H.
Some properties of modular conjugation operator of a von Neumann algebra and a non-commutative Radon–Nikodym theorem with a chain rule, *Pac. J. Math.* **50** (1974), 309–354.

[Ara 3] Araki, H.
Introduction to relative Hamiltonian and relative entropy, preprint, Marseille, p. 782 (1975).

[Ara 4] Araki, H., and A. Kishimoto.
On clustering property, *Rep. Math. Phys.* **10** (1976), 275–281.

[Ara 5] Araki, H.
On representations of the canonical commutation relations, *Commun. Math. Phys.* **20** (1971), 9–25.

[Ara 6] Araki, H., and E. J. Woods.
A classification of factors, *Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ.* **4** (1968), 51–130.

[Ara 7] Araki, H.
On the algebra of all local observables, *Prog. Theor. Phys.* **32** (1964), 844–854.

[Ara 8] Araki, H., and E. J. Woods.
Representations of the canonical commutation relations describing a non-relativistic infinite free Bose gas, *J. Math. Phys.* **4** (1963), 637–662.

[Ara 9] Araki, H., and W. Wyss.
Representations of canonical anticommutation relations, *Helv. Phys. Acta* **37** (1964), 136–159.

[Arv 1] Arveson, W.
On groups of automorphisms of operator algebras, *J. Func. Anal.* **15** (1974), 217–243.

[Bis 1] Bishop, E., and K. de Leeuw.
The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **9** (1959), 305–331.

[Bor 1] Borchers, H. J.
On the structure of the algebra of field operators, *Il Nuovo Cimento* **24** (1962), 214–236.

[Bor 2] Borchers, H. J.
Energy and momentum as observables in quantum field theory, *Commun. Math. Phys.* **2** (1966), 49–54.

[Bor 3] Borchers, H. J.
Characterization of inner *-automorphisms of W^*-algebras, *Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ.* **10** (1974), 11–49.

[Bor 4] Borchers, H. J.
Über Ableitungen von C^*-algebren, *Nachr. Göttingen Akad.* **2** (1973).

[Bor 5] Borchers, H. J., and J. Yngvason.
On the algebra of field operators. The weak commutant and integral decomposition of states, *Commun. Math. Phys.* **42** (1975), 231–252. [See also *ibid.* **43** (1975), 255–271; *ibid.* **47** (1976), 197–213.]

[Bra 1] Bratteli, O.
Inductive limits of finite-dimensional C^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **171** (1972), 195–234.

[Bra 2] Bratteli, O.
The center of approximately finite-dimensional C^*-algebras, *J. Func. Anal.* **21** (1976), 195–201.

[Bra 3] Bratteli, O., and D. W. Robinson.
Unbounded derivations of von Neumann algebras, *Ann. Inst. H. Poincaré* **25** (A) (1976), 139–164.

[Bra 4] Bratteli, O., R. H. Herman, and D. W. Robinson.
Perturbations of flows on Banach spaces and operator algebras, *Commun. Math. Phys.* **59** (1978), 167–196.

[Bra 5] Bratteli, O., and D. W. Robinson.
Unbounded derivations of C^*-algebras, *Commun. Math. Phys.* **42** (1975), 253–268.

[Bra 6] Bratteli, O., and D. W. Robinson.
Unbounded derivations of C^*-algebras II, *Commun. Math. Phys.* **46** (1976), 11–30.

[Bra 7] Bratteli, O., R., Herman, and D. W. Robinson.
Quasi-analytic vectors and derivations of operator algebras, *Math. Scand.* **39** (1976), 371–381.

[Bra 8] Bratteli, O., and D. W. Robinson.
Unbounded derivations and invariant trace states, *Commun. Math. Phys.* **46** (1976), 31–35.

[Bra 9] Bratteli, O., and U. Haagerup.
Unbounded derivations and invariant states, *Commun. Math. Phys.* **59** (1978), 79–95.

[Bra 10] Bratteli, O.
Crossed products of UHF algebras by product type actions, *Duke Math. J.* **46** (1979), 1–23.

[Bra 11] Bratteli, O., and A. Kishimoto.
Generation of semi groups and two-dimensional quantum lattice systems, *J. Func. Anal.* (to appear).

[Buc 1] Bucholz, D., and J. E. Roberts.
Bounded perturbations of dynamics, *Comm. Math. Phys.* **49** (1976), 161–177.

[Car 1] Cartier, P., and J. Dixmier.
Vecteurs analytiques dans les representations des groupes de Lie, *Amer. J. Math.* **80** (1958), 131–145.

[Car 2] Cartier, P., J. M. G. Fell, and P. A. Meyer.
Comparison des mesures portées par un ensemble convex compact, *Bull. Soc. Math. France* **92** (1964), 435–445.

[Che 1] Chernoff, P.
Note on product formulas for operator semi-groups, *J. Func. Anal.* **2** (1968), 238–242.

[Che 2] Chernoff, P.
Semi-group product formulas and addition of unbounded operators, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), 395.

[Chi 1] Chi, D. P.
Derivations in C^*-algebras, thesis, Univ. of Pennsylvania (1976).

[Cho 1] Choquet, G.
Existence des representations integrales au moyen des points extremaux dans les cones convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **243** (1956), 699–702.

[Cho 2] Choquet, G.
Existence des representations dans les cones convexes, *C. R. Acad. Sci.* Paris **243** (1956), 736–737.

[Cho 3] Choquet, G.
Unicité des representations integrales au moyens des points extremaux dans les cones convexes reticulés, *C. R. Acad. Sci. Paris* **243** (1956), 555–557.

[Cho 4] Choquet, G.
Existence unicité des representations integrales au moyen des points extrémaux dans les cones convexes, *Seminaire Bourbaki* **139** (1956).

[Cho 5] Choquet, G.
Le théorème de representation intégrales dans les ensembles convexes compacts, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **10** (1960), 333–344.

[Cho 6] Choquet, G., and P. A. Meyer.
Existence et unicité des representations intégrales dans les convexes compacts quelquonque, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **13** (1963), 139–154.

[Choi 1] Choi, M. D., and E. Effros.
Nuclear C^*-àlgebras and injectivity, the general case, *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 443–446.

[Com 1] Combes, F.
Poids associé à une algebre Hilbertienne à gauche, *Comp. Math.* **23** (1971), 49–77.

[Con 1] Connes, A.
Characterization des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **24** (1974), 121–155.

[Con 2] Connes, A., and M. Takesaki.
The flow of weights on factors of type III, *Tohoku Math. J.* **29** (1977), 473–575.

[Con 3] Connes, A.
On hyperfinite factors of type III and Kriegers factors, *J. Func. Anal.* **18** (1975), 318–327.

[Con 4] Connes, A.
Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **6** (1973), 133–252.

[Con 5] Connes, A.
Classification of injective factors, *Ann. Math.* **104** (1976), 73–115.

[Con 6] Connes, A.
Outer conjugacy classes of automorphisms of factors, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **8** (1975), 383–420.

[Con 7] Connes, A.
A factor not anti-isomorphic to itself, *Ann. Math.* **101** (1975), 536–554.

[Cun 1] Cuntz, F.
Locally C^*-equivalent algebras, *J. Func. Anal.* **23** (1976), 95–106.

[Dae 1] van Daele, A.
A new approach to the Tomita–Takesaki theory of generalized Hilbert algebras, *J. Func. Anal.* **15** (1974), 378–393.

[Dae 2] van Daele, A., and M. Rieffel.
A bounded operator approach to Tomita–Takesaki theory, *Pac. J. Math.* **69** (1977), 187–221.

[Dan 1] Dang Ngoc, N., and F. Ledrappier.
Les systèmes dynamiques simpliciaux, *C. R. Acad. Sci. Paris* **277** (1973), 777–779.

[Dig. 1] Digernes, T.
Duality for weights on covariant systems and its applications, thesis UCLA (1975).

[Dix 1] Dixmier, J.
Sur les C^*-algebras, *Bull. Soc. Math. France* **88** (1960), 95–112.

[Dix 2] Dixmier, J.
Dual et quasidual d'une algèbre de Banach involutive, *Trans. Amer. Math. Soc.* **104** (1962), 278–283.

[Dop 1] Doplicher, S., D. Kastler, and D. W. Robinson.
Covariance algebras in field theory and statistical mechanics, *Commun. Math. Phys.* **3** (1966), 1–28.

[Dop 2] Doplicher, S., D. Kastler, and E. Størmer.
Invariant states and asymptotic abelianness, *J. Func. Anal.* **3** (1969), 419–434.

[Dop 3] Doplicher, S., and D. Kastler.
Ergodic states in a non-commutative ergodic theory, *Commun. Math. Phys.* **7** (1968), 1–20.

[Dou 1] Douglas, R. C.
On extremal measures and subspace density, *Michigan Math. J.* **11** (1964), 644–652.

[Dun 1] Dunford, N.
Uniformity in linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **44** (1938), 305–356.

[Eff 1] Effros, E. G., and F. Hahn.
Locally compact transformation groups and C^*-algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* **75** (1967), 1–92.

[Eff 2] Effros, E. G., and C. Lance.
Tensor products of operator algebras, *Adv. Math.* **25** (1977), 1–34.

[Eff 3] Effros, E. G.
On the representations of C^*-algebras, thesis, Harvard Univ. (1961).

[Ell 1] Elliott, G.
On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite-dimensional algebras, *Algebra* **38** (1976), 29–44.

[Ell 2] Elliott, G.
Derivations of matroid C^*-algebras, *Invent. Math.* **9** (1970), 253–269.

[Ell 3] Elliott, G.
Some C^*-algebras with outer derivations III, *Ann. Math.* **106** (1977), 121–143.

[Ell 4] Elliott, G. A., and E. J. Woods.
The equivalence of various definitions for a properly infinite von Neumann algebra to be approximately finite dimensional, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1976), 175–178.

[Ell 5] Elliott, G. A.
On approximately finite dimensional von Neumann algebras I and II, *Math. Scand.* **39** (1976), 91–101; *Can. Math. Bull.*

[Ell 6] Elliott, G. A.
The Mackey–Borel structure on the spectrum of an approximately finite dimensional C^*-algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* **233** (1977).

[Ell 7] Elliott, G. A.
Convergence of automorphisms in certain C^* algebras, *J. Func. Anal.* **11** (1972), 204–206.

[Fel 1] Feller, W.
On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, *Ann. Math.* **58** (1953), 166–174.

[Fell 1] Fell, J. M. G.
The structure of algebras of operator fields, *Acta Math.* **106** (1961), 233–280.

[Fuj 1] Fujii, M. T. Furuta, and K. Matsumoto.
Equivalence of operator representations of semi-groups, *Math. Jap.* **20** (1975), 253–256.

[Fuk 1] Fukamiya, M.
On a theorem of Gelfand and Naimark and the B^*-algebra, *Kumamoto J. Sci.* **1** (1952), 17–22.

[Fuk 2] Fukamiya, M., Y. Misonou, and Z. Takeda.
On order and commutativity of B^*-algebras, *Tohoku Math. J.* **6** (1954), 89–93.

[Gal 1] Gallavotti, G., and M. Pulvirenti.
Classical KMS condition and Tomita–Takesaki theory, *Commun. Math. Phys.* **46** (1976), 1–9.

[Gel 1]** Gelfand, I. M., and M. A. Naimark.
On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Mat. Sb.* **12** (1943), 197–213.

[Gel 2]** Gelfand, I. M.
Normierte Ringe, *Mat. Sb.* **9** (1941), 3–24.

[Gli 1] Glimm, J., and R. V. Kadison.
Unitary operators in C^*-algebras, *Pac. J. Math.* **10** (1960), 547–556.

[Gli 2] Glimm, J.
On a certain class of operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 318–340.

[Gli 3] Glimm, J.
Families of induced representations, *Pac. J. Math.* **12** (1962), 885–911.

[Gli 4] Glimm, J.
Type I C^*-algebras, *Ann. Math.* **73** (1961), 572–612.

[Gli 5] Glimm, J., and A. Jaffe.
Singular perturbations of self-adjoint operators, *Comm. Pure Appl. Math.* (1969), 401–414.

[God 1] Godement, R.
Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 1.

[Gro 1] Grothendieck, A.
Un résultat sur le dual d'une C^*-algebre, *J. Math. Pures Appl.* **36** (1957), 97–108.

[Gui 1] Guichardet, A.
Products tensoriels infinis et representations des relations d'anticommutations, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **83** (1966), 1–52.

[Haa 1] Haagerup, U.
The standard form of von Neumann algebras, *Math. Scand.* **37** (1975), 271–283.

[Haa 2] Haagerup, U.
The standard form of von Neumann algebras, preprint Copenhagen, n°15 (1973).

[Haa 3] Haagerup, U.
Normal weights on von Neumann algebras, *J. Func. Anal.* **19** (1975), 302–317.

[Haa 4] Haagerup, U.
On the dual weights for von Neumann algebras I (to appear).

[Haag 1] Haag, R.
Discussion des "axiomes" et des propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locale avec particules composées, in *Les Problèmes mathematiques de la thèorie quantique des champs*. Pub. CNRS Vol. 85 (1959).

[Haag 2] Haag, R., R. V. Kadison, and D. Kastler.
Nets of C^*-algebras and classification of states, *Commun. Math. Phys.* **16** (1970), 81–104.

[Haag 3] Haag, R.
The mathematical structure of the Bardeen–Cooper–Schrieffer model, *Il Nuovo Cimento* **25** (1962), 287–299.

[Han 1] Hansen, F., and D. Olesen.
Perturbations of centre-fixing dynamical systems, *Math. Scand.* **41** (1977), 295–307.

[Har 1] Harish-Chandra,
Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** (1953), 185–243.

[Heg 1] Hegerfeldt, G. C.
On canonical commutation relations and infinite dimensional measures, *J. Math. Phys.* **13** (1972), 45–50.

[Her 1] Herman, R. H.
Private communication.

[Hug 1] Hugenholtz, N. M.
On the factor type of equilibrium states in quantum statistical mechanics, *Commun. Math. Phys.* **6** (1967), 189–193.

[Iku 1] Ikunishi, A., and Y. Nakagami.
On invariants $G(\sigma)$ and $\Gamma(\sigma)$ for an automorphism group of a von Neumann algebra, *Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ.* **12** (1976), 1–30.

[Jac 1] Jacobson, N., and C. Rickart.
Jordan homomorphisms of rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **69** (1950), 479–502.

[Jad 1] Jadczyk, A. Z.
On some groups of automorphisms of von Neumann algebras with cyclic and separating vectors, *Commun. Math. Phys.* **13** (1969), 142–153.

[Jor 1] Jordan, P., and E. Wigner.
Über der Paulische Aquivalenz-Verbot, *Z. Physik* **47** (1928), 631–

[Jør 1] Jørgenson, P. E. T.
Approximately reducing subspaces for unbounded linear operators, *J. Func. Anal.* **23** (1976), 392–414.

[Kad 1] Kadison, R. V.
Lectures on operator algebras, in *Applications of mathematics to problems in theoretical physics*, in (F. Lurcat, ed.). Gordon & Breach, New York (1967).

[Kad 2] Kadison, R. V.
Irreducible operator algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **43** (1957), 273–276.

[Kad 3] Kadison, R. V.
Operator algebras with a faithful weakly closed representation, *Ann. Math.* **64** (1956), 175–181.

[Kad 4] Kadison, R. V.
Isometries of operator algebras, *Ann. Math.* **54** (1951), 325–338.

[Kad 5] Kadison, R. V.
Transformation of states in operator theory and dynamics, *Topology* **3** (1965), 177–198.

[Kad 6] Kadison, R. V.
A generalized Schwartz inequality and algebraic invariants for operator algebras, *Ann. Math.* **56** (1952), 494–503.

[Kad 7] Kadison, R. V.
Derivations of operator algebras, *Ann. Math.* **83** (1966), 280–293.

[Kad 8] Kadison, R. V.
Some analytic methods in the theory of operator algebras, in *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 140. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1970).

[Kad 9] Kadison, R. V., and J. R. Ringrose.
Derivations and automorphisms of operator algebras, *Commun. Math. Phys.* 4 (1967), 32–63.

[Kal 1] Kallman, R. R.
Unitary groups and automorphisms of operator algebras, *Amer. J. Math.* **91** (1969), 785–806.

[Kal 2] Kallman, R. R.
One-parameter groups of *-automorphisms of II_1 von Neumann algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **24** (1970), 336–340.

[Kap 1] Kaplansky, I.
Cited by J. A. Schultz in a review of [Fuk 1], *Math. Rev.* **14** (1953), 884.

[Kap 2] Kaplansky, I.
A theorem on rings of operators, *Pac. J. Math.* **1** (1951), 227–232.

[Kap 3] Kaplansky, I.
Modules over operator algebras, *Amer. J. Math.* **75** (1953), 839–859.

[Kas 1] Kastler D., and D. W. Robinson.
Invariant states in statistical mechanics, *Commun. Math. Phys.* **3** (1966), 151–180.

[Kat 1] Kato, T.
Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semi-groups, *Proc. Jap. Acad.* **35** (1959), 467–468.

[Kel 1] Kelley, J. L., and R. L. Vaught.
The positive cone in Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 44–55.

[Kis 1] Kishimoto, A.
Dissipations and derivations, *Commun. Math. Phys.* **47** (1976), 25–32.

[Kis 2] Kishimoto, A., and H. Takai.
On the invariant $\Gamma(\alpha)$ in C^*-dynamical systems, *Tohoku Math. J.* **30** (1978), 83–94.

[Kis 3] Kishimoto, A., and H. Takai.
Some remarks on C^*-dynamical systems with a compact abelian group, *Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ.* **14** (1978), 383–397.

[Kov 1] Kovács, I., and J. Szücs.
Ergodic type theorems in von Neumann algebras, *Acta Sci. Math.* **27** (1966), 233–

[Kre 1] Krein, M., and D. Milman.
On extreme points of regularly convex sets, *Stud. Math.* **9** (1940), 133–138.

[Kri 1] Krieger, W.
On ergodic flows and the isomorphism of factors, *Math. Ann.* **223** (1976), 19–70.

[Kur 1] Kurtz, T. G.
Extensions of Trotter's operator semigroup approximation theorems, *J. Func. Anal.* **3** (1969), 354–375.

[Lan 1] Lanford, O. E.
Selected topics in functional analysis, in *The Proceedings of the 1970 Les Houches Summer School* (R. Stora, ed.). Gordon & Breach, New York (1971).

[Lan 2] Lanford, O. E., and D. Ruelle.
Observables at infinity and states with short range correlations, *Commun. Math. Phys.* **13** (1969), 194–215.

[Lan 3] Lanford, O. E., and D. Ruelle.
Integral representations of invariant states on B^*-algebra, *J. Math. Phys.* **8** (1967), 1460–1463.

[Lanc 1] Lance, C.
Tensor products of C^*-algebras in *C^*-Algebras and Their Applications to Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. Editrice Compositori, Bologna (1975).

[Land 1] Landstad, M. B.
Duality theory for covariant systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*

[Lee 1] de Leeuw, K.
On the adjoint semi-group and some problems in the theory of approximation, *Math. Z.* **73** (1960), 219–234.

[Lin 1] Lindenstrauss, J., G. Olsen, and Y. Sternfeld.
The Poulsen simplex, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **28** (1978), 91–114.

[Lum 1] Lumer, G., and R. S. Phillips.
Dissipative operators in a Banach space, *Pac. J. Math.* **11** (1961), 679–689

[Mac 1] Mackey, G. W.
Borel structure in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1975), 134–165.

[MacG 1] MacGibbon, B.
A criterion for the metrizability of a compact convex set in terms of the set of extreme points, *J. Func. Anal.* **11** (1972), 385–392.

[Mar 1] Maréchal, O.
Topologie et structure borélienne sur l'ensemble des algèbres de von Neumann, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), 847–850.

[McI 1] McIntosh, A.
Functions and derivations of C^*-algebras, *J. Func. Anal.* **30** (1978), 264–275.

[Miy 1] Miyadera, I.
Generation of a strongly continuous semi-group of operators, *Tohoku Math. J.* **4** (1952), 109–114.

[Mok 1] Mokobodski, G.
Balayage défini par un cône convexe de fonctions numériques sur un space compact, *C. R. Acad. Sci. Paris* **254** (1962), 803–805.

[Mur 1] Murray, F. J., and J. von Neumann.
On rings of operators, *Ann. Math.* **37** (1936), 116–229; On rings of operators II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **41** (1937), 208–248; On rings of operators IV, *Ann. Math.* **44** (1943), 716–808.

[Nag 1] Nagel, B.
Some results in non-commutative ergodic theory, *Commun. Math. Phys.* **26** (1972), 247–258.

[Nagu 1] Nagumo, M.
Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, *Jap. J. Math.* **13** (1936), 61–80.

[Nak 1] Nakagami, Y.
Dual action on a von Neumann algebra and Takesakis duality theorem for a locally compact group, *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.* **12** (1977), 727–775.

[Nel 1] Nelson, E.
Analytic vectors, *Ann. Math.* **70** (1969), 572–615.

[Neu 1] Von Neumann, J.
Zur algebra der funktional operationen und theorie der normalen operatoren, *Math. Ann.* **102** (1929), 370–427.

[Neu 2] Von Neumann, J.
On rings of operators III, *Ann. Math.* **41** (1940), 94–161.

[Neu 3] Von Neumann, J.
On rings of operators, reduction theory, *Ann. Math.* **50** (1949), 401–485.

[Oga 1] Ogasawara, T.
A theorem on operator algebras, *J. Sci. Hiroshima Univ.* **18** (1955), 307–309.

[Ole 1] Olesen, D.
On norm continuity and compactness of spectrum, *Math. Scand.* **35** (1974), 223–236.

[Ole 2] Olesen, D.
Inner *-automorphisms of simple C^*-algebras, *Commun. Math. Phys.* **44** (1975), 175–190.

[Ole 3] Olesen, D., G. K. Pedersen, and E. Størmer, with appendix by G. A. Elliott.
Compact abelian groups of automorphisms of simple C^*-algebras, *Invent. Math.* **39** (1977), 55–64.

[Ole 4] Olesen, D., and G. K. Pedersen.
Applications of the Connes spectrum to C^*-dynamical systems, *J. Func. Anal.* **30** (1978), 179–197.

[Ôta 1] Ôta, S.
Certain operator algebras induced by *-derivations in C^*-algebras on an infinite inner product space, *J. Func. Anal.* **30** (1978), 238–244.

[Ped 1] Pedersen, G. K., and M. Takesaki.
The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras, *Acta Math.* **130** (1973), 53–87.

[Ped 2] Pedersen, G. K.
Isomorphisms of U.H.F. algebras, *J. Func. Anal.* **30** (1978), 1–16.

[Phi 1] Phillips, R. S.
Perturbation theory for semi-groups of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 199–221.

[Pou 1] Poulsen, E. T.
A simplex with dense extreme points, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **11** (1961), 83–87.

[Pow 1] Powers, R.
Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, *Ann. Math.* **86** (1967), 138–171.

[Pow 2] Powers, R.
A remark on the domain of an unbounded derivation of a C^*-algebra, *J. Func. Anal.* **18** (1975), 85–95.

[Pow 3] Powers, R., and S. Sakai.
Existence of ground states and KMS states for approximately inner dynamics, *Commun. Math. Phys.* **39** (1975), 273–288.

[Pow 4] Powers, R., and S. Sakai.
Unbounded derivations in operator algebras, *J. Func. Anal.* **19** (1975), 81–95.

[Ree 1] Reeh, H., and S. Schlieder.
Über den Zerfall der Feldoperatoralgebra im Falle einer Vakuumentartung, *Il Nuovo Cimento* **26** (1962), 32–42.

[Robe 1] Roberts, J. E.
Cross products of von Neumann algebras by group duals, *Symposia Math.* **20** (1976), 335–363.

[Rober 1] Robertson, A. G.
A note on the unit ball in C^*-algebras, *Bull. London Math. Soc.* **6** (1974), 333–335.

[Rob 1] Robinson, D. W.
A characterization of clustering states, *Commun. Math. Phys.* **41** (1975), 79–88.

[Rob 2] Robinson, D. W.
Normal and locally normal states, *Commun. Math. Phys.* **19** (1970), 219–234.

[Rob 3] Robinson, D. W.
The ground state of the Bose gas, *Commun. Math. Phys.* **1** (1965), 159–174.

[Rob 4] Robinson, D. W., and D. Ruelle.
Extremal invariant states, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **6** (1967), 299–310.

[Rob 5] Robinson, D. W. Unpublished.

[Rob 6] Robinson, D. W.
The approximation of flows, *J. Func. Anal.* **24** (1977), 280–290.

[Rob 7] Robinson, D. W.
Statistical mechanics of quantum spin systems II, *Commun. Math. Phys.* **7** (1968), 337–348.

[Rue 1] Ruelle, D.
Integral representation of states on a C^*-algebra, *J. Func. Anal.* **6** (1970), 116–151.

[Rue 2] Ruelle, D.
States of physical systems, *Commun. Math. Phys.* **3** (1966), 133–150.

[Rue 3] Ruelle, D.
On the asymptotic condition in quantum field theory, *Helv. Phys. Acta* **35** (1962), 147–163.

[Rue 4] Ruelle, D.
Correlation functionals, *J. Math. Phys.* **6** (1965), 201–220.

[Rus 1] Russo, B., and H. A. Dye.
A note on unitary operators in C^*-algebras, *Duke Math. J.* **33** (1966), 413–416.

[Sak 1] Sakai, S.
On the central decomposition for positive functionals on C^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **118** (1965), 406–419.

[Sak 2] Sakai, S.
On one parameter groups of $*$-automorphisms on operator algebras and the corresponding unbounded derivations, *Amer. J. Math.* **98** (1976), 427–440.

[Sak 3] Sakai, S.
On a conjecture of Kaplansky, *Tohoku Math. J.* **12** (1960), 31–33.

[Sak 4] Sakai, S.
Derivations of W^*-algebras, *Ann. Math.* **83** (1966), 273–279.

[Sak 5] Sakai, S.
Derivations of simple C^*-algebras, *J. Func. Anal.* **2** (1968), 202–206.

[Sak 6] Sakai, S.
Automorphisms and tensor products of operator algebras, *Amer. J. Math.* **97** (1975), 889–896.

[Seg 1] Segal, I. E.
Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* **61** (1947), 69–105.

[Seg 2] Segal, I. E.
Decomposition of operator algebras I, *Mem. Amer. Math. Soc.* **9** (1951), 1–67.

[Seg 3] Segal, I. E.
A class of operator algebras which are determined by groups, *Duke Math. J.* **18** (1951), 221–265.

[She 1] Sherman, S.
Order in operator algebras, *Amer. J. Math.* **73** (1951), 227–232.

[Sim 1] Simon, B.
Quantum dynamics, from automorphism to Hamiltonian, in *Studies in Mathematical Physics*, (Lieb, Simon, Wightman, eds). Princeton Univ. Press, Princeton (1976).

[Ska 1] Skau, C. F.
Orthogonal measures on the state space of a C^*-algebra, in *Algebras in Analysis* (J. H. Williamson, ed.). Academic Press, New York–San Francisco–London (1975).

[Ska 2] Skau, C. F.
Finite subalgebras of a von Neumann algebra, *J. Func. Anal.* **25** (1977), 211–235.

[Sti 1] Stinespring, W. F.
Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 211–216.

[Stø 1] Størmer, E.
Positive linear maps of operator algebras, *Acta Math.* **110** (1963), 233–278.

[Stø 2] Størmer, E.
Positive linear maps of C^*-algebras, in *Lecture Notes in Physics* Vol. **29** Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1974).

[Stø 3] Størmer, E.
Symmetric states of infinite tensor products of C^*-algebras, *J. Func. Anal.* **3** (1969), 48–68.

[Stø 4] Størmer, E.
Automorphisms and invariant sates of operator algebras, *Acta Math.* **127** (1971), 1–9.

[Str 1] Streater, R. F.
Lorentz invariance of the Wightman functions in $P(\phi)_2$, *Commun. Math. Phys.* **26** (1972), 109–120.

[Tak 1] Takesaki, M.
Covariant representations of C^*-algebras and their locally compact automorphism groups, *Acta Math.* **119** (1967), 272–303.

[Tak 2] Takesaki, M.
Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, *Acta Math.* **131** (1973), 249–310.

[Tak 3] Takesaki, M.
Tomita's theory of modular Hilbert-algebras and its application, in *Lecture Notes in Mathematics* Vol. 128, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1970).

[Tak 4] Takesaki, M., and J. Tomiyama.
Applications of fibre bundles to a certain class of C^*-algebras, *Tohoku Math. J.* **13** (1961), 498–523.

[Taka 1] Takai, H.
The quasi orbit space of continuous C^*-dynamical systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **216** (1976), 105–113.

[Tom 1] Tomiyama, J.
On the projection of norm 1 in W^*-algebras I, II, III, *Proc. Jap. Acad. Sci.* **33** (1957), 608–612; *Tohoku Math. J.* **10** (1958), 204–209; *ibid.* **11** (1959), 125–129.

[Tomi 1] Tomita, M.
Quasi-standard von Neumann algebras, unpublished.

[Tomi 2] Tomita, M.
Harmonic analysis on locally compact groups, *Math. J. Okayama Univ.* **5** (1956), 133–193.

[Tomi 3] Tomita, M.
Spectral theory of operator algebras I, *Math. J. Okayama Univ.* **9** (1959), 63–98.

[Tro 1] Trotter, H.
Approximation of semigroups of operators, *Pac. J. Math.* **8** (1959), 887–919.

[Tro 2] Trotter, H.
On the product of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 545–551.

[Wig 1] Wightman, A. S.
Theoretical physics, Inst. Atomic Energy Authority Vienna (1963).

[Wig 2] Wightman, A. S.
Hilbert's sixth problem: Mathematical treatment of the axioms of physics, in *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, F. E. Browder ed., Proc. Sympos. Pure Math. **28** (1976).

[Wil 1] Wils, W.
Désintegration centrale des formes positives sur les C^*algèbres, *C. R. Acad. Sci. Paris* **267** (1968), 810–812.

[Wil 2] Wils, W.
Désintegration centrale dans une partie convexe compacte d'un espace localement convexe, *C. R. Acad. Sci. Paris* **269** (1969), 702–704.

[Wil 3] Wils, W.
The ideal center of partially ordered vector spaces, *Acta Math.* **127** (1971), 41–77.

[Wor 1] Woronowicz, S. L.
Unpublished notes.

[Wor 2] Woronowicz, S. L.
Nonextendible positive maps, *Commun. Math. Phys.* **51** (1976), 243–282.

[Wor 3] Woronowicz, S. L.
A remark on the polar decomposition of m-sectional operators. *Lett. Math. Phys.* **1** (1977), 429–433.

[Yng 1] Yngvason, J.
On the decomposition of Wightman functionals in the Euclidean framework. *Rep. Math. Phys.* **13** (1978), 101–115.

[Yos 1] Yosida, K.
On the differentiability and the representation of one-parameter semigroups of linear operators, *J. Math. Soc. Japan* **1** (1948), 15–21.

[Zel 1] Zeller-Meier, G.
Products croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes, *J. Math. Pures et Appl.* **47** (1968), 101–239.

Работы, имеющиеся в переводе или являющиеся переводом с русского

[[Bou 1]] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. — М.: ИЛ, 1959.

[[Dix 2]] Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.

[[Dun 1]] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. В 3-х томах. Т. 1. —М.: ИЛ, 1962; Т. 2. — М.: Мир, 1966; Т. 3. — М.: Мир, 1974.

[[Gre 1]] Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. — М.: Мир, 1973.

[[Hard 1]] Харди Г. Литтльвуд Дж., Полиа Г. Неравенства.—М.: ИЛ, 1948.

[[Hew 1]] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1975.

[[Hil 1]] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. —М.: ИЛ, 1962.

[[Hil 2]] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1951.

[[Kat 1]] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

[[Nai 1]] Наймарк М. А. Нормированные кольца. — 2-е изд. — М.: Наука 1968.

[[Neu 2]] фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.

[[Phe 1]] Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. — М.: Мир, 1968.

[[Ree 1]] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[[Ree 2]] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. — М.: Мир, 1978.

[[Rie 1]] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — 2-е изд. — М.: Мир, 1979.

[[Rud 2]] Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

[[Tit 1]] Титчмарш Э. Теория функций. 2-е изд. — М.: Наука, 1980.

[[Wign 1]] Вигнер Ю. П. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961.

[[Yos 1]] Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

[Gel 1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве. — Мат. сб., 1943, **12**, с. 147—213.

[Gel 2] Гельфанд И. М. Нормированные кольца. —Мат. сб., 1941, **9**, с. 3—24.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Стандартные обозначения

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$	C^*-алгебры
$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Z}$	алгебры фон Неймана
$\mathfrak{I}$	идеалы в C^*-алгебрах и алгебрах фон Неймана
A, B, C	элементы C^*-алгебр и алгебр фон Неймана
ω, φ	состояния
$\mathfrak{H}$	гильбертово пространство
π	инволютивный морфизм (*-морфизм)
Ω, ξ, η, ψ	векторы гильбертова пространства
P, E, F	ортогональные проекторы
G	группа
Λ	ограниченная область в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^\nu$ или целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\nu$
μ, ν	меры

Специальные обозначения

$\lvert A \rvert$	абсолютное значение (или модуль) A	перед предл. 2.2.10
$\lVert A \rVert$	C^*-норма A	перед опр. 2.1.1
A_+, A_-	положительная и отрицательная части A	предл. 2.2.10
A^*	сопряженный к A элемент	перед опр. 2.1.1
A^{-1}	обратный к A элемент	перед опр. 2.2.1
$\hat{A}$	преобразование Гельфанда или аффинный функционал, определенный элементом A	перед теор. 2.1.11Б и начало п. 4.1.3
$A\,(K)$	вещественные аффинные непрерывные функции на компактном выпуклом множестве K	начало п. 4.1.2
$\tilde{\mathfrak{A}}$	алгебра $\mathfrak{A}$, расширенная присоединением единицы	опр. 2.1.6
$\mathfrak{A}_+$	положительная часть $\mathfrak{A}$	опр. 2.2.7
$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$, $\bigotimes_{\alpha} \mathfrak{A}_\alpha$	тензорные произведения C^*-алгебр, соотв. конечные и бесконечные	п.2.7.2

$(\mathfrak{A}, G, \alpha)$	C^*-динамическая система	опр. 2.7.1
$\mathfrak{A} \otimes_\alpha G$	C^*-скрещенное произведение	опр. 2.7.2
$\widehat{\alpha}_\gamma$	дуальное (или двойственное) действие группы α_t	перед теор. 2.7.4
$B_{\mathfrak{A}}$	положительные линейные функционалы на $\mathfrak{A}$ с нормой, не превосходящей единицы	теор. 2.3.15
$b(\mu)$	барицентр μ	предл. 4.1.1
$C_0(X)$	непрерывные комплексные функции на отделимом локально-компактном пространстве X, обращающиеся в нуль на бесконечности	пример 2.1.4
$C(X)$	непрерывные комплексные функции на отделимом компактном пространстве X	пример 2.1.4
$C^*(\mathfrak{A}, \alpha)$	C^*-скрещенное произведение	опр. 2.7.2
C_0-	слабо непрерывная (группа)	опр. 3.1.2
C_0^*-	слабо* непрерывная (группа)	опр. 3.1.2
$\mathbb{C}$	комплексные числа	
$\mathrm{Co}(\tau_G(A))$	выпуклая оболочка множества $\{\tau_g(A) : g \in G\}$	опр. 4.3.6
$D(S)$	область определения линейного оператора S	
Δ	модулярный оператор	опр. 2.5.10
Δ_{ξ_1, ξ_2}	относительный модулярный оператор	лемма 2.5.34
$(D_\psi : D_\varphi)_t$	коцикл Радона—Никодима	теор. 2.7.16
δ_ω	единичная точечная мера в точке ω	перед предл. 4.1.1
$\partial_f(K)$	граничное множество для f	опр. 4.1.5
$\Delta_\mu(A)$	среднеквадратичное уклонение	перед прим. 4.1.29
$E_{\mathfrak{A}}$	пространство состояний алгебры $\mathfrak{A}$	опр. 2.3.14
$E_{\mathfrak{A}}^G$	G-инвариантные состояния на $\mathfrak{A}$	начало п. 4.3.1
E_ω	проектор на подпространство $U_\omega(G)$-инвариантных векторов	предл. 4.3.7
$\mathscr{E}(K)$	крайние (или экстремальные) точки выпуклого множества K	начало п. 4.1.2
F	$F = J\Delta^{-1/2}$	опр. 2.5.10

$\overline{f}(\omega)$	верхняя обёртывающая функции f	опр. 4.1.5
$F_{\mathfrak{A}}$	множество факторных состояний на $\mathfrak{A}$	перед теор. 4.2.10
F_ω	$F_\omega = [\pi_\omega(\mathfrak{A})' E_\omega]$	предл. 4.3.8
$\Gamma(\mathfrak{M})$	инвариант Γ алгебры $\mathfrak{W}$	теор. 2.7.23
$G(S)$	график линейного оператора S	перед леммой 3.1.27
$\Gamma(\alpha)$	Γ-спектр α	зам. и комм. к п. 3.2.3
$\widehat{G}$	двойственная группа для абелевой локально-компактной группы G	начало п. 3.2.3
(γ, t)	результат применения $\gamma \in \widehat{G}$ к $t \in G$	начало п. 3.2.3
$\hbar$	постоянная Планка	введение
$(\mathfrak{H}, \pi)$	представление в пространстве $\mathfrak{H}$	опр. 2.3.2
$(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$	циклическое представление в $\mathfrak{H}$ с циклическим вектором Ω	опр. 2.3.5
$(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$	циклическое представление, определенное состоянием ω	опр. 2.3.18
$\mathfrak{H}_\omega$	гильбертово пространство циклического представления, определенного состоянием ω	опр. 2.3.18
$\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{H}_i$	конечное тензорное произведение гильбертовых пространств	п. 2.7.2
$\otimes_{\alpha}^{\Omega_\alpha} \mathfrak{H}_\alpha$	бесконечное тензорное произведение гильбертовых пространств	п. 2.7.2
$\mathbb{1}$	единичный элемент операторной алгебры	после примера 2.1.4
I	тождественное преобразование банахова пространства	
ι	тождественный автоморфизм операторной алгебры	
$\mathfrak{J}_Y^U$	идеал алгебры $L^1(G)$	опр. 3.2.37
J	модулярная инволюция	опр. 2.5.10
$j(A)$	$j(A) = JAJ$	перед опр. 2.5.25
J_{ξ_1, ξ_2}	относительная модулярная инволюция	лемма 2.5.35
$\mathcal{K}(\mathfrak{A}, G)$	непрерывные функции $f: G \to \mathfrak{A}$ с компактным носителем	опр. 2.7.2

$\varkappa_\mu(f)$	отображение	лемма 4.1.21
$\mathscr{L}(X)$	пространство ограниченных линейных операторов A в банаховом пространстве X с $D(A)=X$	пример 2.1.2
$\mathscr{L}\mathscr{C}(\mathfrak{H})$	компактные операторы в $\mathfrak{H}$	пример 2.1.3
$\mathscr{L}_*(\mathfrak{H})$	предсопряженное, или преддвойственное, пространство для $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$	опр. 2.4.4
$L^p(\mu)$, $L^p(X,\mu)$	L^p-пространства комплексных функций на измеримом пространстве (X,μ), $1\leqslant p\leqslant\infty$	начало разд. 2.5
$L^p(X,G)$	L^p-функции на локально-компактной группе G (снабженной мерой Хаара) со значениями в банаховом пространстве X	опр. 2.7.25 2.7.3
$\lvert\Lambda\rvert$	мера множества $\Lambda\subset\mathbb{R}^\nu$ или число точек в $\Lambda\subset\mathbb{Z}^\nu$	
$\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$	коммутант, соотв. бикоммутант, множества $\mathfrak{M}$	начало разд. 2.4
$[\mathfrak{M}\ \mathfrak{K}]$	замкнутая линейная оболочка множества $\mathfrak{M},\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{H}$, или соответствующий ей проектор в $\mathfrak{M}'\subset\mathscr{L}(\mathfrak{H})$	опр. 2.4.10
$\mathfrak{M}_*$	преддвойственное (или предсопряженное) к $\mathfrak{M}$ пространство	опр. 2.4.16
$(\mathfrak{M}, G, \alpha)$	W^*-динамическая система	опр. 2.7.3
$\mathfrak{M}\otimes_\alpha G$	W^*-скрещенное произведение	опр. 2.7.3
$\bigotimes_{i=1}^{n}\mathfrak{M}_i$	конечное W^*-тензорное произведение	п. 2.7.2
$\otimes_\alpha^{\Omega_\alpha}\mathfrak{M}_\alpha$	бесконечное W^*-тензорное произведение	п. 2.7.2
$M_+(K)$	положительные меры Радона на выпуклом компактном множестве K	начало п. 4.7.2
$M_1(K)$	вероятностные меры на K	начало п. 4.7.2
$M_\omega(K)$	вероятностные меры с барицентром ω	перед предл. 4.1.1
$\mu\vee\nu$	точная верхняя грань	перед предл. 4.1.1
$\mu\wedge\nu$	точная нижняя грань	перед предл. 4.1.1
$\mu\succ\nu$	упорядочение Шоке	опр. 4.1.2
$\mu\gg\nu$	упорядочение Бишопа — де Леу	зам. и комм. к п. 4.1.2

$M(A)$	среднее от A	предл. 4.3.8
$\mathfrak{M}_E$	$\mathfrak{M}_E = E\mathfrak{M}E$	лемма 4.3.13
$N_{\mathfrak{A}}$	нормальные состояния C^*-алгебры операторов в гильбертовом пространстве	предл. 2.6.15
N^G_ω	G-инвариантные π_ω-нормальные состояния	теор. 4.3.9
ω_Ω	векторное состояние, отвечающее вектору Ω	после опр. 2.3.9
Ω_ω	циклический вектор, ассоциированный с состоянием ω	опр. 2.3.18
$o(t)$	величина более высокого порядка малости, чем t (при $t \to 0$)	начало п. 3.1.5
$O(t)$	величина одного порядка малости с t (при $t \to 0$)	начало п. 3.1.5
$\omega_1 \perp \omega_2$	ортогональные состояния	опр. 4.1.20
$\mathcal{O}_\omega(E_{\mathfrak{A}})$, $\mathcal{O}_\omega$	ортогональные вероятностные меры на $E_{\mathfrak{A}}$ с барицентром ω	опр. 4.1.20
$\omega_1 \overset{\vert}{\circ} \omega_2$	дизъюнктные состояния	начало п. 4.2.2
$\pi_1 \simeq \pi_2$	унитарно эквивалентные представления	после предл. 2.3.8
$\pi_1 \approx \pi_2$	квазиэквивалентные представления	опр. 2.4.24
$\pi_1 \overset{\vert}{\circ} \pi_2$	дизъюнктные представления	начало п. 4.2.2
π_ω	*-морфизм, задающий циклическое представление, ассоциированное с ω	опр. 2.3.18
$\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_\Omega$	естественный положительный конус	опр. 2.5.25
$\hat{P}_\omega$	проектор на подпространство U_ω-почти-периодических векторов	теор. 4.3.27
$r_{\mathfrak{A}}(A)$	резольвентное множество для $A \in \mathfrak{A}$	опр. 2.2.1 и 2.2.4
$\rho(A)$	спектральный радиус A	предл. 2.2.2
$R(S)$	область значений линейного оператора S	
$\mathbb{R}$	вещественные числа	
$\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$	спектр $A \in \mathfrak{A}$	опр. 2.2.1 и 2.2.4
$\sigma(\mathfrak{A})$	спектр абелевой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$	опр. 2.3.25
S	$S = J\Delta^{1/2}$	опр. 2.5.10
σ_t^ω	группа модулярных автоморфизмов, ассоциированная с ω	опр. 2.5.15

$\sigma(X, F)$	топология линейного пространства X, определяемая подпространством F двойственного пространства	перед опр. 2.5.17
S_{ξ_1, ξ_2}	$S_{\xi_1, \xi_2} = J_{\xi_1, \xi_2}\Delta^{1/2}_{\xi_1, \xi_2}$	лемма 2.5.33
$S(\mathfrak{M})$	инвариант S алгебры $\mathfrak{M}$	опр. 2.7.22
$\sigma_U(Y)$	U-спектр множества Y	опр. 2.3.37
$\sigma(U)$	спектр (группы) U	опр. 2.3.37
$S(K)$	вещественные непрерывные выпуклые функции на компактном выпуклом множестве K	начало п. 4.1.2
$S_\lambda(U), S_\lambda(\tau(A))$	выпуклые комбинации элементов $U(g)$, соотв. $\tau_g(A)$	доказ. предл. 4.3.7
$\sigma_p(U)$, $\sigma_p(\tau)$	точечный спектр U, соотв. τ	начало п. 4.3.3
$\int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \xi(z)$	прямой интеграл (семейства) векторов	опр. 4.4.1
$\int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{H}(z)$	прямой интеграл гильбертовых пространств	опр. 4.4.1
$\int_Z^{\oplus} d\mu(t)\, T(z)$	прямой интеграл (семейства) операторов	перед теор. 4.4.3
$\int_Z^{\oplus} d\mu(z)\, \mathfrak{M}(z)$	прямой интеграл алгебр фон Неймана	опр. 4.4.4
$\int_Z^{\oplus} d\mu(t)\, \pi(z)$	прямой интеграл представлений	перед теор. 4.4.7
$\mathscr{T}(\mathfrak{H})$	класс операторов со следом в $\mathfrak{H}$	предл. 2.4.3
$\tau(X, F)$	топология Макки	перед опр. 3.1.2
U_ω	унитарное представление, ассоциированное с G-инвариантным состоянием ω	следствие 2.3.17
$U_\mu(A)$	$U_\mu(A) = \int d\mu(t)\, U_t(A)$	предл. 3.1.4
$\mathscr{U}(A, \varepsilon)$	ε-окрестность A	перед опр. 2.1.1
$W^*(\mathfrak{M}, \alpha)$	W^*-скрещенное произведение	опр. 2.7.3
X_*	преддвойственное (или предсопряженное) к X пространство	перед опр. 2.5.17
$X^U(E)$, $X_0^U(E)$	спектральные подпространства, отвечающие $E \subseteq \hat{G}$	опр. 3.2.37
$\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$	центр алгебры $\mathfrak{M}$	опр. 2.4.8
$\mathfrak{Z}_\omega$	центр $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$	перед опр. 2.6.4
$\mathfrak{Z}_\omega^c$	коммутантная алгебра	опр. 2.6.4
$\mathfrak{Z}_\omega^\perp$	алгебра на бесконечности	опр. 2.6.4

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ