

**А. В. Болсинов
А. Т. Фоменко**

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

1

**ГЕОМЕТРИЯ
ТОПОЛОГИЯ
КЛАССИФИКАЦИЯ**

Редакция журнала
“Регулярная и хаотическая динамика”

Издательский дом
“Удмуртский университет”

1999

УДК 515.1
ББК 22.15
Б 795

Б 795 **А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко.** Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 444 с. ISBN 5-7029-0352-8

Настоящая книга посвящена активно развивающемуся направлению современной математики — теории интегрируемых гамильтоновых систем. Систематически излагается теория лиувиллевых слоений, описано качественное поведение интегральных траекторий при бифуркациях торов Лиувилля и получена траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на трехмерных изознергетических поверхностях. Вторая часть книги посвящена общим методам вычисления топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов математических специальностей университетов, а также на специалистов математиков и физиков, занимающихся теорией динамических систем и интересующихся современными приложениями геометрии и топологии.

ISBN 5-7029-0352-8

ББК 22.15



Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»
<http://www.uni.udm.ru/rcd>

- © А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, 1999
- © Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика», 1999
- © Издательский дом «Удмуртский университет», 1999

Содержание

Предисловие	8
ГЛАВА 1. Основные понятия	11
1.1. Линейная симплектическая геометрия	11
1.2. Симплектические и пуассоновы многообразия	15
1.3. Теорема Дарбу	22
1.4. Вложения и погружения симплектических многообразий. Симплектические и лагранжевы подмногообразия	25
1.5. Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля	27
1.6. Нерезонансные и резонансные системы	35
1.7. Число вращения	35
1.8. Отображение момента интегрируемой системы и его бифуркационная диаграмма	38
1.9. Простой пример интегрируемой механической системы	40
1.10. Невырожденные точки отображения момента	42
1.10.1. Случай двух степеней свободы	42
1.10.2. Интегралы Ботта с точки зрения четырехмерного симплектического многообразия	46
1.10.3. Определение невырожденной особенности в случае многих степеней свободы	54
1.10.4. Типы невырожденных особенностей в многомерном случае	57
1.11. Основные типы эквивалентностей динамических систем	63
ГЛАВА 2. Топология слоений, порождаемых функциями Морса на двумерных поверхностях	66
2.1. Простые функции Морса	66
2.2. Граф Риббана функции Морса	67
2.3. Понятие атома	69
2.4. Простые атомы	71
2.4.1. Случай минимума и максимума. Атом A	71
2.4.2. Случай ориентируемого седла. Атом B	72
2.4.3. Случай неориентируемого седла. Атом \tilde{B}	72
2.4.4. Классификация простых атомов	74
2.5. Простые молекулы	75
2.5.1. Определение простой молекулы	75
2.5.2. Теорема реализации	76
2.5.3. Примеры простых функций Морса и простых молекул	77

2.5.4.	Классификация минимальных простых функций Морса на поверхностях малого рода	80
2.6.	Сложные атомы	83
2.7.	Классификация атомов	86
2.7.1.	Склейка атомов из крестов	86
2.7.2.	Алгоритм построения полного списка всех атомов	87
2.7.3.	Алгоритм распознавания одинаковых атомов	87
2.7.4.	Задание атома в виде f -графа	89
2.7.5.	Задание ориентированного атома в виде некоторой подгруппы в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$	93
2.7.6.	Изображение атомов в виде погружений графов в плоскость	96
2.7.7.	Атомы как клеточные разбиения двумерных замкнутых поверхностей	97
2.7.8.	Таблица атомов малой сложности	98
2.7.9.	Зеркальные атомы	99
2.8.	Группы симметрий ориентированных атомов и универсальное накрывающее дерево	100
2.8.1.	Симметрии f -графов	100
2.8.2.	Универсальное накрывающее дерево над f -графами. f -граф как фактор-пространство универсального дерева	101
2.8.3.	Соответствие между f -графами и подгруппами в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$	104
2.8.4.	Граф J . Группы симметрий f -графа и его связь с самим f -графом. Максимально симметричные f -графы	106
2.8.5.	Список плоских максимально симметричных атомов. Примеры максимально симметричных атомов произвольного рода	110
2.8.6.	Представление атомов в виде факторов плоскости Лобачевского по подгруппам ее группы изометрий. Атомы как поверхности постоянной отрицательной кривизны	118
2.9.	Общее понятие молекулы	122
2.10.	Примеры сложных функций Морса и сложных молекул	127
2.11.	Аппроксимация сложных молекул простыми. Деформации функций Морса	129
2.12.	Классификация потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях при помощи атомов и молекул	134
Таблицы к главе 2		138
ГЛАВА 3. Грубая лиувиллева эквивалентность интегрируемых систем с двумя степенями свободы		
3.1.	Классификация невырожденных критических подмногообразий на изоэнергетических 3-поверхностях	148
3.2.	Топологическое строение окрестности особого слоя слоения Лиувилля	153

3.3. Топологически устойчивые гамильтоновы системы	160
3.4. Пример неустойчивой интегрируемой системы	164
3.5. 2-атомы и 3-атомы	165
3.6. Классификация 3-атомов	170
3.7. Атомы как перестройки торов Лиувилля	172
3.8. Молекулы интегрируемой системы	173
3.9. Сложность интегрируемых систем	176
Таблицы к главе 3	178
ГЛАВА 4. Лиувиллева эквивалентность интегрируемых систем с двумя степенями свободы	
4.1. Допустимые системы координат на границе 3-атома	182
4.2. Матрицы склейки и избыточные оснащения молекулы	189
4.3. Инварианты, числовые метки r, ε, n	190
4.3.1. Метки r_i и ε_i	191
4.3.2. Метки n_k и семьи в молекуле	191
4.4. Меченая молекула — полный инвариант лиувиллевой эквивалентности	193
4.5. Влияние ориентаций	195
4.5.1. Изменение ориентации на ребре молекулы	195
4.5.2. Изменение ориентации 3-многообразия Q	196
4.5.3. Изменение ориентации гамильтонова векторного поля	197
4.6. Теорема реализации	197
4.7. Простые примеры молекул	200
4.8. Гамильтоновы системы с критическими бутылками Клейна	207
4.9. Топологические препятствия к интегрируемости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы	211
4.9.1. Класс (M)	211
4.9.2. Класс (H)	212
4.9.3. Класс (Q) трехмерных многообразий, склеенных из блоков двух типов	212
4.9.4. Класс (W) многообразий Вальдхаузена (граф-многообразий)	213
4.9.5. Класс (H') многообразий, отвечающих интегрируемым гамильтонианам с ручными интегралами	214
4.9.6. Теорема о совпадении четырех классов многообразий	215
4.9.7. Доказательство теоремы 4.3	216
ГЛАВА 5. Траекторная классификация интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Первый шаг	
5.1. Функция вращения системы на ребре молекулы. Вектор вращения	218
5.2. Редукция трехмерной траекторной классификации к двумерной классификации с точностью до сопряженности	222
5.2.1. Трансверсальные сечения	222
5.2.2. Поток Пуанкаре и гамильтониан Пуанкаре	224
5.3. Редукция двух степеней свободы к одной	227

5.4. Общая концепция построения траекторных инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем	230
Глава 6. Классификация гамильтоновых потоков на двумерных поверхностях с точностью до топологической сопряженности	233
6.1. Инварианты гамильтоновой системы на 2-атоме	233
6.1.1. Λ -инвариант	233
6.1.2. Δ -инвариант и Z -инвариант	239
6.2. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с точностью до топологической сопряженности	244
6.3. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с инволюцией с точностью до топологической сопряженности	248
6.4. Операция вклейки-вырезания	250
6.5. Описание области значений Δ - и Z -инвариантов	257
6.6. Теорема классификации гамильтоновых систем на замкнутой поверхности с точностью до топологической сопряженности	270
Глава 7. Гладкая сопряженность гамильтоновых потоков на двумерных поверхностях	273
7.1. Построение гладких инвариантов на 2-атомах	273
7.2. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с точностью до гладкой сопряженности	281
Глава 8. Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Второй шаг	286
Введение	286
8.1. Избыточное t -оснащение молекулы (топологический случай). Основная лемма о t -оснащениях	287
8.2. Группа замен трансверсальных сечений. Операция вклейки-вырезания	294
8.3. Действие группы замен GP на множестве избыточных оснащений	298
8.4. Три общих принципа построения инвариантов	300
8.5. Допустимые избыточные оснащения и их реализация	301
8.5.1. Реализация оснащения на атоме	301
8.5.2. Реализация оснащения на ребре молекулы	305
8.5.3. Реализация избыточного t -оснащения на всей молекуле	308
8.6. Построение траекторных инвариантов в топологическом случае. Определение t -молекулы	311
8.6.1. R -инвариант и индекс вращения на ребре	311
8.6.2. b -инвариант (на радикалах молекулы)	313
8.6.3. $\tilde{\Lambda}$ -инвариант	316
8.6.4. $\tilde{\Delta Z}[\hat{\theta}]$ -инвариант	316
8.6.5. Окончательное определение t -молекулы интегрируемой системы	318
8.6.6. Влияние ориентации на инварианты	320

8.7. Теорема топологической траекторной классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы	322
8.8. Частный случай: простые интегрируемые системы и их топологическая траекторная классификация	328
8.9. Теория гладкой траекторной классификации	329
ГЛАВА 9. Лиувиллева классификация интегрируемых систем с двумя степенями свободы в четырехмерных окрестностях особых точек	337
9.1. L -тип четырехмерной особенности	337
9.2. Круговая молекула четырехмерной особенности	342
9.3. Случай центр-центр	344
9.4. Случай центр-седло	345
9.5. Случай седло-седло	350
9.5.1. Структура особого слоя	350
9.5.2. CI -тип особенности	355
9.5.3. Список особенностей типа седло-седло малой сложности	358
9.6. Представление четырехмерной особенности типа седло-седло как почти прямого произведения двумерных атомов	362
9.7. Доказательства теорем 9.3 и 9.4	371
9.8. Случай особенности типа фокус-фокус	373
9.8.1. Структура особого слоя типа фокус-фокус	373
9.8.2. Классификация особенностей типа фокус-фокус	375
9.8.3. Модельный пример особенности типа фокус-фокус и теорема реализации	379
9.8.4. Круговая молекула и группа монодромии особенности типа фокус-фокус	381
9.9. Представление многомерных невырожденных особенностей слоев Лиувилля в виде почти прямых произведений	386
Таблицы к главе 9	395
Список литературы	416

Предисловие

Цель этой книги — доступно рассказать о новых качественных методах исследования интегрируемых гамильтоновых систем.

Хорошо известно, что многие системы дифференциальных уравнений, возникающие в физике, геометрии и механике и описывающие совершенно различные явления, тем не менее тесно связаны между собой (в некотором смысле похожи).

Изучению таких связей (другими словами, изоморфизмов разного характера) между динамическими системами было посвящено очень много работ, начиная с Мопертюи, Эйлера, Якоби, Минковского. В последние годы этот вопрос (в связи с проблемами интегрируемости) обсуждался в работах С. Смейла, Дж. Марседена, Ю. Мозера, М. Адлера, П. ван Мербеке, Х. Кноррера, Л. Гаврилова, В. В. Козлова, С. П. Новикова, А. П. Веселова, А. И. Бобенко и других.

О каких типах изоморфизмов идет здесь речь? В зависимости от постановки задачи они могут быть весьма разнообразны. В настоящей книге речь будет идти главным образом о следующих трех хорошо известных отношениях эквивалентности среди динамических систем: сопряженность, траекторная эквивалентность (непрерывная и гладкая) и лиувиллева эквивалентность (в случае интегрируемых систем). Напомним, что две гладкие динамические системы σ^t и σ'^t называются топологически (гладко) сопряженными, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) ξ между многообразиями, на которых заданы эти системы, переводящий динамические системы друг в друга, т. е. $\sigma'^t = \xi\sigma^t\xi^{-1}$. Другими словами, сопряженность означает, что на самом деле рассматриваемые системы совершенно идентичны. Используя несколько иную терминологию, мы можем попросту говорить, что они переходят друг в друга в результате некоторой замены переменных (без замены времени).

Второе отношение эквивалентности — траекторная эквивалентность — несколько слабее. Предполагается, что гомеоморфизм (диффеоморфизм) ξ переводит траектории первой системы в траектории второй, не обязательно сохраняя при этом параметр t (время) на этих траекториях. Ясно, что сопряженные системы являются траекторно эквивалентными, но не наоборот. Тем не менее, отношение траекторной эквивалентности является весьма сильным. В частности, все качественные свойства динамических систем (устойчивость, строение предельных множеств, типы замкнутых траекторий и др.) сохраняются при траекторных изоморфизмах.

Третье отношение эквивалентности — лиувиллева эквивалентность — возникает в случае гамильтоновых динамических систем, интегрируемых по Лиувиллю. Две такие системы считаются лиувиллево эквивалентными, если их фазовые пространства одинаковым образом расслоены на торы Лиувилля.

Вопрос о классификации динамических систем в смысле этих отношений эквивалентности является классическим. Среди известных результатов в этом направлении (в теории классификации динамических систем):

а) Локальная теория в окрестности положения равновесия и периодической траектории (А. Пуанкаре, А. Дюлак, Дж. Д. Биркгоф, К. Т. Чень и др., см. обзоры Д. В. Аносова, С. Х. Арансона, И. У. Бронштейна, В. З. Гринеса [4], В. И. Арнольда и Ю. С. Ильяшенко [11]).

б) Из глобальных результатов — классификация потоков Морса–Смейла (Е. А. Леонтович, А. Г. Майер [103], [104], М. М. Пейксото [354], Я. Л. Уманский [205]) и потоков специального типа на двумерных поверхностях (С. Х. Арансон, В. З. Гринес [10]).

в) Исследование топологии интегральных многообразий и слоений Лиувилля интегрируемых систем (С. Смейл [178], А. А. Ошемков [350], [157], М. П. Харламов [219], [220], Т. И. Погосян [163], [164], [165], Я. В. Татаринев [192], [192], Нгуен Тьен Зунг [343], [344], Р. Кушман и Л. Бейтс [264], Р. Кушман и Х. Кноррер [265], М. Оден [237], [238]), Л. Гаврилов [301], [302], [303]).

Разумеется, решение задачи классификации для гладких динамических систем произвольного вида в разумных терминах вряд ли возможно. Поэтому естественно ограничиться рассмотрением систем некоторого специального класса, обладающих в чем-то похожими свойствами.

В настоящей книге излагается решение задачи лиувиллевой и траекторной классификации для одного из важнейших классов динамических систем, а именно, для невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

В этой классификации лежит новый подход в качественной теории интегрируемых гамильтоновых систем, предложенный А. Т. Фоменко [206], [208], [286], и построенная затем совместно с Х. Цишангом, С. В. Матвеевым, А. В. Болсиновым и А. В. Браиловым теория топологической классификации таких систем [215], [216], [30], [33], [48], [24], [25], [28].

А. Т. Фоменко предложил сопоставлять каждой интегрируемой гамильтоновой системе в качестве топологического инварианта некоторый граф W , названный им молекулой системы. С помощью этого инварианта удалось полностью описать структуру расслоения изознергетической поверхности системы на инвариантные торы Лиувилля и тем самым классифицировать системы в смысле лиувиллевой эквивалентности. Оказалось, что для этого необходимо снабдить граф некоторым набором числовых меток. В качестве окончательного инварианта была предложена так называемая меченая молекула системы W^* (инвариант Фоменко–Цишанга).

Эту молекулу W^* естественным образом можно рассматривать как некоторый портрет интегрируемой гамильтоновой системы, содержащий в себе очень много полезной информации о ней. В случае траекторной классификации придется решать более деликатную проблему. А именно, нужно научиться полностью описывать слоение изознергетической поверхности системы на траектории (а не только на лиувиллевские торы) и классифицировать интегрируемые системы с точностью до траекторной эквивалентности. Ясно, что для этого мы должны сделать портрет системы более подробным, дополнив его (т. е. меченую молекулу) новыми деталями (т. е. траекторными инвариантами). Другими словами, задача состоит в том, чтобы найти и описать полный набор дополнительных

траекторных инвариантов (в непрерывном и гладком случаях). Эта задача была решена авторами, и этому посвящена одна из частей настоящей книги.

В настоящее время исследования по топологии интегрируемых систем активно развиваются как в России, так и за рубежом. В частности, были описаны топологические портреты и дана лиувиллева и траекторная классификация многих конкретных физических и механических интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Укажем здесь на работы Е. В. Аношкиной, В. В. Калашникова (мл.), Б. С. Кругликова, В. С. Матвеева, Т. З. Нгуена, О. Е. Орел, А. А. Ошемкова, Л. С. Поляковой, Е. Н. Селивановой, П. Топалова, В. В. Трофимова, П. Рихтера, Х. Дуллина, А. Виттека, Л. Гаврилова, М. Оден.

Настоящая книга является введением в проблему классификации интегрируемых систем. Ее отличительной особенностью является систематичность изложения большого материала, доступного ранее лишь в виде журнальных статей. Мы стремились рассказать обо всех этих исследованиях максимально просто и доступно, рассчитывая в том числе и на студентов математиков, физиков и механиков. В первом томе мы излагаем основы теории и связанные с ней общие вопросы топологии интегрируемых систем.

Второй том знакомит читателя с многочисленными приложениями построенной теории в физике, механике и геометрии. Мы обсуждаем здесь общие топологические и геометрические методы анализа конкретных динамических систем, не касаясь, в частности, алгебро-геометрического подхода, служащего мощным средством исследования качественных свойств алгебраически интегрируемых систем, их лиувиллевых слоений и т. п. Это отдельная разветвленная тематика, с которой читатель может познакомиться по недавно вышедшей книге М. Оден [237]. Мы же сконцентрировали внимание на методах более общего характера, эффективно работающих как в алгебро-геометрических случаях интегрируемости, так и в случаях, когда никакой алгебраичности нет. Во втором томе нашей книге мы особо подробно рассмотрели два класса интегрируемых систем. Это — интегрируемые случаи в динамике твердого тела и интегрируемые геодезические потоки римановых метрик на двумерных поверхностях.

Безусловно, в книге отражены далеко не все приложения теории топологических инвариантов интегрируемых систем. Более того, это направление продолжает активно развиваться. Например, в самое последнее время интересные результаты получены Ю. А. Браиловым, Н. В. Коровиной, Е. А. Кудрявцевой, В. В. Корнеевым, В. О. Мантуровым, Е. Я. Татариновой.

В заключение мы выражаем глубокую благодарность за многочисленные научные обсуждения В. В. Козлову, С. В. Матвееву, Х. Цишангу, В. В. Шарко, И. К. Бабенко, Я. В. Татаринову, И. А. Тайманову, А. М. Степину, Ю. Н. Федорову, Н. Н. Нехорошеву, Дж. Марсдену, Л. Гаврилову, П. Рихтеру, Х. Дуллину, А. Виттеку. А также — нашим ученикам, постоянный контакт с которыми был для нас очень важен.

Работа была частично поддержана РФФИ, (номер 98-01-00240), а также грантом поддержки ведущих научных школ (номер 96-15-96142) и грантом президента России (номер 96-16-96868).

ГЛАВА 1

Основные понятия

1.1. Линейная симплектическая геометрия

Определение 1.1. Линейное пространство V (вещественное или комплексное) называется *симплектическим*, если на нем задана невырожденная кососимметрическая билинейная форма ω .

Эту форму мы будем называть симплектической структурой на линейном пространстве V .

Если в V выбран базис e_1, \dots, e_m , то форма ω однозначно задается своей матрицей $\Omega = (\omega_{ij})$, где $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. Эта матрица кососимметрична и невырождена. Отсюда сразу следует, что размерность симплектического пространства V четна, поскольку

$$\det \Omega = \det \Omega^T = \det(-\Omega) = (-1)^m \det \Omega,$$

где $m = \dim V$.

Предложение 1.1 (Линейная теорема Дарбу). *В пространстве V существует базис $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$, в котором матрица симплектической формы Ω имеет вид*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

где $E = E_n$ — единичная матрица размера $n \times n$. Такой базис будем называть *каноническим или симплектическим*.

Из этого утверждения сразу следует, что два симплектических пространства одинаковой размерности V и V' всегда изоморфны, то есть существует линейный изоморфизм $h: V \rightarrow V'$ такой, что $\omega(a, b) = \omega'(ha, hb)$ для любых векторов a и b .

Определение 1.2. Линейное подпространство L в V называется *изотропным*, если ограничение формы ω на L тождественно равно нулю, т.е. $\omega(a, b) = 0$ для любых $a, b \in L$. Максимальное изотропное подпространство называется *лагранжевым*.

Легко проверяется, что изотропное подпространство L является лагранжевым тогда и только тогда, когда его размерность равна n . Примером лагранжевых подпространств являются n -мерные плоскости, натянутые на векторы e_1, \dots, e_n и на векторы f_1, \dots, f_n канонического базиса.

Определение 1.3. Линейное преобразование $g: V \rightarrow V$ называется *симплектическим*, если оно сохраняет симплектическую структуру, т.е. $\omega(a, b) = \omega(ga, gb)$ для любых $a, b \in V$.

Определение 1.4. Совокупность всех симплектических преобразований пространства V называется *симплектической группой* и обозначается через $Sp(2n, \mathbb{R})$ (или $Sp(2n, \mathbb{C})$ в комплексном случае), где n — половина размерности V .

Предложение 1.2.

- а) Симплектические преобразования унимодулярны, т. е. $\det g = 1$ для любого $g \in Sp(2n, \mathbb{R})$ (или $g \in Sp(2n, \mathbb{C})$).
- б) Характеристический полином $P(\lambda) = \det(g - \lambda E)$ симплектического вещественного преобразования g обладает свойством

$$P(\lambda) = \lambda^{2n} P\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

В частности, если λ — собственное число симплектического преобразования g , то λ^{-1} — тоже собственное число той же кратности.

Доказательство.

а) Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть $2n$ -форму $\tau = \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ раз}}$. В силу невырожденности симплектической структуры

форма τ будет ненулевой формой максимального ранга на V . Поэтому ее можно интерпретировать как форму ориентированного объема. Симплектическое преобразование g вместе с формой ω сохраняет, очевидно, любую ее степень и, в частности, форму объема $\tau = \omega^{(n)}$. Следовательно, $\det g = 1$.

б) Из определения симплектического преобразования следует, что $g^T \Omega g = \Omega$. Перепишем это соотношение в виде $g = \Omega^{-1} g^{-1T} \Omega$. Отсюда

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(g - \lambda E) = \det(\Omega^{-1} g^{-1T} \Omega - \lambda E) = \det \Omega^{-1} (g^{-1} - \lambda E)^T \Omega = \\ &= \det(g^{-1} - \lambda E) = \det g^{-1} \det(E - \lambda g). \end{aligned}$$

Поскольку $\det g = \det g^T = 1$, то окончательно имеем

$$P(\lambda) = \det(E - \lambda g) = \det \lambda \left(\frac{1}{\lambda} E - g \right) = \lambda^{2n} \det \left(g - \frac{1}{\lambda} E \right) = \lambda^{2n} P\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Предложение доказано. ■

Следующее утверждение описывает основные свойства вещественной симплектической группы.

Предложение 1.3.

- 1) Группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ является некомпактной вещественной группой Ли размерности $n(2n + 1)$.
- 2) Алгебра Ли $sp(2n, \mathbb{R})$ этой группы состоит из матриц A , удовлетворяющих соотношению $A^T \Omega + \Omega A = 0$. Если базис канонический, т. е. $\Omega = J$, то

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & -A_1^T \end{pmatrix},$$

где A_1 — произвольная вещественная матрица размера $n \times n$, а матрицы A_2 и A_3 симметричны.

3) С топологической точки зрения симплектическая группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ диффеоморфна декартову произведению унитарной группы $U(n)$ на вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^{n(n+1)}$.

4) Группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ связна.

5) Группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ неодносвязна и ее фундаментальная группа изоморфна группе \mathbb{Z} .

Доказательство.

1) и 2) Без ограничения общности мы будем проводить все рассуждения в каноническом базисе, т.е. полагать $\Omega = J$. Тогда группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ может быть представлена как подгруппа в $GL(2n, \mathbb{R})$, задаваемая матричным соотношением $g^T J g = J$, которое может быть рассмотрено как система полиномиальных уравнений второй степени. Другими словами, группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ является линейной алгебраической группой и, как все такие группы, является группой Ли [396]. Ее некомпактность следует, например, из того, что матрицы вида $\text{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \lambda^{-1}, \dots, \lambda^{-1})$ симплектичны для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Для подсчета размерности группы найдем ее касательное пространство в единице. Другими словами, опишем соответствующую алгебру Ли $sp(2n, \mathbb{R})$. Пусть A — произвольный элемент из касательного пространства $T_e Sp(2n, \mathbb{R}) = sp(2n, \mathbb{R})$. Тогда существует гладкая кривая $g(t)$, лежащая в группе $Sp(2n, \mathbb{R})$ такая, что $g(0) = E$, $\frac{dg}{dt}(0) = A$. Дифференцируя соотношение $g^T(t) J g(t) = J$ при

$$t = 0, \text{ получаем } \frac{dg^T}{dt}(0) J + J \frac{dg}{dt}(0) = 0, \text{ или } A^T J + J A = 0.$$

Обратно, пусть матрица A удовлетворяет соотношению $A^T J + J A = 0$. Рассмотрим гладкую кривую $g(t) = \exp(tA)$ и покажем, что она целиком лежит в группе $Sp(2n, \mathbb{R})$. Действительно, продифференцируем выражение $g^T J g(t)$ по t , учитывая, что $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g^T J g(t)) &= \left(\frac{d}{dt} \exp(tA) \right)^T J \exp(tA) + (\exp(tA))^T J \frac{d}{dt} \exp(tA) = \\ &= (\exp(tA))^T (A^T J + J A) \exp(tA) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $g^T J g(t)$ — некоторая постоянная матрица. Но при $t = 0$ мы имеем $g(0) = E$, поэтому на самом деле $g^T J g(t) \equiv J$ при любом t . Следовательно, кривая $g(t)$ целиком лежит в группе $Sp(2n, \mathbb{R})$, а ее касательный вектор $\frac{dg}{dt}(0) = A$ — в алгебре Ли $sp(2n, \mathbb{R})$.

Отметим, что соотношение $A^T J + J A = 0$ в точности означает симметричность матрицы $J A$, и отображение $A \rightarrow J A$ задает линейный изоморфизм симплектической алгебры Ли $sp(2n, \mathbb{R})$ на пространство симметрических матриц.

Следовательно, размерность группы $Sp(2n, \mathbb{R})$ равна размерности пространства симметрических $(2n \times 2n)$ -матриц, т. е. $\dim Sp(2n, \mathbb{R}) = n(2n + 1)$. Первые два утверждения предложения 1.3 доказаны.

3) отождествим симплектическое пространство \mathbb{R}^{2n} с n -мерным комплексным пространством \mathbb{C}^n . Рассмотрим в \mathbb{C}^n эрмитово скалярное произведение $(a, b) = a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n$ и будем считать, что симплектическая структура в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ совпадает с мнимой частью эрмитова скалярного произведения:

$$\omega(a, b) = \operatorname{Im}(a, b).$$

С другой стороны, в этом же пространстве определена вещественная евклидова структура $\langle a, b \rangle = \operatorname{Re}(a, b)$. Оператор комплексной структуры I (т. е. оператор умножения на мнимую единицу) однозначно определяется соотношением $\langle Ia, b \rangle = \omega(a, b)$. В базисе $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ матрицы симплектической и комплексной структур совпадают.

Напомним, что преобразования, сохраняющие эрмитову структуру называются унитарными. Ясно, что группа унитарных преобразований $U(n)$ является подгруппой симплектической группы $Sp(2n, \mathbb{R})$ (после отождествления \mathbb{R}^{2n} с \mathbb{C}^n). Более того,

$$U(n) = Sp(2n, \mathbb{R}) \cap O(2n, \mathbb{R}),$$

где $O(2n, \mathbb{R})$ — группа преобразований, сохраняющих евклидову структуру $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Пусть $L \subset sp(2n, \mathbb{R})$ — подпространство, состоящее из симметрических матриц. Покажем, что любая симплектическая матрица $g \in Sp(2n, \mathbb{R})$ может быть однозначно представлена в виде $g = U \exp S$, где U — унитарная матрица, $S \in L$. И обратно, любая матрица вида $U \exp S$, где $U \in U(n)$, $S \in L$, является симплектической.

Рассмотрим для этого матрицу $g^T g$. Она симметрична и положительно определена. Поэтому существует единственная положительно определенная симметричная матрица R такая, что $R^2 = g^T g$. Для положительно определенной симметричной матрицы R в свою очередь существует единственная симметричная матрица S такая, что $R = \exp S$. Положим $U = gR^{-1}$ и покажем, что разложение $g = UR = U \exp S$ является искомым.

Во-первых, покажем, что U и R являются симплектическими матрицами. Поскольку g, g^T — симплектические матрицы, и $R^2 = g^T g$, то $R^2 = \exp(2S)$ — симплектическая матрица. Отсюда легко вывести, что все матрицы вида $\exp(tS)$ являются симплектическими.

Поскольку $U = gR^{-1} = g \exp(-S)$, то матрица U также симплектична. Кроме того, эта матрица ортогональна. Действительно, $U^T U = (R^T)^{-1} g^T g R^{-1} = R^{-1} R^2 R^{-1} = E$. Это означает, что соответствующее линейное преобразование сохраняет одновременно симплектическую структуру $\operatorname{Im}(\cdot, \cdot)$ и вещественную евклидову структуру $\operatorname{Re}(\cdot, \cdot)$. Другими словами, $U \in Sp(2n, \mathbb{R}) \cap O(n, \mathbb{R}) = U(n)$.

Наконец, симметрическая матрица S содержится в алгебре Ли $sp(2n, \mathbb{R})$, поскольку она является касательным вектором кривой $\exp(tS) \subset Sp(2n, \mathbb{R})$.

Разложение $g = U \exp S$ определяет диффеоморфизм группы $Sp(2n, \mathbb{R})$ и декартова произведения $U(n) \times L$, где L — подпространство в алгебре Ли $sp(2n, \mathbb{R})$,

состоящее из симметрических матриц. Непосредственный подсчет показывает, что $\dim L = n(n + 1)$.

4) и 5). Связность симплектической группы следует теперь из связности сомножителей $U(n)$ и L . Кроме того, $\pi_1(Sp(2n, \mathbb{R})) = \pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$. Предложение доказано. ■

1.2. Симплектические и пуассоновы многообразия

Определение 1.5. *Симплектической структурой* на гладком многообразии M называется дифференциальная 2-форма ω , удовлетворяющая двум условиям:

- 1) ω замкнута, т. е. $d\omega = 0$,
- 2) ω невырождена в каждой точке многообразия, т. е. в локальных координатах $\det \Omega(x) \neq 0$, где $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$ — матрица формы.

Многообразии, снабженное симплектической структурой, называется *симплектическим*.

На любом ли многообразии можно ввести симплектическую структуру? Ответ отрицательный. Многообразие обязано удовлетворять по крайней мере некоторым естественным ограничениям. Перечислим их.

Предложение 1.4. *Симплектическое многообразие четномерно.*

Доказательство.

Это сразу следует из того, что форма ω задает на каждом касательном пространстве структуру симплектического пространства. В силу невырожденности оно должно быть четномерным. ■

Предложение 1.5. *Симплектическое многообразие ориентируемо.*

Доказательство.

Многообразие ориентируемо, если в касательном пространстве к любой точке многообразия можно некоторым естественным образом задать ориентацию, непрерывно зависящую от точки. На симплектическом многообразии это сделать можно. Рассмотрим для этого дифференциальную форму $\tau = \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ раз}}$.

Ни в одной точке многообразия она не обращается в нуль. Рассмотрим произвольный базис e_1, e_2, \dots, e_{2n} в произвольном касательном пространстве к симплектическому многообразию и по определению будем считать его ориентацию положительной, если $\tau(e_1, e_2, \dots, e_{2n}) > 0$, и отрицательной в противном случае. Другими словами, многообразие ориентируемо, если на нем существует дифференциальная форма максимального ранга, нигде не обращающаяся в нуль. Здесь она существует, это $\tau = \omega^{(n)}$. При желании эту форму можно рассматривать как форму (ориентированного) объема на многообразии. Предложение доказано. ■

Предложение 1.6. *Если симплектическое многообразие компактно, то форма ω реализует ненулевой класс двумерных когомологий де Рама. В частности, $H^2(M, \mathbb{R}) \neq 0$.*

Доказательство.

Предположим противное. Пусть симплектическая структура ω точна и $\omega = d\alpha$. Рассмотрим тогда $(2n - 1)$ -форму

$$\varkappa = \alpha \wedge \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n-1 \text{ раз}}.$$

Легко видеть, что $d\varkappa = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ — форма объема. Но тогда, учитывая формулу Стокса, приходим к противоречию:

$$\text{vol}(M) = \int_M \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega = \int_{\partial M = \emptyset} \varkappa = 0.$$

■

Извлечем отсюда простейшие следствия. Все нечетномерные многообразия, лист Мебиуса, проективная плоскость, сфера S^n , где $n > 2$, симплектическими многообразиями не являются.

Простейшим примером симплектических многообразий являются двумерные ориентируемые поверхности (в компактном случае — сферы с ручками). В качестве симплектической структуры можно рассмотреть форму площади.

Другой пример — линейное симплектическое пространство \mathbb{R}^{2n} . Симплектическая структура — стандартная, не зависящая от точки

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Кроме этих простейших примеров приведем еще три класса симплектических многообразий: кокасательные расслоения, кэлеровы многообразия, орбиты коприсоединенного представления.

1. Кокасательные расслоения. Пусть M — гладкое многообразие, T^*M — его кокасательное расслоение. Построим сначала на T^*M некоторую 1-форму α , называемую формой действия. Напомним, что 1-форма на многообразии — это функция, которая каждому касательному вектору ставит в соответствие число. Пусть ξ — касательный вектор к кокасательному расслоению в точке (x, p) . Положим по определению

$$\alpha(\xi) = p(\pi_*(\xi)),$$

где $\pi_*: T(T^*M) \rightarrow TM$ — естественная проекция, порожденная проекцией $\pi: T^*M \rightarrow M$. Легко видеть, что в локальных координатах форма α имеет вид

$$\alpha = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

где q_1, \dots, q_n — локальные координаты на многообразии M , а p_1, \dots, p_n — соответствующие им координаты в кокасательном пространстве. В качестве симплектической структуры на T^*M мы берем форму $\omega = d\alpha$. Очевидно, что она удовлетворяет всем необходимым условиям.

2. Комплексное пространство \mathbb{C}^n и его комплексные подмногообразия, кэлеровы многообразия. Введем в \mathbb{C}^n стандартное эрмитово скалярное произведение $(z, w) = \sum z_i \bar{w}_i$. Легко видеть, что его мнимая часть является симплектической структурой на \mathbb{C}^n . Рассмотрим произвольное комплексное подмногообразие в \mathbb{C}^n , например, заданное набором полиномиальных уравнений. Ограничивая на это подмногообразии мнимую часть эрмитовой структуры, мы получаем на нем некоторую замкнутую дифференциальную 2-форму. Она автоматически оказывается невырожденной, поскольку ограничение эрмитовой структуры на комплексное подмногообразие снова, очевидно, является эрмитовой структурой, а мнимая часть эрмитовой структуры всегда невырождена.

Напомним, что кэлеровой структурой на комплексном многообразии называется эрмитова структура с замкнутой мнимой частью.

Легко видеть, что кэлерово многообразие и любое его комплексное подмногообразие являются симплектическими. В качестве симплектической формы ω при этом берется мнимая часть эрмитовой структуры.

Примерами кэлеровых многообразий являются комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ и любое его комплексное проективное подмногообразие.

В качестве примера определим симплектическую структуру на $\mathbb{C}P^n$.

Пусть $(z_0 : \dots : z_n)$ — однородные координаты в $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим одну из карт U_0 и определим обычным образом комплексные координаты:

$$w_1 = \frac{z_1}{z_0}, \dots, w_n = \frac{z_n}{z_0}, \quad (z_0 \neq 0).$$

Определим в этой карте дифференциальную 2-форму по следующей явной формуле:

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\sum dw_k \wedge d\bar{w}_k}{1 + \sum |w_k|^2} - \frac{(\sum \bar{w}_k dw_k) \wedge (\sum w_k d\bar{w}_k)}{(1 + \sum |w_k|^2)^2} \right).$$

Легко проверить, что в другой карте U_j эта форма запишется аналогичным образом. Тем самым мы получаем глобально определенную невырожденную и замкнутую форму на всем проективном пространстве.

3. Орбиты коприсоединенного представления. Рассмотрим алгебру Ли G произвольной группы Ли \mathfrak{G} . Рассмотрим двойственное пространство G^* и определим на нем коприсоединенное действие группы Ли. Для простоты мы будем считать, что G — матричная алгебра Ли, и присоединенное представление поэтому имеет вид сопряжения. Пусть $x, y, a \in G, A \in \mathfrak{G}, \xi \in G^*$. Напомним, что Ad_A и ad_a — линейные операторы на алгебре Ли, задаваемые обычными формулами

$$\text{Ad}_A x = A^{-1}x A, \quad \text{ad}_a x = [a, x] = ax - xa.$$

Операторы Ad^* и ad^* , действующие на коалгебре, двойственны к операторам Ad_A^{-1} и $-\text{ad}_a$ и определяются следующими тождествами

$$\begin{aligned} \text{Ad}_A^* \xi(y) &= \xi(\text{Ad}_A^{-1} y), \\ \text{ad}_a^* \xi(y) &= \xi(-\text{ad}_a y) = \xi([y, a]). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь произвольный элемент $\xi \in G^*$ и его орбиту относительно коприсоединенного действия группы Ли \mathfrak{G}

$$O(\xi) = \{\eta = \text{Ad}_A^* \xi \mid A \text{ пробегает группу } \mathfrak{G}\}.$$

Это гладкое многообразие. Определим на нем симплектическую структуру ω . Напомним, что дифференциальная 2-форма будет задана, если мы определим кососимметрическую билинейную форму в каждом касательном пространстве. Рассмотрим касательное пространство к орбите в точке ξ (эта точка ничем не отличается от остальных). Можно проверить, что это касательное пространство имеет вид:

$$T_\xi O(\xi) = \{\eta = \text{ad}_a^* \xi \mid a \text{ пробегает алгебру Ли } G\}.$$

Возьмем теперь два произвольных касательных вектора вида

$$\eta_1 = \text{ad}_{a_1}^* \xi \quad \text{и} \quad \eta_2 = \text{ad}_{a_2}^* \xi$$

и положим по определению

$$\omega(\eta_1, \eta_2) = \xi([a_1, a_2]).$$

Нужно, разумеется, прежде всего проверить корректность определения. Дело в том, что один и тот же касательный вектор η может быть различными способами представлен в виде $\text{ad}_a^* \xi$. Пусть, например,

$$\eta_1 = \text{ad}_{a_1}^* \xi = \text{ad}_{a_1+b}^* \xi.$$

Тогда имеем $\text{ad}_b^* \xi = \text{ad}_{a_1+b}^* \xi - \text{ad}_{a_1}^* \xi = 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \xi([a_1 + b, a_2]) &= \xi([b, a_2]) + \xi([a_1, a_2]) = \\ &= -\text{ad}_b^* \xi(a_2) + \xi([a_1, a_2]) = \xi([a_1, a_2]), \end{aligned}$$

что и означает корректность определения. Остается проверить невырожденность и замкнутость этой 2-формы. Невырожденность проверяется довольно просто. Предположим, что существует касательный вектор η_1 такой, что $\omega(\eta_1, \eta_2) = 0$ для любого касательного вектора η_2 . Это эквивалентно тому, что для любого элемента $a_2 \in G$ мы имеем

$$\omega(\eta_1, \eta_2) = \xi([a_1, a_2]) = -\text{ad}_{a_1}^* \xi(a_2) = -\eta_1(a_2) = 0.$$

Поскольку здесь a_2 произволен, то $\eta_1 = 0$, что и означает невырожденность. Замкнутость 2-формы ω следует из тождества Якоби в алгебре Ли G .

Изучим теперь локальные свойства симплектических многообразий.

Пусть H — гладкая функция на симплектическом многообразии (M, ω) .

Определим для этой функции вектор кососимметрического градиента $\text{sgrad } H$ из тождества

$$\omega(v, \text{sgrad } H) = v(H),$$

где v — произвольный касательный вектор, $v(H)$ — производная функции H вдоль v .

В локальных координатах x^1, \dots, x^{2n} получим следующее выражение:

$$(\operatorname{sgrad} H)^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

Здесь ω^{ij} — коэффициенты матрицы, обратной к матрице Ω . Мы пользуемся обычным соглашением, подразумевая суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам.

Определение 1.6. Векторные поля вида $\operatorname{sgrad} H$ называются *гамильтоновыми векторными полями*. Функция H называется *гамильтонианом векторного поля* $\operatorname{sgrad} H$.

Одним из важнейших свойств гамильтоновых векторных полей является то, что они сохраняют симплектическую структуру ω .

Предложение 1.7. Пусть g_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов (гамильтонов поток), отвечающая гамильтонову полю $v = \operatorname{sgrad} f$. Тогда диффеоморфизмы g_t сохраняют симплектическую форму ω , т. е. $g_t^*(\omega) = \omega$.

Доказательство.

Достаточно показать, что производная Ли от формы ω вдоль векторного поля v обращается в нуль. В силу замкнутости формы ω имеем

$$L_v(\omega) = d(v \lrcorner \omega),$$

где $v \lrcorner \omega$ означает 1-форму, полученную подстановкой поля v в форму ω , т. е. $v \lrcorner \omega(\xi) = \omega(v, \xi) = \omega(\operatorname{sgrad} f, \xi) = -df(\xi)$ для любого касательного вектора ξ . Таким образом,

$$L_v(\omega) = d(df) = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Из приведенного доказательства сразу вытекает и обратное утверждение. Если векторное поле v сохраняет симплектическую структуру ω , то форма $v \lrcorner \omega$ замкнута и, следовательно, по крайней мере локально существует функция f такая, что $v \lrcorner \omega = df$ или, что то же самое, $v = \operatorname{sgrad} f$. Векторные поля, обладающие этим свойством, называются локально гамильтоновыми.

Определение 1.7. На пространстве всех гладких функций на симплектическом многообразии M можно ввести операцию скобки Пуассона по следующему правилу. Пусть f, g — две гладкие функции. Положим по определению

$$\{f, g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = \operatorname{sgrad} f(g).$$

Легко видеть, что в локальных координатах скобка Пуассона приобретает следующий вид

$$\{f, g\} = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Предложение 1.8 (Свойства скобки Пуассона). Скобка Пуассона удовлетворяет следующим свойствам:

1) билинейность над полем вещественных чисел;

2) кососимметричность

$$\{f, g\} = -\{g, f\};$$

3) тождество Якоби

$$\{g, \{f, h\}\} + \{f, \{h, g\}\} + \{h, \{g, f\}\} = 0;$$

4) правило Лейбница

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\};$$

5) Оператор sgrad осуществляет гомоморфизм алгебры Ли гладких функций на многообразии в алгебру Ли векторных полей. Другими словами, имеет место тождество

$$\text{sgrad}\{f, g\} = [\text{sgrad } f, \text{sgrad } g].$$

В частности, гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру.

6) Функция f является первым интегралом гамильтонова векторного поля $v = \text{sgrad } H$ тогда и только тогда, когда $\{f, H\} = 0$. В частности, гамильтониан H всегда является интегралом поля $\text{sgrad } H$.

Доказательство.

Билинейность и кососимметричность скобки Пуассона очевидны. Докажем тождество Якоби. Напомним следующую хорошо известную формулу Картана:

$$d\omega(\xi, \eta, \zeta) = \xi\omega(\eta, \zeta) - \omega([\xi, \eta], \zeta) + (\text{цикл. перестановка}),$$

где ω — произвольная 2-форма, ξ, η и ζ — произвольные векторные поля. Применим ее в случае, когда ω — симплектическая структура, а $\xi = \text{sgrad } f, \eta = \text{sgrad } g$ и $\zeta = \text{sgrad } h$. В силу замкнутости симплектической структуры имеем:

$$\begin{aligned} \text{sgrad } f(\omega(\text{sgrad } g, \text{sgrad } h)) - \omega([\text{sgrad } f, \text{sgrad } g], \text{sgrad } h) + \\ + (\text{цикл. перестановка}) = 0. \end{aligned}$$

Перепишем это выражение иначе:

$$\text{sgrad } f(\{g, h\}) - [\text{sgrad } f, \text{sgrad } g](h) + (\text{цикл. перестановка}) = 0.$$

Переписывая еще раз, получаем тождество Якоби:

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} - \text{sgrad } f(\text{sgrad } g(h)) + \text{sgrad } g(\text{sgrad } f(h)) + \\ + (\text{цикл. перестановка}) = \{g, \{f, h\}\} + (\text{цикл. перестановка}) = 0. \end{aligned}$$

Из приведенного доказательства вытекает следующее полезное наблюдение. Тождество Якоби для скобки Пуассона на самом деле эквивалентно замкнутости формы ω .

Правило Лейбница легко вытекает из аналогичного правила для косоградиента:

$$\text{sgrad}(fg) = f \text{sgrad } g + g \text{sgrad } f.$$

Докажем свойство 5. Дифференцируя произвольную функцию h вдоль векторного поля $\text{sgrad}\{f, g\}$, имеем

$$\begin{aligned} \text{sgrad}\{f, g\}(h) &= \{\{f, g\}, h\} = (\text{в силу тождества Якоби}) = \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \\ &= \text{sgrad } f(\text{sgrad } g(h)) - \text{sgrad } g(\text{sgrad } f(h)) = \\ &= [\text{sgrad } f, \text{sgrad } g](h), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 6, очевидно, следует из определения скобки Пуассона. ■

Иногда вместо симплектической структуры на многообразии при построении гамильтоновой механики в качестве исходной структуры берут скобку Пуассона. При этом скобка Пуассона не предполагается обязательно невырожденной.

Определение 1.8. Гладкое многообразие называется *пуассоновым*, если на нем задана скобка Пуассона, т. е. операция $\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, задающая структуру алгебры Ли на пространстве гладких функций и удовлетворяющая правилу Лейбница.

Легко проверяется, что задание скобки Пуассона на многообразии эквивалентно заданию кососимметрического тензорного поля $A^{ij}(x)$, удовлетворяющего соотношению

$$A^{j\alpha} \frac{\partial A^{ki}}{\partial x^\alpha} + A^{i\alpha} \frac{\partial A^{jk}}{\partial x^\alpha} + A^{k\alpha} \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^\alpha} = 0.$$

При этом связь между скобкой Пуассона и тензорным полем A^{ij} , называемым пуассоновой структурой, проста и естественна:

$$\{f, g\} = A^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

а соотношение на компоненты тензора A^{ij} в точности эквивалентно тождеству Якоби.

Если скобка Пуассона невырождена (т. е. $\det(A^{ij}) \neq 0$ всюду на M), то пуассоново многообразие является симплектическим. Симплектическая структура имеет в этом случае вид $\omega = A_{ij} dx^i \wedge dx^j$, где A_{ij} — компоненты матрицы, обратной к (A^{ij}) .

В качестве примера вырожденной скобки Пуассона укажем скобку Пуассона-Ли на двойственном пространстве G^* к произвольной алгебре Ли G . Она задается формулой:

$$\{f, g\} = c_{jk}^i x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

Здесь c_{jk}^i — структурные константы алгебры Ли G в некотором базисе e_1, \dots, e_n , а x_1, \dots, x_s — координаты на G^* в сопряженном базисе e^1, \dots, e^n .

Эта скобка становится невырожденной на орбитах коприсоединенного представления, и задаваемая ею на орбитах симплектическая структура совпадает с описанной выше.

1.3. Теорема Дарбу

Теорема 1.1 (Теорема Дарбу). *У каждой точки на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) существует открытая окрестность с регулярными локальными координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, в которых симплектическая форма ω принимает канонический вид $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие записи формы в каноническом виде $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ можно эквивалентным образом переписать на языке скобок Пуассона:

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{для всех } 1 \leq i, j \leq n.$$

Доказательство.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} в окрестности некоторой точки заданы n независимых попарно коммутирующих функций p_1, \dots, p_n . Тогда существуют n независимых функций q_1, \dots, q_n , дополняющих набор p_1, \dots, p_n до канонической системы координат, т. е. таких, что $\{p_i, p_j\} = 0, \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \{q_i, q_j\} = 0$ для всех $1 \leq i, j \leq n$.*

Доказательство.

1) Рассмотрим линейно независимые векторные поля $v_i = \text{sgrad } p_i$, отвечающие функциям p_1, \dots, p_n . Так как

$$[\text{sgrad } p_i, \text{sgrad } p_j] = \text{sgrad } \{p_i, p_j\} = 0,$$

то векторные поля v_1, \dots, v_n коммутируют.

2) Для коммутирующих векторных полей v_i по теореме Фробениуса (см., например, [187]) найдется такая локальная регулярная система координат $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, что $v_i = \text{sgrad } p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n$.

3) Запишем p_i как функции от новых координат $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, т. е. представим их в виде $p_i = p_i(x, y)$. Мы утверждаем, что в действительности $p_i = p_i(y)$, т. е. они не зависят от x . В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p_i) = \text{sgrad } p_j(p_i) = \{p_j, p_i\} = 0.$$

4) Вместо набора функций (x, y) рассмотрим теперь в качестве локальных координат набор (x, p) . Это можно сделать, поскольку функции $p_i = p_i(y)$ по условию независимы.

5) Докажем, что попарные скобки Пуассона функций x и p имеют вид: $\{x_i, x_j\} = \lambda_{ij}(p)$, $\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}$, $\{p_i, p_j\} = 0$. В самом деле,

$$\{p_i, x_j\} = \text{sgrad } p_i(x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}.$$

Далее, скобки Пуассона $\{x_i, x_j\}$ представляются как некоторые функции $\lambda_{ij}(x, p)$. Докажем, что они не зависят от x . В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \{x_i, x_j\} &= \text{sgrad } p_k \{x_i, x_j\} = \{p_k, \{x_i, x_j\}\} = \\ &= \{x_j, \{x_i, p_k\}\} + \{x_i, \{p_k, x_j\}\} = 0, \end{aligned}$$

так как $\{x_s, p_t\} = \delta_{st} = \text{const}$. Итак, $\{x_i, x_j\} = \lambda_{ij}(p)$.

6) Подправим теперь функции x , чтобы получить каноническую систему координат. Для этого будем искать координаты q в виде $q_j = x_j - f_j(p)$. Функции f_j должны быть таковы, чтобы выполнялись следующие соотношения: $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$, $\{q_i, q_j\} = 0$. Имеем

$$\{p_i, q_j\} = \{p_i, x_j - f_j(p)\} = \{p_i, x_j\} - \{p_i, f_j(p)\} = \delta_{ij} + 0 = \delta_{ij}.$$

Итак, соотношение $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$ выполнено автоматически.

7) Далее:

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= \{x_i - f_i(p), x_j - f_j(p)\} = \\ &= \{x_i, x_j\} - \{x_i, f_j(p)\} + \{x_j, f_i(p)\} = \lambda_{ij} - \frac{\partial f_i}{\partial p_j} + \frac{\partial f_j}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь тем, что

$$\{x_i, f_j(p)\} = \sum_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial p_k}\right) \{x_i, p_k\} = - \sum_k \delta_{ik} \frac{\partial f_j}{\partial p_k} = - \frac{\partial f_j}{\partial p_i}.$$

Это следует из общего равенства:

$$\{f, g(s_1, \dots, s_m)\} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial s_k}\right) \{f, s_k\}.$$

Таким образом, для выполнения условия $\{q_i, q_j\} = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_{ij} - \frac{\partial f_i}{\partial p_j} + \frac{\partial f_j}{\partial p_i} = 0$. Для того, чтобы такая система уравнений была разрешима относительно неизвестных функций f_i , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия совместности этой системы:

$$\frac{\partial \lambda_{\alpha\beta}}{\partial p_\gamma} + \frac{\partial \lambda_{\gamma\alpha}}{\partial p_\beta} + \frac{\partial \lambda_{\beta\gamma}}{\partial p_\alpha} = 0.$$

Это последнее тождество действительно выполнено. В самом деле,

$$\{\{x_\alpha, x_\beta\}, x_\gamma\} = \{\lambda_{\alpha\beta}, x_\gamma\} = \frac{\partial \lambda_{\alpha\beta}}{\partial p_\gamma},$$

поэтому условие совместности эквивалентно тождеству Якоби:

$$\{\{x_\alpha, x_\beta\}, x_\gamma\} + \{\{x_\gamma, x_\alpha\}, x_\beta\} + \{\{x_\beta, x_\gamma\}, x_\alpha\} = 0.$$

Итак, построенные выше функции q_i удовлетворяют всем требованиям леммы. Лемма доказана. ■

Возвращаемся к доказательству теоремы Дарбу. В силу леммы 1.1 нам остается показать, что в окрестности любой точки на симплектическом многообразии всегда существуют независимые функции p_1, \dots, p_n , находящиеся в инволюции. В действительности, справедливо даже более сильное индуктивное утверждение.

Лемма 1.2. *Если имеется k независимых функций p_1, \dots, p_k , находящихся в инволюции, где $k < n$, то всегда существует независимая от них функция p_{k+1} такая, что $\{p_{k+1}, p_i\} = 0$ при $1 \leq i \leq k$.*

Доказательство.

Следуя доказательству предыдущей леммы, получаем, что для функций p_1, \dots, p_k всегда существует локальная регулярная система координат $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{2n-k}$ такая, что $\text{sgrad } p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq k$. Как и выше, отсюда следует, что

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \text{sgrad } p_i(p_j) = \{p_i, p_j\} = 0,$$

т. е. $p_i = p_i(y_1, \dots, y_{2n-k})$ при $1 \leq i \leq k$.

Так как $k < 2n - k$, то количество функций y больше количества функций p , зависящих от y . Следовательно, существует новая функция $p_{k+1}(y)$, независимая с функциями $p_1(y), \dots, p_k(y)$. Далее имеем: $\{p_{k+1}, p_i\} = -\frac{\partial p_{k+1}}{\partial x_i} = 0$, т. е. функция p_{k+1} находится в инволюции со всеми p_1, \dots, p_k . Лемма доказана. ■

Доказательство теоремы Дарбу завершено. ■

Дадим также другое, более формальное доказательство теоремы Дарбу.

Доказательство.

Рассмотрим симплектическую форму ω в некоторой фиксированной точке $P \in M^{2n}$. Линейной заменой координат мы всегда можем привести в точке P матрицу Ω формы к каноническому виду

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Такое приведение возможно, вообще говоря, только в одной точке P . Рассмотрим теперь новую форму ω_0 с постоянной матрицей Ω_0 (в той же окрестности точки P). Наша цель — найти такой диффеоморфизм окрестности $U(P)$,

чтобы он перевел форму ω в форму ω_0 . Ясно, что новые координаты, определяемые таким диффеоморфизмом, и будут каноническими координатами Дарбу.

Найдем семейство диффеоморфизмов φ_t таких, что

$$\varphi_t^* \omega = \omega_t = (1 - t)\omega + t\omega_0.$$

При $t = 1$ мы получим искомый диффеоморфизм φ_1 , переводящий форму ω в форму ω_0 . Чтобы найти семейство φ_t , продифференцируем равенство по t и рассмотрим получившееся дифференциальное уравнение

$$L_{\xi_t} \omega_t = \omega_0 - \omega,$$

где L_{ξ_t} — производная Ли вдоль векторного поля $\xi_t = \frac{d\varphi_t}{dt}$. В силу замкнутости формы ω_t левую часть равенства можно переписать в виде

$$L_{\xi_t} \omega_t = d(\xi_t \lrcorner \omega_t),$$

где $\xi_t \lrcorner \omega_t$ обозначает результат подстановки поля ξ_t в форму ω_t , т. е. дифференциальную 1-форму, определяемую тождеством $\xi_t \lrcorner \omega_t(v) = \omega_t(\xi_t, v)$, где v — произвольный касательный вектор. С другой стороны, $\omega_0 - \omega$ является замкнутой формой, поэтому локально (в некоторой окрестности точки P) она точна и может быть представлена в виде $\omega_0 - \omega = d\alpha$. При этом без ограничения общности можно считать, что 1-форма α равна нулю в точке P . Теперь найдем векторное поле ξ_t из соотношения $\xi_t \lrcorner \omega_t = \alpha$. В силу невырожденности формы ω_t это всегда можно сделать и притом однозначно. В итоге мы получим семейство гладких векторных полей ξ_t , $t \in [0, 1]$. При этом $\xi_t(P) = 0$ для любого t . Рассмотрим теперь семейство диффеоморфизмов φ_t , удовлетворяющих дифференциальному уравнению $\xi_t = \frac{d\varphi_t}{dt}$ с начальным условием $\varphi_0 = \text{id}$. Тогда по построению $\varphi_1^* \omega = \omega_0$, что и требовалось. Теорема Дарбу доказана. ■

1.4. Вложения и погружения симплектических многообразий. Симплектические и лагранжевы подмногообразия

Определение 1.9. Пусть (M, ω) и (M', ω') — два симплектических многообразия. Отображение $f: M \rightarrow M'$ называется *симплектическим*, если $f^* \omega' = \omega$. Другими словами, дифференциал отображения f в каждой точке должен быть симплектическим отображением касательных пространств, т. е. $\omega(\xi, \eta) = \omega'(df(\xi), df(\eta))$ для любых касательных векторов ξ, η к M . Симплектический диффеоморфизм называется *симплектоморфизмом*.

Напомним, что гладкое отображение f гладких многообразий называется погружением, если его дифференциал df невырожден (т. е. имеет нулевое ядро).

Лемма 1.3. Любое симплектическое отображение $f: M \rightarrow M'$ симплектических многообразий M и M' является погружением.

Доказательство.

Допустим противное. Если для некоторого ненулевого касательного вектора a имеем $df(a) = 0$, то

$$\omega(a, b) = f^* \omega'(a, b) = \omega'(df(a), df(b)) = 0$$

для любого касательного вектора b , что противоречит невырожденности формы ω . Лемма доказана. ■

В каком случае между двумя многообразиями (M, ω) и (M', ω') существует симплектическое отображение? Когда, например, симплектическое многообразие допускает симплектическое вложение или погружение в $(\mathbb{R}^{2n}, dp \wedge dq)$?

Рассмотрим сначала эту проблему локально и в том случае, когда размерности многообразий M и M' равны. Здесь ответ дает теорема Дарбу, согласно которой для любой точки x из M и для любой точки y из M' всегда существует симплектоморфизм некоторой окрестности $U(x)$ точки x на некоторую окрестность $V(y)$ точки y . Другими словами, локально любые симплектические многообразия одинаковой размерности симплектоморфны.

С другой стороны, следующее утверждение показывает существование глобальных препятствий для симплектических вложений.

Предложение 1.9. *Компактное замкнутое симплектическое многообразие M^{2n} нельзя симплектически отобразить ни в какое стандартное симплектическое пространство \mathbb{R}^{2N} .*

Доказательство.

Допустим противное. Пусть существует гладкое симплектическое отображение $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$. Тогда $\omega = f^* \Omega$. Форма Ω на \mathbb{R}^{2N} является точной, т. е. имеет вид $\Omega = d\tau$ для 1-формы $\tau = \sum p_i dq_i$. Следовательно, форма ω на M также точна, так как $\omega = f^* d\tau = d(f^* \tau)$. Полученное противоречие с предложением 1.6 доказывает предложение 1.9. ■

Определение 1.10. Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие. Гладкое подмногообразие $N \subset M$ называется

- 1) *симплектическим*, если ограничение формы ω на N невырождено;
- 2) *лагранжевым*, если $\dim N = n$ и ограничение формы ω на N тождественно равно нулю.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим каноническую систему координат $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ и произвольную гладкую функцию $S = S(q_1, \dots, q_n)$. Тогда подмногообразие N , заданное как график

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1}, \\ &\dots \\ p_n &= \frac{\partial S}{\partial q_n}, \end{aligned}$$

является лагранжевым. Верно и обратное: если лагранжево подмногообразие N можно в канонических координатах представить как график $p_i = P_i(q_1, \dots, q_n)$, то (по крайней мере локально) найдется функция $S = S(q_1, \dots, q_n)$ такая, что $P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Еще одним примером лагранжевых подмногообразий являются торы Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем, о которых речь идет в следующем параграфе.

1.5. Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля

Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие и $v = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система с гладким гамильтонианом H .

Определение 1.11. Гамильтонова система v называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n таких, что:

- 1) f_1, \dots, f_n — первые интегралы v ,
- 2) они функционально независимы на M , то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,
- 3) $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i и j ,
- 4) векторные поля $\text{sgrad } f_i$ полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Определение 1.12. *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n .

Поскольку f_1, \dots, f_n сохраняются потоком v , то каждый слой слоения Лиувилля — инвариантная поверхность.

Слоение Лиувилля состоит из регулярных слоев (которые заполняют почти все M) и особых слоев (заполняющих множество меры нуль).

Одна из целей нашей книги — описание топологии слоений Лиувилля. Формулируемая ниже теорема Лиувилля описывает их структуру в окрестности регулярного слоя.

Рассмотрим совместную регулярную поверхность уровня функций f_1, \dots, f_n :

$$T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ .

Теорема 1.2 (Теорема Лиувилля).

Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ и T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов f_1, \dots, f_n . Тогда:

- 1) T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$.
- 2) Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n . Этот тор называется тором Лиувилля.
- 3) Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т. е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .
- 4) В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:
 - а) s_1, \dots, s_n — координаты на диске D^n , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n , $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
 - б) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.
 - в) Переменные действия s_i являются функциями от интегралов f_1, \dots, f_n .
 - г) В переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , т. е. гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток v задает условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Доказательство.

1) Поскольку функции f_1, \dots, f_n попарно коммутируют, они являются первыми интегралами не только потока $v = \text{sgrad } H$, но и каждого из потоков $\text{sgrad } f_i$. Следовательно, их совместная поверхность уровня T_ξ инвариантна относительно этих потоков и, более того, векторные поля $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ в силу своей независимости образуют базис в каждой касательной плоскости к T_ξ . Лагранжевость подмногообразия T_ξ следует теперь из формулы $\omega(\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j) = \{f_i, f_j\} = 0$.

2) Потоки $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ попарно коммутируют, поскольку

$$\{\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j\} = \text{sgrad}\{f_i, f_j\} = 0,$$

и являются полными. Это позволяет определить на многообразии M^{2n} действие Φ абелевой группы \mathbb{R}^n , порожденное сдвигами вдоль потоков $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$. Это действие можно задать явной формулой. Пусть g_i^t — диффеоморфизм, сдвигающий все точки многообразия вдоль интегральных траекторий поля $\text{sgrad } f_i$ на время t . Пусть (t_1, \dots, t_n) — точка \mathbb{R}^n . Тогда

$$\Phi(t_1, \dots, t_n) = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \dots g_n^{t_n}.$$

Лемма 1.4. Если подмногообразии T_ξ связно, то оно является орбитой действия Φ группы \mathbb{R}^n .

Доказательство.

Рассмотрим образ группы \mathbb{R}^n в M при следующем отображении

$$A_x: (t_1, \dots, t_n) \rightarrow \Phi(t_1, \dots, t_n)(x),$$

где x — некоторая фиксированная точка из T_ξ . Поскольку поля $\text{sgrad } f_i$ независимы, то это отображение является погружением, т. е. локальным диффеоморфизмом на образ. Итак, образ \mathbb{R}^n (то есть орбита точки x) открыт в T_ξ . Если допустить, что подмногообразии T_ξ не является орбитой группы \mathbb{R}^n , то оно является объединением по крайней мере двух орбит. Но так как каждая из них открыта, то T_ξ оказывается несвязным, что противоречит условию. Лемма доказана. ■

Лемма 1.5. Орбита действия группы \mathbb{R}^n , имеющая размерность n , является фактор-пространством \mathbb{R}^n по некоторой решетке \mathbb{Z}^k . Если орбита компактна, то $k = n$ и орбита является n -мерным тором.

Доказательство.

Каждая орбита $O(x)$ гладкого действия группы является фактор-пространством (= однородным пространством) группы по стационарной подгруппе H_x точки x . Ясно, что подгруппа H_x дискретна, поскольку отображение A_x локально является диффеоморфизмом. Напомним, что дискретная подгруппа не имеет точек накопления. В частности, внутри любого ограниченного множества всегда находится лишь конечное число элементов этой подгруппы. Утверждается далее, что H_x является решеткой \mathbb{Z}^k . Доказательство проведем индукцией по n .

Пусть $n = 1$. Возьмем на прямой ненулевой элемент e_1 из H_x , ближайший к нулю. Тогда все остальные элементы из H_x ему кратны. В самом деле, если элемент e не кратен e_1 , то для некоторого k имеем:

$$ke_1 < e < (k + 1)e_1.$$

Но тогда элемент $e - ke_1$, ближе к нулю, чем e_1 . Получили противоречие.

Пусть $n = 2$. В качестве e_1 выберем ненулевой элемент, ближайший к нулю на плоскости \mathbb{R}^2 и рассмотрим порожденную им прямую $l(e_1)$ (рис. 1.1). Все элементы из H_x , лежащие на ней, кратны e_1 . Далее возникают две возможности. Может оказаться, что все элементы из H_x уже лежат на прямой $l(e_1)$. Тогда доказательство завершается. Вторая возможность: существуют элементы группы H_x , не лежащие на $l(e_1)$. Тогда в качестве e_2 возьмем ненулевой элемент, ближайший к прямой $l(e_1)$. Легко видеть, что такой элемент существует. Утверждается, что все элементы группы H_x , оказавшиеся в плоскости, натянутой на e_1 и e_2 , являются их линейными комбинациями с

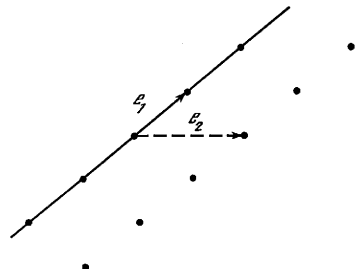


Рис. 1.1

целыми коэффициентами. Допустим противное и пусть h — элемент из H_x , не разлагающийся по e_1 и e_2 с целыми коэффициентами. Тогда разобьем плоскость на параллелограммы, порожденные e_1 и e_2 (рис. 1.2). Элемент h оказывается в одном из них, причем не находится в вершине параллелограмма. Ясно, что сдвинув h на подходящую целочисленную комбинацию e_1 и e_2 , мы обнаружим элемент h' , более близкий к прямой $l(e_1)$, чем e_2 . Получили противоречие.

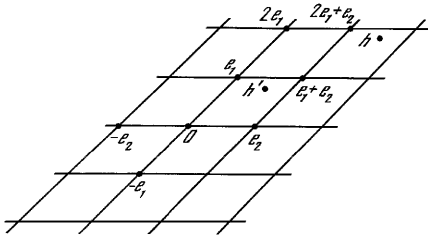


Рис. 1.2

Продолжая это рассуждение далее по индукции, мы и получаем, что существует базис e_1, \dots, e_k в подгруппе H_x такой, что каждый ее элемент является однозначной линейной комбинацией векторов базиса с целыми коэффициентами.

Если $k < n$, то фактор-пространство $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^k$ является цилиндром, т. е. прямым произведением $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, где T^k — k -мерный тор. В частности, только при $n = k$ орбита компактна, и тогда она диффеоморфна тору T^n .

Лемма доказана. ■

Следовательно, доказан пункт 2 теоремы 1.2.

3) Докажем, что окрестность U тора T_ξ является прямым произведением тора T^n на диск D^n .

Этот факт следует из следующей более общей и хорошо известной теоремы. Пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий и y из N — регулярное значение для f , то есть во всех точках прообраза $f^{-1}(y)$ ранг df равен размерности N . В частности, $\dim M \geq \dim N$. Пусть, кроме того, множество $f^{-1}(y)$ компактно. Тогда существует окрестность D точки y в N такая, что ее полный прообраз $f^{-1}(D)$ диффеоморфен прямому произведению $D \times f^{-1}(y)$. Причем структура прямого произведения согласована с отображением f в том смысле, что отображение f на $D \times f^{-1}(y)$ совпадает с естественной проекцией $D \times f^{-1}(y)$ на D . Отсюда следует, в частности, что каждое множество вида $f^{-1}(z)$ при $z \in D$ диффеоморфно $f^{-1}(y)$.

Эта теорема фактически является переформулировкой известной теоремы о неявных функциях.

4) Построение переменных действие-угол. Рассмотрим окрестность $U(T_\xi) = T_\xi \times D^n$ тора Лиувилля T_ξ . Выберем на каждом из торов Лиувилля T некоторую точку x , гладко зависящую от тора. Рассмотрим тор T как фактор-пространство \mathbb{R}^n / H_x и фиксируем в решетке H_x базис e_1, \dots, e_n . Отметим, что этот базис будет гладко зависеть от x . Действительно, координаты базисного вектора $e_i = (t_1, \dots, t_n)$ являются решениями уравнения $\Phi(t_1, \dots, t_n)x = x$, где x выступает в качестве параметра. По теореме о неявной функции решения этого уравнения гладко зависят от x . Отметим, что условия этой теоремы выполнены, поскольку $\frac{\partial}{\partial t_j} \Phi(t)x = \text{sgrad } f_j(\Phi(t)x)$, а векторные поля $\text{sgrad } f_j$ линейно независимы.

Определим теперь угловые координаты на торе T_ξ следующим образом. Если $y = \Phi(a)x$, где $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in \mathbb{R}^{2n}$, то $\psi_1(y) = 2\pi a_1 \bmod 2\pi, \dots, \psi_n(y) = 2\pi a_n \bmod 2\pi$.

Такая система координат на фиксированном торе обладает следующим очевидным свойством: векторные поля $\frac{\partial}{\partial \psi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \psi_n}$ и $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ связаны между собой линейной заменой с постоянными коэффициентами, т. е. $\frac{\partial}{\partial \psi_i} = \sum c_{ik} \text{sgrad } f_k$.

Запишем снова форму ω в координатах $(f_1, \dots, f_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$

$$\omega = \sum_{i,j} \tilde{c}_{ij} df_i \wedge d\psi_j + \sum_{i,j} b_{ij} df_i \wedge df_j.$$

В этом разложении члены вида $a_{ij} d\psi_i \wedge d\psi_j$ отсутствуют, поскольку торы Лиувилля являются лагранжевыми. Мы утверждаем, что коэффициенты \tilde{c}_{ij} симплектической формы в точности совпадают с коэффициентами c_{ij} и, в частности, не зависят от ψ_1, \dots, ψ_n .

Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ij} &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial f_i}, \frac{\partial}{\partial \psi_j} \right) = \omega \left(\frac{\partial}{\partial f_i}, \sum c_{kj} \text{sgrad } f_k \right) = \\ &= \sum c_{kj} \omega \left(\frac{\partial}{\partial f_i}, \text{sgrad } f_k \right) = \sum c_{kj} \frac{\partial f_k}{\partial f_j} = c_{ij} = c_{ij}(f_1, \dots, f_n). \end{aligned}$$

Покажем, что функции b_{ij} тоже не зависят от (ψ_1, \dots, ψ_n) . Из замкнутости формы ω вытекает равенство

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial \psi_k} = \frac{\partial c_{kj}}{\partial f_i} - \frac{\partial c_{ki}}{\partial f_j}.$$

Функция b_{ij} является 2π -периодической по ψ_k (как функция на торе), но, как мы видим, ее производная $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \psi_k}$ не зависит от ψ_k . Отсюда следует, что и сама функция b_{ij} не зависит от ψ_k .

Из этого обстоятельства вытекает еще одно важное следствие. Запишем форму ω следующим образом $\omega = (\sum c_{ij} df_j) \wedge d\psi_i + \sum b_{ij} df_i \wedge df_j = \sum \omega_i \wedge d\psi_i + \beta$, где $\omega_i = \sum c_{ij} df_j$ и $\beta = \sum b_{ij} df_i \wedge df_j$ — формы на диске D^n (не зависящие от (ψ_1, \dots, ψ_n)). Из замкнутости формы ω сразу следует, что формы ω_i и β тоже являются замкнутыми.

Лемма 1.6. *В окрестности $U(T_\xi)$ форма ω является точной, т. е. существует 1-форма α такая, что $d\alpha = \omega$.*

Доказательство.

Эта лемма является следствием следующего общего утверждения. Пусть Y — подмногообразие в X , причем существует отображение $f: X \rightarrow Y \subset X$, гомотопное тождественному отображению $\text{id}: X \rightarrow X$. Тогда замкнутая дифференциальная форма \varkappa точна на X тогда и только тогда, когда точна форма $\varkappa|_Y$. В

нашем случае, когда X — это окрестность тора Лиувилля, а Y — это сам тор Лиувилля, выполнено даже более сильное условие: $\omega|_{T\xi} = 0$, поскольку тор $T\xi$ лагранжев. Поэтому ω точна. ■

То же самое, впрочем, можно доказать явным вычислением. Поскольку формы ω_i и β являются замкнутыми формами на диске, то они точны и поэтому существуют функции s_i и 1-форма \varkappa на диске D^n такие, что $ds_i = \omega_i$ и $d\varkappa = \beta$. Положим $\alpha = \sum s_i d\psi_i + \varkappa$. Тогда $d\alpha = \sum ds_i \wedge d\psi_i + d\varkappa = \omega_i \wedge d\psi_i + \beta = \omega$.

Рассмотрим функции $s_1 = s_1(f_1, \dots, f_n), \dots, s_n = s_n(f_1, \dots, f_n)$ и покажем, что они независимы. Действительно, из формулы $\omega = \sum ds_i \wedge d\psi_i + \beta$ следует, что матрица Ω симплектической формы ω имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & c_{ij} \\ \dots & \dots & \dots \\ -c_{ij} & \vdots & b_{ij} \end{pmatrix}.$$

причем $c_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial f_j}$. Поэтому $\det \Omega = (\det C)^2$, и $\det C \neq 0$, где C — матрица Якоби замены $s_1 = s_1(f_1, \dots, f_n), \dots, s_n = s_n(f_1, \dots, f_n)$. Таким образом, мы можем теперь рассмотреть новую систему независимых координат $(s_1, \dots, s_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$.

Представим форму \varkappa в виде $\varkappa = g_i ds_i$ и сделаем еще одну замену $\varphi_i = \psi_i - g_i(s_1, \dots, s_n)$. Геометрически это означает, что на торах Лиувилля мы меняем начальные точки отсчета угловых координат. Линии уровня и даже базисные векторные поля угловых координат при этом не меняются.

Покажем, наконец, что система построенных переменных действие-угол $(s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ является канонической. Имеем

$$\begin{aligned} \sum ds_i \wedge d\varphi_i &= \sum ds_i \wedge d(\psi_i - g_i(s_1, \dots, s_n)) = \\ &= \sum ds_i \wedge d\psi_i + \sum dg_i(s_1, \dots, s_n) \wedge ds_i = \\ &= \sum ds_i \wedge d\psi_i + d\varkappa = \sum ds_i \wedge d\psi_i + \beta = \omega. \end{aligned}$$

Переменные действие-угол построены.

Осталось доказать, что поток v выпрямляется на торе Лиувилля в координатах $(s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Действительно, $\text{sgrad } s_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$, поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} = \text{sgrad } s_i(H) = \{s_i(f_1, \dots, f_n), H\} = 0,$$

т. е. H — это функция только от s_1, \dots, s_n . Следовательно,

$$v = \text{sgrad } H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial s_i} \text{sgrad } s_i = \sum_i \frac{\partial H}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_i},$$

причем коэффициенты $\frac{\partial H}{\partial s_i}$ зависят только от переменных действия s_1, \dots, s_n , т. е. постоянны на торах Лиувилля.

Теорема Лиувилля доказана. ■

Комментарий. Отметим, что переменные действия s_1, \dots, s_n могут быть заданы явной формулой. Пусть $U(T_\xi) = D^n \times T^n$ — окрестность лиувиллева тора. Фиксируя некоторый базис e_1, \dots, e_n в решетке, отвечающей тору T_ξ , мы тем самым однозначно определяем набор базисных циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в фундаментальной группе $\pi_1(T_\xi^n) = \mathbb{Z}^n$. По непрерывности эти циклы могут быть распространены на все лиувиллевы торы из рассматриваемой окрестности.

Сопоставим каждому тору Лиувилля набор вещественных чисел s_1, \dots, s_n по следующей формуле

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \alpha,$$

где α — дифференциальная 1-форма в окрестности $U(T_\xi)$ такая, что $d\alpha = \omega$ (обычно α называют формой действия). В результате в $U(T_\xi)$ возникает набор гладких функций

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1(f_1, \dots, f_n), \\ &\dots \\ s_n &= s_n(f_1, \dots, f_n), \end{aligned}$$

которые совпадают (с точностью до константы) с переменными действия, построенными при доказательстве теоремы Лиувилля. Чтобы в этом убедиться достаточно рассмотреть в качестве α форму $\sum s_i d\varphi_i$ (см. доказательство теоремы).

Сделаем несколько общих замечаний о переменных действия, которые на самом деле естественно возникают в более общей ситуации, когда мы рассматриваем произвольное гладкое семейство лагранжевых подмногообразий.

Итак, пусть $\{L_f\}$ — гладкое семейство компактных лагранжевых подмногообразий в симплектическом многообразии M^{2n} , f — параметр этого семейства, принимающий значения в некоторой односвязной области $C \subset \mathbb{R}^k$ (или, для простоты, в диске $C = D^k$). В случае интегрируемой гамильтоновой системы речь идет о лиувиллевых торах, параметризованных значениями первых интегралов f_1, \dots, f_n .

Пусть $[\gamma]$ — элемент фундаментальной группы $\pi_1(L_f)$. Поскольку параметр этого семейства пробегает односвязную область, то мы можем считать, что этот элемент естественным образом фиксирован в фундаментальной группе каждого лагранжева подмногообразия L_f , $f \in C$.

Предположим сначала, что форма ω точна и выберем α такую, что $d\alpha = \omega$. Тогда каждому лагранжеву подмногообразию L_f можно сопоставить число $s(f)$ (так называемое действие, отвечающее фиксированному элементу $[\gamma] \in \pi_1(L_f)$) по формуле

$$s_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_f} \alpha,$$

где интегрирование ведется по некоторому гладкому циклу γ_f , лежащему на L_f и реализующему $[\gamma]$. В результате на пространстве параметров (т.е. на рассматриваемом множестве лагранжевых подмногообразий) возникает функция $s: C \rightarrow \mathbb{R}$, называемая действием (отвечающим $[\gamma]$).

Если симплектическая структура точной не является, то аналогичная конструкция может быть получена так. Рассмотрим семейство подмногообразий $\{L_f\}$ как семейство вложений, т.е. как отображение $F: L \times C \rightarrow M^{2n}$, где $F|_{L \times \{f\}}: L \times \{f\} \rightarrow M^{2n}$ — вложение, образом которого является L_f . Тогда, несмотря на то, что форма ω не точна на M^{2n} , форма $F^*\omega$ является точной на $L \times C$ и мы можем перенести конструкцию на $L \times C$, снова положив

$$s_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_f} \alpha,$$

где α — 1-форма на $L \times C$ такая, что $d\alpha = F^*\omega$, а γ_f — цикл на $L \times \{f\}$.

Отметим некоторые общие свойства действия $s_\gamma(f)$.

Во-первых, значение действия на лагранжевом подмногообразии не зависит от выбора цикла γ_f в его гомотопическом классе. Это сразу следует из того, что форма α , ограниченная на лагранжево подмногообразии является замкнутой, поскольку $d(\alpha|_{L_f}) = \omega|_{L_f} = 0$. Во-вторых, действие $s_\gamma(f)$ определено с точностью до аддитивной постоянной. Это связано с неоднозначностью выбора формы α . Действительно, пусть $d\alpha = d\alpha' = \omega$. Это означает, что $\alpha' = \alpha + \beta$, где β — некоторая замкнутая форма. Тогда

$$s'_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_f} \alpha' = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_f} \alpha + \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_f} \beta = s_\gamma(f) + \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_f} \beta.$$

Пусть L_{f_1} и L_{f_2} — два различных лагранжевых подмногообразия из рассматриваемого семейства. Тогда

$$\oint_{\gamma_{f_1}} \beta = \oint_{\gamma_{f_2}} \beta = \text{const},$$

поскольку циклы γ_{f_1} и γ_{f_2} гомологичны в M^{2n} . Таким образом, действия s_γ и s'_γ отличаются на константу, которая зависит от формы β , но не зависит от лагранжева подмногообразия из рассматриваемого семейства.

Отметим, наконец, одно важное свойство действия в случае лиувиллева слоения интегрируемой гамильтоновой системы.

Предложение 1.10. Пусть $U(T_\xi) = D^n \times T^n$ — окрестность лиувиллева тора интегрируемой гамильтоновой системы. Фиксируем некоторый нетривиальный цикл γ на каждом из лиувиллевых торов, непрерывно зависящий от тора, и рассмотрим отвечающую ему функцию действия

$$s_\gamma(f_1, \dots, f_n) = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \alpha,$$

где интегрирование ведется по циклу γ , лежащему на торе, отвечающем данным значениям f_1, \dots, f_n первых интегралов. Тогда все траектории гамильтонова векторного поля $\text{sgrad } s_\gamma$ замкнуты с одинаковым периодом 2π и гомологичны циклу γ .

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что цикл γ совпадает с циклом γ_1 , отвечающим первой угловой координате φ_1 в системе переменных действие-угол $(s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$. В частности, $s_\gamma = s_1$. Тогда, как нетрудно проверить, $\text{sgrad } s_\gamma = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$ и утверждение становится очевидным. ■

1.6. Нерезонансные и резонансные системы

Рассмотрим тор Лиувилля T интегрируемой системы $v = \text{sgrad } H$. Согласно теореме Лиувилля в переменных действие-угол векторное поле v на этом торе имеет вид $\dot{\varphi}_1 = c_1, \dots, \dot{\varphi}_n = c_n$, где c_i — некоторые постоянные. Они называются частотами. При изменении тора T эти частоты, вообще говоря, изменятся.

Определение 1.13. Тор Лиувилля T называется *резонансным*, если существует нетривиальная целочисленная линейная комбинация частот равная нулю, т. е.

$$\sum k_i c_i = 0,$$

где k_i — целые числа и $\sum k_i^2 \neq 0$. В противном случае тор называется *нерезонансным*.

Тор Лиувилля является нерезонансным тогда и только тогда, когда замыкание любой интегральной траектории поля, лежащей на нем, совпадает со всем тором. И напротив, в резонансном случае замыкание траектории является тором строго меньшей размерности.

Определение 1.14. Интегрируемая система называется *нерезонансной* на M^{2n} (или на каком-то инвариантном подмножестве), если почти все торы Лиувилля нерезонансны. Система называется *резонансной*, если все ее торы Лиувилля резонансны.

Замечание. В гладком случае интегрируемая система может не принадлежать ни к одному из этих двух классов (т. е. не быть ни резонансной, ни нерезонансной). Такие системы мы рассматривать не будем, поскольку реальные аналитические системы всегда имеют однозначно определенный тип: либо резонансные, либо нерезонансные.

1.7. Число вращения

Для простоты рассмотрим интегрируемую систему с двумя степенями свободы на четырехмерном симплектическом многообразии M^4 и пусть T — любой тор Лиувилля. Рассмотрим угловые переменные φ_1, φ_2 на этом торе (построенные в теореме Лиувилля). Тогда гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$, ограниченная на тор T , принимает вид

$$\dot{\varphi}_1 = c_1, \quad \dot{\varphi}_2 = c_2.$$

Определение 1.15. Числом вращения ρ интегрируемой системы v на данном торе Лиувилля T называется отношение

$$\rho = \frac{c_1}{c_2}.$$

Величина ρ зависит от тора Лиувилля T , а потому является в действительности функцией от переменных действия s_1, s_2 или от первых независимых интегралов f_1, f_2 системы, поскольку переменные действия и эти интегралы выражаются друг через друга.

Предложение 1.11. Запишем гамильтониан H как функцию от s_1, s_2 . Тогда

$$\rho = \frac{\partial H / \partial s_1}{\partial H / \partial s_2}.$$

Доказательство.

Поскольку форма ω в переменных действие-угол приняла канонический вид, то

$$\text{sgrad } H = \frac{\partial H}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

Искомая формула следует теперь непосредственно из определения ρ . ■

Понятие числа вращения является, в действительности, топологическим. Это видно, например, из следующего предложения.

Если тор Лиувилля T резонансный, то все интегральные траектории поля v замкнуты и гомологичны между собой (и даже изотопны на торе). Пусть λ и μ — базис в фундаментальной группе 2-тора, т.е. два независимых цикла, гомологичные координатным линиям угловых переменных φ_1 и φ_2 . Тогда замкнутая траектория γ поля v может быть разложена по этому базису:

$$\gamma = p\lambda + q\mu.$$

Предложение 1.12. Число вращения ρ на резонансном торе имеет вид

$$\rho = \frac{p}{q}.$$

Другими словами, в этом случае число вращения ρ определяет топологический тип замкнутой траектории γ однозначно с точностью до направления.

Доказательство.

Так как тор — резонансный, то $\rho = \frac{c_1}{c_2}$ — рационально, а потому $\frac{c_1}{c_2} = \frac{p}{q}$ для некоторых целых p и q . Ясно, что следующие два векторных поля

$$v = c_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad \text{и} \quad p \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + q \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$$

имеют совпадающие интегральные траектории. Но траектории второго поля, очевидно, замкнуты и имеют тип $p\lambda + q\mu$. Предложение доказано. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу этих соображений резонансные торы иногда называют рациональными, а нерезонансные — иррациональными.

Для подсчета числа вращения ρ не обязательно использовать переменные действие-угол. Их поиск обычно достаточно нетривиален. Вместо них можно пользоваться любой системой координат $(x \bmod 2\pi, y \bmod 2\pi)$ на торе, координатные линии которой гомотопны линиям уровня канонических угловых переменных φ_1 и φ_2 . Удобно рассмотреть x и y как координаты на плоскости, накрывающей тор T . Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — координаты точки произвольной интегральной траектории поля v .

Предложение 1.13. *Имеет место формула:*

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)}.$$

Доказательство.

Выбирая новые периодические координаты на торе, мы всего лишь меняем форму фундаментальной области решетки на 2-плоскости (рис. 1.3). Можно считать, что сами узлы решетки при этом не изменились.

Отсюда сразу следует, что для некоторой константы C имеют место оценки:

$$|x(t) - \varphi_1(t)| \leq C, \quad |y(t) - \varphi_2(t)| \leq C.$$

Но так как $\varphi_1(t) = c_1 t + \text{const}$ и $\varphi_2(t) = c_2 t + \text{const}$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Предложение доказано. ■

Полученную выше формулу можно взять за определение числа вращения. При этом гамильтоновость системы нигде не используется. Следовательно, число вращения определено для более широкого класса динамических систем на торе.

Отметим, что число вращения зависит от выбора базиса на торе. Выбирая переменные действие-угол, мы тем самым указываем и некоторый базис циклов на соответствующем торе Лиувилля. Эти циклы являются просто линиями уровня угловых переменных на торе. И наоборот, выбрав базис циклов на торе, мы можем построить такие переменные действие-угол, для которых базисные циклы будут линиями уровня угловых переменных.

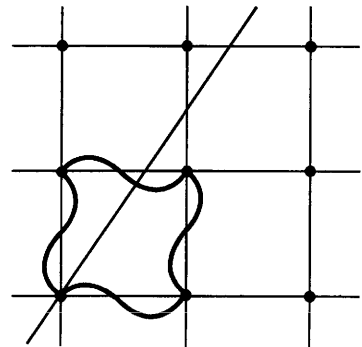


Рис. 1.3

Полезно понять, как меняется функция вращения при замене пары базисных циклов λ, μ на циклы λ', μ' . Хорошо известно, что для любой пары базисов всегда

существует некоторая целочисленная матрица такая, что

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.14. Пусть ρ — число вращения для пары циклов λ и μ , а ρ' — число вращения для пары циклов λ' и μ' .

Тогда числа ρ и ρ' связаны соотношением:

$$\rho' = \frac{\rho a_1 + a_3}{\rho a_2 + a_4}.$$

Доказательство следует из стандартных формул преобразования координат вектора при замене базиса. ■

Эта формула позволяет определить число вращения ρ' в том случае, когда циклы λ' и μ' базиса на торе не образуют, но являются линейно независимыми. В этом случае матрица перехода будет, вообще говоря, рациональной.

Аналог числа вращения можно определить и в случае интегрируемых систем с многими степенями свободы. Фиксируем базис на торе Лиувилля и выберем соответствующие им угловые координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, в которых гамильтоново векторное поле v выпрямляется и принимает вид

$$\dot{\varphi}_1 = c_1, \dots, \dot{\varphi}_n = c_n.$$

В качестве аналога числа вращения естественно рассмотреть набор частот с точностью до пропорциональности, т.е.

$$(c_1 : c_2 : \dots : c_n).$$

1.8. Отображение момента интегрируемой системы и его бифуркационная диаграмма

Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие с интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой $v = \text{sgrad} H$, и f_1, \dots, f_n — ее независимые инволютивные интегралы. Определим гладкое отображение

$$\mathcal{F}: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{где} \quad \mathcal{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Определение 1.16. Отображение \mathcal{F} называется *отображением момента*.

Определение 1.17. Точка x из M называется *критической (или особой) точкой отображения момента \mathcal{F}* , если ранг $d\mathcal{F}(x)$ меньше n . Ее образ $\mathcal{F}(x)$ в \mathbb{R}^n называется *критическим значением*.

Пусть K — совокупность всех критических точек отображения момента в M .

Определение 1.18. Образ K при отображении момента, т.е. множество $\Sigma = \mathcal{F}(K) \subset \mathbb{R}^n$, называется *бифуркационной диаграммой*.

Таким образом, бифуркационная диаграмма — это совокупность всех критических значений отображения момента. Согласно теореме Сарда, множество Σ имеет меру нуль в \mathbb{R}^n . В большинстве примеров интегрируемых систем, встречающихся в физике и механике, множество Σ является многообразием с особенностями. Другими словами, оно состоит из нескольких стратов (кусков) Σ^i , являющихся гладкими i -мерными поверхностями в \mathbb{R}^n . Условно можно записать, что $\Sigma = \Sigma^0 + \Sigma^1 + \dots + \Sigma^{n-1}$, где разные страты между собой не пересекаются, и их объединение дает все Σ . Граница каждого страта Σ^i содержится в объединении стратов меньшей размерности (рис. 1.4). В таком случае Σ называется стратифицированным многообразием. Некоторые Σ^i могут быть пусты.

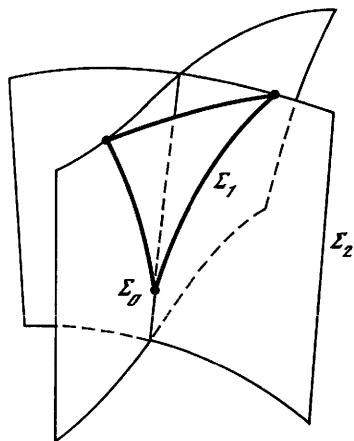


Рис. 1.4

В типичных ситуациях дополнение к Σ , т. е. $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ открыто и всюду плотно в \mathbb{R}^n . Множество $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ может состоять из нескольких компонент линейной связности. Иногда мы будем называть их камерами.

Отображение момента и его бифуркационная диаграмма тесно связаны со слоением Лиувилля на M^{2n} .

Во-первых, слой лиувиллева слоения — это связная компонента прообраза точки при отображении момента. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что все слои лиувиллева слоения компактны. Это условие, конечно, выполнено, если само симплектическое многообразие M^{2n} или поверхности уровня гамильтониана H компактны.

Во-вторых, Σ — это образ особых слоев слоения Лиувилля.

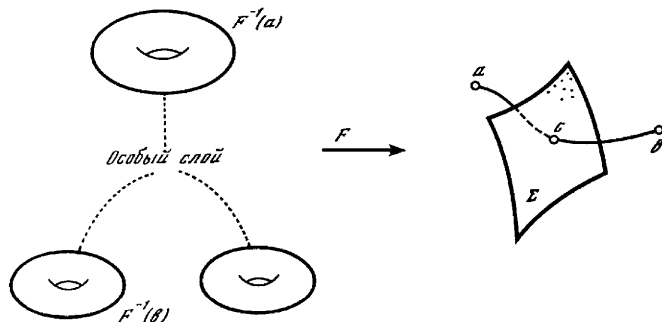


Рис. 1.5

В-третьих, над каждой камерой слоения Лиувилля локально тривиально. В частности, прообразы всех точек камеры диффеоморфны несвязному объединению одного и того же числа торов Лиувилля.

Бифуркационная диаграмма позволяет следить за перестройками торов Лиувилля при изменении значений первых интегралов f_1, \dots, f_n . Пусть, например, точки a и b соединяются гладкой дугой γ , встречающей в некоторой точке c бифуркационную диаграмму Σ . Некоторое число торов Лиувилля «висит» над точкой a , и некоторое (возможно другое) число торов Лиувилля — над точкой b . При движении точки от a к b вдоль дуги $\gamma(t)$ торы Лиувилля гладко «плывут» в M^{2n} и над точкой c могут подвергнуться топологической перестройке (бифуркации). См. рис. 1.5. Например, один тор может распасться на два.

Если $n = 2$ (т. е. если рассматриваемая система имеет две степени свободы), то Σ обычно состоит из отрезков гладких кривых на плоскости и, возможно, отдельных изолированных точек. Камеры здесь — двумерные открытые области на плоскости.

1.9. Простой пример интегрируемой механической системы

Рассмотрим два плоских маятника с длинами l_1 и l_2 в поле силы тяжести с ускорением g . Их движение описывается гамильтоновой системой на кокасательном расслоении к двумерному тору. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \omega_1^2 \cos q_1 - \omega_2^2 \cos q_2,$$

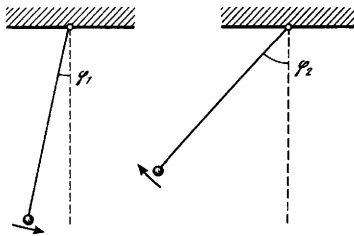


Рис. 1.6

где q_1 и q_2 — углы отклонения маятников от вертикали (рис. 1.6), а $\omega_i^2 = \frac{g}{l_i}$, где g — ускорение силы тяжести, а l_i — длины маятников. Здесь маятники колеблются независимо друг от друга.

Эта система вполне интегрируема. Интегралами движения являются две функции

$$f_1 = \frac{p_1^2}{2} - \omega_1^2 \cos q_1 \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{p_2^2}{2} - \omega_2^2 \cos q_2.$$

Впрочем, в качестве интегралов можно было бы взять гамильтониан H и, например, f_1 (или f_2). Очевидно, что интегралы f_1 и f_2 независимы и находятся в инволюции (так как переменные здесь разделяются).

Построим бифуркационную диаграмму отображения момента. Имеем:

$$\begin{aligned} df_1 &= (p_1, \omega_1^2 \sin q_1, 0, 0), \\ df_2 &= (0, 0, p_2, \omega_2^2 \sin q_2). \end{aligned}$$

Множество K критических точек состоит из 4-х кусков:

$$K_1 = \{p_1 = 0, q_1 = 0\},$$

$$K_2 = \{p_1 = 0, q_1 = \pi\},$$

$$K_3 = \{p_2 = 0, q_2 = 0\},$$

$$K_4 = \{p_2 = 0, q_2 = \pi\}.$$

Их образ при отображении момента \mathcal{F} , т.е. множество Σ , состоит из четырех лучей

$$\mathcal{F}(K_1) = \{f_1 = -\omega_1^2, f_2 \geq -\omega_2^2\},$$

$$\mathcal{F}(K_2) = \{f_1 = \omega_1^2, f_2 \geq -\omega_2^2\},$$

$$\mathcal{F}(K_3) = \{f_1 \geq -\omega_1^2, f_2 = -\omega_2^2\},$$

$$\mathcal{F}(K_4) = \{f_1 \geq -\omega_1^2, f_2 = \omega_2^2\}.$$

См. рис. 1.7. Бифуркационная диаграмма разбивает образ отображения момента на 4 камеры (рис. 1.7). Можно убедиться, что над точками камеры, отмеченной на рис. 1.7 цифрой I, висит ровно один тор Лиувилля, над точками камер II и III — по два тора Лиувилля и, наконец, над точками камеры IV — четыре тора Лиувилля.

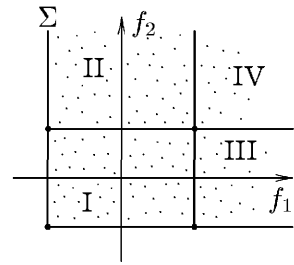


Рис. 1.7

Здесь Σ оказалась достаточно простой: четыре луча. В других физических системах, которые нам встретятся, диаграмма Σ обычно будет устроена сложнее.

Отметим любопытный экспериментальный факт (формально не связанный с темой настоящей главы). Как обнаружил Х. Гюйгенс, если на стене, рядом друг с другом повесить двое одинаковых маятниковых часов (т.е. с равными l_1 и l_2), то через некоторое время их маятники будут качаться либо в одинаковой фазе, либо в противофазе (рис. 1.8). Дело в том, что колебания маятников влияют друг на друга через стену.

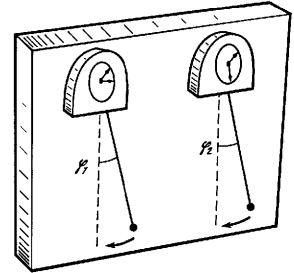


Рис. 1.8

Это означает, что с течением времени происходит перераспределение энергии между маятниками так, что в результате энергии уравниваются. В терминах торов Лиувилля это означает, что система оказывается на 2-торе, задаваемом уравнением $f_1 = f_2 = \text{const}$. Это — резонансный тор с числом вращения равным 1. На этом торе Лиувилля система выберет ровно одну замкнутую траекторию из бесконечного числа других, а именно, траекторию γ , показанную на рис. 1.9, в случае колебаний с равной фазой и траекторию τ — в случае противофазы.

Приведем еще один пример.

Допустим, что система v имеет такие независимые коммутирующие интегралы f_1, \dots, f_n , что интегральные траектории отвечающих им векторных полей $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ замкнуты с одним и тем же периодом 2π . Это означает, что пуассоново действие абелевой группы \mathbb{R}^n фактически сводится к действию тора

T^n на M^{2n} . В этом случае образ отображения момента — выпуклый многогранник в \mathbb{R}^n , а бифуркационная диаграмма — его граница (см. [235], [236]).

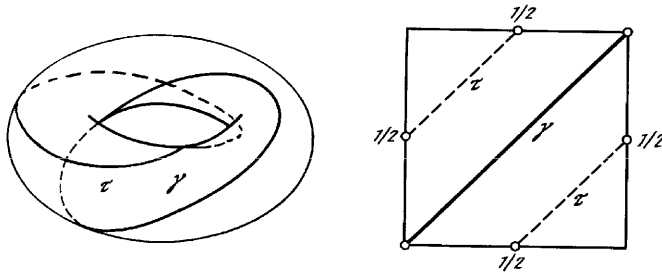


Рис. 1.9

1.10. Невырожденные точки отображения момента

Мы хотим подчеркнуть здесь одну важную мысль. Ниже мы будем много заниматься типичными особенностями отображения момента интегрируемой системы. Оказывается, эти особенности, несмотря на всю их сложность, в принципе допускают разумное и достаточно наглядное описание. В то же время, с точки зрения общей теории особенностей произвольных гладких отображений M^{2n} в \mathbb{R}^n , особенности отображения момента не являются ни типичными, ни устойчивыми. Дело в том, что в случае общего положения размерность множества критических точек гладкого отображения M^{2n} в \mathbb{R}^n равна $n - 1$, а множество типичные особенности отображения момента имеет размерность в два раза большую, а именно $2n - 2$. Объясняется это тем, что здесь пуассоново действует абелева группа \mathbb{R}^n , которая «размазывает» особые точки отображения момента (если какая-то точка оказалась критической, то и все точки, получающиеся из нее действием группы, также будут критическими). Поэтому типичность особенностей отображения момента следует понимать не в абстрактном, широком смысле, а лишь в классе отображений, порожденных пуассоновыми действиями абелевой группы \mathbb{R}^n . При этом задача классификации таких особенностей не становится проще или сложнее. Она становится просто другой.

1.10.1. Случай двух степеней свободы

Рассмотрим гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ на четырехмерном симплектическом многообразии M^4 .

Определение 1.19. *Изоэнергетической поверхностью* называется множество точек, задаваемое уравнением $H(x) = \text{const}$.

Если $H(x) = h$, то соответствующую изоэнергетическую поверхность обозначим через Q_h . Она всегда является инвариантной поверхностью относительно поля v .

Рассмотрим трехмерную изоэнергетическую поверхность Q^3 . Мы будем в дальнейшем предполагать ее гладким компактным подмногообразием в M^4 . В частности, мы будем рассматривать лишь такие 3-поверхности, на которых $dH \neq 0$.

В случае двух степеней свободы для интегрируемости системы v достаточно иметь лишь один дополнительный интеграл f , функционально независимый с интегралом энергии H . Этот интеграл f , ограниченный на Q^3 , является гладкой функцией, у которой всегда есть какие-то критические точки (ввиду компактности Q). Ясно, что критические точки функции f на Q совпадают с критическими точками отображения момента $\mathcal{F} = (H, f)$, попавшими в Q . Поэтому особенности отображения момента естественно изучать в терминах ограничения функции f на Q . Это ограничение будем по-прежнему обозначать той же буквой f .

Лемма 1.7. *Интеграл f не может иметь изолированных критических точек на Q .*

Доказательство.

Согласно нашему предположению $dH|_Q \neq 0$. Отсюда вытекает, что векторное поле $v = \text{sgrad } H$ отлично от нуля в каждой точке Q . Рассмотрим интегральную траекторию γ векторного поля v , проходящую через критическую точку x интеграла f . Гамильтонов поток v сохраняет функцию f и, в частности, переводит критические точки в критические. Поэтому траектория γ целиком состоит из критических точек. Лемма доказана. ■

Итак, интеграл f никогда не может быть функцией Морса на неособой изоэнергетической 3-поверхности. К какому же классу он в действительности принадлежит? Оказывается, в реальных задачах физики и механики типична ситуация, описанная в следующем определении.

Определение 1.20. Функция f называется *функцией Ботта* на многообразии Q , если все ее критические точки организованы в невырожденные критические подмногообразия.

Это означает, что множество критических точек является несвязным объединением некоторых гладких подмногообразий, причем каждое из них невырождено в следующем смысле. Второй дифференциал $d^2 f$ невырожден на подпространстве, трансверсальном к подмногообразию (в каждой его точке).

Другими словами, ограничение функции f на трансверсаль к подмногообразию является функцией Морса.

Появление таких функций в теории интегрируемых систем очень естественно. Грубо говоря, они играют здесь такую же роль, как функции Морса в обычной теории функций на многообразиях, то есть являются максимально невырожденными с точки зрения пуассоновых действий.

Ниже, в нашей книге, мы еще вернемся к вопросу о том, в каком смысле устойчивы и типичны функции Ботта в классе гладких интегралов гамильтоновых систем. См. приложение 2 и [72], [73], [138].

Рассмотрим интегрируемую систему v , и пусть ее интеграл f является функцией Ботта на какой-то изоэнергетической регулярной компактной 3-поверхности Q .

Предложение 1.15. *Связные критические подмногообразия интеграла f на Q диффеоморфны либо окружности, либо тору, либо бутылке Клейна.*

Доказательство.

Поскольку Q трехмерно, то критические подмногообразия функции f могут быть либо одномерны, либо двумерны. В одномерном случае каждая связная компонента такого подмногообразия является окружностью в силу компактности. В двумерном случае на нем есть гладкое векторное поле $v = \text{sgrad } H$, не обращающееся в ноль (т.к. мы предположили, что $dH \neq 0$ на Q). На двумерных многообразиях такое поле может существовать лишь на торе и на бутылке Клейна (только у них эйлерова характеристика равна нулю). Предложение доказано. ■

Таким образом, критические подмногообразия устроены довольно просто. В нашей книге (в случае двух степеней свободы) мы будем рассматривать, главным образом, такие интегрируемые системы, у которых на интересующей нас 3-поверхности Q нет критических торov и бутылок Клейна. Другими словами, обычно мы будем изучать системы, критическими подмногообразиями которых будут только окружности.

Такой подход мотивируется двумя причинами.

Причина 1. В реальных задачах физики и механики чаще всего встречаются именно такие системы.

Причина 2. Можно доказать (см. [72], [73]), что малым шевелением интегрируемой системы с интегралом Ботта можно всегда превратить ее в интегрируемую систему указанного типа, т. е. превратить критические торы и бутылки Клейна в набор невырожденных критических окружностей. Более того, такое возмущение можно сделать внутри класса интегрируемых систем с интегралами типа Ботта.

Ниже нам понадобится аналог леммы Морса для случая функций Ботта. Мы сформулируем и докажем эту лемму Морса–Ботта для случая произвольной размерности.

Пусть M — ориентируемое гладкое многообразие и f — гладкая функция на нем. Пусть N^{n-k} — связное гладкое компактное подмногообразие в M^n с тривиальным нормальным расслоением. Предположим, что N — невырожденное критическое подмногообразие для функции f , то есть $df(x) = 0$ для любой точки $x \in N$, и в каждой такой точке 2-форма d^2f является невырожденной на трансверсальном подпространстве к N . Пусть индекс формы d^2f равен λ . Легко видеть, что в этих предположениях λ не зависит от выбора точки x на N .

Рассмотрим далее в нормальном расслоении $E(N)$ к N два подрасслоения E_- и E_+ , ортогональные относительно формы d^2f функции f и такие, что гессиан d^2f отрицательно определен на подрасслоении E_- и положительно определен на E_+ . Эти подрасслоения могут быть построены следующим образом. Пусть в окрестности подмногообразия N задана какая-либо риманова метрика. В каждой

точке $x \in N$ форму $d^2 f$ можно теперь привести к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе. Хотя этот базис определен, вообще говоря, неоднозначно, однако однозначно определены две плоскости (в плоскости, нормальной к подмногообразию) $E_+(x)$ и $E_-(x)$, натянутые на векторы ортонормированного базиса, отвечающие положительным и отрицательным собственным значениям гессиана $d^2 f$. Ясно, что топологический тип подрасслоений E_+ и E_- не зависит от выбора римановой метрики в окрестности N . Отметим, что размерность $E_-(x)$ равна λ .

Предложение 1.16 (Обобщенная лемма Морса–Ботта). *Предположим, что оба подрасслоения E_+ и E_- тривиальны. Тогда в некоторой окрестности $U(N)$ подмногообразия N всегда существуют такие гладкие независимые всюду на $U(N)$ функции x_1, \dots, x_k такие, что $x_i|_N = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, k$ и*

$$f = c - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_k^2,$$

где $c = f|_N$.

Доказательство.

Рассмотрим в слоях $E_+(x)$ и $E_-(x)$ расслоений E_+ и E_- ортонормированные (относительно формы $d^2 f$) базисы $e_1(x), \dots, e_\lambda(x)$ и $e_{\lambda+1}(x), \dots, e_k(x)$, гладко зависящие от точки x из N . Такие базисы существуют, поскольку оба расслоения E_+ и E_- тривиальны. Ясно, что координаты $y_1, \dots, y_\lambda, y_{\lambda+1}, \dots, y_k$ (относительно выбранного нами ортонормированного базиса) в нормальном расслоении можно рассмотреть как гладкие независимые функции в некоторой окрестности подмногообразия N . Локально эту окрестность можно отождествить с окрестностью нулевого сечения нормального расслоения. Эту систему функций (координат) $y_1, \dots, y_\lambda, y_{\lambda+1}, \dots, y_k$ можно дополнить функциями y_{k+1}, \dots, y_n до локальной системы координат, определенной в окрестности данной точки из N . При этом функции $y_1, \dots, y_\lambda, y_{\lambda+1}, \dots, y_k$ определены сразу на всей окрестности $U(N)$, а функции y_{k+1}, \dots, y_n — лишь в некоторой окрестности данной точки на подмногообразии N . Без ограничения общности можно считать, что функции y_{k+1}, \dots, y_n являются локальными координатами на N и постоянны на слоях расслоения $E(N)$. Для дальнейшего удобно задать положение точки y следующим набором: $(y_1, \dots, y_k, \alpha)$, где α обозначает точку на подмногообразии N , являющемся базой нормального расслоения $E(N)$. Тогда квадратичная форма $d^2 f$ в точках подмногообразия N принимает следующий вид:

$$d^2 f = -dy_1^2 - \dots - dy_\lambda^2 + dy_{\lambda+1}^2 + \dots + dy_k^2.$$

После этого мы можем фактически дословно повторить доказательство обычной (классической) леммы Морса применительно к функции $f(y_1, \dots, y_k, \alpha)$, рассматривая при этом α как некоторый многомерный параметр. Следуя стандартному доказательству леммы Морса [129], представим функцию $f(y)$ в виде

$$f(y_1, \dots, y_k, \alpha) = \sum_{1 \leq i, j \leq k} y_i y_j h_{ij}(y_1, \dots, y_k, \alpha + c).$$

Здесь

$$h_{ij}(y_1, \dots, y_k, \alpha) = \int_0^1 \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(t y_1, \dots, t y_k, \alpha) dt du.$$

При этом

$$h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(0).$$

Рассмотрим далее выражение $\sum_{1 \leq i, j \leq k} y_i y_j h_{ij}(y_1, \dots, y_k, \alpha)$ как квадратичную форму с коэффициентами $h_{ij}(y_1, \dots, y_k, \alpha)$ и стандартными заменами координат приведем ее к нормальной форме.

Важно, что эта процедура может быть выполнена одновременно при всех α . В результате квадратичная форма $\sum_{1 \leq i, j \leq k} y_i y_j h_{ij}(y_1, \dots, y_k, \alpha)$ приведется к диагональному виду $-x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_k^2$, где новые функции x_1, \dots, x_k связаны с предыдущими переменными y_1, \dots, y_k, α следующими «линейными формулами»:

$$x_i = \sum_{1 \leq j \leq k} a_{ij}(y, \alpha) y_j.$$

При этом матрица $(a_{ij}(y, \alpha))$ является верхнетреугольной с положительными элементами на диагонали. Она существует, определена однозначно и гладко зависит от y, α . Фактически доказательство закончено. Однако, в заключение поясним, где же была использована тривиальность расслоений $E_-(N)$ и $E_+(N)$. Отметим, что не любая квадратичная форма от y с коэффициентами, зависящими от параметра α , может быть приведена к диагональному виду одновременно при всех значениях α при помощи преобразования, гладко зависящего от α . Но в нашем случае при $y = 0$ для любого α требуемая замена существует, поскольку при $y = 0$ форма $\sum h_{ij} y_i y_j$ уже имеет канонический вид. Другими словами, $a_{ij}(0, \alpha) = \delta_{ij}$. Но в таком случае в малой окрестности нуля (по переменным y_1, \dots, y_k) искомая матрица $(a_{ij}(y, \alpha))$ также существует, а потому однозначно определена и гладко зависит от y, α . Предложение доказано. ■

1.10.2. Интегралы Ботта с точки зрения четырехмерного симплектического многообразия

Рассмотрим теперь критические точки отображения момента \mathcal{F} не на Q , а с точки зрения объемлющего 4-многообразия M . Замкнутое множество K всех критических точек можно стратифицировать рангом отображения момента, т. е. представить его в виде объединения

$$K = K_1 + K_0,$$

где $K_1 = \{x \mid \text{ранг } d\mathcal{F}(x) = 1\}$, $K_0 = \{x \mid \text{ранг } d\mathcal{F}(x) = 0\}$.

Предложение 1.17. *Множество K_1 является объединением всех одномерных орбит пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 на M^4 . Множество K_0 состоит из всех неподвижных точек этого действия.*

Доказательство.

Это утверждение справедливо для произвольного числа степеней свободы. Действительно, размерность любой орбиты группы \mathbb{R}^n равна рангу системы векторов $\{\text{sgrad } f_i\}$. Этот ранг, в свою очередь, равен рангу системы $\{df_i\}$. Предложение доказано. ■

Зададимся вопросом: какие точки из K_1 и K_0 естественно считать невырожденными. Начнем с обсуждения K_1 .

Рассмотрим точку x из M^4 такую, что ранг $d\mathcal{F}(x) = 1$. Орбита этой точки одномерна и диффеоморфна либо прямой, либо окружности.

Предположим, для определенности, что $dH(x) \neq 0$. Тогда в силу теоремы Дарбу в окрестности точки x существует каноническая система координат (p_1, q_1, p_2, q_2) такая, что $H = p_1$. Поскольку функции f и H коммутируют, то функция f не зависит от q_1 , т. е. $f = f(p_1, p_2, q_2)$.

Поскольку $x \in K_1$ — критическая точка \mathcal{F} , то

$$\frac{\partial f}{\partial p_2(x)} = \frac{\partial f}{\partial q_2(x)} = 0.$$

Определение 1.21. Точка x из K_1 будет называться *невырожденной* для отображения момента \mathcal{F} , если матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} \end{pmatrix}$$

невырождена в точке x .

Обозначим множество всех таких точек через K_1^* .

Определение корректно, то есть не зависит от выбора локальной канонической системы координат. Это вытекает из того, что указанная матрица в точности совпадает с гессианом функции f , ограниченной на двумерную трансверсаль к одномерной орбите в $Q = \{p_1 = \text{const}\}$, целиком состоящей из критических точек функции f .

Другими словами, функция f является функцией Ботта на трехмерном уровне $H = \text{const}$ (локально в окрестности рассматриваемой точки x). В частности, сформулированное выше условие невырожденности запрещает существование критических торов и бутылок Клейна на уровне $H = \text{const}$.

Предыдущее определение невырожденности было сформулировано в терминах локальных координат. Можно дать и эквивалентное ему инвариантное определение, т. е. не использующее координат. Оно будет полезно для конкретной проверки условия невырожденности, поскольку поиск канонической системы координат, использованной выше, обычно затруднен.

Пусть в точке x ранг $d\mathcal{F}(x)$ равен единице. Тогда в этой точке дифференциалы df и dH зависимы, т. е. существуют числа λ и μ такие, что

$$\lambda df(x) + \mu dH(x) = 0.$$

Здесь λ и μ определены однозначно с точностью до пропорциональности. Пусть L — касательная прямая к одномерной орбите действия \mathbb{R}^2 . Она является одномерным подпространством (в касательном пространстве к M^4), порожденным линейно зависимыми векторами $\text{sgrad } f$, $\text{sgrad } H$. Пусть L' — трехмерное подпространство, ортогональное к L в смысле симплектической формы.

Определение 1.22. Точка x будет называться *невыврожденной точкой отображения момента* \mathcal{F} , если ранг симметричной 2-формы

$$\lambda d^2 f(x) + \mu d^2 H(x)$$

на подпространстве L' равен 2.

Эта 2-форма корректно определена, поскольку $\lambda df(x) + \mu dH(x) = 0$.

Отметим, что ранг $\lambda d^2 f(x) + \mu d^2 H(x)$ не может равняться 3 на L' , так как одномерное подпространство $L \subset L'$ лежит в ядре этой 2-формы. Докажем это. Пусть, для определенности, оно натянуто на $v = \text{sgrad } f$ (напомним, что $\text{sgrad } f(x)$ и $\text{sgrad } H(x)$ зависимы). Подсчитаем значение 2-формы на паре векторов v и ξ , где вектор ξ произволен. Получим:

$$(\lambda d^2 f + \mu d^2 H)(v, \xi) = \xi(\text{sgrad } f(\lambda f + \mu H)) = \xi(\{f, \lambda f + \mu H\}) = 0,$$

так как f и H коммутируют.

Определения 1.21 и 1.22 эквивалентны. Перепишем определение 1.22 в специальной системе координат Дарбу (p_1, q_1, p_2, q_2) из определения 1.21. Тогда одномерное подпространство L порождается вектором $\frac{\partial}{\partial q_1}$, а 3-подпространство L' порождается векторами $\frac{\partial}{\partial q_1}$, $\frac{\partial}{\partial p_2}$, $\frac{\partial}{\partial q_2}$. Поскольку функция f от переменной q_1 не зависит, а $H = p_1$, то матрица 2-формы $\lambda d^2 f(x) + \mu d^2 H(x)$ имеет вид

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial q_2} \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в локальных координатах условия из определений 1.21 и 1.22 совпадают.

Как устроено с топологической точки зрения подмножество K_1^* невырожденных точек отображения момента в критическом множестве K_1 ?

Предложение 1.18.

- а) Множество K_1^* является двумерным гладким симплектическим подмногообразием в M^4 .
- б) У каждой точки x из K_1^* существует открытая окрестность U в K_1^* , диффеоморфная 2-диску, такая, что ее образ $\mathcal{F}(U)$ в \mathbb{R}^2 является гладкой регулярной дугой δ без самопересечений.

в) Пусть $\dot{\delta} = (a, b)$ — касательный вектор к кривой δ в точке $\mathcal{F}(x)$. Тогда выполнено соотношение:

$$b \operatorname{sgrad} H(x) - a \operatorname{sgrad} f(x) = 0.$$

Доказательство.

Воспользуемся определением 1.21 невырожденности критических точек. Выберем каноническую систему координат (p_1, q_1, p_2, q_2) , в которой $H = p_1$, $f = f(p_1, p_2, q_2)$. Тогда в окрестности точки x множество критических точек отображения момента \mathcal{F} задается двумя уравнениями: $\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial q_2} = 0$. В силу невырожденности матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} \end{pmatrix}$$

эти два уравнения определяют (локально) гладкое двумерное подмногообразие в M . Поскольку матрица остается невырожденной и в некоторой окрестности точки x , то все критические точки, попавшие в эту окрестность, тоже оказываются невырожденными. Так как указанная выше матрица является частью матрицы Якоби для двух уравнений $\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial q_2} = 0$, то по теореме о неявных функциях получаем, что переменные p_2, q_2 локально выражаются как гладкие однозначные функции от p_1, q_1 , т. е. множество K_1^* локально представляется в виде гладкого графика.

Покажем, что K_1^* — симплектическое 2-многообразие. Для этого нужно доказать, что ограничение на него формы ω невырождено.

В самом деле, подставляя в 2-форму $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ функции $p_2 = p_2(p_1, q_1)$ и $q_2 = q_2(p_1, q_1)$ и вспоминая, что на самом деле от q_1 они не зависят, т. е. $p_2 = p_2(p_1)$ и $q_2 = q_2(p_1)$, мы видим, что ограничение формы ω на K_1^* совпадает с $dp_1 \wedge dq_1$, а потому невырождено.

Докажем второе утверждение предложения 1.18.

Запишем отображение момента в координатах (p_1, q_1, p_2, q_2) и ограничим его на K_1^* . Так как в качестве локальных координат на K_1^* можно взять p_1 и q_1 , и так как $p_2 = p_2(p_1)$ и $q_2 = q_2(p_1)$, то отображение момента будет иметь вид:

$$H = p_1, \quad f = f(p_1, p_2(p_1), q_2(p_1)) = \tilde{f}(p_1).$$

Таким образом, образ малой окрестности точки x в K_1^* при отображении момента является гладкой дугой, заданной в виде графика $f = \tilde{f}(p_1) = \tilde{f}(H)$.

Осталось доказать утверждение (в) предложения 1.18.

В выбранной нами системе координат мы имеем:

$$\operatorname{sgrad} f(x) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_1} \operatorname{sgrad} H(x).$$

С другой стороны, выбирая p_1 в качестве локального параметра на дуге δ , получаем

$$\dot{\delta} = \left(1, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_1}\right).$$

Предложение 1.18 доказано. ■

Следствие. Пусть $x \in K_1^*$ и прямая $H = H(x)$ трансверсально пересекает бифуркационную диаграмму Σ в точке $\mathcal{F}(x)$. Тогда x является регулярной точкой для функции H , ограниченной на K_1^* .

Доказательство.

При сделанных предположениях, как мы видели выше, всегда можно считать, что функции H имеет вид p_1 , в то время как p_1 и q_1 — регулярные локальные координаты на подмногообразии K_1^* в окрестности точки x . Следовательно, функция H особенности здесь не имеет. Следствие доказано. ■

Множество K_1^* состоит из одномерных орбит пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 . Выбросим из K_1^* все некомпактные, т. е. гомеоморфные прямым, орбиты этой группы. Оставшаяся часть K_1^{**} расслоена на окружности.

Разобьем теперь K_1^{**} на компоненты линейной связности.

Следствие. Образ (при отображении \mathcal{F}) каждой компоненты связности K_1^{**} в \mathbb{R}^2 является либо гладким погружением прямой, либо гладким погружением окружности.

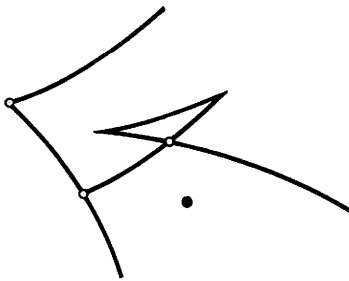


Рис. 1.10

Рассмотрим множество $K - K_1^{**}$. Оно состоит из одномерных некомпактных орбит действия группы \mathbb{R}^2 , одномерных вырожденных орбит и нульмерных орбит (неподвижных точек действия). Рассмотрим теперь его образ $\mathcal{F}(K - K_1^{**})$ как подмножество в бифуркационной диаграмме и назовем его множеством ее сингулярных точек. Таким образом, Σ состоит из гладких регулярных кривых (быть может пересекающихся) и сингулярных точек, среди которых могут быть отдельные изолированные точки Σ , точки возврата, касания и т. п. См. рис. 1.10.

Теперь мы можем наглядно описать, как формулируется условие, что интеграл f является функцией Ботта на изоэнергетической поверхности $Q = \{H = \text{const}\}$. Нужно взять прямую $H = \text{const}$ на двумерной плоскости $\mathbb{R}^2(H, f)$. Допустим, что эта прямая не проходит через сингулярные точки Σ и пересекает гладкие дуги Σ трансверсально. Тогда f будет функцией Ботта на 3-многообразии Q , являющемся прообразом этой прямой в M^4 . Причем все ее критические подмногообразия будут окружностями, т. е. среди них не будет ни торов, ни буттылок Клейна.

Пусть теперь $x \in K_0$, т. е. $dH(x) = df(x) = 0$, т. е. x — неподвижная точка пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 . Тогда эта группа естественно действует на кас-

тельной плоскости $T_x M$ к многообразию M в точке x . Так как группа сохраняет 2-форму ω , то она индуцирует симплектические преобразования в $T_x M$. Получаем некоторую абелеву подгруппу $G(H, f)$ в группе $Sp(4, \mathbb{R})$ симплектических преобразований $T_x M$. Через $K(H, f)$ обозначим ее алгебру Ли. Она является некоторой коммутативной подалгеброй в алгебре Ли $sp(4, \mathbb{R})$ группы $Sp(4, \mathbb{R})$. Легко видеть, что подалгебра $K(H, f)$ порождается линейными частями векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f$.

Определение 1.23. Скажем, что точка $x \in K_0$ является *невыврожденной особой точкой отображения момента \mathcal{F}* , если подалгебра $K(H, f)$ является картановской подалгеброй в $sp(4, \mathbb{R})$.

В частности, из этого требования вытекает, что коммутативная подалгебра $K(H, f)$ должна быть двумерной.

Как проверить условие картановости подалгебры $K(H, f)$? Прежде всего опишем эту подалгебру в терминах функций H и f . Для этого рассмотрим их квадратичные части, т. е. гессианы $d^2 H$ и $d^2 f$. Они порождают симплектические линейные операторы $A_H = \Omega^{-1} d^2 H$ и $A_f = \Omega^{-1} d^2 f$, совпадающие с линеаризациями векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f$ в особой точке $x \in K_0$. Действительно, линеаризация, например, векторного поля $w = \text{sgrad } f$ имеет вид

$$\frac{\partial w^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\omega^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) = \omega^{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} = (\Omega^{-1} d^2 f)_j^i.$$

Итак, подалгебра $K(H, f)$ порождается линейными операторами $A_H = \Omega^{-1} d^2 H$ и $A_f = \Omega^{-1} d^2 f$.

Коммутативная подалгебра в $sp(4, \mathbb{R})$ является картановской тогда и только тогда, когда она двумерна и среди ее элементов найдется линейный оператор с различными собственными значениями.

Итак, сначала нужно убедиться, что формы $d^2 f$ и $d^2 H$ независимы. Затем следует проверить, что некоторая линейная комбинация $\lambda A_f + \mu A_H$ имеет различные собственные значения. Описанный алгоритм вполне эффективен и сводит задачу к несложным вычислениям.

Всего в вещественной алгебре Ли $sp(4, \mathbb{R})$ имеется лишь 4 типа различных, т. е. попарно несопряженных, подалгебр Картана. Перечислим их. Пусть симплектическая структура ω задается (в точке x) канонической матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда алгебра Ли $sp(4, \mathbb{R})$ запишется в стандартном матричном представлении в виде следующих 4×4 -матриц (см. предложение 1.3):

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & -P^T \end{pmatrix},$$

где P, Q, R — матрицы размера 2×2 , причем Q и R — симметричны, а P — произвольная.

Теорема 1.3. Пусть K — подалгебра Картана в алгебре Ли $sp(4, \mathbb{R})$. Тогда она сопряжена одной из четырех подалгебр Картана, перечисленных ниже:

$$\begin{array}{cc} \text{Тип 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{Тип 2} \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \text{Тип 3} \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix} & \text{Тип 4} \begin{pmatrix} -A & -B & 0 & 0 \\ B & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -B \\ 0 & 0 & B & A \end{pmatrix} \end{array}$$

Здесь A, B — произвольные вещественные числа.

Перечисленные подалгебры попарно несопряжены.

КОММЕНТАРИЙ. Несопряженность описанных выше четырех типов подалгебр Картана следует из того, что их элементы имеют различные типы собственных значений:

- 1 тип — чисто мнимые корни $iA, -iA, iB, -iB$;
- 2 тип — два вещественных и два мнимых корня $-A, A, iB, -iB$;
- 3 тип — вещественные корни $-A, A, -B, B$;
- 4 тип — четыре комплексных корня $A - iB, A + iB, -A + iB, -A - iB$.

Рассмотрим произвольную подалгебру Картана в $sp(4, \mathbb{R})$ и выберем в ней элемент, у которого все собственные значения различны (такой элемент называется регулярным). Из предложения 1.2 легко вывести, что собственные значения оператора из $sp(4, \mathbb{R})$ разбиваются на пары вида $\lambda, -\lambda$. Отсюда следует, что спектр регулярного элемента имеет один из перечисленных выше четырех типов, и, следовательно, сам элемент сопряжен одной из матриц, указанных в теореме. При этом сопряжение можно осуществить симплектическим преобразованием (это эквивалентно тому, что оператор с простым спектром из алгебры Ли $sp(4, \mathbb{R})$ можно привести к каноническому виду в симплектическом базисе). Поскольку два регулярных элемента алгебры Ли оказались сопряженными, то и содержащие их подалгебры Картана также сопряжены (при помощи того же симплектического преобразования). Это легко следует из того, что подалгебры Картана являются централизаторами своих регулярных элементов.

Отметим, что над полем комплексных чисел (то есть в комплексной алгебре Ли $sp(4, \mathbb{C})$) любые две картановские подалгебры сопряжены.

Теорему 1.3 можно переформулировать в виде ответа на вопрос — к какому каноническому виду приводятся квадратичные части коммутирующих функций H и f в невырожденной особой точке отображения момента \mathcal{F} .

Теорема 1.4. В окрестности невырожденной особой точки $x \in K_0$ всегда существуют канонические координаты (p_1, q_1, p_2, q_2) , в которых гессианы функций H и f одновременно приводятся к одному из следующих видов:

1) случай центр-центр:

$$\begin{aligned} d^2 H &= A_1(dp_1^2 + dq_1^2) + B_1(dp_2^2 + dq_2^2), \\ d^2 f &= A_2(dp_1^2 + dq_1^2) + B_2(dp_2^2 + dq_2^2), \end{aligned}$$

2) случай центр-седло:

$$\begin{aligned} d^2 H &= A_1 dp_1 dq_1 + B_1(dp_2^2 + dq_2^2), \\ d^2 f &= A_2 dp_1 q_1 + B_2(dp_2^2 + dq_2^2), \end{aligned}$$

3) случай седло-седло:

$$\begin{aligned} d^2 H &= A_1 dp_1 dq_1 + B_1 dp_2 dq_2, \\ d^2 f &= A_2 dp_1 dq_1 + B_2 dp_2 dq_2, \end{aligned}$$

4) случай фокус-фокус:

$$\begin{aligned} d^2 H &= A_1(dp_1 dq_1 + dp_2 dq_2) + B_1(dp_1 dq_2 - dp_2 dq_1), \\ d^2 f &= A_2(dp_1 dq_1 + dp_2 dq_2) + B_2(dp_1 dq_2 - dp_2 dq_1). \end{aligned}$$

Доказательство.

Сразу вытекает из приведенной выше алгебраической классификации картановских подалгебр в $sp(4, \mathbb{R})$. ■

В действительности, в окрестности невырожденной особой точки справедливо более сильное утверждение: не только квадратичные части, но и сами функции H и f можно одновременно привести к некоторому каноническому виду путем выбора подходящих канонических координат. Более точно, имеет место следующее важное утверждение.

Теорема 1.5. Пусть многообразие M^4 , симплектическая структура ω и функции H и f являются вещественно-аналитическими. Тогда в окрестности невырожденной особой точки $x \in K_0$ всегда существуют канонические координаты (p_1, q_1, p_2, q_2) , в которых функции H и f одновременно приводятся к одному из следующих видов:

1) случай центр-центр:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2), \\ f &= f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2), \end{aligned}$$

2) случай центр-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2), \\ f &= f(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2), \end{aligned}$$

3) случай седло-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1, p_2 q_2), \\ f &= f(p_1 q_1, p_2 q_2), \end{aligned}$$

4) случай фокус-фокус:

$$f = f(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 1.3, 1.4, 1.5 имеют естественные многомерные обобщения, обсуждению и доказательству которых посвящено приложение 3, написанное В. В. Калашниковым (мл.) (см. также теоремы 1.6 и 1.7 ниже). Теорема 1.3 (и ее многомерный вариант — теорема 1.6) принадлежит Вильямсону [391], [392], теорема 1.5 была доказана Рюссманом [364], а затем обобщена на многомерный случай в работах Вея [384] и Ито [315].

1.10.3. Определение невырожденной особенности в случае многих степеней свободы

Здесь мы дадим определение невырожденной особой точки ранга i отображения момента \mathcal{F} в многомерном случае.

Пусть f_1, \dots, f_n — гладкие функции в инволюции на M^{2n} и

$$\mathcal{F}: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

— соответствующее отображение момента. Пусть $K = K_0 + K_1 + \dots + K_{n-1}$ — множество его критических точек. Здесь K_i — множество точек $x \in K$, в которых ранг $d\mathcal{F}(x)$ равен i (мы будем называть их точками ранга i).

Для любой точки $x \in K_i$ всегда можно подобрать такую невырожденную линейную замену функций f_1, \dots, f_n , что новые функции, которые мы обозначим через g_1, \dots, g_n , будут обладать следующими свойствами:

- 1) первые $n - i$ функций g_1, \dots, g_{n-i} в точке x имеют особенность, т.е. $dg_1(x) = \dots = dg_{n-i}(x) = 0$,
- 2) градиенты остальных функций g_{n-i+1}, \dots, g_n линейно независимы в точке x .

Поскольку $dg_1(x) = \dots = dg_{n-i}(x) = 0$, то соответствующие гамильтоновы векторные поля $\text{sgrad } g_1, \dots, \text{sgrad } g_{n-i}$ обращаются в ноль в точке x . Потому их линейные части A_1, \dots, A_{n-i} можно рассмотреть как линейные операторы из алгебры Ли симплектической группы $Sp(2n, \mathbb{R})$, действующие в касательном пространстве $T_x M$ к M . Операторы A_1, \dots, A_{n-i} попарно коммутируют, т.к. коммутируют соответствующие им поля $\text{sgrad } g_1, \dots, \text{sgrad } g_{n-i}$.

Рассмотрим теперь i -мерное линейное подпространство L в $T_x M$, порожденное векторами $\text{sgrad } g_{n-i+1}, \dots, \text{sgrad } g_n$. Отметим, что L — это касательное пространство к орбите пуассонова действия, проходящей через точку x .

Пусть L' — косоортогональное дополнение (в смысле симплектической формы Ω) к подпространству L в $T_x M$. Оно содержит L , поскольку подпространство L изотропно (т.к. функции g_{n-i+1}, \dots, g_n находятся в инволюции).

Лемма 1.8. *Подпространство L лежит в ядре всех операторов A_1, \dots, A_{n-i} . Образы операторов A_1, \dots, A_{n-i} содержатся в L' .*

Доказательство.

Напомним, что если A_v — линейризация векторного поля v в его особой точке x , а ξ — произвольное векторное поле, то имеет место формула:

$$A_v(\xi) = [\xi, v].$$

В нашем случае имеем: $A_j(\text{sgrad } g_k) = [\text{sgrad } g_k, \text{sgrad } g_j] = 0$, так как все функции g_s находятся попарно в инволюции (т. е. соответствующие им поля $\text{sgrad } g_s$ коммутируют).

Следовательно, L лежит в ядре всех A_1, \dots, A_{n-i} .

Докажем второе утверждение леммы. Из свойств симплектической формы Ω и оператора $A \in \text{sp}(2n, \mathbb{R})$ следует, что для любых двух векторов ξ, η выполнено тождество (предложение 1.3):

$$\Omega(A\xi, \eta) = -\Omega(\xi, A\eta).$$

Следовательно, $\text{Im } A$ содержится в косоортогональном дополнении к $\ker A$. Лемма доказана. ■

Отсюда следует, что можно определить естественное действие операторов A_1, \dots, A_{n-i} на фактор-пространстве L'/L . Мы обозначим их теми же буквами.

Лемма 1.9. *На пространстве L'/L имеется естественная симплектическая структура $\tilde{\Omega}$, а действующие в L'/L операторы A_1, \dots, A_{n-i} являются элементами алгебры Ли симплектической группы $\text{Sp}(2(n-i), \mathbb{R})$.*

Доказательство.

Ясно, что L — это ядро ограничения формы Ω на L' . Поэтому на фактор-пространстве L'/L корректно определена невырожденная кососимметрическая форма $\tilde{\Omega}$

$$\tilde{\Omega}(\xi L, \eta L) = \Omega(\xi, \eta).$$

Для каждого оператора A_s нам нужно проверить выполнение следующего тождества

$$\tilde{\Omega}(A_s(\xi L), \eta L) = -\tilde{\Omega}(\xi L, A_s(\eta L)),$$

которое согласно предложению 1.3 эквивалентно условию $A_s \in \text{sp}(2(n-i), \mathbb{R})$.

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(A_s(\xi L), \eta L) &= \tilde{\Omega}(A_s(\xi)L, \eta L) = \Omega(A_s(\xi), \eta) = \\ &= -\Omega(\xi, A_s(\eta)) = -\tilde{\Omega}(\xi L, A_s(\eta)L) = -\tilde{\Omega}(\xi L, A_s(\eta L)). \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Теперь мы можем рассмотреть в вещественной симплектической алгебре Ли $\text{sp}(2(n-i), \mathbb{R})$ коммутативную подалгебру $K(x, \mathcal{F})$, порожденную операторами A_1, \dots, A_{n-i} .

Определение 1.24. Критическая точка $x \in K_i$ отображения момента \mathcal{F} называется *невырожденной*, если $K(x, \mathcal{F})$ — подалгебра Картана в $\text{sp}(2(n-i), \mathbb{R})$.

Отметим, что подалгебра $K(x, \mathcal{F})$ зависит только от точки x и от отображения момента \mathcal{F} . В частности, она не зависит от сделанной выше линейной замены функций f_1, \dots, f_n на функции g_1, \dots, g_n . На самом деле подалгебра $K(x, \mathcal{F})$ полностью определяется пуассоновым действием группы \mathbb{R}^n в окрестности точки x .

Отметим, что описанная выше процедура фактически эквивалентна локальной редукции по гамильтонову действию группы \mathbb{R}^i , порожденной независимыми в точке x функциями g_{n-i+1}, \dots, g_n : сначала мы делаем такую редукцию, чтобы точка x стала неподвижной, а затем для неподвижной точки ранга ноль повторяем определение, данное выше для двух степеней свободы.

Как проверить, является ли коммутативная подалгебра $K(x, \mathcal{F})$ подалгеброй Картана в $sp(2(n-i), \mathbb{R})$? Критерий довольно прост. Она должна иметь размерность $n-i$ и содержать элемент с различными собственными значениями. Это позволяет переформулировать определение невырожденной точки следующим образом.

Определение 1.25. Критическая точка x ранга i невырождена тогда и только тогда, когда гессианы $d^2 g_1(x), \dots, d^2 g_{n-i}(x)$ линейно независимы на L' и для ограничения на подпространство L' некоторой их линейной комбинации $\lambda_1 d^2 g_1(x) + \dots + \lambda_{n-i} d^2 g_{n-i}(x)$ многочлен

$$P(\mu) = \det(\lambda_1 d^2 g_1(x) + \dots + \lambda_{n-i} d^2 g_{n-i}(x) - \mu\Omega)|_{L'}$$

имеет $2(n-i)$ различных ненулевых корней.

Это определение можно еще переформулировать так.

Рассмотрим пространство, линейно порожденное функциями f_1, \dots, f_n , как коммутативную алгебру Ли. И рассмотрим в ней стационарную подалгебру точки x , т.е. подалгебру K_x , состоящую из функций f таких, что $df(x) = 0$. Пусть L — касательное подпространство к орбите точке x , т.е. подпространство, порожденное векторами $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$, а L' — его косоортогональное дополнение.

Определение 1.26. Критическая точка x ранга i называется невырожденной, если выполнены два условия:

- 1) для любой функции $f \in K_x$, отличной от нуля, квадратичная форма $d^2 f(x)$ не равна тождественно нулю на подпространстве L' ;
- 2) существует функция f из K_x такая, что многочлен

$$P(\mu) = \det(d^2 f(x) - \mu\Omega)|_{L'}$$

имеет $2(n-i)$ различных ненулевых корней.

Поясним связь последнего определения с двумя предыдущими. Легко видеть, что подалгебра $K(x, \mathcal{F})$ является образом стационарной подалгебры K_x точки x при естественном отображении $f \rightarrow d^2 f(x)$. Первое условие в определении 1.25

означает, что это отображение является изоморфизмом и, следовательно, эквивалентно тому, что $\dim K(x, \mathcal{F}) = n - i$. Второе условие означает, что подалгебра $K(x, \mathcal{F})$ содержит регулярный элемент (т.е. оператор с различными собственными значениями). Отметим также, что пространство L' , на которое мы ограничиваем все гессианы, имеет размерность $2n - i$, поэтому многочлен $P(\mu)$ из двух последних определений имеет $2n - i$ корней. Однако, i из этих корней всегда равны нулю, поскольку i -мерное подпространство $L \subset L'$ лежит в ядре всех гессианов. Требование заключается в том, чтобы все остальные корни были различны.

Обозначим через K_i^* множество невырожденных критических точек ранга i отображения момента. Можно доказать, что оно всегда является гладким симплектическим подмногообразием в M^{2n} размерности $2i$. Кроме того, оно гладко расслоено на i -мерные орбиты пуассонова действия группы \mathbb{R}^n .

Стоит особо выделить класс интегрируемых систем, у которых все критические точки (всех рангов) отображения момента невырождены. Такие системы действительно существуют, и ниже мы приведем примеры.

1.10.4. Типы невырожденных особенностей в многомерном случае

Согласно определению 1.24 критическая точка ранга i отображения момента \mathcal{F} является невырожденной в том и только в том случае, когда подалгебра $K(x, \mathcal{F})$ в вещественной симплектической алгебре Ли $sp(2(n - i), \mathbb{R})$ является картановской. Напомним, что в отличие от случая комплексной симплектической алгебры Ли $sp(n - i, \mathbb{C})$, в вещественной алгебре Ли $sp(2(n - i), \mathbb{R})$ существуют несопряженные картановские подалгебры. Они имеют разные типы, и эти типы фактически классифицируют невырожденные точки отображения момента в вещественном случае. Такая классификация была предложена Вильямсоном (J. Williamson) [391]. Чтобы сформулировать его теорему, удобно смоделировать вещественную алгебру Ли $sp(2m, \mathbb{R})$ как пространство однородных квадратичных полиномов в симплектическом пространстве \mathbb{R}^{2m} с канонической линейной 2-формой ω (обозначим ее матрицу через Ω). Коммутатор в этой алгебре — это обычная скобка Пуассона полиномов (рассматриваемых как функции).

КОММЕНТАРИЙ. Поясним связь этой модели с конструкцией предыдущего параграфа. Рассмотрим однородный квадратичный полином f и соответствующее ему векторное поле $\text{sgrad } f$. Оно имеет особую точку в нуле, и мы можем поэтому рассмотреть его линеаризацию A_f как некоторый симплектический оператор. Легко проверяется, что отображение $f \rightarrow A_f$ является изоморфизмом алгебры квадратичных полиномов на алгебру $sp(2m, \mathbb{R})$.

Теорема 1.6 (J. Williamson). Пусть $K \subset sp(2m, \mathbb{R})$ — подалгебра Картана. Тогда существует симплектическая система координат $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ в \mathbb{R}^{2m} и базис e_1, \dots, e_m в K такие, что каждый из квадратичных полиномов e_i имеет один из следующих видов:

- 1) $e_i = x_i^2 + y_i^2$ (эллиптический тип),

2) $e_i = x_i y_i$ (гиперболический тип),

3) $e_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$, $e_{i+1} = x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}$ (тип фокус-фокус).

Из этой теоремы видно, что тип картановской подалгебры K полностью определяется набором трех целых чисел (m_1, m_2, m_3) , где $m_1 + m_2 + 2m_3 = m$, и m_1 — это число элементов базиса эллиптического типа, m_2 — гиперболического типа, а m_3 — число пар элементов e_i, e_{i+1} базиса, имеющих тип фокус-фокус.

Комментарий. Тип (m_1, m_2, m_3) картановской подалгебры K в $sp(2m, \mathbb{R})$ можно описать несколько по-другому. Рассмотрим регулярный элемент в картановской подалгебре K . Его можно представить как квадратичный полином f , который задается некоторой симметричной матрицей. Обозначим ее снова через f . Рассмотрим ее характеристическое уравнение относительно формы ω :

$$\det(f - \mu\Omega) = 0.$$

Это уравнение имеет какой-то набор корней. Корни разбиваются на три группы:

1) пары сопряженных чисто мнимых корней $i\alpha, -i\alpha$,

2) пары вещественных корней $\beta, -\beta$,

3) четверки комплексно сопряженных корней $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, -\alpha + i\beta, -\alpha - i\beta$.

Количество элементов в каждой такой группе обозначим соответственно через m_1, m_2, m_3 . Это и есть те самые числа m_1, m_2, m_3 , которые появились при классификации картановских подалгебр.

Итак, с каждой невырожденной особенностью отображения момента \mathcal{F} связана некоторая картановская подалгебра, которая классифицируется некоторой тройкой целых чисел (m_1, m_2, m_3) . Поэтому совершенно естественно назвать эту тройку (m_1, m_2, m_3) типом данной особенности.

Окончательно мы получаем, что невырожденная особенность отображения момента \mathcal{F} характеризуется четырьмя целыми числами:

$$(i = \text{ранг особенности}, (m_1, m_2, m_3) = \text{тип}).$$

При этом $m_1 + m_2 + 2m_3 + i = n$, где n — число степеней свободы данной интегрируемой системы.

Наша ближайшая цель — описать структуру слоения Лиувилля в окрестности невырожденной особенности в многообразии M^{2n} . Сначала определим некоторое модельное слоение Лиувилля в \mathbb{R}^{2n} . Для этого рассмотрим набор функций следующего вида:

$$F_j = p_j^2 + q_j^2,$$

$$F_k = p_k q_k,$$

$$F_l = p_l q_{l+1} - q_l p_{l+1}, \quad F_{l+1} = p_l q_l + p_{l+1} q_{l+1},$$

$$F_s = p_s,$$

где $j = 1, \dots, m_1$; $k = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$; $l = m_1 + m_2 + 1, m_1 + m_2 + 3, \dots, m_1 + m_2 + 2m_3 - 1$; $s = m_1 + m_2 + 2m_3 + 1, \dots, n$. Ясно, что все эти функции (F_j, F_k, F_l, F_s) коммутируют друг с другом относительно скобки Пуассона, их n штук и они функционально независимы. Поэтому они определяют некоторое модельное (каноническое) лиувиллево слоение \mathcal{L}_{can} в окрестности точки 0 , которая, очевидно, является невырожденной особой точкой отображения момента $\mathcal{F}_{\text{can}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_{\text{can}}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$. Легко видеть, что ранг этой невырожденной особенности равен i , а тип — (m_1, m_2, m_3) .

Утверждение, формулируемое ниже является прямым следствием теоремы Рюссмана-Вея-Ито о приведении к каноническому виду (нормальной форме) коммутирующих функций в окрестности невырожденной особой точки. Эта теорема подробно обсуждается в приложении 3.

Теорема 1.7 (Теорема о локальной линеаризации слоения Лиувилля около невырожденной особенности). Пусть дана вещественно-аналитическая интегрируемая система с n степенями свободы на вещественно-аналитическом многообразии M^{2n} . Тогда слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга i и типа (m_1, m_2, m_3) всегда локально симплектоморфно модельному слоению Лиувилля \mathcal{L}_{can} с теми же параметрами. В частности, любые два слоения Лиувилля с совпадающими параметрами (i, m_1, m_2, m_3) локально симплектоморфны.

Теорема 1.7 может быть переформулирована несколько иначе. Пусть f_1, \dots, f_n — произвольные коммутирующие функции. Рассмотрим их тейлоровские разложения в невырожденной особой точке отображения \mathcal{F} в некоторой канонической системе координат. Отбросим все члены этих разложений кроме линейных и квадратичных. Легко видеть, что полученные функции останутся коммутирующими и будут определять некоторое слоение Лиувилля \mathcal{L}_0 , которое естественно считать линеаризацией исходного слоения \mathcal{L} , задаваемого функциями f_1, \dots, f_n . Теорема 1.7 утверждает, что локально слоение \mathcal{L} симплектоморфно своей линеаризации \mathcal{L}_0 .

Еще одно важное следствие теоремы 1.7 состоит в том, что локально невырожденная особенность имеет тип прямого произведения, в котором каждый сомножитель представляет собой элементарную особенность, а их число равно $m = i + m_1 + m_2 + m_3$. Более точно мы имеем в виду следующее. Симплектическое многообразие M^{2n} может быть представлено в виде декартова произведения $M^{2n} = M_1 \times \dots \times M_m$ симплектических многообразий, на каждом из которых задано отображение момента с элементарной особенностью. Это отображение задается одной из модельных функций F_j, F_k, F_s или парой F_l, F_{l+1} .

Это разложение позволяет понять, как выглядит бифуркационная диаграмма в окрестности невырожденной особой точки. Она будет диффеоморфна бифуркационной диаграмме модельного отображения момента \mathcal{F}_{can} , которую мы в дальнейшем будем называть канонической бифуркационной диаграммой и обозначать через Σ_{can} . Опишем ее структуру более подробно.

Сначала посмотрим, как локально выглядит образ отображения момента и бифуркационная диаграмма для элементарных невырожденных особенностей. Таких особенностей три — центр, седло и фокус. Кроме них в разложении учас-

твуют сомножители без особенностей (задаваемые четвертой группой функций вида $F_s = p_s$). Формально можно считать, что мы имеем дело с тривиальной особенностью. Все четыре возможности перечислены на рис. 1.11:

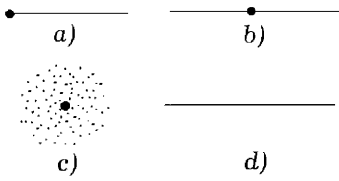


Рис. 1.11

а) $M = \mathbb{R}^2$, $F = p^2 + q^2$ (центр). Образ отображения момента — это луч, а бифуркационная диаграмма Σ — его вершина.

б) $M = \mathbb{R}^2$, $F = pq$ (седло). Образ отображения момента — прямая, а Σ — это точка на ней.

в) $M = \mathbb{R}^4$, $F_1 = p_1 q_2 - q_1 p_2$, $F_2 = p_1 q_1 + p_2 q_2$ (фокус-фокус). Образ отображения момента — это плоскость, а Σ — изолированная точка на ней.

д) $M = \mathbb{R}^2$, $F = p$ (регулярный случай). Образ отображения момента — прямая, а Σ — пустое множество.

Поскольку модельная особенность имеет тип прямого произведения перечисленных четырех типов сомножителей, то и образ U_{can} отображения момента \mathcal{F}_{can} , и бифуркационная диаграмма Σ_{can} тоже разлагаются в прямое произведение в следующем естественном смысле. Рассмотрим образы U_i отображения момента для каждого из сомножителей M_i вместе с соответствующей бифуркационной диаграммой $\Sigma_i \subset U_i$. Тогда

$$U_{\text{can}} = U_1 \times \dots \times U_m,$$

$$\Sigma_{\text{can}} = U_{\text{can}} \setminus ((U_1 \setminus \Sigma_1) \times (U_2 \setminus \Sigma_2) \times \dots \times (U_s \setminus \Sigma_s)).$$

Поскольку все возможные сомножители, т.е. пары (U_i, Σ_i) , нам известны и перечислены на рис. 1.11, то для невырожденной особенности каждого типа нетрудно явно описать ее локальную бифуркационную диаграмму Σ . Конечно, здесь мы имеем в виду описание с точностью до диффеоморфизма.

Подчеркнем, что каждый из типов (i, m_1, m_2, m_3) однозначно определяет свою бифуркационную диаграмму. Кроме того, для разных типов соответствующие бифуркационные диаграммы различны, т.е. имеется взаимно-однозначное соответствие между типами особенностей и их (локальными) бифуркационными диаграммами.

В качестве примера перечислим все бифуркационные диаграммы невырожденных особенностей для случая трех степеней свободы. Здесь четверки (i, m_1, m_2, m_3) выглядят так:

- 1) $(3, 0, 0, 0)$ — регулярная точка,
- 2) $(2, 1, 0, 0)$ — эллиптическая особая точка ранга 2 (центр),
- 3) $(2, 0, 1, 0)$ — гиперболическая особая точка ранга 2 (седло),
- 4) $(1, 0, 0, 1)$ — фокус-фокус ранга 1,
- 5) $(1, 2, 0, 0)$ — центр-центр ранга 1,

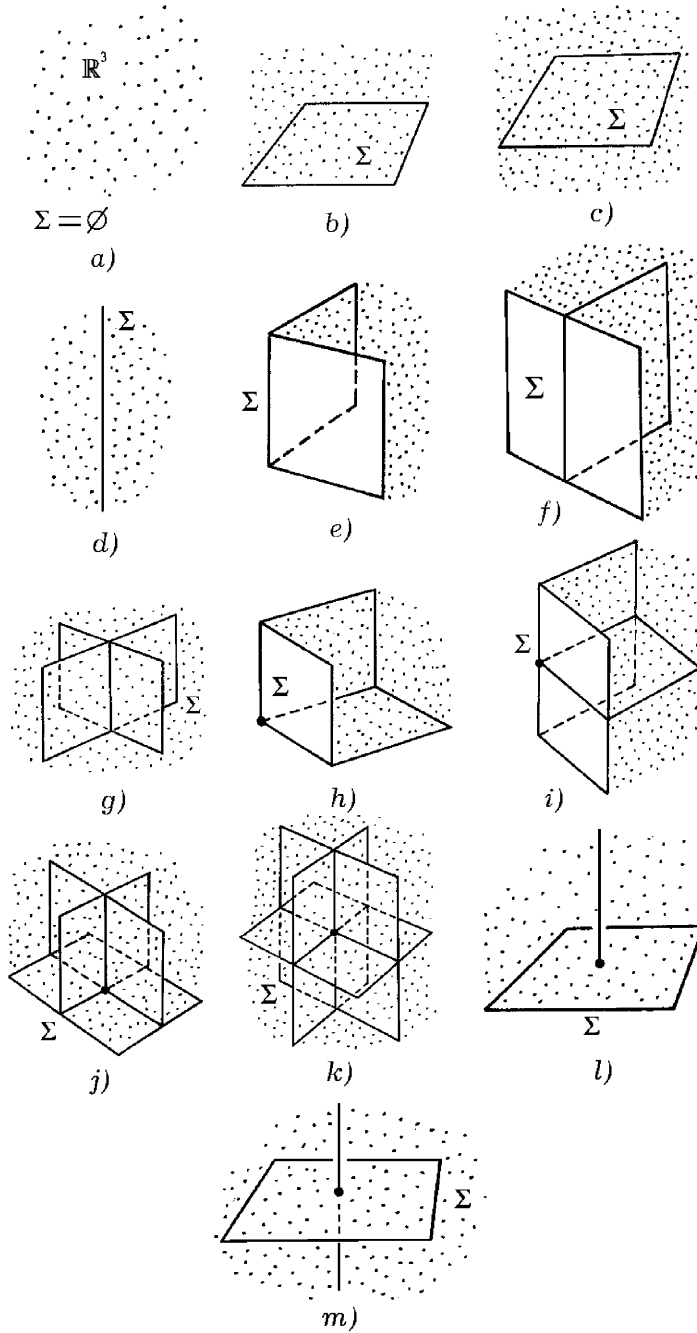


Рис. 1.12

- 6) $(1, 1, 1, 0)$ — центр-седло ранга 1,
- 7) $(1, 0, 2, 0)$ — седло-седло ранга 1,
- 8) $(0, 3, 0, 0)$ — центр-центр-центр ранга 0,
- 9) $(0, 2, 1, 0)$ — центр-центр-седло ранга 0,
- 10) $(0, 1, 2, 0)$ — центр-седло-седло ранга 0,
- 11) $(0, 0, 3, 0)$ — седло-седло-седло ранга 0,
- 12) $(0, 1, 0, 1)$ — центр-фокус-фокус ранга 0,
- 13) $(0, 0, 1, 1)$ — седло-фокус-фокус ранга 0.

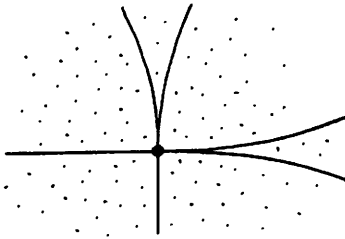


Рис. 1.13

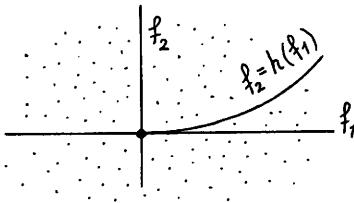


Рис. 1.14

Соответствующие образы отображений момента и бифуркационные диаграммы Σ_{can} в \mathbb{R}^3 изображены на рис. 1.12. Точечная штриховка указывает трехмерные области, заполненные образом отображения момента \mathcal{F}_{can} . На рисунке показаны бифуркационные диаграммы Σ_{can} для канонических моделей. Эти диаграммы составлены из кусков двумерных плоскостей и прямых. Если же рассматривается аналитическая интегрируемая система общего вида, то указанные картинки подвергнутся диффеоморфизму.

Если интегрируемая система не аналитическая, а гладкая, то могут появиться расщепления бифуркационных диаграмм, как показано на рис. 1.13. Некоторая дуга (или поверхность) диаграммы Σ может в особой точке из Σ расщепиться на две касающиеся дуги (или на две касающиеся поверхности). Подчеркнем, что касание поверхностей (или дуг), возникающее в момент расщепления диаграммы Σ , обязательно имеет бесконечный порядок. В аналитическом случае таких расщеплений, конечно, не бывает. Эффект гладкого расщепления связан с тем, что в седловом случае линия уровня $pq = \epsilon$ несвязна и состоит из двух компонент. При этом каждая из них может отображаться независимо, «ничего не зная» о другой компоненте.

В качестве примера рассмотрим следующую пару коммутирующих функций:

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 q_1, \\ f_2 &= p_2 q_2 + \lambda(p_1, q_1), \end{aligned}$$

где λ — функция класса C^∞ (но не аналитическая), задаваемая формулой

$$\lambda(p_1, q_1) = \begin{cases} h(p_1 q_1) & \text{при } p_1 > 0, q_1 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где функция $h(x)$ имеет ноль бесконечного порядка при $x = 0$. Особые точки заполняют здесь две поверхности $\{p_1 = 0, q_1 = 0\}$, и $\{p_2 = 0, q_2 = 0\}$. Бифуркационная диаграмма на плоскости с координатами f_1, f_2 состоит из двух прямых $f_1 = 0, f_2 = 0$, и кривой $f_2 = h(f_1)$. См. рис. 1.14. Видно, что в нуле происходит бесконечно гладкое расщепление оси f_1 .

1.11. Основные типы эквивалентностей динамических систем

Мы будем рассматривать гладкие динамические системы и следующие шесть типов их эквивалентности:

- 1) Топологическая сопряженность динамических систем.
- 2) Гладкая сопряженность динамических систем.
- 3) Траекторная топологическая эквивалентность динамических систем.
- 4) Траекторная гладкая эквивалентность динамических систем.
- 5) Лиувиллева эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем.
- 6) Грубая лиувиллева эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем.

Определение 1.27. Две гладкие динамические системы v_1 и v_2 на гладких многообразиях Q_1 и Q_2 называются *топологически сопряженными* (соотв. *гладко сопряженными*), если существует гомеоморфизм (соотв. диффеоморфизм) $\tau: Q_1 \rightarrow Q_2$, переводящий поток σ_1^t (отвечающий системе v_1) в поток σ_2^t (отвечающий системе v_2), т. е. $\sigma_2^t = \tau \circ \sigma_1^t \circ \tau^{-1}$.

Для гладких систем их гладкая сопряженность означает, что существует диффеоморфизм τ , переводящий v_1 в v_2 , т. е. $d\tau(v_1) = v_2$. Другими словами, гладко сопряженные системы получаются друг из друга регулярной заменой координат. Поэтому сопряженность — самое сильное отношение эквивалентности на множестве динамических систем, означающее по существу изоморфизм. Фактически, с точки зрения обыкновенных дифференциальных уравнений сопряженные системы представляют одно и то же уравнение, записанное в разных координатах.

Определение 1.28. Пусть v_1 и v_2 — две гладкие динамические системы на многообразиях Q_1 и Q_2 . Они называются *топологически (гладко) траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\xi: Q_1 \rightarrow Q_2$, переводящий ориентированные траектории первой системы в ориентированные траектории второй системы.

При этом не требуется сохранения параметра (времени) на траекториях. Другими словами, траектория рассматривается здесь как кривая без параметризации (но с направлением, задаваемым потоком).

Прокомментируем это определение. Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = f(x)$ и $\frac{dy}{dt} = g(y)$. Что означает их (гладкая) траекторная эквивалентность? Это означает, что найдется регулярная замена переменных и времени

$$x = x(y), \quad dt = \lambda(y) d\tau \quad (\text{здесь } \lambda(y) > 0),$$

которая переводит первое уравнение во второе.

Пусть M^4 — гладкое симплектическое многообразие, на котором задана интегрируемая гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ с первым интегралом f . В этом случае на многообразии M возникает структура слоения Лиувилля. Напомним, что его слоями по определению являются связные компоненты совместных поверхностей уровня гамильтониана H и интеграла f . Мы будем предполагать, что они компактны. В частности, все регулярные слои представляют собой двумерные торы Лиувилля.

Фиксировав значение гамильтониана, мы получаем также слоение Лиувилля на фиксированной изоэнергетической 3-поверхности $Q^3 = \{H = h\}$. Мы будем предполагать здесь, что $Q^3 = Q_h^3$ является гладким компактным многообразием.

Определение 1.29. Две интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на M_1^4 и M_2^4 (соответственно, на Q_1^3 и Q_2^3) называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм M_1^4 на M_2^4 (соответственно, Q_1^3 на Q_2^3), переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй системы.

Другими словами, системы лиувиллево эквивалентны, если они имеют одинаковые слоения Лиувилля.

Определение 1.30. Пусть v — интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система на M^4 . Рассмотрим соответствующее ей слоение Лиувилля на M^4 . *Базой слоения Лиувилля* называется пространство его слоев с обычной фактор-топологией, т. е. топологическое пространство, точками которого объявляются слои слоения Лиувилля (каждый слой заменяется точкой).

Аналогично определяется база слоения Лиувилля на Q^3 .

В типичных случаях база слоения Лиувилля является не только хаусдорфовым пространством, но даже клеточным комплексом.

Определение 1.31. Две интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который локально (т. е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послыонного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Это определение имеет смысл как для гамильтоновых систем, заданных на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4 в целом, так и для их ограничений на изоэнергетические 3-поверхностях Q_1^3 и Q_2^3 .

Ясно, что лиувиллево эквивалентные системы являются грубо лиувиллево эквивалентными (но не наоборот).

Базой слоения Лиувилля на Q_h^3 является некоторый одномерный граф W_h . В этом случае можно описать грубую лиувиллеву эквивалентность по-другому. Введем операцию скручивания слоения Лиувилля на Q^3 . Разрежем Q^3 вдоль какого-то регулярного тора Лиувилля, в результате чего получим 3-многообразие с краем. Край состоит из двух торов. Склеим их обратно, применив, однако, для этого произвольный диффеоморфизм торов. Получим, вообще говоря, новое 3-многообразие со структурой Лиувиллева слоения. Скажем, что оно получено скручиванием Q^3 вдоль тора Лиувилля. Две интегрируемые системы будут грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им слоения Лиувилля получаются друг из друга в результате нескольких скручиваний.

Два последних определения, конечно, имеют смысл и для многомерных интегрируемых систем. Лиувиллеву эквивалентность интегрируемых систем можно рассматривать также и для любых инвариантных подмножеств (относительно пуассонова действия R^n). Например, в окрестности особого слоя слоения Лиувилля.

Отметим, что две интегрируемые системы с одинаковым числом степеней свободы в окрестности любых своих компактных неособых слоев (т.е. торов Лиувилля) всегда лиувиллево эквивалентны. Это сразу вытекает из теоремы Лиувилля.

ГЛАВА 2

Топология слоений, порождаемых функциями Морса на двумерных поверхностях

2.1. Простые функции Морса

Рассмотрим пространство всех гладких функций на гладком многообразии. Вопрос: как устроены типичные функции, функции общего положения? Чем они отличаются от экзотических функций? Ясно, что во многом свойства функции определяются характером ее особенностей, т. е. тех точек, в которых ее дифференциал равен нулю. Поэтому вопрос о типичности можно свести к вопросу — как устроены функции с типичными особенностями?

Рассмотрим гладкую функцию $f(x)$ на гладком многообразии X^n и пусть x_1, \dots, x_n — гладкие регулярные координаты в окрестности точки x . Точка x называется критической для функции f , если дифференциал

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

обращается в ноль в точке x . Это эквивалентно условию обращения в ноль всех частных производных функции в данной точке. Критическая точка называется невырожденной, если второй дифференциал

$$d^2 f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

невырожден в этой точке. Это эквивалентно условию, что матрица вторых частных производных имеет определитель, отличный от нуля.

Согласно известной лемме Морса [129], в окрестности каждой невырожденной критической точки всегда можно выбрать такие локальные координаты, в которых функция запишется в виде квадратичной формы:

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Для каждой невырожденной критической точки число λ определено однозначно и называется ее индексом. На рис. 2.1 показаны три возможных типа невырожденных критических точек для функции на двумерной поверхности: минимум, максимум, седло. Здесь же нарисованы линии уровня функции в окрестности каждой из этих особенностей. В подходящих координатах функция записывается так:

- 1) $f = -x^2 - y^2$ (максимум, индекс λ равен двум),
- 2) $f = x^2 + y^2$ (минимум, индекс λ равен нулю),
- 3) $f = -x^2 + y^2$ (седло, индекс λ равен единице).

Определение 2.1. Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

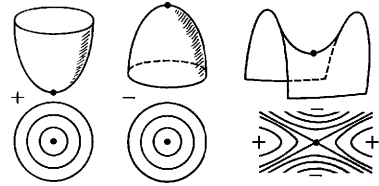


Рис. 2.1

Имеет место важная теорема: функции Морса всюду плотны в пространстве всех гладких функций на гладком многообразии [129]. Другими словами, любую гладкую функцию сколь угодно малым шевелением можно превратить в функцию Морса. При этом сложные, вырожденные критические точки рассыпаются в объединение некоторого числа морсовских, т. е. невырожденных особенностей.

Далее известно, что если X^n — компактное замкнутое многообразие, то функции Морса образуют открытое всюду плотное в C^2 -топологии подмножество в пространстве гладких функций на X .

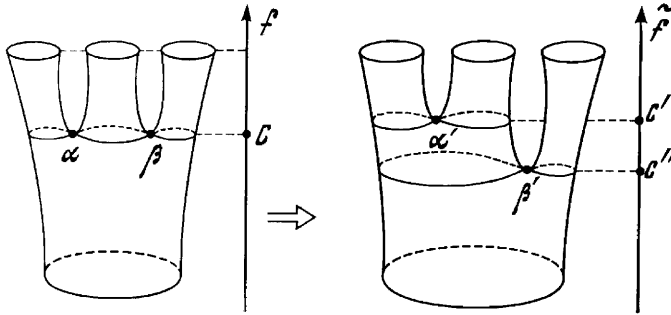


Рис. 2.2

В дальнейшем через $f^{-1}(r)$ будем обозначать полный прообраз значения r функции f . Через a будем обозначать регулярные значения функции, т. е. такие значения, в прообразе которых нет ни одной критической точки. В этом случае $f^{-1}(a)$ всегда является гладким подмногообразием в X^n в силу известной теоремы о неявной функции.

Через c будем обозначать критические значения функции, т. е. такие, в прообразе которых есть хотя бы одна критическая точка.

Далее, сколь угодно малым шевелением функции Морса можно добиться, чтобы на каждом критическом уровне c , — т. е. на множестве точек x , для которых $f(x) = c$, — лежала ровно одна критическая точка. Другими словами, критические точки, попавшие на один уровень, можно развести на близкие уровни (рис. 2.2). Функции Морса, имеющие ровно по одной критической точке на каждом критическом уровне, мы будем называть простыми.

2.2. Граф Риба функции Морса

Пусть f — функция Морса на компактном гладком многообразии X^n . Рассмотрим произвольную поверхность уровня $f^{-1}(a)$ и ее компоненты связности,

которые назовем слоями. В результате многообразие разбивается в объединение слоев, получается слоение с особенностями. Подчеркнем, что каждый слой связан, по определению. Объявляя каждый слой одной точкой и вводя естественную фактор-топологию в пространство Γ слоев, получаем некоторое фактор-пространство. Его можно рассматривать как базу этого слоения. Для функции Морса пространство Γ является графом.

Определение 2.2. Граф Γ называется *графом Риб* для функции Морса f на многообразии X^n . *Вершиной графа Риб* назовем точку, отвечающую особому слою функции f , т.е. связной компоненте уровня, содержащей критическую точку функции. Вершину графа Риб назовем *концевой*, если она является концом ровно одного ребра графа. Все остальные вершины назовем *внутренними*.

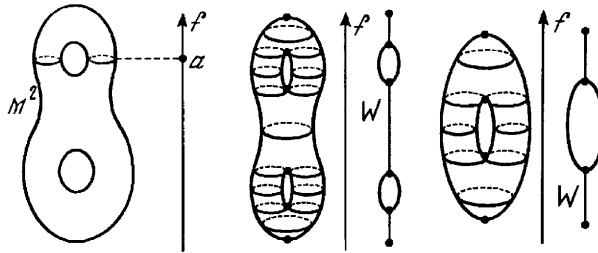


Рис. 2.3

Рассмотрим для примера двумерный тор в \mathbb{R}^3 , вложенный, как показано на рис. 2.3, и в качестве функции Морса возьмем естественную функцию высоты на торе. Тогда граф Риб имеет вид, показанный на рис. 2.3. На рис. 2.3 показан еще один пример функции Морса на кренделе — функция высоты. Здесь граф Риб устроен сложнее.

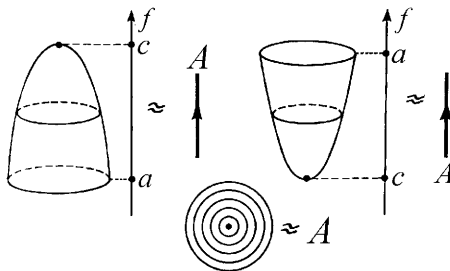


Рис. 2.4

Лемма 2.1. *Концевые вершины графа Риб взаимно-однозначно отвечают локальным минимумам и максимумам функции. Внутренние вершины графа Риб взаимно-однозначно отвечают особым слоям функции, содержащим седловые критические точки.*

Доказательство.

Каждая критическая точка функции является либо локальным минимумом, либо локальным максимумом, либо седловой точкой. В первых двух случаях она, очевидно, соответствует концевой вершине графа Риб (рис. 2.4). И наоборот, каждая концевая вершина графа Риб отвечает локальному минимуму или максимуму. В самом деле, допустим противное, т.е. что критическая точка — седловая. Можно считать, что функция f равна нулю в этой точке. Тогда в сколь угодно малой окрестности такой критической точки существуют точки, в которых функция принимает противо-

положные по знаку значения. Это означает, что в данную вершину графа Рибо входят по крайней мере два ребра — на одном из которых функция положительна, а на другом — отрицательна. Получили противоречие. Лемма доказана. ■

Если заранее известно, является ли изучаемая поверхность ориентируемой или неориентируемой, то граф Рибо произвольной простой функции на ней позволяет восстановить топологию поверхности.

Теорема 2.1. *Граф Рибо простой функции Морса на замкнутой двумерной ориентируемой (или, соответственно, неориентируемой) поверхности X^2 определяет эту поверхность однозначно с точностью до диффеоморфизма.*

Доказательство.

Для простой функции Морса имеется взаимно-однозначное соответствие между ее критическими точками и вершинами графа Рибо. В самом деле, каждая вершина графа Рибо взаимно-однозначно отвечает критическому слою. В силу простоты функции, на нем — ровно одна критическая точка. В силу леммы 2.1 мы можем однозначно разбить вершины графа Рибо на два класса: концевые — отвечающие локальным минимумам и максимумам, и внутренние — отвечающие седловым критическим точкам. Хорошо известно, что эйлерова характеристика двумерного многообразия равна разности числа локальных минимумов и максимумов, т.е. концевых вершин, и числа седел, т.е. внутренних вершин. Таким образом, опираясь только на граф Рибо, мы можем найти эйлерову характеристику поверхности. Поскольку мы заранее знаем — ориентируема она, или нет, это и доказывает теорему, так как эйлерова характеристика является полным топологическим инвариантом поверхности как для ориентируемого, так и для неориентируемого случая. Теорема доказана. ■

Если функция не является простой, то аналог теоремы 2.1 неверен. Дело в том, что здесь на особом слое может быть несколько критических точек. Поэтому знание числа и типа вершин графа Рибо не позволяет найти эйлерову характеристику поверхности.

2.3. Понятие атома

Пусть f — функция Морса на поверхности X^2 . Пусть g — другая функция Морса на другой поверхности Y^2 . Возникает естественный вопрос: когда эти функции на поверхностях можно считать эквивалентными. Рассмотрим пару (X^2, f) и пару (Y^2, g) .

Определение 2.3. Функции Морса f и g на поверхностях X^2 и Y^2 будем называть *послойно эквивалентными*, если существует диффеоморфизм

$$\lambda: X^2 \rightarrow Y^2,$$

переводящий связные компоненты линий уровня функции f в связные компоненты линий уровня функции g . Иногда будем говорить, что пара (X^2, f) *послойно эквивалентна* паре (Y^2, g) .

ЗАМЕЧАНИЕ. При указанной послойной эквивалентности две связные компоненты какой-то одной линии уровня функции f могут отобразиться в связные компоненты, лежащие на разных линиях уровня функции g . То есть компоненты связности, бывшие изначально на одном уровне одной функции, могут расползаться на разные уровни другой функции.

Возникает интересная задача: дать классификацию функций Морса на поверхностях с точностью до послойной эквивалентности. Эту задачу мы решим ниже. Но сначала нужно изучить послойную эквивалентность функций Морса в окрестности их критических значений.

Неформальное определение. Атом — это топологический тип особенности функции Морса. Другими словами, атом — это топологический тип связной компоненты окрестности особого слоя функции Морса на поверхности.

Каждая функция Морса определяет слоение с особенностями на поверхности. Его слоями, по определению, считаются компоненты связности уровня функции. В окрестности каждого регулярного слоя это слоение тривиально — прямое произведение окружности на отрезок. В окрестности критического слоя слоение может быть устроено довольно сложно.

Определение 2.4. *Атомом* назовем окрестность P^2 критического слоя, задаваемую неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достаточно малого ε , расслоенную на линии уровня функции f и рассматриваемую с точностью до послойной эквивалентности. Другими словами, атом — это росток слоения на особом слое. Если критическое значение c — локальный минимум или локальный максимум, то атом будет называться *атомом* A . Если критическое значение c — седловое, то соответствующий атом будем называть *седловым*. Атом будет называться *простым*, если функция Морса f в паре (P^2, f) — простая. Остальные атомы будут называться *сложными*. Атом будет называться *ориентируемым (ориентированным)* или неориентируемым в зависимости от того, является ли поверхность P^2 ориентируемой (ориентированной) или неориентируемой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь мы не интересуемся ориентацией поверхности и направлением роста функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим здесь внимание читателя, знакомого с предыдущими публикациями на эту тему, что в некоторых из них понятие ориентируемости и неориентируемости атома имело несколько иной смысл и указывало на ориентируемость или неориентируемость сепаратрисных диаграмм гамильтонова поля для критических седловых окружностей.

Для дальнейшего полезно ввести важное понятие f -атома, или оснащенного атома, учитывающее направление роста функции f .

Пусть c — критическое значение функции f на X^2 и c' — критическое значение функции g на Y^2 . Рассмотрим их особые слои:

$$f^{-1}(c) \quad \text{и} \quad g^{-1}(c')$$

и предположим, что эти слои — связны.

Определение 2.5. Функции Морса f и g называются *послойно оснащено эквивалентными* в окрестности своих особых слоев $f^{-1}(c)$ и $g^{-1}(c')$, если существуют

два положительных числа ε и ε' и диффеоморфизм

$$\lambda: f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \rightarrow g^{-1}(c' - \varepsilon', c' + \varepsilon'),$$

переводящий линии уровня функции f в линии уровня функции g и сохраняющий направление роста функций, т. е. λ отображает область ($f > c$) в область ($g > c'$).

Обозначим поверхность с краем $f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ через P_c^2 . Индекс c будем часто опускать.

Определение 2.6. Рассмотрим пару (P^2, f) , где P^2 — связная компактная поверхность с непустым краем ∂P^2 , а f — функция Морса на ней, имеющая ровно одно критическое значение c , причем $f^{-1}(c - \varepsilon) \cup f^{-1}(c + \varepsilon) = \partial P^2$.

Класс оснащенной послойной эквивалентности этой пары (P^2, f) будет называться f -атомом, или *оснащенным атомом*.

Важное замечание. Каждому атому соответствуют два f -атома. Они получаются друг из друга заменой знака функции на атоме. Иногда эти два атома могут оказаться совпадающими, эквивалентными.

2.4. Простые атомы

Как устроены линии уровня простой функции Морса, заданной на двумерной поверхности X^2 ?

Если a — регулярное значение функции, то соответствующая линия уровня состоит из нескольких непересекающихся гладких окружностей (рис. 2.4). Эти окружности как-то перестраиваются при переходе через особый уровень функции. Опишем эти перестройки. Рассмотрим сначала ориентируемую поверхность.

2.4.1. Случай минимума и максимума. Атом A

Рассмотрим неособую линию уровня, близкую к точке минимума или максимума функции. Эта линия гомеоморфна окружности. Когда регулярное значение стремится к локальному минимуму или максимуму, окружность стягивается в точку (рис. 2.4). При этом двумерный диск расслаивается на концентрические окружности с общим центром, отвечающим точке локального минимума или максимума. Изобразим эту эволюцию линий уровня и перестройку следующим условным, но весьма наглядным образом. Каждую неособую линию уровня, окружность изобразим точкой, расположенной на уровне a (рис. 2.4). При изменении a , эта точка будет меняться и замечать отрезок. В момент, когда значение функции станет критическим, равным c , окружность сожмется в точку. Изобразим это событие буквой A с выходящим из нее отрезком.

Совершенно аналогично поступим в случае минимума (рис. 2.4). Здесь отрезок спускается сверху и кончается внизу буквой A .

Будем также считать, что буква A обозначает диск с точкой в центре, расслоенный на концентрические окружности. Мы получили пример простого атома A .

Атому A отвечают два f -атома. Один из них соответствует максимуму функции f , другой — минимуму функции f . Условно будем различать их, ставя стрелку на ребре, показывающую направление роста функции (рис. 2.4). Эти f -атомы различны.

2.4.2. Случай ориентируемого седла. Атом B

Если c — критическое седловое значение, то линия уровня является восьмеркой. Когда a стремится к c , то две окружности сближаются и сливаются в одной точке. Возникает перестройка линии уровня.

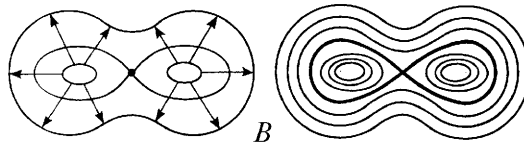


Рис. 2.5

Этот процесс показан на рис. 2.5. Меняя направление движения, можно говорить, наоборот, о распаде одной окружности на две. Исходная окружность перетягивается, возникает перемычка, затем две точки окружности сливаются, после чего получившаяся восьмерка распадается на две окружности. Поступая как и в предыдущем случае, т. е. изображая каждую регулярную окружность точкой, и прослеживая их эволюцию при изменении уровня, получаем граф, показанный на рис. 2.6. Этот атом мы обозначим через B .

Ему также отвечают два f -атома. Они получаются, когда мы поставим стрелки на трех ребрах, инцидентных с B на рис. 2.6. Соответствующий граф с ориентированными ребрами описывает либо распад одной окружности на две, либо, напротив, слияние двух окружностей в одну.

Атом B можно изобразить несколько по-другому (рис. 2.5), т. е. в виде плоского диска с двумя дырками, расслоенного на линии уровня функции Морса.

2.4.3. Случай неориентируемого седла. Атом \tilde{B}

Теперь откажемся от гипотезы ориентируемости X^2 . Перестройки типа A устроены одинаково — как в ориентируемом, так и в неориентируемом случаях. Отличие возникает в случае седла. Сначала вспомним, как реально происходит седловая перестройка в ориентируемом случае. Она показана на рис. 2.7. К окружности, являющейся одной из компонент края многообразия $\{f(x) \leq c - \varepsilon\}$, где ε — малая величина, приклеивается узкая полоска, прямоугольник. Причем, приклейка происходит таким образом, что получающаяся поверхность остается ориентируемой. После перестройки граница оказывается гомеоморфной объединению двух окружностей. При замене функции f на функцию $-f$ направление

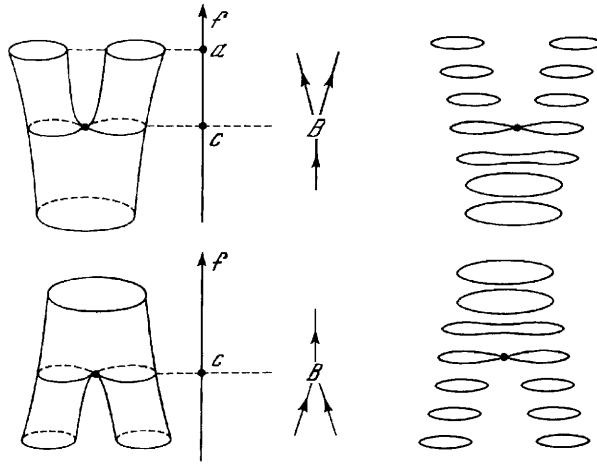


Рис. 2.6

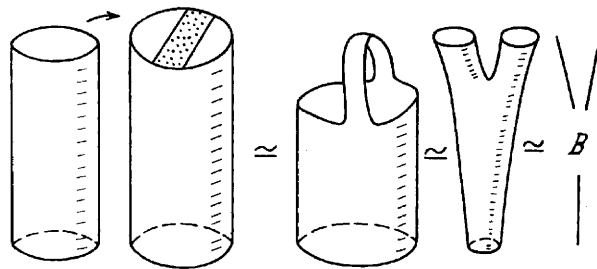


Рис. 2.7

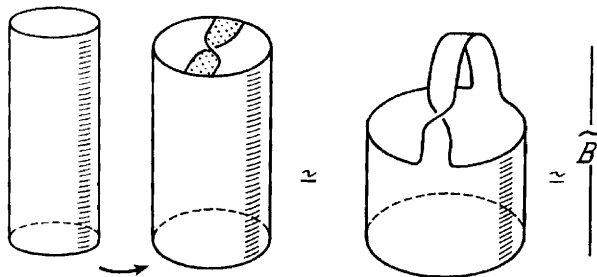


Рис. 2.8

перестройки меняется: две граничные окружности превращаются в одну.

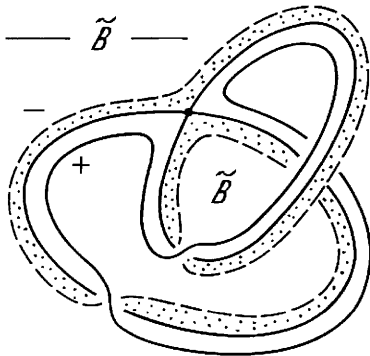


Рис. 2.9

Теперь перейдем к случаю, когда перестройка происходит внутри неориентируемой поверхности. Некоторые перестройки индекса 1, т.е. седловые, могут быть устроены здесь как и в ориентируемом случае. Однако, заведомо есть по крайней мере одна перестройка, устроенная принципиально по-другому. Она показана на рис. 2.8. Здесь перекрученный на 180° прямоугольник приклеивается к одной и той же граничной окружности поверхности с краем. В результате внутри поверхности $\{f \leq c + \varepsilon\}$ появляется новый лист Мебиуса. Ясно, что здесь после перестройки прежняя граничная окружность превращается снова в одну граничную окружность. Таким образом, при переходе через критический

уровень c одна окружность преобразуется снова в одну окружность. Используя введенную выше символику, т.е. изображая каждую неособую линию уровня — точкой, мы должны нарисовать описанную только что эволюцию так, как показано на рис. 2.8: ребро графа, в середине которого поставлена буква \tilde{B} . Эта буква условно обозначает неориентируемую перестройку.

На рис. 2.9 изображена поверхность $P^2 = f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ для неориентируемого атома \tilde{B} . Она получается склейкой двух листов Мебиуса.

2.4.4. Классификация простых атомов

Теорема 2.2. *Любой простой атом совпадает либо с атомом A , либо с атомом B , либо с атомом \tilde{B} . Этим трем атомам отвечают пять f -атомов: два — для атома A , два — для атома B и один — для атома \tilde{B} .*

Доказательство.

Из леммы Морса вытекает, что любая перестройка поверхности $\{f \leq c - \varepsilon\}$, где f — простая функция Морса, при переходе через критический уровень c сводится либо к приклейке 2-диска к границе множества $\{f \leq c - \varepsilon\}$, либо к приклейке прямоугольника. Приклейка 2-диска дает атом A . Приклейка прямоугольника дает либо атом B , либо атом \tilde{B} .

Отметим, что каждый из атомов A и B появляется в теории простых функций Морса двумя способами. Атом A может отвечать либо минимуму, либо максимуму функции. Атом B может описывать либо распад одной окружности, т.е. линии уровня функции, на две окружности, либо, наоборот, слияние двух окружностей в одну. Ясно, что эти перестройки переходят друг в друга при замене функции f на функцию $-f$. ■

Можно дать и другое доказательство теоремы 2.2, полезное для понимания топологии атомов.

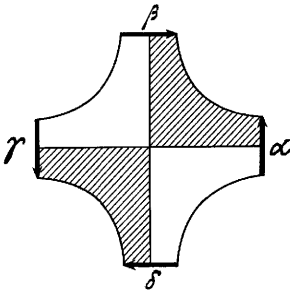


Рис. 2.10

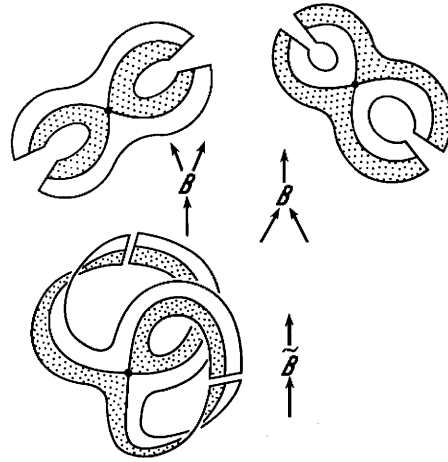


Рис. 2.11

Доказательство.

Рассмотрим малую окрестность критической седловой точки функции Морса, гомеоморфную диску, выделим в этой окрестности область $\{c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon\}$. Отметим в ней области положительности и отрицательности функции Морса. Получим объект, который иногда в дальнейшем будем называть крестом (рис. 2.10). Концами креста будем называть четыре ориентированных отрезка $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (рис. 2.10). Ориентация каждого из них указывает направление роста функции, т. е. ее градиента.

Вся поверхность $P^2 = \{c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon\}$ получается из этого креста простой процедурой. Нужно попарно склеить концы креста с учетом их ориентации. Ясно, что число различных способов склейки равно трем. Соответствующие склейки показаны на рис. 2.11. В результате мы получаем два различных ориентируемых f -атома, отвечающих атому B , и один неориентируемый f -атом, отвечающий атому \tilde{B} . Таким образом, в случае седлового атома никаких других возможностей нет. Теорема доказана. ■

2.5. Простые молекулы

2.5.1. Определение простой молекулы

Пусть f — простая функция Морса на компактной замкнутой поверхности X^2 , ориентируемой или неориентируемой. Рассмотрим ее граф Роба Γ . Его вершины отвечают критическим слоям функции Морса. Заменяем эти вершины соответствующими атомами, то есть либо атомом A , либо атомом B , либо атомом \tilde{B} . При этом мы считаем, что для каждого атома фиксирована его каноническая модель, описанная выше. Каждому ребру графа Роба, инцидентному с какой-либо его вершиной, мы сопоставляем одну из граничных окружностей

модели атома, отвечающего данной вершине. Это соответствие считается фиксированным. Это замечание существенно только для атома B (в случае простых атомов), поскольку у него неравноправны три граничные окружности, отвечающие ребрам графа Рибо, выходящим из вершины кратности три.

Определение 2.7. Получившийся граф будем называть *простой молекулой* W .

Пока понятие простой молекулы фактически ничем не отличается от понятия графа Рибо. Однако для сложных функций Морса молекула W будет нести в себе больше информации, чем граф Рибо Γ .

Определение 2.8. Ориентируем ребра простой молекулы W по направлению роста функции f . Получившийся граф назовем *простой f -молекулой*.

2.5.2. Теорема реализации

Рассмотрим конечный связный граф с вершинами степеней 1, 2 и 3. В каждую вершину кратности 1 поместим атом A . В каждую вершину кратности 2 поместим атом \bar{B} , и в каждую вершину кратности 3 — атом B . Снабдим каждое ребро графа ориентацией таким образом, чтобы каждый седловой атом приобрел хотя бы одно входящее и хотя бы одно выходящее ребро.

Предположим далее, что этот граф допускает погружение в 2-плоскость, при котором все его ребра будут ориентированы вверх.

Теорема 2.3. *Любой такой граф является простой молекулой, т. е. существует такая поверхность и такая простая функция Морса на ней, что ее молекула совпадает с заданным графом.*

Доказательство теоремы очевидно. ■

Отметим, что если поверхность X^2 ориентируема, то в молекуле W любой простой функции на X нет атомов \bar{B} .

Теорема 2.4. *Пусть $W(X^2, f)$ и $W(Y^2, g)$ — простые молекулы двух простых функций Морса на ориентированных поверхностях X и Y . Если молекулы совпадают, то поверхности X и Y диффеоморфны, а функции f и g послойно эквивалентны.*

Доказательство.

Действительно, молекула сообщает нам — из каких кусков нам следует склеивать поверхность и какие компоненты их границ нужно склеивать. При этом склеивать куски нужно, согласовывая на них ориентации. Для этого нужно задать ориентацию на каждом атоме. Это можно сделать двумя способами. Для простых атомов A и B всегда существует гомеоморфизм атома на себя, меняющий ориентацию атома, но сохраняющий его слоение. Поэтому результат склейки от выбора ориентации на каждом атоме не зависит. Теорема доказана. ■

2.5.3. Примеры простых функций Морса и простых молекул

ПРИМЕР 1. Рассмотрим на 2-торе стандартную функцию высоты при вложении тора в \mathbb{R}^3 , показанном на рис. 2.3. Ясно, что эта функция является простой и ее молекула имеет вид, показанный на рис. 2.12. Легко видеть, что эта функция Морса на 2-торе является минимальной, т. е. имеет наименьшее возможное число невырожденных критических точек.

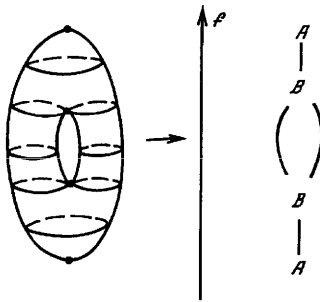


Рис. 2.12

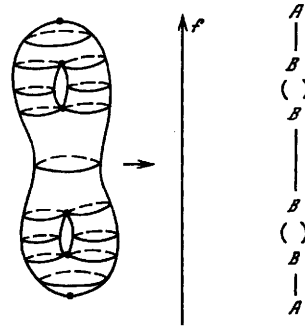


Рис. 2.13

ПРИМЕР 2. Минимальная простая функция Морса на кренделе, т. е. на сфере с двумя ручками, реализуется как функция высоты при вложении кренделя, показанном на рис. 2.13. Там же показана и соответствующая простая молекула.

ПРИМЕР 3. Минимальная простая функция Морса на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ строится так. Напомним, что проективная плоскость может быть представлена как результат склейки квадрата, что показано на рис. 2.14. На рис. 2.15 показано слоение $\mathbb{R}P^2$ на линии уровня минимальной простой функции Морса, и изображена соответствующая молекула.

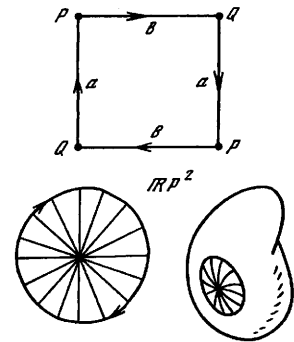


Рис. 2.14

Эту функцию можно записать еще и так. Рассмотрим на $\mathbb{R}P^2$ однородные координаты $(x : y : z)$. Тогда искомая простая функция имеет вид

$$f(x : y : z) = \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

ПРИМЕР 4. Минимальная простая функция Морса на бутылке Клейна строится так. Зададим бутылку Клейна в виде склейки квадрата, показанной на рис. 2.16. Тогда линии уровня искомой функции и соответствующая простая молекула показаны на рис. 2.17.

Интересно, что эту функцию можно реализовать как функцию высоты при подходящем погружении бутылки Клейна в \mathbb{R}^3 . Для этого нужно рассмотреть ее

$$A \text{ --- } \bar{B} \text{ --- } A$$

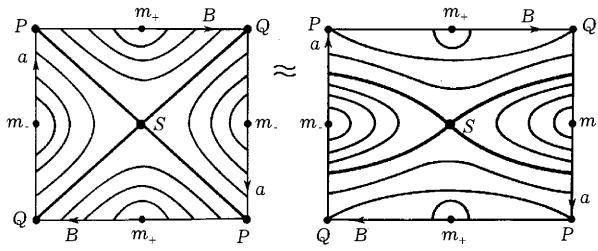


Рис. 2.15

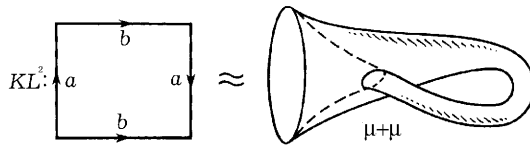


Рис. 2.16

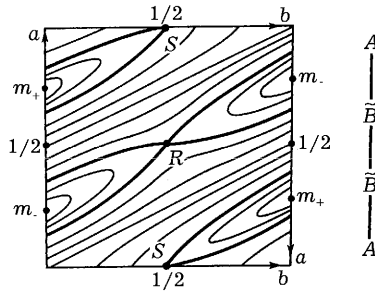


Рис. 2.17

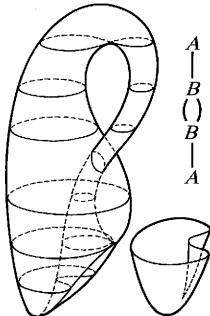


Рис. 2.18

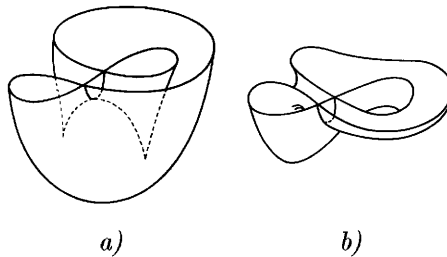


Рис. 2.19

стандартное погружение и положить его на бок на горизонтальную 2-плоскость. Бутылку Клейна следует при этом раздуть так, чтобы функция высоты имела ровно один минимум и ровно один максимум.

Кстати, на бутылке Клейна существует еще одна простая функция Морса, молекула которой совпадает с простой молекулой функции на торе (рис. 2.12). Эта функция может быть реализована как функция высоты при погружении бутылки Клейна в \mathbb{R}^3 как показано на рис. 2.18. Мы изобразили также эволюцию линий уровня функции высоты. Отметим, что в этой молекуле нет атома \tilde{B} , хотя бутылка Клейна неориентируема.

ПРИМЕР 5. Вернемся еще раз к простой функции Морса на проективной плоскости, построенной в примере 3. Молекула здесь такова:

$$A \text{ --- } \tilde{B} \text{ --- } A.$$

Оказывается, эту функцию можно реализовать как функцию высоты при подходящем погружении $\mathbb{R}P^2$ в \mathbb{R}^3 . Оказывается далее, что нужное для этого погружение $\mathbb{R}P^2$ является хорошо известной поверхностью Боя. Напомним ее конструкцию. Рассмотрим стандартное погружение бутылки Клейна, лежащее на боку на горизонтальной плоскости, разрежем его пополам горизонтальной плоскостью (рис. 2.19) и получим два листа Мебиуса. Возьмем только одну, нижнюю половинку, лист Мебиуса, показанный на рис. 2.19, и заклеим его диском, после чего получится $\mathbb{R}P^2$. Удобно осуществить эту заклею так. Поднимая плоскость вертикально вверх, будем гладко деформировать вложенный в нее край листа Мебиуса, как показано на рис. 2.20. Деформирующаяся кривая замечает при этом двумерное погруженное кольцо.

Когда граничная кривая расправится и превратится в стандартно вложенную окружность, заклеим ее диском. Лист Мебиуса, заклеенный диском, превращается в $\mathbb{R}P^2$. Мы описали погружение проективной плоскости в \mathbb{R}^3 , являющееся поверхностью Боя. Рассмотрим функцию высоты как проекцию на вертикальную прямую. На рис. 2.21(a) изображены эволюция ее линий уровня. Видно, что у этой функции есть лишь одна седловая точка. Ввиду неориентируемости $\mathbb{R}P^2$, эта точка должна отвечать неориентируемому седловому атому \tilde{B} . Получается искомая молекула

$$A \text{ --- } \tilde{B} \text{ --- } A.$$

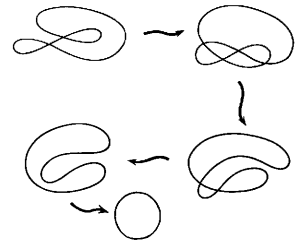


Рис. 2.20

Можно еще одним способом, более наглядно, изобразить в \mathbb{R}^3 функцию высоты на $\mathbb{R}P^2$ с молекулой $A \text{ --- } \tilde{B} \text{ --- } A$. Рассмотрим известное изображение $\mathbb{R}P^2$ в \mathbb{R}^3 , показанное на рис. 2.21(b). Эта поверхность K с особенностями является алгебраической в \mathbb{R}^3 и может быть задана следующим полиномиальным уравнением:

$$(k_1 x^2 + k_2 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0.$$

Расположим эту поверхность K в \mathbb{R}^3 вертикально и получим естественную функцию высоты h на ней.

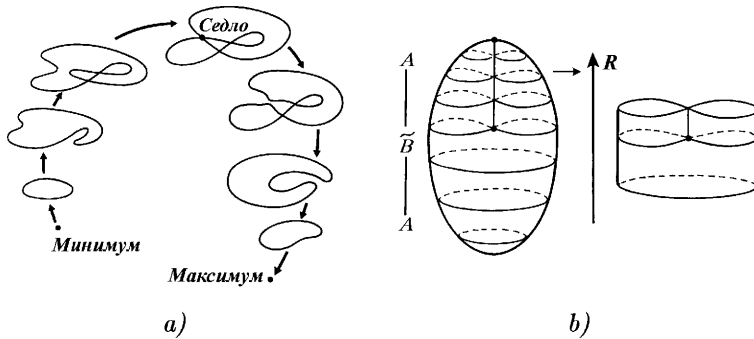


Рис. 2.21

Ясно, что можно так подобрать гладкое отображение g проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ на поверхность K , что связное отображение $hg: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ будет функцией Морса.

Далее, видно, что у нее ровно три критические точки и ее молекула имеет вид $A \text{---} \tilde{B} \text{---} A$, что и требовалось доказать.

На рис. 2.21 (b) отдельно показана модель с особенностью атома \tilde{B} в \mathbb{R}^3 такая, что одна граничная окружность — плоская, а вторая — погружена в плоскость.

Отметим, что любая простая функция Морса на двумерной поверхности, ориентируемой или неориентируемой, может быть реализована в виде функции высоты при некотором погружении этой поверхности в \mathbb{R}^3 .

2.5.4. Классификация минимальных простых функций Морса на поверхностях малого рода

Используя простые молекулы, можно дать классификацию простых функций Морса на замкнутых ориентируемых поверхностях малого рода с точностью до послышной эквивалентности. В классе простых функций Морса естественно выделяется подкласс простых минимальных функций Морса, то есть таких, у которых число критических точек минимально (для данной поверхности). Хорошо известно, что если функция Морса минимальна, то у нее есть ровно один минимум, ровно один максимум, а число седел равно $2g$, где g — это род поверхности (число ручек). Например, на сфере минимальная функция Морса ровно одна (с точностью до послышной эквивалентности). Это — функция высоты при стандартном вложении сферы в \mathbb{R}^3 .

Чтобы получить указанную классификацию на поверхности рода g , достаточно перечислить простые молекулы, содержащие ровно два атома A (отвечающих одному минимуму и одному максимуму) и $2g$ атомов B (отвечающих $2g$ седлам).

Теорема 2.5. Число классов послойно неэквивалентных простых функций Морса на замкнутой ориентированной поверхности рода g равно:

- 1 для сферы (т. е. $g = 0$),
- 1 для тора (т. е. $g = 1$),
- 3 для кренделя (т. е. $g = 2$),
- 16 для сферы с тремя ручками (т. е. $g = 3$).

Все соответствующие этим классам простые молекулы представлены на рис. 2.22(a, b).

Доказательство получается несложным перебором простых молекул. ■

Отношение послойной эквивалентности можно усилить следующим образом. Две функции Морса f и g на поверхности M называются топологически эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\xi: M \rightarrow M$ и $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такой, что $f(\xi(x)) = \eta(g(x))$. Будем считать, что диффеоморфизм η вещественной прямой на себя сохраняет ориентацию.

Отличие топологической эквивалентности и послойной эквивалентности состоит в следующем. Пусть какая-то линия уровня функции Морса состоит из нескольких компонент связности. При послойной эквивалентности эти компоненты могут «разбегаться» на разные уровни функции Морса. В то же время, при топологической эквивалентности, все эти компоненты обязаны оставаться на одном и том же уровне (хотя соответствующее критическое значение этого уровня может конечно измениться). В частности, при изучении топологической эквивалентности можно считать, что все критические уровни функции Морса естественно упорядочены (по их возрастанию). Важно, что этот порядок не меняется при топологической эквивалентности функций Морса. Поэтому классов топологической эквивалентности функций Морса больше чем классов послойной эквивалентности. Мы приведем здесь теорему, полученную Е. В. Кулиничем.

Теорема 2.6. Число классов топологически неэквивалентных функций Морса на замкнутой ориентированной поверхности рода g равно:

- 1 для сферы (т. е. $g = 0$),
- 1 для тора (т. е. $g = 1$),
- 3 для кренделя (т. е. $g = 2$),
- 31 для сферы с тремя ручками (т. е. $g = 3$),
- 778 для сферы с четырьмя ручками (т. е. $g = 4$),
- 37998 для сферы с пятью ручками (т. е. $g = 5$),
- 3171619 для сферы с шестью ручками (т. е. $g = 6$).

Все графы Рибо, отвечающие функциям Морса указанного вида на торе, кренделе и на сфере с тремя ручками, показаны на рис. 2.23(a, b, c). На этом рисунке учитывается взаимное расположение седловых критических уровней функции Морса. Критическая точка, отвечающая большему критическому значению функции, изображена выше, чем критические точки с меньшим критическим значением. На рис. 2.23 обведены пунктиром те графы Рибо, которые попадают в один класс послойной эквивалентности функций Морса. В результате вычеркивания дубликатов из рис. 2.23, получается рис. 2.22.

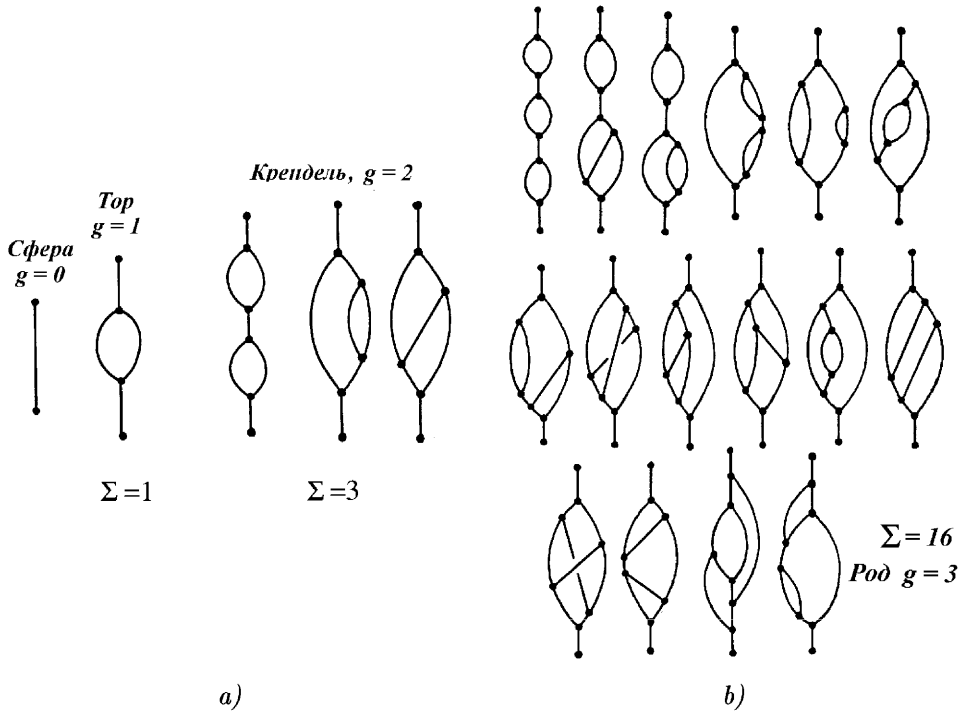


Рис. 2.22

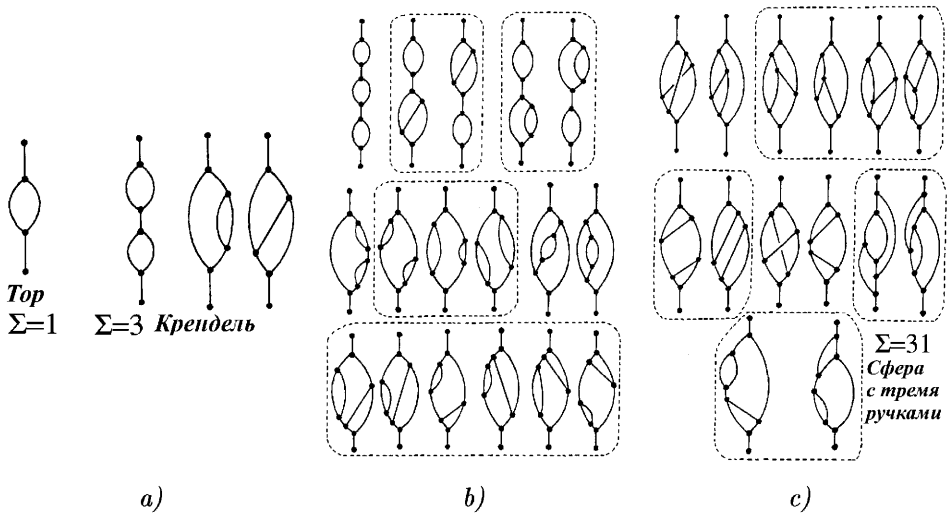


Рис. 2.23

2.6. Сложные атомы

Напомним, что атом называется сложным, если на критическом связном уровне функции f расположено более одной критической точки. Такие объекты естественно возникают во многих задачах геометрии и физики. Приведем пример. Пусть на поверхности X^2 гладко действует конечная группа G и пусть f — некоторая функция Морса, инвариантная относительно G . Тогда, как правило, такая функция будет сложной. В самом деле, если, например, орбита некоторой критической точки x целиком лежит внутри одной компоненты связности линии уровня $f(x) = \text{const}$, то на этом уровне окажется несколько различных критических точек функции. Простой пример показан на рис. 2.24. Здесь функция высоты инвариантна относительно группы \mathbb{Z}_5 . Связный критический уровень, содержащий 5 критических точек, также показан на рис. 2.24. Конечно, малым возмущением функции можно превратить ее в простую функцию Морса, т. е. развести критические точки на разные уровни. Однако это разрушает \mathbb{Z}_5 -симметрию. Это видно из рис. 2.25. Таким образом, в задачах, требующих изучения разного рода симметрий, приходится исследовать сложные функции Морса как самостоятельные объекты.

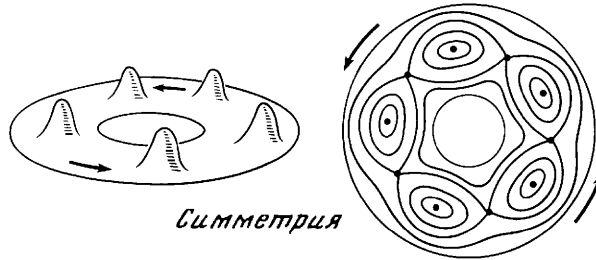


Рис. 2.24

Как мы покажем ниже, сложные функции Морса естественно возникают также при классификации потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях.

Основным представлением сложного атома является задание его в виде трубчатой окрестности критического уровня функции Морса, на котором лежит несколько критических точек.

Атом реализуется как двумерная поверхность, состоящая из плоских крестов и соединяющих их концы длинных узких лент, как условно показано на рис. 2.26. Поэтому можно дать другое, эквивалентное геометрическое определение атома.

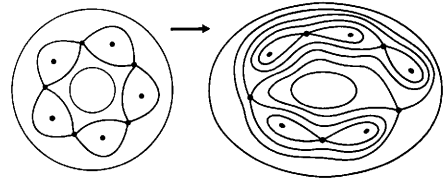


Рис. 2.25

Определение 2.9. *Атомом* называется пара (P^2, K) , где P^2 — связная компактная двумерная поверхность с краем, ориентируемая или неориентируемая, а K — связный граф в ней такой, что выполняются следующие условия.

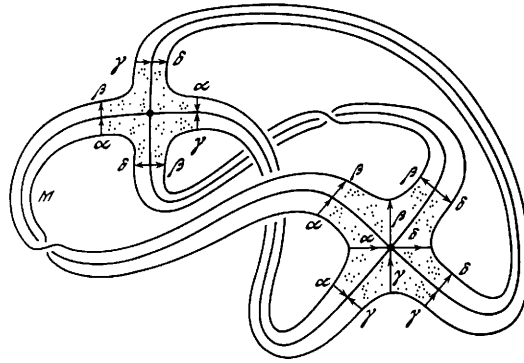


Рис. 2.26

- 1) Либо K состоит только из одной точки, т. е. изолированной вершины степени ноль, либо все вершины графа K имеют степень 4.
- 2) Каждая связная компонента множества $P^2 - K$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1]$ и множество этих колец можно разбить на два класса — положительные кольца и отрицательные кольца так, чтобы:
- 3) к каждому ребру графа K примыкало ровно одно положительное кольцо и ровно одно отрицательное кольцо.

Мы будем рассматривать атомы с точностью до естественной эквивалентности: два атома (P^2, K) и (P'^2, K') эквивалентны, если существует гомеоморфизм, переводящий P'^2 в P^2 , и K' в K .

На рис. 2.27 показаны примеры пар (P^2, K) , не являющихся атомами.

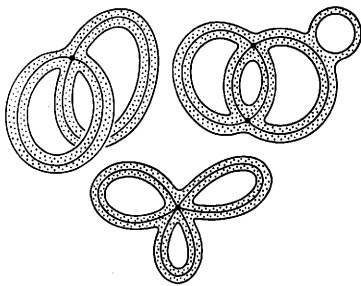


Рис. 2.27

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что каждый атом ретрагируется, стягивается на свой граф K .

Описанное в определении 2.9 разбиение колец на положительные и отрицательные можно делать двумя способами. Ясно, что положительные кольца можно переименовать в отрицательные, а отрицательные — в положительные. Если же разбиение фиксировать, то мы придем к понятию f -атома.

Определение 2.10. f -атомом называется атом из определения 2.9, для которого фиксировано разбиение колец на положительные и отрицательные.

Ясно, что на f -атоме в определении 2.10 можно задать функцию Морса, для которой граф K будет ее критическим уровнем (например, нулевым), поверхность P^2 будет множеством точек x таких, что

$$-\varepsilon \leq f(x) \leq +\varepsilon.$$

В частности, функция f будет положительна на положительных кольцах и отрицательна на отрицательных.

Определение 2.11. *Вершинами атома* называются вершины графа K , т. е. критические точки функции f . Число вершин атома называется его *сложностью*.

Мы будем обычно изображать атом какой-либо буквой, из которой выходят и в которую входят некоторое количество ребер. Каждое ребро условно изображает некоторое кольцо атома (см. выше). Поскольку у каждого кольца есть ровно одна граничная окружность, то естественно сказать, что у соответствующего ребра есть конец. Этот конец условно изображает граничную окружность кольца.

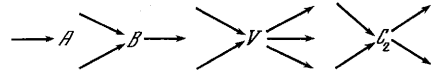


Рис. 2.28

Определение 2.12. Концы этих ребер мы назовем *концами атома*, а их количество — *валентностью атома*. Если мы рассматриваем f -атом, то естественно возникает понятие *положительных* и *отрицательных* ребер, отвечающих положительным и отрицательным кольцам соответственно. Договоримся считать положительные ребра атома — выходящими, а отрицательные — входящими. Для удобства снабдим ребра атома стрелками (рис. 2.28), указывая эту их ориентацию.

Ясно, что стрелки на ребрах атомов показывают направление роста функции f .

Рассмотрим все граничные окружности атома и заклеим каждую их них 2-диском. Получится замкнутая поверхность \tilde{P}^2 без края.

Определение 2.13. *Родом атома* назовем род поверхности \tilde{P}^2 . Если \tilde{P}^2 — ориентируема, то это — число ручек, а если \tilde{P}^2 — неориентируема, то это — количество пленок Мебиуса. Атом называется *плоским*, если получившаяся поверхность \tilde{P}^2 является сферой.

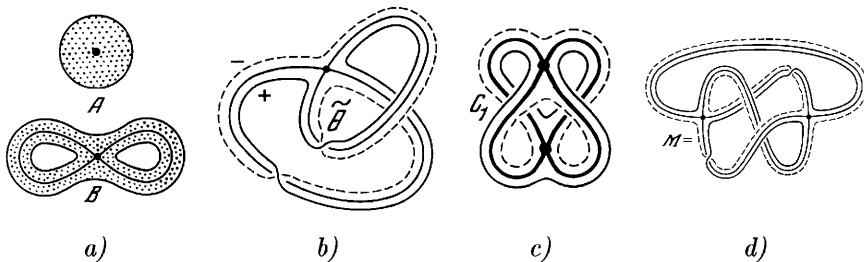


Рис. 2.29

На рис. 2.29 показаны примеры.

- а) Ориентируемые атомы A и B имеют род ноль, так как здесь \tilde{P}^2 — это сфера.

- b) Ориентируемый атом C_1 имеет род, равный единице, так как здесь \tilde{P}^2 — это тор.
- c) Неориентируемый атом \tilde{B} имеет род, равный единице, так как здесь \tilde{P}^2 — это проективная плоскость, т. е. сфера с одной пленкой Мебиуса.
- d) Неориентируемый атом M имеет род два, так как здесь \tilde{P}^2 — это бутылка Клейна, т. е. сфера с двумя пленками Мебиуса.

Зная атом, легко найти его род. Ясно, что достаточно найти эйлерову характеристику поверхности \tilde{P}^2 .

Предложение 2.1. *Эйлерова характеристика χ поверхности \tilde{P}^2 вычисляется по атому так: $V - E + R$, где V = число вершин атома, E = число ребер графа K , R = число колец атома.*

Доказательство.

Граф K очевидно задает клеточное разбиение поверхности \tilde{P}^2 . Поэтому число $V - E + R$ совпадает с альтернированной суммой количества 0-мерных, 1-мерных и 2-мерных клеток. Предложение доказано. ■

2.7. Классификация атомов

2.7.1. Склейка атомов из крестов

Атомы бывают двух сортов: атомы типа A и седловые атомы. Атомы первого типа изоморфны между собой. Если мы сразу рассматриваем атом как класс эквивалентности, то лучше сказать, что атом A — только один. Поэтому проблема классификации атомов актуальна, в действительности, для седловых атомов. Начиная с этого момента мы будем говорить лишь о седловых атомах, называя их просто атомами, если не оговорено противное.

Как мы сейчас покажем, атомы допускают довольно красивую классификацию. Мы предъявим алгоритм, выписывающий полный список всех атомов. Затем мы укажем алгоритм, позволяющий сравнивать любые два атома и отвечать на вопрос: эквивалентны они или нет. Отметим, что классификация атомов — задача не вполне тривиальная. В самом деле, атом — это пара: поверхность с вложенным в нее графом. Рассмотрим сначала более общую задачу, когда на граф L вложенный в поверхность, никаких ограничений не наложено. Пусть даны две такие пары: (P^2, L) и (P'^2, L') . Как выяснить — существует ли гомеоморфизм, переводящий P в P' и L в L' ? Эта более общая задача алгоритмически разрешима. Хотя выяснение вопроса: существует ли искомый гомеоморфизм или нет, для каждой конкретной пары поверхностей с графами может быть весьма громоздкой процедурой. В нашем же случае есть облегчающее обстоятельство, состоящее в том, что граф K , вложенный в поверхность P , обладает дополнительными свойствами. В частности, нам известно, что дополнение к графу L в поверхности P состоит из колец.

Это позволит нам не только указать абстрактный алгоритм перечисления и распознавания, но даже реализовать этот алгоритм на компьютере. Другими словами, мы предъявим эффективную процедуру распознавания.

2.7.2. Алгоритм построения полного списка всех атомов

Ясно, что при построении алгоритма достаточно ограничиться атомами фиксированной сложности. Итак, рассмотрим множество всех атомов с одним и тем же числом вершин m .

Возьмем множество раскрашенных крестов в количестве, равном m . Раскрашенный крест показан на рис. 2.10. Стрелки на его концах направлены из белого цвета в черный. Пометим концы крестов буквами так, чтобы каждая буква встречалась в получившемся наборе ровно два раза. Другими словами, разобьем множество концов на пары и каждую пару пометим одной и той же буквой. Затем склеим концы, помеченные одинаковыми буквами, причем, склеим, уважая их ориентацию, т.е. согласуя стрелки. Каждая такая склейка легко записывается, кодируется дискретной таблицей. Легко видеть, что в результате склейки получится некоторый атом. Черные области крестов дадут положительные кольца атома, а белые области — отрицательные кольца. Перебирая все варианты склеек, строим некоторое множество поверхностей. Отберем из них только связанные. В результате, очевидно, получим множество всех атомов данной сложности. Хотя, возможно, с повторами, т.е. список избыточен — две разные таблицы, задающие склейки, могут породить одну и ту же поверхность с графом. Тем не менее, мы алгоритмически получили полный список всех атомов.

2.7.3. Алгоритм распознавания одинаковых атомов

Осталось решить задачу алгоритмического распознавания в этом конечном, при фиксированном m , списке одинаковых, т.е. эквивалентных атомов.

Пусть даны два атома, получившиеся в результате склейки крестов. Удобно сформулировать задачу выяснения их эквивалентности или неэквивалентности так. Рассмотрим один набор крестов: (крест 1), (крест 2), ..., (крест m), и две таблицы, кода, диктующие склейки их концов (рис. 2.30). Требуется выяснить — будут ли гомеоморфны получившиеся атомы, т.е. поверхности с графом.

Задание той или иной склейки крестов очевидно эквивалентно заданию некоторого элемента σ конечной группы перестановок S_{4m} . Напомним, что каждый крест имеет по 4 конца, и для задания склейки всех крестов, нужно сказать — какой конец с каким склеивается. Это и дает перестановку из $4m$ элементов. Впрочем, не любая перестановка σ задает склейку. Нужно выполнение некоторых простых условий.

- 1) Поскольку концы крестов склеиваются попарно, то перестановка σ очевидно должна быть инволюцией.
- 2) Так как каждый конец x сам с собой не склеивается, то $\sigma(x) \neq x$. То есть каждый конец склеивается обязательно с каким-то другим концом.

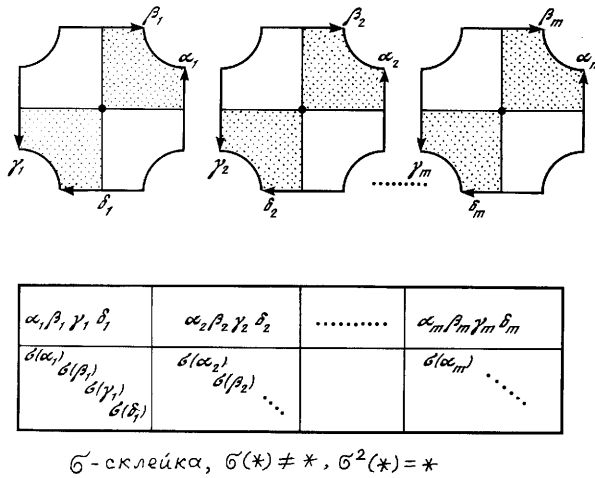


Рис. 2.30

Другими словами, необходимым условием является, что σ — это инволюция без неподвижных точек.

Верно и обратное. Любая такая инволюция реализуется в виде некоторой склейки набора крестов. В результате получается некоторый атом.

Обозначим описанное выше подмножество в группе перестановок через G_m .

Возвратимся к вопросу — какие же склейки одного и того же набора крестов дают один и тот же атом?

Предположим, что две склейки дали один и тот же результат. Это означает, что существует гомеоморфизм одного атома на другой. Но каждый атом состоит из крестов с указанными склейками их концов. Возникший гомеоморфизм атомов задает, следовательно, некоторый гомеоморфизм множества еще несклеенных крестов на себя. Этот гомеоморфизм является композицией двух преобразований. Первое — некоторая перестановка крестов. Второе — для каждого креста нужно указать некоторую его симметрию на себя, уважающую его раскраску, т.е. переводящую белое в белое, и черное в черное. Последних симметрий — ровно четыре. Они отвечают элементам группы $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$.

Таким образом, на множестве G_m действует некоторая подгруппа H группы перестановок. Эта подгруппа была только что описана.

Для выяснения эквивалентности двух склеек теперь достаточно проверить — лежат ли две отвечающие им перестановки в одной и той же орбите действия этой группы H , или же они принадлежат разным орбитам. Так как действующая группа H конечна, и так как множество G_m тоже конечно, то ответ на этот вопрос дается, например, простым перебором.

Поскольку мы с самого начала фиксировали раскраску крестов на черно-белые области, то в действительности описанный выше алгоритм распознает эквивалентные f -атомы, а не просто атомы. Для этого нужно добавить к описанной выше группе H еще один класс преобразований — перестановку белого и черного цветов на всех крестах одновременно, т.е. на всем атоме. Это расширяет

группу H при помощи группы \mathbb{Z}_2 . Образующая этой дополнительной группы \mathbb{Z}_2 действует так: на всех крестах одновременно выполняется симметрия относительно вертикальной прямой, проходящей через центр креста (рис. 2.30).

Описанный алгоритм, конечно, достаточно прост и естественен, однако ввиду требующегося здесь большого перебора, он недостаточно эффективен. И причина этого ясна. Мы опирались здесь на задание атома в виде склейки крестов. Этот способ хотя и нагляден, но, как было только что показано, ведет к большому перебору при решении задач распознавания. Поэтому остается актуальной задача построения более эффективного алгоритма. Это можно сделать, и в следующем пункте мы его опишем.

2.7.4. Задание атома в виде f -графа

Излагаемая ниже полезная переформулировка понятия атома принадлежит А. А. Ошемкову. См. [155].

Начнем с определения абстрактного графа Γ , а потом объясним — как он связан с атомом.

Определение 2.14. Конечный связный граф Γ назовем f -графом, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) Все вершины графа Γ имеют степень 3.
- 2) Некоторые из ребер графа Γ ориентированы, причем к каждой вершине графа Γ примыкает ровно два ориентированных ребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Причем эта вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра, если ориентированное ребро является петлей.
- 3) Каждому неориентированному ребру графа Γ приписано число ± 1 .

Замечание. Отметим, что f -граф Γ не предполагается вложенным в какую-либо поверхность. Это — дискретный объект, который можно полностью задать, например, в виде списка ориентированных ребер (i, j) и неориентированных ребер (k, l, ε) , где i, j, k, l — номера вершин графа Γ , а $\varepsilon = \pm 1$ — метка, приписанная неориентированному ребру.

Из условия 2 в определении f -графа следует, что его ориентированные ребра образуют непересекающиеся ориентированные циклы. Кроме того, к каждой вершине такого цикла примыкает ровно одно неориентированное ребро.

Введенный выше f -граф можно описать еще и так.

Рассмотрим набор непересекающихся ориентированных окружностей. Выделим на них произвольным образом четное число точек, разобьем это множество

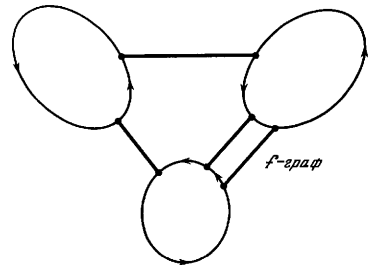


Рис. 2.31

на пары произвольным образом, и соединим получившиеся пары точек неориентированными отрезками (рис. 2.31). Это и есть f -граф.

Определение 2.15. Назовем два f -графа *эквивалентными*, если один из другого можно получить последовательностью следующих операций. Разрешается заменять ориентации всех ребер какого-то цикла и одновременно изменять метки на всех неориентированных ребрах, инцидентных этому циклу, на противоположные. Если оба конца неориентированного ребра принадлежат данному циклу, то метка на этом ребре не меняется. Классы эквивалентности f -графов назовем *f -инвариантами*.

Оказывается, существует взаимно-однозначное соответствие между f -инвариантами и f -атомами, введенными выше.

Опишем это соответствие в явном виде.

Пусть дан f -атом. Рассмотрим соответствующую ему функцию Морса g . Рассмотрим сепаратрисы этой функции, идущие с границы отрицательных колец в критические точки функции g , т.е. входящие в вершины графа K (рис. 2.32). Каждая пара входящих в вершину сепаратрис образует неориентированное ребро f -графа Γ . Вершинами графа Γ будут концы сепаратрис, лежащие на границах отрицательных колец, т.е. на отрицательных концах f -атома. Фиксировав произвольным образом ориентацию на каждой граничной окружности отрицательных колец f -атома, мы получим ориентированные ребра f -графа Γ . Пояснение: эти ориентированные ребра являются попросту дугами ориентированных граничных окружностей, заключенными между концами сепаратрис.

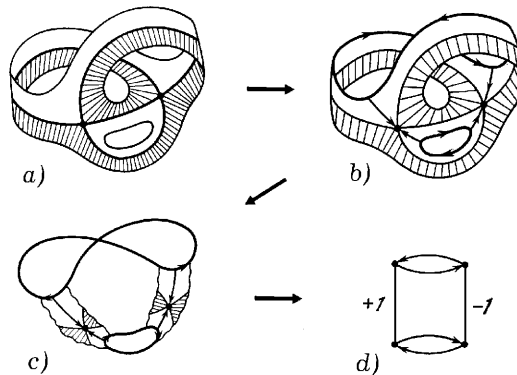


Рис. 2.32

Для завершения построения f -графа осталось лишь расставить метки на ориентированных ребрах. Это делается по следующему правилу. Рассмотрим малую окрестность неориентированного ребра в поверхности P^2 . Это — прямоугольник, две противоположные стороны которого лежат на граничных окружностях отрицательных колец, и потому — ориентированы. Если эти стороны прямоугольника индуцируют одну и ту же ориентацию границы прямоугольника, то ставим метку $\varepsilon = +1$. Если же ориентации противоположны, то ставим метку $\varepsilon = -1$.

Поясним, что в действительности прямоугольник, описанный выше, является ручкой, приклеивающейся к отрицательным окружностям атома при переходе через критическое значение функции f .

Поясним рис. 2.32. На рис. 2.32(а) изображен исходный f -атом, т.е. — поверхность P^2 с вложенным в нее графом K . Положительные кольца f -атома заштрихованы.

На рис. 2.32(б) выделены границы отрицательных колец с выбранной на них ориентацией. Указаны сепаратрисы, входящие в критические точки.

На рис. 2.32(с) изображены границы отрицательных колец (= ориентированные ребра f -графа), сепаратрисы (= неориентированные ребра f -графа), и окрестности сепаратрис, позволяющие определить метки на неориентированных ребрах.

На рис. 2.32(д) изображен результат построения — получившийся f -граф. Он является представителем f -инварианта.

Итак, мы построили по данному f -атому некоторый f -граф. В процессе построения мы произвольным образом фиксировали ориентации на граничных окружностях отрицательных колец. Однако легко понять, что при выборе другой ориентации мы получим эквивалентный f -граф. Таким образом, корректно определено отображение β множества f -атомов в множество f -инвариантов.

Теорема 2.7. *Отображение β устанавливает естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством всех f -атомов и множеством всех f -инвариантов.*

Доказательство.

Для доказательства взаимной однозначности отображения β построим в явном виде отображение β^{-1} множества f -инвариантов в множество f -атомов. Рассмотрим сначала f -атом. Если удалить из поверхности f -атома все входящие и выходящие сепаратрисы соответствующей атому простой функции Морса, то эта поверхность распадется на 6-угольники следующего вида: две противоположные стороны этого 6-угольника являются отрезками граничных окружностей колец, одного положительного и одного отрицательного. Параллельная им диагональ — это ребро графа Γ исходного f -атома. Каждая из оставшихся двух пар сторон 6-угольника составлена из двух сепаратрис — входящей и выходящей. См. рис. 2.33.

Оказывается, что f -граф содержит полную информацию о том, как нужно склеить полученные 6-угольники, чтобы получить исходный f -атом. Построение f -атома по правилу склейки, задаваемому f -графом, и будет искомым отображением β^{-1} . Пример такой процедуры приведен на рис. 2.34. Слева изображен f -граф с занумерованными ребрами, справа — процесс склейки соответствующего f -атома. Дадим формальное описание этой конструкции.

Пусть дан f -граф. Занумеруем его ориентированные ребра числами от 1 до n . Возьмем n штук 6-угольников указанного выше вида. Зададим ориентацию на границе каждого 6-угольника и обозначим ориентированные отрезки, составляющие его границу, через $a_i^\pm, p_i^\pm, q_i^\pm$, где i — номер ориентированного ребра f -графа (см. рис. 2.33(б)). Процесс склейки f -атома происходит в два этапа. Сначала мы для каждой вершины f -графа склеиваем отрезок p_i^- с отрез-

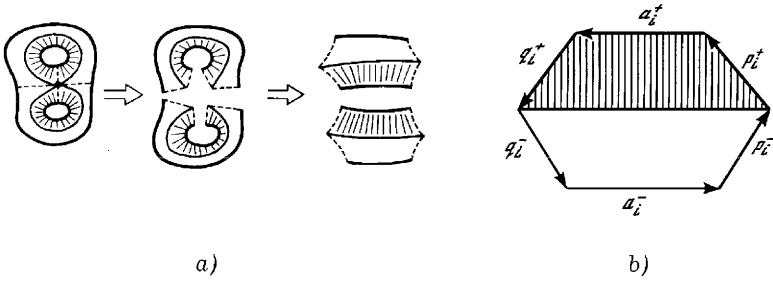


Рис. 2.33

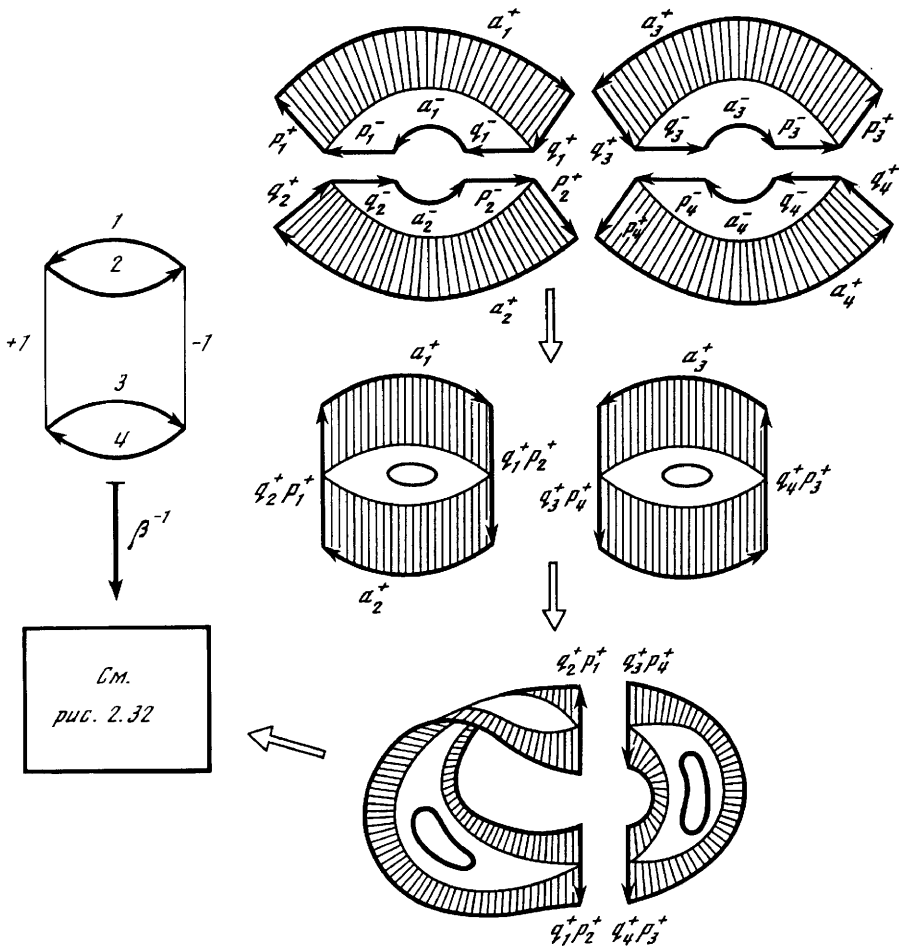


Рис. 2.34

ком q_j^- , если i -е ребро входит в эту вершину, а j -е ребро выходит из нее, причем направление отрезков p_i^- и q_j^- при склейке противоположны. После этой операции мы получим набор колец, у которых одна граница составлена из отрезков вида a_i^- , а другая имеет вид

$$\dots a_i^+ q_i^+ p_j^+ a_j^+ q_j^+ p_k^+ a_k^+ \dots,$$

причем граничные отрезки согласованно ориентированы. На втором шаге мы склеиваем эти кольца по отрезкам $q_i^+ p_j^+$. Правило склейки следующее.

- 1) Отрезок $q_i^+ p_j^+$ склеивается с отрезком $q_k^+ p_m^+$, если существует неориентированное ребро f -графа, соединяющее вершину, являющуюся концом j -го ребра и началом i -го ребра, с вершиной, являющейся концом m -го ребра и началом k -го ребра.
- 2) Если метка на этом неориентированном ребре равна $+1$, то направления склеиваемых отрезков $q_i^+ p_j^+$ и $q_k^+ p_m^+$ противоположны. Если же метка на этом ребре равна -1 , то направления склеиваемых отрезков $q_i^+ p_j^+$ и $q_k^+ p_m^+$ согласованы.

Мы описали алгоритм построения по данному f -графу некоторого f -атома. Легко проверить, что взяв эквивалентные f -графы, мы получим эквивалентные f -атомы. Таким образом, построено отображение множества f -инвариантов в множество f -атомов. Из построения видно, что это отображение действительно обратно к отображению β . Теорема доказана. ■

Итак, f -атомы кодируются графами определенного вида, алгоритмическое перечисление которых не представляет труда. Тем самым, в теории атомов можно заменить пару $(P, K) = (\text{поверхность}, \text{граф})$ одним графом специального вида.

Важное замечание. Подчеркнем, что множество всех f -графов, и соответствующих им f -инвариантов, легко и алгоритмически описывается. Это — все те графы, которые удовлетворяют условиям 1–3, указанным выше в определении 2.14, причем метки ε на различных неориентированных ребрах принимают значения ± 1 независимо друг от друга. Другими словами, любой f -граф реализуется как f -инвариант для некоторой функции Морса.

2.7.5. Задание ориентированного атома в виде некоторой подгруппы в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$

Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь ориентированных атомов.

Определение 2.16. Мы назовем f -атом *ориентированным*, если соответствующая ему поверхность P ориентирована. При этом мы будем считать, что ориентация на поверхности не только задана, но и фиксирована.

КОММЕНТАРИЙ. Каждый f -атом является классом оснащенной эквивалентности пар (P, f) . Для ориентированного f -атома требуется, чтобы диффеоморфизмы, связывающие между собой эквивалентные пары, сохраняли ориентацию поверхности P , на которой ориентация предполагается заданной и фиксированной.

На языке f -инвариантов это означает, что соответствующий f -инвариант можно представить f -графом, все метки которого равны $+1$. Таким образом, игнорируя метки, которые все равны $+1$, мы получаем, что множество ориентированных f -атомов — это в точности множество всех f -графов вообще без меток.

Сейчас мы сопоставим каждому f -графу без меток некоторую подгруппу конечного индекса в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

Рассмотрим произвольный f -граф Γ без меток. Выберем и фиксируем некоторую его вершину x . Рассмотрим все непрерывные пути на графе Γ , начинающиеся в вершине x и заканчивающиеся в любой другой вершине графа. При этом путь на графе понимается в комбинаторном смысле, т.е. как задание какой-то последовательности ребер графа.

Каждый такой путь однозначно разбивается на отрезки трех типов.

- 1) Движение вдоль неориентированного ребра. Такой отрезок обозначим через a .
- 2) Движение вдоль ориентированного ребра в направлении, задаваемом ориентацией ребра. Такой отрезок обозначим через b .
- 3) Движение вдоль ориентированного ребра в направлении, противоположном ориентации ребра. Такой отрезок обозначим через b^{-1} .

В результате каждый путь γ однозначно определяет некоторое слово, составленное из букв a, b, b^{-1} .

И наоборот, любое такое слово однозначно определяет некоторый путь γ на f -графе.

Будем считать два слова эквивалентными, если одно из другого можно получить вычеркивая встречающиеся в слове следующие пары букв: $aa, bb^{-1}, b^{-1}b$, или вставляя такие пары. Множество всех классов эквивалентности слов указанного вида с обычной операцией умножения (= приписывания одно слова к другому) образует группу. Ее единицей является класс эквивалентности пустого слова. Ясно, что эта группа изоморфна свободному произведению $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, так как она задается двумя образующими a, b и одним соотношением $a^2 = e$.

При указанном соответствии между словами и путями в f -графе с началом в вершине x , эквивалентным словам соответствуют гомотопные пути с закрепленными концами. Как и наоборот. Таким образом, фиксируя вершину x в графе Γ , мы устанавливаем некоторую биекцию между классами гомотопных путей с началом в точке x в f -графе и элементами группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. При этой биекции множеству замкнутых путей на графе Γ соответствует некоторая подгруппа H_Γ^x группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

Выбрав в f -графе Γ другую вершину y , мы получим некоторую другую подгруппу H_Γ^y . Стандартными методами можно показать, что эти две подгруппы H_Γ^x

и H_Γ^y сопряжены. В самом деле, в качестве сопрягающего элемента $g \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, для которого $H_\Gamma^y = gH_\Gamma^x g^{-1}$, можно взять элемент, соответствующий любому классу гомотопных путей, соединяющих вершину x с вершиной y в графе Γ .

Обозначим через H_Γ класс сопряженных подгрупп группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, соответствующих множествам замкнутых путей в f -графе Γ . Здесь мы рассматриваем различные множества замкнутых путей, отвечающие различным фиксированным точкам графа Γ . В результате мы построили отображение δ из множества f -графов без меток в множество классов сопряженных подгрупп группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

Теорема 2.8. *Отображение δ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством f -графов без меток и множеством классов сопряженных подгрупп в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, имеющих конечный индекс и не содержащих элементов конечного порядка.*

Доказательство.

Докажем сначала, что любая подгруппа, являющаяся образом при отображении δ , имеет конечный индекс и не содержит элементов конечного порядка. Рассмотрим правые смежные классы подгруппы H_Γ^x . Очевидно, что всем элементам группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ вида hg , где $h \in H_\Gamma^x$, а g — некоторый фиксированный элемент, соответствуют пути в f -графе Γ с началом в вершине x и концом в одной и той же вершине y . Поэтому индекс подгруппы H_Γ^x равен числу вершин f -графа, а следовательно, — конечен.

Далее, любой элемент конечного порядка в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, с образующими a, b и соотношением $a^2 = e$, сопряжен элементу a и имеет порядок 2. Это следует, например, из теоремы Куроша о подгруппах свободных произведений. Предположим, что некоторая подгруппа H_Γ^x содержит такой элемент gag^{-1} . Тогда этому элементу соответствует в f -графе замкнутый путь. Следовательно, элементам ga и g соответствуют пути с началом в вершине x и концом в одной и той же вершине y . Но это означало бы, что ребро a является петлей с началом и концом в точке y , что невозможно в силу определения f -графа.

Итак, мы доказали, что при отображении δ образами f -графов являются лишь подгруппы конечного индекса, не содержащие элементов конечного порядка. Для завершения доказательства построим в явном виде отображение δ^{-1} .

Пусть H — некоторая подгруппа группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Построим граф смежных классов этой подгруппы. Вершины этого графа соответствуют правым смежным классам подгруппы H . Две такие вершины x и y соединяются неориентированным ребром, если соответствующие им смежные классы X и Y связаны соотношением: $Xa = Y$, где a — образующая группы \mathbb{Z}_2 . Аналогично, две вершины x и y соединяются ориентированным ребром, если соответствующие им смежные классы X и Y связаны соотношением: $Xb = Y$, где b — образующая группы \mathbb{Z} . При этом ребро ориентируется от вершины x к вершине y . Ясно, что тогда вершины y и x соединены ребром, отвечающим образующей b^{-1} .

Докажем, что в том случае, когда H — подгруппа конечного индекса и без элементов конечного порядка, то получается некоторый f -граф. В самом деле, построенный граф является конечным и не содержит неориентированных петель. Ясно также, что каждая вершина построенного графа имеет степень три. Причем, к ней примыкает одно неориентированное и два ориентированных ребра:

входящее и выходящее. Эти два ориентированных ребра могут, впрочем, иногда совпадать, образуя ориентированную петлю. Осталось доказать, что построенный f -граф не зависит от выбора подгруппы H в классе ее сопряженности. Действительно, если заменить исходную подгруппу H на сопряженную ей подгруппу $H' = gHg^{-1}$, то указанные выше соотношения $Xa = Y$ и $Xb = Y$ будут выполнены для правых смежных классов $X' = gX$ и $Y' = gY$ по подгруппе H' , потому что $H'g = gH$.

Теорема доказана. ■

Комментарий. Другое объяснение этой конструкции мы приведем в пункте 2.8.

Следствие. *Отображение δ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством f -графов без меток и множеством классов сопряженных свободных подгрупп в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, имеющих конечный индекс.*

2.7.6. Изображение атомов в виде погружений графов в плоскость

Напомним классическую теорему двумерной топологии.

Теорема 2.9.

- а) *Любой ориентированный атом (P, K) допускает гладкое погружение в сферу, а потому и в плоскость, с сохранением ориентации.*
- б) *Любые два таких погружения одного и того же атома в сферу можно перевести друг в друга посредством гладкой изотопии и операции развязывания петель, показанной на рис. 2.35.*

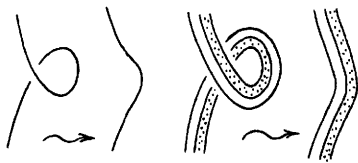


Рис. 2.35

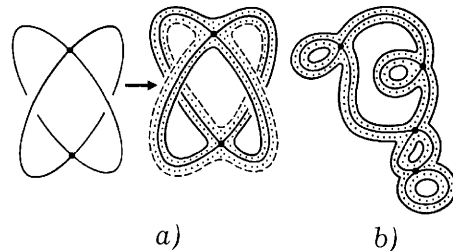


Рис. 2.36

Доказательство.

а) Каждый атом можно представить в виде набора крестов, концы которых соединены узкими лентами. Каждый крест по отдельности, очевидно, вкладывается в 2-сферу. Осталось погрузить связывающие их ленты-полоски. Поскольку поверхность предположена ориентируемой, это также очевидно.

б) Пусть теперь даны два погружения. Чтобы перевести одно в другое, нужно сначала рассмотреть их кресты. Ясно, что два вложения набора крестов совмещаются в сфере посредством гладкой изотопии, причем даже без самопересечений,

поскольку кресты можно сделать достаточно маленькими. Осталось совместить погружения соединяющих их узких лент. Поскольку концы лент, будучи приклеены к крестам, уже совмещены, то разрешая развязывание петель (рис. 2.35), мы очевидно можем перевести друг в друга погружения лент. Теорема доказана. ■

Эта теорема дает возможность наглядного изображения атомов на плоскости. Каждое такое погружение атома в плоскость однозначно восстанавливается по погружению в сферу графа K . Дело в том, что погружение атома является трубчатой окрестностью погружения графа K (рис. 2.36).

Впрочем, отметим, что можно ограничиться рассмотрением лишь погружений графа в плоскость. Дело в том, что протаскивание петли через бесконечность эквивалентно созданию двух петель на ребре, а петли мы имеем право устранять.

2.7.7. Атомы как клеточные разбиения двумерных замкнутых поверхностей

Оказывается, классификация атомов в точности эквивалентна классификации всевозможных конечных клеточных разбиений двумерных замкнутых поверхностей. Напомним, что клеточным разбиением поверхности называется ее представление в виде объединения конечного числа двумерных, одномерных и нульмерных клеток. Эквивалентным образом можно считать, что клеточное разбиение поверхности взаимно-однозначно, с точностью до гомеоморфизма, задается вложением некоторого конечного графа в эту поверхность, разбивающего ее на открытые диски. При таком подходе граф является попросту одномерным остовом клеточного разбиения, т.е. объединением нульмерных и одномерных клеток разбиения.

Как здесь возникает атом? Верно следующее

Предложение. *Существует взаимно-однозначное соответствие между f -атомами и клеточными разбиениями двумерных замкнутых поверхностей. Или, что эквивалентно, — между f -атомами и вложениями графов в двумерные замкнутые поверхности. При этом все эти объекты рассматриваются с точностью до гомеоморфизма.*

Доказательство.

Это предложение доказывается очень просто. В самом деле, возьмем произвольное конечное клеточное разбиение поверхности и построим по нему атом. Для этого соединим середины соседних одномерных ребер данного клеточного разбиения, сходящихся в одной вершине. Делаем это для каждой вершины. См. рис. 2.37. В результате возникает одномерный граф K . Очевидно, что все его вершины (белые точки на рис. 2.37) имеют крат-

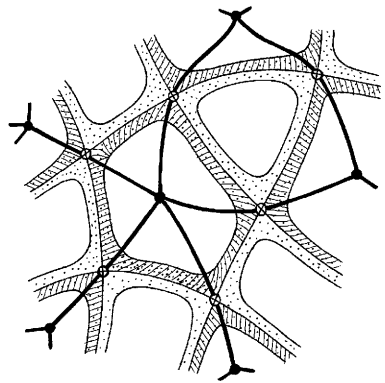


Рис. 2.37

ность 4. Это и есть скелет конструируемого нами атома. Осталось взять малую трубчатую окрестность графа K в поверхности. Получается атом. Чтобы операция была однозначна, нужно сделать одно дополнительное замечание. Двумерные кольца у атома, возникшие на предыдущем шаге, очевидно разбиваются на два класса. Первый класс — кольца, целиком лежащие внутри двумерных клеток исходного клеточного разбиения. Назовем их, скажем, положительными кольцами атома. Второй класс — кольца, окружающие вершины исходного клеточного разбиения. Их нужно назвать отрицательными. В результате мы получаем уже не просто атом, а f -атом. Итак, по каждому клеточному разбиению однозначно строится некоторый f -атом.

Обратно. Пусть дан f -атом, отвечающий атому (P, K) . Рассмотрим замкнутую поверхность \tilde{P} , получающуюся заклеивкой дисками граничных окружностей f -атома. В результате мы получаем некоторое клеточное разбиение поверхности \tilde{P} . Чтобы обеспечить указанную выше взаимную однозначность, нам придется по нему построить другое клеточное разбиение. Для этого отметим центры отрицательных двумерных дисков и соединим их ребрами через вершины f -атома, как показано на рис. 2.37. При этом, через каждую вершину f -атома мы проводим ровно один такой отрезок. Ясно, что эта операция обратна описанной выше.

Предложение доказано. ■

Каждому атому отвечают, как мы знаем, два f -атома. По каждому из них можно построить свое клеточное разбиение поверхности \tilde{P} . Легко видеть, что они окажутся двойственными друг другу. Дело в том, что положительные диски, как и кольца, заменятся на отрицательные.

В определенном смысле f -атом можно рассматривать как полудвойственный объект для данного клеточного разбиения. Стартуя с клеточного разбиения, мы строим f -атом, а затем по нему — клеточное разбиение, двойственное исходному. Грубо говоря, f -атом находится на полпути от клеточного разбиения к ему двойственному. Потому его можно назвать полудвойственным объектом.

В топологии и геометрии есть довольно много задач, сводящихся к классификации клеточных разбиений тех или иных поверхностей. Предыдущее утверждение показывает, что на самом деле все такие задачи сводятся к описанию f -атомов. В качестве яркого примера ниже мы дадим новую классификацию потоков Морса, а потом и потоков Морса–Смейла, на языке f -атомов.

2.7.8. Таблица атомов малой сложности

Удобно обозначать каждый атом некоторой буквой, из которой вверх и вниз выходит некоторое количество отрезков, которые мы назовем концами атома. Каждый конец атома взаимно-однозначно отвечает некоторой граничной окружности поверхности P . Важно подчеркнуть, что, вообще говоря, концы атома неравноправны, поскольку граничные окружности поверхности P неравноправны в том смысле, что не каждые две из них можно совместить посредством некоторого гомеоморфизма атома, — т. е. поверхности P с графом K , — на себя. О возможной неравноправности концов атомов мы подробнее расскажем ниже, при обсуждении понятия молекулы.

В таблице 2.1 перечислены все атомы до сложности 3 включительно как ориентируемые, так и неориентируемые. Здесь же указаны соответствующие им пары f -графов, а также двумерные поверхности \bar{P} , получающиеся из атома P заклеивкой дисками его граничных окружностей. Эти поверхности определяют род атома.

Как мы отмечали, каждому атому отвечают два f -атома. Иногда они совпадают, иногда — нет. Совпадают они в том и только в том случае, когда у атома есть дополнительная симметрия, т. е. гомеоморфизм, меняющий местами положительные и отрицательные кольца атома. Такой гомеоморфизм существует, например, для следующих атомов из таблицы 2.1:

$$C_1, C_2, D_2.$$

Список неориентируемых атомов в таблице 2.1 составлен В. В. Корнеевым.

В таблице 2.2 перечислены все графы K для ориентированных атомов сложности не превосходящей 5. Для каждого такого графа K указано количество различных ориентируемых атомов, имеющих его в качестве своего спайна (скелета). Это количество атомов написано либо рядом с графом K , либо внутри графа. Другими словами, указано число различных погружений графа K в сферу, т. е. число различных атомов с данным графом K . Напомним, что атом однозначно определяется погружением графа K в сферу.

В таблице 2.2 указано также общее число ориентированных атомов до сложности 5 включительно.

2.7.9. Зеркальные атомы

Определение 2.17. Атом называется *зеркальным*, если существует диффеоморфизм его на себя, меняющий ориентацию.

Фактически зеркальность атома означает, что он обладает какой-то нетривиальной, т. е. нетождественной, симметрией. Приведем простые примеры.

Предложение 2.2. Все атомы сложности 1, 2, 3 (см. в таблице 2.1) являются *зеркальными*.

Доказательство.

Из таблицы 2.1 видно, что каждый из перечисленных атомов имеет ось симметрии, т. е. допускает отражение, меняющее ориентацию. ■

Не все атомы зеркальные. На рис. 2.36(b) см. пример незеркального атома. Два атома, получающиеся друг из друга лишь заменой ориентации, назовем зеркально симметричными. Зеркальный атом совпадает со своим зеркально симметричным.

2.8. Группы симметрий ориентированных атомов и универсальное накрывающее дерево

2.8.1. Симметрии f -графов

Каждому атому соответствуют два f -атома, поскольку разбиение его колец на положительные и отрицательные можно делать двумя способами. Эти f -атомы переходят друг в друга, если мы назовем положительные кольца отрицательными, и наоборот. Иногда эти два f -атома могут совпадать, а точнее быть эквивалентными. Изучая симметрии атомов, договоримся считать, что ориентация на поверхности P^2 не фиксирована, хотя фиксировано разбиение колец атома на положительные и отрицательные. При таком соглашении изучение симметрий атома в точности эквивалентно изучению симметрий любого из двух отвечающих ему f -атомов.

Будем пока рассматривать лишь ориентируемые атомы.

Если рассматривать атом V как пару (P^2, K) , то естественно было бы определить симметрию атома V как гомеоморфизм пары (P^2, K) на себя. Однако группа всех таких гомеоморфизмов очень большая. Более интересна дискретная группа симметрий атома, которая получается при факторизации группы всех гомеоморфизмов пары (P^2, K) по подгруппе гомеоморфизмов, изотопных тождественному. Поэтому в дальнейшем, говоря о симметриях атомов, мы всегда будем подразумевать, что гомеоморфизмы пары (P^2, K) рассматриваются с точностью до изотопии, т. е., по определению, симметрия атома есть класс эквивалентности изотопных гомеоморфизмов пары (P^2, K) на себя.

Обозначим через $\text{Sym}(V)$ группу собственных симметрий атома $V = (P^2, K)$, то есть группу симметрий, сохраняющих ориентацию поверхности P^2 , а также сохраняющих разбиение поверхности P^2 на положительные и отрицательные кольца. Отметим, что это определение не зависит от того — каким именно образом выбирается ориентация на P^2 , и каким образом P^2 разбита на положительные и отрицательные кольца.

Обозначим далее через $\widehat{\text{Sym}}(V)$ группу всех симметрий атома V . То есть как сохраняющих, так и меняющих ориентацию поверхности P^2 . Однако разбиение поверхности P^2 на положительные и отрицательные кольца сохраняется.

Предложение 2.3. *Если ориентированный атом V является зеркальным, то группа $\text{Sym}(V)$ является подгруппой индекса 2 в группе $\widehat{\text{Sym}}(V)$. Если же атом V зеркальным не является, то эти группы совпадают: $\text{Sym}(V) = \widehat{\text{Sym}}(V)$. В частности, порядок группы $\widehat{\text{Sym}}(V)$ всегда либо равен порядку группы $\text{Sym}(V)$, либо в два раза больше его.*

Доказательство сразу вытекает из определения зеркальности и определений обеих групп. ■

Сконцентрируем пока наше внимание на изучении группы собственных симметрий $\text{Sym}(V)$. Рассмотрим теперь симметрии f -графов.

Определение 2.18. Будем говорить, что f -граф Γ_1 отображается на f -граф Γ_2 , если задано их отображение как абстрактных графов, то есть вершины переходят

в вершины, а ребра — в ребра. При этом отображение переводит неориентированные ребра в неориентированные, а ориентированные — в ориентированные, но возможно с одновременным обращением их ориентации, то есть сразу на всех ориентированных ребрах.

Определение 2.19. Назовем *собственной симметрией* f -графа Γ его изоморфизм на себя, переводящий ориентированные ребра в ориентированные с сохранением их ориентации. Обозначим группу всех собственных симметрий f -графа Γ через $\text{Sym}(\Gamma)$. Далее, назовем *несобственной симметрией* f -графа Γ его изоморфизм на себя, переводящий ориентированные ребра в ориентированные с одновременным изменением ориентации всех таких ребер. То есть, каждое ориентированное ребро переходит в некоторое другое ориентированное ребро, но обязательно с противоположной ориентацией. Множество всех собственных и несобственных симметрий f -графа Γ назовем *полной группой симметрий* данного f -графа и обозначим через $\widehat{\text{Sym}}(\Gamma)$.

Предложение 2.4. Пусть V — некоторый ориентированный атом, а Γ — соответствующий ему f -граф. Тогда группа $\text{Sym}(V)$ изоморфна группе $\text{Sym}(\Gamma)$, а группа $\widehat{\text{Sym}}(V)$ изоморфна группе $\widehat{\text{Sym}}(\Gamma)$.

Доказательство сразу вытекает из процедуры построения f -графа по атому V . Дело в том, что для ориентированных атомов эта процедура дает нам f -граф без меток. См. об этом выше. ■

Таким образом, изучать симметрии атомов V теперь можно на языке f -графов. То есть, вычисляя группы симметрий f -графов, мы описываем группы симметрий атомов V . Для атомов V малой сложности все группы симметрий перечислены в таблице, приведенной в главе 3.

2.8.2. Универсальное накрывающее дерево над f -графами. f -граф как фактор-пространство универсального дерева

Рассмотрим произвольный f -граф Γ . Если рассмотреть его как топологическое пространство, то над ним можно рассмотреть всевозможные накрытия. При этом можно считать, что накрывающее пространство $\tilde{\Gamma}$ также является f -графом. Действительно, на накрывающем пространстве $\tilde{\Gamma}$ можно единственным образом расставить стрелки так, чтобы проекция накрытия была отображением f -графов в смысле определения 2.18. Отметим, что «наверху» нужно ориентировать те ребра, которые накрывают ориентированные ребра базы Γ .

Теорема 2.10.

- а) Для каждого f -графа Γ существует единственное универсальное накрывающее пространство D , являющееся бесконечным f -графом. Причем, этот универсальный f -граф один и тот же для всех f -графов. Другими словами, универсальные накрытия над любыми двумя f -графами изоморфны как бесконечные f -графы.

б) Этот универсальный f -граф является бесконечным деревом D с вершинами степени три (рис. 2.38). С каждой вершиной инцидентно одно неориентированное ребро, одно входящее ориентированное ребро и одно выходящее ориентированное ребро.

в) Группа собственных симметрий $\text{Sym}(D)$ универсального f -графа D изоморфна группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Ее действие устроено так. Пусть x_0 — отмеченная вершина дерева D . Тогда образующая b бесконечного порядка в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ переводит вершину x_0 в другой конец единственного ориентированного ребра, выходящего из вершины x_0 . Образующая a второго порядка в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ переводит вершину x_0 в другой конец неориентированного ребра, инцидентного с вершиной x_0 . После этого действие образующих a и b на всех других вершинах x дерева D определяется уже однозначно.

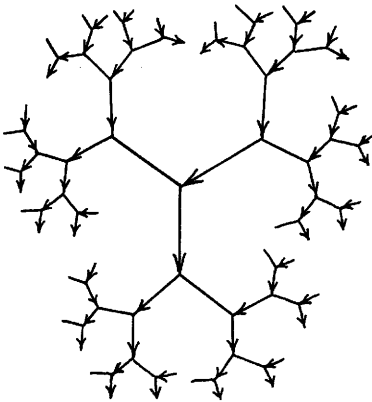


Рис. 2.38

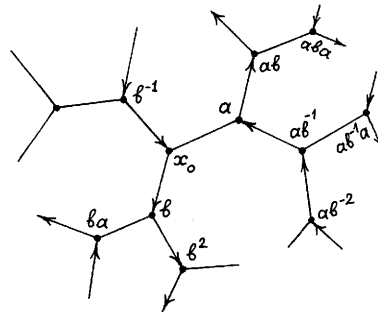


Рис. 2.39

Доказательство.

Докажем пункты (а) и (б). Если забыть об ориентации части ребер f -графа, то ясно, что универсальное накрывающее пространство над ним есть дерево, все вершины которого имеют степень 3. Это вытекает из обычной теории накрытий. Очевидно, что существует единственный способ ориентировать часть ребер этого дерева так, чтобы это дерево стало бесконечным f -графом, а отображение накрытия являлось отображением f -графов. Это доказывает пункты (а) и (б) теоремы.

Докажем теперь пункт (в). Структура любого f -графа, в частности бесконечного f -графа D , такова, что любая его собственная симметрия однозначно определяется, если задан образ хотя бы одной вершины при этой симметрии. Таким образом, если фиксировать некоторую вершину данного f -графа Γ , то множество его собственных симметрий находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством возможных образов этой вершины. Отметим, что для произвольного f -графа группа его собственных симметрий, вообще говоря, не действует транзитивно на множестве вершин.

Фиксируем на f -графе D некоторую вершину x_0 . Очевидно, вершина x_0 может быть переведена некоторой собственной симметрией в любую другую вершину x . Поскольку D является деревом, то существует единственный путь в f -графе D , соединяющий вершину x_0 с вершиной x . Этот путь можно однозначно записать в виде слова, составленного из букв a , b и b^{-1} , где буква a означает проход вдоль неориентированного ребра дерева, буква b — проход вдоль стрелки ориентированного ребра, а буква b^{-1} — проход по ориентированному ребру, но в направлении, противоположном стрелке на ребре. См. рис. 2.39. Здесь у каждой вершины указано слово, изображающее путь от выделенной вершины x_0 до данной вершины. С другой стороны, как мы уже доказали, любой точке x дерева D отвечает некоторая собственная симметрия дерева D , при которой выделенная точка x_0 переходит в данную точку x . Сопоставляя эти два факта, получаем взаимно-однозначное соответствие между собственными симметриями дерева D и описанными выше словами в алфавите a, b, b^{-1} . При этом буква a будет отвечать образующей второго порядка группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, а буква b — образующей бесконечного порядка группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Осталось проверить, что композиции двух собственных симметрий отвечает приписывание одного слова к другому. Доказательство этого факта — стандартное, и следует из рис. 2.40. Отметим здесь, что при движении вдоль пути нужно выписывать буквы алфавита в обычном порядке. А получившееся слово интерпретируется как композиция симметрий дерева, когда каждая следующая симметрия приписывается, как обычно, слева от предыдущей. Утверждение (в) доказано. Теорема 2.10 полностью доказана. ■

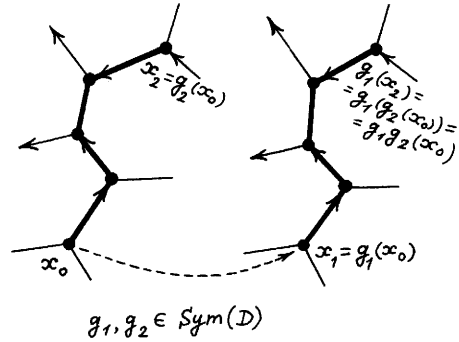


Рис. 2.40

Таким образом, возникает некоторое действие группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ на графе D . Отметим, что фактор-пространство дерева D по действию этой группы, — т.е. пространство орбит этого действия, — является букетом отрезка и окружности (рис. 2.41). Отметим, что граф-дерево D не является накрытием над этим букетом, так как действие группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ не свободно на D . Дело в том, что преобразования вида gag^{-1} , — то есть сопряженные образующей a , или другими словами, все элементы второго порядка в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, — обязательно имеют ровно одну неподвижную точку на дереве. Эта точка является серединой неориентированного ребра. Вообще, как легко видеть, любая инволюция на дереве обязательно имеет неподвижную точку. Отметим, что проекция дерева D на $D/\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, т.е. на букет окружности и отрезка, является бесконечнолистным накрытием над всеми точками букета кроме единственной точки — свободного конца отрезка (рис. 2.41).



Рис. 2.41

Таким образом, все f -графы расположены между максимально развернутым f -графом, то есть — деревом D , и максимально свернутым графом $D/\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, то есть — букетом окружности и отрезка. Мы хотим описать в терминах факторпространства D все f -графы. Отметим, что граф $D/\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, — то есть букет окружности и отрезка, — на самом деле f -графом не является.

Рассмотрим теперь произвольный f -граф Γ . Поскольку универсальное накрытие над ним является деревом D , что мы уже доказали выше, то $\Gamma = D/G$, где G — подгруппа группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, свободно действующая на дереве D . Это означает, что граф Γ получается из дерева D путем его факторизации по свободному действию группы G .

Предложение 2.5.

- а) Пусть $\Gamma = D/G$ — некоторый f -граф. Тогда группа G естественно изоморфна фундаментальной группе графа Γ .
- б) Группа G также естественно изоморфна фундаментальной группе самого атома V .
- в) Атом V и f -граф Γ гомотопически эквивалентны.

Доказательство очевидно следует из определения f -графа. ■

Предложение 2.6. Подгруппа G группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \text{Sym}(D)$ свободно действует на дереве D тогда и только тогда, когда в ней нет элементов конечного порядка, то есть нет элементов, сопряженных элементу a второго порядка.

Доказательство.

В одну сторону это утверждение уже доказано выше, а именно, из свободности действия следует, что нет элементов второго порядка. Обратное, нужно проверить, что если нет элементов второго порядка, то действие свободное. Допустим противное, что для какой-то нетривиальной симметрии нашлась неподвижная точка. Тогда она может быть только серединой неориентированного ребра. Поскольку неподвижность любой другой точки очевидно влечет за собой тождественность всего преобразования. Дело в том, что тогда обязательно найдется неподвижная вершина дерева. Пусть теперь середина какого-то неориентированного ребра e является неподвижной точкой некоторой симметрии h . Тогда эта симметрия h обязательно имеет вид gag^{-1} , где g — элемент группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, переводящий отмеченную точку x_0 в один из концов ребра e . В самом деле, легко проверить, что преобразование gag^{-1} оставляет на месте середину ребра e . Тогда оно должно совпадать с h на концах ребра e , а следовательно, совпадает с ним всюду. То есть $h = gag^{-1}$. Тем самым, предложение доказано. ■

2.8.3. Соответствие между f -графами и подгруппами в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$

Напомним, что мы рассматриваем для простоты пока лишь ориентированные атомы V .

Теорема 2.11.

- а) Каждой свободной подгруппе G конечного индекса k в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, — т. е. не содержащей элементов конечного порядка, — соответствует конечный f -граф $\Gamma = \Gamma(G)$ с k вершинами и имеющий вид $\Gamma = D/G$. При этом $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2)$ тогда и только тогда, когда подгруппы G_1 и G_2 сопряжены в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Другими словами, имеется взаимно-однозначное соответствие между f -графами без меток и классами сопряженности свободных подгрупп конечного индекса в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, то есть подгрупп, не содержащих элементов конечного порядка.
- б) Группа $\text{Sym}(\Gamma(G))$ собственных симметрий f -графа $\Gamma(G)$ изоморфна фактор-группе $N(G)/G$, где $N(G)$ — нормализатор подгруппы G в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ (то есть $N(G) = \{h \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 : hGh^{-1} = G\}$).
- в) Порядок группы собственных симметрий $\text{Sym}(\Gamma(G))$ всегда не превосходит числа вершин графа Γ . Это число равно индексу подгруппы G в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Порядок группы всех симметрий $\widehat{\text{Sym}}(\Gamma(G))$ всегда не превосходит удвоенного количества вершин графа Γ .

Доказательство.

а) В одну сторону утверждение очевидно. Осталось доказать, что если $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2)$, то подгруппы G_1 и G_2 сопряжены. Это следует из того, что любой гомеоморфизм базы универсального накрытия всегда поднимается до гомеоморфизма универсального накрытия на себя. Поэтому при отображении базы на себя слой накрытия переходит в слой накрытия над образом точки. Соединяя точку базы с ее образом непрерывным путем на базе, перемещаем вдоль него слой накрытия и получаем требуемое сопряжение подгрупп.

б) Каждая симметрия f -графа, то есть базы универсального накрытия $\Gamma = D/G$, поднимается вверх до отображения дерева D на себя. Все такие поднятые отображения должны сохранять исходное накрытие. Следовательно, они имеют вид hGh^{-1} , где h пробегает всю группу $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

в) Это утверждение фактически следует из пунктов (а) и (б). В самом деле, из пункта (б) следует, что порядок группы симметрий $\text{Sym}(\Gamma(G))$ есть индекс подгруппы G в нормализаторе $N(G)$. Поскольку $N(G)$ лежит в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, следовательно порядок группы симметрий не больше чем число вершин графа Γ , которое равно индексу подгруппы G в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

Теорема доказана. ■

Подведем итог. Итак, если G — произвольная подгруппа в $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ конечного индекса и без элементов конечного порядка, то можно рассмотреть ее действие на графе D . Фактор-пространство этого действия и является тем самым f -графом Γ , который был построен выше как f -граф, отвечающий классу сопряженности данной подгруппы G .

Отметим, что соответствующая проекция графа D на граф Γ является универсальным накрытием для графа Γ , так как в подгруппе D нет элементов конечного порядка. Их отсутствие и гарантирует свободу действия группы G

на D . В частности, отсюда следует, что группа G является фундаментальной группой графа Γ и атома V . В частности, она свободна, как фундаментальная группа одномерного пространства.

2.8.4. Граф J . Группы симметрий f -графа и его связь с самим f -графом. Максимально симметричные f -графы

Напомним определение графа конечно-порожденной абстрактной группы S . Выберем в группе S какую-нибудь систему образующих s_1, s_2, \dots, s_n . Эта система образующих не обязана быть минимальной. Например, какой-то из элементов s_k может выражаться через остальные.

В качестве вершин графа $J = J_S$ возьмем теперь все элементы группы S . Соединим ориентированным ребром с меткой s_i те пары элементов g и h группы S , для которых $g = hs_i$, то есть элемент g получается из элемента h сдвигом на образующую s_i , то есть умножением справа. Стрелку на ребре направляем от элемента h к элементу g . Отметим, что граф J группы конечно зависит от выбора образующих. Разным системам образующих отвечают, вообще говоря, разные графы. На рис. 2.42 показаны примеры графов J группы \mathbb{Z}_6 , получающиеся при разном выборе образующих в ней. В первом случае взята одна образующая x , а в другом — две образующие x^2 и x^3 . Если образующая s_i имеет порядок два, то формально для каждой пары элементов, переходящих друг в друга при умножении на s_i , мы должны были бы рисовать два ориентированных ребра, ориентированные в прямом и обратном направлениях. Вместо этого мы будем рисовать одно ребро, но — неориентированное. В частности, на рис. 2.42 неориентированные ребра графа J группы, отвечающие элементу второго порядка x^3 , изображены пунктиром.

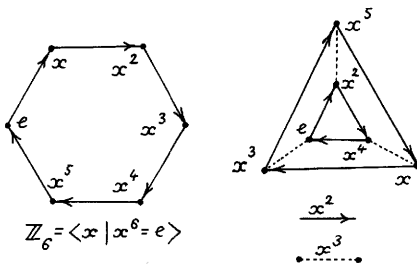


Рис. 2.42

Аналогичным образом, если в группе задана некоторая подгруппа, то можно нарисовать граф J множества смежных классов группы относительно этой подгруппы. Конструкция конечно та же самая, но только вершины графа J соответствуют здесь смежным классам по заданной подгруппе. Тогда определенный выше граф J группы получается из такого графа, если в качестве подгруппы взять единичную подгруппу.

Предложение 2.7. f -граф $\Gamma(G)$ является графом J множества смежных классов группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ по подгруппе G . При этом ориентированные ребра графа J отвечают образующей b бесконечного порядка группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, то есть группы $\mathbb{Z}(b) * \mathbb{Z}_2(a)$, а неориентированные ребра графа J отвечают образующей a второго порядка.

Доказательство.

Граф J группы $\mathbb{Z}(b) * \mathbb{Z}_2(a)$ фактически уже был изображен нами выше на

рис. 2.39. В качестве единицы группы можно взять точку, отмеченную x_0 на рис. 2.39. С другой стороны, этот граф является деревом D . Если дерево рассматривать как группу $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, то симметрии дерева получаются как свободное действие группы $\mathbb{Z}(b) * \mathbb{Z}_2(a)$ на себе при умножении справа. Тогда становится понятным, что орбиты действия подгруппы G на дереве D , — то есть вершины графа $\Gamma(G)$, — соответствуют смежным классам группы $\mathbb{Z}(b) * \mathbb{Z}_2(a)$ по подгруппе G . При этом две такие вершины, т.е. два класса смежности, соединяются стрелкой, если один получается из другого умножением на элемент b , и соединяются неориентированным ребром, если происходит умножение на элемент a второго порядка. Предложение доказано. ■

Введем полезное понятие максимально симметричного f -графа. Для простоты ограничимся здесь рассмотрением лишь собственных симметрий f -графов.

Определение 2.20. f -граф Γ называется *максимально симметричным*, если его группа собственных симметрий транзитивно действует на множестве его вершин.

Поясним — почему мы говорим именно о максимальной симметричности. Как было уже объяснено, каждая собственная симметрия f -графа однозначно определяется образом любой вершины f -графа. Следовательно, порядок группы собственных симметрий всегда не больше числа вершин f -графа. Поэтому f -граф естественно считать максимально симметричным в том и только в том случае, когда число его вершин в точности равно порядку группы собственных симметрий.

Теорема 2.12.

- а) Если f -граф Γ максимально симметричен, то можно всегда так выбрать образующие в его группе собственных симметрий, что соответствующий граф J группы симметрий совпадет с графом Γ .
- б) Если порядок группы собственных симметрий некоторого f -графа равен количеству его вершин, то этот f -граф является максимально симметричным.
- в) Максимально симметричные f -графы взаимно-однозначно соответствуют нормальным делителям группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, имеющим конечный индекс и не содержащим элементов конечного порядка.

Доказательство.

а) Возьмем произвольную вершину f -графа, отметим ее как x_0 , и рассмотрим пару симметрий \tilde{b} и \tilde{a} , сдвигающих эту вершину вдоль ориентированного и неориентированного ребер f -графа, инцидентных с выбранной вершиной. Существование таких преобразований вытекает из предположенной транзитивности группы симметрий на f -графе. Легко проверить, что композициями этих преобразований \tilde{b} , \tilde{b}^{-1} и \tilde{a} можно перевести выбранную нами вершину в любую другую вершину f -графа. Далее ясно, что преобразования \tilde{b} и \tilde{a} порождают всю группу собственных симметрий. Фиксируем выбранные нами две образующие \tilde{b} и \tilde{a} группы симметрий. В силу транзитивности и свободы действия группы

симметрий (нет вершин, остающихся на месте при нетривиальной симметрии), имеется взаимно-однозначное соответствие между вершинами f -графа Γ и элементами группы собственных симметрий $\text{Sym}(\Gamma)$. А именно, вершина вида $g(x_0)$ соответствует элементу g группы $\text{Sym}(\Gamma)$. При этом вершины $g_1(x_0)$ и $g_2(x_0)$ соединены ориентированным ребром тогда и только тогда, когда $g_1 = g_2\tilde{b}$. И соединены неориентированным ребром в том и только в том случае, когда $g_1 = g_2\tilde{a}$. Первый пункт теоремы доказан.

б) Этот пункт теоремы фактически следует из определения максимальной симметричности f -графа.

в) Это утверждение сразу вытекает из пункта (б) теоремы 2.11. В самом деле, класс сопряженности нормального делителя в группе состоит из самого нормального делителя. Порядок группы симметрий в этом случае равен числу элементов в фактор-группе $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)/G$, а это число в свою очередь равно числу вершин графа $\Gamma(G)$. Наоборот, если атом максимально симметричен, то порядок группы $N(G)/G$ и порядок группы $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)/G$ совпадают. Поэтому $N(G)$ совпадает со всей группой $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, то есть подгруппа G является нормальным делителем.

Теорема доказана. ■

Сформулируем теперь естественный вопрос: для каких конечных групп можно так выбрать порождающие их элементы (не обязательно минимальную систему образующих), что соответствующий граф J является f -графом, т. е. описывает некоторый атом. Ответ вытекает из теоремы 2.12.

Следствие (о максимально симметричных f -графах).

- а) Пусть конечная группа S порождена двумя элементами (не обязательно минимальной системой образующих), один из которых имеет второй порядок. Тогда соответствующий им граф J обязательно является f -графом. Причем, этот f -граф является максимально симметричным.
- б) Наоборот, если задан максимально симметричный f -граф, то он является графом J для некоторой конечной группы S . Эта группа порождена двумя элементами, — не обязательно минимальной системой образующих, — один из которых имеет второй порядок, а порядок другого элемента может быть любым, в том числе этот элемент может быть например единицей группы. Группа S является группой симметрий исходного f -графа. Выбор указанной пары элементов неоднозначен.

Напомним, что описание всех конечных групп до какого-то фиксированного порядка — это исключительно сложная задача. Тем не менее для групп небольших порядков описание существует в виде таблиц. Например, в книге [91] дано описание всех неабелевых конечных групп до порядка 32. Эти группы перечислены в виде таблиц их копредставлений, т. е. указаны образующие и соотношения. Поскольку порядок группы есть число вершин f -графа, следовательно, этот список, в принципе, позволяет нам вычислить список всех максимально симметричных f -графов с числом вершин до 32 включительно. Для этого нужно отобрать из указанного списка конечных групп лишь те, которые допускают копредставление с двумя образующими, из которых одна имеет второй порядок. Отметим,

что для одной и той же группы могут, в принципе, существовать несколько разных копредставлений такого вида. Следовательно, получим не один, а несколько соответствующих f -графов. Отметим, что хотя такие f -графы не изоморфны, однако у них одна и та же группа симметрий, т.е. исходная конечная группа.

Итак, при перечислении всех максимально симметричных f -атомов естественно возник класс конечных групп S , задаваемых следующим копредставлением:

$$S = \{a, b \mid a^2 = e, \dots\},$$

где многоточие обозначает другие, дополнительные соотношения, которые могут быть произвольными. Доказанное выше следствие можно переформулировать теперь так.

Следствие. *Копредставления вида $S = \{a, b \mid a^2 = e, \dots\}$, задающие конечные группы, взаимно-однозначно соответствуют максимально симметричным ориентированным f -атомам. При этом, группа S оказывается группой симметрий соответствующего ей f -атома.*

Интересен вопрос вычисления рода атома, если известно его задание, — а точнее, задание отвечающего ему f -графа, — в виде копредставления $S = \{a, b \mid a^2 = e, \dots\}$ конечной группы S . Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 2.13 (Ю. А. Браилов). *Пусть задано копредставление $S = \{a, b \mid a^2 = e, \dots\}$ конечной группы S . Рассмотрим соответствующий этому копредставлению атом V и поверхность \tilde{P} , получающуюся заклеивкой дисками всех граничных окружностей атома. Тогда эйлерова характеристика поверхности \tilde{P} может быть вычислена по формуле*

$$\chi(\tilde{P}) = |S| \left(\frac{1}{\text{порядок } b} + \frac{1}{\text{порядок } ab} - \frac{1}{2} \right).$$

Следовательно, род $g(V)$ атома V вычисляется по копредставлению S так:

$$g = \frac{2 - \chi}{2}.$$

В таблице 2.3 мы приводим полный список всех максимально симметричных f -графов с числом вершин до 6 включительно. Отметим, что число вершин у f -графа всегда четное. Здесь мы пока считаем, что все вершины f -графа имеют кратность три. В дальнейшем у нас появятся и f -графы с вершинами кратности два. Такие вершины мы будем называть звездочками. Соответствующие атомы естественно назвать максимально симметричными. Мы видим, что таких атомов сравнительно немного. А именно, среди всех атомов до сложности 3 включительно максимально симметричными оказались лишь следующие атомы: B, C_1, C_2, E_1, E_3 .

Прокомментируем таблицу 2.3. В первом столбце дано обозначение атома. Во втором столбце изображен его f -граф. В третьем столбце — группа симметрий f -графа и ее копредставление, определенное, вообще говоря, неоднозначно. В четвертом столбце указаны два элемента, порождающие эту группу. При этом первым поставлен элемент второго порядка.

Из таблицы 2.3 видно, что в одной и той же группе симметрий можно по-разному выбирать пару порождающих элементов, чтобы получить полный список всех максимальных f -графов. Например, так сделано для групп $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6, D_3$. В результате получаются различные максимально симметричные f -графы. В таблице каждой из этих групп отвечают по два f -графа.

Что имеется здесь в виду под разным выбором пары порождающих элементов в группе G ? Это означает, что две выбранные нами пары элементов нельзя перевести друг в друга одним и тем же сопряжением группы G .

2.8.5. Список плоских максимально симметричных атомов. Примеры максимально симметричных атомов произвольного рода

Напомним, что род атома $V = (P^2, K)$ — это род двумерной ориентированной поверхности \tilde{P} , получающейся из атома заклеивкой дисками всех его граничных окружностей. Сейчас мы обсудим вопрос — сколько существует максимально симметричных атомов фиксированного рода. Для плоских атомов получается полная классификация.

Теорема 2.14 (Н. В. Коровина).

- а) Для каждого целого числа $g > 1$ существует лишь конечное число максимально симметричных атомов рода g . Примеры указаны ниже.
- б) Полный список максимально симметричных атомов рода $g = 1$, т. е. торических, состоит из двух бесконечных серий, описанных ниже.
- в) Полный список максимально симметричных атомов рода $g = 0$, т. е. плоских, состоит из одной бесконечной серии и трех исключительных максимально симметричных плоских атомов, описанных ниже.

Доказательство.

Выше мы показали (см. пункт 7.7 и рис. 2.37), что каждому атому (P, K) можно каноническим образом сопоставить клеточное разбиение поверхности \tilde{P} , т. е. ее разбиение на многоугольники. Легко видеть, что если атом максимально симметричен, то максимально симметричным является и это разбиение. Это означает, что для любой пары ребер этого разбиения существует гомеоморфизм разбиения на себя, переводящий первое ребро во второе, и кроме того, для каждого ребра существует гомеоморфизм разбиения на себя, оставляющий ребро на месте, но меняющий местами его концы. При этом предполагается, что гомеоморфизмы сохраняют ориентацию. Отсюда, в частности, следует, что все многоугольники разбиения имеют одинаковое число сторон, а все вершины имеют одинаковую кратность. Таким образом, задача сводится к описанию симметричных разбиений замкнутой ориентированной поверхности.

Итак, сопоставим каждому максимально симметричному атому, точнее f -атому, разбиение на многоугольники, описанное выше. Пусть n — общее число ребер этого разбиения, p — число многоугольников, а q — число вершин.

Отметим, что n совпадает с числом вершин исходного атома (P, K) . Обозначим через l — число сторон каждого многоугольника, а через m — кратность каждой вершины. Поскольку каждое ребро соединяет две вершины и лежит в границе двух многоугольников с учетом кратности, то справедливы следующие очевидные соотношения

$$pl = qt = 2n.$$

С другой стороны, эйлерова характеристика поверхности \tilde{P} , следующим образом выражается через n, p, q :

$$\chi = p - n + q.$$

Отсюда получается следующая система уравнений:

$$\chi = -n + 2n \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} \right),$$

$$pl = 2n,$$

$$qm = 2n.$$

Нас интересуют все положительные целочисленные решения этой системы. Рассмотрим последовательно все случаи а, б, в.

а) Случай сферы с g ручками, где $g > 1$. Здесь $\chi < 0$. Система уравнений принимает здесь такой вид:

$$n = \chi \frac{lm}{2(m+l) - lm},$$

$$pl = 2n,$$

$$qm = 2n.$$

Интересующие нас решения, т.е. целочисленные точки (l, m) , находятся в области D , заключенной между двумя гиперболами. См. рис. 2.43. В самом деле, условие положительности числа $n(l, m)$ дает нам нижнюю гиперболу. Действительно, условие положительности числа $\chi \frac{lm}{2(m+l) - lm}$ эквивалентно условию $2(m+l) - lm < 0$, поскольку $\chi lm < 0$. Ясно, что уравнение $2(m+l) - lm = 0$ определяет гиперболу на плоскости (l, m) с асимптотами $l = 2, m = 2$ (рис. 2.43). Эквивалентным образом, можно считать, что нижняя гипербола получается при $n \rightarrow \infty$.

Верхняя гипербола определяется так. Из условия $p, q > 1$ вытекает, что $\chi = -n + (p+q) \geq -n + 2$, то есть $n \geq 2 - \chi$. Следовательно,

$$\chi \frac{lm}{2(m+l) - lm} \geq 2 - \chi,$$

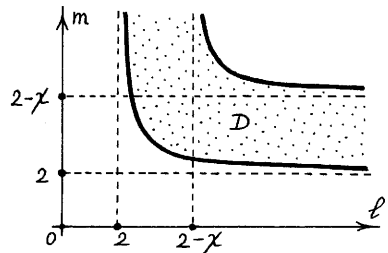


Рис. 2.43

откуда $lm \leq (2 - \chi)(l + m)$. Уравнение $lm = (2 - \chi)(l + m)$ определяет верхнюю гиперболу.

Рассмотрим линии уровня функции $n(l, m)$. Легко видеть, что все они являются гиперболами, причем при $n(l, m) = 2 - \chi$ мы получаем верхнюю границу области D , а при увеличении n эти гиперболы движутся вниз, и стремятся к нижней гиперболе, которую можно считать отвечающей значению $n = \infty$.

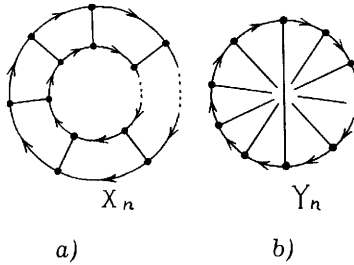


Рис. 2.44

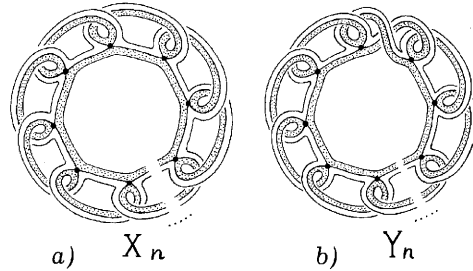


Рис. 2.45

Теперь докажем конечность числа решений системы уравнений. Все целочисленные точки (l, m) , являющиеся решениями, лежат на описанных выше гиперболах из области D . На каждой такой гиперболе есть лишь конечное число целых точек-решений. Дело в том, что имеется лишь конечное число атомов данной сложности n , где параметр n задает данную гиперболу. С ростом n , очевидно, наступает момент, когда гипербола, приближаясь к нижней границе области D , оказывается настолько близко от нее, что между этими двумя гиперболами вообще нет ни одной целой точки. С другой стороны, число атомов сложности, не превосходящей n , тоже конечно. Все целые точки, отвечающие таким атомам, расположены в уже пройденной нами части области D . Пункт (а) теоремы доказан.

Приведем теперь примеры максимально симметричных атомов рода $g > 1$. Мы укажем две такие серии. Удобнее всего предъявить их на языке f -графов. На рис. 2.44 изображены две серии f -графов X_n, Y_n , где $n \geq 4$. На рис. 2.45 изображены сами соответствующие атомы. Их тип, очевидно, зависит от четности числа n , т. е. от количества вершин атома. Для атомов серии X_n их род g вычисляется так:

$$g = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{n-2}{2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Для атомов серии Y_n их род g вычисляется по формуле:

$$g = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

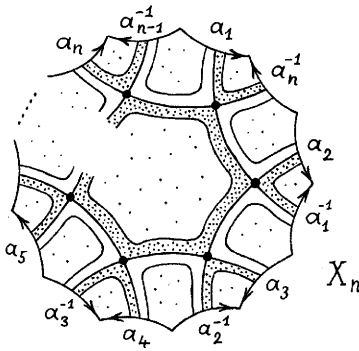


Рис. 2.46

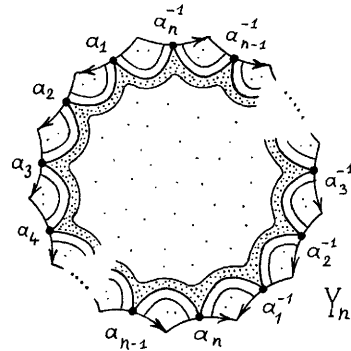


Рис. 2.47

Обе серии атомов максимально симметричны. Группа симметрий атомов серии X_n изоморфна $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2$, а группа симметрий атомов Y_n изоморфна \mathbb{Z}_{2n} . В обоих случаях порядок группы равен $2n$. Впрочем, стоит отметить, что атомы X_n при нечетном n изоморфны атомам Y_n при нечетном n . Условно можно записать $X_{2p+1} = Y_{2p+1}$. При четном $n = 2p$ атомы X_{2p} и Y_{2p} не изоморфны. У них разный род, и разные группы симметрий. Изоморфизм атомов X_{2p+1} и Y_{2p+1} можно получить просто поменяв знак функции f на f -атоме X_{2p+1} . Поэтому, окончательно, две серии различных атомов рода $g > 1$ выглядят так. Это X_n , где n — любое, большее чем 3, и Y_{2p} , где $p > 1$.

Полезно изобразить обе серии атомов на симметричной плоской развертке сферы с g ручками, то есть на ее плоском фундаментальном многоугольнике. Для серии атомов X_n нужно взять фундаментальный $2n$ -многоугольник в виде

$$(a_1 a_n^{-1})(a_2 a_1^{-1})(a_3 a_2^{-1}) \dots (a_i a_{i-1}^{-1}) \dots (a_n a_{n-1}^{-1})$$

и нарисовать на нем скелет K атома X_n как показано на рис. 2.46. Здесь, как обычно, для восстановления сферы с g ручками, нужно склеить стороны фундаментального многоугольника, помеченные одинаковыми буквами с учетом их ориентации.

Для серии атомов Y_n нужно взять плоский фундаментальный $2n$ -угольник в симметричном виде

$$(a_1 a_2 \dots a_n)(a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1})$$

и нарисовать на нем скелет K атома Y_n как показано на рис. 2.47.

б) Случай тора, т. е. $g = 1$. Здесь система уравнений принимает вид:

$$lm = 2(l + m),$$

$$pl = 2n,$$

$$qm = 2n.$$

Полный список всех целых положительных решений этой системы выглядит так.

1-я серия: $m = l = 4$, n четное.

2-я серия: $m = 3, l = 6$ (или наоборот, $m = 6, l = 3$), n делится на 3.

Предъявим две соответствующие бесконечные серии максимально симметричных атомов.

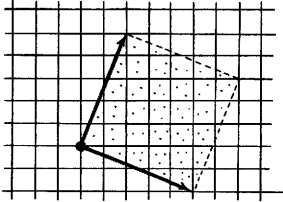


Рис. 2.48

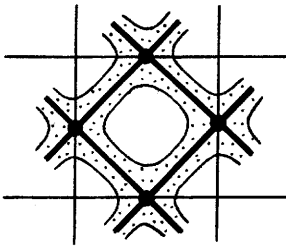


Рис. 2.49

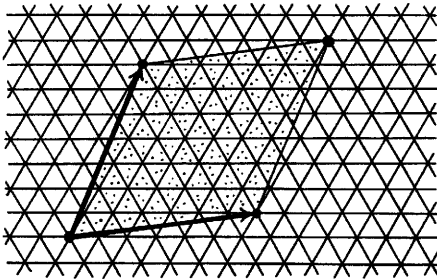


Рис. 2.50

Построение атомов первой серии. Рассмотрим на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 стандартное разбиение на квадраты со стороной единица. См. рис. 2.48. Пусть (k_1, k_2) и $(k_2, -k_1)$ — пара ортогональных целочисленных векторов, где целые числа k_1, k_2 — произвольные. Рассмотрим решетку на плоскости, порожденную этими векторами. Она квадратная, то есть ее фундаментальной областью является квадрат, натянутый на векторы (k_1, k_2) и $(k_2, -k_1)$. Возьмем фактор плоскости \mathbb{R}^2 по этой решетке. Получится двумерный тор. Он разбит на квадраты, происходящие из исходного разбиения плоскости на мелкие квадраты. Легко видеть, что это разбиение максимально симметрично в указанном выше смысле.

Изготовим из этого разбиения атом тем способом, который был описан в пункте 7.7. Отметим середины ребер всех мелких квадратов на торе. Соединим их попарно как показано на рис. 2.49. Получится граф с вершинами кратности 4. Его мы возьмем за граф K конструируемого атома. Сам атом возникает как

трубчатая окрестность своего графа K (рис. 2.49). Группа симметрий этого атома совпадает с группой симметрий исходного разбиения плоскости на мелкие квадраты. Почему этот атом максимально симметричен? Потому, что мы начинали с максимально симметричного разбиения. В самом деле, любое ребро можно перевести посредством симметрий исходного мелкого разбиения — в любое. Далее, любое ребро можно отобразить на себя посредством тех же симметрий, по-

меняв местами концы ребра. При переходе от исходного мелкого разбиения к атому мы видим, что каждое ребро превратилось в вершину. Следовательно, группа симметрий транзитивно действует на множестве вершин атома, и кроме того, для каждой вершины атома существует симметрия, которая действует в окрестности этой вершины как центральная симметрия. Это и означает максимальную симметричность атома (см. теорему выше). Подчеркнем здесь важность того обстоятельства, что решетка, по которой мы факторизовали плоскость, выдерживает поворот на угол $\frac{\pi}{2}$. Легко видеть, что здесь $m = l = 4$ и n — четное.

Построение атомов второй серии. Теперь вместо квадратного замощения плоскости, рассмотрим разбиение плоскости \mathbb{R}^2 на равносторонние треугольники (рис. 2.50). Снова возьмем произвольный вектор этой треугольной решетки и повернем его на угол $\frac{\pi}{3}$. Получившиеся таким образом два вектора возьмем за базис новой решетки. Она, очевидно, инвариантна относительно поворота на угол $\frac{\pi}{3}$. Рассмотрим тор, получающийся факторизацией плоскости по этой решетке. На торе возникает разбиение на равносторонние треугольники. Как и в предыдущем случае это разбиение максимально симметрично, и мы построим по нему атом. В качестве его вершин возьмем середины сторон треугольников, и соединим их попарно, как показано на рис. 2.51. Получится атом, у которого все положительные циклы имеют одинаковую длину $l = 6$, а все отрицательные циклы — одинаковую длину $m = 3$. Или наоборот, т. е. $l = 3$, $m = 6$, что зависит от выбора направления роста функции f на атоме.

Снова, как и в предыдущем случае, группа симметрий построенного атома совпадает с группой симметрий исходного разбиения на треугольники и поэтому является максимальной. Следовательно, мы предъявили серию атомов, удовлетворяющих условию $m = 3$, $l = 6$ (или наоборот, $m = 6$, $l = 3$), n делится на 3.

Докажем, что этими двумя сериями исчерпывается множество всех максимально симметричных атомов рода $g = 1$, т. е. расположенных на торе.

Как мы уже отметили выше, вместо классификации максимально симметричных атомов $V = (P, K)$ можно классифицировать максимально симметричные разбиения поверхности \tilde{P} . В данном случае — тора.

Поскольку сейчас нас интересует именно тор, то можно рассмотреть универсальное накрытие тора плоскостью. Атом V при этом накрывается каким-то бесконечным атомом \tilde{V} , вложенным в плоскость. Аналогично, описанное нами разбиение тора графом $L(K)$ на области, накроется соответствующим максимально симметричным разбиением плоскости на области. Отметим, что максимальная симметричность получающегося разбиения плоскости следует из того, что каждая симметрия поднимается с базы, т. е. с тора, до некоторой симметрии на накрывающей плоскости.

Поскольку мы уже знаем полный список всех решений системы уравнений, то видим что получившееся разбиение плоскости должно удовлетворять одному из следующих двух условий: либо $m = l = 4$, либо $m = 6$, $l = 3$ (или наоборот, $m = 3$, $l = 6$). Отсюда видно, что разбиение плоскости на правильные

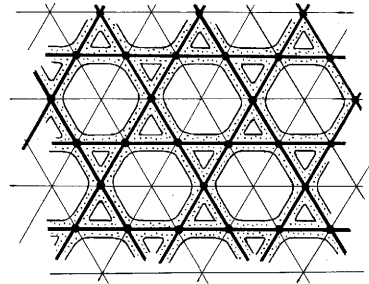


Рис. 2.51

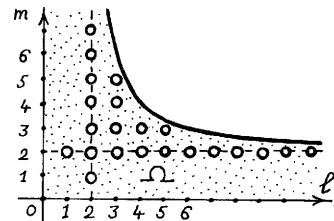


Рис. 2.52

Максимально симметричные плоские атомы

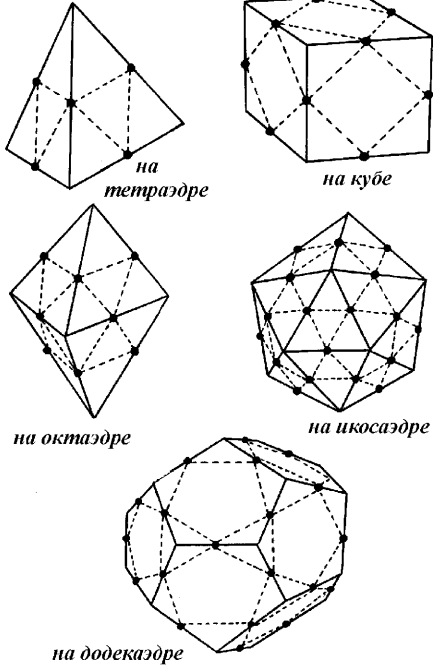


Рис. 2.53

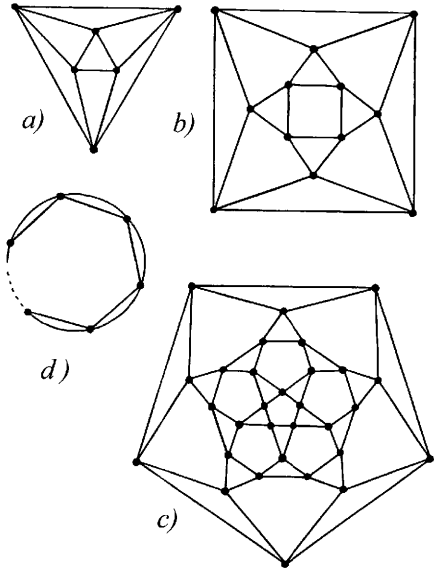


Рис. 2.55

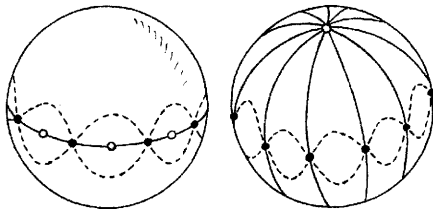


Рис. 2.54

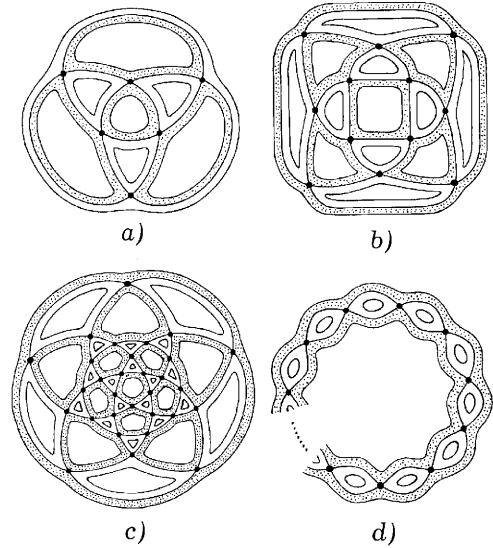


Рис. 2.56

области устроено так. Либо это разбиение на квадраты, либо — разбиение на треугольники. Легко видеть, что тогда оно совпадает с точностью до гомеоморфизма либо со стандартным разбиением плоскости на квадраты, либо со стандартным разбиением плоскости на правильные треугольники. Но эти два разбиения как раз и давали нам две бесконечных серии максимально симметричных атомов. При $m = 3$, $l = 6$ мы получим разбиение на шестиугольники, двойственное к разбиению на треугольники. Это не дает новых атомов, и поэтому мы такой случай можем отдельно не рассматривать.

Решетка, по которой происходит факторизация плоскости, очевидно должна сохраняться при симметриях атома. Для разбиений плоскости на квадраты эта решетка должна переходить в себя при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, она устроена в точности так, как уже описанная нами выше решетка. Нужно взять произвольный узел (k_1, k_2) решетки и повернуть соответствующий вектор на угол $\frac{\pi}{2}$. Итак, в случае разбиения плоскости на квадратные области ничего другого, кроме указанной нами серии атомов, — нет. Совершенно аналогично рассматривается и случай разбиения плоскости на треугольники. И здесь получается, что предъявленная нами серия атомов — единственная. Здесь вектор вида (k_1, k_2) нужно поворачивать на угол $\frac{\pi}{3}$. Пункт (б) теоремы доказан.

в) Случай сферы, т. е. $g = 0$. Максимально симметричные разбиения сферы хорошо известны. Напомним их описание и укажем соответствующие им атомы. Здесь мы имеем

$$n = \frac{2lm}{2(l+m) - lm}.$$

Легко видеть, что все интересующие нас пары (m, l) решений таковы (см. рис. 2.52):

- а) $m = l = 3$, $n = 6$,
- б) $m = 3$, $l = 4$ (или $m = 4$, $l = 3$), $n = 12$,
- в) $m = 3$, $l = 5$ (или $m = 5$, $l = 3$), $n = 30$,
- г) $m = 2$, $l = \text{целое} > 0$ (или $l = 2$, $m = \text{целое} > 0$), $n = l$.

Максимально симметричные разбиения, соответствующие этим решениям, хорошо известны. Это — так называемые платоновы тела и еще два специальных разбиения. См., например, книгу Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена [57]. Напомним, что платоновы тела — это пять классических многогранников, показанные на рис. 2.53, — тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Два других специальных правильных разбиения изображены на рис. 2.54. Других правильных разбиений двумерной сферы нет.

Осталось предъявить в явном виде атомы, отвечающие пяти платоновым телам и двум специальным сериям. На рис. 2.53 пунктиром изображены скелеты K атомов, отвечающих платоновым телам. Как и выше, достаточно соединить середины соседних ребер, сходящихся в одной вершине платонова тела. Напомним,

что общее правило построения атома по заданному разбиению поверхности на многоугольные области показано на рис. 2.37. Как видно из рис. 2.53 получается в действительности не пять, а всего лишь три различных атома. Первый получается из тетраэдра. Второй получается из октаэдра или из куба. Третий — из икосаэдра или додекаэдра.

Два специальных разбиения двумерной сферы порождают один и тот же атом. Его скелет K показан пунктиром на рис. 2.54.

На рис. 2.55(a, b, c, d) показаны скелеты K всех перечисленных атомов в их развертке на плоскость.

На рис. 2.56(a, b, c, d) изображены сами максимально симметричные плоские (то есть сферические) атомы.

Теорема 2.14 полностью доказана. ■

2.8.6. Представление атомов в виде факторов плоскости Лобачевского по подгруппам ее группы изометрий. Атомы как поверхности постоянной отрицательной кривизны

Оказывается, существует естественное вложение группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ в группу изометрий $\text{Iso}(L^2)$ двумерной плоскости Лобачевского L^2 . Тем самым, группа $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ представляется в виде изометрий плоскости Лобачевского. Реализуем плоскость Лобачевского в виде верхней полуплоскости комплексной z -плоскости. Рассмотрим на ней две изометрии β, α , задающиеся следующими дробно-линейными преобразованиями:

$$\alpha: z \rightarrow -\frac{1}{z}, \quad \beta: z \rightarrow z + 2.$$

Хорошо известно, что группа собственных изометрий плоскости Лобачевского $\text{Iso}(L^2)_0$ изоморфна фактор-группе $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2 = \{\pm E\}$. Тогда преобразования β и α запишутся в виде матриц

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Геометрически преобразование β задает сдвиг вдоль вещественной оси на две единицы. Преобразование β имеет бесконечный порядок, поскольку его k -я степень имеет вид:

$$(\beta')^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование α — это гиперболический поворот на угол π вокруг точки i на мнимой оси. Это очевидно инволюция. Квадрат матрицы α' равен $-E$, однако это есть тождественное преобразование в группе $\text{Iso}(L^2)_0 = SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$.

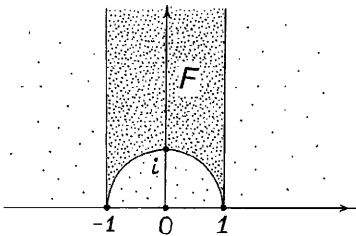


Рис. 2.57

Лемма 2.2. Подгруппа в группе $ISO(L^2)_0$, порожденная преобразованиями β и α , изоморфна группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

Доказательство следует из явного вида матриц. ■

Фундаментальная область $F(D)$ подгруппы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ изображена на рис. 2.57. Она очевидно является треугольником, все три вершины которого лежат на бесконечности, т.е. на абсолюте. Под действием преобразований β и α эта область размножается как показано на рис. 2.58. Преобразование β сдвигает ее на две единицы вправо, а преобразование α поворачивает область на угол π вокруг точки i . Отсюда видно, что применяя композиции этих преобразований, мы постепенно замостим всю верхнюю полуплоскость образами области $F(D)$, как показано на рис. 2.58.

Теперь мы можем вложить дерево D в плоскость Лобачевского таким образом, что оно будет переходить в себя при описанном действии группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Проще всего построить это вложение так. В фундаментальной области (треугольнике) $F(D)$ выберем треножник, показанный на рис. 2.59, состоящий из отрезков геодезических и имеющий свою вершину в центре треугольника $F(D)$. Для этого достаточно провести из каждой вершины $F(D)$ перпендикуляр к противоположной стороне. Точка пересечения трех перпендикуляров и дает центр треножника. Под действием композиций преобразований β и α треножник порождает дерево D (рис. 2.59). Для наглядности, та же картина вложения дерева D в плоскость Лобачевского показана нами и на модели Пуанкаре, то есть на единичном круге (рис. 2.60). Профакторизуем теперь плоскость Лобачевского по всей группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. В результате с топологической точки зрения получится кольцо с одной отмеченной точкой внутри (рис. 2.61). Эта отмеченная точка отвечает неподвижной точке преобразования α . В этой точке нарушается гладкость и получается коническая особенность. Кольцо с отмеченной точкой внутри вскоре появится у нас как атом A^* .

Теперь погрузим теорию f -атомов в гиперболическую геометрию. Оказывается, что в некотором смысле каждый f -атом может быть представлен в виде фактора плоскости Лобачевского по подходящей подгруппе группы изометрий. Более точно, следует поступить так. Возьмем в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ любую подгруппу G конечного индекса без элементов конечного порядка. Фундаментальная область $F(G)$ группы G получается объединением нескольких фундаментальных областей $F(D)$. При этом число таких областей $F(D)$ в точности равно индексу подгруппы G в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. В частности, площадь

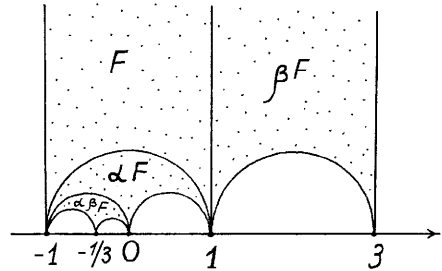


Рис. 2.58

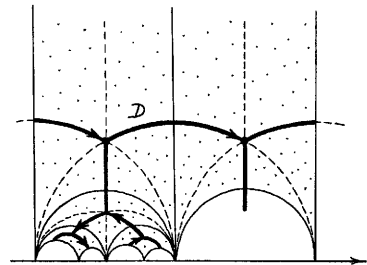


Рис. 2.59

области $F(G)$ равна πk , где k — индекс подгруппы G в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Фактор-пространство плоскости Лобачевского по подгруппе G группы изометрий будет полной, в смысле метрики постоянной отрицательной кривизны, некомпактной двумерной поверхностью с параболическими концами. Эти концы соответствуют парам геодезических, касающихся друг друга в бесконечно удаленной точке на абсолюте.

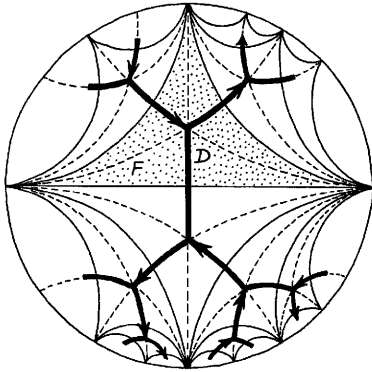


Рис. 2.60

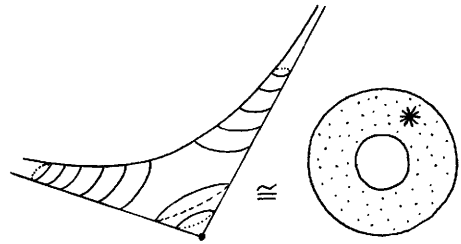


Рис. 2.61

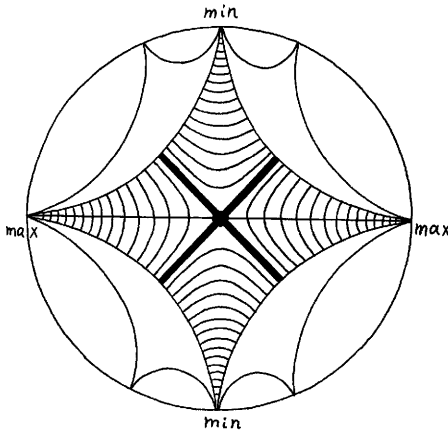


Рис. 2.62

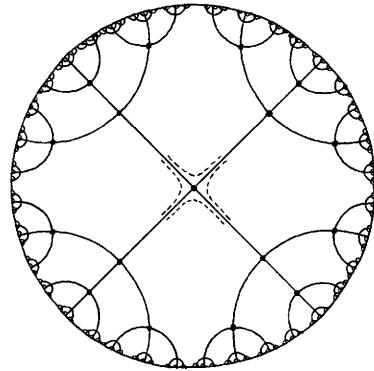


Рис. 2.63

Если мы теперь зададим на плоскости Лобачевского функцию Морса \tilde{f} , инвариантную относительно действия группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ (а, следовательно, и относительно ее подгрупп G), то фактор-пространства вида L^2/G можно будет оснастить функцией Морса f . Она получится из универсальной функции \tilde{f} путем ее опускания вниз на фактор-пространство L^2/G . В результате получится f -атом.

Опишем универсальную функцию \tilde{f} на L^2 . На рис. 2.62 изображены линии уровня искомой функции \tilde{f} на фундаментальной области $F(D)$ и на ее образе при действии преобразования α (в результате получается четырехугольник с верши-

нами на абсолюте). Центр четырехугольника — это седловая морсовская точка, а геодезические, соединяющие середины противоположных сторон, это критическая линия уровня функции \tilde{f} . При этом линии уровня выходят на границу фундаментальной области и, следовательно, четырехугольника, под прямым углом. Это гарантирует нам гладкость функции уже на всей плоскости Лобачевского после размножения области $F(D)$ элементами группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. В результате получается картина линий уровня функции \tilde{f} на всей плоскости Лобачевского. На рис. 2.63 показана одна критическая линия уровня функции \tilde{f} . Комбинируя теперь рис. 2.62 и рис. 2.63, легко нарисовать — как устроены и все остальные (регулярные) линии уровня функции \tilde{f} .

Лемма 2.3.

- а) *Описанная функция \tilde{f} на плоскости Лобачевского является функцией Морса, инвариантной относительно группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.*
- б) *Все ее критические точки являются седловыми.*

Доказательство фактически дано при построении функции \tilde{f} . ■

Задача. Описать функцию \tilde{f} в инвариантных терминах геометрии Лобачевского.

Пусть теперь G — произвольная подгруппа конечного индекса без элементов конечного порядка в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, вложенная в группу изометрий плоскости Лобачевского.

Теорема 2.15. *Фактор-пространство L^2/G плоскости Лобачевского по группе G является некомпактной двумерной поверхностью P^2 , снабженной функцией Морса f . Ее параболические концы уходят на бесконечность. На этой поверхности задана полная метрика постоянной отрицательной кривизны. Пара (P^2, f) задает некоторый f -атом. Точнее, класс эквивалентности этой пары является некоторым f -атомом. И наоборот, любой f -атом получается таким образом.*

КОММЕНТАРИЙ. Поверхность P^2 имеет концы, уходящие на бесконечность. Удобно считать, что функция \tilde{f} равна нулю на критической линии уровня. Тогда, отрезав концы поверхности P^2 , то есть рассмотрев множество $\{|f| \leq \varepsilon\}$, мы получаем уже компактную двумерную поверхность с функцией Морса, определяющую f -атом.

Доказательство фактически дано выше при построении функции \tilde{f} . ■

На рис. 2.64 мы условно изобразили представление атома B в виде полной поверхности постоянной отрицательной кривизны с тремя параболическими концами, уходящими на бесконечность. Отметим, что эти поверхности нельзя гладко вложить в \mathbb{R}^3 так, чтобы индуцированная на них метрика оказалась бы полной метрикой постоянной отрицательной кривизны. При

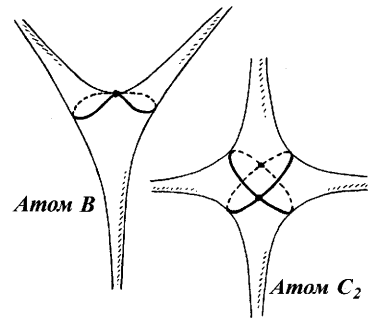


Рис. 2.64

этом критическая линия уровня функции Морса, то есть восьмерка, реализовалась в виде замкнутой минимальной геодезической с самопересечением. На этом же рисунке показана модель постоянной отрицательной кривизны для атома C_2 . Видны две минимальные замкнутые геодезические, образующие критическую линию уровня функции Морса.

Выше мы описали накрытие f -графа универсальным деревом D . Мы реализовали это дерево в плоскости Лобачевского (рис. 2.60) в виде графа, составленного из отрезков геодезических. В каждой вершине графа сходятся ровно три дуги. Углы между ними равны и составляют $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, дерево D оказывается минимальной сетью или сетью Штейнера. Другими словами, она является локально минимальной сетью. Для случая сетей на плоскости, то есть для пространства нулевой кривизны, имеется богатая и хорошо разработанная теория таких сетей. См. работу А. О. Иванова и А. А. Тужилина [69]. В нашем случае, переходя к фактор-пространству L^2/G , мы получаем замкнутые минимальные сети на полной поверхности постоянной отрицательной кривизны, являющейся атомом. Любопытно, что для любой такой сети на атоме все ее отрезки имеют одинаковую длину. Отсюда может быть удастся извлечь полную классификацию локально минимальных сетей, т. е. сетей Штейнера, на всех атомах, реализованных в виде полных некомпактных поверхностей постоянной отрицательной кривизны с параболическими концами.

2.9. Общее понятие молекулы

Пусть на поверхности X^2 , ориентируемой или неориентируемой, задана функция Морса f . Ее линии уровня расщлаивают поверхность, т. е. возникает слоение с особенностями. Мы хотим построить инвариант этого слоения. Для этого рассмотрим все критические значения c_i функции f и соответствующие им критические уровни $f = c_i$. Каждому такому уровню отвечает некоторый атом. При этом граничные окружности атомов соединены цилиндрами (трубками), являющимися однопараметрическими семействами неособых связных линий уровня функции, т. е. окружностей. Изобразим рассматриваемое нами слоение в виде графа, в качестве вершин которого возьмем атомы, обозначенные

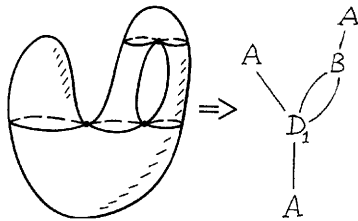


Рис. 2.65

теми или иными буквами. Это означает, что каждой вершине графа сопоставлен некоторый атом, причем указано взаимно-однозначное соответствие между граничными окружностями атома и ребрами графа, примыкающими к данной вершине-атому. Далее, концы атомов соединим ребрами, отвечающими указанным однопараметрическим семействам регулярных окружностей, т. е. трубкам. Пример показан на рис. 2.65.

Если поверхность X^2 является ориентируемой, то вершины графа, т. е. атомы, рассматриваемые как поверхности P с графом K , тоже естественно считать

ориентированными. Другими словами, в молекуле следует различать друг от друга зеркально симметричные атомы, т. е. отличающиеся друг от друга лишь ориентацией. Если же поверхность X^2 неориентируема, то мы рассматриваем атомы без учета их ориентации.

Определение 2.21. Описанный граф назовем *молекулой* W , отвечающей паре (X^2, f) .

Для удобства, на месте каждой вершины молекулы мы будем ставить стандартное буквенное обозначение данного атома.

Какие молекулы мы будем считать одинаковыми, совпадающими?

Определение 2.22. Две молекулы W и W' будем считать *одинаковыми*, если существует гомеоморфизм одного графа на другой, который переводит ребра в ребра, атомы в атомы, причем этот гомеоморфизм продолжается на сами атомы. Это означает, что гомеоморфизму ребер отвечает гомеоморфизм отвечающих им граничных окружностей атомов и этот гомеоморфизм должен продолжаться с границы атома внутрь, т. е. на весь атом.

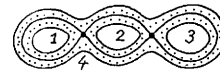
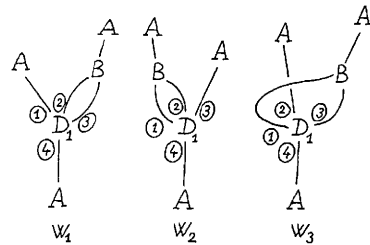


Рис. 2.66

Комментарий. Для каждого атома полезно рассмотреть его стандартную модель в виде поверхности P с графом K . Задавая молекулу, мы задаем тем самым некоторый гомеоморфизм между этой стандартной моделью и атомом, посаженным в вершину молекулы. То же самое происходит, когда тот же атом появляется в составе какой-то другой молекулы W' . Если же теперь задан гомеоморфизм между двумя молекулами W и W' , то он индуцирует перестановку граничных окружностей стандартной модели атома. Для того, чтобы считать молекулы одинаковыми, надо требовать, чтобы эта перестановка порождалась некоторым гомеоморфизмом стандартного атома на себя. Поясним, что не любая перестановка граничных окружностей поверхности продолжается до гомеоморфизма всей поверхности на себя. Это и означает, что концы атомов, вообще говоря, неравноправны. Например, у атома D_1 концы 1 и 3 равноправны, а концы 1 и 2 (а также 2 и 3) — нет (рис. 2.66). На рис. 2.66 приведены три молекулы W_1, W_2, W_3 , из которых молекулы W_1 и W_2 одинаковы, а молекулы W_2 и W_3 различны. Дело в том, что гомеоморфизм, отождествляющий графы молекул W_1 и W_2 , индуцирует следующую перестановку граничных окружностей стандартной модели атома D_1 (расположенной в стороне): $(1, 2, 3, 4) \rightarrow (3, 2, 1, 4)$. Эта перестановка очевидно индуцируется гомеоморфизмом атома на себя, являющимся отражением его относительно центра симметрии (рис. 2.66).

Гомеоморфизм, отождествляющий графы молекул W_2 и W_3 , индуцирует следующую перестановку граничных окружностей стандартной модели атома D_1 (расположенной в стороне): $(1, 2, 3, 4) \rightarrow (1, 3, 2, 4)$. Эта перестановка уже не может быть получена путем гомеоморфизма атома D_1 на себя, что очевидно.

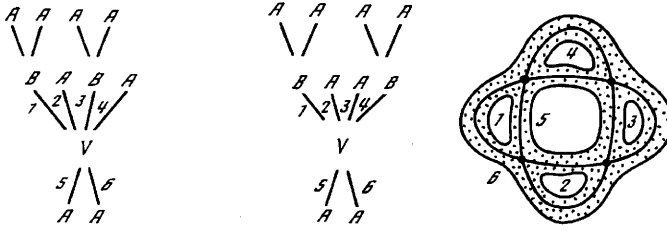


Рис. 2.67

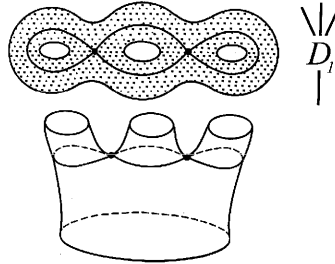


Рис. 2.68

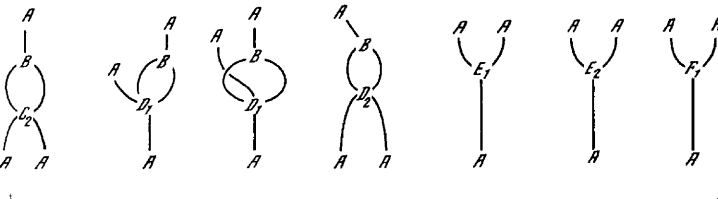
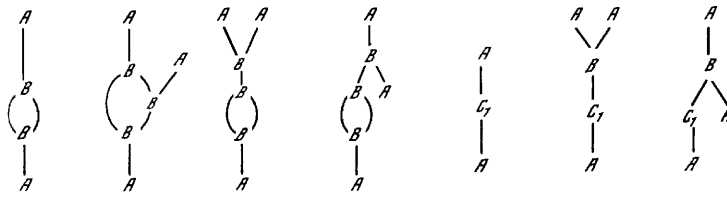
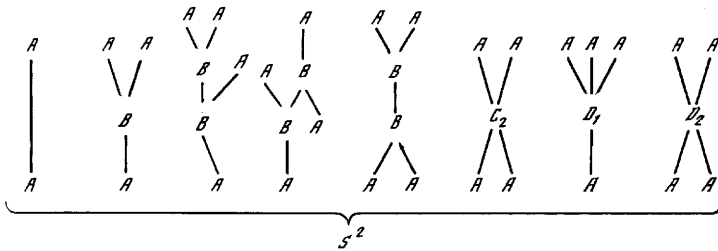


Рис. 2.69

Эту проблему нельзя обойти, обозначив одинаковым номером те граничные окружности атома, которые могут быть переведены друг в друга путем подбора подходящего гомеоморфизма атома на себя. В этом можно убедиться на примере атома V (рис. 2.67). Две нарисованные молекулы W_1 и W_2 — различны, несмотря на то, что все четыре конца 1, 2, 3, 4 атома V равноправны в том смысле, что каждый из них может быть переведен в любой другой подходящим гомеоморфизмом атома V . Дело в том, что для совмещения молекул потребовалось бы переставить концы 1 и 2 атома V . Но в таком случае мы должны были бы автоматически переставить между собой его концы 3 и 4. Но к концам 3 и 4 примыкают различные части молекул. Их нельзя совместить гомеоморфизмом.

С формальной точки зрения мы должны были бы занумеровать концы атомов в нашем списке (см. выше) различными цифрами, а при построении молекул следовало бы у ребер, примыкающих к атому, ставить тот же номер, что и на соответствующем конце атома. Мы не будем этого делать, поскольку в приложениях будут встречаться, в основном, не очень сложные атомы: $A, B, \tilde{B}, C_1, C_2, D_1$. Для них соответствие между концами атома, исходящими из его буквенного обозначения с реальными его граничными окружностями усматривается без труда. Например, атом D_1 , показанный на рис. 2.68, мы будем изображать в виде буквы D_1 с одним нижним концом и тремя верхними концами. Здесь ясно, что нижний конец отвечает внешней окружности атома, а три верхних — остальным трем граничным окружностям атома. Средний верхний конец атома отвечает центральной граничной окружности поверхности.

Теорема 2.16. Пусть (X^2, f) и (X'^2, f') — две ориентированные поверхности с функциями Морса, и W, W' — соответствующие им молекулы. Тогда пары (X^2, f) и (X'^2, f') послойно эквивалентны с сохранением ориентации, в том и только в том случае, когда молекулы W и W' одинаковы.

Доказательство.

В одну сторону утверждение очевидно: если пары (X^2, f) и (X'^2, f') послойно эквивалентны, то их молекулы, конечно, совпадают. Обратное, пусть молекулы W и W' одинаковы. Возьмем гомеоморфизм, отображающий W на W' . Он устанавливает взаимно-однозначное соответствие между однопараметрическими семействами регулярных линий уровня функций f и f' , а также между их критическими слоями. Окрестность каждого критического уровня — это атом. Из совпадения молекул следует, что соответствующие атомы одинаковы. В силу определения атома это означает, что функции f и f' послойно эквивалентны в окрестности своих критических уровней. Эту эквивалентность нужно продолжить на оставшиеся трубки, расслоенные на регулярные окружности (линии уровня функций f и f'). Это тоже можно сделать, по определению молекулы, поскольку на концах трубок гомеоморфизм уже задан. Теорема доказана. ■

Что произойдет с молекулой, если мы заменим ориентацию поверхности X^2 на противоположную, не меняя при этом функции f ?

Предложение 2.8. При замене ориентации X^2 все атомы соответствующей молекулы заменятся на зеркально симметричные.

Доказательство очевидно. ■

Не следует думать, что молекула не меняется при замене ориентации X , если все ее атомы зеркальные. Дело в том, что концы атомов неравноправны, помечены разными цифрами. Поэтому при изменении ориентации поверхности на каждом атоме происходит, вообще говоря, некоторая перенумерация его концов, индуцируемая зеркальной симметрией атома на себя.

Назовем атом *сильно зеркальным*, если его зеркальная симметрия оставляет на месте его концы. То есть, каждая граничная окружность переходит в себя при зеркальной симметрии. Таковыми являются, например, все атомы сложности 1 и 2, что видно из таблицы 2.1.

Следствие. Пусть паре (X^2, f) отвечает молекула W , вершинами которой являются лишь сильно зеркальные атомы, например, любые атомы сложности не превосходящей 2. Тогда всегда существует диффеоморфизм поверхности X^2 на себя, меняющий ориентацию и сохраняющий функцию f .

Доказательство очевидно, так как при указанных условиях молекула W не меняется при изменении ориентации поверхности X^2 . ■

Отсюда видно, что молекула W — это достаточно хороший инвариант, позволяющий давать ответы на многие вопросы.

Приведем теперь список всех простейших молекул, т.е. составленных из атомов малой сложности.

Теорема 2.17. Все классы послойной эквивалентности функций Морса с числом критических точек не больше 6, на сфере и на торе описываются молекулами, изображенными на рис. 2.69. Все перечисленные молекулы — различны. На сфере таких классов — 8, на торе — 14.

Доказательство получается перебором всевозможных вариантов, с учетом эйлеровой характеристики поверхности. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 2.17 ориентация несущественна, в том смысле что классов послойной эквивалентности с учетом ориентации и без учета ориентации — одинаковое количество. Другими словами, каждая из перечисленных молекул не меняется при замене ориентации поверхности. Это следует из свойств атомов, образующих эти молекулы.

Рассмотрим ориентированную поверхность X^2 как симплектическое 2-многообразие. Тогда любую функцию Морса на нем можно считать гамильтонианом интегрируемой системы с одной степенью свободы. Напомним, что любая гамильтонова система с одной степенью свободы интегрируема. Интегральные траектории задается линиями уровня функции. Поэтому послойная эквивалентность пар (X^2, f) и (X'^2, f') фактически может рассматриваться как траекторная эквивалентность соответствующих гамильтоновых систем $\text{sgrad } f$ и $\text{sgrad } f'$. Небольшое отличие состоит в том, что на каждой интегральной траектории гамильтонова поля задана естественная ориентация — направление потока. При траекторной эквивалентности потоков мы договорились (см. выше) учитывать это направление. Чтобы добиться этого, нужно добавить к молекуле эту дополнительную информацию, указав, например, на каждом ее ребре направление роста

функции f . Такую молекулу естественно назвать направленной. Зная направление роста функции и ориентацию на каждом атоме, мы однозначно находим направление потока на каждой из граничных окружностей атома.

Следствие. Два гамильтоновых векторных поля $\text{sgrad } f$ и $\text{sgrad } f'$ на ориентированных поверхностях X^2 и X'^2 траекторно эквивалентны (гладко или топологически) тогда и только тогда, когда соответствующие направленные молекулы W и W' одинаковы.

Таким образом, направленная молекула является полным траекторным инвариантом гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

2.10. Примеры сложных функций Морса и сложных молекул

ПРИМЕР 1. Рассмотрим на торе функцию Морса, линии уровня которой показаны на рис. 2.70. Тор представлен в виде квадрата с отождествленными сторонами. Ясно, что это — сложная функция Морса и соответствующая ей молекула имеет вид

$$A - C_1 - A.$$

Атом C_1 показан на том же рис. 2.70. Его сложность, т. е. атомный вес, равна двум, его валентность тоже равна двум.

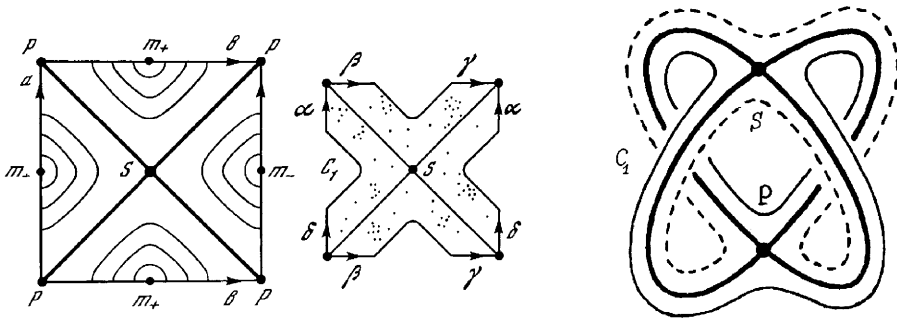


Рис. 2.70

Эту же функцию можно представить в виде функции высоты при подходящем вложении тора T^2 в \mathbb{R}^3 . В самом деле, рассмотрим сначала стандартное вертикальное вложение тора, показанное на рис. 2.71(a). Начнем теперь класть тор плашмя на горизонтальную плоскость, стремясь поместить обе седловые критические точки на один уровень. Это произойдет, конечно, раньше, чем тор ляжет на плоскость. Наклоняя тор, будем следить за деформацией линий уровня его функции высоты. Удобно следить за происходящим, глядя на тор сверху. Две восьмерки, отвечающие седловым критическим точкам, начинают сближаться. На рис. 2.71(b) показан момент перед их слиянием. На рис. 2.71(c) показана критическая линия уровня, на которой теперь оказываются две седловые критические точки. На рис. 2.71(d) показана трубчатая окрестность этого критического

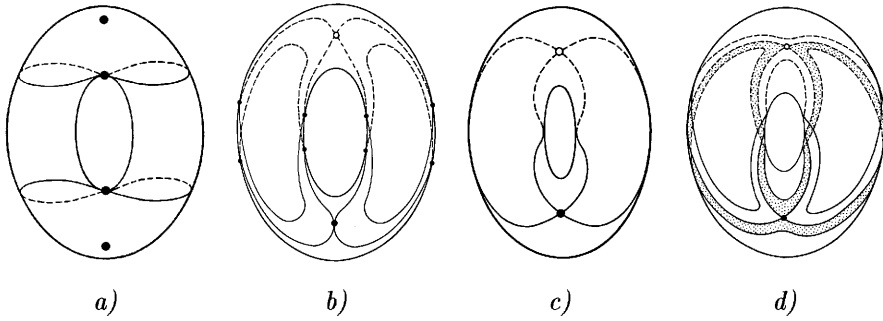


Рис. 2.71

уровня, т.е. атом. Это и есть один из сложных атомов, который мы будем в дальнейшем обозначать C_1 .

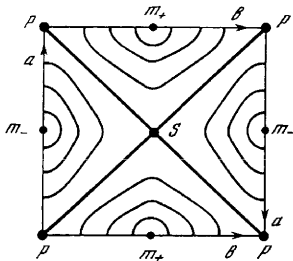


Рис. 2.72

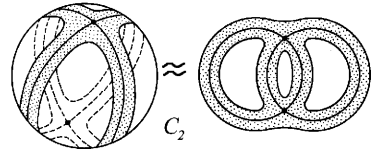
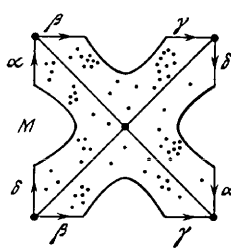


Рис. 2.73

ПРИМЕР 2. Рассмотрим на бутылке Клейна функцию Морса, линии уровня которой изображены на рис. 2.72. На седловом критическом уровне этой функции — ровно две критические точки. Легко видеть, что соответствующий атом совпадает с уже известным нам атомом M (см. выше). Таким образом, получаем пример сложной функции Морса на бутылке Клейна с молекулой вида:

$$A — M — A.$$

Как и в случае тора эту сложную функцию можно представить в виде функции высоты при подходящем погружении бутылки Клейна в \mathbb{R}^3 . Для этого нужно поместить ее в \mathbb{R}^3 вертикально как на рис. 2.18. Поступая по аналогии со случаем тора, будем теперь класть ее плашмя на горизонтальную плоскость, стремясь поместить оба седла на один уровень. В тот момент, когда это произойдет, мы и получим искомую функцию высоты с молекулой $A — M — A$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим на сфере S^2 , вложенной в \mathbb{R}^3 , четную функцию Морса

$$f = x^2 + 2y^2 + 3z^2.$$

У нее три критических значения. Максимальному значению отвечают две точки локального максимума, минимальному — два локальных минимума. Седлово-

му значению отвечают два седла на одном уровне. Функция f четна, поэтому ее седловой атом имеет вид, показанный на рис. 2.73. Этот атом мы будем в дальнейшем называть C_2 . Следует отметить, что этот атом, оказывается, играет важную роль в теории классификации интегрируемых систем. Он возникает, например, в интегрируемых задачах Якоби, Эйлера, Ковалевской, Стеклова, в теории геодезических потоков на сфере и т. д. В то же время, атом C_1 встречается в теории интегрируемых систем заметно реже. Об этом подробнее мы поговорим ниже.

2.11. Аппроксимация сложных молекул простыми. Деформации функций Морса

Хорошо известно (см., например, [130]), что любая функция Морса на любом гладком многообразии может быть аппроксимирована функцией Морса, у которой на каждом критическом уровне лежит *ровно одна* критическая точка. Другими словами, сколь угодно малым шевелением можно развести критические точки функции на разные уровни. Ясно, что такое возмущение функции Морса превращает сложную молекулу в простую, т. е. в молекулу, атомы которой суть только A , B и \bar{B} . Атом \bar{B} может появиться лишь в том случае, когда поверхность X неориентируема.

В этом смысле любая сложная молекула аппроксимируется простой.

Важно отметить, что эта аппроксимация, вообще говоря, неоднозначна. Другими словами, одна и та же сложная молекула может превращаться в разные простые молекулы при разных ее возмущениях. Более того, сложный атом может распадаться несколькими разными способами в сумму простых атомов. Приведем пример. На рис. 2.74 показан сложный атом G_1 с тремя вершинами. Изображены два разных, т. е. неэквивалентных его распада в сумму простых атомов.

Отметим, что возмущение функции Морса, делающее сложную молекулу простой, может разрушить исходную симметрию функции Морса. Наличие симметрии обычно делает молекулу сложной. Возмущая функцию, мы теряем информацию о симметриях. Поэтому, желая изучать симметрии функций, следует изучать именно сложные атомы и молекулы, а не их возмущения.

Обсудим теперь следующий общий вопрос. Возьмем две функции Морса f и g на одной и той же двумерной замкнутой поверхности и попытаемся гладко продеформировать их друг в друга в классе функций Морса. Спрашивается, когда это возможно? Какие условия нужно наложить на функции, чтобы они деформировались друг в друга указанным образом? Одно из очевидных необходимых условий состоит в том, что функции f и g должны иметь одинаковое

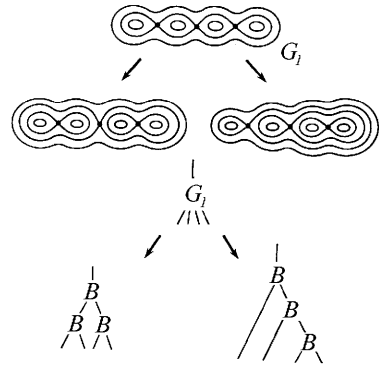


Рис. 2.74

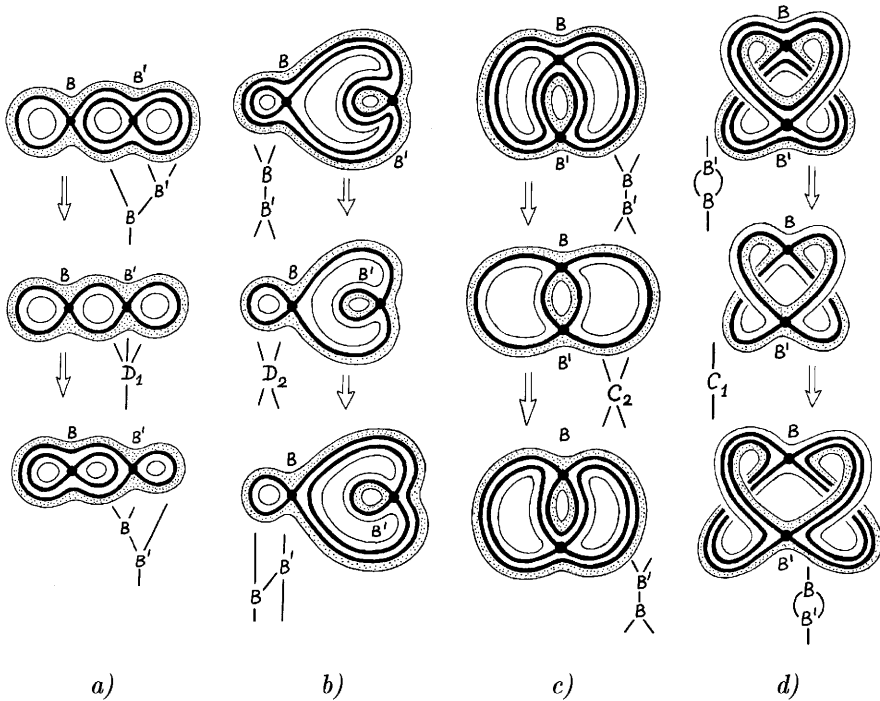


Рис. 2.75

число локальных минимумов и одинаковое число локальных максимумов. Тогда, очевидно, и количество r седловых критических точек у них совпадет. Ясно, что $r = p + q - \chi(M)$, где $\chi(M) = 2 - 2g$ или $2 - \mu$ — эйлерова характеристика поверхности M , g и μ — род поверхности M (число ручек в ориентируемом и число пленок Мебиуса в неориентируемом случае).

Необходимость указанного условия вытекает из того, что в процессе деформации не должны рождаться и уничтожаться критические точки, поскольку любое «рождение» или «уничтожение» означает переход через неморсовскую особенность.

Следовательно, вопрос нужно ставить так: является ли линейно связным пространство функций Морса на данной двумерной замкнутой поверхности с фиксированным числом локальных минимумов и максимумов? Сразу возникает естественная мысль — изучить деформации функций Морса при помощи молекул. Нетрудно показать, что если изобразить обе указанные функции Морса f и g в виде молекул $W(f)$ и $W(g)$, то можно построить деформацию одной молекулы в другую посредством серии последовательных элементарных перестроек. На первом шаге эти молекулы можно превратить в простые молекулы (только с атомами A и B). Затем следует рассмотреть элементарные перестройки, меняющие местами два соседних седла на молекуле. Эти перестройки можно описать так. Всего их четыре и все они изображены на рис. 2.75 (a, b, c, d) и на рис. 2.76. Каждая перестройка описывается одним из атомов C_1 , C_2 , D_1 , D_2 .

На рисунке 2.75 показана соответствующая перестройка уровней функции Морса. Таким образом, элементарные перестройки позволяют упрощать молекулы функций Морса.

Теорема 2.18 (Е. А. Кудрявцева). Пусть f — любая простая функция Морса на двумерной замкнутой поверхности, и $W(f)$ — ее молекула. Тогда посредством описанных выше четырех элементарных перестроек эта молекула всегда может быть приведена к каноническому виду, показанному на рис. 2.77.

Поскольку молекула W определяет функцию Морса с точностью до послыоного диффеоморфизма поверхности на себя, то из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие. Любые две функции Морса f и g (не обязательно простые) с одинаковым числом локальных минимумов и максимумов на замкнутой двумерной поверхности можно гладко продеформировать друг в друга с точностью до диффеоморфизма поверхности на себя. То есть, всегда существует такой диффеоморфизм $\xi: M^2 \rightarrow M^2$ и гладкая деформация $\phi_t: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, где $\phi_0 = f$, такие, что $g = \phi_1 \circ \xi$.

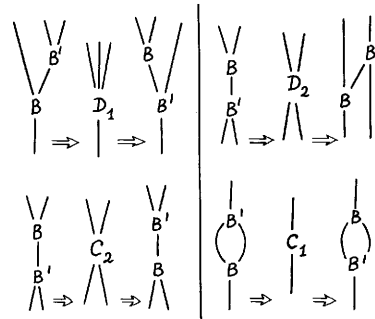


Рис. 2.76

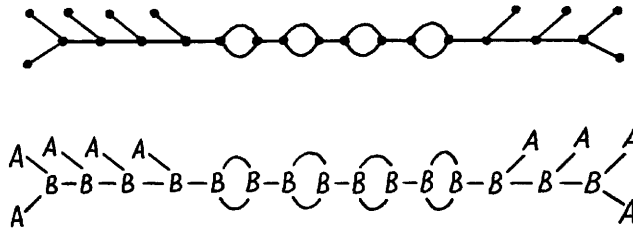


Рис. 2.77

На самом деле верен более сильный факт, а именно, что пространство функций Морса с фиксированным числом минимумов и максимумов на замкнутой двумерной поверхности линейно связно. Нам не удалось найти доказательства этого утверждения в литературе. Доказательство, которое нам известно, было совсем недавно получено С. В. Матвеевым. Отметим, что оно весьма нетривиально и использует довольно глубокую технику маломерной топологии. Как сообщил авторам Х. Цишанг, это утверждение может быть также доказано при помощи алгебраической техники Нильсена.

Рассмотрим произвольную замкнутую двумерную поверхность M . Обозначим через $F(M, p, q)$ совокупность всех функций Морса на этой поверхности, имеющих фиксированное число p точек локальных минимумов и фиксированное число q точек локальных максимумов.

Теорема 2.19 (С. В. Матвеев). Пространство функций Морса $F(M, p, q)$ линейно связно.

Эту теорему полезно переформулировать на языке поверхностей с краем. Пусть P — поверхность с краем, граничные компоненты которой разбиты на два класса ∂_+P и ∂_-P : положительные и отрицательные окружности. Пусть имеется p отрицательных окружностей и q положительных. Обозначим через $F(P)$ пространство всех функций f Морса на поверхности P со следующими свойствами.

- а) Функция f имеет лишь седловые критические точки на поверхности P .
- б) Функция f не имеет критических точек на границе поверхности.
- в) Функция f принимает значение $+1$ на всех q положительных компонентах границы и принимает значение -1 на всех p отрицательных компонентах границы.

Теорема 2.20 (С. В. Матвеев). *Пространство $F(P)$ линейно связно.*

Комментарий. Другими словами, любые две функции Морса f_0 и f_1 , имеющие лишь седловые критические точки на поверхности P , и принимающие одинаковые значения: $+1$ на компонентах границы ∂_+P и -1 на компонентах границы ∂_-P , можно соединить гладким путем $f_t, 0 \leq t \leq 1$, в пространстве функций Морса того же типа, т. е. внутри пространства $F(P)$. В частности, никаких рождений и уничтожений критических точек в процессе такой гомотопии не происходит.

Комментарий. Таким образом, любые две функции Морса из пространства $F(M, p, q)$, у которых все точки локальных минимумов и локальных максимумов совпадают, можно не только связать регулярной гомотопией, но можно выбрать гомотопию таким образом, что точки минимумов и максимумов будут в процессе гомотопии «стоять на месте», т. е. будут занимать неизменное положение на поверхности.

Развивая идеи С. В. Матвеева, Е. А. Кудрявцева доказала следующие усиления этого результата. Иногда при деформации функции Морса полезно следить за поведением каждой ее критической точки. Другими словами, иногда полезно учитывать порядок критических точек функции. Также полезно в некоторых ситуациях следить за следующим обстоятельством. В каждой седловой критической точке функции Морса определены две входящие сепаратрисы, образующие в совокупности некоторую дугу, которую естественно назвать сепаратрисной дугой. В процессе деформации функции эта дуга тоже как-то деформируется и перестраивается, взаимодействуя с другими аналогичными дугами. Зададим на каждой такой дуге ориентацию. Полезно выяснить — можно ли продеформировать одну функцию Морса в другую, чтобы совместить не только сами функции, но и ориентации всех их сепаратрисных дуг? Чтобы ответить на оба эти вопроса, введем следующие пространства функций Морса «с оснащением».

Рассмотрим пространство $\tilde{F}(M, p, q)$ функций Морса f со следующими свойствами на замкнутой двумерной поверхности M .

- 1) Функция f имеет p точек локальных минимумов и q точек локальных максимумов.

- 2) Все точки минимумов и максимумов функции f предполагаются фиксированными на поверхности M . Причем, все эти точки — одни и те же для разных функций f из пространства $\tilde{F}(M, p, q)$.
- 3) На множестве всех седловых критических точек функции f задано и фиксировано отношение порядка, или нумерация.

Такую функцию Морса f можно назвать функцией с нумерованными седлами.

Ясно, что пространство $\tilde{F}(M, p, q)$ является накрывающим пространством для пространства $F(M, p, q)$. На пространстве $\tilde{F}(M, p, q)$ очевидно действует группа перестановок S_r . Здесь r — число седловых критических точек функции f . Факторизуя пространство $\tilde{F}(M, p, q)$ по действию этой группы, мы и получаем пространство $F(M, p, q)$. Слой получившегося накрытия изоморфен группе S_r .

Любая изотопия f_t , $0 \leq t \leq 1$, функций Морса, лежащих в пространстве $F(M, p, q)$, однозначно определяет изотопию в накрывающем пространстве $\tilde{F}(M, p, q)$ функций с нумерованными седлами, такую, что при непрерывном изменении положения критических точек на поверхности сохраняется их нумерация.

Рассмотрим еще одно пространство $F_+(M, p, q)$ функций Морса f со свойствами 1), 2) и 4) на замкнутой двумерной поверхности M , где свойство 4) определяется так. Фиксируем на поверхности M произвольную риманову метрику, и в каждой седловой критической точке функции $f \in F(M, p, q)$ рассмотрим неориентированную гладкую дугу, образованную двумя сепаратрисами, входящими в эту критическую точку. Мы будем называть эту дугу сепаратрисной дугой.

4) В каждой седловой критической точке функции Морса $f \in F(M, p, q)$ фиксирована ориентация сепаратрисной дуги.

Назовем такую ориентацию оснащением седловой критической точки функции f , а саму такую функцию Морса f назовем оснащенной. Полученное пространство функций Морса с оснащенными седлами (седловыми критическими точками) обозначим через $F_+(M, p, q)$. Ясно, что пространство $F_+(M, p, q)$ является накрывающим пространством для пространства $F(M, p, q)$ со слоем, изоморфным группе $(\mathbb{Z}_2)^r$.

Рассмотрим еще одно пространство $\tilde{F}_+(M, p, q)$ функций Морса с оснащенными и нумерованными седлами. То есть, пространство функций $f \in \tilde{F}_+(M, p, q)$ с нумерованными седлами, в каждой седловой точке которых фиксировано оснащение — ориентация сепаратрисной дуги. Ясно, что пространство $\tilde{F}_+(M, p, q)$ является накрывающим пространством над пространством $F(M, p, q)$ со слоем, изоморфным группе $S_r \times (\mathbb{Z}_2)^r$.

Теорема 2.21 (Е. А. Кудрявцева). Пусть M — любая связная замкнутая двумерная поверхность. Тогда:

- a) пространство $\tilde{F}(M, p, q)$ функций Морса с нумерованными седлами линейно связано;

- б) пространство $F_+(M, p, q)$ функций Морса с оснащенными седлами также линейно связно;
- в) пространство $\tilde{F}_+(M, p, q)$ функций Морса с оснащенными и пронумерованными седлами распадается ровно на две компоненты линейной связности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что все критические точки любых двух функций Морса $f, g \in F(M, p, q)$ можно совместить друг с другом на поверхности (то есть как минимумы и максимумы, так и седла). Согласно теореме С. В. Матвеева, все точки минимумов и максимумов можно считать неподвижными в процессе изотопии, деформирующей функции друг в друга. Интересно выяснить, можно ли добиться этого и для седел? То есть, можно ли считать, что в процессе деформации функции f в функцию g все их седловые критические точки остаются на месте?

2.12. Классификация потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях при помощи атомов и молекул

В этом параграфе мы покажем, как идея атомов и молекул может быть применена к траекторной классификации потоков Морса–Смейла на замкнутых двумерных поверхностях. Излагаемая ниже конструкция появилась как результат обсуждения авторами и В. В. Шарко различных применений атомов и молекул. Затем А. А. Ошемков развил этот подход. Получившиеся результаты см. в приложении 1, в конце нашей книги.

Необходимые определения из общей теории динамических систем см., например, в обзоре Д. В. Аносова, С. Х. Арансона, И. У. Бронштейна, В. З. Гринеса [4].

Напомним, что векторные поля v_1 и v_2 , заданные на замкнутых поверхностях M_1 и M_2 , называются топологически траекторно эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, переводящий траектории векторного поля v_1 в траектории векторного поля v_2 с сохранением ориентации на траекториях.

Определение 2.23. Векторное поле v на многообразии M называется *грубым*, если при малом возмущении поля v топологическое поведение его траекторий не меняется, т. е. после возмущения поле топологически траекторно эквивалентно исходному.

Согласно теореме М. Пейксото [354], [355], [356], грубыми векторными полями на двумерной поверхности являются в точности поля Морса–Смейла. В случае двумерной поверхности их можно определить следующим образом.

Определение 2.24. Векторное поле v на замкнутой двумерной поверхности M^2 называется *полем Морса–Смейла*, если

- 1) v имеет конечное число особых точек и периодических траекторий, причем все они гиперболические;
- 2) не существует траекторий, идущих из седла в седло;

- 3) для каждой траектории поля v ее α -предельное и ω -предельное множества являются либо особой точкой, либо периодической траекторией, т. е. предельным циклом.

Здесь для простоты мы опишем классификацию потоков Морса–Смейла без периодических траекторий. Мы будем называть их потоками Морса. Классификацию же общих потоков Морса–Смейла на M^2 см. в приложении, в конце настоящей книги.

Потоки Морса имеют еще одно естественное описание. Это в точности градиенто-подобные потоки без сепаратрис, идущих из седла в седло. Здесь поток называется градиенто-подобным, если он топологически эквивалентен потоку $\text{grad } f$ для некоторой функции Морса f и некоторой римановой метрики g_{ij} на многообразии M .

Оказывается, каждому потоку Морса на двумерной поверхности M^2 можно естественным образом сопоставить некоторый f -граф, или f -атом, таким образом, что соответствие между f -атомами и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса будет взаимно однозначным. Опишем эту конструкцию.

Все особые точки потока Морса можно разделить на три типа: стоки, источники и седла. Кроме того поток имеет сепаратрисы, соединяющие стоки и источники с седлами. Каждому седлу при этом соответствуют две входящие и две выходящие сепаратрисы.

Рассмотрим на M^2 вокруг каждого источника маленькую окружность, трансверсальную потоку (рис. 2.78(a)). Ориентируем ее произвольным образом и отметим на ней точки пересечения с сепаратрисами. Отмеченные точки можно естественным образом разделить на пары. Действительно, рассмотрим для каждого седла пару входящих в него сепаратрис. Тогда кривая, составленная из этих сепаратрис соединяет между собой некоторую пару отмеченных точек (рис. 2.78(a)).

Рассмотрим теперь граф, вершинами которого являются отмеченные точки, а ребрами — дуги окружностей, идущих вокруг каждого источника и кривые, составленные из двух сепаратрис и соединяющие парные вершины. В результате каждой вершине инцидентны три ребра, причем два из них имеют ориентацию (это дуги окружности), а третье (т. е. кривая, составленная из сепаратрис) — неориентировано (рис. 2.78(b)). Для получения f -графа нам остается сопоставить каждому неориентированному ребру метку $+1$ или -1 . Это делается точно так же как и выше. Правило показано на рис. 2.79. Поскольку конструируемый граф

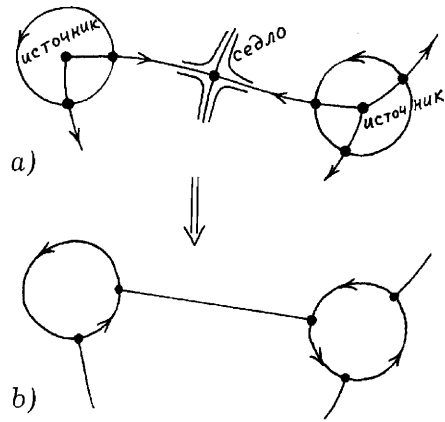


Рис. 2.78

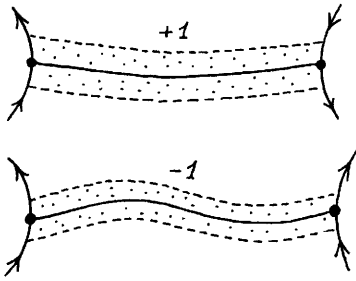


Рис. 2.79

вложен в поверхность M^2 , то можно рассмотреть узкий прямоугольник-ленточку вокруг неориентированного отрезка. На торцах прямоугольника появятся две стрелки — ориентации с окружностей, окружающих источники. Возможны два случая: эти две стрелки на торцах прямоугольника-ленточки определяют одинаковую ориентацию на границе прямоугольника, либо имеют противоположные ориентации. В зависимости от этого ставим на неориентированном ребре числовую метку: либо $+1$, либо -1 . См. рис. 2.79. После этого мы получаем f -граф, определенный нами выше при описании атомов. Другими словами, каждому потоку Морса на поверхности естественно сопоставляется некоторый атом, реализованный в виде f -графа. Это важное обстоятельство и лежит в основе классификации потоков Морса при помощи атомов.

Как мы знаем, для f -графов вводится естественное отношение эквивалентности. См. выше параграф 7. Аналогичное отношение эквивалентности возникает и при появлении атомов в теории потоков Морса. Здесь это связано с неоднозначностью выбора ориентации на окружностях вокруг источников. Легко видеть, что оба отношения эквивалентности в действительности совпадают.

Отметим, впрочем, что если поверхность M ориентирована, то все окружности могут быть снабжены канонической ориентацией, в результате чего все метки станут равны $+1$, и о них можно будет забыть.

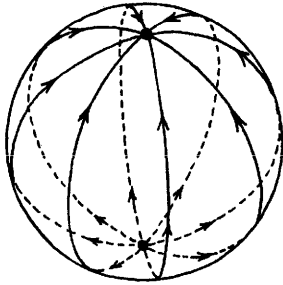


Рис. 2.80

В изложенной выше конструкции предполагается существование по крайней мере одного седла у потока Морса. Но есть простейший поток Морса, у которого ни одного седла нет. Это градиентный поток функции высоты на двумерной сфере (рис. 2.80). Он течет из южного полюса в северный вдоль меридианов. У такого потока нет естественно определенного графа. Но он здесь и не нужен, поскольку такой поток только один, с точностью до траекторной топологической эквивалентности. В дальнейшем будем считать, что рассматриваемые нами потоки Морса отличны от указанного простейшего, то есть имеют хотя бы одно седло.

Легко видеть из нашего построения, что f -граф потока Морса, рассматриваемый с точностью до эквивалентности, является траекторным топологическим инвариантом потока. Более того, можно показать, что этот инвариант является классифицирующим, т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.22 (классификация потоков Морса на поверхностях).

- а) Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между f -атомами и потоками Морса на поверхностях, рассматриваемыми с точностью до топологической траекторной эквивалентности.

- б) Два потока Морса v_1 и v_2 , не являющиеся простейшими, на двумерных поверхностях M_1 и M_2 , топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие им f -графы.

В такой формулировке теорема классификации была получена В. В. Шарко и А. А. Ошемковым. Отсюда сразу следует, что траекторная топологическая классификация потоков Морса совпадает с классификацией f -атомов, то есть фактически атомов. Классификация атомов была уже получена ранее в работе А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко [30] и подробно описана выше, в настоящей главе.

В то же время нужно отметить, что описанная связь между потоками Морса и f -атомами фактически содержится в работе К. Р. Мейера 1968 года [333]. Хотя у него не было классификации атомов (f -атомов). Опишем эту связь явно. Пусть дан поток Морса v . Поскольку он градиентно-подобен по определению, то он непрерывно траекторно эквивалентен градиентному потоку некоторой функции f . Можно было сразу взять эту функцию в качестве инварианта потока. Однако этого делать нельзя, так как функция f определена на самом деле неоднозначно. В частности, она зависит от выбора римановой метрики. Чтобы устранить произвол, можно, оказывается, поступить так. Достаточно выбрать такую функцию f , у которой все седловые критические точки расположены на одном уровне. Тот факт, что такая функция всегда существует, можно усмотреть из сформулированной выше теоремы о соответствии между потоками Морса и f -графами. Берем поток Морса v , затем берем отвечающий ему f -граф, который, по своему определению, уже вложен в исходную поверхность M . Затем строим функцию, отвечающую этому f -графу. Все ее седловые критические точки очевидно лежат на одном уровне.

Теорема 2.23 (Мейер К. Р. [333]).

Пусть M — замкнутая двумерная поверхность с некоторой римановой метрикой.

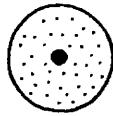

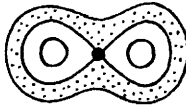
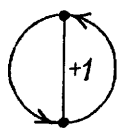
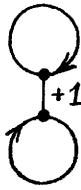
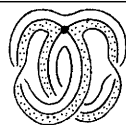
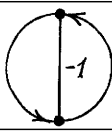

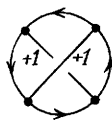
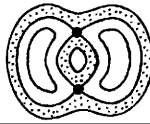
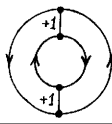
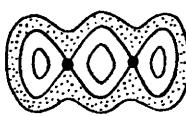

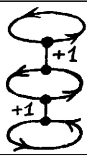
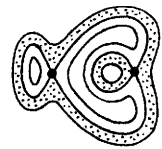
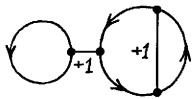
- а) *Сопоставим каждой функции f , седловые точки которой лежат на одном уровне, ее градиентный поток относительно выбранной римановой метрики. Это сопоставление устанавливает естественное взаимно-однозначное соответствие между классами послойной эквивалентности таких функций на поверхности и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса.*
- б) *Это взаимно-однозначное соответствие не зависит от выбора римановой метрики на поверхности.*


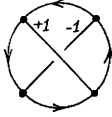


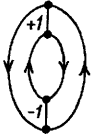


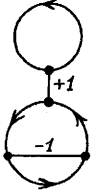





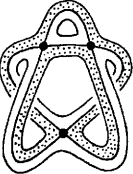

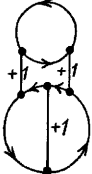
Классы послойной эквивалентности функций с указанным свойством взаимно-однозначно отвечают f -атомам.


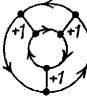
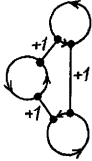
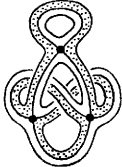

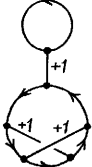
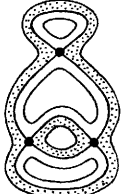
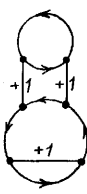

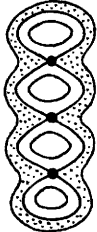
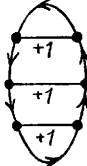
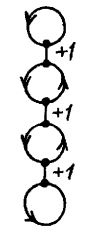
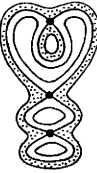
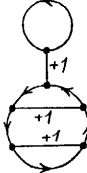
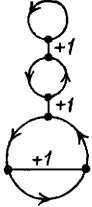
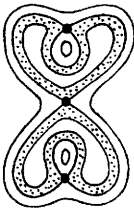
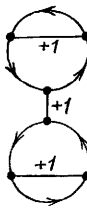
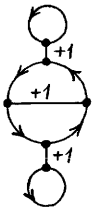
Все сказанное относилось пока лишь к потокам Морса. Однако переход от них к общим потокам Морса–Смейла полностью аналогичен переходу от атомов к молекулам. Оказывается, потоки Морса–Смейла классифицируются молекулами, составленными из атомов. Подробнее об этом см. в приложении в конце книги. Там же перечислены все потоки Морса и потоки Морса–Смейла малой сложности, т. е. с малым числом критических точек и периодических траекторий.

Таблицы к главе 2



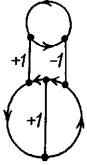


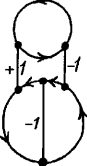
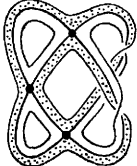
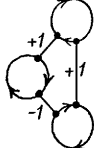


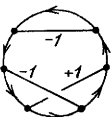

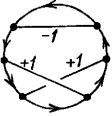
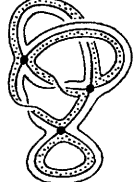
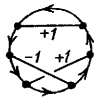
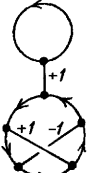
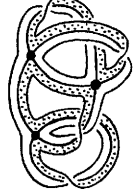

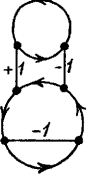
Таблица 2.1. Таблица атомов и их f -графов сложности 1, 2, 3.

№	Атом	f -графы	Код	Род
Сложность 1				
Ориентируемые				
1			$A-$	S^2
2		 	$\succ B-$	S^2
Неориентируемый				
$\tilde{1}$			$-\tilde{B}-$	$\mathbb{R}P^2$
Сложность 2				
Ориентируемые				
1			$-C_1-$	T^2
2			$\succ C_2 \prec$	S^2
3		 	$-D_1 \leq$	S^2
4			$\succ D_2 \prec$	S^2

№	Атом	f -графы	Код	Род	
Неориентируемые					
$\tilde{1}$			$-\tilde{C}_2-$	$K1$	
$\tilde{2}$				$-\tilde{C}_1<$	$\mathbb{R}P^2$
$\tilde{3}$				$-\tilde{D}_1<$	$\mathbb{R}P^2$
$\tilde{4}$			$-\tilde{D}_2-$	$K1$	
Сложность 3					
Ориентируемые					
1				$-E_1<$	T^2
2				$-E_2<$	T^2

№	Атом	f -графы		Код	Род
3				$\succ E_3 \preceq$	S^2
4				$\prec F_1 \prec$	T^2
5				$\succ F_2 \preceq$	S^2
6				$\prec G_1 \preceq$	S^2
7				$\succ G_2 \preceq$	S^2
8				$\succ G_3 \preceq$	S^2

№	Атом	f -графы		Код	Род
9				$-H_1 \equiv$	S^2
10				$\succ H_2 \preceq$	S^2
Сложность 3 Неориентируемые					
$\tilde{1}$				$-\tilde{E}_1 -$	$S^2 + 3\mu$
$\tilde{2}$				$-\tilde{E}_2 -$	$S^2 + 3\mu$
$\tilde{3}$				$-\tilde{E}_3 \prec$	Kl
$\tilde{4}$				$-\tilde{E}_4 \prec$	Kl

№	Атом	f -графы		Код	Род
5				$-\tilde{E}_5 \prec$	$K1$
6				$\succ \tilde{E}_6 \prec$	$\mathbb{R}P^2$
7				$-\tilde{E}_7 \preceq$	$\mathbb{R}P^2$
8				$-\tilde{F}_1 -$	$S^3 + 3\mu$
9				$-\tilde{F}_2 -$	$S^2 + 3\mu$
10				$-\tilde{F}_3 \prec$	$K1$
11				$-\tilde{F}_4 \prec$	$K1$

№	Атом	f -графы		Код	Род
$\widetilde{12}$				$-\widetilde{F}_5 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{13}$				$\geq \widetilde{F}_6 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{14}$				$\geq \widetilde{F}_7 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{15}$				$-\widetilde{G}_1 -$	$S^2 + 3\mu$
$\widetilde{16}$				$-\widetilde{G}_2 \leq$	Kl
$\widetilde{17}$				$-\widetilde{G}_3 \leq$	Kl

№	Атом	f -графы	Код	Род
$\widetilde{18}$			$\succ \widetilde{G}_4 \prec$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{19}$			$\succ \widetilde{G}_5 \prec$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{20}$			$\dashv \widetilde{G}_6 \dashv$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{21}$			$\dashv \widetilde{G}_7 \dashv$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{22}$			$\dashv \widetilde{H}_1 \dashv$	$S^2 + 3\mu$



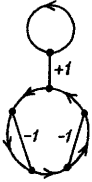
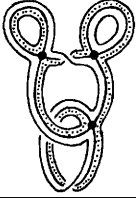
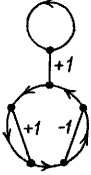
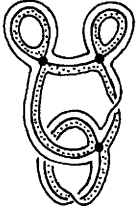

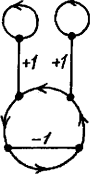
№	Атом	f -графы		Код	Род
$\widetilde{23}$				$-\widetilde{H}_2 \leq$	Kl
$\widetilde{24}$				$\leq \widetilde{H}_3 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{25}$				$-\widetilde{H}_4 \leq$	$\mathbb{R}P^2$

Таблица 2.2. Спайны (скелеты) атомов.

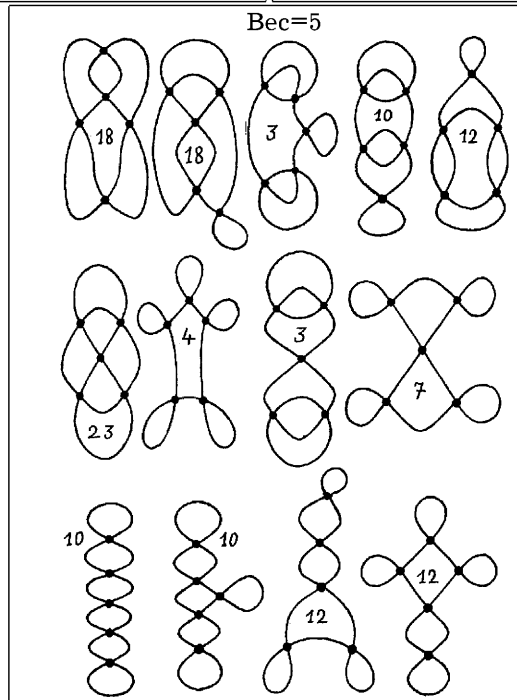
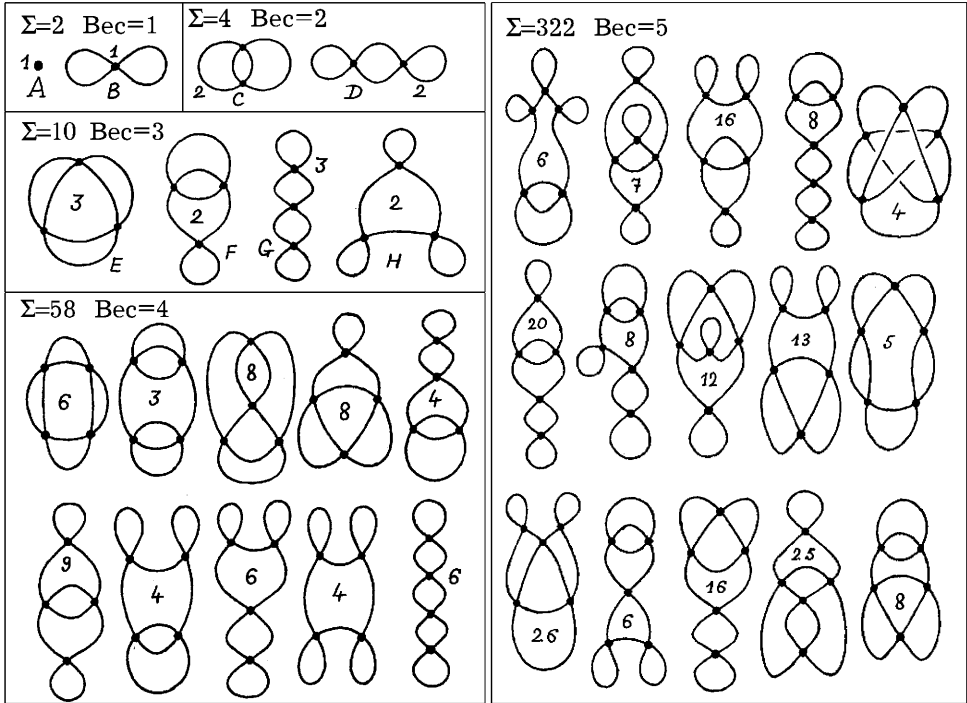

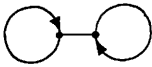





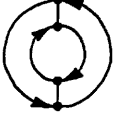

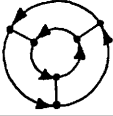

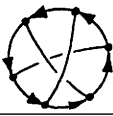

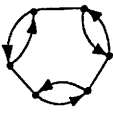




Таблица 2.3

Максимально симметричный атом	Максимально симметричный f -граф = J -граф	Группа симметрий	Выбор пары образующих
		$\mathbb{Z}_2 = \langle x \mid x^2 = e \rangle$	x, e
		$\mathbb{Z}_2 = \langle x \mid x^2 = e \rangle$	x, x
		$\mathbb{Z}_4 = \langle x \mid x^4 = e \rangle$	x^2, x
		$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \langle x \mid x^2 = e \rangle \oplus \langle y \mid y^2 = e \rangle$	x, y
		$\mathbb{Z}_6 = \langle x \mid x^6 = e \rangle$	x^3, x^2
		$\mathbb{Z}_6 = \langle x \mid x^6 = e \rangle$	x^3, x
		$D_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^3 = e \rangle$	x, y
		$D_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^3 = e \rangle$	x, xy

ГЛАВА 3

**Грубая лиувиллева эквивалентность
интегрируемых систем с двумя степенями
свободы**

**3.1. Классификация невырожденных критических
подмногообразий на изоэнергетических
3-поверхностях**

Рассмотрим симплектическое 4-многообразие M^4 с интегрируемой гамильтоновой системой $v = \text{sgrad} H$. Пусть $Q_h^3 = \{H = h\}$ — неособая компактная связная изоэнергетическая поверхность в M^4 , f — дополнительный интеграл системы v , независимый с H . Его ограничение на Q_h^3 мы обозначим той же буквой f и будем предполагать, что f — функция Ботта на Q_h^3 . Наша цель — изучить топологию слоения Лиувилля на Q_h^3 , определяемого данной интегрируемой системой. Напомним, что его неособые слои — это торы Лиувилля, а особые слои соответствуют критическим уровням интеграла f на Q_h^3 .

Отметим прежде всего, что слоение Лиувилля как правило не зависит от конкретного выбора интеграла f .

Предложение 3.1. *Пусть система v нерезонансна на Q_h^3 . Тогда соответствующие слоения Лиувилля на Q_h^3 полностью определяется лишь гамильтонианом H и не зависит от конкретного выбора дополнительного боттовского интеграла f .*

Доказательство.

Из нерезонансности системы следует, что почти все торы Лиувилля являются замыканиями интегральных траекторий системы $v = \text{sgrad} H$. Таким образом, почти все неособые поверхности уровня интеграла f однозначно задаются самим гамильтонианом H . Ясно, что если f и f' — два боттовских интеграла системы v , то из совпадения почти всех их неособых поверхностей уровня автоматически следует, что будут совпадать и все остальные поверхности уровня — как регулярные, так и особые. Но это и означает, что f и f' задают одинаковые слоения Лиувилля. Предложение доказано. ■

Тем не менее, удобно пользоваться каким-либо конкретным интегралом f для выделения в Q_h^3 структуры слоения Лиувилля. Ясно, что основная информация об этом слоении содержится в особенностях функции $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Напомним некоторые их свойства, уже изученные в главе 1.

Предложение 3.2. *Пусть $\text{grad} H \neq 0$ на Q_h^3 . Тогда интеграл f не имеет на Q_h^3 изолированных критических точек.*

Доказательство.

Если x — критическая точка f на Q_h^3 , то $v(x) \neq 0$, так как $\text{grad} H \neq 0$ всюду на Q_h^3 . Но тогда через точку x проходит интегральная траектория по-

ля v , целиком состоящая из критических точек функции f . Это сразу следует из инвариантности функции f относительно гамильтонова потока v . Предложение доказано. ■

Следовательно, критические точки боттовского интеграла f всегда образуют либо одномерные, либо двумерные невырожденные подмногообразия в Q_h^3 .

Предложение 3.3. *Связными критическими подмногообразиями функции f на Q_h^3 могут быть только следующие многообразия:*

- 1) окружности,
- 2) торы,
- 3) бутылки Клейна.

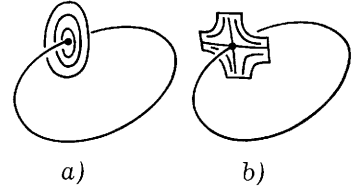


Рис. 3.1

Доказательство.

Из компактности изоэнергетической поверхности Q_h^3 сразу следует, что невырожденное критическое подмногообразие интеграла f обязательно замкнуто. С другой стороны, на этом подмногообразии имеется векторное поле $v = \text{sgrad } H$, нигде не обращающееся в нуль. Среди одномерных и двумерных замкнутых многообразий этим свойством обладают лишь окружность, тор и бутылка Клейна. Предложение доказано. ■

Предложение 3.4.

- а) *Невырожденные критические окружности боттовского интеграла f могут быть как подмногообразиями локального минимума или максимума, так и седловыми.*
- б) *Невырожденные критические торы и бутылки Клейна являются подмногообразиями локального минимума или максимума.*

Доказательство.

Если S — критическое подмногообразие, а D — нормальный диск к S , то ограничение функции f на D является функцией Морса. Если S — окружность, то диск D двумерен, и функция Морса может иметь в центре диска либо локальный минимум, либо локальный максимум, либо седло (рис. 3.1). Если же подмногообразие S двумерно, то нормальный диск D одномерен и, следовательно, f обязательно имеет в его центре либо локальный минимум, либо локальный максимум. Предложение доказано. ■

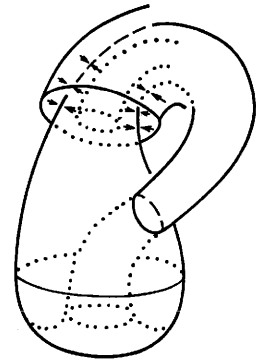


Рис. 3.2

В дальнейшем мы будем в основном рассматривать лишь такие интегрируемые системы, у которых на изоэнергетических 3-поверхностях нет критических торов и бутылок Клейна. Кроме указанных выше соображений в пользу такого подхода отметим еще две причины.

С топологической точки зрения расслоение на торы Лиувилля в окрестности критического тора тривиально. Другими словами, никаких особенностей здесь не возникает. Более того, путем подходящей замены интеграла f в окрестности критического тора (а именно, путем извлечения из него квадратного корня) можно добиться того, чтобы тор перестал быть критическим.

Что же касается критических бутылок Клейна, то от них всегда можно избавиться, переходя к двулистному накрытию над 3-поверхностью Q_h^3 , в результате которого бутылки Клейна развернутся в торы.

Предложение 3.5. Пусть f — боттовский интеграл на $Q = Q_h^3$, имеющий критические бутылки Клейна K_1, \dots, K_r , и $U(Q)$ — достаточно малая открытая окрестность подмногообразия Q в M^4 . Тогда существует двулистное накрытие

$$\pi: (\tilde{U}(\tilde{Q}), \tilde{H}, \tilde{f}) \rightarrow (U(Q), H, f),$$

где $\tilde{U}(\tilde{Q})$ — симплектическое четырехмерное многообразие с интегрируемой гамильтоновой системой $\tilde{v} = \text{sgrad } \tilde{H}$, обладающей дополнительным интегралом \tilde{f} . При этом $\tilde{H} = \pi^*H$, $\tilde{f} = \pi^*f$, $\tilde{v} = \pi^*v$ — естественные поднятия H , f и v с многообразия $U(Q)$ на $\tilde{U}(\tilde{Q})$, и все критические бутылки Клейна K_1, \dots, K_r разворачиваются в двумерные критические торы T_1, \dots, T_r функции \tilde{f} на \tilde{Q} .

Доказательство.

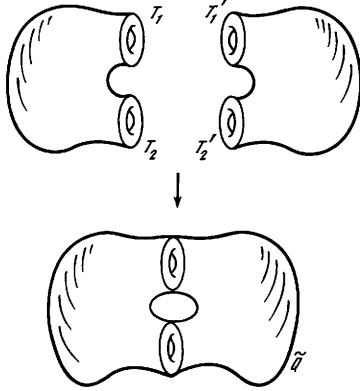


Рис. 3.3

Пусть K_1, \dots, K_r — критические бутылки Клейна. Рассмотрим их достаточно малые инвариантные по отношению к потоку v трубчатые окрестности $V(K_i) \subset Q$. Покажем, что граница каждой такой окрестности является тором. В самом деле, без ограничения общности мы можем считать, что на критической бутылке Клейна K_i функция f имеет локальный максимум. Тогда в качестве трубчатой окрестности мы можем взять область $V(K_i) = f^{-1}(c, c - \varepsilon)$, где $c = f(K_i)$. Ее граница $\partial V(K_i) = f^{-1}(c - \varepsilon)$ является регулярной поверхностью уровня функции f и поэтому состоит из одного или нескольких торов Лиувилля.

С другой стороны, граница каждого нормального к бутылке Клейна K_i отрезка состоит из двух точек (рис. 3.2). Проектируя их вниз на K_i , получаем двулистное накрытие бутылки Клейна границей ее нормальной трубчатой окрестности. Отсюда сразу следует, что $\partial V(K_i)$ состоит только из одного тора. В противном случае мы пришли бы к противоречию с существованием двулистного накрытия $\partial V(K_i) \rightarrow K_i$.

Разрежем теперь многообразие Q по всем бутылкам Клейна K_1, \dots, K_r . Получим 3-многообразие W , край которого состоит из несвязного объединения торов T_1, \dots, T_r . Возьмем второй экземпляр W' этого 3-многообразия и построим новое 3-многообразие $\tilde{Q} = W + W'$, называемое дублем (рис. 3.3) и получающееся естественным отождествлением граничных торов: каждый граничный тор на границе W склеивается со своим дубликатом на границе W' .

Определим проекцию многообразия $W + W'$ на многообразие Q . Для этого воспользуемся тем, что W и W' диффеоморфны многообразию $Q \setminus (K_1 + \dots + K_r)$. Поэтому проекция W и W' на $Q \setminus (K_1 + \dots + K_r)$ определена естественным образом. Теперь отображим $Q \setminus (K_1 + \dots + K_r)$ на Q , проецируя каждый тор T_i на бутылку Клейна K_i при помощи соответствующего двулистного накрытия, т. е. сделав операцию, обратную проделанной ранее операции разрезания вдоль бутылки Клейна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Описанную процедуру разрезания, а затем обратной склейки, полезно проиллюстрировать на двумерном примере листа Мебиуса (рис. 3.4). Разрезав лист Мебиуса вдоль его оси, получаем кольцо. Производя обратную операцию, мы отображаем кольцо на лист Мебиуса. При этом одна из граничных окружностей кольца двулистно накрывает ось листа Мебиуса (рис. 3.4).

Итак, мы определили проекцию $\pi: \tilde{Q} \rightarrow Q$, при которой прообразом каждой бутылки Клейна K_i является некоторый тор T_i . Проекцию можно считать гладким отображением гладких 3-многообразий. Поскольку окрестность $U(Q)$ в M^4 является прямым произведением $Q \times I$, то проекция π естественно продолжается на трубчатую окрестность $U(\tilde{Q}) = \tilde{Q} \times I$, где I — отрезок. Поднимем теперь с 4-многообразия $U(Q)$ на $U(\tilde{Q})$ все нужные нам объекты: форму ω , векторное поле v , гамильтониан H , интеграл f . В результате мы построили накрытие $\pi: \tilde{U}(\tilde{Q}) \rightarrow U(Q)$, которое разворачивает критические бутылки Клейна K_i в критические торы T_i , что и требовалось. Предложение доказано. ■

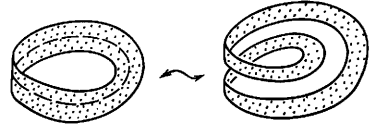


Рис. 3.4

Опишем теперь топологическое строение окрестности критической окружности интеграла f на Q^3 .

Пусть S — критическая окружность боттовского интеграла и D — трансверсальный двумерный диск. Тогда согласно лемме Морса функция f на диске D приводится заменой координат к виду (без ограничения общности мы полагаем $f(S) = 0$)

$$f = \pm x^2 \pm y^2.$$

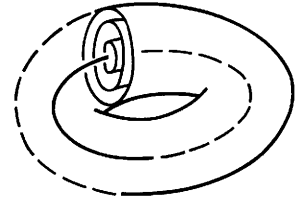


Рис. 3.5

Случай $f = x^2 + y^2$ отвечает минимуму функции f , случай $f = -x^2 - y^2$ — максимуму (рис. 3.1-a), а случай $f = x^2 - y^2$ отвечает седлу (рис. 3.1-b). На диске D возникает слоение на линии уровня f с одной особой точкой в центре диска. Под действием потока v диск движется вдоль окружности, оставаясь трансверсальным к ней. При этом слоение на линии уровня функции f сохраняется, поскольку f — интеграл. Сделав полный оборот вдоль окружности, диск D «возвращается на прежнее место», порождая некоторый локальный диффеоморфизм $\sigma: D \rightarrow D$, сохраняющий слоение. Это отображение называют обычно отображением последования, или отображением Пуанкаре. Таким образом, возникает слоение трубчатой окрестности критической окружности на двумерные слои с особенностью на этой окружности.

Его структура полностью определяется свойствами диффеоморфизма σ . Легко видеть, что возможны лишь следующие случаи (с точностью до гладкой изотопии, сохраняющей слоение в трубчатой окрестности S).

а) Если критическая окружность S является подмногообразием локального минимума или максимума, то слоение тривиально, т.е. является прямым произведением диска, расслоенного на концентрические окружности, на критическую окружность S (рис. 3.5).

б) Если критическая окружность S — седловая, то возможны два случая:

б-1) Диффеоморфизм $\sigma: D \rightarrow D$ изотопен тождественному (в классе отображений, сохраняющих функцию $f = x^2 - y^2$). В этом случае возникающее слоение окрестности S тривиально (рис. 3.6). Его можно представлять себе как прямое произведение креста, показанного на рис. 3.6, на окружность S . В этом случае мы скажем, что окружность S имеет *ориентируемую сепаратрисную диаграмму*.

б-2) Диффеоморфизм $\sigma: D \rightarrow D$ изотопен центральной симметрии, т.е. повороту на π (рис. 3.6) (в классе отображений, сохраняющих функцию $f = x^2 - y^2$). Здесь возникающее слоение окрестности окружности S уже нетривиально. Оно является косым произведением двумерного креста на окружность S . В этом случае скажем, что критическая окружность S имеет *неориентируемую сепаратрисную диаграмму*.

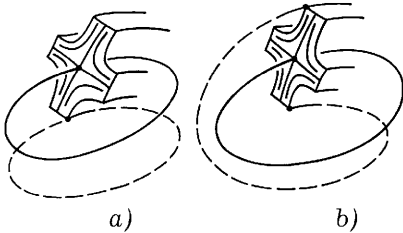


Рис. 3.6

представляет собой объединение двух колец, трансверсально пересекающихся вдоль общей оси, а неориентируемая — аналогичное объединение двух листов Мебиуса. См. рис. 3.7.

На самом деле можно доказать следующий аналог леммы Морса.

Лемма 3.1. *В достаточно малой трубчатой окрестности критической окружности S всегда можно выбрать такие координаты x, y, φ (где x, y — координаты на диске D , а φ — координата вдоль окружности S), в которых интеграл f запишется сразу во всей окрестности в следующем виде:*

а) $f = x^2 + y^2$ (или $f = -x^2 - y^2$), если на S функция имеет локальный минимум (соотв. локальный максимум);

б-1) $f = x^2 - y^2$ в случае седловой окружности с ориентируемой сепаратрисной диаграммой;

б-2) $f = x^2 \cos \varphi - 2xy \sin \varphi - y^2 \cos \varphi$ в случае седловой окружности с неориентируемой сепаратрисной диаграммой.

Доказательство леммы легко следует из обобщенной леммы Морса–Ботта (см. предложение 1.16 главы 1), и мы его опускаем. ■

Следствием леммы 3.1 является следующее утверждение, классифицирующее ливиллевы слоения вблизи невырожденных критических окружностей (или, что то же самое, описывающее локальную структуру особенностей таких слоений в случае невырожденных критических окружностей).

Предложение 3.6. *С точностью до послойного диффеоморфизма существуют лишь указанные выше три типа ливиллевых слоений в окрестности критической окружности. Все они попарно различны.*

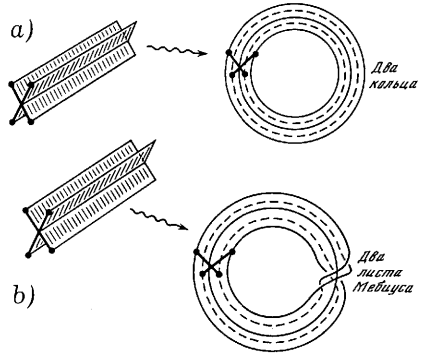


Рис. 3.7

3.2. Топологическое строение окрестности особого слоя слоения Лиувилля

Чтобы сформулировать главный результат этого раздела, введем важное само по себе понятие многообразия Зейферта.

Многообразие Зейферта — это трехмерное многообразие, представленное в виде объединения попарно непересекающихся простых замкнутых кривых, которые называются слоями. При этом слои должны «хорошо примыкать друг к другу». Чтобы это пояснить, введем понятие расслоенного полнотория.

Полноторие $D^2 \times S^1$, разбитое на слои вида $\{*\} \times S^1$, называется тривиально расслоенным полноторием. Чтобы определить нетривиально расслоенное полноторие, выберем пару взаимно простых чисел α, ν , где $\alpha > 1$. Возьмем цилиндр $D^2 \times I$ и склеим его основания по диффеоморфизму, являющемуся поворотом на угол $\frac{2\pi\nu}{\alpha}$. В результате получится полноторие.

Разбиение цилиндра на отрезки вида $\{*\} \times I$ определяет разбиение этого полнотория на окружности, называемые слоями. Один из слоев, который получается склеиванием концов отрезка $\{0\} \times I$, один раз обходит тор. Он называется особым. Каждый другой слой обходит тор ровно α раз. Число α называется кратностью

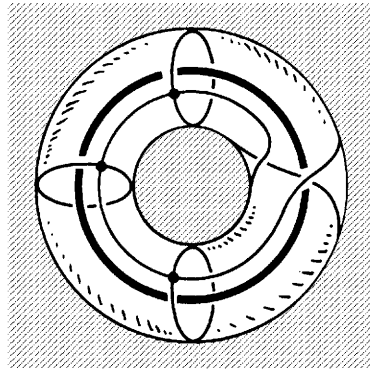


Рис. 3.8

особого слоя. Пара чисел (α, ν) называется параметрами расслоенного полнотория, а также параметрами его особого слоя.

На рис. 3.8 изображено расслоенное полноторие типа $(3, 2)$, а на рис. 3.9 условно изображены слои расслоенного полнотория общего типа.

Определение 3.1. Компактное ориентируемое трехмерное многообразие (с краем или без края), разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои), называется *многообразием Зейферта*, если каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию. Многообразие Зейферта с заданной на нем структурой слоев называется *расслоением Зейферта*.

Легко видеть, что расслоенные полнотория с параметрами (α, ν) и $(\alpha, \nu + k\alpha)$ послойно гомеоморфны. Поэтому можно всегда считать, что $0 < \nu < \alpha$. Более того, можно показать (см., например, [127]), что пара чисел (α, ν) , где $0 < \nu < \alpha$, является инвариантом расслоенного полнотория.

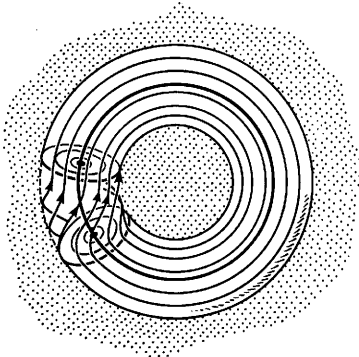


Рис. 3.9

Пусть Q — многообразие Зейферта (с краем или без). Введем на нем отношение эквивалентности, полагая, что две точки эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном слое.

Определение 3.2. Фактор-пространство многообразия Q по этому отношению эквивалентности обозначим через P и назовем *базой расслоения Зейферта*.

Другими словами, пространство P получается из многообразия Q стягиванием каждого слоя в свою точку. Образы особых слоев будем называть особыми точками базы (расслоения Зейферта).

Предложение 3.7. База P любого расслоения Зейферта — это компактная двумерная поверхность (с краем или без).

Доказательство см., например, в книге С. В. Матвеева и А. Т. Фоменко [127]. ■

В дальнейшем мы будем рассматривать только связные многообразия Зейферта с краем. Базами соответствующих расслоений Зейферта будут двумерные связные поверхности с краем. Отметим на базе точки, являющиеся проекциями особых слоев расслоения Зейферта. Припишем каждой такой точке тот же тип, что и у отвечающего ей особого слоя.

Теорема 3.1. Два расслоения Зейферта Q и Q' с краем послойно гомеоморфны с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда

- 1) их базы гомеоморфны,
- 2) число и типы особых точек на базах совпадают.

Доказательство см. в книге [127]. ■

Вернемся к интегрируемым системам на изоэнергетических 3-многообразиях Q .

Теорема 3.2.

- а) В некоторой четырехмерной окрестности $V(L) \subset M^4$ особого слоя L существует гладкая функция F такая, что все интегральные траектории гамильтонова поля $\text{sgrad } F$ замкнуты, причем для любой такой траектории $\gamma(t)$ выполнено соотношение $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.
- б) Функция F коммутирует с гамильтонианом H и интегралом f . Их косые градиенты связаны соотношением:

$$\text{sgrad } F = \lambda \text{sgrad } H + \mu \text{sgrad } f$$

для некоторых гладких функций λ и μ , постоянных на слоях слоения Лиувилля. В частности, F является первым интегралом гамильтонова векторного поля $v = \text{sgrad } H$, и каждая траектория $\gamma(t)$ лежит на некотором слое слоения Лиувилля.

Будем называть такой интеграл F периодическим.

Доказательство.

1) Начнем со случая, когда интеграл f имеет на критической окружности S локальный минимум или локальный максимум. Здесь S совпадает с особым слоем L . В лемме 3.1 и на рис. 3.5 уже описано топологическое строение трехмерной окрестности $U(L)$. Это — полноторие, расслоенное на концентрические торы, т. е. прямое произведение расслоенного диска D^2 на окружность S^1 . Ясно, что четырехмерная окрестность $V(L)$ в свою очередь может быть рассмотрена как прямое произведение $U(L)$ на отрезок I . Таким образом, на $V(L) = D^2 \times S^1 \times I$ определено естественное слоение на окружности вида $\{a\} \times S^1 \times \{b\}$, где $a \in D^2$, $b \in I$. Причем каждая такая окружность лежит на некотором торе Лиувилля. Искомую функцию F зададим теперь формулой

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(x)} \alpha,$$

где α — дифференциальная 1-форма такая, что $d\alpha = \omega$, а $\gamma(x)$ — окружность из описанного выше слоения, проходящая через точку $x \in V(L)$. Как мы видим, определение функции F аналогично построению функции действия (см. выше теорему Лиувилля). Отметим, что при изотопии окружности γ функция F не меняется. Ранее уже было доказано, что интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad } F$ лежат на торах Лиувилля, замкнуты с периодом 2π и гомологичны γ . Поскольку F играет здесь роль переменной действия, то, согласно теореме Лиувилля, она является функцией от H и f . Следовательно, $\text{sgrad } F$ является некоторой линейной комбинацией векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f$, что и доказывает пункт (б) теоремы в случае локального минимума или максимума. Отметим, что структура прямого произведения $D^2 \times S^1$ на окрестности $U(L)$ задается неоднозначно, что приводит к неоднозначности функции F .

2) Рассмотрим теперь седловой случай. Схема доказательства здесь такая же, но следует уточнить, по каким циклам γ будет вестись интегрирование. Как и в предыдущем случае, возьмем все критические седловые окружности

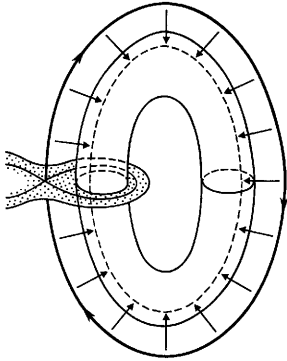


Рис. 3.10

S_1, \dots, S_k слоя L , и их трехмерные окрестности $U(S_1), \dots, U(S_k)$ в Q . Строение этих окрестностей мы уже знаем из леммы 3.1. А именно, если седловая окружность S_i имеет ориентируемую сепаратрисную диаграмму, то ее окрестность является прямым произведением двумерного креста на окружность. Эта окрестность расслоена на окружности, каждая из которых лежит на своем торе Лиувилля. В неориентируемом случае такое слоение на окружности γ тоже можно определить. Но в этом случае каждая окружность γ , отличная от S_i , будет обходить вокруг оси S_i дважды. Это означает, что окрестность $U(S_i)$ имеет структуру расслоенного полнотория с параметрами $(2, 1)$. В обоих случаях эти расслоения на окружности естественно продолжаются на четырехмерную окрестность $V(S_i)$. Рассмотрим теперь произвольный тор Лиувилля, близкий к особому слою L . Он обязательно пересекает одну или несколько четырехмерных окрестностей $V(S_i)$ (рис. 3.10). Каждая из них позволяет нарисовать на торе некоторую окружность (поскольку каждая $V(S_i)$ уже расслоена на окружности). Получившиеся окружности на торе являются гомологичными нетривиальными циклами (рис. 3.10). Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.2. Пусть T_s — гладкое семейство торов Лиувилля, на каждом из которых выбран цикл (окружность) γ_s , гладко зависящий от S , причем при стремлении S к нулю эти циклы стремятся к замкнутой траектории γ_0 векторного поля $\text{sgrad } H$ (в C^1 -метрике). Тогда каждый цикл γ_s нетривиален (т. е. не гомологичен нулю) на торе T_s .

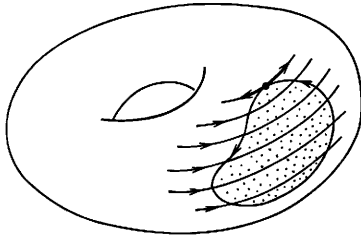


Рис. 3.11

Доказательство.

Из соображений непрерывности ясно, что все циклы γ_s одновременно либо тривиальны на торах T_s , либо нетривиальны. Допустим от противного, что все они тривиальны. Тогда гладкая кривая γ_s ограничивает на торе двумерный диск (рис. 3.11). На ней обязательно найдется точка x_s , в которой векторы $\text{sgrad } H$ и $\frac{d\gamma_s}{dt}$ направлены в противоположные стороны. Дело в том, что в силу теоремы Лиувилля, при подходящем выборе координат на торе, поле $\text{sgrad } H$ выпрямляется (см. рис. 3.11). Устремим теперь S к нулю. Тогда вектор $\frac{d\gamma_s}{dt}$ стремится к вектору $v = \text{sgrad } H$ в каждой точке. Ясно, что это эти два факта противоречат друг другу. Лемма доказана. ■

Возвращаемся к доказательству теоремы 3.2. Мы получили на каждом торе Лиувилля, близком к L , нетривиальную окружность γ (близкую к замкнутой интегральной траектории S_i поля $v = \text{sgrad } H$). Если тор Лиувилля проходит мимо нескольких замкнутых траекторий S_i , то мы получим на нем несколь-

ко таких нетривиальных окружностей. Их гомологичность следует из того, что они не пересекаются. Обратим внимание на то, что это рассуждение показывает гомологичность окружностей лишь с точностью до их ориентации. Можно ли ориентировать их таким образом, чтобы на каждом торе Лиувилля они стали гомологичными уже как *ориентированные* циклы? (Мы, разумеется, хотим, чтобы вблизи каждой из критических окружностей S_i циклы γ имели одинаковую ориентацию.) В принципе, это не очевидно. Конечно, на каждом отдельном торе Лиувилля все расположенные на нем циклы γ можно согласованно ориентировать. Но к особому слою L могут примыкать не один, а много разных торов Лиувилля. Следовательно, надо согласовывать ориентации циклов γ на разных торах. Возможно ли это? Ответ положительный.

Обсуждаемый вопрос можно переформулировать следующим образом. Рассмотрим произвольный тор Лиувилля T , попавший в окрестность $V(L)$. На нем имеется один или несколько циклов γ , которые гомологичны между собой с точностью до ориентации. Рассмотрим «двузначную» функцию, определенную по уже знакомой нам формуле

$$F(T) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \alpha.$$

Здесь, как и выше, α — дифференциальная 1-форма действия, т. е. $d\alpha = \omega$ (можно показать, что такая форма в окрестности $V(L)$ всегда существует). Эта функция, очевидно, гладко продолжается на всю окрестность $V(L)$. Нам на самом деле нужно показать, что эта «двузначная» функция распадается на две однозначные функции, каждая из которых может быть рассмотрена в качестве искомого периодического интеграла.

Для этого достаточно заметить, что F имеет смысл переменной действия (см. выше теорему Лиувилля), поскольку циклы γ нетривиальны на торах Лиувилля. Отсюда сразу следует, что интегральные траектории («двузначного») векторного поля $\text{sgrad } F$ замкнуты с периодом 2π . Кроме того, имеет место соотношение

$$\text{sgrad } F = \pm \alpha \text{sgrad } H \pm \beta \text{sgrad } f,$$

где α и β постоянны на каждом слое Лиувиллева слоения. Рассмотрим это соотношение на особом слое L . Заметим, что α и β не могут быть равны нулю одновременно, иначе мы получили бы противоречие с 2π -периодичностью траекторий. Выберем теперь знаки α и β каким-то определенным образом и фиксируем наш выбор. В результате мы получим на особом слое L *однозначное* векторное поле, всюду отличное от нуля. Мы можем теперь однозначно продолжить его на окрестность $V(L)$, выбирая знак из соображений непрерывности.

В итоге мы получим в $V(L)$ гладкое однозначное векторное поле, все траектории которого замкнуты с периодом 2π и лежат на слоях лиувиллева слоения. Остается в качестве периодического интеграла взять его гамильтониан. ■

Следствие. На $V(L)$ естественно определено пуассоново действие окружности — сдвиг вдоль интегральных траекторий поля $\text{sgrad } F$ на угол φ . Траектории поля $\text{sgrad } F$ — это в точности орбиты действия этой группы.

Доказанный результат можно проинтерпретировать следующим образом. Согласно теореме Лиувилля в окрестности каждого неособого слоя лиувиллева слоения можно определить переменные действия s_1, s_2 . Как они себя ведут в окрестности особого слоя? Теорема 3.2 утверждает, что одна из переменных действия (если соответствующий ей цикл выбран правильным способом!) выживает, то есть является гладкой функцией в окрестности особого слоя с отличным от нуля дифференциалом. Отметим, что аналогичный результат справедлив для невырожденных систем и в многомерном случае, см. [341], [342], [344].

Из теоремы 3.2 легко вытекает следующее утверждение, дающее описание слоения Лиувилля в трехмерной инвариантной окрестности $U(L) \subset Q^3$ особого слоя L .

Теорема 3.3.

- а) Трехмерное многообразие $U(L)$ является многообразием Зейферта, особые слои которого (если они существуют) имеют один и тот же тип $(2, 1)$.
- б) Эти особые слои являются в точности критическими окружностями интеграла f с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами.
- в) Если особых слоев у этого расслоения Зейферта нет, то многообразие $U(L)$ является прямым произведением $P(L) \times S^1$, где $P(L)$ — двумерная ориентируемая поверхность с краем.
- г) В общем случае структура расслоения Зейферта на $U(L)$ и структура слоения Лиувилля на $U(L)$ согласованы в том смысле, что каждый слой расслоения Зейферта (окружность) лежит на каком-то слое слоения Лиувилля. В частности, интеграл f постоянен на слоях расслоения Зейферта.

Доказательство.

Это утверждение фактически является топологической переформулировкой теоремы 3.2 и ее следствия. В качестве ориентированных слоев расслоения Зейферта на $U(L)$ мы просто берем ориентированные орбиты S^1 -действия, порожденного периодическим интегралом f . В небольшом комментарии нуждается лишь пункт (в). В силу ориентируемости слоев расслоения Зейферта и самой окрестности $U(L)$, база $P = P(L)$ является ориентируемой двумерной поверхностью с краем. Если особых слоев в расслоении Зейферта нет, то слоение локально тривиально. Более того, поскольку база $P(L)$ имеет край, то никаких дополнительных инвариантов слоения (типа числа Эйлера) не существует и, следовательно, слоение Зейферта на $U(L)$ имеет тип прямого произведения. ■

В случае особого слоя L , содержащего критические окружности с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами, можно дать еще одно наглядное описание топологии окрестности $U(L)$. Можно проверить, что в этом случае всегда существует «сечение» слоения Зейферта $\tilde{P} \subset U(L)$, обладающее следующими свойствами:

- 1) \tilde{P} трансверсально слоям расслоения Зейферта;

- 2) каждый неособый слой пересекает поверхность \tilde{P} дважды, а особые слои (критические окружности с неориентируемой сепаратрисной диаграммой) только один раз.

Поясним, как такая поверхность может быть построена. Поскольку слой L является деформационным ретрактом своей окрестности $U(L)$, то достаточно построить трансверсальное сечение лишь на особом слое (а затем гладко продолжить его на некоторую окрестность). Построим сначала это сечение в малых окрестностях критических окружностей: в случае неориентируемой сепаратрисной диаграммы возьмем произвольную трансверсаль к критической окружности, а в ориентируемом случае две непересекающиеся трансверсали (получающиеся друг из друга сдвигом на π). Легко видеть, что особый слой L является объединением двумерных орбит, каждая из которых диффеоморфна кольцу $S^1 \times D^1$, и критических окружностей. На каждой критической окружности (и даже в некоторой ее окрестности) сечение \tilde{P} уже имеется, и мы должны продолжить его на каждое из колец (рис. 3.12). Это, очевидно, можно сделать, соединяя между собой начальные пары точек, находящиеся на противоположных граничных окружностях кольца.

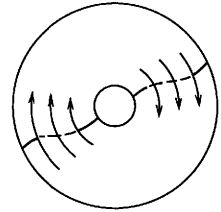


Рис. 3.12

В результате мы получим сечение расслоения Зейферта на особом слое L , обладающее требуемыми свойствами. Продолжая его на трехмерную окрестность $U(L)$, получаем искомого поверхность \tilde{P} . Легко видеть, что поверхность \tilde{P} связна, если особый слой L связан.

На \tilde{P} естественно определена инволюция τ . В самом деле, каждой точке x из \tilde{P} можно сопоставить точку $\tau(x) \in \tilde{P}$, являющуюся второй точкой пересечения слоя расслоения Зейферта, проходящего через точку x , с сечением \tilde{P} (рис. 3.13). Такая точка встречи всегда существует и отлична от x , если x не принадлежит особому слою расслоения Зейферта. Если же точка x лежит на особом слое расслоения Зейферта, то мы полагаем $\tau(x) = x$.

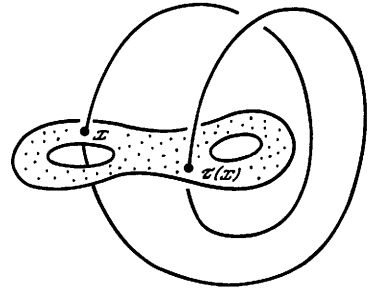


Рис. 3.13

На \tilde{P} естественно определена инволюция τ . В самом деле, каждой точке x из \tilde{P} можно сопоставить точку $\tau(x) \in \tilde{P}$, являющуюся второй точкой пересечения слоя расслоения Зейферта, проходящего через точку x , с сечением \tilde{P} (рис. 3.13). Такая точка встречи всегда существует и отлична от x , если x не принадлежит особому слою расслоения Зейферта. Если же точка x лежит на особом слое расслоения Зейферта, то мы полагаем $\tau(x) = x$.

Лемма 3.3.

- а) *Отображение τ является инволюцией на \tilde{P} . Ее неподвижные — это в точности точки пересечения \tilde{P} с особыми слоями расслоения Зейферта.*
- б) *База P расслоения Зейферта на $U(L)$ является фактор-пространством поверхности \tilde{P} по действию инволюции τ .*

Доказательство вытекает из определения инволюции τ . ■

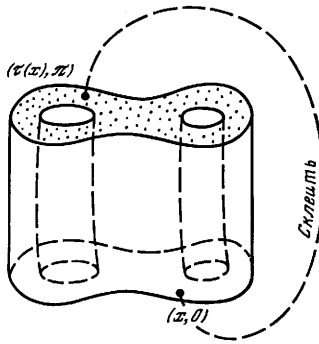


Рис. 3.14

Заметим, что на поверхности \tilde{P} естественно определена функция Морса, являющаяся ограничением интеграла f . Ясно, что инволюция τ сохраняет функцию f .

Эта конструкция позволяет представить $U(L)$ в следующем виде. Рассмотрим 3-цилиндр $\tilde{P} \times [0, \pi]$. Склеим два его основания $\tilde{P} \times \{0\}$ и $\tilde{P} \times \{\pi\}$ по действию инволюции τ , т. е. отождествив точку $(x, 0)$ с точкой $(\tau(x), \pi)$ (рис. 3.14). В результате получится искомое 3-многообразие $U(L)$ — косое произведение поверхности \tilde{P} на окружность.

Опишем теперь, как устроено слоение $U(L)$ на тору Лиувилля. На поверхности \tilde{P} имеется слоение на линии уровня функции f . Следовательно, прямое произведение $\tilde{P} \times [0, \pi]$ расслоено на 2-цилиндры, представляющие собой прямые произведения линий уровня функции f на отрезок. Склеивая теперь основания 3-цилиндра $\tilde{P} \times [0, \pi]$ по инволюции τ , мы видим, что эти 2-цилиндры склеиваются в двумерные тору Лиувилля, расслаивающие $U(L)$.

3.3. Топологически устойчивые гамильтоновы системы

Определение 3.3. Интегрируемая гамильтонова система называется *топологически устойчивой* на изокэнергетической поверхности $Q_{h_0}^3 = \{H = h_0\}$, если при достаточно малых изменениях уровня энергии структура лиувиллева слоения системы не меняется. Другими словами, системы $(v, Q_{h_0}^3)$ и $(v, Q_{h_0+\epsilon}^3)$ при достаточно малых ϵ лиувиллево эквивалентны.

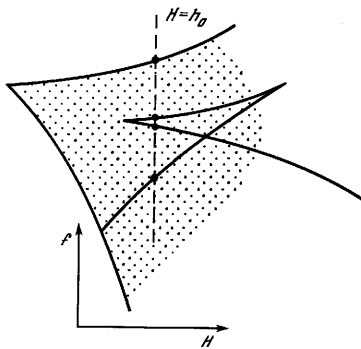


Рис. 3.15

Что на самом деле означает топологическая устойчивость системы? Легко видеть, что множество классов лиувиллевой эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем (с боттовскими интегралами) в естественном смысле дискретно. Поэтому можно ожидать, что для конкретной системы имеется лишь конечное число бифуркационных значений энергии, при которых топология лиувиллева слоения скачком меняется. Такие значения энергии могут быть легко распознаны с помощью бифуркационной диаграммы отображения момента $(H, f): M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Если прямая $\{H = h_0\}$ на плоскости \mathbb{R}^2 пересекает бифуркационную диаграмму трансверсально (рис. 3.15) и не проходит через ее особые точки, то система топологически устойчива на $Q^3 = \{H = h_0\}$. В противном случае, как правило, значения h_0 являются бифуркационными.

В предыдущем параграфе мы показали, что окрестность особого слоя Лиувилля слоения имеет структуру ориентируемого расслоения Зейферта. Можно ли задать ориентацию на слоях этого расслоения некоторым каноническим образом? Один из возможных способов сделать это таков. Критические окружности интеграла f являются одновременно слоями расслоения Зейферта и замкнутыми траекториями рассматриваемой гамильтоновой системы. Поэтому на каждой из этих окружностей уже имеется каноническая ориентация, задаваемая потоком. Эту ориентацию и можно было бы взять в качестве канонической ориентации слоев расслоения Зейферта. Однако, предварительно необходимо убедиться в том, что ориентации всех этих критических окружностей согласованы друг с другом, т.е. попросту совпадают (мы можем сравнивать между собой их ориентации, поскольку все они являются слоями одного и того же связного ориентируемого расслоения Зейферта). Оказывается, что достаточным условием согласованности ориентаций является топологическая устойчивость системы.

Пусть $Q^3 = Q_{h_0}^3 = \{H = h_0\}$ — изоэнергетическая поверхность интегрируемой гамильтоновой системы $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом 4-многообразии M^4 . Пусть $f: Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — боттовский интеграл системы v , и L — особый слой слоения Лиувилля на Q , задаваемого функцией f . Пусть далее S_1, \dots, S_k — критические окружности интеграла f , лежащие на особом слое L и ориентированные потоком v .

Предложение 3.8. *Если система v является топологически устойчивой на Q^3 , то все окружности S_1, \dots, S_k имеют одинаковую ориентацию.*

Доказательство.

Рассмотрим сначала каждую из критических окружностей S_1, \dots, S_k по отдельности. Поскольку окружность S_i невырождена, то с точки зрения объемлющего многообразия M^4 она содержится в однопараметрическом семействе $S_i(\varepsilon)$ невырожденных замкнутых одномерных орбит пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 (порожденной полями $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f$). Рассмотрим образ этого семейства при отображении момента $\mathcal{F}: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Это будет некоторая гладкая кривая δ_i — часть бифуркационной диаграммы (см. предложение 1.18, глава 1).

Выясним, что происходит с особым слоем L слоения Лиувилля при малом изменении значения h гамильтониана H . В силу топологической устойчивости системы v структура особого слоя L не меняется. В частности, критические окружности $S_1(\varepsilon), \dots, S_k(\varepsilon)$ остаются на одном особом слое $L(\varepsilon) \subset Q_{h_0+\varepsilon}^3$ при любом достаточно малом ε (т.е. не распадаются на разные особые слои). Отсюда следует, что все кривые $\delta_1, \dots, \delta_k$ совпадают. Обозначим их просто через δ . В силу предложения 1.18 главы 1 на критических окружностях S_1, \dots, S_k выполнено соотношение:

$$b \text{sgrad } H - a \text{sgrad } f = 0,$$

где a и b — координаты касательного вектора к кривой δ .

Здесь важным является тот факт, что в случае топологически устойчивой системы коэффициенты a и b линейной зависимости векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f$ — одни и те же для всех критических окружностей S_1, \dots, S_k , лежащих на одном связном особом слое слоения Лиувилля.

Для того, чтобы доказать согласованность ориентаций всех окружностей S_1, \dots, S_k , достаточно сравнить направления векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$, где F — периодический интеграл, существующий согласно теореме 3.2 и задающий структуру ориентированного расслоения Зейферта на 3-многообразии $U(L)$. Согласно теореме 3.2, существуют такие постоянные λ и μ , что на всем особом слое L имеет место соотношение:

$$\text{sgrad } F = \lambda \text{sgrad } H + \mu \text{sgrad } f.$$

А поскольку выполнено также равенство

$$b \text{sgrad } H - a \text{sgrad } f = 0,$$

то на всех критических окружностях S_1, \dots, S_k мы получаем одно и то же соотношение:

$$\text{sgrad } F = \left(\lambda + \mu \frac{b}{a} \right) \text{sgrad } H.$$

Отсюда видно, что векторы $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ либо одинаково ориентированы, либо направлены в противоположные стороны одновременно на всех критических окружностях. В любом случае ориентации на S_1, \dots, S_k , задаваемые векторным полем $\text{sgrad } H$, совпадают между собой. Предложение доказано. ■

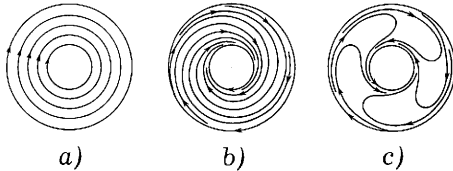


Рис. 3.16

Следствие. Если интегрируемая система топологически устойчива, то слою расслоения Зейферта на $U(L)$ могут быть канонически ориентированы так, чтобы на критических окружностях S_1, \dots, S_k эта ориентация совпала с направлением гамильтонова потока $v = \text{sgrad } H$.

Как ведут себя интегральные траектории поля $\text{sgrad } H$ на особом слое L ?

Рассмотрим особый слой L . Выбросим из него все критические окружности S_1, \dots, S_k интеграла f (т. е. все критические периодические решения). Слой L распадется в несвязное объединение некоторого числа колец. Эти кольца могут быть нескольких типов.

Предложение 3.9. Возможны (с точностью до диффеоморфизма) только следующие три случая (рис. 3.16):

- Все интегральные траектории поля v замкнуты на кольце. Этот случай назовем резонансным.
- Все интегральные траектории незамкнуты, причем граничные окружности кольца являются для каждой из них предельными циклами, имеющими одинаковые ориентации.
- Все интегральные траектории незамкнуты, причем граничные окружности кольца являются для каждой из них предельными циклами, имеющими противоположные ориентации.

Доказательство.

Рассмотрим произвольное кольцо, векторное поле $v = \text{sgrad } H$ на нем и периодический интеграл F . Тогда на внутренности этого кольца имеем: $u = \text{sgrad } F = \lambda \text{sgrad } H + \mu \text{sgrad } f$, где λ и μ — вещественные числа. Поскольку все интегральные траектории поля u замкнуты с периодом 2π , то мы можем ввести естественные координаты (t, φ) на кольце, где $t \in [0, 1]$, $\varphi \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$, такие, что $u = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Возможны два случая: $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$. В первом случае все траектории поля $v = \text{sgrad } H$ замкнуты и мы получаем ситуацию, изображенную на рис. 3.16(а). Во втором случае мы имеем:

$$v = \text{sgrad } H = a(t) \frac{\partial}{\partial t} + b(t) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые гладкие функции на отрезке $[0, 1]$. Эти функции не зависят от φ , поскольку v и $u = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ коммутируют. Отметим, что в этом случае $a(t)$ не обращается в ноль на интервале $(0, 1)$ в силу линейной независимости $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Траектории векторного поля $v = \text{sgrad } H$ могут быть теперь представлены явной формулой:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(t)}{a(t)} dt + \text{const.}$$

Проанализируем ее. Функция $a(t)$ обращается в ноль на концах отрезка $[0, 1]$, т. е. на граничных окружностях кольца, поскольку эти окружности являются траекториями поля $\text{sgrad } H$, т. е. $\text{sgrad } H$ пропорционально $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ на границе. Отсюда же следует, что $b(t)$ принимает на концах отрезка $[0, 1]$ конечные ненулевые значения. Таким образом, функция $\varphi(t)$, задающая интегральные траектории $v = \text{sgrad } H$, определена на всем интервале $(0, 1)$ и стремится к бесконечности при $t \rightarrow 0$ и при $t \rightarrow 1$. Если знаки этих бесконечностей совпадают, мы имеем случай (б) (рис. 3.16(б)), если различны — случай (в) (рис. 3.16(с)). Предложение 3.9 доказано. ■

Предложение 3.10. *Если интегрируемая система топологически устойчива, то особый слой L не имеет колец типа (в).*

Доказательство.

Граничные окружности кольца, очевидно, являются замкнутыми интегральными траекториями поля $v = \text{sgrad } H$. Ясно, что в случае (в) ориентации граничных окружностей, заданные направлением поля v , различны (рис. 3.16-с). Однако, в силу предложения 3.8 ориентации всех критических окружностей, лежащих на данном связном слое L , должны совпадать для топологически устойчивых систем. Полученное противоречие доказывает предложение. ■

КОММЕНТАРИЙ. Пусть L — особый слой интегрируемой топологически устойчивой системы. Утверждается, что тогда все кольца этого особого слоя либо одновременно имеют тип (а), либо одновременно имеют тип (б).

В самом деле, достаточно воспользоваться соотношением

$$u = \operatorname{sgrad} F = \lambda \operatorname{sgrad} H + \mu \operatorname{sgrad} f,$$

которое выполнено одновременно на всех кольцах особого слоя L . Если $\mu = 0$, то траектории векторного поля $\operatorname{sgrad} H$ совпадают с траекториями векторного поля $\operatorname{sgrad} F$ и потому замкнуты на всех кольцах особого слоя. Напротив, если $\mu \neq 0$, то траектории поля $\operatorname{sgrad} H$ на всех кольцах (одновременно) незамкнуты.

3.4. Пример неустойчивой интегрируемой системы

Здесь мы приведем пример *неустойчивой* интегрируемой гамильтоновой системы, у которой действительно есть кольцо особого слоя типа (в), см. рис. 3.16-с.

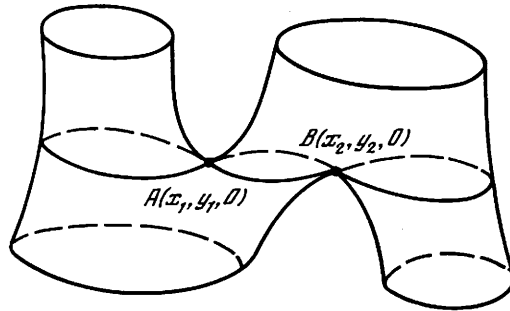


Рис. 3.17

Рассмотрим двумерную поверхность P в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, изображенную на рис. 3.17. Функция высоты $f = z$ на этой поверхности имеет единственное критическое значение $z = 0$ и две критические точки A и B , лежащие на этом уровне. Пусть $H(x, y, z)$ — гладкая функция, для которой P является неособой поверхностью уровня, т.е. $P = \{H = 0\}$ и $dH|_P \neq 0$.

Рассмотрим теперь в качестве симплектического многообразия прямое произведение $\mathbb{R}^3 \times S^1$ с симплектической структурой $\omega = dx \wedge dy + dz \wedge d\varphi$. Легко видеть, что функции H и f коммутируют, и поэтому гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} H$ является интегрируемой.

Рассмотрим особый слой L слоения Лиувилля, задаваемый двумя уравнениями $H = 0$ и $f = 0$. Слой L содержит две критические окружности $\{A\} \times S^1$ и $\{B\} \times S^1$. Сравним ориентации этих окружностей, задаваемые потоком $v = \operatorname{sgrad} H$. Заметим для этого, что траектории потока $\operatorname{sgrad} f$ замкнуты и задают в окрестности $U(L)$ структуру ориентированного расслоения Зейфerta (другими словами, f является периодическим интегралом системы). Поэтому

для сравнения ориентаций на окружностях нам следует сравнить между собой направления потоков $\text{sgrad } f$ и $\text{sgrad } H$. Предположим для определенности, что градиент функции H в точке $A \in P \subset \mathbb{R}^3$ направлен вертикально вверх, т.е. в ту же сторону, что и градиент функции $f = z$. Тогда, как нетрудно увидеть из рис. 3.17, в точке B градиент функции H будет направлен вертикально вниз так, что направления $\text{grad } H(B)$ и $\text{grad } f(B)$ будут противоположны. Таким образом, на окружности $\{A\} \times S^1$ потоки $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f$ направлены в одну сторону, а на $\{B\} \times S^1$ — в разные. Следовательно, ориентации, задаваемые на критических окружностях $\{A\} \times S^1$ и $\{B\} \times S^1$ гамильтоновым потоком $v = \text{sgrad } H$, различны.

Особый слой L помимо двух критических окружностей содержит четыре двумерные орбиты, каждая из которых гомеоморфна кольцу. Посмотрим, как ведут себя траектории поля v на этих кольцах. Среди этих четырех колец имеются два, примыкающие одновременно к критическим окружностям $\{A\} \times S^1$ и $\{B\} \times S^1$. Поскольку поток v бежит по этим окружностям в разные стороны, то поведение траекторий на этих кольцах будет таким, как показано на рис. 3.16-с. На двух оставшихся кольцах поведение траекторий будет соответствовать рис. 3.16-б. Действительно, на граничных окружностях каждого из этих колец поток задает одинаковое направление просто потому, что эти окружности совпадают между собой.

Наконец, отметим, что построенная гамильтонова система не является топологически устойчивой на изоэнергетической поверхности $\{H = 0\}$. Действительно, особые точки функции высоты $f = z$ на поверхности $\{H = \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^3$ при $\varepsilon \neq 0$ оказываются на разных уровнях. С точки зрения гамильтоновой системы это означает, что при малом изменении уровня энергии критические окружности оказываются на разных особых слоях лиувиллева слоения. В результате особый слой L распадается на два более простых, меняя структуру слоения.

3.5. 2-атомы и 3-атомы

Рассмотрим топологически устойчивую интегрируемую систему с боттовским интегралом f на изоэнергетической 3-поверхности Q и возьмем какой-нибудь особый слой L соответствующего слоения Лиувилля на Q .

Рассмотрим инвариантную окрестность $U(L)$ этого слоя. Как и в двумерном случае (см. главу 2), в качестве $U(L)$ естественно взять связную компоненту множества $f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, содержащую особый слой L (здесь $c = f(L)$ — критическое значение функции f). Ясно, что $U(L)$ представляет собой трехмерное многообразие с естественной структурой слоения Лиувилля. Этот объект естественно назвать 3-атомом. Однако, с формальной точки зрения, следует поступить более аккуратно. Будем считать два таких 3-многообразия со структурой слоения Лиувилля лиувиллево эквивалентными, если

- 1) существует диффеоморфизм между ними, сохраняющий структуру слоения Лиувилля (т.е. послыйный),

- 2) этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию 3-многообразий и ориентацию на критических окружностях, которая задается гамильтоновым потоком.

Определение 3.4. Класс лиувиллевой эквивалентности трехмерного многообразия $U(L)$ назовем *3-атомом*. Число критических окружностей в 3-атоме назовем его *атомным весом* (или *сложностью*).

Отметим, что 3-атом (т.е. любое представляющее его многообразие $U(L)$) всегда ориентируем, и эта ориентация считается фиксированной. При изменении ориентации мы можем получить, вообще говоря, другой атом.

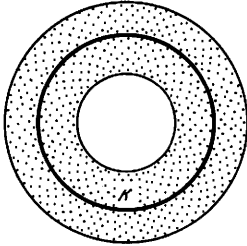


Рис. 3.18

Возникает естественная задача классификации 3-атомов. Оказывается, она может быть решена в терминах 2-атомов. Напомним для этого их определение. Рассмотрим функцию Морса f на ориентированной поверхности P^2 с краем, и пусть c — критическое значение функции f на P^2 .

Напомним (см. выше определение 2.4), что мы называем атомом окрестность критического слоя (задаваемую неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достаточно малого ε), расслоенную на линии уровня функции f и рассматриваемую с точностью до послойной эквивалентности, сохраняющей ориентацию поверхности.

Подчеркнем, что начиная с этого момента на протяжении всей книги мы будем рассматривать только ориентированные атомы, т.е. такие, у которых поверхность P^2 ориентируема и ориентация на ней фиксирована.

Напомним далее, что понятие атома можно сформулировать и по-другому, взяв вместо функции f ее особый уровень $K = \{f = c\}$.

Другими словами, 2-атомом называется пара (P^2, K) , где P^2 — ориентированная связная компактная двумерная поверхность с краем, а K — связный граф в ней такой, что выполняются следующие условия.

- 1) Либо K состоит только из одной точки (т.е. изолированной вершины степени ноль), либо все вершины графа K имеют степень 4.
- 2) Каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1]$, и множество этих колец можно разбить на два класса — положительные кольца и отрицательные кольца — так, чтобы к каждому ребру графа K примыкало ровно одно положительное кольцо и ровно одно отрицательное.

Мы рассматриваем атомы с точностью до естественной эквивалентности: два 2-атома (P^2, K) и (P'^2, K') эквивалентны, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, переводящий P'^2 в P^2 , и K' в K .

Расширим теперь запас атомов, добавив новые объекты — атомы со звездочками.

Возьмем произвольный атом (P^2, K) и рассмотрим его граф $K = \{f = c\}$. При этом наряду с прежними атомами рассмотрим еще один простой атом, получающийся следующим образом. В качестве поверхности P мы возьмем кольцо и

объявим графом K любую его осевую окружность (рис. 3.18). Этот атом можно рассматривать как окрестность неособого (регулярного) уровня функции f .

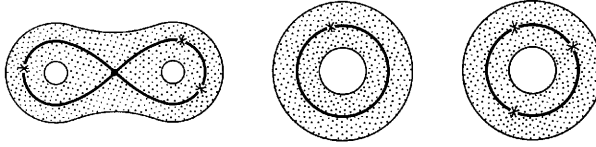


Рис. 3.19

Изготовим теперь новые атомы со звездочками. Отметим на некоторых ребрах графа K произвольное число внутренних точек (т.е. не совпадающих с критическими точками функции). Объявим их новыми вершинами графа K и обозначим их звездочками. См. примеры на рис. 3.19.

Определение 3.5. Атом (P^2, K) , у которого есть хотя бы одна вершина-звездочка, будем называть *атомом со звездочками*. Если таких вершин нет, то будем говорить об *атоме без звездочек*.

Определение 3.6. Будем называть *2-атомом* ориентированный атом (P^2, K) со звездочками или без.

Рассмотрим теперь 3-атом $U(L)$ со структурой расслоения Зейферта на нем. Обозначим через

$$\pi: U(L) \rightarrow P^2$$

его проекцию на двумерную базу P^2 с графом K , где в качестве K возьмем образ $\pi(L)$ особого слоя L при проекции π . Далее, отметим на базе P^2 звездочками те точки, в которые проектируются особые слои расслоения Зейферта (т.е. слои типа $(2, 1)$). Напомним, что на базе P^2 каноническим образом вводится ориентация. Дело в том, что на $U(L)$ ориентация уже фиксирована, а на слоях расслоения Зейферта она определяется гамильтоновым потоком $v = \text{sgrad } H$. (см. следствие к предложению 3.8). Ясно, что в результате мы получили некоторый 2-атом (P^2, K) .

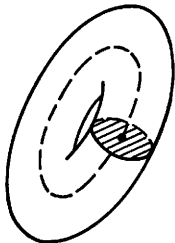
Теорема 3.4.

- а) База расслоения Зейферта на 3-атоме $U(L)$ имеет естественную структуру 2-атома, описанную выше.
- б) Проекция $\pi: (U(L), L) \rightarrow (P^2, K)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между 3-атомами и 2-атомами.

Доказательство.

В доказательстве нуждается лишь пункт (б). Сейчас мы построим обратное отображение, которое будет сопоставлять каждому 2-атому некоторый 3-атом. Возьмем 2-базу P^2 с графом K и построим функцию Морса f на P^2 такую, что ее единственный критический уровень совпадает с K . Такая функция определена однозначно с точностью до послынной эквивалентности. Она естественным образом расщипывает P^2 своими линиями уровня. Из теоремы 3.1 (см. выше) вытекает, что по базе P^2 с отмеченными на ней звездочками (если они

есть) однозначно (с точностью до послышной эквивалентности) восстанавливается 3-многообразие $U(L)$ со структурой расслоения Зейферта. Чтобы получить теперь 3-атом, нужно задать на $U(L)$ структуру слоения Лиувилля. Воспользуемся функцией f , уже имеющейся на базе P^2 . Поднимем ее наверх, т. е. на $U(L)$ при помощи проекции π . Получим функцию \tilde{f} на $U(L)$, регулярные поверхности уровня которой являются 2-торами. Ясно, что функция \tilde{f} является функцией Ботта на $U(L)$. Ее критические окружности — это в точности прообразы всех вершин графа K , включая вершины-звездочки. Этот процесс построения 3-атома по 2-атому однозначен (с точностью до послышной эквивалентности). Ясно, что замена функции f на базе P^2 на послышно эквивалентную ей функцию приводит к лиувиллеву слоению на $U(L)$, тоже послышно эквивалентному только что построенному.



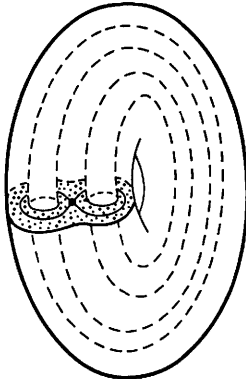
3-атом А

Рис. 3.20

Построив слоение $U(L)$ на 2-торы, мы должны теперь представить его как лиувиллево слоение некоторой интегрируемой боттовской гамильтоновой системы на подходящем 4-многообразии. Нужно ввести симплектическую структуру в 4-окрестности $V(L) = U(L) \times I$, где I — некоторый интервал, для которой слоение на $U(L)$ было бы лагранжевым. Это действительно можно сделать, как мы покажем ниже при доказательстве более общей теоремы реализации.

Итак, мы построили соответствие $(P^2, K) \rightarrow (U(L), L)$ между 2-атомами и 3-атомами, которое, как несложно видеть, является обратным к соответствию, устанавливаемому проекцией π . Теорема 3.4 доказана. ■

Подведем итоги, выделив три различных типа атомов.



3-атом В

Рис. 3.21

1. 3-атом А. Этот 3-атом отвечает невырожденной критической окружности, на которой функция f имеет локальный минимум или локальный максимум. С точки зрения динамической системы $v = \text{sgrad } H$ речь идет об окрестности устойчивой периодической траектории. Топологически 3-атом А представляет собой полноторие, расслоенное на концентрические торы, сжимающиеся на ось полнотория. Другими словами, 3-атом А является прямым произведением окружности и диска, расслоенного на концентрические окружности (см. рис. 3.20).

2. Седловые 3-атомы без звездочек. Рассмотрим произвольный 2-атом (без звездочек), т. е. двумерную ориентированную компактную поверхность P с краем, на которой задана функция Морса $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая единственное критическое значение. Соответствующий 3-атом является прямым произведением $U = P \times S^1$. Слоение Лиувилля на нем задает функция f , продолженная на Q естественным образом

на Q естественным образом

$$f(x, \varphi) = f(x), \quad x \in P, \quad \varphi \in S^1.$$

На рис. 3.21 показан пример простого 3-атома B . Топологически этот атом представляет собой полноторие, из которого вырезаны два тонких полнотория. Особый слой L является произведением восьмерки на окружность. При прохождении через особый уровень интеграла два тора Лиувилля перестраиваются в один тор (или наоборот).

3. Седловые 3-атомы со звездочками. Как и в предыдущем случае, мы рассмотрим сначала 2-поверхность \hat{P} с функцией Морса \hat{f} на ней. Предположим, что на поверхности задана инволюция, т. е. гладкое отображение $\tau: \hat{P} \rightarrow \hat{P}$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $\tau^2 = \text{id}$,
- 2) τ сохраняет функцию \hat{f} , т. е. $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$ для любого $x \in \hat{P}$,
- 3) τ сохраняет ориентацию,
- 4) неподвижными точками инволюции τ являются некоторые из критических точек функции \hat{f} .

Для построения 3-атома рассмотрим цилиндр $P \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания по инволюции τ , отождествляя точки $(x, 2\pi)$ и $(\tau(x), 0)$. В результате мы получим ориентируемое 3-многообразие U с краем. Функция \hat{f} естественным образом продолжается на U , поскольку $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$, и ее поверхности уровня задают структуру слоения Лиувилля на U с единственным особым слоем. Отметим, что топологически многообразие U является расслоением над окружностью со слоем \hat{P} .

На рис. 3.22 приведен пример простого 3-атома A^* . Он устроен несколько сложнее атома B . Нужно удалить из полнотория лишь одно тонкое полноторие, но обходящее два раза вдоль оси (рис. 3.22). Особый слой L получается протаскиванием вдоль окружности вращающейся восьмерки, успевающей повернуться на угол π за один оборот. При прохождении через особый уровень один тор Лиувилля перестраивается в один тор. Отметим, что особый слой L можно реализовать в \mathbb{R}^3 как погружение двумерной бутылки Клейна (рис. 3.24).

В случае 3-атома со звездочками соответствующий 2-атом (P, K) (где $K = \{f = c\}$) получается из пары (\hat{P}, \hat{K}) факторизацией по инволюции τ . Здесь $\hat{K} = \{\hat{f} = c\}$.

Определение 3.7. Пару (\hat{P}, \hat{K}) назовем *дублем 2-атома* (P, K) со звездочками.

Ясно, что дубль (\hat{P}, \hat{K}) является разветвленным двулиственным накрытием над 2-атомом (P, K) , причем точками ветвления являются как раз вершины-звездочки атома (P, K) .

Замечание. Следует иметь в виду, что у одного и того же 2-атома может быть несколько разных дублей, не гомеоморфных друг другу. Поэтому разные дубли (\hat{P}_1, \hat{K}_1) и (\hat{P}_2, \hat{K}_2) могут порождать один и тот же 3-атом со звездочками. Приведем один из простейших примеров. Рассмотрим 2-атомы C_1 и C_2 , изображенные на рис. 3.23 (см. также таблицу атомов). На каждом из них определена естественная инволюция,

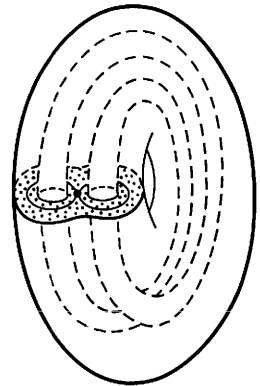
3-атом A^*

Рис. 3.22

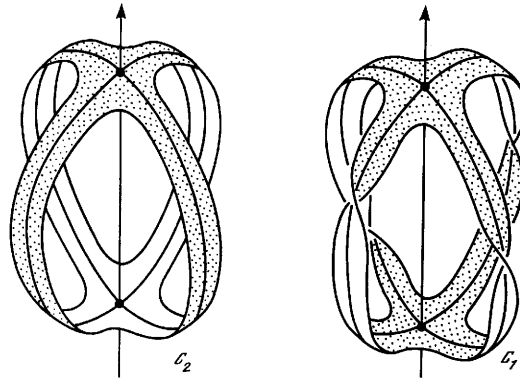


Рис. 3.23

являющаяся симметрией относительно оси, проходящей через вершины атомов. Применяя к каждому из этих атомов с инволюцией описанную выше конструкцию, мы получаем изоморфные между собой 3-атомы, имеющие тип A^{**} (см. таблицу атомов ниже).

3.6. Классификация 3-атомов

В силу теоремы 3.4 классификация 3-атомов сводится к классификации 2-атомов. Классификация 2-атомов без звездочек уже была дана выше (см. таблицу 2.1 главы 2). Чтобы получить теперь список 2-атомов со звездочками,

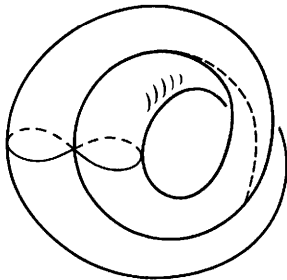


Рис. 3.24

нужно поступить так. Следует поместить на ребра графов K прежних 2-атомов произвольное количество вершин-звездочек. И добавить одну серию новых 2-атомов (P^2, K) , где P — кольцо, а K — его осевая окружность, на которой проставлено произвольное число звездочек (рис. 3.19). Начало получающегося списка приведено в таблице 3.1. Напомним, что здесь 2-атомы представлены в виде погружений соответствующих графов K в 2-сферу. При этом зеркально симметричные погружения не считаются эквивалентными. Отметим, что первые примеры незеркальных атомов со звездочками появляются в сложности 3. Это — два атома D_{22}^* и D_{23}^* , переходящие друг в друга при зеркальном отражении.

Замечание. В реальных интегрируемых системах классической механики и математической физики наиболее часто встречаются 3-атомы A, B, A^*, C_2, D_1 . Примеры будут приведены ниже.

Как уже было показано выше, по каждому ориентированному 2-атому без звездочек однозначно строится пара f -графов. Эту конструкцию можно естественно обобщить и на случай 2-атомов со звездочками.

Определение 3.8. Назовем f -графом со звездочками граф, определяемый точно таким же образом, как и обычный f -граф (см. определение 2.14), с одним изменением: теперь мы допускаем вершины степени два, причем в каждой такой вершине одно ребро должно быть входящим, а другое — выходящим. Такие вершины естественно назвать *звездочками* (или *вершинами-звездочками*).

По каждому 3-атому мы однозначно строим 2-атом, а затем пару f -графов (со звездочками или без звездочек).

Полный список всех f -графов малой сложности (а именно, сложности 1, 2, 3) приведен в таблице 3.2. Дадим пояснения к этой таблице.

Таблица f -графов и групп симметрий f -графов. Напомним, что мы берем 3-атом, то есть ориентированное 3-многообразие, являющееся окрестностью особого слоя, причем ориентация на 3-многообразии задана и фиксирована. Также задана и фиксирована ориентация потока на критических окружностях. Затем по этому ориентированному 3-атому мы строим ориентированный 2-атом, то есть ориентированную 2-поверхность с графом K . Напомним, что граница 2-атома состоит из положительных и отрицательных окружностей. Далее, по этому ориентированному 2-атому мы однозначно строим пару f -графов. Эти два f -графа получаются так. У f -графа есть циклы, составленные из ориентированных ребер. Эти циклы могут соответствовать либо набору положительных окружностей 2-атома, либо набору его отрицательных окружностей. Поэтому и получаются ровно два f -графа (которые, впрочем, иногда могут получиться одинаковыми).

В таблице 3.2 перечислены f -графы малой сложности для трехмерных атомов (без звездочек и со звездочками).

Для каждого атома мы указываем два соответствующих ему f -графа. Эти f -графы получаются друг из друга при замене знака у интеграла f на противоположный. Напомним, что при построении f -графа мы фиксировали положительные и отрицательные кольца атома. Отметим, что в некоторых случаях f -граф и $(-f)$ -граф совпадают. Тогда мы указываем в таблице только один f -граф. В тех же случаях, когда замена функции f на $-f$ изменяет f -граф, мы приводим оба эти f -графа. Полезно также отметить, что несмотря на возможное различие между f -графом и $(-f)$ -графом, их группы симметрий всегда совпадают (изоморфны). Дело в том, что симметрии f -графа на самом деле отвечают симметриям 3-атома. А поскольку при замене f на $-f$ 3-атом, очевидно, не меняется, то и соответствующие группы симметрий f -графа и $(-f)$ -графа одинаковы.

В первой колонке таблицы 3.2 указаны стандартные обозначения 3-атомов, постоянно используемые в нашей книге (см. таблицу 3.1).

Во второй колонке указаны соответствующие f -графы. Отметим, что здесь мы приводим лишь одно из возможных изображений f -графа. Подчеркнем, что все такие изображения здесь для нас одинаковы, поскольку f -граф рассматривается (по определению) как абстрактно заданный граф, и неважно, как именно мы изображаем его при помощи погружения в плоскость. Напомним, что в таблице 3.1, напротив, атом изображался в виде погружения его скелета (графа) в плоскость. Причем разным (неэквивалентным) погружениям одного и того же

графа-скелета отвечали разные атомы. Например, D_1 и D_2 изоморфны как абстрактные графы, но задают разные 3-атомы.

В третьей колонке таблицы 3.2 мы указываем, для случая f -графов без звездочек, род ориентированного 2-атома, соответствующего данному f -графу, т. е. род ориентированной замкнутой двумерной поверхности, получающейся из 2-атома заклеивкой 2-дисками всех его граничных окружностей.

В четвертой колонке указана группа $\text{Sym}(V)$ симметрий (автоморфизмов) f -графа v , сохраняющих ориентацию ориентированных ребер f -графа. Назовем такие симметрии (автоморфизмы) собственными, а соответствующую группу — группой собственных симметрий. Общая теория симметрий атомов (без звездочек) изложена нами в главе 2.

В пятой колонке указана группа $\widehat{\text{Sym}}(V)$ симметрий (автоморфизмов) f -графа v , являющаяся расширением предыдущей группы при помощи несобственных симметрий. Несобственной симметрией f -графа мы называем такой его автоморфизм, который одновременно меняет ориентации всех его ориентированных ребер. На неориентированных ребрах никаких условий не накладывается. Для незеркальных атомов группа $\text{Sym}(V)$ собственных симметрий, очевидно, совпадает с группой $\widehat{\text{Sym}}(V)$, а для зеркальных — является нормальной подгруппой индекса два в группе $\widehat{\text{Sym}}(V)$. В дальнейшем мы будем называть (для краткости) группу $\widehat{\text{Sym}}(V)$ группой всех симметрий f -графа v , или полной группой симметрий f -атома. Отметим, что группа $\text{Sym}(V)$ отвечает группе автоморфизмов соответствующего 3-атома, сохраняющих ориентацию гамильтонова потока на критических окружностях 3-атома. Соответственно, группа $\widehat{\text{Sym}}(V)$ отвечает автоморфизмам 3-атома, которые могут обращать ориентацию потока, но при этом — одновременно на всех критических окружностях данного 3-атома. Далее следует помнить, что если рассмотреть f -граф просто как абстрактный неориентированный граф, забыв об ориентации всех его ребер, то его полная группа симметрий может оказаться больше, чем группа $\widehat{\text{Sym}}(V)$.

В таблице через D_3 обозначена группа всех симметрий правильного треугольника на плоскости, через D_4 обозначена группа всех симметрий квадрата на плоскости. В общем случае D_n — это полная группа симметрий правильного n -угольника. Ее порядок равен $2n$.

3.7. Атомы как перестройки торов Лиувилля

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ на M^4 и отображение момента $\mathcal{F}: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Пусть Σ — бифуркационная диаграмма и $y \in \mathbb{R}^2$ — произвольная регулярная точка в образе отображения момента. Если ее полный прообраз компактен, то он состоит из некоторого числа торов Лиувилля. Перемещая точку y по плоскости, мы заставляем эти торы как-то двигаться внутри M^4 . До тех пор, пока точка y остается регулярной, торы Лиувилля деформируются посредством гладкой изотопии. Но в тот момент, когда точка y наталкивается на бифуркационную диаграмму σ и пересекает ее, торы Лиувилля, вообще говоря, подвергаются нетривиальной перестройке. Возникает вопрос: как описать типичные бифуркации торов Лиувилля?

Как правило, бифуркационная диаграмма состоит из кусочно-гладких дуг и разбивает плоскость \mathbb{R}^2 на открытые области регулярных значений, которые выше мы назвали камерами. Типичная бифуркация происходит в случае, когда движущаяся точка y пересекает одну из таких дуг трансверсально во внутренней точке y^* , переходя из одной камеры в другую (рис. 3.25).

Чтобы объяснить, какие именно бифуркации нас сейчас интересуют, рассмотрим движение точки по плоскости \mathbb{R}^2 как параметризованную кривую $y(t)$, соединяющую точки y_0 и y_1 из разных камер и пересекающую трансверсально бифуркационную диаграмму в точке y^* .

Предположим, что прообраз кривой $y(t)$ (рис. 3.25) компактен в M^4 . Пусть далее, гладкой дуге бифуркационной диаграммы σ , на которой лежит точка y^* , отвечают в M только невырожденные критические точки, в которых ранг отображения момента падает ровно на единицу. Это условие выполняется для большинства известных сегодня интегрируемых гамильтоновых систем. Назовем такие бифуркации торов Лиувилля невырожденными. Они устойчивы в том смысле, что при малом шевелении кривой $y(t)$ тип бифуркации торов Лиувилля не меняется.

Мы утверждаем, что все такие бифуркации торов Лиувилля описываются в точности 3-атомами. Это означает, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех 3-атомов и типами невырожденных бифуркаций торов Лиувилля.

Поясним это утверждение. Рассмотрим прообраз кривой $y(t)$ в M^4 . Это гладкое трехмерное многообразие с краем, которое можно представлять как однопараметрическое семейство инвариантных (вообще говоря, несвязных) подмногообразий, испытывающих при некотором значении параметра бифуркацию. Это трехмерное многообразие можно проинтерпретировать как 3-атом $U(L)$. В качестве функции f на нем следует взять параметр t . При этом L (особый слой слоения Лиувилля) является прообразом точки y^* при отображении момента. Невырожденность перестройки торов Лиувилля эквивалентна здесь тому, что f является функцией Ботта на $U(L)$.

3.8. Молекулы интегрируемой системы

Пусть Q^3 — компактная неособая изоэнергетическая 3-поверхность интегрируемой системы $v = \text{sgrad } H$ и пусть f — второй независимый интеграл.

В дальнейшем, на протяжении всей книги мы будем рассматривать интегрируемые системы, удовлетворяющие следующим естественным условиям.

- 1) Изоэнергетическая 3-поверхность Q является компактной и неособой.
- 2) Система $v = \text{sgrad } H$ является нерезонансной на Q .

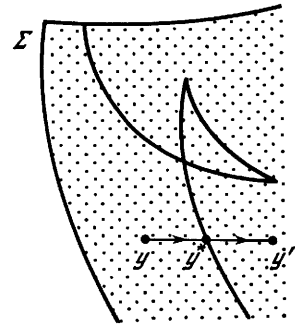


Рис. 3.25

- 3) Система v обладает боттовским интегралом f на Q .
- 4) Система v топологически устойчива на Q .

Кроме этих условий, мы временно предположим, что интеграл f не имеет критических бутылок Клейна, а критические торы (если они существуют) будем рассматривать как неособые. Конструкцию, позволяющую включить бутылки Клейна в эту теорию, мы опишем в следующей главе.

Теперь понятие молекулы можно ввести двумя способами.

Первый способ. Рассмотрим слоение Лиувилля на Q . Сначала построим аналог графа Роба. Для этого рассмотрим базу слоения Лиувилля, т.е. факторпространство Q/ρ , где ρ — естественное отношение эквивалентности, отождествляющее точки, лежащие на одном и том же слое слоения Лиувилля. Получается некоторый граф. Его вершинам, очевидно, соответствуют особые слои слоения Лиувилля. А ребра графа изображают однопараметрические семейства торов Лиувилля (не содержащие бифуркаций).

Из предыдущего видно, что каждая вершина графа взаимно-однозначно соответствует некоторому 3-атому, т.е. некоторой перестройке (бифуркации) торов Лиувилля. Следовательно, мы можем снабдить каждую вершину графа символом, соответствующим этому 3-атому (или 2-атому, что то же самое в силу теоремы 3.4). Удобно пользоваться символьными обозначениями, приведенными в таблице атомов 3.1 (см. выше). Говоря более формально, мы сопоставляем каждой вершине графа соответствующий 2-атом.

В результате получится граф, вершинами которого являются 2-атомы. Напомним, что 2-атом — это двумерная поверхность P с краем. Как и в предыдущей главе, говоря о том, что каждой вершине графа соответствует 2-атом, мы дополнительно подразумеваем, что граничные окружности поверхности P находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с концами ребер графа, примыкающими к данной вершине. Мы считаем, что для каждой вершины графа такое соответствие (между ребрами и граничными окружностями) фиксировано.

Определение 3.9. Получающийся граф W будем называть *молекулой интегрируемой системы*, отвечающей данной неособой компактной изознергетической 3-поверхности Q .

С формальной точки зрения введенное нами только что понятие молекулы совпадает с понятием молекулы, уже знакомым нам по главе 2. Единственное отличие состоит в том, что сейчас атомы могут иметь вершины-звездочки.

Понятие равенства (совпадения) двух молекул формулируется точно так же, как и в определении 2.22 главы 2.

Молекула W интегрируемой системы изображает структуру слоения Лиувилля на данной изознергетической 3-поверхности Q . Очевидно, что молекула W является инвариантом системы с точки зрения лиувиллевой эквивалентности, т.е. молекулы двух лиувиллево эквивалентных интегрируемых систем совпадают.

Отметим, что молекула W не зависит от конкретного выбора второго интеграла f .

Второй способ определения молекулы. Рассмотрим интеграл f на Q и все особые слои L_i слоения Лиувилля, т. е. связные компоненты особых уровней функции f . Разрезая Q вдоль регулярных слоев функции f , т. е. вдоль торов Лиувилля, можно разбить Q на трехмерные куски $U(L_i)$, каждый из которых содержит ровно один особый слой L_i (рис. 3.26). Ясно, что каждое 3-многообразие $U(L_i)$ является регулярной окрестностью связного особого слоя L_i . Поэтому каждое трехмерное многообразие $U(L_i)$ является 3-атомом. Построим граф, вершинами которого являются эти 3-атомы, а ребра соответствуют тем торам Лиувилля, по которым были сделаны разрезы. Поясним, что каждый 3-атом имеет концы, отвечающие граничным торам Лиувилля. И мы просто соединяем ребрами те концы атомов, которые отвечают склеиваемым торам Лиувилля (при восстановлении разрезов).

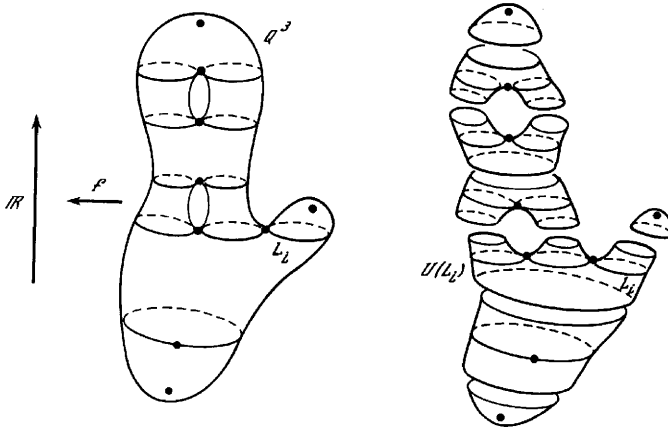


Рис. 3.26

Таким образом, молекула W описывает разложение 3-многообразия Q в объединение 3-атомов. Другими словами, зная молекулу, мы знаем, из каких расслоений Зейферта склеено данное 3-многообразие Q , и в каком порядке нужно склеивать граничные торы зейфертовых кусков. Хотя полностью восстановить топологию Q по молекуле W , вообще говоря, нельзя, W несет в себе наиболее существенную часть информации о слоении Лиувилля на Q . Это означает, что молекула W описывает тип слоения Лиувилля с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

Напомним, что две системы v на Q и v' на Q' называются грубо лиувиллево эквивалентными, если от одного слоения Лиувилля можно перейти к другому путем последовательных скручиваний слоения Лиувилля (см. главу 1). Для этого нужно разрезать Q по торам Лиувилля и склеивать обратно получающиеся берега разрезов посредством новых диффеоморфизмов граничных торов Лиувилля. При этом нужно следить за тем, чтобы каждая такая склейка сохраняла исходную ориентацию Q .

Теорема 3.5. Пусть (v, Q) и (v', Q') — две интегрируемые системы и W, W' — отвечающие им молекулы. Тогда системы v и v' грубо лиувиллево эквивалентны (с учетом ориентации) тогда и только тогда, когда молекулы W и W' совпадают.

Доказательство.

Этот факт сразу следует из определения молекулы W . В самом деле, совпадение молекул означает, что слоения Лиувилля на Q и Q' склеены из одних и тех же компонент. Отличие заключается лишь в том, что граничные торы этих компонент могут склеиваться при помощи разных диффеоморфизмов. Но это различие можно устранить при помощи скручиваний. Теорема доказана. ■

3.9. Сложность интегрируемых систем

Пусть, как и выше, v — интегрируемая гамильтонова система на изоповерхности Q , и $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ — ее боттовский интеграл. Обозначим через m общее число всех критических окружностей интеграла f . Удалим из Q все особые слои L_i . В результате Q распадется в объединение однопараметрических семейств торов Лиувилля. Пусть n — число таких семейств.

Определение 3.10. Пару чисел (m, n) назовем *сложностью интегрируемой системы v на Q* .

Эту же сложность можно вычислить, исходя из понятия молекулы W , отвечающей (v, Q) . Ясно, что m — это молекулярный вес, т.е. сумма всех атомных весов всех атомов, входящих в молекулу. Число n — это попросту количество ребер молекулы W .

Ясно, что сложность (m, n) является инвариантом грубой лиувиллевой эквивалентности.

Теорема 3.6. Число различных молекул фиксированной сложности конечно.

Доказательство сразу следует из того, что число атомов фиксированного атомного веса конечно. Поэтому, если сложность молекул фиксирована, то имеется лишь конечное число атомов, из которых их можно склеить. А для конечного числа атомов есть лишь конечное число вариантов склеек. Теорема доказана. ■

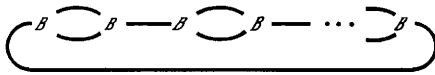


Рис. 3.27

Теорема 3.6 позволяет «выписать полный список» всех возможных молекул, т.е. алгоритмически перечислить все молекулы по мере возрастания их сложности. Для этого достаточно взять список всех атомов (алгоритмически построенный нами выше) и начать соединять их концы всеми возможными способами, чтобы не осталось свободных концов. Конечно, здесь мы опираемся на еще не доказанную теорему реализации, утверждающую, что любая абстрактно заданная молекула, составленная из произвольной комбинации атомов, действительно допустима, т.е. реализуется как молекула некоторой интегрируемой системы на подходящем изоповерхности Q в подходящем 4-многообразии M^4 . Эту теорему мы докажем позже, а здесь лишь сошлемся на нее. Пока же, не касаясь вопроса о реализуемости молекул, можно рассматривать их лишь как абстрактные объекты, составленные из атомов. С этой точки зрения их можно перечислять, сравнивать друг с другом и т. п.

Обозначим через $\lambda(m, n)$ число всех абстрактных молекул данной сложности (m, n) . В силу теоремы 3.6 это число всегда конечно. В таблице 3.3 приведены значения функции $\lambda(m, n)$ для $m \leq 4$. Этот результат был получен С. В. Матвеевым в результате компьютерного анализа. Из этой экспериментальной таблицы видно, что при $m \leq 4$ функция $\lambda(m, n)$ обращается в ноль при достаточно больших n . Оказывается, это отражает следующий общий факт.

Теорема 3.7. Пусть $\Lambda(m) = \{\max n : \lambda(m, n) \neq 0\}$. Тогда

$$\Lambda(m) = \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil.$$

Доказательство.

Пусть молекула сложности (m, n) состоит из k атомов (P_i, K_i) с атомными весами m_i и валентностями n_i . Напомним, что валентность атома — это число его концов, т. е. граничных окружностей 2-поверхности P_i . Обозначим через w_i и v_i количество вершин графа K_i степени 4 и 2 соответственно. Поясним, что вершины степени 2 — это вершины-звездочки атома. Пусть χ_i — эйлерова характеристика замкнутой ориентируемой поверхности \tilde{P}_i , получающейся из исходной поверхности P_i заклеивкой всех ее граничных окружностей двумерными дисками. Легко видеть, что

$$n_i = \chi_i + w_i.$$

Суммируя эти равенства по i , и учитывая, что $\chi_i \leq 2$, $m_i = v_i + w_i$,

$$\sum_{i=1}^k m_i = m, \quad m_i \geq 1,$$

получаем, что

$$n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (2 + m_i) = k + \frac{m}{2} \leq \frac{3m}{2}.$$

Таким образом, $\Lambda(m) \leq \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil$.

Существование молекулы W сложности $(m, \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil)$ для четных m доказывается ее явным построением на рис. 3.27, а для нечетных m нужно вставить в любое ребро этой молекулы атом A^* . Теорема доказана. ■

В таблице 3.4 приведены все молекулы малой сложности. Из нее видно, что концы атомов действительно различаются по своим свойствам. Разные соединения концов одних и тех же атомов могут приводить к разным молекулам.

Таблицы к главе 3

Таблица 3.1.

3-атомы малой сложности.


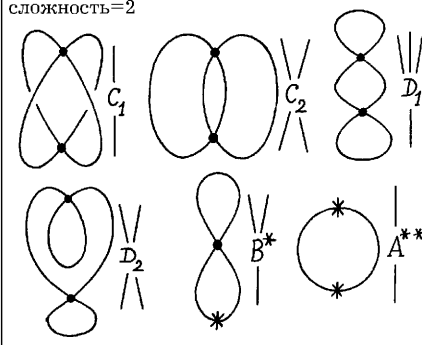
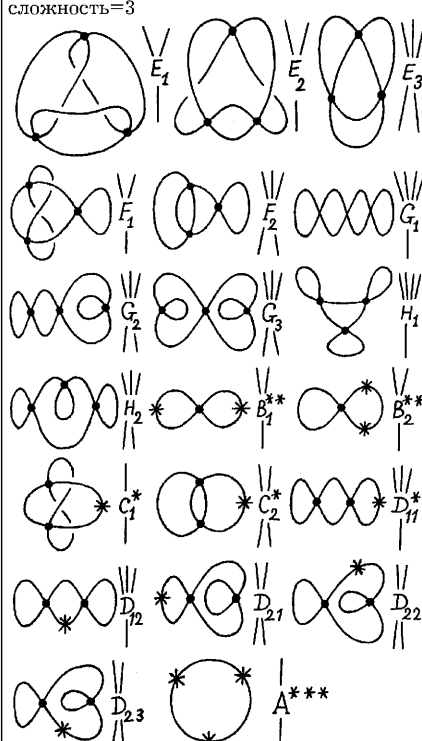
сложность=1 
сложность=2 
сложность=3 

Таблица 3.2.

Список f -графов сложности 1, 2, 3.


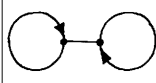


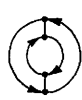
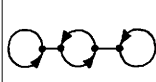

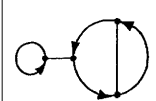
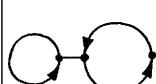


Атом	f -граф	Род	Sym	$\widehat{\text{Sym}}$
A^*		S^2	0	Z_2
B		S^2	Z_2	$Z_2 \oplus Z_2$
B		S^2	Z_2	$Z_2 \oplus Z_2$
C_1		S^2	Z_4	D_4
C_2		S^2	$Z_2 \oplus Z_2$	$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$
D_1		S^2	Z_2	$Z_2 \oplus Z_2$
D_1		S^2	Z_2	$Z_2 \oplus Z_2$
D_2		S^2	0	Z_2
B^*		S^2	0	Z_2
B^*		S^2	0	Z_2
A^{**}		S^2	Z_2	$Z_2 \oplus Z_2$

Таблица 3.2 (продолжение).

Атом	f -граф	Род	Sym	$\widehat{\text{Sym}}$	Атом	f -граф	Род	Sym	$\widehat{\text{Sym}}$
E_1		T^2	\mathbb{Z}_6	$D_3 \oplus \mathbb{Z}_2 = D_6$	G_1		S^2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
E_1		T^2	\mathbb{Z}_6	$D_3 \oplus \mathbb{Z}_2 = D_6$	G_2		S^2	0	\mathbb{Z}_2
E_2		T^2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	G_2		S^2	0	\mathbb{Z}_2
E_2		T^2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	G_3		S^2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
E_3		S^2	D_3	$D_3 \oplus \mathbb{Z}_2 = D_6$	G_3		S^2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
E_3		S^2	D_3	$D_3 \oplus \mathbb{Z}_2 = D_6$	H_1		S^2	\mathbb{Z}_3	D_3
F_1		T^2	0	\mathbb{Z}_2	H_1		S^2	\mathbb{Z}_3	D_3
F_1		T^2	0	\mathbb{Z}_2	H_2		S^2	0	\mathbb{Z}_2
F_2		S^2	0	\mathbb{Z}_2	H_2		S^2	0	\mathbb{Z}_2
F_2		S^2	0	\mathbb{Z}_2	B_1^{**}		S^2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
G_1		S^2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	B_1^{**}		S^2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
					B_2^{**}		S^2	0	\mathbb{Z}_2

Атом	f -граф	Род	Sym	$\widehat{\text{Sym}}$
$\begin{array}{c} \vee \\ B_2^{**} \\ \end{array}$		S^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \\ C_1^* \\ \end{array}$		T^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \vee \\ C_2^* \\ \wedge \end{array}$		S^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \\ D_{11}^* \\ \wedge \end{array}$		S^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \vee \\ D_{11}^* \\ \end{array}$		S^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \\ D_{12}^* \\ \wedge \end{array}$		S^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \vee \\ D_{12}^* \\ \end{array}$		S^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \vee \\ D_{21}^* \\ \wedge \end{array}$		S^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \vee \\ D_{21}^* \\ \wedge \end{array}$		S^2	0	\mathbb{Z}_2
$\begin{array}{c} \vee \\ D_{22}^* \\ \wedge \end{array}$		S^2	0	0
$\begin{array}{c} \vee \\ D_{23}^* \\ \wedge \end{array}$		S^2	0	0
$\begin{array}{c} \\ A^{***} \\ \end{array}$		S^2	\mathbb{Z}_3	D_3

Конец списка f -графов сложности 1, 2, 3.

Таблица 3.3.
Число молекул сложности (m, n) при $m \leq 4$.

≥ 6	0	0	0	0
6	0	0	0	54
5	0	0	0	247
4	0	0	11	530
3	0	5	24	561
2	0	10	24	128
1	1	3	2	8
n/m	1	2	3	4

Таблица 3.4.
Молекулы сложности (m, n) при $m \leq 2$.

$n > 3$						
$n = 3$						
$n = 2$						
$n = 1$						
	$m = 1$		$m = 2$			

ГЛАВА 4

Лиувиллева эквивалентность интегрируемых систем с двумя степенями свободы

Наступил момент уточнить определение лиувиллевой эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем. В этой главе мы будем считать, что две интегрируемые системы (v, Q^3) и (v', Q'^3) лиувиллево эквивалентны (т.е. имеют одинаковые слоения Лиувилля), если существует послойный диффеоморфизм $Q^3 \rightarrow Q'^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q и Q' и ориентации всех критических окружностей. Напомним, что мы рассматриваем гамильтоновы системы, обладающие боттовскими интегралами. Критические окружности этих интегралов являются замкнутыми траекториями системы и имеют поэтому естественную ориентацию.

4.1. Допустимые системы координат на границе 3-атома

Молекула W содержит много существенной информации о структуре слоения Лиувилля на Q^3 . Однако, эта информация не достаточно полна. Действительно, молекула вида $A \text{---} A$, например, сообщает нам, что многообразие Q^3 склеено из двух полноторий, расслоенных естественным образом на концентрические торы. Однако, каким образом проведена эта склейка, какое в результате получается трехмерное многообразие, и какое слоение Лиувилля на нем — не сообщается. Поэтому мы должны добавить к молекуле W некоторую дополнительную информацию о правилах склейки изознергетической поверхности Q^3 из отдельных 3-атомов.

Чтобы это сделать, разрежем каждое ребро молекулы посередине. Молекула снова распадется на отдельные атомы. С точки зрения многообразия Q^3 это операция означает, что мы разрезали его по некоторым торам Лиувилля на отдельные 3-атомы. Представим себе, что мы хотим произвести обратную склейку. Молекула W говорит нам, какие пары граничных торов мы должны склеивать между собой. Чтобы понять, как именно их нужно склеивать, мы должны задать для каждого разрезанного ребра матрицу склейки C , определяющую изоморфизм фундаментальных групп склеивающихся торов. Чтобы задать эту матрицу, мы должны фиксировать на торах системы координат. Как обычно, под системой координат на торе мы будем понимать пару независимых ориентированных циклов (λ, μ) , являющихся образующими фундаментальной группы $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (или, что в данном случае то же самое, группы одномерных гомологий). Геометрически это попросту означает, что циклы λ и μ нетривиальны и трансверсально пересекаются ровно в одной точке.

Рассмотрим теперь отдельный атом и введем на его граничных торах специальную систему координат, называемую допустимой.

Случай 1. Пусть 3-атом имеет тип A , т. е. является полноторием. Тогда в качестве первого базисного цикла λ мы возьмем меридиан полнотория, т. е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория. В качестве второго цикла μ мы возьмем произвольный цикл, дополняющий λ до базиса. Отметим, что μ можно считать слоем расслоения Зейферта (рис. 4.1). Поясним, что на полнотории структура расслоения Зейферта определена неоднозначно.

Напомним, что слои расслоения Зейферта имеют естественную ориентацию, задаваемую гамильтоновым векторным полем. Говоря точнее, только один из этих слоев является траекторией рассматриваемого гамильтонова векторного поля, а именно — критическая окружность дополнительного интеграла f , ось полнотория. Но ориентация этого слоя позволяет однозначно определить ориентацию на цикле μ .

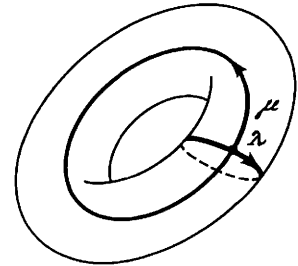


Рис. 4.1

Кроме того, мы имеем ориентацию на всем 3-атоме, а, следовательно, и на его граничном торе. Поэтому мы можем однозначно определить ориентацию и первого базисного цикла λ , потребовав, чтобы пара (λ, μ) была положительно ориентирована. Легко видеть, что этими условиями цикл λ будет определен однозначно, в то время как цикл μ будет определен с точностью до замен вида $\mu' = \mu + k\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лемма 4.1. Пусть (λ, μ) — допустимая система координат на границе атома A , т. е. полнотория. Для того, чтобы другая система координат (λ', μ') была допустимой необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda, \\ \mu' &= \mu + k\lambda, \quad \text{где } k \text{ — целое число.} \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство.

Цикл λ , очевидно, определен однозначно, с точностью до изотопии, поскольку он является исчезающим циклом полнотория, т. е. стягивается в точку. См. рис. 4.1. Второе соотношение следует из определения цикла μ . Лемма доказана. ■

Тем не менее все допустимые системы координат будут абсолютно равноправны, так как могут быть переведены друг в друга с помощью подходящего гомеоморфизма полнотория на себя, сохраняющего ориентацию как всего полнотория, так и особой траектории — оси полнотория.

Лемма 4.2.

- а) Любые две допустимые системы координат (λ, μ) и (λ', μ') на границе атома A могут быть совмещены посредством подходящего диффеоморфизма атома A на себя, сохраняющего структуру слоения Лиувилля.
- б) Обратно, любой диффеоморфизм атома A на себя, сохраняющий слоение Лиувилля, переводит допустимую систему координат (λ, μ) в другую допустимую систему координат (λ', μ') .

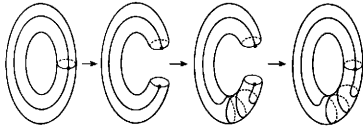


Рис. 4.2

два получившихся берега разреза при помощи поворота диска на угол, кратный 2π . Такая операция называется скручиванием полнотория вдоль данного диска (рис. 4.2). Отсюда, очевидно, вытекает утверждение леммы. ■

Доказательство.

Любой автоморфизм атома A , т.е. диффеоморфизм полнотория на себя, сохраняющий структуру слоения Лиувилля, устроен так. Нужно разрезать полноторие по меридиональному диску (рис. 4.2) и снова отождествить

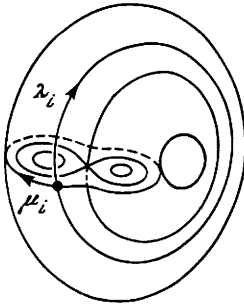


Рис. 4.3

Случай 2. Пусть 3-атом $U(L)$ является седловым и имеет структуру тривиального S^1 -расслоения над поверхностью (2-атомом) P . В этом случае в качестве первого базисного цикла λ_i на каждом из граничных торов T_i мы возьмем слой этого расслоения. Дополнительные циклы μ_i мы выберем следующим образом. Рассмотрим произвольное сечение $P \subset U(L)$. Оно высекает на каждом граничном торе T_i некоторый цикл μ_i , который мы и возьмем в качестве второго базисного цикла на T_i (рис. 4.3). Отметим, что на каждом отдельном граничном торе T_i мы можем выбирать μ_i произвольно, однако в совокупности они должны быть связаны условием существования глобального сечения $P \subset U(L)$, проходящего через них. Ориентация

на базисных циклах выбирается однозначно так же, как в предыдущем случае. Две различные совокупности допустимых систем координат $\{(\lambda_i, \mu_i)\}$ и $\{(\lambda'_i, \mu'_i)\}$ будут при этом связаны следующими соотношениями

$$\begin{cases} \lambda'_i = \lambda_i, \\ \mu'_i = \mu_i + k_i \lambda_i, \end{cases}$$

причем $\sum k_i = 0$. Доказательство см. ниже.

Это связано с тем, что сечение $P \subset U(L)$ может быть определено многими существенно неэквивалентными способами.

Случай 3. Рассмотрим, наконец, последний случай, когда 3-атом $U(L)$ содержит седловые критические окружности с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами и имеет поэтому нетривиальную структуру расслоения Зейферта. В этом случае, как и в предыдущем, мы в качестве первых базисных циклов λ_i возьмем слой расслоения Зейферта. Далее нам также хотелось бы поступать аналогично, но к сожалению из-за наличия особых слоев это расслоение не имеет глобального сечения такого, чтобы каждый слой пересекал его ровно один раз. Однако мы можем всегда построить такое сечение, удалив малые окрестности особых слоев. Нам понадобится при этом каким-нибудь естественным образом закрепить это сечение вблизи особого слоя. Оказывается, это действительно можно сделать. Рассмотрим для этого трубчатую окрестность особого слоя и ее гра-

ницу, являющуюся тором. На этом торе уже есть два однозначно определенных цикла: первый из них — это слой λ расслоения Зейферта, а второй — меридиан этого полнотория \varkappa , стягивающийся в точку внутри полнотория. Этот второй цикл \varkappa мы ориентируем так, чтобы в совокупности эти циклы образовывали положительно ориентированную пару (λ, \varkappa) , не являющуюся однако базисом, поскольку рассматриваемые циклы имеют две точки пересечения. Теперь, имея пару фиксированных ориентированных циклов, мы можем определить еще один цикл μ , дополняющий λ до базиса и являющийся поэтому сечением расслоения Зейферта на рассматриваемом торе. Мы определим его однозначно из соотношения (рис. 4.4)

$$\lambda = \varkappa - 2\mu.$$

Вернемся теперь к 3-атому $U(L)$ в целом. Удалим из него трубчатые окрестности особых слоев. В результате мы получим некоторое новое многообразие со структурой тривиального S^1 -расслоения, край которого увеличился на несколько новых торов. На каждом из этих торов мы однозначно определили цикл μ . Рассмотрим теперь сечения \hat{P} этого тривиального расслоения, высекающие на новых торах циклы μ . Этим условием мы закрепили сечение вблизи особого слоя. Вдали от особого слоя оно может быть совершенно произвольным. Такие сечения \hat{P} мы будем называть допустимыми. Теперь, как и в случае 2, в качестве циклов μ_i на торах T_i мы возьмем циклы, высекаемые построенным сечением. Две допустимые системы координат, отвечающие различным сечениям, будут связаны в точности теми же соотношениями, что и в случае 2. Отметим, что с топологической точки зрения поверхность \hat{P} представляет собой базу расслоения Зейферта, из которой удалены малые окрестности особых точек.

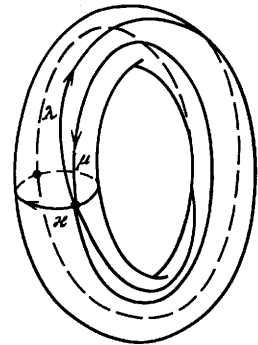


Рис. 4.4

Для дальнейшего нам потребуется другой способ описания допустимой системы координат на граничных торах седловых 3-атомов из случая 3, т. е. с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами. Идея состоит в следующем. Оказывается, можно очень естественным способом построить циклы допустимой системы координат, используя для этого дубль \hat{P} базы расслоения Зейферта (см. выше). Мы будем пользоваться тем, что расслоение Зейферта в случае 3 обладает «удвоенным» сечением, то есть в него можно вложить поверхность \hat{P} так, что любой неособый слой расслоения Зейферта пересекает \hat{P} ровно в двух точках, а особый слой — в одной. Такое вложение определяет естественную инволюцию $\tau: \hat{P} \rightarrow \hat{P}$ такую, что база P слоения Зейферта является фактор-пространством $P = \hat{P}/\tau$. См. рис. 4.5(a,b). В реальных примерах такое сечение часто можно построить явно.

Рассмотрим вложенный дубль $\hat{P} \subset U(L)$ и его границу $\partial\hat{P} = \hat{P} \cap \partial U(L)$. Пусть $\hat{\mu}_i = \hat{P} \cap T_i$ — часть границы $\partial\hat{P}$, лежащая на торе $T_i \subset \partial U(L)$.

Возможны два случая. Первая возможность состоит в том, что $\hat{\mu}_i$ представляет собой объединение двух отдельных циклов, каждый из которых пересекается со слоем λ_i расслоения Зейферта в одной точке и, следовательно, является

сечением расслоения Зейферта на граничном торе T_i . Во втором случае $\hat{\mu}_i$ является связным циклом, имеющим индекс пересечения 2 со слоем λ .

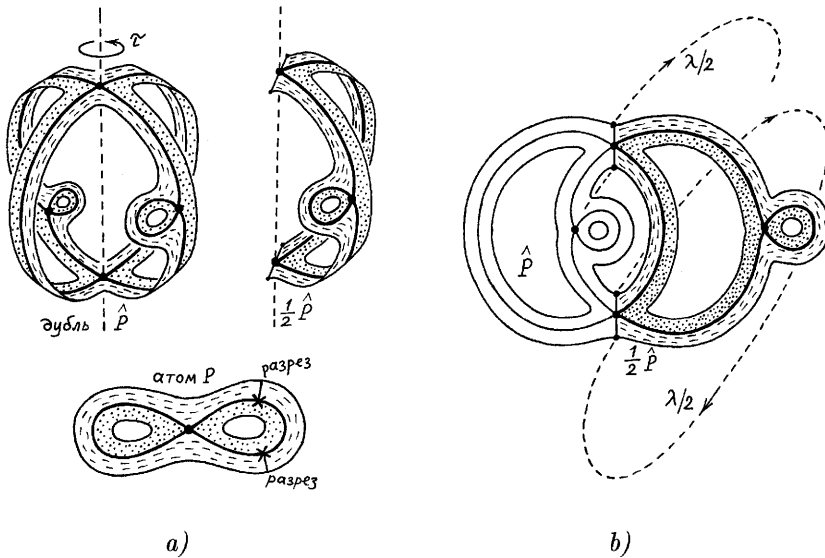


Рис. 4.5

Попытаемся построить из циклов $\hat{\mu}_i$ нужные нам циклы μ_i допустимой системы координат. Можно поступить, например, следующим образом. В первом случае в качестве цикла μ_i просто взять одну из связных компонент $\hat{\mu}_i$, а во втором положить $\mu_i = \frac{1}{2}(\hat{\mu}_i + \lambda_i)$. Локально на каждом граничном торе построенные циклы μ_i будут полностью удовлетворять требуемым свойствам, т. е. будут настоящими сечениями расслоения Зейферта на каждом из граничных торов. Однако, в целом эта конструкция может отличаться от описанного выше способа построения допустимой системы координат. Чтобы оба способа построения циклов μ_i были эквивалентны между собой, один из этих циклов нужно подправить, добавив к нему цикл кратный слою λ . При этом кратность должна выбираться так, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\sum_i \mu_i = \frac{1}{2} \left(\sum_i \hat{\mu}_i + s\lambda \right) = \frac{\partial \hat{P} + s\lambda}{2},$$

где s — число критических окружностей в $U(L)$ с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами.

КОММЕНТАРИЙ. Это соотношение имеет естественный гомологический смысл, который заключается в следующем. Удалим из $U(L)$ малые окрестности особых слоев и рассмотрим в получившемся трехмерном многообразии $\dot{U}(L)$ две вложенные поверхности \hat{P} и \tilde{P} , где \hat{P} — настоящее сечение расслоения Зейферта, которое мы использовали при первом способе построения допустимой системы координат, а \tilde{P} — вложенный дубль. Напомним, что $\mu_i = \hat{P} \cap T_i$ и $\hat{\mu}_i = \tilde{P} \cap T_i$.

Характер поведения поверхностей \hat{P} и \widehat{P} вблизи особого слоя описывается использованным выше соотношением $\lambda = \varkappa - 2\mu$, где μ — цикл, высекаемый поверхностью \hat{P} , \varkappa — цикл, высекаемый поверхностью \widehat{P} . Учитывая это равенство, легко увидеть, что обсуждаемое соотношение эквивалентно следующему:

$$\partial\hat{P} = \frac{1}{2}\partial\widehat{P}.$$

С топологической точки зрения это соотношение, в частности, означает, что индекс пересечения $\partial\hat{P}$ и $\partial\widehat{P}$ на границе $\partial\dot{U}(L)$ равен нулю. Это условие должно, разумеется, выполняться (см. ниже рис. 4.6 и комментарий к нему).

Перейдем теперь к следующему вопросу. Как связаны друг с другом различные допустимые системы координат? Следующая лемма дает ответ. Она справедлива как для случая 2, так и для случая 3.

Лемма 4.3. Пусть (λ_i, μ_i) — допустимая система координат на граничных торах T_i седлового атома с ориентируемыми или неориентируемыми сепаратрисными диаграммами критических окружностей. Для того, чтобы другая система координат (λ'_i, μ'_i) на этих же торах была допустимой, необходимо и достаточно, чтобы для всех i выполнялись соотношения:

$$\begin{cases} \lambda'_i = \lambda_i, \\ \mu'_i = \mu_i + k_i \lambda_i, \end{cases}$$

где k_i — целые числа такие, что $\sum_i k_i = 0$.

Доказательство.

Пусть даны две допустимые системы координат. Докажем, что они удовлетворяют указанным соотношениям. Первое равенство очевидно, поскольку λ_i — однозначно определенный на 3-атоме слой расслоения Зейферта. Соотношение $\mu'_i = \mu_i + k_i \lambda_i$ тоже очевидно, и в доказательстве нуждается лишь равенство: $\sum_i k_i = 0$. Рассмотрим два произвольных допустимых сечения 3-атома P и P' . Напомним, что для атома без звездочек любое сечение является допустимым, а для атомов со звездочками определение допустимого сечения было дано выше. Оба сечения высекают на границе 3-атома два набора циклов: $\{\mu_i\}$ и $\{\mu'_i\}$, дополняющих циклы $\{\lambda_i\}$ и $\{\lambda'_i\}$ (соответственно) до допустимых систем координат на граничных торах. Целые числа k_i можно теперь интерпретировать как индексы пересечения циклов μ_i и μ'_i , а их сумму $\sum_i k_i$ — как общий индекс пересечения границ двух площадок P и P' . Напомним, что в атомах со звездочками мы удалили трубчатые окрестности особых слоев, на границах которых две площадки P и P' совпадают с точностью до изотопии. Это означает, что такие торы не дают никакого вклада в общий индекс пересечения границ двух площадок. Напомним теперь следующий факт из трехмерной топологии.

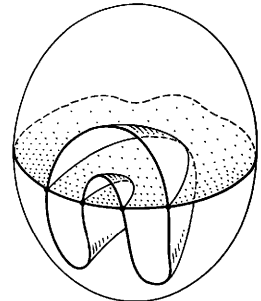


Рис. 4.6

Пусть две ориентируемые поверхности P и P' лежат внутри ориентируемого 3-многообразия U с краем ∂U , причем ∂P и $\partial P'$ лежат в ∂U и являются двумя гладкими кривыми. Тогда индекс пересечения этих кривых ∂P и $\partial P'$ всегда равен нулю. См. рис. 4.6.

Применяя эту лемму в нашем случае, мы сразу получаем, что $\sum_i k_i$ равна нулю, поскольку она является индексом пересечения ∂P и $\partial P'$.

Докажем теперь обратное. Пусть дана какая-то допустимая система координат (λ_i, μ_i) и система циклов (λ'_i, μ'_i) , задаваемая при помощи формул (1). Докажем, что эти циклы образуют допустимую систему координат. Достаточно показать, что существует допустимое сечение P' , высекающее на границе 3-атома циклы $\{\mu'_i\}$.

Мы построим искомое сечение P' из данного нам сечения P путем последовательных шагов, применяя однотипные операции скручивания. Возьмем два разных граничных тора T_i и T_j и соединим их внутри 3-атома простой дугой a , целиком лежащей на сечении P (рис. 4.7(a)). Пусть

$$\pi: U(L) \rightarrow P$$

— проекция расслоения Зейфerta. Рассмотрим полный прообраз $\pi^{-1}(a)$ дуги a . Это — некоторое кольцо в $U(L)$, пересекающее сечение P по дуге a . Разрежем $U(L)$ вдоль кольца $\pi^{-1}(a)$ и скрутим один из берегов разреза на 2π , после чего снова подклеим к другому берегу разреза (рис. 4.7(b)). Мы получим послыйный гомеоморфизм 3-многообразия $U(L)$ на себя, переводящий допустимое сечение P в некоторое другое допустимое сечение P' . Результат показан на рис. 4.7(c). Для этих двух сечений число k_i равно 1, число k_j равно -1 , а все остальные k_s равны нулю. Ясно, что такими операциями можно реализовать любой набор чисел $\{k_i\}$ с нулевой суммой. Лемма 4.3 доказана. ■

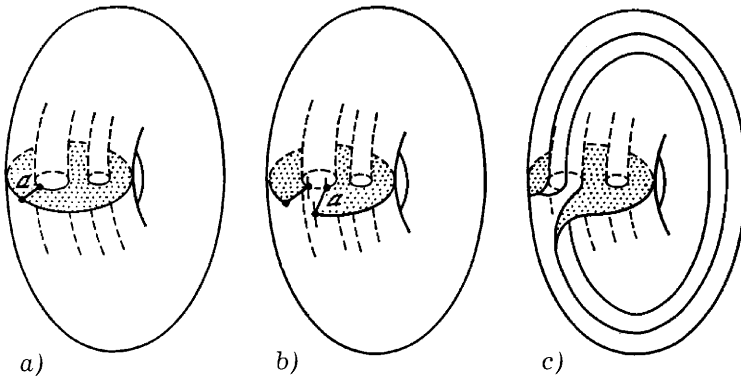


Рис. 4.7

Подчеркнем еще раз принципиально важный момент: все допустимые системы координат на граничных торах совершенно равноправны и, наоборот, все другие, не являющиеся допустимыми, системы координат им неэквивалентны. Говоря здесь о равноправии или эквивалентности систем, мы имеем в виду су-

ществование диффеоморфизма 3-атома на себя, сохраняющего структуру слоения Лиувилля, ориентацию самого атома и ориентацию критических окружностей, в нем содержащихся.

Лемма 4.4.

- а) Любые две допустимые системы координат (λ_i, μ_i) и (λ'_i, μ'_i) на границе седлового атома $U(L)$ могут быть совмещены посредством подходящего диффеоморфизма атома $U(L)$ на себя, сохраняющего структуру слоения Лиувилля.
- б) Обратно, любой диффеоморфизм атома $U(L)$ на себя, сохраняющий слоение Лиувилля, переводит допустимую систему координат (λ_i, μ_i) в другую допустимую систему координат (λ'_i, μ'_i) .

Доказательство.

Лемма вытекает из того факта, что любой автоморфизм седлового атома на себя, сохраняющий слоение Лиувилля, порождается последовательностью описанных выше скручиваний. Другими словами, автоморфизм атома однозначно, с точностью до изотопии, задается образом допустимого сечения P . Лемма доказана. ■

4.2. Матрицы склейки и избыточные оснащения молекулы

Итак, мы определили допустимые системы координат на граничных торах каждого атома. Рассмотрим теперь произвольное ребро e_i молекулы W и зададим на нем некоторую ориентацию, например, по возрастанию функции f . Мы разрежали это ребро вдоль некоторого тора Лиувилля и определили на берегах разреза допустимые системы координат, которые мы обозначим теперь через (λ_i^-, μ_i^-) и (λ_i^+, μ_i^+) . Знак минус отвечает началу ребра, а плюс — его концу. Рассматривая эти пары циклов как базисы в группе одномерных гомологий, мы получаем естественную матрицу склейки

$$C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \lambda_i^+ \\ \mu_i^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i^- \\ \mu_i^- \end{pmatrix}.$$

Ясно, что C_i является целочисленной матрицей с определителем, равным -1 . В остальном эта матрица может быть совершенно произвольной.

Легко видеть, что заданием всех матриц склеек мы полностью определяем топологию лиувиллева слоения в целом. Однако, эти матрицы не определены однозначно, поскольку мы можем делать замены допустимых систем координат. Поэтому мы введем следующее важное понятие.

Определение 4.1. Совокупность всех матриц склеек $\{C_i\}$ мы будем называть *избыточным оснащением* молекулы W .

Рассмотрим теперь произвольную замену допустимых систем координат. Легко видеть, что все такие замены образуют группу, которая естественным образом действует на множестве избыточных оснащений данной молекулы, т. е. на совокупности матриц склеек.

Определение 4.2. Два избыточных оснащения $\{C_i\}$ и $\{C'_i\}$ молекулы W назовем *эквивалентными*, если от одного к другому можно перейти заменой допустимых систем координат на атомах молекулы.

Предложение 4.1. *Две интегрируемые системы v на Q и v' на Q' лиувиллево эквивалентны, если и только если выполнены следующие два условия:*

- 1) Их молекулы W и W' совпадают, т. е. системы грубо лиувиллево эквивалентны.
- 2) Избыточные оснащения на молекуле $W = W'$ эквивалентны.

Комментарий. Это предложение можно переформулировать еще и так. Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между классами лиувиллевой эквивалентности интегрируемых систем и классами эквивалентности избыточных оснащений молекул.

Доказательство.

В одну сторону утверждение очевидно: если две системы лиувиллево эквивалентны, то их молекулы совпадают и их избыточные оснащения эквивалентны. Докажем обратное. Пусть две системы имеют эквивалентные избыточные оснащения на совпадающих молекулах. Тогда, подбирая допустимые замены координат, можно добиться того, что матрицы склеек у двух систем будут совпадать. Совпадение же самих молекул гарантирует, что два слоения Лиувилля склеены из одинаковых кусков, т. е. из одних и тех же 3-атомов. Совпадение матриц склеек означает, что эти куски склеиваются одинаково, что и дает один и тот же результат — одно и то же слоение на одном и том же 3-многообразии. Предложение доказано. ■

После этого предложения 4.1 проблема лиувиллевой классификации интегрируемых систем на изоэнергетических 3-поверхностях сводится к описанию инвариантов избыточных оснащений молекул относительно действия группы замен допустимых систем координат. Эта задача в определенном смысле — уже алгебраическая. Явное действие группы замен допустимых координат на избыточных оснащениях, т. е. на матрицах, задается леммами 4.1 и 4.3. Сейчас мы укажем полную систему инвариантов этого действия.

4.3. Инварианты, числовые метки r , ε , n

Не давая пока полного доказательства, сообщим конечный результат, а именно, опишем полный набор инвариантов действия группы замен. Этими инвариантами будут некоторые числовые метки, которые вычисляются явно через матрицы C_i и обладают тем свойством, что, зная их, можно однозначно восстановить все матрицы склейки с точностью до замены допустимой системы координат.

4.3.1. Метки r_i и ε_i

Сопоставим матрице C_i следующие две числовые метки.

Определение 4.3. Числовой рациональной меткой r_i на ребре e_i молекулы W называется:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{символ } \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Определение 4.4. Числовой целочисленной меткой ε_i на ребре e_i молекулы W называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Лемма 4.5. Метки r_i и ε_i являются инвариантами действия группы замен допустимых систем координат на множестве всех избыточных оснащений, т. е. матриц C_i .

Доказательство.

Легко видеть, что каждая матрица C_i при замене допустимых координат преобразуется по следующему правилу

$$C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \rightarrow C'_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_i^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_i^- & 1 \end{pmatrix},$$

где k_i^+ и k_i^- — некоторые целые числа. Отсюда видно, что

$$C'_i = \begin{pmatrix} \alpha_i + k_i^- \beta_i & \beta_i \\ \gamma_i + k_i^- \delta_i - k_i^+ \alpha_i - k_i^+ k_i^- \beta_i & \delta_i - k_i^+ \beta_i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, при допустимых заменах указанные метки действительно не меняются. Лемма доказана. ■

4.3.2. Метки n_k и семьи в молекуле

Метка n может определяться несколькими слегка различными способами. Эта ситуация хорошо известна в теории инвариантов. Инвариант можно выбирать неоднозначно и его конкретный выбор диктуется спецификой задачи. Поэтому все определения метки n в принципе эквивалентны, и каждый способ удобен для определенного класса задач. Мы выберем в качестве основного определения ту форму, которая наиболее удобна для построения общей теории. Позже мы дадим еще одно определение метки n и укажем явную формулу, связывающую эти две метки.

Назовем бесконечным ребром молекулы ребро с меткой r_i , равной ∞ . Остальные ребра будем называть конечными. Разрежем молекулу по всем конечным ребрам. В результате молекула распадется на некоторое число связанных кусков.

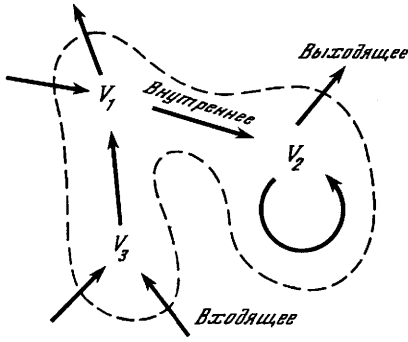


Рис. 4.8

Определение 4.5. Мы будем называть *семьями* те из них, которые не содержат атомов A .

Например, если все ребра молекулы конечны, то каждый ее седловой атом является по определению семьей.

Рассмотрим отдельную семью. Все ее ребра можно разделить на три класса: входящие, выходящие и внутренние (см. рис. 4.8).

Определение 4.6. Сопоставим каждому из этих ребер e_i целое число Θ_i по следующему правилу:

$$\Theta_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}, & \text{если } e_i \text{ — выходящее ребро,} \\ \begin{bmatrix} -\delta_i \\ \beta_i \end{bmatrix}, & \text{если } e_i \text{ — входящее ребро,} \\ \begin{bmatrix} -\gamma_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}, & \text{если } e_i \text{ — внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Определим теперь для каждой семьи целое число, полагая

$$n_k = \sum \Theta_i,$$

где сумма берется по всем ребрам данной семьи, а k — номер семьи. Отметим, что n_k — всегда целое число, так как для внутреннего ребра всегда имеем: $|\alpha_i| = 1$, поскольку здесь $\beta_i = 0$. Напомним, что на внутренних ребрах метка r_i равна бесконечности.

Лемма 4.6. Число n_k не меняется при заменах допустимых систем координат.

Доказательство.

Грубо говоря, дело в том, что числа Θ_i подобраны таким образом, чтобы каждое из них менялось по простому правилу

$$\Theta_i \rightarrow \Theta'_i = \Theta_i + k_i.$$

Но сумма чисел k_i по всем ребрам, выходящим и входящим в некоторый атом, равна нулю (см. выше формулы для замены допустимой системы координат на атоме). Это и приводит к инвариантности числа n_k .

Проверим теперь утверждение леммы прямым вычислением. Посмотрим как меняются числа Θ_i при заменах допустимых систем координат. Используя явный вид формул преобразования матрицы C_i , получаем

$$\Theta'_i = \begin{cases} \Theta_i + k_i^-, & \text{если } e_i \text{ — выходящее ребро,} \\ \Theta_i + k_i^+, & \text{если } e_i \text{ — входящее ребро,} \\ \Theta_i + k_i^- + k_i^+, & \text{если } e_i \text{ — внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Беря сумму по всем ребрам данной семьи, мы видим, что метка n изменяется на сумму всех чисел k_s , где индекс s нумерует все граничные торы всех атомов, входящих в данную семью. Складывая все Θ'_i , мы суммируем числа k_s , которые можно сгруппировать по каждому атому в семье. Но для каждого атома сумма чисел k_s равна нулю. См. выше лемму 4.3. Таким образом, $\sum_i \Theta'_i = \sum_i \Theta_i$, что и требовалось. Лемма доказана. ■

Метка n допускает интересную топологическую интерпретацию. В некотором смысле она описывает препятствие к распространению сечения с границы семьи внутрь семьи. Дело в том, что семья имеет естественную структуру расслоения Зейферта. Действительно, определение семьи в точности означает, что мы склеиваем два соседних седловых атома по граничному тору в одну семью тогда и только тогда, когда расслоения Зейферта на этом торе, пришедшие из этих двух атомов, совпадают и, следовательно, допускают продолжение на всю семью.

На каждом граничном торе семьи имеется внешний цикл типа μ , пришедший сюда из наружных, т.е. не входящих в семью атомов. Каждый такой внешний цикл μ пересекает трансверсально слои расслоения Зейферта на граничном торе, т.е. определяет многозначное сечение расслоения Зейферта на границе семьи. Грубо говоря, при попытке продолжить это многозначное сечение внутрь семьи возникает некоторое препятствие. Оно и определяется целым числом n . Мы не будем здесь обсуждать это представление числа n более детально, так как в дальнейшем оно нам не потребуется. Но отметим, что в том частном случае, когда вся молекула W является одной семьей, а ее атомы не имеют звездочек, расслоение Зейферта имеет естественно определенный эйлеров класс, который и задается целым числом n .

4.4. Меченая молекула — полный инвариант лиувиллевой эквивалентности

Определение 4.7. Молекула W , снабженная метками r_i , ε_i и n_k , называется *меченой молекулой* или *инвариантом Фоменко–Цишанга*. Меченую молекулу мы будем обозначать через

$$W^* = (W, r_i, \varepsilon_i, n_k).$$

Одним из основных результатов теории лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы является следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Набор меток r , ε , n является полным набором инвариантов действия группы замен допустимых координат на избыточных оснащениях, т.е. на матрицах C_i молекулы W . Другими словами, два избыточных оснащения молекулы W эквивалентны тогда и только тогда, когда их наборы меток r , ε , n совпадают.*

Доказательство.

Пусть $\{C_i\}$ и $\{C'_i\}$ — два избыточных оснащения с одинаковыми наборами инвариантов r , ε , n . Заметим прежде всего, что этот набор однозначно определя-

ет разбиение молекулы W на семьи, поскольку метки r однозначно определяют конечные и бесконечные ребра молекулы. Рассмотрим отдельную семью Y . На каждом ребре этой семьи с помощью избыточных оснащений $\{C_i\}$ и $\{C'_i\}$ мы можем задать целые числа Θ_i и Θ'_i по формуле из определения 4.6.

Рассмотрим на каждом ребре данной молекулы разность $\Theta'_i - \Theta_i$. Поскольку метка n для рассматриваемых оснащений одна и та же, то $\sum(\Theta'_i - \Theta_i) = 0$. Рассмотрим граничные торы всех атомов, входящих в данную семью. Поставим в соответствие каждому из этих торов целое число по следующему правилу. Если тор соответствует внешнему ребру e_i , входящему или выходящему, мы ставим ему в соответствие число $\Theta'_i - \Theta_i$. Если ребро e_i — внутреннее, то на двух граничных торах T_i^- и T_i^+ , на начале и конце ребра, мы ставим числа k_i^- и k_i^+ так, чтобы $k_i^- + k_i^+ = \Theta'_i - \Theta_i$. Это можно сделать многими способами. Однако, используя условие $\sum(\Theta'_i - \Theta_i) = 0$, мы всегда можем добиться того, чтобы для каждого атома из семьи сумма целых чисел, стоящих на его граничных торах, была равна нулю.

Итак, теперь на граничных торах каждого атома семьи у нас определен набор целых чисел с нулевой суммой, что позволяет сделать замену допустимой системы координат на этом атоме по формуле из леммы 4.3. Сделаем такую замену на каждом атоме семьи. В результате (см. выше формулы преобразования чисел Θ_i) мы добьемся равенства $\Theta'_i = \Theta_i$ на всех ребрах рассматриваемой семьи.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Замены систем координат на атомах фиксированной семьи никак не влияют на числа Θ_i , заданные на других семьях. Таким образом, мы можем независимо провести описанную процедуру для каждой семьи по отдельности.

Более того, ту же самую процедуру мы можем провести не только на семьях, но и на всех остальных кусках молекулы, получающихся в результате разрезания ее по конечным ребрам. Для таких кусков мы можем определить числа Θ_i точно по тому же правилу. В случае семьи мы использовали при построении равенство $\sum(\Theta'_i - \Theta_i) = 0$, которое в данном случае отсутствует. Однако, такое равенство легко изготовить искусственным способом. Действительно, рассматриваемый кусок молекулы, не будучи семьей, обязательно содержит атом A . Делая на граничном торе этого атома замену $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu + k\lambda$, мы видим, что число Θ на выходящем из этого атома ребре изменится на k , в то время как все остальные числа Θ_i никак не изменяются. Ясно, что подбирая k подходящим образом, мы добьемся равенства $\sum(\Theta'_i - \Theta_i) = 0$. После этого рассуждения проводятся так же как в случае семьи.

Мы утверждаем, что после сделанных замен все матрицы склейки совпали. Действительно, мы уже добились того, что на всех конечных ребрах имеют место равенства

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_i \\ \beta'_i \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} -\delta_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta'_i \\ \beta'_i \end{bmatrix}.$$

Кроме того, по условию, $\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) \bmod 1 = \left(\frac{\alpha'_i}{\beta'_i}\right) \bmod 1$ и $\text{sign } \beta_i = \text{sign } \beta'_i$. От-

сюда, очевидно, следует, что $\alpha_i = \alpha'_i$ и $\beta_i = \beta'_i$. Таким образом, первые строки матриц C_i и C'_i совпали. Поскольку $\det C'_i = \det C_i = -1$, то их вторые строки могут отличаться лишь на первую строку, взятую с некоторой кратностью. Поэтому из условия $\begin{bmatrix} -\delta_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta'_i \\ \beta'_i \end{bmatrix}$ следует, что они на самом деле тоже совпадают.

Рассмотрим, наконец, бесконечное ребро. В силу совпадения инвариантов r и ε на этом ребре мы сразу видим, что у матриц C_i и C'_i могут различаться лишь элементы γ_i и γ'_i . Однако мы имеем дополнительное условие

$$\Theta_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i} = \Theta'_i = -\frac{\gamma'_i}{\alpha'_i},$$

что гарантирует равенство $\gamma_i = \gamma'_i$.

Итак, в результате сделанных замен допустимых систем координат избыточные оснащения совпали. Предложение доказано. ■

Теперь мы уже можем сформулировать основную теорему этой главы.

Теорема 4.1 (см. [216]). *Две интегрируемые системы (v, Q) и (v', Q') лувицки эквивалентны в том и только в том случае, когда их меченые молекулы W^* и W'^* совпадают.*

Доказательство.

Утверждение теоремы, очевидно, получается комбинацией предложения 4.1 и предложения 4.2. ■

Примеры и методы вычисления молекул мы подробно опишем ниже.

4.5. Влияние ориентаций

Отметим, что при построении меченой молекулы W^* мы использовали ориентации многообразия Q^3 , критических окружностей интеграла f и ребер молекулы. При изменении любой из этих ориентацией меченая молекула W^* будет, вообще говоря, меняться. В этом параграфе мы опишем формальные правила, показывающие, что происходит с меченой молекулой при заменах ориентаций.

4.5.1. Изменение ориентации на ребре молекулы

- а) При таком изменении ориентации матрица склейки C меняется на обратную C^{-1} .
- б) В случае бесконечного ребра метки $r = \infty$ и ε не меняются, в частности, ребро остается бесконечным. В случае конечного ребра метка $r = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \bmod 1$ заменяется на метку $r^* = \left(\frac{\delta}{\beta}\right) \bmod 1$, где δ однозначно определяется из условия $(\alpha\delta - 1) \bmod \beta = 0$. Здесь мы предполагаем, что α и β взаимно просты. Метка ε на ребре не меняется. Поскольку изменения касались матрицы склейки только на одном ребре молекулы, то это никак не затрагивает меток r и ε на всех остальных ребрах.
- в) Инварианты n на семьях молекулы при этом тоже не меняются.

Таким образом, изменение ориентации на ребре молекулы приводит к изменению лишь одной метки r , стоящей на данном ребре. Чтобы не создавать дополнительных сложностей, мы договоримся считать совпадающими две меченые молекулы, полученные друг из друга заменой ориентаций на некоторых ребрах.

4.5.2. Изменение ориентации 3-многообразия Q

- а) на зеркально симметричный. Другими словами, мы должны рассмотреть те же атомы, но заменить их ориентацию на противоположную.
- б) При изменении ориентации изоэнергетической поверхности Q^3 меняются допустимые системы координат. А именно, для седловых атомов — меняется знак второго базисного цикла μ , а для атомов типа A — меняется знак первого базисного цикла λ . В результате на ребрах между двумя седловыми атомами и на ребрах между двумя атомами типа A матрица перехода $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ приобретет вид $C' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix}$. На ребрах между седловым атомом и атомом A матрица C перейдет в $C' = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}$.

Выделим два случая.

- 1) Ребро соединяет атомы одного типа, т.е. либо A с A , либо седло с седлом. Здесь в случае конечного ребра, т.е. когда $\beta \neq 0$, метки r и ε меняют знаки. В случае же бесконечного ребра, т.е. когда $\beta = 0$, метки r и ε не меняются.
- 2) Ребро соединяет атомы разных типов, т.е. атом A с седлом. Здесь в случае конечного ребра метка r меняет знак, а метка ε не меняется. В случае бесконечного ребра наоборот: метка r не меняется (равна бесконечности), а метка ε меняет знак.

Отсюда, кстати, следует, что разбиение молекулы в объединение семей не меняется.

- в) С меткой n происходят следующие события. Предположим для начала, что семья не имеет атомов со звездочками. Тогда при изменении ориентации Q величины $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$, $\frac{\delta_i}{\beta_i}$ и $\frac{\gamma_i}{\alpha_i}$, участвующие в определении n -метки, меняют свои знаки. Это следует из правила преобразования матрицы склейки на ребрах. Учитывая следующую простую формулу:

$$[-x] = \begin{cases} -[x], & \text{если } x \text{ — целое,} \\ -[x] - 1, & \text{если } x \text{ — не целое,} \end{cases}$$

получаем следующую формулу для преобразования метки n при замене ориентации Q^3 :

$$n' = -n - l,$$

где целое число l равно числу тех ребер молекулы W , которые являются внешними ребрами данной семьи и несут на себе дробную (т.е. нецелую) метку r .

Напомним теперь, что седловые атомы могут иметь звездочки. Если на граничных торах были заданы допустимые координаты $\{(\lambda_i, \mu_i)\}$, то они преобразуются следующим образом. Выберем некоторый граничный тор, например, с номером i_0 . Тогда формулы преобразования будут таковы:

$$\lambda'_i = \lambda_i, \mu'_i = -\mu_i \text{ при } i \neq i_0, \text{ а при } i = i_0 \text{ имеем: } \mu'_{i_0} = -\mu_{i_0} - s\lambda_{i_0},$$

где s — число звездочек у данного атома, т.е. число критических окружностей с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами. Это легко следует из определения допустимых координат на атомах со звездочками (см. выше). Если звездочек нет, то $s = 0$. В результате матрицы склейки C также преобразуются, что вызывает изменение меток. Как следствие, метка n преобразуется так:

$$n' = -n - l - \sum s,$$

где сумма величин s берется по всем атомам, входящим в состав данной семьи. Целое число l уже было определено выше.

4.5.3. Изменение ориентации гамильтонова векторного поля

При таком изменении происходит следующее: поток $v = \text{sgrad } H$ заменяется на $-v = \text{sgrad}(-H)$. Поскольку ориентация Q предполагается неизменной, отсюда следует, что все атомы молекулы W должны замениться на зеркально симметричные, а все числовые метки молекулы остаются прежними. Дело в том, что допустимая система координат (λ, μ) заменяется на систему координат $(-\lambda, -\mu)$. В результате все матрицы склеек C не изменились.

4.6. Теорема реализации

Здесь мы обсудим вопрос о том, какие абстрактно заданные молекулы W^* реализуются в виде молекул интегрируемых систем. Дело в том, что меченую молекулу W^* можно задать абстрактно как некий граф, вершинами которого являются атомы, а на ребрах и семьях проставлены произвольные метки r (рациональные числа от 0 до 1, либо ∞), метки $\epsilon = \pm 1$ и метки n (произвольные целые числа). Спрашивается, найдется ли конкретная интегрируемая система $v = \text{sgrad } H$ на подходящей изоэнергетической поверхности Q в подходящем симплектическом 4-многообразии M такая, что ее меченая молекула совпадет с W^* ? Ответ положительный.

Теорема 4.2 (Теорема реализации [30]). *Любая абстрактно заданная меченая молекула W^* реализуется как меченая молекула некоторой интегрируемой гамильтоновой системы.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим молекулу W^* и восстановим по ней соответствующее 3-многообразиие Q^3 . Для этого возьмем все 3-атомы, отвечающие данной молекуле. По набору меток молекулы W^* можно однозначно восстановить избыточное оснащение молекулы, т. е. набор матриц склеек, с точностью до естественного отношения эквивалентности, введенного выше. Пользуясь теперь этими матрицами склеек, склеиваем трехмерное многообразие Q^3 из 3-атомов. На многообразии Q^3 возникает естественная структура слоения типа слоения Лиувилля. Каждый 3-атом имел такую структуру по определению, причем каждый его граничный тор являлся слоем. Поэтому, склеивая атомы между собой, мы естественным образом продолжаем слоение с одного атома на другой. Рассмотрим теперь 4-многообразие $M^4 = Q^3 \times I$, где I — интервал, и естественным образом продолжим на M^4 слоение с Q^3 . Фиксируем на $Q^3 \times I$ некоторую ориентацию. Для завершения доказательства теоремы осталось ввести на M^4 симплектическую структуру так, чтобы получившееся слоение стало лагранжевым.

Шаг 2. Сначала зададим симплектическую структуру на каждом 4-атоме $U \times I$, где U — любой из 3-атомов, входящих в состав молекулы W^* . Будем считать, что все эти 3-атомы уже лежат в Q^3 как подмножества Q^3 . Как мы знаем, с топологической точки зрения многообразие U можем быть одного из двух типов: либо прямое произведение $P^2 \times S^1$, либо косоое произведение $P^2 \tilde{\times} S^1$. В первом случае структура слоения Лиувилля на $P^2 \times S^1$ фактически задается функцией Морса на поверхности P^2 . А именно, если x и y — координаты на P^2 , а φ — координата на слое-окружности, то функция $f(x, y, \varphi)$ на самом деле от φ не зависит. Пусть t — координата на интервале I . Тогда симплектическую структуру на 4-атоме $U \times I$ можно задать следующей явной формулой:

$$\Omega = \omega(x, y) + d\varphi \wedge dt,$$

где $\omega(x, y)$ — симплектическая структура на P^2 , выбранная так, чтобы ориентация на $U \times I$, задаваемая формой Ω , совпадала с фиксированной заранее ориентацией на M^4 .

В случае же косоого произведения $P^2 \tilde{\times} S^1$ 3-атом U является результатом склейки двух оснований прямого произведения $P^2 \times [0, 2\pi]$ по инволюции $\tau: P^2 \rightarrow P^2$, сохраняющей функцию $f(x, y)$ на поверхности P^2 . В этом случае симплектическая структура на $U \times I$ задается той же самой формулой

$$\Omega = \omega(x, y) + d\varphi \wedge dt,$$

где φ — координата на отрезке $[0, 2\pi]$, а t — координата на интервале I . Симплектическая структура $\omega(x, y)$ должна быть инвариантна относительно инволюции τ . Такая форма ω всегда существует. Достаточно взять форму вида $\omega = \alpha + \tau^*\alpha$, где α — любая невырожденная 2-форма на P^2 . В силу инвариантности ω построенная нами форма Ω корректно определена на всем $U \times I$, хотя для ее записи мы первоначально использовали локальные координаты x, y, φ .

В итоге мы построили симплектическую структуру в окрестности каждого особого слоя слоения Лиувилля. Нам осталось продолжить ее на ту часть 4-многообразия M^4 , которая соответствует ребрам молекулы W , т. е. на семейства

вида $T^2 \times E \times I$. Здесь интервалы E отвечают ребрам молекулы, т. е. однопараметрическим семействам торов Лиувилля T^2 . Эти семейства получаются из Q^3 выбрасыванием из него (окрестностей) особых слоев слоения Лиувилля.

Шаг 3. Теперь нужно сшить симплектические структуры, построенные нами на отдельных 4-атомах $U \times I$. Из сказанного выше вытекает, что симплектическая структура уже задана на той части прямого произведения $T^2 \times E \times I$, которая отвечает окрестностям концевых точек интервала E (рис. 4.9).

Лемма 4.7 (Лемма о сшивании симплектических структур).

Пусть $X = T^2 \times [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ — двухпараметрическое семейство торов Лиувилля, и пусть на $X_a = T^2 \times [a, a + \delta] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ и на $X_b = T^2 \times [b - \delta, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ уже заданы две симплектические структуры Ω_1 и Ω_2 , относительно которых имеющиеся здесь слоения на 2-торы являются лагранжевыми. Пусть ориентации на $T^2 \times [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, задаваемые формами Ω_1 и Ω_2 , одинаковы. Тогда на всем семействе $T^2 \times [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ существует симплектическая структура Ω , ограничения которой на две указанные области совпадают с Ω_1 и Ω_2 , и для которой слоение на 2-торы на всем $T^2 \times [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ тоже является лагранжевым.

Доказательство.

Фиксируем базис на торе T^2 из рассматриваемого семейства и распространим этот базис на каждый тор из этого семейства (по непрерывности). Согласно теореме Лиувилля, на двух подобластях X_a и X_b существуют переменные действие-угол $s_1, s_2, \varphi_1, \varphi_2$, отвечающие фиксированному базису на торах. Поскольку на всех торах определен один и тот же базис, мы можем гладким образом продолжить координаты φ_1 и φ_2 на все торы семейства X . Таких способов продолжения, конечно, много. Выберем и зафиксируем один из них.

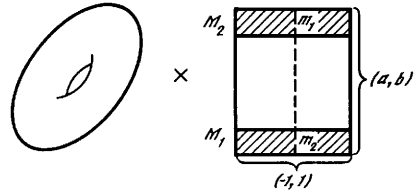


Рис. 4.9

Распространим теперь и функции s_1 и s_2 на все семейство X . Поскольку функции s_1 и s_2 должны быть постоянны на 2-торах, то в действительности их достаточно определить как функции на двумерном семействе параметров, т. е. на прямоугольнике $[a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Следовательно, задача сводится к следующей. Нужно продолжить уже имеющееся отображение двух полосок (рис. 4.9) в плоскость до отображения, заданного уже на всем прямоугольнике. Искомое отображение не должно иметь особенностей и должно быть погружением прямоугольника в плоскость (рис. 4.10). Это можно сделать, поскольку знаки якобианов двух отображений, заданных на двух полосках, совпадают. Это условие, как нетрудно видеть, в точности эквивалентно тому, что симплектические структуры Ω_1 и Ω_2 задают одинаковую ориентацию.

Мы получаем, таким образом, погружение прямоугольника $[a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ в плоскость с координатами s_1 и s_2 . В результате s_1 и s_2 мы можем рассматривать в каждой точке как регулярные координаты и определить симплектическую структуру Ω на всем семействе X естественной формулой

$$\Omega = ds_1 \wedge d\varphi_1 + ds_2 \wedge d\varphi_2.$$

Эта форма, очевидно, удовлетворяет всем необходимым требованиям. Лемма 4.7 доказана. ■

Шаг 4. Итак, с помощью леммы о сшивании мы можем построить симплектическую структуру в целом на многообразии $M^4 = Q^3 \times I$ таким образом, чтобы имеющееся на нем слоение стало лагранжевым. Теперь для построения искомой гамильтоновой системы достаточно в качестве гамильтониана H взять параметр t на интервале I . Меченая молекула, отвечающая изознергетической поверхности, по построению совпадает с W^* , что и требовалось.

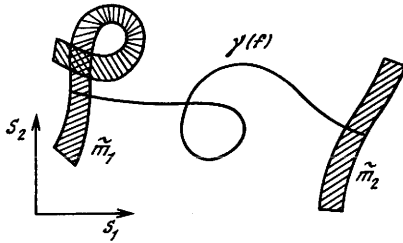


Рис. 4.10

Замечание. Построенная система на самом деле является резонансной в окрестности сингулярных слоев. Чтобы устранить этот недостаток, нам достаточно слегка возмутить построенную систему, например, следующим образом

$$H \rightarrow H + \epsilon f,$$

где f — произвольная функция, постоянная на слоях. Ясно, что сколь угодно малым возмущением такого вида можно сделать систему нерезонансной, не меняя при этом топологии изознергетической поверхности и отвечающего ей слоения Лиувилля, т. е. молекулы W^* .

Это замечание завершает доказательство теоремы реализации. ■

Это замечание завершает доказательство теоремы реализации. ■

Таким образом, теоремы 4.1 и 4.2 дают полную лиувиллеву классификацию всех интегрируемых гамильтоновых систем указанного выше типа.

Следствие.

- 1) Имеется взаимно-однозначное соответствие между классами лиувиллевой эквивалентности интегрируемых систем и мечеными молекулами. В частности, множество классов лиувиллевой эквивалентности интегрируемых систем дискретно (счетно), т. е. не имеет непрерывных параметров.
- 2) Имеется алгоритм перечисления всех меченых молекул, т. е. классов интегрируемых систем.
- 3) Имеется алгоритм сравнения меченых молекул, т. е. алгоритм ответа на вопрос: являются ли две соответствующие им интегрируемые системы лиувиллево эквивалентны или нет.

Алгоритмы перечисления и сравнения молекул W без меток были уже описаны выше. Здесь следует лишь добавить рациональные и целочисленные метки, являющиеся дополнительными счетными параметрами.

4.7. Простые примеры молекул

Предложение 4.3.

- 1) Молекула A — всегда задает 3-многообразие, склеенное из двух полноторий. Каждое из полноторий стандартным образом расслоено на 2-торы,

что и задает слоение всего 3-многообразия на торы Лиувилля. Это слоение имеет ровно два особых слоя — окружности, являющиеся осями полноторий.

- 2) Молекула A — A с меткой $r = 0$ задает трехмерную сферу S^3 .
- 3) Молекула A — A с меткой $r = \frac{1}{2}$ задает трехмерное проективное пространство $\mathbb{R}P^3$.
- 4) Молекула A — A с меткой $r = \infty$ задает прямое произведение $S^1 \times S^2$.
- 5) Молекула A — A с меткой $r = \frac{q}{p}$, где $q < p$ и $p \geq 3$, задает линзовое пространство $L_{p,q}$.

Доказательство.

1. Поскольку 3-атом A представляет собой полноторие, то молекула A — A , очевидно, задает 3-многообразие как результат склейки двух полноторий по их граничным торам. Поэтому 1-е утверждение сразу вытекает из определения молекулы.

В силу теоремы 4.1 о взаимно-однозначном соответствии между мечеными молекулами и слоениями Лиувилля, для доказательства следующих утверждений мы построим модельные слоения Зейферта на S^3 , $\mathbb{R}P^3$, $S^1 \times S^2$ и $L_{p,q}$ с требуемыми молекулами.

2. Зададим на граничных торах полноторий допустимые базисы λ^- , μ^- и λ^+ , μ^+ . Равенство метки r нулю означает, что меридиан первого полнотория отождествляется с некоторой параллелью второго полнотория и наоборот. Поэтому матрица склейки с помощью допустимой замены координат может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получается 3-сфера. В самом деле, реализуем 3-сферу в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2(z, w)$ уравнением $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Рассмотрим на ней гладкую вещественную функцию $f = |z|^2 - |w|^2$. Ее нулевая поверхность уровня $\{f = 0\}$ является двумерным тором $T^2 = \{|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}, |w| = \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Этот тор разбивает сферу в объединение двух полноторий $A_- = \{|z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, |w| = 1 - |z|^2\}$ и $A_+ = \{|z| = 1 - |w|^2, |w| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Каждое из них расслоено на concentрические торы, представляющие собой поверхности уровня $f = \text{const} \neq \pm 1$. Уровень $f = +1$ является осью одного из полноторий и одновременно критической окружностью, на которой f имеет максимум. Уровень $f = -1$ — это ось другого полнотория и критическая минимальная окружность для f . На каждом торе возникающего слоения имеется один исчезающий цикл. Второй базисный цикл при стремлении тора к осевой окружности превращается в эту окружность.

Исчезающий цикл на каждом торе полнотория A_+ задается уравнением $z = \text{const}$. При деформации этого цикла, при которой функция f на цикле стремится к 1, цикл приближается к оси полнотория A_- . С другой стороны, исчезающий цикл на каждом торе второго полнотория A_- задается уравнением $w = \text{const}$. Смещая этот цикл так, чтобы f стремилась на нем к -1 , мы превращаем цикл в ось полнотория A_+ . Поэтому матрица, задающая склейку граничных торов полноторий имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что знак перед единицей может быть изменен путем замены ориентации базисных циклов, что, разумеется, никак не влияет на топологию.

3. Рассмотрим теперь случай $A \text{---} A$ с меткой $r = 1/2$. Здесь удобно реализовать проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ в виде расслоения единичных касательных векторов к стандартной 2-сфере S^2 в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим теперь на 2-сфере стандартную функцию высоты и поднимем ее на $\mathbb{R}P^3$ естественным образом, считая постоянной на слоях расслоения $\mathbb{R}P^3 \rightarrow S^2$. Получится гладкая функция f , критические подмногообразия которой совпадают со слоями-окружностями расслоения, проектирующимися в северный полюс (максимум функции) и в южный полюс (минимум функции). Остальные слои являются двумерными торами, поскольку они суть произведения параллелей 2-сферы на окружность касательных векторов. Рассмотрим слоение $\mathbb{R}P^3$ на поверхности уровня функции f . Очевидно, что молекула, отвечающая этому слоению, имеет требуемый вид $A \text{---} A$. Нам остается вычислить значение r -метки. Сформулируем полезную лемму.

Лемма 4.8. *Рассмотрим произвольное ребро e какой-либо молекулы W и пусть (λ^+, μ^+) и (λ^-, μ^-) — допустимые системы координат, отвечающие двум атомам, соединенным этим ребром. Будем считать, что все эти циклы лежат на одном и том же торе Лиувилля, в середине ребра. Рассмотрим следующие три важных случая.*

- а) Если циклы λ^+ и λ^- не пересекаются, т. е. гомологичны на торе, то $r = \infty$.
- б) Если циклы λ^+ и λ^- пересекаются ровно в одной точке, то $r = 0$.
- в) Если циклы λ^+ и λ^- имеют индекс пересечения 2, то $r = 1/2$.

Во всех этих трех случаях метка r не зависит от выбора ориентаций на многообразии Q^3 , на ребрах молекулы и на критических окружностях.

Доказательство леммы сразу вытекает из определения r -метки. ■

Применим эту лемму для подсчета r -метки в случае $\mathbb{R}P^3$. Представим $\mathbb{R}P^3$ в виде склейки двух полноторий A_+ и A_- , являющихся прямыми произведениями двух полусфер S_+^2 и S_-^2 на слой S^1 расслоения $\mathbb{R}P^3 \rightarrow S^2$. Другими словами, разрезая базу S^2 пополам, мы получаем тривиальные расслоения над полусферами $A_+ \rightarrow S_+^2$ и $A_- \rightarrow S_-^2$. Граничным тором полноторий A_+ и A_- является прямое произведение экватора на касательную окружность. Нам нужно нарисовать на этом торе циклы λ^+ и λ^- . Ясно, что для этого нужно задать на экваторе 2-сферы, два гладких векторных поля из единичных касательных векторов.

Конец вектора прочерчивает цикл на торе. Напомним, что циклы λ^+ и λ^- должны стягиваться в точку, каждый в своем полнотории. Следовательно, искомые векторные поля нужно выбрать так, чтобы они гладко продолжались с экватора на весь соответствующий диск (полусферу). Такие два поля изображены на рис. 4.11. Они перенесены нами на плоскость посредством стереографической проекции. Первое поле, очевидно, продолжается внутрь заштрихованного диска, который является образом, например, нижней полусферы. Второе поле определено на дополнении к первому диску и, очевидно, продолжается на верхнюю полусферу. Эти же поля изображены на рис. 4.11 и на соответствующих полусферах. Сравнивая эти два поля на экваторе, мы видим, что концы их векторов прочерчивают на торе две окружности, пересекающиеся ровно в двух точках. Эти точки, а точнее, отвечающие им два вектора, указаны на рис. 4.11. Отсюда следует, что индекс пересечения этих циклов равен 2 (если бы индекс равнялся нулю, то одно поле на экваторе можно было бы продеформировать в другое, что невозможно, поскольку на 2-сфере нет непрерывного ненулевого векторного поля).

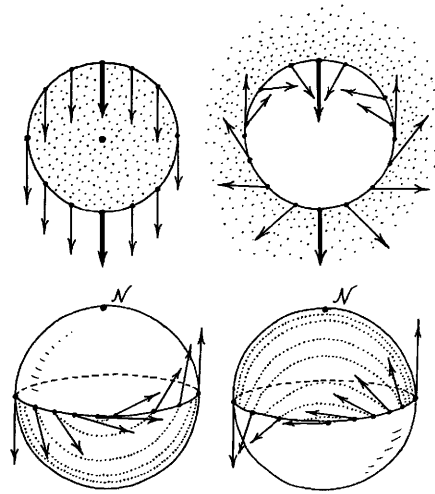


Рис. 4.11

Отметим, кстати, что эта возникшая здесь двойка является просто числом Эйлера касательного расслоения к 2-сфере. Итак, поскольку индекс пересечения циклов λ^+ и λ^- равен двум, то $r = 1/2$, что и требовалось доказать. Тем самым, мы построили лиувиллево слоение на $\mathbb{R}P^3$ с требуемой молекулой.

4. Рассмотрим прямое произведение $S^1 \times S^2$ и слоение Лиувилля на нем, порожденное обычной функцией высоты на 2-сфере S^2 , стандартно вложенной в \mathbb{R}^3 . Ее линии уровня на 2-сфере — это параллели, а северный и южный полюсы — критические точки: максимум и минимум. Умножая линии уровня на окружность, получаем слои слоения Лиувилля. Исчезающий цикл в первом полнотории и исчезающий цикл во втором полнотории на самом деле один и тот же. А именно, это — экватор сферы, умноженный на фиксированную точку окружности-слоя. Следовательно, здесь $r = \infty$.

5. Зададим слоение Лиувилля с требуемой молекулой W на линзовом пространстве $L_{p,q}$. Линза $L_{p,q}$ может быть получена как фактор-пространство сферы $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$ по действию группы \mathbb{Z}_p , образующая которой ξ действует так: $\xi: (z, w) \rightarrow (ze^{-2\pi i q/p}, we^{2\pi i p})$. Напомним, что сфера S^3 представлена как объединение двух полноторий, общий граничный тор которых задается как нулевой уровень гладкой функции $f(z, w) = |z|^2 - |w|^2$. Тогда полнотория A_+ и A_- задаются соотношениями:

$$A_- = \{|z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, |w| = 1 - |z|^2\} \text{ и } A_+ = \{|z| = 1 - |w|^2, |w| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

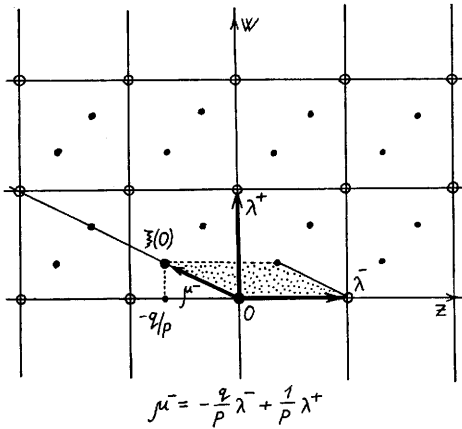


Рис. 4.12

Очевидно, что эти полнотория инвариантны относительно действия группы \mathbb{Z}_p . Причем после факторизации сферы они превращаются снова в два полнотория, в объединение которых распадается теперь уже линзовое пространство $L_{p,q}$. При этом функция $f(z, w)$ на сфере порождает гладкую функцию на линзе $L_{p,q}$. Уровни этой функции задают некоторое слоение на этой линзе. Как мы сейчас покажем, оно и будет искомым, т.е. отвечающая ему молекула $A \rightarrow A$ будет иметь метку $r = \frac{q}{p}$. Для этого изучим более детально действие группы \mathbb{Z}_p на граничном торе $T^2 = \{|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}, |w| = \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ в сфере S^3 . Нужно взять фактор-тор $\tilde{T}^2 = T^2/\mathbb{Z}_p$ и рассмотреть на нем две допустимые системы координат (λ^+, μ^+) и (λ^-, μ^-) . Ясно, что в качестве исчезающих циклов λ^+ и λ^- мы можем взять образы меридианов полноторий A_+ и A_- , т.е. образы циклов $\{z = \text{const}, w = w_0 e^{i\varphi}\}$ и $\{w = \text{const}, z = z_0 e^{i\varphi}\}$, соответственно.

Представим тор $T^2 = \{|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}, |w| = \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ как фактор-пространство евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 по решетке $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (рис. 4.12). Изобразим здесь же действие группы \mathbb{Z}_p , нарисовав на плоскости фундаментальную область этой группы. Эта область является параллелограммом, заштрихованным на рис. 4.12. На рис. 4.12 изображен случай, когда $p = 3$, $q = 2$. В результате на плоскости \mathbb{R}^2 возникают две решетки — исходная, порождающая тор T^2 , и новая, более мелкая, порождающая фактор-тор $\tilde{T}^2 = T^2/\mathbb{Z}_p$. Мы можем изобразить базисы (λ^+, μ^+) и (λ^-, μ^-) при помощи этой мелкой решетки. Два жирных ортогональных вектора на рис. 4.12 изображают базис исходной, старой решетки, а именно

$$\{z = \text{const}, w = w_0 e^{i\varphi}\} \quad \text{и} \quad \{w = \text{const}, z = z_0 e^{i\varphi}\}.$$

Эти два цикла проектируются с тора T^2 на фактор-тор \tilde{T}^2 взаимно-однозначно, поэтому их можно взять на фактор-торе в качестве циклов λ^+ и λ^- , соответственно.

Опишем фундаментальную область для тора \tilde{T}^2 . Действие группы \mathbb{Z}_p на плоскости устроено так: образующая ξ сдвигает плоскость на вектор $-\frac{q}{p}\lambda^- + \frac{1}{p}\lambda^+$. Поэтому в качестве фундаментальной области мы можем взять параллелограмм, натянутый на два вектора

$$\lambda^- \quad \text{и} \quad \mu^- = -\frac{q}{p}\lambda^- + \frac{1}{p}\lambda^+,$$

которые, очевидно, образуют базис на торе \tilde{T}^2 . Отсюда $\lambda^+ = q\lambda^- + p\mu^-$. Следовательно, $r = \frac{q}{p}$, что и требовалось.

Предложение доказано. ■

Укажем еще несколько примеров несложных молекул W , описывающих важные и интересные слоения Лиувилля.

Предложение 4.4. Пусть молекула W не содержит атомов со звездочками и имеет вид, показанный на рис. 4.13: все ее ребра, соединяющие седловые атомы, несут на себе r -метку, равную бесконечности, а все ее ребра, заканчивающиеся атомом A , несут на себе r -метку, равную нулю. Тогда соответствующее 3-многообразие Q является локально тривиальным расслоением со слоем окружность над замкнутой двумерной поверхностью P^2 , ориентируемой или неориентируемой.

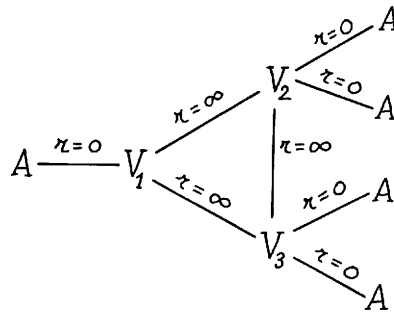


Рис. 4.13

Комментарий. Если же молекула W содержит атомы со звездочками, то многообразие Q^3 является расслоением Зейферта, а его особые слои в точности отвечают атомам со звездочками. Если далее заменить нулевые r -метки на ребрах молекулы W , инцидентных атомам A , произвольными числами $\frac{p}{q}$, то все равно многообразие Q останется глобальным расслоением Зейферта, но в нем появятся новые особые слои, в точности отвечающие осевым окружностям тех атомов A , в которые входят ребра с r -метками вида $\frac{p}{q} \neq 0$.

Доказательство.

На каждом отдельно взятом 3-атоме без звездочек уже задана структура тривиального S^1 -расслоения (теорема 3.3, глава 3). Склеивая граничные торы соседних 3-атомов, мы видим, что слои этих расслоений согласуются на граничном торе. Дело в том, что r -метка равна бесконечности, когда оба атома — седловые, и равна 0 в случае, когда один из атомов имеет тип A . Это в точности означает, что слои, пришедшие на граничный тор из соседних атомов, совпадают (изотопны), и поэтому можно хорошо сшить S^1 -расслоения, заданные на соседних 3-атомах. Тем самым мы получаем глобально заданную на всем Q структуру локально тривиального S^1 -расслоения. Отметим, что за ориентируемость или неориентируемость получающейся при этом двумерной базы отвечают метки ϵ на ребрах исходной молекулы W . Предложение доказано. ■

Комментарий. В описанной в предложении 4.4 молекуле W все седловые атомы образуют семью (см. определение 4.5). Из общей конструкции следует, что в таком случае появляется еще один инвариант — целочисленная метка n , которая должна быть приписана этой семье. С другой стороны, согласно предложению 4.4 соответствующее 3-многообразие Q является расслоением со слоем окружность и базой P^2 . Предположим, что база ориентируема. Тогда с этим расслоением ес-

тественно связан известный инвариант — число Эйлера. Оказывается, метка n и число Эйлера в точности совпадают. В связи с этим дадим наглядное описание числа Эйлера в данном случае. Выбросим из базы P^2 маленький диск D^2 . Тогда над оставшимся 2-многообразием $P^2 \setminus D^2$ расслоение со слоем S^1 становится тривиальным. Следовательно, в нем можно взять глобальное сечение, т. е. гладко отобразить базу $P^2 \setminus D^2$ в $Q^3 \setminus$ (полноторие) так, что образ базы пересечет каждый слой ровно в одной точке. Границей 3-многообразия $Q^3 \setminus$ (полноторие) является двумерный тор. Сечение высекает на нем некоторый цикл. С другой стороны, на границе выброшенного полнотория имеется однозначно определенный с точностью до изотопии исчезающий цикл (меридиан полнотория).

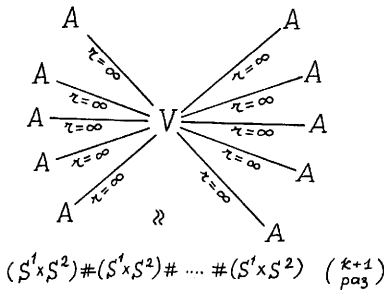


Рис. 4.14

ребра равны бесконечности. Тогда соответствующее такой молекуле 3-многообразию Q является связной суммой $k + 1$ экземпляров $S^1 \times S^2$, где k — это сложность атома V , т. е. число его вершин.

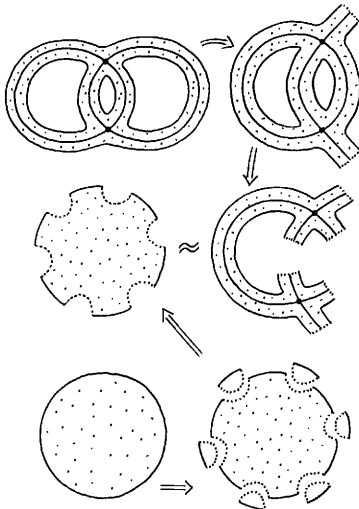


Рис. 4.15

Следовательно, 3-многообразие Q можно представить так. Умножим P_2 на окружность и на границе получившегося 3-многообразия стянем каждую окруж-

Подсчитаем, каков индекс пересечения исчезающего цикла с сечением. Полученное целое число и есть число Эйлера данного расслоения. Оно же является меткой n , отвечающей единственной семье данной молекулы W .

Предложение 4.5. Пусть молекула W имеет вид, показанный на рис. 4.14, т. е. состоит из одного седлового атома V без звездочек и из некоторого количества исходящих из него ребер, каждое из которых заканчивается атомом A . Пусть все r -метки на этих

Доказательство.

Поскольку атом V по предположению не содержит звездочек, то отвечающее ему 3-многообразие является прямым произведением $V = P^2 \times S^1$. Граница этого многообразия состоит из некоторого числа 2-торов. Так как все ребра, исходящие из атома V , заканчиваются атомами A , то каждый из этих граничных торов должен быть заклеен полноторием. Все r -метки на этих ребрах равны бесконечности. Это означает, что каждое полноторие приклеивается следующим образом. Рассмотрим произвольный граничный тор $T^2 \subset \partial V$. На нем имеется структура тривиального S^1 -расслоения. В результате склейки слой этого расслоения отождествляется с исчезающим циклом приклеиваемого полнотория. Другими словами, каждый слой, лежащий на границе ∂V , сжимается в точку.

ность $S^1 \times \{x\}$ в точку, $x \in \partial P_2$. Поскольку P_2 — это узкая ленточка, то мы можем разрезать ее поперек всех ребер (рис. 4.15). Каждый такой разрез на ленточке порождает разрез в Q по двумерной сфере. Восстановление разреза эквивалентно взятию связной суммы с 3-многообразием $S^1 \times S^2$. Следовательно, 3-многообразие Q можно разрезать по нескольким 2-сферам так, что в результате получится трехмерная сфера, из которой выброшено $2(k+1)$ трехмерных непересекающихся шаров. В самом деле, после разрезания P^2 по дугам, разрезающим ленточки, получится 2-диск, показанный на рис. 4.15, из которого удалено $k+1$ полудисков. Умножая 2-диск на окружность и стягивая в точку каждую окружность, оказавшуюся над его границей, мы получаем 3-сферу. Выбрасывая граничные полудиски из 2-диска, мы тем самым выбрасываем из 3-сферы трехмерные шары. Следовательно, искомое многообразие Q_ϵ получается из 3-сферы с выброшенными $2(k+1)$ шарами путем попарного склеивания возникших граничных 2-сфер. Каждое такое отождествление, очевидно, эквивалентно взятию связной суммы с 3-многообразием $S^1 \times S^2$.

Предложение доказано. ■

4.8. Гамильтоновы системы с критическими бутылками Клейна

В основном в приложениях встречаются интегрируемые системы, у которых на изоэнергетических 3-поверхностях нет критических торов и бутылок Клейна. Тем не менее, например, в теории интегрируемых геодезических потоков критические торы и бутылки Клейна встречаются. На критические торы мы внимания обращать не будем, поскольку (см. об этом выше) они не меняют топологию слоения Лиувилля. А критические бутылки Клейна заслуживают отдельного рассмотрения, поскольку в их окрестности топология слоения действительно меняется нетривиальным образом. Этот вопрос был изучен П. Топаловым в [197].

Пусть K — критическая бутылка Клейна. Тогда близкие к ней торы Лиувилля при стягивании на нее двулистно накрывают бутылку Клейна. Окрестность $U(K)$ бутылки Клейна K в 3-многообразии Q можно рассматривать как 3-атом специального вида. Этот атом мы будем изображать буквой K с ровно одним инцидентным с ним ребром. Единственность такого 3-атома вытекает из того, что существует лишь одно двулистное накрытие тором бутылки Клейна.

Отметим, что граница 3-окрестности $U(K)$ состоит ровно из одного тора Лиувилля T^2 . Поскольку 3-атом $U(K)$ нам задан (и фиксирован), то возникает однозначно определенная проекция-накрытие $\pi: T^2 \rightarrow K$. Это накрытие появляется при стягивании границы окрестности $U(K)$ на бутылку Клейна K (вдоль отрезков, нормальных к K в $U(K)$). Подчеркнем, что здесь мы пользуемся тем, что события происходят внутри уже заданной 3-окрестности $U(K)$.

Выберем на граничном торе T^2 допустимую систему координат. Для этого сначала опишем важное свойство гамильтонова потока на бутылке Клейна.

Предложение 4.6. *Все интегральные траектории интегрируемого при помощи боттовского интеграла гамильтонова потока на критической бутылке Клейна*

замкнуты. Тем самым, они определяют на граничном торе T^2 цикл, однозначно определенный с точностью до изотопии и являющийся поднятием замкнутой интегральной траектории с бутылки Клейна.

Доказательство.

Поскольку бутылка Клейна K лежит внутри 3-атома $U(K)$, то можно рассмотреть двулистное накрытие над $U(K)$, которое развернет бутылку Клейна K в тор \tilde{T}^2 . При этом $U(K)$ накрывается ориентируемым 3-многообразием $\tilde{U}(\tilde{T}^2)$. Возьмем тор \tilde{T}^2 и рассмотрим на нем инволюцию ξ , отвечающую данному накрытию $\tilde{T}^2 \rightarrow K$. Введем на плоскости \mathbb{R}^2 , накрывающей тор \tilde{T}^2 , стандартные координаты (x, y) , связанные с решеткой тора. Без ограничения общности можно считать, что инволюция относительно этих координат задается формулой

$$(x, y) \rightarrow (x + \frac{1}{2}, -y).$$

Интегральные траектории с бутылки Клейна поднимаются на тор \tilde{T}^2 и превращаются в интегральные траектории системы, накрывающей исходную. Этот тор \tilde{T}^2 (см. выше) можно считать регулярным тором Лиувилля в $\tilde{U}(\tilde{T}^2)$. Следовательно, интегральные траектории накрывающего гамильтонова потока должны задавать на нем прямолинейную обмотку. Мы утверждаем, что она не может быть иррациональной, то есть все интегральные траектории замкнуты на торе. И более того, все эти замкнутые интегральные траектории накрывающего потока определены однозначно, с точностью до изотопии. В самом деле, накрывающее гамильтоново векторное поле \tilde{v} на торе \tilde{T}^2 должно быть инвариантно относительно инволюции ξ . Рассмотрим интегральную траекторию $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ поля \tilde{v} на накрывающей плоскости \mathbb{R}^2 . Для гамильтонова векторного поля на торе определена пара чисел (ω_1, ω_2) , называемых частотами (на данном торе). Эти числа могут быть определены по формулам:

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{t}, \quad \omega_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t}.$$

При этом они не зависят от выбора конкретной траектории на данном торе. Под действием инволюции ξ траектория $\gamma(t)$ переходит снова в некоторую интегральную траекторию того же поля \tilde{v} . Эта новая траектория задается формулами:

$$\xi\gamma(t) = (x(t) + \frac{1}{2}, -y(t)).$$

Отсюда

$$\omega_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} = -\omega_2,$$

то есть $\omega_2 = 0$. В силу гамильтоновости системы из того, что частота ω_2 равна нулю, следует, что все траектории векторного поля \tilde{v} замкнуты на торе и изотопны его первому базисному циклу. Осталось заметить, что поскольку на накрывающем торе \tilde{T}^2 все интегральные траектории поднятого поля замкнуты,

то и на бутылке Клейна все интегральные траектории поля v тоже замкнуты. Предложение доказано. ■

Отметим, хотя этот факт и не потребуется нам, что справедливо следующее полезное утверждение.

Предложение 4.7. Пусть v — произвольное гладкое векторное поле без особых точек на бутылке Клейна. Тогда у него обязательно есть по крайней мере две замкнутые интегральные траектории.

Итак, на граничном торе T^2 3-атома $U(K)$ мы обнаружили однозначно определенный с точностью до изотопии цикл λ , изотопный замкнутым интегральным траекториям потока на бутылке Клейна. Отметим, что λ является слоем расслоения Зейферта, определенного на $U(K)$. Базой этого расслоения является двумерный диск с двумя особыми точками типа $(2, 1)$. Каждой из них отвечает слой типа $(2, 1)$ расслоения Зейферта.

Кроме указанного расслоения Зейферта, на $U(K)$ имеется еще одна структура S^1 -расслоения. Здесь базой расслоения Зейферта будет лист Мебиуса, а слоем — окружность. Причем, это второе расслоение локально тривиально, то есть не имеет особых слоев.

Опишем структуру этих расслоений подробнее. Окрестность $U(K)$ критической бутылки Клейна можно представить следующим образом. Рассмотрим двумерное кольцо \widehat{P} . Удобно задать его на комплексной плоскости в виде $\{1/2 < |z| < 2\}$. Рассмотрим теперь цилиндр $\widehat{P} \times [0, \pi]$ и отождествим его основания по инволюции $\tau: \widehat{P} \rightarrow \widehat{P}$, задаваемой формулой $z \rightarrow z^{-1}$. В результате мы получим в точности окрестность $U(K)$. Сама бутылка Клейна получается склейкой оснований двумерного цилиндра $\{|z| = 1\} \times S^1$.

Расслоение цилиндра $\widehat{P} \times [0, \pi]$ на отрезки $\{x\} \times [0, \pi]$ после склейки оснований порождает расслоение $U(K)$ на окружности. Особые слои этого расслоения отвечают двум неподвижным точкам инволюции τ , а именно, $z = 1$ и $z = -1$. Базой расслоения будет фактор-пространство $P = \widehat{P}/\tau$, которое, очевидно, гомеоморфно диску.

Второе расслоение может быть описано следующим образом. Заметим, что цилиндр $\widehat{P} \times [0, \pi]$ можно представить в виде прямого произведения еще одним способом, а именно, $S^1 \times (I \times [0, \pi])$. Этот цилиндр, таким образом, имеет естественную структуру S^1 -расслоения, которая сохраняется и после склейки. База этого расслоения получается из прямоугольника $I \times [0, \pi]$ склейкой его оснований $I \times \{0\}$ и $I \times \{\pi\}$, результатом которой является, как нетрудно увидеть, лист Мебиуса.

Оказывается, структуры этих двух расслоений Зейферта на $U(K)$ определены однозначно, с точностью до послышной изотопии. Дело в том, что на двулистном накрытии $\widetilde{U}(\widetilde{T}^2)$ 3-атома $U(K)$ задана инволюция ξ . Оба расслоения Зейферта, поднятые с $U(K)$ на $\widetilde{U}(\widetilde{T}^2)$, должны быть инвариантны относительно инволюции ξ . Кроме двух описанных, других инвариантных расслоений нет. В самом деле, действие инволюции ξ на группе одномерных гомологий $\widetilde{U}(\widetilde{T}^2)$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, среди всех циклов только две образующие группы гомологий остаются на месте (с точностью до умножения на ± 1) под действием инволюции ξ . Они и порождают две указанные выше структуры расслоения Зейферта на фактор-пространстве $U(K) = \tilde{U}(\tilde{T}^2)/\xi$.

Теперь в качестве второго базисного цикла допустимой системы координат на граничном торе T^2 3-атома $U(K)$ мы возьмем цикл μ , задающий структуру второго расслоения Зейферта $U(K) \rightarrow$ (лист Мебиуса). Мы построили допустимую систему координат (λ, μ) на граничном торе. Отметим, что ориентация цикла λ уже задана гамильтоновым потоком v . Ориентацию на μ выберем так, чтобы пара циклов (λ, μ) была положительно ориентирована на торе T^2 как на граничном торе ориентированного многообразия $U(K)$.

Определим теперь на ребре, исходящем из атома K , числовую r -метку и метку ε по аналогии с тем, как мы это делали в случае обычных атомов. Для этого мы рассмотрим сначала матрицу склейки $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ на данном ребре, а затем дословно повторим прежние определения.

Числовой рациональной меткой r на ребре e молекулы W , инцидентном с атомом K , отвечающим бутылке Клейна, называется:

$$r = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{символ } \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Числовой целочисленной меткой ε на этом ребре называется:

$$\varepsilon = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Осталось определить метку n . Но она определяется здесь точно так же, как и в остальных, уже перечисленных случаях. В частности, если ребро бесконечно, то есть $r = \infty$, то атом K включается в семью, с которой инцидентен второй конец ребра, исходящего из K . Если же r -метка на ребре конечна, то сам атом K является семьей. После того как допустимая система координат фиксирована, все определения числовых меток будут точно такими же как и раньше.

Следует выделить особый случай, когда молекула W имеет вид $K \text{---} K$. В этой ситуации две допустимые системы координат, отвечающие этим атомам K , однозначно определены. Поэтому в качестве метки, которую нужно приписать единственному ребру молекулы, следует рассмотреть саму матрицу склейки. Никаких других меток тут нет.

Таким образом, снабжая молекулу W набором перечисленных выше числовых меток, мы получаем как и раньше меченую молекулу W^* , для которой остаются справедливыми теоремы 4.1 и 4.2, сформулированные выше.

Тем самым, гамильтоновы системы с критическими бутылками Клейна естественно включаются в общую теорию без каких-либо существенных отличий.

Однако следует уточнить, что понимается здесь под лиувиллевой эквивалентностью систем, у которых присутствуют бутылки Клейна. Две такие системы v и v' считаются лиувиллево эквивалентными, если существует послыйный

диффеоморфизм между изоэнергетическими 3-многообразиями Q и Q' , удовлетворяющий всем прежним условиям. Но кроме того, мы дополнительно требуем, чтобы замкнутые интегральные траектории поля v на критических бутылках Клейна в Q переходили с сохранением ориентации в замкнутые интегральные траектории поля v' на соответствующих критических бутылках Клейна в Q' .

4.9. Топологические препятствия к интегрируемости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

Мы описали топологию изоэнергетических 3-поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем. Грубо говоря, все такие 3-многообразия получаются произвольными склейками 3-атомов (по их граничным торам). Какие же 3-многообразия в результате получатся? Или, другими словами, — каковы топологические препятствия к интегрируемости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теперь мы можем ответить на этот вопрос. Оказывается, далеко не каждое трехмерное многообразие может служить изоэнергетической 3-поверхностью интегрируемой системы. Таких многообразий немного, и топологию их можно описать. Оказалось, что класс таких 3-многообразий совпадает с хорошо известным в трехмерной топологии классом граф-многообразий, введенных Вальдхаузенем. Таким образом, если нам дана гамильтонова система, изоэнергетическая 3-поверхность которой не является граф-многообразием, то эта система заведомо неинтегрируема в классе боттовских интегралов (по крайней мере на этой 3-поверхности).

4.9.1. Класс (M)

Обозначим через (M) класс (множество) всех гладких связных ориентируемых компактных 3-многообразий. Оказывается, нет никаких топологических препятствий к тому, чтобы многообразие из класса (M) было изоэнергетической 3-поверхностью подходящей гамильтоновой системы (но не обязательно интегрируемой).

Предложение 4.8 (С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко).

- а) Если X^3 — произвольное многообразие из класса (M) , то прямое произведение $M^4 = X^3 \times D^1$ (где D^1 — отрезок) всегда является симплектическим 4-многообразием.
- б) Многообразие X^3 является изоэнергетической 3-поверхностью естественной гамильтоновой системы на $M^4 = X^3 \times D^1$, задаваемой гамильтонианом $H = t$, где t — координата на отрезке.

Доказательство.

Начнем с пункта (б). Если симплектичность многообразия $M^4 = X^3 \times D^1$ (где D^1 — отрезок) доказана, то в качестве гамильтониана H можно взять функцию $H(x, t) = t$, где x и t — естественные координаты на прямом произведении $X^3 \times D^1$. Тогда X^3 является 3-поверхностью уровня функции H , т. е. изоэнергетическим 3-многообразием. Симплектичность 4-многообразия M^4 следует из

хорошо известной топологической теоремы о существовании погружения любого ориентированного компактного гладкого 3-многообразия X^3 в четырехмерное

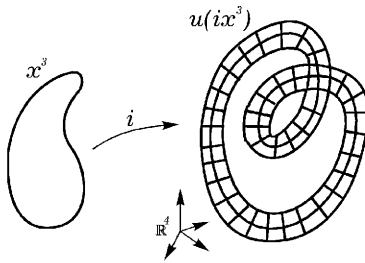


Рис. 4.16

евклидово пространство \mathbb{R}^4 . Взяв трубчатую окрестность U погруженного многообразия $i(X^3)$ (рис. 4.16), мы получаем погруженное 4-многообразие. Оно является погружением прямого произведения $M^4 = X^3 \times D^1$ (где D^1 — отрезок), поскольку нормальное расслоение погруженного ориентируемого многообразия ко-размерности один в \mathbb{R}^4 всегда тривиально. Далее, поскольку на \mathbb{R}^4 существует каноническая симплектическая структура вида $dp \wedge dq$, то, ограничивая ее на погруженный образ многообразия M^4 , получаем симплектическую 2-форму на M^4 . ■

4.9.2. Класс (H)

Определение 4.8. Обозначим через (H) класс всех ориентируемых компактных замкнутых 3-многообразий, являющихся изоэнергетическими поверхностями интегрируемых боттовских гамильтоновых систем (т.е. интегрируемых при помощи боттовских интегралов).

Класс (H) образует некоторое подмножество в классе (M) . Выше мы сформулировали вопрос: совпадает ли (H) с (M) или нет? Чем интересен этот вопрос? Дело в том, что если класс (H) окажется меньше класса (M) , то мы сразу получаем новые топологические препятствия к интегрируемости гамильтоновых систем: если изоэнергетическая 3-поверхность некоторой гамильтоновой системы не принадлежит классу (H) , то эта система заведомо неинтегрируема (в классе боттовских интегралов). Как мы вскоре увидим, класс (H) действительно меньше класса (M) .

4.9.3. Класс (Q) трехмерных многообразий, склеенных из блоков двух типов

Рассмотрим два достаточно простых трехмерных многообразия с краем: A^3 и B^3 . Они описываются следующим образом.

Многообразиие A^3 . Оно диффеоморфно прямому произведению 2-диска на окружность, т.е. $A^3 = D^2 \times S^1$ (рис. 4.17). Край многообразия диффеоморфен 2-тору T^2 .

Многообразиие B^3 . Оно диффеоморфно прямому произведению диска N^2 с двумя дырками на окружность, т.е. $B^3 = N^2 \times S^1$. Его край состоит из трех торов (рис. 4.17).

Определение 4.9. Обозначим через (Q) класс всех ориентируемых замкнутых компактных 3-многообразий, представимых в виде

$$Q^3 = aA^3 + bB^3,$$

где a и b — целые неотрицательные числа, знак $+$ обозначает склейку многообразий по диффеоморфизмам граничных торов.

Другими словами, Q^3 получается как результат склейки a экземпляров многообразия A^3 с b экземплярами многообразия B^3 по некоторым отождествлениям их граничных торов (так, чтобы в результате получилось многообразие без границы).

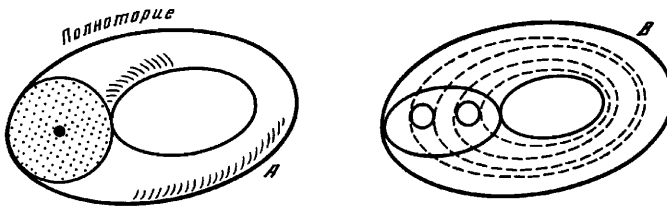


Рис. 4.17

Ясно, что числа a и b не могут быть произвольными, между ними должно быть простое соотношение:

$$a + 3b = \text{четное число.}$$

Дело в том, что общее число граничных торов должно быть четным. Это условие необходимо и достаточно, чтобы получилось замкнутое 3-многообразие (т.е. без края).

4.9.4. Класс (W) многообразий Вальдхаузена (граф-многообразий)

Определение 4.10. Обозначим через (W) класс всех ориентируемых компактных замкнутых 3-многообразий W таких, что:

- а) W содержит некоторое конечное множество непересекающихся 2-торов,
- б) после выбрасывания этих торов из W получается открытое 3-многообразие, каждая связная компонента которого является расслоением Зейферта со слоем окружность над некоторым двумерным многообразием (возможно с границей и не обязательно ориентируемым).

Этот класс многообразий был введен в трехмерную топологию Ф. Вальдхаузенем [386]. Они были названы Graphenmannigfaltigkeiten и появились в работах Вальдхаузена (и его последователей) из внутренних глубоких задач трехмерной

топологии, вне всякой связи с гамильтоновой механикой и симплектической геометрией. Мы будем иногда называть многообразия этого класса граф-многообразиями. Вальдхаузен классифицировал все такие многообразия, и эта классификация оказалась тесно связанной с классификацией интегрируемых систем. Можно сказать, что этот класс (W) родился заново.

4.9.5. Класс (H') многообразий, отвечающих интегрируемым гамильтонианам с ручными интегралами

Хотя почти на всех уровнях энергии $Q^3 = \{H = \text{const}\}$ в подавляющем большинстве исследованных сегодня физических систем интеграл является боттовским, тем не менее при некоторых специальных значениях энергии (заполняющих обычно множество меры нуль) интеграл f оказывается не боттовским. У него могут появиться особенности, более сложные чем те, которые предусмотрены определением боттовости. Естественно поставить вопрос: насколько устойчива классификация изоэнергетических 3-поверхностей интегрируемых систем относительно расширения класса рассматриваемых интегралов? Более точно: как устроен класс изоэнергетических 3-поверхностей для гамильтонианов H , допускающих дополнительный, но не обязательно боттовский интеграл? Конечно, нас должны интересовать в первую очередь гамильтонианы, интегралы которых хотя и не боттовские, но не слишком патологические, т.е. все-таки устроены не слишком сложно. Тем самым мы, конечно, расширяем класс изучаемых гамильтонианов. Обращаясь опять-таки к опыту исследования физических систем, мы обнаружили, что наиболее естественным является класс гамильтонианов H , допускающих ручные интегралы.

Определение 4.11. Гладкий интеграл f мы будем называть *ручным* (на данном изоэнергетическом 3-многообразии Q^3), если для любого критического значения c функции f соответствующая поверхность уровня $f^{-1}(c)$ является ручной. Это означает, что существует гомеоморфизм всего многообразия Q на себя, который переводит множество $f^{-1}(c)$ в полиэдр.

Замечание. Говоря здесь о полиэдре, мы имеем в виду симплицальный подкомплекс в многообразии Q , каждый симплекс которого гладко вложен в Q .

Таким образом, хотя ручной интеграл может быть не боттовским, однако он все еще не слишком ужасен: его поверхности уровня фактически являются полиэдрами в Q .

Определение 4.12. Обозначим через (H') класс всех трехмерных ориентируемых компактных замкнутых многообразий, являющихся изоэнергетическими 3-поверхностями гамильтоновых систем, интегрируемых при помощи ручных интегралов.

Ясно, что любой боттовский интеграл является ручным (обратное неверно). Поэтому мы имеем тривиальное включение: класс (H) содержится в классе (H'). Таким образом, расширяя класс интегрируемых гамильтонианов, мы

априори можем расширить и класс изоэнергетических многообразий интегрируемых систем. Происходит ли это на самом деле?

4.9.6. Теорема о совпадении четырех классов многообразий

Таким образом, мы описали следующие четыре класса 3-многообразий:

$$(H), (Q), (W), (H').$$

Нам потребуются далее понятие связной суммы многообразий и понятие неприводимого многообразия.

Пусть M и N — два гладких многообразия одинаковой размерности n . Удалив из них по открытому шару D^n , получим два многообразия $M \setminus D$ и $N \setminus D$ с краем, гомеоморфным сфере S^{n-1} . Построим новое многообразие, склеив $M \setminus D$ и $N \setminus D$ по какому-нибудь гомеоморфизму их граничных сфер. На этом многообразии можно задать гладкую структуру.

Определение 4.13. Получившееся n -многообразие обозначим через $M \# N$ и назовем *связной суммой многообразий* M и N . Многообразие называется *примарным*, если его нельзя представить в виде связной суммы двух других многообразий, каждое из которых отлично от сферы. Трехмерное многообразие называется *неприводимым*, если любая вложенная в него двумерная сфера ограничивает трехмерный шар.

Далее мы ограничимся рассмотрением лишь ориентируемых трехмерных многообразий.

Нижеследующая теорема является результатом усилий нескольких авторов: А. В. Браилова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко и Х. Цишанга.

Теорема 4.3.

а) Четыре описанных выше класса 3-многообразий в действительности совпадают, т. е.

$$(H) = (Q) = (W) = (H').$$

б) Класс (H) строго меньше (т. е. не исчерпывает) класса (M) всех 3-многообразий.

в) Если Q' и Q'' — два любых многообразия из класса (H) , то их связная сумма $Q = Q' \# Q''$ также принадлежит классу (H) .

г) Если многообразие Q из класса (H) является приводимым, т. е. представляется в виде связной суммы каких-то многообразий Q' и Q'' , отличных от сферы (т. е. $Q = Q' \# Q''$), то оба многообразия Q' и Q'' обязательно принадлежат тому же классу (H) .

Из этой важной теоремы 4.3 сразу получаем, например, такое следствие.

Предложение 4.9. Не каждое ориентируемое компактное замкнутое 3-многообразие может служить изоэнергетической 3-поверхностью гамильтоновой системы, интегрируемой при помощи боттовского интеграла.

Другими словами, не каждое многообразие из класса (M) является изоэнергетической 3-поверхностью интегрируемой боттовской системы. Это означает, как мы уже отмечали, что возникают новые топологические препятствия к интегрируемости (в классе не только боттовских, но даже ручных интегралов). В нижеследующей теореме приведен пример достаточно эффективного критерия, позволяющего устанавливать неинтегрируемость гамильтоновых систем. Напомним, что многообразие называется гиперболическим, если его можно снабдить полной римановой метрикой постоянной отрицательной секционной кривизны.

Оказывается, класс (H) не содержит гиперболических многообразий [125]. Следовательно, любая гамильтонова система, имеющая в качестве изоэнергетической 3-поверхности компактное замкнутое гиперболическое многообразие, неинтегрируема (на данной поверхности) в классе боттовских интегралов (и более того, даже в классе ручных интегралов).

4.9.7. Доказательство теоремы 4.3

Совпадение классов (H) и (Q) . Докажем сначала, что $(H) \subset (Q)$. Согласно определению, 3-многообразие Q из класса (H) является компактной изоэнергетической поверхностью некоторой интегрируемой системы. Как было доказано ранее, оно представимо в виде склейки некоторого числа 3-атомов. Таким образом, достаточно доказать, что каждый 3-атом получается склейкой некоторого числа полноторий $A^3 = D^2 \times S^1$ и 3-многообразий $B^3 = N^2 \times S^1$, где N^2 — 2-диск с двумя дырками. Будем для краткости называть это многообразие «штанами» (рис. 4.17). Если 3-атом не содержит звездочек, то он является прямым произведением 2-атома на окружность. Ясно, что любой 2-атом, являясь ориентированной 2-поверхностью P с краем, получается склейкой некоторого числа поверхностей N , т.е. $P = N + N + \dots + N$. Умножая теперь это разложение на окружность, получаем искомое доказательство в случае атома без звездочек. Если же атом P содержит звездочки, то на поверхности P отмечены особые точки, указывающие особые слои типа $(2, 1)$ расслоения Зейферта. Окружая эти точки малыми дисками, мы можем выбросить из Q полнотория, т.е. многообразия типа A^3 , проектирующиеся на эти диски. Тем самым, исходное многообразие Q представляется в виде $Q = \tilde{Q} + A^3 + \dots + A^3$, где 3-многообразие \tilde{Q} имеет уже структуру прямого произведения 2-поверхности на окружность. Учитывая предыдущее построение, получаем требуемое утверждение. Итак, мы доказали включение $(H) \subset (Q)$.

Докажем обратное включение: $(H) \supset (Q)$. Поскольку любое 3-многообразие из класса (Q) склеено из полноторий $D^2 \times S^1$ и 3-штанов $N^2 \times S^1$, то искомое утверждение немедленно вытекает из теоремы реализации (см. выше).

Совпадение классов (Q) и (W) . Докажем, что $(W) \subset (Q)$. Для этого достаточно доказать, что расслоение Зейферта U^3 получается склейкой некоторого числа полноторий и 3-штанов. Окружая особые слои расслоения Зейферта полноториями и удаляя их из U^3 , получаем 3-многообразие \tilde{U} , являющееся локально тривиальным расслоением над некоторой 2-поверхностью \tilde{P} с краем (а если края нет, то вырежем из расслоения \tilde{U} некоторое расслоенное полноторие, чтобы край

появился). Если \tilde{P} ориентируема, то расслоение \tilde{U} тривиально, а следовательно (см. выше), получается склейкой некоторого числа полноторий и 3-штанов. Если же \tilde{P} неориентируема, то сначала вырежем из \tilde{P} все листы Мебиуса, чтобы получить ориентированную базу. С этой ориентированной базой поступаем как и раньше. С листами Мебиуса делаем следующее. Над листом Мебиуса μ есть только два расслоения со слоем окружность: это $\mu \times S^1$ и $\mu \tilde{\times} S^1$, где волна обозначает косое произведение. Случай прямого произведения здесь исключается из рассмотрения по той простой причине, что $\mu \times S^1$ является неориентируемым 3-многообразием, которых в наших классах вообще нет.

Лемма 4.9. *Косое произведение $\mu \tilde{\times} S^1$ можно представить как расслоение Зейферта над 2-диском с двумя особыми слоями типа (2, 1).*

Доказательство.

Рассмотрим толстый цилиндр, т.е. $S^1 \times [-1, 1] \times D^1$ и отождествим его основания $S^1 \times [-1, 1] \times \{0\}$ и $S^1 \times [-1, 1] \times \{1\}$ по суперпозиции τ симметрии относительно окружности и симметрии относительно ее диаметра (рис. 4.18). Симметрия τ является инволюцией с двумя неподвижными точками. Покажем, что на полученном 3-многообразии X можно двумя различными способами ввести структуру расслоения Зейферта. Первый способ состоит в том, что толстый цилиндр разбивается на окружности вида $S^1 \times \{*\} \times \{*\}$, и это разбиение индуцирует на X структуру расслоения Зейферта без особых слоев с листом Мебиуса в качестве базы. Другими словами, $X = \mu \tilde{\times} S^1$. С другой стороны, X можно разбить на отрезки вида $\{*\} \times \{*\} \times D^1$, которые после склейки оснований цилиндра превратятся в окружности. Такое разбиение индуцирует на X структуру расслоения Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями типа (2, 1), соответствующими неподвижным точкам инволюции τ . Лемма доказана. ■

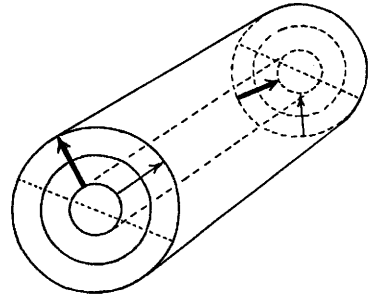


Рис. 4.18

Отсюда следует, что $\mu \tilde{\times} S^1$ получается склейкой 3-штанов и двух полноторий, т.е. лежит в классе (Q) . Итак, мы доказали, что $(W) \subset (Q)$.

Обратное включение $(Q) \subset (W)$ очевидным образом вытекает из определения этих классов.

Итак, мы доказали, что $(H) = (Q) = (W)$.

Совпадение классов (H) и (H') доказано в работе С. В. Матвеева и А. Т. Фоменко [126]. Это доказательство изложено также в книге А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [42].

Класс (H) строго меньше класса (M) . Мы уже показали, что $(H) = (W)$. В то же время из работы Вальдхаузена [386] следует, что класс (W) не совпадает с классом (M) всех ориентированных замкнутых 3-многообразий. Как мы отмечали, известны некоторые интересные классы 3-многообразий, — например, класс гиперболических многообразий, — которые не лежат в классе (H) . ■

ГЛАВА 5

Траекторная классификация интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Первый шаг

5.1. Функция вращения системы на ребре молекулы. Вектор вращения

Пусть, как и выше, $v = \text{sgrad } H$ — интегрируемая гамильтонова система, ограниченная на компактную изоэнергетическую поверхность Q^3 , и W^* — ее меченая молекула.

Рассмотрим произвольное ребро e молекулы W^* . Напомним, что оно изображает однопараметрическое семейство торов, т. е. прямое произведение тора T^2 на некоторый интервал. Предположим, что на некотором торе Лиувилля из этого семейства выбран и фиксирован произвольный базис в фундаментальной группе, т. е. пара циклов (λ, μ) . Согласно теореме Лиувилля, траектории гамильтоновой системы на этом торе являются прямолинейными обмотками (рациональными или иррациональными). Это означает, что существует такая система координат

$$(\varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi)$$

на торе, в которой векторное поле выпрямляется и имеет вид

$$v = a \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + b \frac{\partial}{\partial \varphi_2},$$

причем координатные линии этой системы координат $\{\varphi_2 = \text{const}\}$ и $\{\varphi_1 = \text{const}\}$ гомологичны базисным циклам λ и μ соответственно.

Напомним, что число вращения гамильтоновой системы на торе относительно базиса (λ, μ) называется отношение $\rho = \frac{a}{b}$. Если $b = 0$, то мы полагаем по определению, что $\rho = \infty$.

Легко видеть, что число вращения является полным траекторным инвариантом интегрируемой системы на торе. См., например, [4], [11]. Можно считать далее, что базис (λ, μ) гладко распространяется на все другие торы Лиувилля данного однопараметрического семейства. Это продолжение определено однозначно с точностью до изотопии, не влияющей на дальнейшие рассуждения. Будем считать, это рассматриваемое семейство торов параметризовано параметром t , изменяющимся от 0 до 1. Обозначим через $T(t)$ тор Лиувилля, отвечающий значению параметра t . При движении тора внутри семейства значение числа вращения меняется, и в результате мы получаем некоторую функцию $\rho(t)$, определенную на интервале $(0, 1)$, где (t) — значение числа вращения в базисе (λ, μ) на торе $T^2(t)$.

Определение 5.1. Функция $\rho(t)$ на интервале $(0, 1)$, называется *функцией вращения* данной интегрируемой системы.

Лемма 5.1. Функция $\rho(t)$ корректно определена почти всюду на интервале $(0, 1)$, за исключением точек, где она обращается в бесконечность, и является гладкой в окрестности каждого своего конечного значения.

Это утверждение очевидно, но мы прокомментируем его, напомнив один из способов вычисления функции вращения.

Рассмотрим четырехмерную окрестность U данного однопараметрического семейства торов в симплектическом многообразии (M^4, ω) . Без ограничения общности мы можем полагать, что эта окрестность является «двухпараметрическим» семейством торов Лиувилля вида $U = T^2 \times D^2$. Поскольку лиувиллевы торы являются лагранжевыми, т. е. $\omega|_{T^2} = 0$, то ω является точной в U . Следовательно, существует 1-форма \varkappa такая, что $\omega = d\varkappa$.

Рассмотрим стандартные переменные действия s_1 и s_2 , определенные для всех точек $p \in U$ следующими формулами:

$$s_1(p) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\lambda} \varkappa, \quad s_2(p) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mu} \varkappa,$$

где интегрирование ведется по циклам λ и μ , лежащим на торе, содержащем точку p . В частности, функции s_1, s_2 постоянны на торах и могут рассматриваться как параметры двухпараметрического семейства торов U .

В силу классической теоремы Лиувилля, переменные действия независимы, $H = H(s_1, s_2)$, и гамильтоново векторное поле v может быть представлено в виде

$$v = \text{sgrad } H = a \text{sgrad } s_1 + b \text{sgrad } s_2,$$

где $a = \frac{\partial H}{\partial s_1}$ и $b = \frac{\partial H}{\partial s_2}$ — гладкие функции от s_1 и s_2 , постоянные на каждом торе Лиувилля. Для семейства $\{T^2(t)\}$, в частности, a и b являются гладкими функциями параметра t .

Легко видеть, что функция вращения может быть записана теперь в виде $\rho(t) = \frac{a(t)}{b(t)}$. Очевидно, что она является гладкой на интервале $(0, 1)$ всюду, кроме тех точек, где $b(t) = 0$, т. е. $\rho(t) = \infty$.

В дальнейшем мы будем рассматривать класс интегрируемых систем, функции вращения которых являются «хорошими». Более точно это означает следующее. Будем считать, что функции вращения на всех ребрах молекулы W удовлетворяют следующим условиям:

- 1) Все критические точки функции $\rho(t)$ изолированы, и число их конечно.
- 2) Функция $\rho(t)$ является гладкой всюду, за исключением конечного числа точек, в которых она обращается в бесконечность. Эти точки мы в дальнейшем будем называть полюсами (функция ρ может вообще не иметь полюсов).

3) В окрестности каждого полюса функция $\frac{1}{\rho}$ также является гладкой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из перечисленных свойств 1–3 следует, что функция $\rho(t)$ имеет предел при стремлении t к обоим концам интервала $(0, 1)$. При этом предел, конечно, может оказаться бесконечным. Кроме того, функция ρ является монотонной в окрестности граничных точек интервала.

Отметим, в частности, что функция ρ , удовлетворяющая 1–3, не может быть постоянной ни на каком интервале.

ЗАМЕЧАНИЕ. Перечисленные условия 1–3 не зависят от выбора базиса (λ, μ) внутри данного семейства торов. Это сразу следует из предложения 1.14.

Предложение 5.1. Любая функция, удовлетворяющая условиям 1–3, реализуется как функция вращения некоторой интегрируемой гамильтоновой системы.

Это утверждение почти очевидно и формально следует из общей теоремы реализации, которую мы докажем ниже.

Описанный класс функций ρ является чрезвычайно естественным. Одним из объяснений является следующее. Можно рассмотреть функцию $\operatorname{arctg} \rho(t)$, отображающую единичный интервал в окружность. Тогда перечисленные выше условия 1–3 означают попросту, что это отображение в окружность имеет пределы на каждом конце интервала, и множество его критических точек конечно.

Определение 5.2. Две функции вращения ρ_1 и ρ_2 на интервале $(0, 1)$ мы будем называть *непрерывно (гладко) сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\tau: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ такой, что $\rho_1(t) = \rho_2(\tau(t))$.

Другими словами, функции сопряжены, если они переходят друг в друга при подходящей замене аргумента (непрерывной или гладкой в зависимости от типа сопряженности).

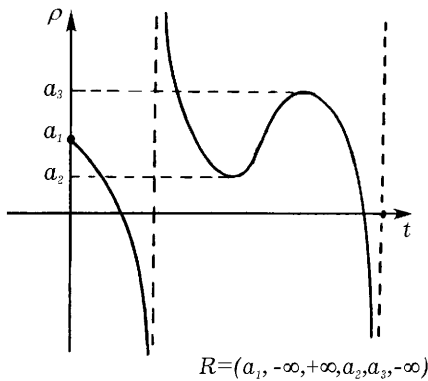


Рис. 5.1

Рассмотрим функцию вращения $\rho(t)$ на интервале $(0, 1)$, все ее полюсы и точки локальных минимумов и максимумов. Построим «вектор», состоящий из вещественных чисел и символов « $+\infty$ » и « $-\infty$ ». Первым элементом этого набора будет предел функции вращения в нуле (конечный или бесконечный). Затем, двигаясь вдоль интервала от 0 до 1, мы будем последовательно выписывать значения функции во всех ее полюсах, локальных минимумах и максимумах. При этом каждый полюс изображается двумя символами: мы указываем предел функции слева и справа от полюса. Наконец,

последним элементом набора будет предел ρ в точке 1. В результате получим некоторый упорядоченный набор вещественных чисел и символов $\pm\infty$, который мы обозначим через R (см. рис. 5.1).

Определение 5.3. Набор R назовем *вектором вращения* или R -*вектором* интегрируемой системы на данном однопараметрическом семействе торов (или же на данном ребре молекулы W^*) относительно данного базиса (λ, μ) .

Предложение 5.2. *Функции вращения $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ непрерывно сопряжены тогда и только тогда, когда соответствующие им векторы вращения R_1 и R_2 совпадают.*

Доказательство.

Рассмотрим две функции вращения на одном и том же интервале $(0, 1)$. Пусть соответствующие им вектора вращения совпали. Для каждой из функций выпишем последовательность значений параметра t , при которых функция имеет полюса и достигает минимаксных значений. Для функции ρ_1 получится некоторый набор (x_1, \dots, x_N) , а для функции ρ_2 — некоторый набор (y_1, \dots, y_N) . Наборы имеют одинаковую длину в силу совпадения векторов вращения. В частности, $\rho_1(x_i) = \rho_2(y_i)$ для всех i . На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и $[y_i, y_{i+1}]$ функции $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ строго возрастают или строго убывают одновременно. Построим непрерывную монотонную замену параметра t , совмещающую эти функции. Эту замену достаточно построить для каждого из указанных отрезков в отдельности. Соответствующая замена задается следующей простой формулой:

$$\tau(t) = \rho_2^{-1} \rho_1(t) \quad \text{при } t \in [x_i, x_{i+1}].$$

Эти замены $\tau: [x_i, x_{i+1}] \rightarrow [y_i, y_{i+1}]$ сшиваются затем в единую замену $\tau: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ в силу условия $\rho_1(x_i) = \rho_2(y_i)$

Доказательство предложения в обратную сторону очевидно. Предложение доказано. ■

Комментарий. Таким образом, R -вектор классифицирует функции, удовлетворяющие свойствам 1–3 с точностью до непрерывных сопряжений. В гладком случае следует быть более аккуратным и следить за характером функции в ее критических точках. Впрочем, если мы заранее потребуем, чтобы все ее особые точки были невырождены (более точно, следует потребовать, чтобы невырожденными были особенности функции $\text{arccstg } \rho: (0, 1) \rightarrow S^1$), то тот же самый R -вектор будет классифицировать такие функции с точностью до гладких сопряжений. С помощью функции вращения и вектора вращения мы можем дать теперь траекторную классификацию систем на ребре молекулы.

Предложение 5.3. *Пусть v и v' — две интегрируемые системы на симплектических 4-многообразиях M и M' . Рассмотрим два однопараметрических регулярных семейства E и E' торов Лиувилля в M и M' . Тогда эти системы топологически (гладко) траекторно эквивалентны на E и E' в том и только в том случае, когда на каждом из семейств существуют базисы (λ, μ) и (λ', μ') такие, что функции вращения ρ и ρ' , записанные в этих базисах, непрерывно (гладко) сопряжены.*

Доказательство.

Предположим, что функции вращения $\rho(t)$ и $\rho'(t')$ сопряжены при некотором выборе базисов (λ, μ) и (λ', μ') .

Рассмотрим для каждого семейства торов E и E' переменные угол (φ_1, φ_2) и (φ'_1, φ'_2) , отвечающие выбранным базисам. Каждая точка из однопараметрического семейства торов задается тогда своими координатами $(t, \varphi_1, \varphi_2)$ (соответств. $(t', \varphi'_1, \varphi'_2)$). Искомое непрерывное отображение $\xi: E \rightarrow E'$ первого семейства торов на второе можно задать теперь следующей формулой:

$$(t, \varphi_1, \varphi_2) = (\tau(t), \varphi'_1, \varphi'_2),$$

$$\text{т. е.} \quad t' = \tau(t) \quad \varphi'_1 = \varphi_1 \quad \varphi'_2 = \varphi_2.$$

Здесь через $r(t)$ обозначено отображение на единичном интервале, сопрягающее функции вращения, т. е. $\rho'(\tau(t)) = \rho(t)$. Легко видеть, что отображение ξ непрерывно и переводит траектории в траектории, что и требовалось.

Доказательство в обратную сторону очевидно. Предложение доказано. ■

Следствие. *В непрерывном случае при выполнении условий предложения 5.3 системы топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда при подходящем выборе базисов векторы вращения R и R' этих систем совпадают.*

5.2. Редукция трехмерной траекторной классификации к двумерной классификации с точностью до сопряженности

5.2.1. Трансверсальные сечения

Изучим теперь поведение траекторий интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности особого слоя, т. е. на 3-атоме $U(L)$ в нашей терминологии. Пусть $L = L_c = f^{-1}(c)$ — особый слой слоения Лиувилля, где f , как и выше, — боттовский интеграл системы, а $c \in \mathbb{R}$ — его критическое значение. Согласно данному выше описанию структуры 3-атома $U(L)$, слой L является расслоением типа Зейферта над графом K , который вложен в двумерную поверхность P , являющуюся базой расслоения Зейферта $\pi: U(L) \xrightarrow{S^1} P$ (см. главу 3).

Выделим два случая:

- а) атом $U(L)$ не содержит седловых критических окружностей с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами;
- б) атом $U(L)$ содержит хотя бы одну такую окружность.

Как мы уже видели выше, в случае (а) база P может быть реализована как сечение расслоения π .

В случае (б) такого сечения нет. Однако вместо базы P мы можем рассмотреть «удвоенную» поверхность \hat{P} с инволюцией τ такую, что $P = \hat{P}/\tau$. Поверхность \hat{P} уже может быть реализована как трансверсальное «сечение» расслоения π так, что каждый неособый слой пересекает \hat{P} дважды, а особые слои — только один раз. Причем точки пересечения особых слоев с сечением \hat{P} в точности совпадают с неподвижными точками инволюции τ . Простейший пример показан на рис. 5.2.

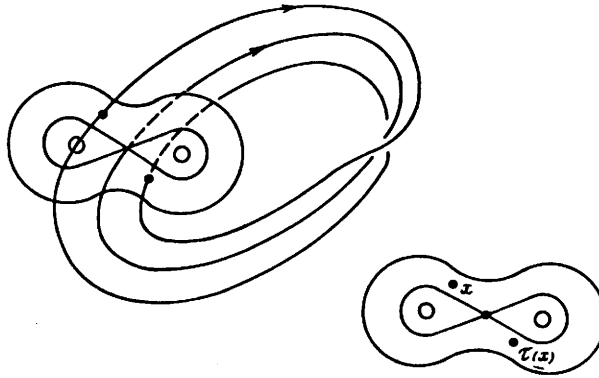


Рис. 5.2

Предложение 5.4. Для топологически устойчивых интегрируемых систем поверхности P и \hat{P} всегда можно выбрать так, чтобы они были трансверсальны интегральным траекториям системы v в окрестности особого слоя L атома $U(L)$.

Доказательство.

Мы начнем с изучения свойств траекторий на особом слое L . Выбросим из слоя L все критические окружности интеграла f , т. е. все критические периодические решения. Слой L распадется в несвязное объединение некоторого числа колец, каждое из которых расслоено на траектории гамильтонова векторного поля v . Поведение этих траекторий на кольце может быть трех типов (а), (б) и (с), описанных в главе 3 (том 1) и изображенных на рис. 3.16.

Далее, в главе 3 было доказано, что если интегрируемая система топологически устойчива, то особый слой L не имеет колец типа (с).

Рассмотрим теперь какое-нибудь вложение поверхности P или дубля \hat{P} в 3-атом $U(L)$, трансверсальное слоям расслоения Зейферта. Рассмотрим пересечение этой поверхности с особым слоем. Это будет некоторый граф $K = P \cap L$ (соотв. $\hat{K} = \hat{P} \cap \hat{L}$). Поскольку колец третьего типа (с) нет, то можно продеформировать вложение этого графа в особый слой L таким образом, чтобы оно стало трансверсальным потоку v на L . Действительно, считая вершины графа неподвижными, мы сразу сводим задачу к тому, чтобы сделать такую деформацию на каждом кольце особого слоя по отдельности. Это, как легко видеть, всегда можно сделать для колец типа (а) и (б). И наоборот, этого нельзя сделать для колец типа (с). В результате мы получим трансверсальное вложение графа K (или \hat{K}) в особый слой L .

Теперь это вложение можно попросту «утолщить» до вложения некоторой достаточно узкой двумерной окрестности этого графа, которой как раз и является поверхность P (или \hat{P}). Трансверсальность, будучи свойством общего положения, при этом очевидно сохранится. Предложение доказано. ■

Определение 5.4. Построенную в предложении 5.4 двумерную поверхность в $U(L)$ мы назовем *трансверсальным сечением* 3-атома $U(L)$. Обозначим эту поверхность через P_{tr} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда такие поверхности, обладающие свойством трансверсальности потока, называют сечениями Пуанкаре.

5.2.2. Поток Пуанкаре и гамильтониан Пуанкаре

Определим теперь отображение Пуанкаре на трансверсальном сечении P_{tr} . Пусть x — произвольная точка на P_{tr} . Выпустим из нее интегральную траекторию поля v . Через некоторое время она впервые вернется на сечение P_{tr} и проткнет ее в некоторой точке y . Обозначим отображение $x \rightarrow y$ через $\bar{\sigma}$. Определим отображение σ следующим образом:

$\sigma = \bar{\sigma}$ в случае атома A или в случае седлового атома без звездочек (т. е. если $P_{tr} \simeq P$),

$\sigma = (\bar{\sigma})^2$ в случае седлового атома со звездочками (т. е. если $P_{tr} \simeq \hat{P}$).

Определение 5.5. Отображение $\sigma: P_{tr} \rightarrow P_{tr}$ назовем *отображением Пуанкаре* данного атома $U(L)$.

Отметим, что точки пересечения P_{tr} с критическими окружностями интеграла f (которые, напомним, представляют собой периодические траектории системы v) являются неподвижными точками отображения Пуанкаре. Обозначим эти точки через S_1, \dots, S_k .

Поскольку сечение P_{tr} реализовано нами в Q , то на него можно ограничить симплектическую структуру ω . Мы получим невырожденную замкнутую 2-форму, которую можно рассматривать как симплектическую структуру на поверхности P_{tr} . Обозначим эту 2-форму по-прежнему через ω . Невырожденность на P_{tr} следует из трансверсальности сечения P_{tr} ко всем интегральным траекториям поля v , поскольку ядро формы $\omega|_{Q^3}$ в каждой точке порождается вектором v . Хорошо известно следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Отображение Пуанкаре σ сохраняет форму, ограниченную на трансверсальное сечение P_{tr} .*

Оказывается, с помощью отображения Пуанкаре можно определить естественную гамильтонову систему с одной степенью свободы на сечении P_{tr} .

Предложение 5.5. *На трансверсальном сечении P_{tr} существует гамильтоново векторное поле $w = \text{sgrad } F$ с гладким гамильтонианом $F: P_{tr} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:*

- а) *Отображение Пуанкаре $\sigma: P_{tr} \rightarrow P_{tr}$ является сдвигом вдоль интегральных траекторий поля $w = \text{sgrad } F$ на время $t = 1$.*
 - б) *Исходный боттовский интеграл f системы v является также интегралом гамильтонова поля w .*
- в-1) *В случае седлового атома $U(L)$ поле w со свойствами (а) и (б) определено однозначно, а гамильтониан F определен, следовательно, с точностью до аддитивной постоянной. Если дифференциал отображения Пуанкаре не является тождественным отображением в точках S_1, \dots, S_k (то есть если соответствующие замкнутые критические траектории являются гиперболическими), то гамильтониан Пуанкаре F является функцией Морса.*

в-2) В случае атома A поле w определено с точностью до добавления к нему поля вида $2\pi k \frac{\partial}{\partial \varphi}$, где φ — переменная «угол» на двумерном сечении P_{tr} , а k — произвольное целое число. Гамильтониан Пуанкаре F определен здесь с точностью до $2\pi ks$, где s — переменная «действие» на P_{tr} .

КОММЕНТАРИЙ. В случае атома A сечение P_{tr} является диском, расслоенным на окружности — линии уровня интеграла f . Для такого расслоения естественным образом определена система координат действие-угол. Именно эти функции и фигурируют в формулировке пункта (в-2).

Доказательство этого утверждения получается, по-существу, из следующего общего факта (см. предложение 1.6 в книге Ю. Мозера [134], [337]). Сохраняющий симплектическую форму диффеоморфизм σ на двумерном многообразии может быть представлен в виде σ^t , где σ^t — гамильтонов поток, тогда и только тогда, когда σ обладает первым интегралом. ■

Оказывается, как заметил П. Топалов [195], [202], для гамильтониана F векторного поля w можно выписать простую явную формулу.

Предложение 5.6 (Формула Топалова). Гамильтониан F является ограничением на сечение P_{tr} функции вида $-2\pi s$, где s — переменная действия, отвечающая циклу ν , который является ориентированным слоем расслоения Зейферта $\pi: U(L) \rightarrow P$. Другими словами,

$$F = - \oint_{\nu} \kappa,$$

где κ — дифференциальная 1-форма в окрестности особого слоя, удовлетворяющая условию $d\kappa = \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта функция F уже возникала выше в главе 3 и была названа там периодическим интегралом системы на 3-атоме $U(L)$.

Доказательство.

Рассмотрим произвольную точку x на двумерном трансверсальном сечении и покажем, что для нее $\sigma(x)$ совпадает со сдвигом этой точки на единицу вдоль векторного поля $\text{sgrad } F$. Оператор sgrad рассматривается здесь в смысле симплектической структуры на сечении. Ясно, что нам достаточно проверить это условие только для точек, лежащих на торах Лиувилля. Кроме того, если мы рассматриваем два изотопных трансверсальных сечения, то проверку можно производить для любого из них, поскольку при отображении одного на другое под действием потока w симплектическая структура и гамильтониан сохраняются. Поэтому мы можем выбрать сечение удобным для нас способом.

Итак, пусть ν — слой расслоения Зейферта, а μ — цикл на торе, высекаемый сечением P_{tr} . Рассмотрим переменные действие-угол $(s_1, s_2, \varphi_1, \varphi_2)$, отвечающие этим циклам. В частности, $s_1 = F$.

Выберем теперь в качестве трансверсального сечения двумерную поверхность, задаваемую в окрестности данного тора двумя уравнениями $H = \text{const}$

и $\varphi_1 = 0$. Напомним, что гамильтониан является функцией от переменных действия, причем в нашем случае $\frac{\partial H}{\partial s_1} \neq 0$. В противном случае траектории поля v были бы замкнуты и гомологичны циклу μ , что противоречило бы трансверсальности. Отсюда следует, что в качестве локальных координат на выбранном нами сечении можно выбрать s_2 и φ_2 . Поскольку значение H фиксировано, то на сечении переменная действия s_1 является некоторой функцией $S(s_2)$ от s_2 .

Итак, симплектическая структура на сечении имеет вид $ds_2 \wedge d\varphi_2$, и $F = -2\pi s_1 = -2\pi S(s_2)$. Легко видеть, что векторное поле $\text{sgrad } F$ имеет в этом случае простой вид

$$\text{sgrad } F = -2\pi \left(\frac{\partial S}{\partial s_2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

и сдвиг вдоль этого поля на единицу в координатах записывается так

$$(s_2, \varphi_2) \rightarrow \left(s_2, \varphi_2 - 2\pi \frac{\partial S}{\partial s_2} \right).$$

Посмотрим теперь, что происходит с точкой при отображении Пуанкаре. Векторное поле v в переменных действие-угол имеет вид

$$v = \frac{\partial H}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

Отображение Пуанкаре заключается в том, что точке x с координатами $(0, \varphi_2)$ на торе ставится в соответствие точка вида $x + \alpha v$, где коэффициент α выбирается так, чтобы первая координата точки получила приращение 2π и точка попала бы на то же самое сечение. Ясно, что вторая координата точки изменится при этом на величину

$$2\pi \frac{\partial H / \partial s_2}{\partial H / \partial s_1}.$$

Другими словами, отображение Пуанкаре записывается в виде

$$(s_2, \varphi_2) \rightarrow \left(s_2, \varphi_2 + 2\pi \frac{\partial H / \partial s_2}{\partial H / \partial s_1} \right).$$

Учитывая, что на рассматриваемом сечении $H(s_1, s_2) = H(S(s_2), s_2) = \text{const}$, мы видим, что величины сдвигов $-2\pi \frac{\partial S}{\partial s_2}$ и $2\pi \frac{\partial H / \partial s_2}{\partial H / \partial s_1}$ совпадают, что и приводит нас к требуемому результату. Предложение доказано. ■

Как мы видим, векторное поле Пуанкаре w определено на седловых атомах однозначно, а на атомах A — с точностью до добавления произвольного поля вида $2\pi \frac{\partial}{\partial \varphi}$. С другой стороны, в седловом случае, в отличие от атомов A , неоднозначно определено само сечение P_{tr} .

Определение 5.6. Пусть w — гамильтоново векторное поле на трансверсальном сечении $P_{tr} \subset U(L)$, построенное в предложении 5.5. Его гамильтониан F мы будем называть *гамильтонианом Пуанкаре* (отвечающим данному трансверсальному сечению), а соответствующую однопараметрическую группу диффеоморфизмов σ^t — *поток Пуанкаре*.

Заметим, что $\sigma^1 = \sigma$, где $\sigma: P_{tr} \rightarrow P_{tr}$ — отображение Пуанкаре.

Рассмотрим произвольный седловой атом $U(L)$, содержащий хотя бы одну критическую окружность с неориентируемой сепаратрисной диаграммой. В этом случае, как мы знаем, в качестве трансверсального сечения выступает дубль \hat{P} . Сейчас мы хотим определить на сечении $P_{tr} = \hat{P}$ некоторую инволюцию χ , которая по своим свойствам будет похожа на инволюцию τ , определенную выше.

Положим $\chi = \bar{\sigma}\sigma^{-1/2}$, где $\bar{\sigma}$ уже было определено выше, а $\sigma^{-1/2}$ — это диффеоморфизм при $t = -1/2$.

Покажем, что $\chi: P_{tr} \rightarrow P_{tr}$ — это действительно инволюция. Рассмотрим поток $g^t = (\bar{\sigma})^{-1}\sigma^t\bar{\sigma}$. Он, очевидно, сохраняет симплектическую структуру на сечении P_{tr} , т. е. является гамильтоновым и, кроме того, при $t = 1$ принимает вид:

$$g^1 = (\bar{\sigma})^{-1}\sigma^1\bar{\sigma} = (\text{т. к. } \sigma^1 = \sigma = \bar{\sigma}^2) = (\bar{\sigma})^{-1}(\bar{\sigma})^2\bar{\sigma} = (\bar{\sigma})^2 = \sigma.$$

Итак, $g^1 = \sigma$. Однако, в силу предложения 5.5, такой гамильтонов поток определен однозначно для седлового атома и совпадает с потоком Пуанкаре σ^t . Следовательно, $g^t = \sigma^t$, т. е. σ^t и $\bar{\sigma}$ коммутируют при любом t . Отсюда, $\chi^2 = \bar{\sigma}\sigma^{-1/2}\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^2\sigma^{-1} = \text{id}$, т. е. χ является инволюцией. Кроме того, χ коммутирует с σ^t , т. е. сохраняет поток Пуанкаре σ^t на сечении $P_{tr} = P$.

Заметим, что инволюция χ однозначно определяется самим векторным полем v без использования переменных действия и симплектической структуры.

5.3. Редукция двух степеней свободы к одной

Напомним, что две динамические системы (g^t, X) и (g'^t, X') топологически (гладко) сопряжены, если существует гомеоморфизм (соотв. диффеоморфизм) $\xi: X \rightarrow X'$, переводящий первую систему во вторую, т. е.

$$g'^t = \xi g^t \xi^{-1}.$$

Кроме этого, в случае, когда многообразия X и X' являются ориентированными, мы будем дополнительно требовать, чтобы ξ сохранял ориентацию.

Теорема 5.1 (Теорема редукции).

- а) Пусть две интегрируемые системы топологически (гладко) траекторно эквивалентны. Рассмотрим два атома $U(L)$ и $U'(L')$, соответствующие друг другу при этой эквивалентности, и пусть $P_{tr} \subset U(L)$ — любое гладкое трансверсальное сечение. Тогда существует гладкое трансверсальное сечение $P'_{tr} \subset U'(L')$ такое, что потоки Пуанкаре на P_{tr} и на P'_{tr} топологически (гладко) сопряжены. При этом в случае седлового атома со звездочками сопрягающий гомеоморфизм (диффеоморфизм) переводит инволюцию χ в инволюцию χ' .

б) Обратнo, пусть дана система v на атоме $U(L)$ и система v' на атоме $U'(L')$. Пусть внутри каждого из атомов существуют трансверсальные сечения P_{tr} и P'_{tr} такие, что потоки Пуанкаре на этих сечениях топологически (гладко) сопряжены, причем в случае седловых атомов со звездочками сопрягающий гомеоморфизм (диффеоморфизм) переводит инволюцию χ в инволюцию χ' . Тогда две системы v и v' топологически (гладко) траекторно эквивалентны на данных атомах.

Доказательство.

(а) Рассмотрим сначала непрерывный случай. Пусть \bar{P}_{tr} — образ сечения P_{tr} при траекторном гомеоморфизме $U(L) \rightarrow U'(L')$. Вообще говоря, \bar{P}_{tr} не является гладкой поверхностью в $U'(L')$. Нам же нужны гладкие сечения. Поэтому вместо \bar{P}_{tr} мы возьмем любое гладкое сечение P'_{tr} , ему изотопное. Из траекторной эквивалентности систем v и v' следует, что на сечениях P_{tr} и P'_{tr} отображения Пуанкаре σ и σ' сопряжены. При этом мы опираемся на то обстоятельство, что при изотопии сечения класс сопряженности отображения Пуанкаре не меняется.

Нам нужно показать теперь, что из сопряженности отображений Пуанкаре следует сопряженность соответствующих потоков Пуанкаре. Выше мы договорились рассматривать только нерезонансные системы. Покажем, что при этом предположении из условия $\sigma' = \xi^{-1}\sigma\xi$ автоматически следует, что $\sigma'^t = \xi\sigma^t\xi^{-1}$. Действительно, в терминах отображения Пуанкаре нерезонансность означает, что почти для любой точки $x \in P_{tr}$ замыкание ее орбиты под действием σ является окружностью — линией уровня дополнительного интеграла f . В силу гамильтоновости, ограничение σ на эту окружность сопряжено повороту на некоторый угол $2\pi\alpha$, где α — некоторое иррациональное число. Как теперь найти точку $\sigma^t(x)$, зная лишь образы x под действием отображений вида σ^n , где n — целое? Ответ следующий. В силу иррациональности α существует последовательность целых чисел n_k , для которых $(\alpha n_k - t) \bmod 1 \rightarrow 0$. Поэтому точка $\sigma^t(x)$ может быть охарактеризована как следующий предел

$$\sigma^t(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{n_k}(x).$$

Совершенно аналогичным образом дело обстоит и на трансверсальном сечении P'_{tr} для точки $y = \xi(x)$. Числа α и α' при этом обязаны совпадать в силу сопряженности σ и σ' . Поэтому

$$\sigma'^t(\xi(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma'^{n_k}(\xi(x)).$$

Переходя к пределу в равенстве $\sigma'^{n_k}(\xi(x)) = \xi\sigma^{n_k}(x)$, получаем

$$\sigma'^t(\xi(x)) = \xi(\sigma^t(x)).$$

Поскольку «иррациональные» точки всюду плотны, то из соображений непрерывности это соотношение будет выполняться тождественно, что и требовалось.

Отметим, что хотя мы пользовались здесь условием нерезонансности, утверждение теоремы остается справедливым и в общем случае.

В случае атомов со звездочками утверждение о согласованности сопрягающего гомеоморфизма ξ с инволюциями χ и χ' следует из того, что эти инволюции однозначно определяются траекториями рассматриваемых гамильтоновых систем.

(б) Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть задан гомеоморфизм между сечениями P_{tr} и P'_{tr} , сопрягающий потоки Пуанкаре (и переводящий χ в χ' в случае атомов со звездочками). Рассмотрим произвольную точку x в атоме $U(L)$. Проведем через нее интегральную траекторию γ поля $\text{sgrad } H$. Двигаясь по ней в обратном направлении из точки x , мы в некоторый момент впервые встретим сечение P_{tr} в некоторой точке y . Обозначим через t время, необходимое точке, движущейся под действием гамильтонова потока, чтобы попасть из x в y . Рассмотрим на сечении P'_{tr} соответствующую точку $\zeta(y)$ и затем сместим ее вдоль траектории γ' поля v' на время $t' = \frac{tc'}{c}$. Здесь c — время первого возвращения точки y на сечение P_{tr} . Другими словами, c — это длина участка траектории γ от точки y до точки $\bar{\sigma}(y)$. Число c' определяется аналогично. В результате мы получим некоторую точку на траектории γ' . Обозначим ее через $\xi(x)$.

Построенное отображение $\xi: U(L) \rightarrow U'(L')$ непрерывно и сохраняет траектории. В самом деле, его непрерывность нужно проверять лишь на самом трансверсальном сечении P_{tr} , а это гарантируется тем, что ζ сопрягает отображения Пуанкаре. В случае седлового атома со звездочками нам на самом деле требуется, чтобы отображение $\zeta: P_{tr} \rightarrow P'_{tr}$ сопрягало $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}'$. Но это сразу следует из того, что $\bar{\sigma} = \chi\sigma^{1/2}$, и оба сомножителя справа сохраняются по предположению.

Итак, мы построили гомеоморфизм $\xi: U(L) \rightarrow U'(L')$, являющийся, очевидно, искомой траекторной эквивалентностью.

В гладком случае доказательство практически дословно повторяется. Нам остается только дополнительно проследить за тем, чтобы время на траекториях менялось гладко. Теорема доказана. ■

Таким образом, топологическая (гладкая) траекторная классификация интегрируемых систем на трехмерном атоме сводится с классификации гамильтоновых систем на двумерной поверхности с точностью до топологической (гладкой) сопряженности. Эта последняя задача нетривиальна. Следующий шаг, которому посвящены главы 6, 7, — описание инвариантов гамильтоновых систем, рассматриваемых с точностью до сопряженности, на двумерных атомах. При этом мы будем всегда предполагать, что все критические седловые окружности интеграла f являются гиперболическими периодическими траекториями рассматриваемой системы. Это будет гарантировать нам, что гамильтониан редуцированной системы (на трансверсальном 2-сечении) является функцией Морса.

Но прежде мы поговорим об общей стратегии.

5.4. Общая концепция построения траекторных инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем

Итак, в предыдущих параграфах мы обсудили вопрос о траекторном строении интегрируемой гамильтоновой системы на естественных кусках, из которых состоит изоэнергетическое многообразие Q^3 , а именно, на ребрах и атомах молекулы. Теперь после того, как мы убедились в принципиальной возможности описания этой структуры на отдельных кусках поверхности Q^3 , мы можем представить себе в общих чертах, как нарисовать траекторный портрет интегрируемой гамильтоновой системы в целом, и как он будет в результате выглядеть. Процесс построения траекторного портрета системы можно разбить на несколько естественных этапов.

Шаг 1. «Молекула». Сначала мы должны решить более грубую задачу и описать структуру слоения изоэнергетической поверхности Q^3 на торы Лиувилля, т.е. структуру слоения Лиувилля. Согласно предыдущей главе, эта структура полностью описывается так называемой меченой молекулой W^* рассматриваемой системы. В результате мы, в частности, получим разбиение поверхности Q^3 на естественные составные части: ребра и «узкие» атомы. Напомним, что ребра — это просто однопараметрические семейства торов Лиувилля без особенностей, на которые распадается изоэнергетическая поверхность после удаления всех особых слоев лиувиллева слоения. Атомы же, в свою очередь, являются регулярными окрестностями этих особых слоев. Окрестности выбраны достаточно «узкими», чтобы существовало трансверсальное сечение.

Шаг 2. «Реберные инварианты». После того, как структура слоения на торах полностью описана, мы должны перейти к описанию траекторий на торах и особых слоях. Более точно — на ребрах и атомах. Поэтому следующий шаг — это описание траекторного строения системы на каждом ребре молекулы. Для этого, как было показано выше, нам необходимо вычислить функцию вращения на ребре молекулы и рассмотреть ее класс сопряженности относительно гладких или непрерывных замен параметра, в зависимости от того, какая классификация нас интересует — гладкая или топологическая. Если функция вращения устроена достаточно хорошо (см. выше), то ее класс сопряженности может быть полностью описан с помощью введенного выше вектора вращения. Заметим, однако, что в этом шаге присутствует некоторая неоднозначность в выборе базиса на торах Лиувилля, поэтому нас ждет некоторая необходимая процедура устранения этой неоднозначности. Процедура нужна, чтобы при сравнении двух различных систем мы хорошо представляли, какие именно функции вращения нам следует сравнивать и проверять на сопряженность. Тем не менее мы можем считать, что «реберные инварианты» в принципе уже описаны.

Шаг 3. «Атомные инварианты». Согласно теореме о редукции, вместо системы на 3-атоме $U(L)$ нам достаточно рассмотреть некоторое трансверсальное сечение P_{tr} в $U(L)$ и описать инварианты соответствующей редуцированной системы с одной степенью свободы на ней, т.е. потока Пуанкаре. Однако, за

понижение числа степеней свободы мы вынуждены заплатить переходом от траекторной классификации к классификации с точностью до сопряжений. Итак, траекторные «атомные инварианты» совпадают с инвариантами редуцированной гамильтоновой системы с одной степенью свободы, рассматриваемой с точностью до сопряженности. Отметим, что пока нам не известен даже характер этих инвариантов. Их описанию будет посвящена следующая глава.

Шаг 4. «Оснащенная молекула». На предыдущих шагах мы полностью описали для каждого ребра и для каждого атома по отдельности соответствующие траекторные инварианты. Достаточно ли этой информации для того, чтобы полностью описать траекторное строение системы на изознергетической поверхности в целом? И да, и нет. Да, потому что никаких других существенно новых инвариантов, кроме уже вычисленных, не существует. И нет, потому что уже вычисленные инварианты не вполне корректно определены. Например, функция вращения на ребре существенно зависит от выбора базисных циклов на торах Лиувилля. Аналогичная неоднозначность, оказывается, имеет место и для «атомных инвариантов». Дело в том, что редуцированная система, т. е. поток Пуанкаре, существенным образом зависит от выбора трансверсального сечения, а точнее — от ее гомотопического класса. Поэтому нам следует пока считать трансверсальные сечения фиксированными. Это, кстати, дает возможность однозначно фиксировать систему базисных циклов на ребре, примыкающем к атому, и тем самым вычислить функции и векторы вращения в специальных базисах, связанных с фиксированными трансверсальными сечениями. Кроме того, фиксация трансверсальных сечений приводит к возникновению на каждом ребре молекулы так называемой матрицы склейки, которая фактически показывает «взаимное расположение» соседних сечений относительно друг друга.

На наш взгляд, в этом подходе имеется естественная аналогия со многими стандартными конструкциями в математике. Например, если мы хотим определить некоторый объект на гладком многообразии, к примеру, векторное поле, мы можем выбрать некоторый атлас карт и записать это векторное поле в соответствующих локальных координатах. Для полноты картины мы должны также указать функции перехода между картами. Тем самым пара — многообразие и векторное поле — будет полностью определена. Эта процедура, однако, неоднозначна, поскольку зависит от выбора атласа карт. Наша ситуация вполне аналогична. «Атлас карт» — это система трансверсальных сечений. «Функции перехода» — это матрицы склейки. Мы занимаемся тем, что изучаем некоторый объект, однозначно записывая его в фиксированном «атласе карт».

Итак, на этом шаге мы считаем систему трансверсальных сечений фиксированной, что позволяет все инварианты (и атомные, и реберные) вычислить совершенно однозначно. Мы собираем всех их воедино и вместе с матрицами склейки добавляем в качестве так называемого «оснащения» к молекуле W . В результате мы получаем молекулу, снабженную дополнительной информацией о траекториях системы.

Шаг 5. «Группа замен» и ее действие. Если бы на предыдущих шагах мы пользовались другой системой трансверсальных сечений, то мы, разумеется, получили бы другое оснащение молекулы. Возникает естественный вопрос: как связаны между собой два оснащения, соответствующие одной и той же системе, но вычисленные для двух различных систем трансверсальных сечений? Оказывается, эту связь можно записать явно и в результате мы получим действие дискретной «группы замен трансверсальных сечений» на множестве различных оснащений рассматриваемой молекулы.

Здесь опять, как нам кажется, уместна та же аналогия, что и выше: для того, чтобы исследовать некоторый объект, например, векторное поле на гладком многообразии, полезно знать, как меняется его координатное представление при замене атласа.

Шаг 6. «Инварианты группы замен, t -молекула и st -молекула». Этот шаг последний. Нас интересуют траекторные инварианты системы сами по себе, т. е. никак не связанные с выбором системы трансверсальных сечений. Поэтому на самом деле вместо «оснащенных молекул», которые определены неоднозначно, мы должны рассмотреть соответствующие им инварианты действия «группы замен трансверсальных сечений». Снабжая полным набором таких инвариантов молекулу W , мы получаем окончательный траекторный портрет системы, содержащий всю необходимую информацию. Этот портрет был назван нами t -молекулой в топологическом случае и st -молекулой в гладком. Следует отметить, что в общем случае явное описание полного набора инвариантов, т. е. набора различающего две произвольные орбиты, может быть весьма нетривиальной задачей. Она может решаться различными способами, а иногда даже не иметь разумного окончательного решения. Например, если пространство орбит нехаусдорфово. Поэтому с формальной точки зрения мы можем определить t -молекулу (st -молекулу) просто как элемент соответствующего пространства орбит. С другой стороны, для молекул не очень сложной структуры, которые как раз и встречаются в реальных задачах, возможно получение компактного окончательного ответа в виде молекулы, снабженной конечным набором числовых параметров. Соответствующие примеры будут указаны ниже.

Итак, мы вкратце описали общую схему построения полного набора траекторных инвариантов системы. Эта программа будет реализована в следующих главах.

ГЛАВА 6

Классификация гамильтоновых потоков на двумерных поверхностях с точностью до топологической сопряженности

6.1. Инварианты гамильтоновой системы на 2-атоме

В этом параграфе мы построим полный набор инвариантов, дающих классификацию гамильтоновых систем с одной степенью свободы в окрестности особого уровня гамильтониана с точностью до топологической сопряженности. Говоря о топологической сопряженности таких систем, мы будем подразумевать существование гомеоморфизма, который не только сопрягает потоки, но и сохраняет ориентацию.

Рассмотрим гамильтонову систему $w = \text{sgrad } F$ с одной степенью свободы на двумерном симплектическом многообразии (X, ω) . Через $\sigma^t: X \rightarrow X$ обозначим соответствующий гамильтонов поток (т. е. однопараметрическую группу диффеоморфизмов, порождаемую гамильтоновым векторным полем $\text{sgrad } F$). Мы предполагаем здесь, что гамильтониан $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ является функцией Морса, т. е. все его особые точки невырождены. Пусть c — критическое значение гамильтониана F и $K = F^{-1}(c)$ — соответствующий особый уровень гамильтониана, который без ограничения общности мы будем предполагать связным. Рассмотрим достаточно малую регулярную окрестность P особого слоя K . Как и в главе 2, в качестве такой окрестности удобно рассмотреть множество $P = F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, где ε достаточно мало для того, чтобы в эту окрестность не попало никаких особых точек гамильтониана кроме тех, что лежат на особом слое K . Наша задача — описать полный набор инвариантов гамильтоновой системы в окрестности особого слоя K , или — в терминологии главы 2 — на атоме (P, K) . Для нас наиболее интересным является случай, когда атом является седловым. Именно это мы будем ниже предполагать. В этом случае K является графом, все вершины которого имеют степень 4 и совпадают с особыми точками гамильтониана. Кроме того, без ограничения общности мы будем считать, что критическое значение c равно нулю, т. е. $F(K) = 0$.

6.1.1. Λ -инвариант

Рассмотрим все критические точки S_1, \dots, S_n функции F на P , т. е. вершины графа K . В каждой точке S_i мы можем рассмотреть линейризацию гамильтонова векторного поля $w = \text{sgrad } F$ и собственные значения λ_i и μ_i линейризованной системы. Поскольку рассматриваемое векторное поле — гамильтоново, то $\lambda_i = -\mu_i$, а в силу невырожденности особой точки $\lambda_i > 0$. Хорошо

известно, что λ_i — гладкий инвариант поля w в особой точке S_i . Однако при гомеоморфизмах он не обязан сохраняться. Другими словами, каждое из чисел λ_i , рассматриваемое по отдельности, не является инвариантом в смысле топологической сопряженности. Тем не менее, рассмотрев все эти числа в совокупности, мы можем изготовить из них топологический инвариант. Вместо собственных значений линеаризованного векторного поля нам будет при этом удобнее рассмотреть их обратные величины $\Lambda_i = \lambda_i^{-1}$.

Определение 6.1. Совокупность вещественных чисел $\{\Lambda_1 : \Lambda_2 : \dots : \Lambda_n\}$, рассматриваемых с точностью до пропорциональности, мы назовем Λ -инвариантом гамильтоновой системы $w = \text{sgrad } F$ на атоме (P, K) .

Комментарий. Если (x^1, x^2) — локальная система координат в окрестности особой точки S_i , то число Λ_i может быть вычислено по следующей явной формуле

$$\Lambda_i = \left(-\frac{\det(d^2 F)}{\det \Omega} \right)^{1/2},$$

где $d^2 F = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^j}(S_i) \right)$ и $\Omega = (\omega_{kl}(S_i))$ — матрица симплектической формы.

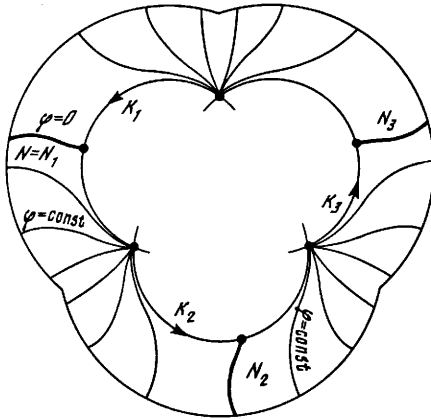


Рис. 6.1

действие-угол s и φ . Сейчас нас будет интересовать переменная «угол» φ . Эта переменная является гладкой функцией на кольце, а потому можно рассмотреть ее линии уровня. Линии уровня φ определены неоднозначно, поскольку угол на каждой неособой окружности (являющейся линией уровня переменной действия s) определен с точностью до сдвига. Поэтому, если мы хотим изобразить линии уровня функции φ , нам нужно сначала выбрать и фиксировать начало отсчета на каждой траектории. Это можно сделать, положив $\varphi|_N = 0$, где N — некоторый гладкий «отрезок», соединяющий пару точек на внешней и внутренней границе кольца и трансверсальный траекториям (рис. 6.1). После этого функция φ будет

Предложение 6.1. Λ -инварианты топологически сопряженных гамильтоновых систем (заданных на двух экземплярах одного и того же атома) совпадают.

Доказательство.

Мы начнем с некоторой технической, но важной леммы, которая будет использоваться нами неоднократно и в дальнейшем.

Удаляя из поверхности P особый слой K , мы превращаем P в несвязное объединение колец C_1, \dots, C_l , каждое из которых естественным образом расслоено на замкнутые траектории гамильтонова поля w . На каждом из этих колец мы можем ввести канонические переменные

определена однозначно. На рис. 6.1 изображена качественная картина поведений ее линий уровня. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 6.1. Пусть $C = C_m$ — произвольное кольцо атома (P, K) , K_{m_1}, \dots, K_{m_p} — ребра графа K , примыкающие (инцидентные) к данному кольцу C . Пусть S_{m_i} — вершины графа K , являющиеся концами ребер K_{m_i} . Тогда:

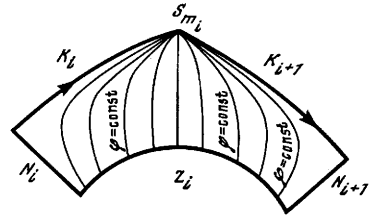


Рис. 6.2

а) На каждом ребре K_{m_i} существует единственная внутренняя точка x_i , являющаяся предельной точкой некоторой гладкой линии уровня $N = \{\varphi = \alpha_i\}$ переменной «угол» φ на кольце C (рис. 6.1). При этом начальный отрезок N совпадает с N_1 .

б) Отрезки N_i разбивают кольцо C в сумму «прямоугольников» Z_i , на каждом из которых линии уровня функции φ качественно ведут себя так, как это показано на рис. 6.2 (см. также рис. 6.1). Другими словами, все остальные линии уровня $\{\varphi = \text{const}\}$ (за исключением N_i) втыкаются в особые точки S_{m_i} .

в) Имеют место следующие формулы:

$$N_1 = \{\varphi = 0\},$$

а при $i = 1, \dots, p$

$$N_{i+1} = \left\{ \varphi = 2\pi \frac{\sum_{j=1}^i \Lambda_{m_j}}{\sum_{j=1}^p \Lambda_{m_j}} \right\}.$$

Другими словами, приращение переменной «угол» φ внутри области Z_i пропорционально числу Λ_{m_i} , отвечающему вершине S_{m_i} . Построенные в этой лемме линии уровня N_i мы будем называть отрезками раздела.

Доказательство.

Сначала докажем полезное вспомогательное утверждение, показывающее, с какой скоростью гамильтонов поток течет вблизи седловой особенности.

Рассмотрим на плоскости с координатами (u, v) функцию $F = uv$, произвольную симплектическую структуру $\omega = \omega(u, v) du \wedge dv$ и соответствующее гамильтоново поле $w = \text{sgrad } F$. Рассмотрим область G , изображенную на рис. 6.3. Она ограничена неотрицательными полуосями координат u и v , гиперболой $F = uv = \varepsilon_0$ и двумя отрезками $\gamma_1 = \{u = 1\}$ и $\gamma_2 = \{v = 1\}$, трансверсально пересекающимися линии уровня $F = \text{const}$. Рассмотрим функцию $\Pi(\varepsilon)$, сопоставляющую каждому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ время движения по куску γ_ε траектории $\{F = \varepsilon\}$, высекаемому отрезками γ_1 и γ_2 (рис. 6.3).

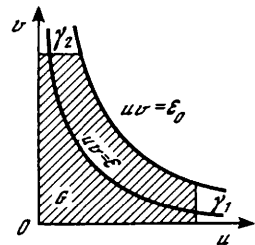


Рис. 6.3

Лемма 6.2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство:

$$\Pi(\varepsilon) = -P_n(\varepsilon) \ln(\varepsilon) + c(\varepsilon),$$

где P_n — некоторый полином степени n , а $c(\varepsilon)$ — функция класса C^n на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. При этом коэффициенты a_i полинома

$$P_n(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_n\varepsilon^n$$

совпадают с коэффициентами a_{ij} в тейлоровском разложении

$$\omega(u, v) \simeq \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij} u^i v^j.$$

В частности, $a_0 = \omega(0, 0)$.

Доказательство.

Мы утверждаем, что значение функции $\Pi(\varepsilon)$ может быть вычислено по формуле

$$\Pi(\varepsilon) = \int_{\gamma_\varepsilon} \omega(u, v) \frac{u du - v dv}{u^2 + v^2}.$$

Действительно, параметризуем γ_ε как траекторию векторного поля w . Тогда $\gamma_\varepsilon = (u(t), v(t))$, $t \in [0, \Pi(\varepsilon)]$ и

$$\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) = w = \omega^{-1}(dF) = \left(\frac{u}{\omega(u, v)}, -\frac{v}{\omega(u, v)} \right).$$

Подставляя в интеграл, получаем

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \omega(u, v) \frac{u du - v dv}{u^2 + v^2} = \int_0^{\Pi(\varepsilon)} dt = \Pi(\varepsilon).$$

Параметризуем теперь эту же кривую иначе:

$$\gamma(\varepsilon) = (\varepsilon e^\tau, e^{-\tau}), \quad \tau \in [0, -\ln \varepsilon],$$

Подставляя в интеграл, получаем

$$\Pi(\varepsilon) = \int_0^{-\ln \varepsilon} \omega(\varepsilon e^\tau, e^{-\tau}) d\tau.$$

Поскольку ω — гладкая функция, то справедливо представление

$$\omega(u, v) = a_{00} + u g_0(u) + v h_0(v) + u v l_0(u, v),$$

где g_0, h_0 и l_0 — гладкие функции. Применяя такое разложение для функции l_0 и повторяя эту процедуру несколько раз, мы получаем

$$\omega(\varepsilon e^\tau, e^{-\tau}) = \sum_{k=0}^n a_{kk} \varepsilon^k + \varepsilon e^\tau g_n(\varepsilon e^\tau) + e^{-\tau} h_n(e^{-\tau}) + \varepsilon^{n+1} l_n(\varepsilon e^\tau, e^{-\tau}),$$

где g_n, h_n и l_n — гладкие функции. Интегрируя это выражение по τ , получаем

$$\Pi(\varepsilon) = -\left(\sum_{k=0}^n a_{kk} \varepsilon^k\right) \ln \varepsilon + c(\varepsilon),$$

где $c(\varepsilon)$ — функция класса C^n на отрезке $[0, \varepsilon_0]$, что и требовалось доказать. Лемма 6.2 доказана. ■

Следствие. Функция $\Pi(\varepsilon)$ допускает представление

$$\Pi(\varepsilon) = -A(\varepsilon) \ln \varepsilon + B(\varepsilon),$$

где $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ — гладкие функции класса C^∞ на отрезке $[0, \varepsilon_0]$.

Вернемся к доказательству леммы 6.1. Рассмотрим на кольце C гладкие отрезки \tilde{N}_i , разбивающие кольцо на «прямоугольники» \tilde{Z}_i , как показано на рис. 6.4.

Каждому ребру K_{m_i} отвечает ровно один отрезок \tilde{N}_i . Напомним, что кольцо C расслоено на замкнутые траектории потока σ^t , и каждая такая траектория однозначно задается значением гамильтониана F на ней (мы будем обозначать ее через γ_F). Пусть $\Pi_i(F)$ — время прохождения точки внутри «прямоугольника» \tilde{Z}_i от его левой стороны \tilde{N}_i до правой стороны \tilde{N}_{i+1} под действием потока σ^t вдоль интегральной траектории γ_F .

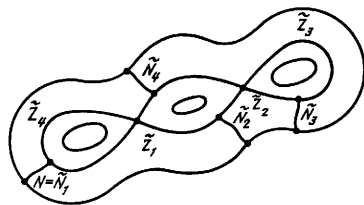


Рис. 6.4

Отметим, что в условиях леммы 6.2 вместо отрезков γ_1 и γ_2 можно рассмотреть любые другие гладкие кривые, пересекающие трансверсально оси координат. При этом вид формулы полностью сохраняется, лишь к функции $c(\varepsilon)$ добавится некоторая гладкая функция. Поэтому, используя лемму Морса, мы можем применить нашу лемму 6.2 к «прямоугольнику» \tilde{Z}_i . В результате (для $n = 0$) мы получаем следующее асимптотическое представление для функции $\Pi(F)$:

$$\Pi(F) = -\Lambda_{m_i} \ln F + c_i(F),$$

где $c_i(F)$ — функция непрерывная на всем отрезке $[0, F_0]$ (включая нуль).

Обозначим через $\Pi(F)$ полный период траектории γ_F . Функция $\Pi(F)$ будет неоднократно встречаться нам и в дальнейшем, и мы будем называть ее функцией периода (отвечающей данному кольцу C). Для каждого i рассмотрим далее функцию

$$\theta_i(F) = d_i \Pi(F) - \sum_{j=1}^i \Pi_j(F),$$

где $d_i = \left(\sum_{j=1}^i \Lambda_{m_j}\right) / \left(\sum_{j=1}^p \Lambda_{m_j}\right)$.

Утверждается, что эта функция непрерывна на всем отрезке $[0, F_0]$ и гладкая всюду, кроме, быть может, нуля. В самом деле, все «чистые логарифмы», входящие в выражения для периодов, сокращаются и в результате остается выражение:

$$\theta_i(F) = d_i \left(\sum_{j=1}^m c_j(F) \right) - \sum_{j=1}^i c_j(F),$$

которое, очевидно, является непрерывной функцией от F на всем отрезке $[0, F_0]$, включая нуль.

Отметим, что если бы функции θ_i оказались тождественно равными нулю, мы получили бы, что $\sum_{j=1}^i \Pi(F) = d_i \Pi(F)$. Это означало бы, что приращение переменной «угол» φ в каждом прямоугольнике \tilde{Z}_i равняется в точности $\frac{2\pi \Lambda_{m_i}}{\sum_{j=1}^p \Lambda_{m_j}}$.

Другими словами, отрезки \tilde{N}_i оказались бы линиями уровня переменной φ и совпали бы с искомыми отрезками N_i . Мы используем здесь тот факт, что для каждой траектории γ_F ее естественный параметр t и переменная «угол» φ связаны простым соотношением $d\varphi = \left(\frac{2\pi}{\Pi(F)} \right) dt$, т.е. попросту пропорциональны с постоянным на траектории коэффициентом.

Однако, вообще говоря, θ_i отличны от нуля. Но они оказались непрерывными функциями от F , поэтому нам достаточно рассмотреть новые отрезки N_i , получающиеся из исходных отрезков \tilde{N}_i некоторыми сдвигами. А именно, нужно сдвинуть каждую точку отрезка \tilde{N}_i на величину $\theta_i(F)$. Более точно, каждая точка на \tilde{N}_i задается некоторым значением F , и сдвигать ее нужно вдоль траектории потока σ^t на величину $\theta_i(F)$. Ясно, что для построенных таким путем новых отрезков N_i новые функции θ_i уже будут тождественно равны нулю, и тогда вступает в силу сделанное выше замечание. Новые отрезки N_i являются гладкими на открытом кольце и каждый из них имеет предельную точку на внутренней границе кольца, которую мы и обозначим через x_i .

Итак, мы построили отрезки N_i таким образом, что выполнена формула пункта «в» леммы 6.1. Осталось доказать единственность точки x_i (см. пункт «а» леммы) и то, что все остальные траектории ведут себя так, как указано в пункте «б». Другими словами, достаточно доказать, что в «прямоугольнике» Z_i все остальные линии уровня функции φ втыкаются в особую точку S_{m_i} . Но этот факт легко следует из уже использованного нами соотношения $d\varphi = \left(\frac{2\pi}{\Pi(F)} \right) dt$.

Действительно, если мы сместимся с построенного нами отрезка $N_i = \{\varphi = \alpha_i\}$ внутрь прямоугольника Z_i на произвольную положительную величину $\Delta\varphi$, то вблизи графа K мы удалимся от отрезка N_i на сколь угодно большое время в смысле потока σ^t , поскольку $\Pi(F) \rightarrow \infty$ при $F \rightarrow 0$. Поэтому предельной точкой сдвинутого отрезка $\{\varphi = \alpha_i + \Delta\varphi\}$ (т.е. линии уровня функции φ) может быть только особая точка S_{m_i} . Лемма 6.1 полностью доказана. ■

Комментарий. Начальный отрезок $N = N_1$ предполагался гладким, однако ясно, что можно было бы взять любой непрерывный отрезок на кольце C , соединяющий

пару точек на противоположных границах кольца и по одному разу пересекающей каждую интегральную траекторию потока σ^t . Все отличие от доказанной выше леммы 6.1 будет тогда состоять в том, что и все остальные отрезки N_i (строющиеся при помощи N_1) также будут непрерывными дугами, соединяющими пары точек на противоположных границах кольца и пересекающими по одному разу каждую интегральную траекторию потока.

Возвращаемся к доказательству предложения 6.1. Пусть (P, K) и (P', K') — два экземпляра одного и того же атома V , на которых заданы топологически сопряженные между собой гамильтоновы системы w и w' . Пусть $\xi: P \rightarrow P'$ — сопрягающий гомеоморфизм. Обозначим через Λ_i и Λ'_i значения Λ -инварианта первой и второй системы соответственно. Здесь одинаковыми индексами мы нумеруем особые точки первой системы S_i и их образы $S'_i = \xi(S_i)$.

Граф K разбивает P в объединение колец. Пусть C — любое из них и C' — кольцо, отвечающее ему при гомеоморфизме ξ . Рассмотрим на кольце C систему отрезков раздела N_i , построенных при помощи леммы 6.1, и отвечающих некоторой переменной «угол» φ .

Рассмотрим образы $N'_i = \xi(N_i)$ отрезков N_i при гомеоморфизме ξ . Они разбивают кольцо C' в объединение прямоугольников Z_i . Эти отрезки будут линиями уровня переменной «угол» φ' при условии, что за начальный отрезок (отвечающий $\varphi' = 0$) взят отрезок $\xi(N_1)$. Это сразу следует из топологической сопряженности систем w и w' . Более того, функция φ' принимает на отрезках N'_i те же значения, что и функция φ на отрезках N_i . Таким образом, N'_i являются отрезками раздела для кольца C' и обладают всеми свойствами, перечисленными в лемме 6.1, в частности, для них верна формула пункта «в».

Поскольку $\varphi_i|_{N_i} = \varphi'_i|_{N'_i}$, то отсюда мы сразу получаем, что

$$\frac{\sum_{j=1}^i \Lambda_{m_j}}{\sum_{j=1}^p \Lambda_{m_j}} = \frac{\sum_{j=1}^i \Lambda'_{m_j}}{\sum_{j=1}^p \Lambda'_{m_j}}.$$

Из этого соотношения сразу следует, что наборы чисел Λ_{m_i} и Λ'_{m_i} для каждого кольца C и его образа C' совпадают с точностью до пропорциональности. Проводя это рассуждение для всех остальных колец, мы получаем утверждение предложения 6.1.

6.1.2. Δ -инвариант и Z -инвариант

Мы снова воспользуемся леммой 6.1 для построения двух новых инвариантов гамильтоновой системы в окрестности особого слоя. Будем считать, что ориентация на поверхности P задается симплектической структурой ω . Граф $K = F^{-1}(0)$ разбивает P на кольца C_1, \dots, C_l .

Определение 6.2. Кольцо $C = C_m$ будем называть *положительным*, если функция F на этом кольце больше нуля, и *отрицательным*, если $F < 0$.

Комментарий. Это определение эквивалентно следующему. Кольцо называется положительным, если поток σ^t течет по внешней границе кольца в положительном направлении. При этом граница кольца называется внутренней, если она

примыкает к графу K и внешней — в противном случае. Здесь мы считаем, что ориентация на внешней границе кольца индуцируется ориентацией атома при помощи внешней нормали. Отсюда следует, что свойство кольца быть положительным или отрицательным сохраняется при топологической сопряженности потоков.

Рассмотрим все ребра K_i графа $K = F^{-1}(0)$. К каждому ребру K_i примыкают ровно два кольца — одно положительное и одно отрицательное. На каждом из этих колец определим, следуя лемме 6.1, переменные «действие-угол» s и φ и отрезки раздела (т. е. линии уровня функций «угол», втыкающиеся в ребра K_i). В результате на каждом ребре мы получаем пару точек, которые мы обозначим через x_i^+ и x_i^- (соответственно, для положительного и отрицательного колец).

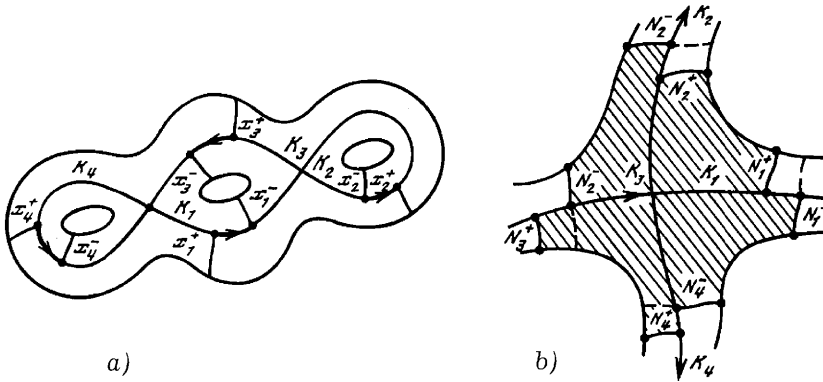


Рис. 6.5

В дальнейшем будем называть x_i^+ и x_i^- соответственно положительной и отрицательной точками раздела на ребре K_i графа K .

В силу предположения о морсовости функции F , гамильтоново поле $w = \text{sgrad } F$ отлично от нуля во всех внутренних точках ребер графа K . Поэтому поток σ^t не является тождественным ни на одном из ребер K_i . Обозначим через t_i время, за которое точка под действием потока σ^t перемещается из положения x_i^- в положение x_i^+ (рис. 6.5-а). Другими словами, t_i однозначно определяется из соотношения $x_i^+ = \sigma^{t_i}(x_i^-)$. Рассмотрим теперь формальную линейную комбинацию вида $l = \sum t_i K_i$ как одномерную цепь l (в смысле теории вещественных гомологий) на графе K . Здесь ребра K_i рассматриваются как одномерные клетки. Ориентация на них задается потоком σ^t .

Ясно, что сама эта цепь не является инвариантом гамильтоновой системы, поскольку отрезки раздела не определены однозначно. Однако неоднозначность их выбора легко контролируется. Действительно, на каждом кольце мы можем независимо сдвигать эти отрезки «на одну и ту же величину». При этом и соответствующие им точки раздела также будут смещаться, но величина их смещения (в смысле потока σ^t) для точек, лежащих на одном и том же кольце, будет одинаковой.

Что это означает в терминах цепи l ? Чтобы дать ответ на этот вопрос, рассмотрим замкнутую поверхность \hat{P} , которая получается из P заклеивкой дисками

всех граничных окружностей (т. е. заменой колец на диски). Граф K задает, очевидно, клеточное разбиение поверхности \tilde{P} , и мы можем поэтому определить отвечающие этому разбиению группы вещественных клеточных цепей, циклов и границ $C_k(\tilde{P})$, $Z_k(\tilde{P})$ и $B_k(\tilde{P})$ соответственно, рассматривая формальные линейные комбинации k -мерных клеток ($k = 0, 1, 2$).

Используя эти гомологические термины, легко увидеть, что неоднозначность в выборе отрезков раздела отражается на одномерной цепи $l \in C_1(\tilde{P})$ следующим образом: она определена с точностью до одномерных границ, т. е. корректно определенным является ее класс $[l]$ в фактор-пространстве $C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P})$.

Мы видели при доказательстве предложения 6.1, что при топологическом сопряжении ξ отрезки раздела переходят в отрезки раздела. Следовательно, и точки раздела x_i^+ и x_i^- переходят при этом в некоторые точки раздела $x_i'^+ = \xi(x_i^+)$ и $x_i'^- = \xi(x_i^-)$. Кроме того, поскольку ξ сопрягает потоки σ^t и $\sigma^{t'}$, то из условия $x_i^+ = \sigma^{ti}(x_i^-)$ следует, что $x_i'^+ = \sigma^{t'i}(x_i'^-)$. Другими словами, сопряжение ξ сохраняет коэффициенты цепи l .

Это рассуждение показывает, что класс $[l] \in C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P})$ является корректно определенным инвариантом гамильтоновой системы на атоме (в смысле топологической сопряженности).

Нам удобнее будет разделить инвариант $[l]$ на два более простых инварианта. Воспользуемся для этого следующим формальным изоморфизмом

$$C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P}) \cong C_1(\tilde{P})/Z_1(\tilde{P}) + Z_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P}) \cong B_0(\tilde{P}) + H_1(\tilde{P}),$$

где $B_0(\tilde{P})$ — группа 0-мерных границ, а $H_1(\tilde{P})$ — группа одномерных вещественных гомологий замкнутой поверхности \tilde{P} . Указанный выше изоморфизм не является естественным, однако, его можно задать явно, введя скалярное произведение на пространстве одномерных цепей $C_1(\tilde{P})$. Пусть для определенности одномерные цепи вида $1 \times K_i$, где K_i — ребра графа K (т. е. 1-клетки), образуют ортонормированный базис в пространстве $C_1(\tilde{P})$.

Построим из цепи l два новых объекта. Спроектируем l ортогонально на пространство циклов $Z_1(\tilde{P})$ и рассмотрим класс гомологий получившегося цикла $z = \pi(l)$, где $\pi: C_1(\tilde{P}) \rightarrow Z_1(\tilde{P})$ — ортогональное проектирование.

Определение 6.3. Класс гомологий $[z] \in H_1(\tilde{P}) = Z_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P})$ мы будем обозначать через Z и называть его Z -инвариантом гамильтоновой системы w (на атоме (P, K)).

Далее, рассмотрим границу $\partial(l) \in B_0(\tilde{P})$ цепи l . Здесь $\partial: C_1(\tilde{P}) \rightarrow B_0(\tilde{P})$ — стандартный граничный оператор.

Определение 6.4. Границу $\partial(l) \in B_0(\tilde{P})$ цепи l мы будем обозначать через Δ и называть ее Δ -инвариантом гамильтоновой системы w (на атоме (P, K)).

Легко видеть, что Z и Δ не меняются при изменении цепи l на 1-границу. Таким образом, каждому классу $[l] \in C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P})$ мы сопоставили пару Δ и Z . Это сопоставление задает указанный выше изоморфизм $C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P}) \cong \cong B_0(\tilde{P}) + H_1(\tilde{P})$, поэтому пара (Δ, Z) содержит ровно столько же информации

о гамильтоновой системе, что и исходный класс $[I] \in C_1(\tilde{P})/B_1(\tilde{P})$. Кроме того, поскольку $[I]$, как мы уже показали, является инвариантом гамильтоновой системы, то таковыми являются Δ и Z . Другими словами, имеет место следующее утверждение.

Предложение 6.2. *Δ -инварианты и Z -инварианты топологически сопряженных гамильтоновых систем (заданных на двух экземплярах одного и того же атома) совпадают.*

Сейчас мы дадим иную интерпретацию коэффициентов нульмерной цепи $\Delta = \sum \Delta_i S_i$, чрезвычайно полезную для дальнейшего (здесь S_i — вершины графа K , т.е. нульмерные клетки). Отметим, что нульмерную границу Δ можно понимать как набор вещественных чисел, стоящих на вершинах графа K , сумма которых равна нулю. Оказывается, числа Δ_i можно задать явными формулами, как функции от Λ -инварианта и полных периодов потока σ^t на кольцах атома.

Рассмотрим любую вершину $S = S_j$ графа K и инцидентные с ней четыре ребра графа: K_1, K_2, K_3, K_4 . На каждом из ребер K_i отмечены две точки раздела: x_i^+ и x_i^- . В них втыкаются соответствующие трансверсальные отрезки раздела (рис. 6.5-b) N_i^+ и N_i^- . Рассмотрим ограниченную ими область $U = U(S_j)$, показанную штриховкой на рис. 6.5-b. Она состоит из четырех секторов, ограниченных ребрами графа K , отрезками раздела и линиями уровня $F = \pm \varepsilon_0$ функции F . К каждому из этих секторов мы можем применить утверждение леммы 6.2 при $n = 0$. В результате в каждом из них возникает непрерывная функция $c_i(F)$, входящая в формулу для функции $\Pi_i(F)$, которая задает время движения точки в секторе от одного отрезка раздела до другого. Рассмотрим значения этих четырех функций в нуле, т.е. четыре числа $c_i(0) = c_i$.

К выбранной нами вершине S примыкают четыре кольца (некоторые из которых могут, вообще говоря, совпадать). Обозначим эти кольца через $C_I, C_{II}, C_{III}, C_{IV}$. Пусть $\Pi_I(F), \Pi_{II}(F), \Pi_{III}(F), \Pi_{IV}(F)$ — соответствующие функции периода. Для каждой из них, как мы видели выше, имеет место асимптотика вида

$$\Pi_I(F) = -\Lambda_I \ln |F| + c_I(F),$$

где $c_I(F)$ — функция, непрерывная в нуле, а Λ_I — сумма величин Λ_i по всем вершинам графа K , принадлежащим границе кольца C_I с учетом кратности (аналогично для остальных трех колец). Функции $c_I(F)$ мы будем иногда называть конечными частями функций периодов. Положим $c_I = c_I(0)$. Аналогичным образом определяются числа c_{II}, c_{III}, c_{IV} как значения конечных частей функций периодов $\Pi_{II}(F), \Pi_{III}(F), \Pi_{IV}(F)$ при $F = 0$.

Предложение 6.3. *В каждой вершине $S = S_j$ графа K имеют место следующие равенства*

$$a) \quad \Delta_j = c_1 + c_2 - c_3 - c_4.$$

$$b) \quad c_1 = \left(\frac{\Lambda_j}{\Lambda_I} \right) c_I, \quad c_2 = \left(\frac{\Lambda_j}{\Lambda_{II}} \right) c_{II},$$

$$c_3 = \left(\frac{\Lambda_j}{\Lambda_{III}} \right) c_{III}, \quad c_4 = \left(\frac{\Lambda_j}{\Lambda_{IV}} \right) c_{IV}.$$

Доказательство.

Начнем с пункта а). Рассмотрим область U на рис. 6.5-б. Изготовим из нее обычный крест \tilde{U} , как показано на рис. 6.5-б, т.е. продолжив отрезки раздела N_i^- внутрь положительных колец (эти продолжения нарисованы пунктиром на рис. 6.5-б). Рассмотрим для креста \tilde{U} соответствующие новые величины $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_4$, определяемые тем же способом, что и c_1, \dots, c_4 в случае области U . Обозначим через t_1, \dots, t_4 коэффициенты коцепи l , отвечающие ребрам K_1, \dots, K_4 . Напомним, что они определяются из соотношений $\sigma^{t_i}(x_i^-) = x_i^+$ (для $i = 1, 2, 3, 4$). Из определения областей U и \tilde{U} легко следует, что:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 - c_1 &= t_2 - t_1, & \tilde{c}_2 - c_2 &= 0, \\ \tilde{c}_3 - c_3 &= t_4 - t_3, & \tilde{c}_4 - c_4 &= 0. \end{aligned}$$

Сложим эти четыре равенства с учетом знаков таким образом, чтобы получить следующее выражение:

$$(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_3 - \tilde{c}_2 - \tilde{c}_4) - (c_1 + c_3 - c_2 - c_4) = t_2 + t_4 - t_1 - t_3.$$

Лемма 6.3. *В сделанных выше предположениях $c_1 + c_3 - c_2 - c_4 = 0$.*

Доказательство.

По построению крест \tilde{U} ограничивается линиями уровня гамильтониана $F = \pm \varepsilon_0$ и четырьмя гладкими кривыми, являющимися продолжениями отрезков раздела N_i^- на положительные кольца. Легко видеть, что рассматриваемая нами величина $\tilde{c}_1 + \tilde{c}_3 - \tilde{c}_2 - \tilde{c}_4$ остается постоянной при изменении этих кривых (требуется лишь, чтобы они оставались гладкими и трансверсальными траекториям потока). Кроме того, мы можем при вычислениях воспользоваться леммой Морса–Дарбу (см. ниже главу 8 тома 1), которая утверждает, что в окрестности седловой особой точки $S = S_j$ существуют локальные координаты (u, v) , в которых $F = uv$, $\omega = \omega(uv) du \wedge dv$.

Таким образом, без ограничения общности мы можем считать, что крест \tilde{U} задается в координатах (u, v) следующими соотношениями: $|uv| < \varepsilon_0$, $|u| < 1$, $|v| < 1$, т.е. является стандартным. Для такого креста все вычисления легко проводятся явно (см. выше доказательство леммы 6.2). Сделав это, мы увидим, что для стандартного креста все \tilde{c}_i просто равны нулю. Лемма доказана. ■

Теперь для завершения доказательства достаточно заметить, что альтернированная сумма $t_1 - t_2 + t_3 - t_4$ по определению совпадает с коэффициентом нульмерной цепи ∂l . Формула (а) доказана.

Докажем соотношение $c_1 = \left(\frac{\Lambda_j}{\Lambda_I}\right) c_I$ из пункта (б). Рассмотрим для этого «прямоугольник», высекаемый на кольце C_I отрезками раздела N_1^+ и N_2^+ . Обозначим через $\Pi_1(F)$ время прохождения потока внутри рассматриваемого прямоугольника вдоль траектории γ_F с данным значением гамильтониана F (приращение времени внутри прямоугольника). Как мы уже видели выше, приращение угла на любом участке траектории и приращение времени t в смысле потока w связаны простым соотношением $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{\Pi_I(F)}$. Но в силу лем-

мы 6.2 для приращения «угла» в рассматриваемом «прямоугольнике» мы имеем $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Lambda_j}{\Lambda_I}$. Поэтому $\Pi_1(F) = \frac{\Lambda_j}{\Lambda_I}\Pi_I(F)$. Переходя в этом равенстве к «конечным частям» c_1 и c_I функций $\Pi_1(F)$ и $\Pi_I(F)$, мы получаем требуемое равенство $c_1 = \left(\frac{\Lambda_j}{\Lambda_I}\right)c_I$. Предложение доказано. ■

6.2. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с точностью до топологической сопряженности

Итак, каждой гамильтоновой системе на данном атоме (т.е. в регулярной окрестности особого уровня гамильтониана) мы сопоставили тройку инвариантов (Λ, Δ, Z) . Оказывается, эти инварианты образуют полный набор, т.е. их достаточно для классификации систем относительно топологической сопряженности.

Теорема 6.1. Пусть w и w' — гамильтоновы системы на двумерных компактных поверхностях X и X' с морсовскими гамильтонианами F и F' соответственно. Пусть $K = F^{-1}(0)$ и $K' = F'^{-1}(0)$ — связные особые уровни гамильтонианов, гомеоморфные между собой вместе с некоторыми регулярными окрестностями (т.е. отвечающие одному и тому же атому). Тогда следующие два условия эквивалентны:

- 1) для некоторых окрестностей $P = U(K)$ и $P' = U'(K')$ этих особых слоев существует гомеоморфизм $\xi: P \rightarrow P'$, сопрягающий гамильтоновы системы w и w' и сохраняющий ориентацию;
- 2) соответствующие тройки инвариантов (Λ, Δ, Z) и (Λ', Δ', Z') совпадают.

Комментарий. Более точно, совпадение инвариантов означает следующее: особый слой K можно гомеоморфно отобразить на K' вместе с некоторой окрестностью так, что при этом

- 1) сохраняется ориентация,
- 2) сохраняется знак гамильтониана,
- 3) тройка (Λ, Δ, Z) переходит в тройку (Λ', Δ', Z') . Это условие по-прежнему является комбинаторным. Его важно учитывать в случае, когда атомы, отвечающие рассматриваемым особенностям, допускают нетривиальные симметрии.

Доказательство.

а) Пусть системы w и w' топологически сопряжены в некоторых окрестностях особых слоев K и K' . Тогда совпадение троек их инвариантов следует из предложений 6.1, 6.2.

б) Пусть теперь, наоборот, тройки инвариантов (Λ, Δ, Z) и (Λ', Δ', Z') совпадают. В качестве окрестностей P и P' мы как обычно возьмем множества вида $P = F^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ и $P' = F'^{-1}[-\varepsilon', \varepsilon']$, так чтобы пары (P, K) и (P', K') имели структуру двух гомеоморфных атомов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Величина ε' в определенном смысле задает «ширину атома». Эта «ширина» зависит на самом деле от величины ε и, более того, зависит от кольца атома P' . Эта зависимость вытекает из необходимости уравнивания функций периодов. Выбор ε' для каждого кольца будет прокомментирован ниже на шаге 3.

Построение сопрягающего гомеоморфизма $\xi: P \rightarrow P'$ разобьем на несколько этапов.

Шаг 1. Выберем на всех кольцах атома (P, K) отрезки раздела, как это делалось при построении Δ и Z . На каждом ребре K_i возникнет пара точек раздела x_i^+ и x_i^- , с помощью которых мы построим для данного атома цепь l (см. выше). Сделаем то же самое для атома P' . Мы имеем некоторый гомеоморфизм $\xi_0: (P, K) \rightarrow (P', K')$, переводящий тройку инвариантов (Λ, Δ, Z) в тройку (Λ', Δ', Z') . Ясно, что отрезки раздела на втором атоме P' можно выбрать таким образом, чтобы при этом гомеоморфизме цепь l переходила в цепь l' .

Шаг 2. Строим новый гомеоморфизм ξ_C на каждом кольце C атома P на соответствующее ему кольцо $C' = \xi_0(C)$ в атоме P' . Пусть для определенности кольца C и C' — отрицательны. Возьмем произвольный начальный отрезок раздела N_C на кольце C , один конец которого — это точка раздела x_i^- , и соответствующий ему отрезок раздела N'_C на кольце C' (этот отрезок уже построен на первом шаге).

Введем на каждом из колец C и C' естественные системы координат. В качестве первой координаты на кольце C возьмем функцию F (растущую вдоль отрезка N_C), $F \in [-\varepsilon, 0)$. В качестве второй координаты t возьмем время, определяемое потоком σ^t на каждой линии уровня функции F (она же интегральная траектория γ_F). При этом мы отсчитываем это время от начальной точки, лежащей на отрезке N_C . В результате получаем гладкие координаты (F, t) на открытом кольце C . То же самое мы делаем на кольце C' и получаем гладкие координаты (F', t') на открытом кольце C' . Ясно, что координата t (соотв. t') определена по модулю периода $\Pi(F)$ (соотв. $\Pi'(F')$).

Шаг 3. Из леммы 6.2 следует, что обе функции периодов $\Pi(F)$ и $\Pi'(F')$ монотонно стремятся к бесконечности при $F \rightarrow 0$ и $F' \rightarrow 0$. Отсюда легко следует, что функции периодов $\Pi(F)$ и $\Pi'(F')$ сопряжены в окрестности нуля, т. е. существует непрерывная монотонная замена $F' = \tau(F)$ такая, что $\Pi(F) = \Pi'(\tau(F))$. Без ограничения общности мы будем считать, что эта замена переводит отрезок $[-\varepsilon, 0]$ в точности в отрезок $[-\varepsilon', 0]$.

Рассмотрим теперь гомеоморфизм ξ_C кольца C на кольцо C' , задаваемый явной формулой:

$$\xi_C(F, t) = (\tau(F), t)$$

или, что то же самое,

$$F' = \tau(F) \text{ и } t' = t.$$

Этот гомеоморфизм корректно определен, поскольку предварительно мы уравнивали периоды потоков на соответствующих интегральных траекториях. Далее, гомеоморфизм $\xi_C: C \rightarrow C'$ является сопряжением потоков σ^t и σ'^t , поскольку мы положили $t' = t$.

Шаг 4. Лемма 6.4.

- а) Построенный выше гомеоморфизм ξ_C непрерывно продолжается на границу кольца C .
- б) Гомеоморфизмы типа ξ_C , построенные описанным способом для различных колец, непрерывно сшиваются в единый гомеоморфизм атома (P, K) на атом (P', K') .

Доказательство.

Рассмотрим на кольцах C и C' стандартные переменные действие-угол, причем будем считать, что угол отсчитывается от начальных отрезков N_C и $N_{C'}$. Тогда при отображении ξ_C линии уровня переменной угол для системы w переходят в линии уровня переменной угол для системы w' с теми же самыми значениями угла.

Воспользуемся теперь леммой 6.1 и совпадением Λ -инвариантов. По определению отрезки раздела на кольцах C и C' являются линиями уровня переменных «угол» φ и φ' . В силу леммы 6.1 значение «угла» на отрезках раздела вычисляется однозначно по Λ -инварианту. Поэтому (т. к. Λ -инварианты совпадают) при отображении ξ_C отрезки раздела переходят в отрезки раздела.

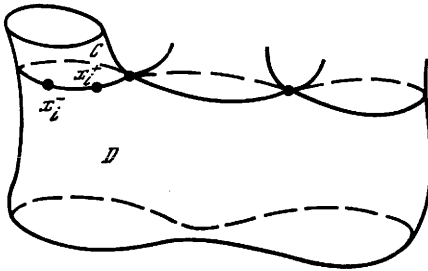


Рис. 6.6

Таким образом, отображение ξ_C может быть корректно определено в тех точках графа K , которые являются концами отрезков раздела на кольцах C и C' (т. е. в точках раздела). Возьмем произвольное ребро K_i графа K , к которому примыкает кольцо C . Это ребро является интегральной траекторией поля w (сепаратрисой). Поскольку отображение ξ_C уже задано нами в одной из точек этой интегральной траектории, то его можно

продолжить до гомеоморфизма из K_i на K'_i , требуя сохранения естественной параметризации на этих ребрах, рассматриваемых как траектории гамильтоновых потоков.

Делая то же самое для всех ребер, лежащих на границе кольца C , мы однозначно продолжаем отображение ξ_C на внутреннюю границу кольца C . Непрерывность полученного отображения очевидна. Именно здесь мы используем известную нам информацию о совпадении Λ -инвариантов сравниваемых потоков. Пункт (а) леммы доказан.

Докажем пункт (б). Берем два соседних кольца C и D (рис. 6.6) — отрицательное и положительное, — примыкающие к критическому уровню функции F . На них (включая примыкающие к ним ребра графа K) сопрягающие гомеоморфизмы ξ_C и ξ_D уже построены. Пусть ребро K_i примыкает одновременно к кольцам C и D . Нам нужно доказать, что гомеоморфизмы ξ_C и ξ_D на этом ребре совпадают. На ребре K_i имеется пара точек раздела x_i^+ и x_i^- , аналогичная пара $x_i'^+$ и $x_i'^-$ имеется на его образе K' . По построению $\xi_C(x_i^-) = x_i'^-$ и $\xi_D(x_i^+) = x_i'^+$.

Теперь легко видеть, что доказываемое утверждение легко следует из совпадения цепей l и l' . Действительно, $x_i^+ = \sigma^{t_i}(x_i^-)$ и $x_i'^+ = \sigma^{t_i}(x_i'^-)$, где t_i коэффициент цепей l и l' , отвечающий ребрам K_i и K'_i . Но тогда, поскольку ξ_C является сопряжением, мы получаем

$$\xi_C(x_i^+) = \xi_C(\sigma^{t_i}(x_i^-)) = \sigma^{t_i}(\xi_C(x_i^-)) = \sigma^{t_i}(x_i'^-) = x_i'^+ = \xi_D(x_i^+).$$

Аналогично $\xi_C(x_i^-) = \xi_D(x_i^-) = x_i'^-$. Ясно, что совпадая хотя бы в одной точке ребра K_i , гомеоморфизмы ξ_C и ξ_D будут совпадать на всем ребре K_i . Лемма 6.4 доказана. ■

Доказательство этой леммы фактически завершает доказательство теоремы 6.1. Действительно, построенные нами сопрягающие гомеоморфизмы $\xi_C: C \rightarrow C'$ в силу леммы 6.4 сшиваются в единый сопрягающий гомеоморфизм $\xi: P \rightarrow P'$. Теорема 6.1. доказана. ■

Комментарий. Из доказательства легко увидеть, что на самом деле построенный гомеоморфизм, сопрягающий потоки, является гладким всюду за исключением точек графа K .

Комментарий. В случае простейшего особого слоя типа восьмерки, содержащего ровно одну особую точку гамильтониана (т.е. в случае атома B), все построенные нами инварианты тривиальны. Таким образом, в этом случае любые две гамильтоновы системы являются топологически сопряженными в некоторых окрестностях особых слоев.

Итак, мы описали полный набор атомных инвариантов гамильтоновых систем с одной степенью свободы. В силу теоремы редукции (теорема 5.1) теперь мы можем траекторно (непрерывно) классифицировать интегрируемые системы на трехмерных атомах. Напомним, что для этого мы должны вместо исходного гамильтонова потока v на 3-атоме рассмотреть соответствующий ему поток Пуанкаре на трансверсальной площадке. Отметим, однако, что трансверсальная площадка выбирается неоднозначно (даже с точностью до изотопии). Поэтому Λ -, Δ - и Z -инварианты потока Пуанкаре будут, вообще говоря, зависеть от выбора трансверсальной площадки. Можно ли описать эту зависимость явно? Положительный ответ будет получен ниже. Оказывается, он формулируется в терминах некоторой довольно естественной операции на множестве гамильтоновых систем, заданных на фиксированном 2-атоме. Описанию этой операции посвящен параграф 6.4.

В заключение отметим, что полученные результаты позволяют классифицировать интегрируемые системы с точностью до топологической сопряженности

не только на отдельных атомах, но и на замкнутых компактных 2-поверхностях. Для этого следует дополнить обнаруженные выше инварианты еще одним, являющимся аналогом R -инварианта на ребре молекулы. Здесь вместо R -вектора нужно взять Π -вектор, построенный по функции периодов $\Pi(t)$, определенной на цилиндрах, соединяющих различные атомы. В результате получается некоторый граф Y , который естественно назвать точной молекулой. Совпадение точных молекул — необходимое и достаточное условие точной эквивалентности систем с одной степенью свободы на замкнутых 2-поверхностях. Детали мы изложим ниже.

6.3. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с инволюцией с точностью до топологической сопряженности

В теореме редукции траекторной классификации трехмерных систем к точной классификации двумерных систем мы выделяли два естественных случая. Первый — когда 3-атом не имеет критических окружностей с неориентируемой сепаратрисной диаграммой. Соответствующий 2-атом в этом случае не имеет вершин-звездочек. Второй — когда такие критические окружности есть. В этом случае соответствующий 2-атом имеет вершины-звездочки. Теорема 6.1 дает полное описание «атомных» инвариантов гамильтоновых потоков на 3-атомах для первого случая. Теперь мы перейдем к описанию инвариантов на 3-атомах $U(L)$, где есть критические окружности с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами. В этом случае, как мы показали в предыдущей главе, теорема редукции также имеет место, но теперь мы должны рассматривать потоки на 2-атомах P_{tr} с инволюцией χ . Напомним, что P_{tr} — это трансверсальное сечение в 3-атоме $U(L)$. Его фактор по инволюции χ дает 2-атом P с вершинами-звездочками. В этом смысле P_{tr} — дубль атома P .

Согласно теореме редукции, мы должны научиться решать следующую задачу. Пусть на поверхности P_{tr} задана инволюция χ и гамильтонов поток σ^t , отвечающий гамильтонову полю $w = \text{sgrad } F$, инвариантный относительно χ . Нужно классифицировать потоки σ^t с точностью до топологических сопряжений, согласованных с инволюцией χ . Другими словами, мы считаем две тройки (P_{tr}, σ^t, χ) и $(P'_{tr}, \sigma'^t, \chi')$ эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\xi: P \rightarrow P'$ такой, что $\chi' = \xi^{-1}\chi\xi$, $\sigma'^t = \xi^{-1}\sigma^t\xi$. Для классификации нужны подходящие инварианты. Естественно изготовить их из уже описанных выше инвариантов (Λ, Δ, Z) , учтя теперь наличие инволюции χ .

Обозначим через $(\Lambda_{tr}, \Delta_{tr}, Z_{tr})$ инварианты потока σ^t на дубле P_{tr} . Поскольку поток σ^t инвариантен относительно инволюции χ , то и эти инварианты выдерживают действие этой же инволюции. Поэтому можно считать, чисто формально, что они принимают значения на фактор-пространстве $P = P_{tr}/\chi$. Поверхность P — это 2-атом со звездочками. Обозначим эти значения через (Λ, Δ, Z) .

Другими словами, мы считаем, что инвариант Λ — это набор чисел на вершинах графа K атома P . Инвариант Δ — это элемент группы нульмерных граней $B_0(\tilde{P})$. Инвариант Z — это элемент группы гомологий $H_1(\tilde{P})$, где \tilde{P} —

замкнутая поверхность, полученная из атома P заклеивкой дисками всех его граничных окружностей.

Таким образом, траекторные инварианты гамильтоновой системы на 3-атоме $U(L)$, имеющем критические окружности с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами, принимают значения на соответствующем 2-атоме P со звездочками, а не на его дубле P_{tr} . И это очень хорошо, так как атом P определен однозначно, а его дубль P_{tr} — неоднозначно. Опишем теперь эту конструкцию подробнее.

Возьмем произвольное трансверсальное сечение P_{tr} для данного 3-атома $U(L)$. На ней действует инволюция χ , определенная в предыдущей главе. Рассмотрим проекцию

$$(P_{tr}, K_{tr}) \rightarrow (P, K) = (P_{tr}, K_{tr})/\chi.$$

На вершинах графа K_{tr} уже расставлены числа Λ_i . Эти числа образуют инвариант $\Lambda_{tr} = \{\Lambda_1 : \Lambda_2 : \dots : \Lambda_n\}$ потока Пуанкаре на трансверсальном сечении P_{tr} . Возьмем произвольную вершину графа K и сопоставим ей число Λ_i , стоящее на прообразе этой вершины в графе K_{tr} . Вершина из графа K имеет либо один прообраз (тогда это — звездочка), либо два прообраза. В случае двух прообразов, на них стоит одно и то же число Λ_i в силу инвариантности потока σ^t относительно инволюции χ . Таким образом, мы корректно определим во всех вершинах графа K некоторый набор чисел $\{\Lambda_i\}$. Обозначим его через Λ .

Теперь определим инварианты Δ и Z . Для этого рассмотрим все кольца дубля P_{tr} . Они разбиваются на два класса. Первый класс — кольца, переходящие в себя под действием инволюции χ . Второй класс состоит из пар колец, переходящих друг в друга под действием инволюции χ . На кольцах первого типа выберем отрезки раздела произвольным образом. Отметим сразу, что полученный набор отрезков раздела на каждом таком кольце будет автоматически инвариантен относительно инволюции χ .

На кольцах второго типа поступим так. Берем пару колец, переходящих друг в друга при действии χ . На одном из колец выберем отрезки раздела произвольным образом. На другом кольце в качестве отрезков раздела возьмем их образы под действием χ .

Теперь точно таким же образом, как и выше, построим одномерную цепь l_{tr} . Легко видеть, что эта 1-цепь инвариантна относительно χ . Дело в том, что набор отрезков раздела был построен так, что он инвариантен относительно χ . Рассмотрим теперь произвольное ребро графа K . У него есть ровно два ребра-прообраза в графе K_{tr} . Коэффициенты цепи l_{tr} , отвечающие этой паре ребер, одинаковы. Это общее их значение мы и припишем ребру графа K . В результате получим некоторую 1-цепь, которую мы обозначим через l . Другими словами, мы фактически отождествляем множество χ -инвариантных 1-цепей графа K_{tr} с множеством 1-цепей графа K .

Теперь, точно так же, как и выше, из 1-цепи l мы изготавливаем инварианты Δ и Z для гамильтонова потока σ^t , инвариантного относительно инволюции χ .

Итак, каждому χ -инвариантному потоку σ^t на дубле, т. е. на трансверсальном сечении P_{tr} , мы сопоставили тройку инвариантов (Λ, Δ, Z) , принимающих

значения на атоме $P = P_{tr}/\chi$. Отметим, что на самом атоме P никакого гамильтонова потока уже нет. Симплектическая структура «не спускается» с P_{tr} на P , поскольку проекция $P_{tr} \rightarrow P$ не является локальным диффеоморфизмом около вершин-звездочек. Однако с формальной точки зрения искомые инварианты (Λ, Δ, Z) в конце концов появляются все-таки на атоме P , а не на его дубле P_{tr} .

Эта тройка (Λ, Δ, Z) и дает полный набор инвариантов для гамильтоновой системы на 2-атоме с инволюцией (или, что то же самое, полный набор траекторных инвариантов на 3-атоме, имеющем критические окружности с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами). Подчеркнем, что говоря о 2-атомах с инволюцией, мы имеем в виду инволюцию весьма специального вида: она является симплектической, сохраняет гамильтонов поток, и ее неподвижными точками являются некоторые из вершин графа K_{tr} . Кроме того, напомним, что здесь мы рассматриваем только системы с морсовскими гамильтонианами.

Теорема 6.2. Пусть даны два гладких гамильтоновых потока на атомах с инволюциями (σ^t, P_{tr}, χ) и $(\sigma'^t, P'_{tr}, \chi')$. Эти потоки топологически сопряжены при помощи гомеоморфизма, согласованного с инволюциями χ и χ' , тогда и только тогда, когда соответствующие им инварианты (Λ, Δ, Z) и (Λ', Δ', Z') совпадают.

Теорема 6.2 доказывается по аналогии с теоремой 6.1. Действительно, по инвариантам (Λ, Δ, Z) и (Λ', Δ', Z') мы можем однозначно восстановить обычные инварианты $(\Lambda_{tr}, \Delta_{tr}, Z_{tr})$ и $(\Lambda'_{tr}, \Delta'_{tr}, Z'_{tr})$ этих систем. В силу теоремы 6.1 из их совпадения следует топологическая сопряженность потоков σ^t и σ'^t пока без учета инволюции. Однако этот недостаток легко исправить, учитывая симметрию инвариантов относительно инволюций.

6.4. Операция вклейки-вырезания

Рассмотрим произвольный седловой 2-атом (P^2, K) с заданной на нем гамильтоновой системой $w = \text{sgrad } F$. Будем считать без ограничения общности, что $K = F^{-1}(0)$ и $P^2 = F^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Рассмотрим важную операцию, позволяющую перестраивать систему на атоме. Эта операция будет менять класс сопряженности системы и наша цель состоит в том, чтобы понять, как именно он будет меняться.

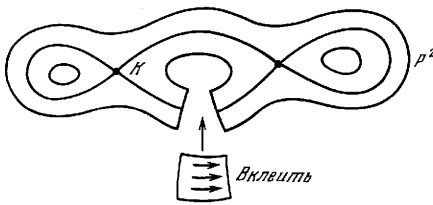


Рис. 6.7

Рассмотрим произвольное ребро K_i графа K . Разрежем поверхность P вдоль некоторого гладкого отрезка, трансверсально пересекающего ребро K_i и траектории векторного поля w (пример показан на рис. 6.7). Рассмотрим в стороне от этого атома «прямоугольник» $M_i = [0, m_i] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, где m_i — некоторое положительное число, а 2ε — «шири-

на» атома, другими словами $-\varepsilon$ и ε являются пределами изменения гамильтониана F внутри атома. Введем на M_i естественные декартовы координаты (u, f) ,

где $u \in [0, m_i]$, а $f \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, и рассмотрим векторное поле $\frac{\partial}{\partial u}$. Можно считать, при желании, это векторное поле гамильтоновым относительно формы $du \wedge df$ с гамильтонианом f . Траектории этого поля расслаивают прямоугольник в горизонтальном направлении, причем время прохождения каждой траектории внутри прямоугольника одно и то же и равно m_i .

Вклеим теперь этот прямоугольник M_i в разрезанную поверхность P так, как показано на рис. 6.7: боковые стороны прямоугольника приклеиваются к берегам разреза, причем линии $\{f = f_0\}$ становятся частью линий уровня $\{F = f_0\}$. Другими словами, мы увеличиваем на m_i время движения потока вдоль ребра K_i и на всех близких траекториях, вынуждая поток проходить дополнительный участок M_i . В силу теоремы Дарбу можно считать, что эти склейки проведены гладко, и в результате мы получаем новую гладкую гамильтонову систему \tilde{w} на том же самом атоме.

Описанную операцию Φ мы назовем вклейкой нового куска в исходный поток σ^t на ребре K_i графа K .

Рассмотрим теперь обратную операцию. Как и выше выберем трансверсальный к ребру K_i отрезок и рассмотрим его сдвиг вдоль гамильтонова потока на время m_i . В результате мы получим еще один трансверсальный отрезок. Эти два отрезка высекают на поверхности P некоторый прямоугольник. Вырежем этот прямоугольник из поверхности P и склеим естественным образом два берега разрезав (т.е. первоначальный отрезок и его образ при сдвиге на m_i).

Эту обратную операцию Φ^{-1} мы назовем вырезанием куска исходного потока на ребре K_i графа K .

Рассмотрим теперь общую операцию, являющуюся композицией операций вклейки и вырезания. Рассмотрим на каждом ребре K_i графа K произвольное вещественное число m_i . Мы можем трактовать эту совокупность чисел как некоторую вещественную одномерную коцепь m_i на графе K . Если m_i положительно, то мы применим операцию вклейки на соответствующем ребре, если же m_i — отрицательно, то к потоку мы применим операцию Φ^{-1} вырезания куска из потока на данном ребре K_i . Обозначим через Φ_m результирующую операцию (являющуюся композицией указанных выше элементарных операций). Ясно, что результат не зависит от порядка применения элементарных операций.

Определение 6.5. Операцию Φ_m мы назовем *вклейкой-вырезанием* куска потока, отвечающей данной 1-коцепи m (на графе K).

Операция Φ_m обладает следующими двумя очевидными свойствами:

- 1) $\Phi_{m_1} \circ \Phi_{m_2} = \Phi_{m_2} \circ \Phi_{m_1} = \Phi_{m_1+m_2}$,
- 2) $\Phi_{-m} = \Phi_m^{-1}$.

Отсюда сразу следует, что мы получаем действие группы одномерных коцепей графа K на пространстве гамильтоновых систем на данном атоме с морсовскими гамильтонианами.

Наша цель — понять, что происходит с системой в результате применения операции Φ_m . Для этого нам нужно на самом деле выяснить действие этой операции на инварианты Λ , Δ и Z этой системы. Обозначим это индуцированное

действие через Φ_m^* . Легко видеть, что оно действительно корректно определено, поскольку под действием операции Φ_m сопряженные системы переходят в сопряженные.

Прежде всего заметим, что при действии операции Φ_m^* Λ -инвариант не меняется. Действительно, все изменения происходят «вдалеке» от особых точек гамильтониана.

Изменения Δ - и Z -инвариантов под действием операции Φ_m^* нетривиальны. Несложно показать (см. [33]), что это действие допускает следующее представление

$$\begin{aligned}\Phi_m^*(\Delta) &= \Delta + \phi_1(m), \\ \Phi_m^*(Z) &= Z + \phi_2(m),\end{aligned}$$

где $\phi_1: C^1(\tilde{P}) \rightarrow B_0(\tilde{P})$ и $\phi_2: C^1(\tilde{P}) \rightarrow H_1(\tilde{P})$ — некоторые линейные операторы (зависящие, вообще говоря, от значения Λ -инварианта системы, к которой применяется операция вклейки-вырезания).

Отметим, что мы не знаем пока какие значения могут принимать инварианты Δ и Z на фиксированном атоме $V = (P, K)$. Рассмотрим всевозможные гамильтоновы системы на этом атоме с одним и тем же значением Λ -инварианта.

Обозначим через $\Delta(V)$ и $Z(V)$ подмножества в $B_0(\tilde{P})$ и $H_1(\tilde{P})$ соответственно, состоящие из всевозможных значений Δ - и Z -инвариантов для таких систем.

Определение 6.6. $\Delta(V)$ и $Z(V)$ мы будем соответственно называть *множествами допустимых значений* Δ - и Z -инвариантов.

Подчеркнем, что эти множества зависят от значения заранее фиксированного Λ -инварианта.

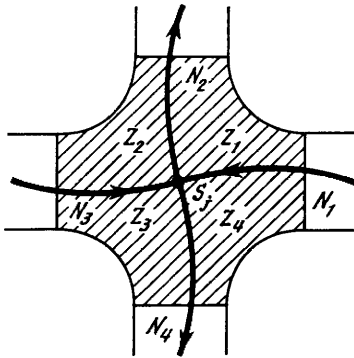


Рис. 6.8

Изначально, вообще говоря, действие Φ_m^* определено только на множествах допустимых инвариантов $\Delta(V)$ и $Z(V)$, но используя явные формулы для этого действия, его можно распространить на пространства $B_0(\tilde{P})$ и $H_1(\tilde{P})$ целиком. Подмножества $\Delta(V)$ и $Z(V)$ при этом останутся, разумеется, инвариантными. Проанализируем структуру этих множеств.

Предложение 6.4. Действие Φ^* на множествах допустимых значений инвариантов $\Delta(V)$ и $Z(V)$ является транзитивным. Эти множества совпадают соответственно с образами операторов ϕ_1 и ϕ_2 и, в частности, являются линейными подпространствами.

Доказательство.

Для доказательства этого утверждения нам достаточно проверить, что с помощью подходящей операции Φ_m мы можем из любой системы получить новую систему с нулевыми инвариантами Δ и Z . Прделаем это.

Итак, пусть нам дана некоторая гамильтонова система w на атоме $V = (P, K)$. Рассмотрим одну из вершин S_j графа K . На каждом из четырех ребер выберем по точке и, проведя через них трансверсальные отрезки N_1, N_2, N_3, N_4 , окружим

вершину S_j «крестом». Напомним, что на каждом из четырех «прямоугольников» Z_i , на которые крест делится графом K (см. рис. 6.8) возникает функция (см. выше)

$$\Pi_i(F) = -\Lambda_j \ln |F| + c_i(F),$$

где $c_i(F)$ — непрерывная функция, имеющая в нуле некоторый конечный предел $c_i = c_i(0)$. Легко видеть, что смещая отрезки N_i , можно добиться того, чтобы все c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) были одновременно равны нулю (см. лемму 6.3). При этом ясно, что величины c_i зависят только от точек пересечения отрезков N_i с ребрами K_i .

Продеваем теперь эту процедуру со всеми вершинами графа K и окружим каждую вершину таким крестом. В результате мы получим картину, изображенную на рис. 6.9. Отметим, что некоторые из этих крестов могут пересекаться, накладываясь друг на друга.

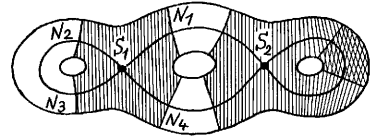


Рис. 6.9

Для каждого ребра графа рассмотрим теперь область, ограниченную парой граничных отрезков соседних крестов. Изменим граничные отрезки (не меняя их точек пересечения с графом K) таким образом, чтобы эта область стала прямоугольником (т.е. время прохождения потока от одного граничного отрезка до другого постоянно). В силу сделанного выше замечания это не изменит основного свойства крестов, которое нам понадобится: все c_i равны нулю.

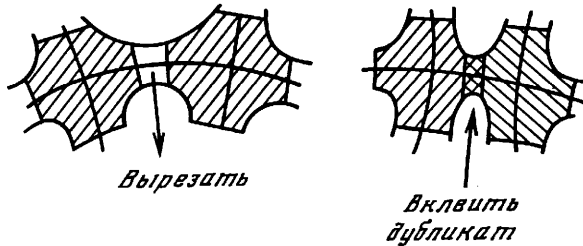


Рис. 6.10

Теперь осталось заметить, что эти области для каждого из ребер графа — в точности те прямоугольники, которые фигурируют в определении операции Φ_m . Продеваем эту операцию: вырежем те области, которые не покрываются крестами, и вклеим их дубликаты там, где эти области являются пересечением пары соседних крестов (рис. 6.10). Легко видеть, что в результате мы получили систему, склеенную непосредственно из выделенных крестов (без наложений и пропусков).

Мы утверждаем, что эта система имеет нулевые инварианты Δ и Z . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим один из трансверсальных отрезков, являющийся границей между двумя соседними крестами. Рассмотрим одну из его половинок как начальный отрезок раздела на одном из колец. Восстановим теперь все остальные отрезки раздела на этом кольце. Они уже не будут, вообще говоря, совпадать с граничными отрезками между крестами, но как нетрудно заме-

тить, соответствующие точки раздела будут в точности совпадать с точками вида $N_i \cap K_i$, где N_i — граничный отрезок между двумя соседними крестами, пересекающий ребро K_i . Проделав эту процедуру для всех колец мы убеждаемся в том, что точки раздела x_i^+ и x_i^- будут совпадать, что и означает равенство нулю инвариантов Δ и Z . Предложение доказано. ■

Среди всех систем на V с нулевыми значениями Δ - и Z -инвариантов мы выделим одну специальную систему, называемую 0-моделью. Как мы только что видели, система на атоме может быть склеена из систем, заданных на отдельных крестах, окружающих вершины графа. Рассмотрим простейшие системы на таких крестах. А именно, представим каждый крест на плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ в виде области $|u| \leq 1, |v| \leq 1, |F| \leq \varepsilon_0$, где $F = uv$. Рассмотрим на этом кресте дифференциальную форму $\Lambda_j du \wedge dv$ и гамильтоново векторное поле $w = \text{sgrad } F$. Одним из свойств этой системы будет то, что функция $\Pi_i(F)$, определяющая время движения потока внутри креста (в i -ом квадранте) будет очень простой

$$\Pi_i(F) = -\Lambda_j \ln |F|.$$

Здесь Λ_j — значение Λ -инварианта на соответствующей вершине S_j графа K . Склеим теперь поверхность P из «канонических крестов». Склейку мы производим по граничным отрезкам, каждый из которых параметризован функцией F . Разумеется, мы склеиваем между собой точки этих отрезков с одинаковым значением функции F , так что в результате функции на отдельных крестах сшиваются в единую функцию F на атоме. Кроме того (пользуясь теоремой Дарбу) мы можем гладко шить и симплектические структуры и гамильтоновы потоки. В результате мы получим некоторую гладкую гамильтонову систему $w = \text{sgrad } F$ на всем атоме P . Отметим, что в этом случае отрезки, по которым склеивались кресты, уже в точности будут отрезками раздела. Построенную систему мы и будем называть 0-моделью данного атома V .

Изучим теперь более подробно свойства представления Φ^* . Отметим, что пока интерпретация набора чисел $m = \{m_i\}$ как коцепи остается загадочной. Однако сейчас мы увидим ее естественность.

Ниже мы будем рассматривать несколько естественных объектов:

$K(\tilde{P})$ — клеточное разбиение (комплекс) поверхности \tilde{P} , порожденное графом K ;

$K^*(\tilde{P})$ — двойственное клеточное разбиение поверхности \tilde{P} .

Как и выше, через C_i, B_i, Z_i мы будем обозначать пространства i -мерных цепей, границ и циклов, отвечающих комплексу $K(\tilde{P})$. Через C_i^*, B_i^*, Z_i^* мы обозначим аналогичные пространства для двойственного комплекса $K^*(\tilde{P})$. И наконец, через C^i, B^i, Z^i мы будем обозначать пространства i -мерных коцепей, кограниц и коциклов соответственно для коцепного комплекса, отвечающего клеточному комплексу $K(\tilde{P})$. Отметим стандартные естественные изоморфизмы $C_i^* \cong C^{2-i}, B_i^* \cong B^{2-i}, Z_i^* \cong Z^{2-i}$. Через ∂ и δ мы будем обозначать граничный и кограничный операторы.

Лемма 6.5. Если 1-коцепь t является кограницей, то операция Φ_m не меняет класса топологической сопряженности системы. На языке инвариантов это означает, что имеет место включение $B^1 \subset \ker \phi_1$, $B^1 \subset \ker \phi_2$.

Доказательство.

Докажем это утверждение для базисных кограниц. Одномерные коцепи мы будем интерпретировать как линейные комбинации вида $\sum m_i K_i^*$, где K_i^* — ребра сопряженного графа. Рассмотрим произвольную вершину S графа K . Пусть K_{i_1}, K_{i_3} — входящие в нее ребра, а K_{i_2}, K_{i_4} — выходящие. Тогда базисная кограница (отвечающая вершине S) может быть записана так

$$m = K_{i_1}^* + K_{i_3}^* - K_{i_2}^* - K_{i_4}^*.$$

Применим операцию Φ_m к 0-модели, склеенной из некоторого числа «канонических крестов». Ясно, что эту операцию можно провести на кресте, соответствующем вершине S . Операция состоит в том, что мы отрезаем от двух противоположных сторон угла по одному прямоугольнику, а затем точно такие же прямоугольники приклеиваем к двум другим противоположным сторонам (см. рис. 6.11). В результате крест из абсолютно симметричного превращается в крест «сплюснутый» в горизонтальном направлении и «вытянутый» в вертикальном. Но различие этих двух крестов проявляется лишь с «евклидовой» точки зрения. С «гамильтоновой» точки зрения эти кресты совершенно идентичны: один из них переходит в другой в результате сдвига на единицу вдоль гамильтонова потока. При этом и симплектическая структура, и гамильтониан, и гамильтонов поток сохраняются. Но не меняя креста, мы не меняем и исходную систему, т. е. $\phi_1(m) = 0$ и $\phi_2(m) = 0$. Лемма доказана. ■

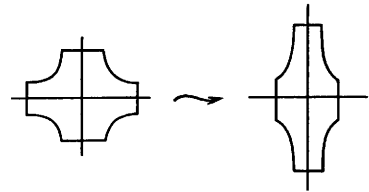


Рис. 6.11

Следствие. Корректно определен линейный оператор

$$\phi'_2: H^1(\tilde{P}) \rightarrow H_1(\tilde{P}),$$

удовлетворяющий соотношению $\phi'_2[m] = [\phi_2(m)]$ для любого 1-коцикла $m \in Z^1$.

Этот оператор, как мы увидим ниже, имеет довольно прозрачный топологический смысл, и будет использован нами в следующем параграфе для описания области допустимых значений Δ -инварианта.

Лемма 6.6. Если 1-цепь t является коциклом, то операция Φ_m не меняет Δ -инварианта системы. Другими словами, $Z^1 \subset \ker \phi_1$.

Доказательство.

Применим операцию Φ_m к 0-модели, считая $m = \sum m_i K_i$ произвольным 1-коциклом. Это, как нетрудно видеть, означает, что для каждого кольца атома $V = (P, K)$ (которое заклеивается диском для получения поверхности \tilde{P}) сумма чисел m_i по всем ребрам графа, примыкающим к этому кольцу, равна нулю. С точки зрения операции Φ_m это эквивалентно тому, что равна нулю сумма длин всех прямоугольников, «вклеенных» на данном кольце. Это означает,

что для каждой траектории ее период не изменился. Итак, все функции периодов сохранились. Но мы знаем (см. предложение 6.3), что через величины этих функций можно явно вычислить значение Δ -инварианта. Следовательно Δ -инвариант не изменился и остался равным нулю, т. е. $m \in \ker \phi_1$. Лемма доказана. ■

Поскольку фактор-пространство C^1/Z^1 канонически изоморфно пространству 2-кограниц B^2 , то из доказанной леммы мы получаем следующее утверждение.

Следствие. *Корректно определен линейный оператор*

$$\phi'_1: B^2 = B_0^* \rightarrow B_0,$$

удовлетворяющий соотношению $\phi_1 = \phi'_1 \circ \delta$.

Ясно, что множество $\Delta(V)$ допустимых значений Δ -инварианта совпадает с образом оператора ϕ'_1 . Этот оператор перерабатывает набор чисел b , стоящих на кольцах атома P в набор чисел Δ , стоящих на его вершинах.

Следующее утверждение дает явную формулу для этого оператора. Рассмотрим произвольную вершину S_j графа K и примыкающие к ней четыре кольца $C_I, C_{II}, C_{III}, C_{IV}$ (см. аналогичную конструкцию и обозначения в предложении 6.3). Этим кольцам сопоставлены вещественные числа $b_I, b_{II}, b_{III}, b_{IV}$ — коэффициенты нульмерной границы $b \in B_0^*$.

Лемма 6.7. *Коэффициент Δ_j нульмерной границы $\Delta = \phi'_1(b) = \phi(m)$, отвечающий вершине S_j , может быть вычислен по следующей формуле*

$$\Delta_j = \Lambda_j \left(\frac{b_I}{\Lambda_I} + \frac{b_{II}}{\Lambda_{II}} + \frac{b_{III}}{\Lambda_{III}} + \frac{b_{IV}}{\Lambda_{IV}} \right).$$

Доказательство.

На самом деле эта формула нам фактически уже известна (см. предложение 6.3). Чтобы показать это, рассмотрим произвольную 1-коцепь m такую, что $\delta m = b$. Применим к 0-модели операцию вклейки-вырезания Φ_m . Ясно, что у исходной 0-модели все конечные части периодов были равны нулю. Теперь же после операции вклейки-вырезания конечные части периодов на каждом кольце изменились на суммарную длину всех прямоугольников, вклеенных на данном кольце. Но соответствующая сумма с точностью до знака совпадает с коэффициентом кограницы δm , стоящем на рассматриваемом кольце. Более точно, коэффициенты кограницы и конечные части периодов совпадают на положительных кольцах и отличаются знаком на отрицательных.

Другими словами, если какая-либо система получена из 0-модели операцией Φ_m , то конечные части функций периодов этой системы на кольцах атома с точностью до знака совпадают с коэффициентами кограницы $b = \delta m$.

После этого замечания доказываемая нами формула непосредственно вытекает из формул предложения 6.3. ■

Замечание. Сумма конечных частей b_i функции периодов (взятых со знаками) равна нулю. Это следует из приведенной выше интерпретации набора $\{b_i\}$ как кограницы коцепи m . То же самое утверждение легко следует из леммы 6.3 этой главы.

6.5. Описание области значений Δ - и Z -инвариантов

Выше были введены множества $\Delta(V)$ и $Z(V)$, являющиеся множествами допустимых значений Δ - и Z -инвариантов. Наша цель — описать эти множества, т. е. описать множества значений Δ и Z инвариантов.

Начиная с этого момента будем считать для простоты, что Λ -инвариант имеет вид $\{1 : 1 : \dots : 1\}$, т. е. все Λ_i равны между собой. Общий случай мы разберем затем отдельно.

Из определения оператора ϕ'_1 сразу следует, что множество допустимых значений Δ -инварианта совпадает с его образом $\text{Im}(\phi'_1)$. Поэтому наша цель — описать образ оператора $\phi'_1 : B_0^* \rightarrow B_0$. Распространим действие оператора ϕ'_1 с B_0^* на C_0^* , т. е. — на все пространство 0-цепей сопряженного графа Γ . Это распространение осуществляется при помощи доказанной выше явной формулы для оператора ϕ'_1 (см. лемму 6.7). Получающийся оператор обозначим через $\psi : C_0^* \rightarrow C_0$.

Как и выше, вершины графа K мы обозначаем через S_j , а вершины двойственного графа $\Gamma = K^*$ (отвечающие кольцам C_m) — через C_m^* . В качестве естественных базисов в пространствах 0-цепей C_0 и C_0^* мы возьмем наборы вершин S_1, \dots, S_n и C_1^*, \dots, C_l^* соответственно. Будем считать оба базиса ортонормированными.

Пусть $A(\psi) = (a_{jm})$ — матрица оператора относительно указанных базисов. Укажем явный вид коэффициентов a_{jm} . Из леммы 6.7 сразу вытекает, что числа a_{jm} имеют следующий вид:

$$a_{jm} = \begin{cases} 0, & \text{если } S_j \text{ не принадлежит границе} \\ & \text{кольца } C_m; \\ \frac{n(j, m)}{k(m)}, & \text{если вершина } S_j \text{ лежит} \\ & \text{на кольце } C_m. \end{cases}$$

Здесь $n(j, m)$ — кратность вхождения данной вершины S_j в кольцо C_m (кольцо может пройти мимо вершины один или два раза); число $k(m)$ — количество вершин графа K , мимо которых проходит кольцо C_m (с учетом кратности).

Лемма 6.8. *Образ оператора $\phi'_1 = \psi|_{B_0^*} : B_0^* \rightarrow B_0$ является пересечением образа оператора $\psi : C_0^* \rightarrow C_0$ с подпространством B_0 .*

Доказательство.

Требуемое равенство $\psi(B_0^*) = \psi(C_0^*) \cap B_0$ легко вытекает из двух очевидных фактов:

- 1) пространства 0-границ B_0^* и B_0 состоят из тех и только тех 0-цепей, сумма координат которых равна нулю,
- 2) оператор сохраняет сумму координат. ■

Теперь мы можем заняться изучением образа оператора ψ . Легко видеть, что этот образ является ортогональным дополнением к ядру оператора $\beta : C_0 \rightarrow C_0^*$, матрица которого получается из выписанной выше матрицы $A(\psi)$ транспонированием и умножением каждой строки на число $k(m)$. Это следует из того, что ядро β совпадает с ядром оператора, сопряженного к ψ .

Опишем явно действие оператора β . Набору чисел на вершинах графа K он ставит в соответствие набор чисел на кольцах C_m . А именно, число, которое он ставит на кольце C , равно сумме всех чисел, стоящих на вершинах графа K , мимо которых проходит это кольцо (с учетом кратности). Таким образом, оператор β оказывается довольно простым.

Рассмотрим линейное подпространство $\Delta^*(V) = \ker \beta$ в C_0 , образованное всеми наборами чисел, стоящими на вершинах графа K и обладающими тем свойством, что для каждого кольца сумма этих чисел по вершинам, входящим в это кольцо, равна нулю. Легко видеть, что общая сумма всех чисел из такого набора тоже равна нулю, и поэтому $\Delta^*(V) = \ker \beta$ является подпространством в B_0 . В результате мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 6.5. Пусть Λ -инвариант имеет вид $\{1 : 1 : \dots : 1\}$. Тогда пространство $\Delta(V)$ допустимых значений Δ -инварианта для данного атома $V = (P, K)$, является ортогональным дополнением к подпространству $\Delta^*(V)$ в B_0 .

Рассмотрим теперь случай, когда Λ -инвариант произвольный. Введем новое пространство $\Delta^*(V, \Lambda)$. Оно получается из подпространства $\Delta^*(V)$ следующим образом. Рассмотрим линейное преобразование пространства C_0 в себя, задаваемое на базисе, состоящем из вершин S_1, \dots, S_n , диагональной матрицей, по диагонали которой стоят числа $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$. Матрица определена с точностью до скалярного множителя, что не влияет на дальнейшие рассуждения. Образ подпространства $\Delta^*(V)$ в результате описанного линейного преобразования мы и обозначим через $\Delta^*(V, \Lambda)$. Отметим, что это подпространство уже не обязано лежать в B_0 .

Предложение 6.6. Пусть Λ -инвариант является произвольным. Тогда пространство $\Delta(V)$ допустимых значений Δ -инварианта для данного атома $V = (P, K)$ является пересечением ортогонального дополнения к $\Delta^*(V, \Lambda)$ с подпространством B_0 .

Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как и доказательство для случая $\Lambda = \{1 : 1 : \dots : 1\}$. ■

Отметим также, что из этого утверждения легко вытекает тот факт, что размерность пространства $\Delta(V)$ не зависит от значения Λ -инварианта.

Вернемся теперь снова к случаю, когда Λ -инвариант единичный.

На время мы можем забыть о гамильтоновых системах и рассмотреть совершенно частный вопрос о строении пространства $\Delta(V)$.

Итак, у нас имеется замкнутая ориентируемая двумерная поверхность \tilde{P} с вложенным в нее связным графом K . Этот граф разбивает поверхность на клетки (т. е. области, гомеоморфные диску), и каждая вершина графа имеет степень 4. Кроме этого выполнено еще одно условие: все двумерные клетки могут быть раскрашены в черный и белый цвет в шахматном порядке, т. е. так, что к каждому ребру графа K примыкают клетки разных цветов.

Элементом пространства $\Delta^*(V)$ является набор чисел на вершинах графа K такой, что для каждой двумерной клетки сумма чисел, стоящих на вершинах, лежащих на ее границе, равна нулю (при этом мы учитываем кратность вхождения вершины в границу клетки). Наша задача состоит в том, чтобы описать

все такие наборы и найти, в частности, размерность пространства $\Delta^*(V)$. Мы сейчас сделаем это, используя гомологические характеристики пары (\tilde{P}, K) .

Сопоставим каждому набору b из $\Delta^*(V)$ некоторую 1-коцепь на графе K . Напомним, что ребра графа K естественным образом ориентированы потоком, поэтому каждое ребро имеет однозначно определенное начало и конец. Рассмотрим 1-коцепь $y = \sum y_i K_i^*$, для которой коэффициент y_i равен числу, стоящему в вершине, являющейся началом ребра K_i (рис. 6.12). Это правило задает нам линейный оператор $\vartheta: C_0(\tilde{P}) \rightarrow C^1(\tilde{P})$.

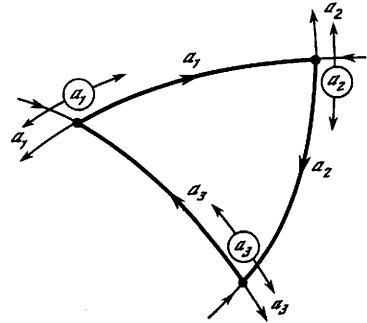


Рис. 6.12

Лемма 6.9. Если $b \in \Delta^*(V)$, то 1-коцепь $y = \vartheta(b)$ является 1-коциклом.

Доказательство.

Рассмотрим произвольное кольцо C атома V . Пусть K_{i_1}, \dots, K_{i_p} — ребра графа K , примыкающие к этому кольцу, а S_{i_1}, \dots, S_{i_p} — начала этих ребер, т. е. вершины лежащие на границе кольца. Нам достаточно проверить, что для любого кольца C сумма чисел вида y_{i_j} равна нулю, где y_{i_j} — значение коцепи y на ребре K_{i_j} , $j = 1, \dots, p$. Но это очевидно, поскольку по определению y_{i_j} равно числу, стоявшему ранее в вершине S_{i_j} , а сумма этих чисел была равна нулю по определению пространства $\Delta^*(V)$. ■

Отметим, что коцикл y не может быть произвольным. Дело в том, что он содержит некоторые «симметрии», а именно: он принимает одинаковые значения на паре ребер, выходящих из одной вершины. Легко видеть, что это — единственное ограничение на интересующие нас 1-коциклы. Устраним эту лишнюю (для нас) симметрию, перейдя от поверхности \tilde{P} к новому объекту — клеточному двумерному комплексу $\tilde{\tilde{P}}$, получающемуся из нее следующей склейкой. Для каждой вершины отождествим друг с другом пару выходящих из нее ребер графа K . В результате

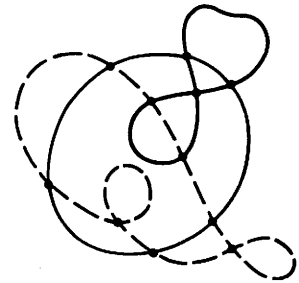


Рис. 6.13

получаем некоторое непрерывное отображение $p: \tilde{\tilde{P}} \rightarrow \tilde{P}$. Возникает встречное отображение $p^*: Z^1(\tilde{\tilde{P}}) \rightarrow Z^1(\tilde{P})$, которое изоморфно отображает пространство 1-коциклов комплекса $\tilde{\tilde{P}}$ на пространство интересующих нас «симметричных» 1-коциклов поверхности \tilde{P} . В результате мы имеем следующее утверждение.

Лемма 6.10. Линейное пространство $\Delta^*(V)$ естественным образом изоморфно пространству $Z^1(\tilde{\tilde{P}})$ 1-коциклов клеточного комплекса $\tilde{\tilde{P}}$.

Найдем размерность пространства $\Delta^*(V)$. В силу леммы 6.10 достаточно вычислить размерность $Z^1(\tilde{\tilde{P}})$.

Введем новый интересный объект — набор атомных окружностей, отвечающих данному атому V . Рассмотрим его граф K и произвольное ребро. Начнем двигаться по направлению к одной из двух вершин графа, являющихся концами ребра. Придя в вершину, мы можем однозначно выйти из нее по противоположному ребру креста (т. е. продолжать движение, не сворачивая). Движемся таким образом по графу K (вообще говоря, с самопересечениями) до тех пор, пока не вернемся на начальное ребро. Ясно, что в результате мы описали некоторую окружность, погруженную в 2-поверхность P . Берем какое-либо из оставшихся ребер (если такие есть) и повторяем процесс. В результате мы представим граф K как объединение некоторого числа окружностей $\gamma_1, \dots, \gamma_q$, погруженных в поверхность P (рис. 6.13).

Определение 6.7. Построенные описанным способом окружности $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ будем называть *атомными окружностями*.

Каждая атомная окружность γ_i , рассматриваемая как образ окружности при ее погружении в поверхность \tilde{P} , реализует некоторый 1-цикл $[\gamma_i]$ в группе одномерных вещественных гомологий $H_1(P)$. Обозначим через $\gamma H^1(\tilde{P})$ подгруппу в $H^1(\tilde{P})$, порожденную всеми циклами $[\gamma_1], \dots, [\gamma_q]$. Пусть $\dim \gamma H^1(\tilde{P})$ — ее размерность. Далее, напомним, что каждый атом V имеет род g , т. е. число ручек поверхности \tilde{P} .

Предложение 6.7. *Имеет место следующее равенство:*

$$\dim \Delta^*(V) = (q - 1) + 2g - \dim \gamma H^1(\tilde{P}).$$

Из предложений 6.6 и 6.7 вытекает интересующая нас формула для размерности пространства $\Delta(V)$ — пространства допустимых значений Λ -инварианта на атоме $V = (P, K)$.

Следствие. *Имеет место следующее равенство:*

$$\dim \Delta(V) = n - 2g - q + \dim \gamma H^1(\tilde{P}),$$

где n — число вершин графа K .

Доказательство предложения 6.7.

Как мы уже знаем, $\dim \Delta^*(V) = \dim Z^1(\tilde{\tilde{P}})$. Но $\dim Z^1(\tilde{\tilde{P}}) = \dim H^1(\tilde{\tilde{P}}) + \dim B^1(\tilde{\tilde{P}})$, где B^1 — пространство 1-кограниц. Поэтому требуемое равенство сразу вытекает из доказываемых ниже лемм 6.11 и 6.12. ■

Лемма 6.11. *Имеет место следующее равенство:*

$$\dim B^1(\tilde{\tilde{P}}) = q - 1,$$

где q — число атомных окружностей.

Доказательство.

Ясно, что число независимых 1-кограниц в комплексе $\tilde{\tilde{P}}$ на единицу меньше числа вершин комплекса $\tilde{\tilde{P}}$. Поэтому нужно доказать, что число вершин комплекса $\tilde{\tilde{P}}$ равно числу атомных окружностей.

Рассмотрим граф \tilde{K} — одномерный остов комплекса \tilde{P} . Он получается из графа K в результате склеек пар ребер, выходящих из каждой вершины графа K . Рассмотрим q абстрактно заданных непересекающихся окружностей. Чтобы получить из них граф \tilde{K} , нужно объявить их атомными окружностями, т. е. отобразить в поверхность \tilde{P} на граф K . На каждой такой абстрактно заданной окружности возникает набор точек — прообразов ее самопересечений и пересечений с другими окружностями внутри графа K . Эти вершины разбивают каждую абстрактную окружность на ориентированные дуги — будущие ребра графа K . Дуги, отвечающие тем ребрам, которые при переходе к графу \tilde{K} будут попарно склеиваться, мы обозначим одинаковыми буквами (рис. 6.14). Ясно, что эти дуги, снабженные одинаковыми буквами, стоят рядом и имеют противоположную ориентацию. Закрасим концы ориентированных дуг в белый цвет, а их начала — в черный (рис. 6.14). Из этого абстрактного набора окружностей мы хотим изготовить граф \tilde{K} . Для этого нужно провести два типа склеек.

Первый тип — попарные отождествления некоторых вершин, диктуемые пересечениями и самопересечениями окружностей внутри графа K (при выполнении отождествлений этого 1-го типа мы получим из абстрактного набора окружностей граф K). При этом каждая черная вершина обязательно отождествляется с некоторой белой вершиной. Дело в том, что каждая вершина графа K является одновременно началом двух выходящих ребер и концом двух входящих ребер.

Второй тип отождествлений — это склейки пар ребер, обозначенных одинаковыми буквами.

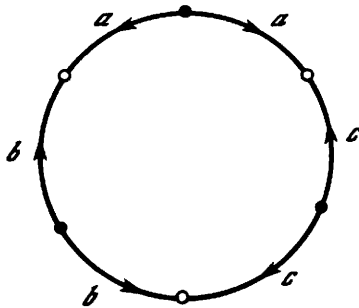


Рис. 6.14

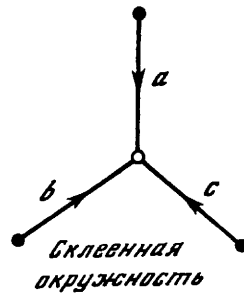


Рис. 6.15

Ясно, что мы можем провести эти два типа склеек в обратном порядке, т. е. сначала выполнить склейки второго типа, а лишь затем — склейки первого типа.

Начав со склеек второго типа, мы обнаруживаем, что каждая абстрактно заданная окружность превратится в «звезду», у которой в центре расположена белая вершина, а концы всех выходящих из центра ребер — черные (рис. 6.15). При этой склейке черные и белые вершины не перемешиваются.

Теперь мы можем приступить к склейкам первого типа. При этом (исходя из определения) мы должны склеить каждую черную (концевую) вершину каждой

звезды с какой-то другой белой (центральной) вершиной другой (быть может, той же самой) звезды.

В результате должен получиться граф \tilde{K} комплекса \tilde{P} . Совершенно очевидно, что при этой операции число белых вершин не меняется и все они превращаются в различные вершины комплекса \tilde{K} . Следовательно, число вершин комплекса \tilde{K} в точности равно числу белых вершин (после первой склейки), т. е. — числу исходных абстрактно заданных окружностей q . Лемма 6.11 доказана. ■

Лемма 6.12. *Имеет место следующее равенство:*

$$\dim H^1(\tilde{P}) = 2g - \dim \gamma H_1(\tilde{P}).$$

Доказательство.

Мы утверждаем, что интересующий нас комплекс \tilde{P} будет гомотопически эквивалентен комплексу, который может быть получен из поверхности \tilde{P} заклеивкой каждой атомной окружности диском. Более точно это означает, что сначала мы рассматриваем погружение S^1 в поверхность \tilde{P} , образом которого является данная атомная окружность, а затем, считая S границей 2-диска, приклеиваем этот диск по отображению его границы к \tilde{P} .

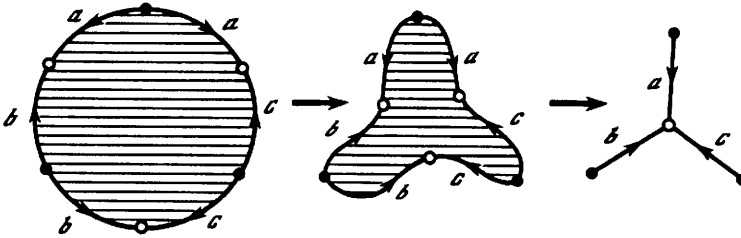


Рис. 6.16

Покажем, что полученный комплекс гомотопически эквивалентен комплексу \tilde{P} . Для этого устроим непрерывную деформацию каждого приклеенного 2-диска по себе так, чтобы граничная окружность стянулась на звезду с центральной белой вершиной и ребрами, кончающимися черными вершинами. Это в точности даст комплекс \tilde{P} (рис. 6.16).

Таким образом, при переходе от \tilde{P} к \tilde{P} мы заклеиваем дисками все атомные окружности и только их. С гомологической точки зрения это означает, что переходя от \tilde{P} к \tilde{P} мы просто «убиваем» циклы, образованные атомными окружностями. Следовательно, отображение $p_*: H_1(P) \rightarrow H_1(\tilde{P})$, индуцированное склейкой $p: \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}$, является эпиморфизмом, причем $\ker p_* = \gamma H_1(\tilde{P})$. Отсюда

$$\dim H^1(\tilde{P}) = \dim H_1(\tilde{P}) = \dim H_1(P) - \dim \gamma H_1(\tilde{P}) = 2g - \dim \gamma H_1(\tilde{P}),$$

что и требовалось доказать. ■

Опишем теперь базис в пространстве $\Delta^*(V)$.

Укажем сначала часть этого базиса, отвечающую атомным окружностям $\gamma_1, \dots, \gamma_q$. Возьмем любую атомную окружность γ_i и построим с ее помощью набор чисел $b(\gamma_i)$ на вершинах графа K , принадлежащий пространству $\Delta^*(V)$. Двигаясь вдоль этой окружности, мы будем поочередно ставить на встречающихся нам вершинах графа K числа $+1$ и -1 (рис. 6.17). Для определенности, стартуя с какого-нибудь ребра, мы ставим на его начало $+1$, а на конец -1 . Если через какую-то вершину мы проходим два раза, то, следуя сформулированному выше правилу, мы должны поставить на нее, как нетрудно убедиться, числа разных знаков (т. е. $+1$ и -1). В качестве итога возьмем их сумму, т. е. ноль. Кроме того, нули мы поставим на всех остальных вершинах графа K , через которые атомная окружность не проходит. В результате мы получим некоторую 0-мерную цепь $b(\gamma_i)$.

Несложно непосредственно убедиться в том, что 0-цепи $b(\gamma_1), \dots, b(\gamma_{q-1})$ являются линейно независимыми элементами пространства $\Delta^*(V)$. Для формального доказательства достаточно воспользоваться описанным выше изоморфизмом пространства $\Delta^*(V)$ и пространства $Z^1(\tilde{P})$ 1-коциклов комплекса \tilde{P} (лемма 6.10). Напомним, что каждой атомной окружности γ_i взаимно-однозначно соответствует некоторая вершина \tilde{S}_j комплекса \tilde{P} .

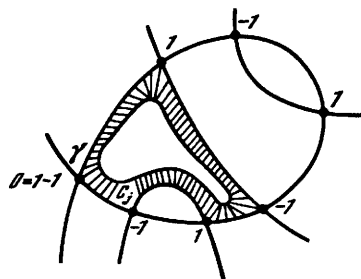


Рис. 6.17

Рассмотрим элементарную коцепь $\tilde{S}_j^* \in C^0(\tilde{P})$, отвечающую этой вершине. Легко видеть, что кограница этой коцепи в точности отвечает элементу $b(\gamma_i)$.

Перейдем к явному описанию «второй половины» базиса в подпространстве $\Delta^*(V)$. Эта часть базиса отвечает элементам группы $H^1(\tilde{P})$. Рассмотрим подгруппу $\gamma H_1(\tilde{P})$, порожденную классами гомологий $[\gamma_i]$ $1 \leq i \leq q$ на поверхности \tilde{P} . Пусть α — произвольный целочисленный 1-коцикл из $H^1(\tilde{P})$, ортогональный подпространству $\gamma H_1(\tilde{P})$. Таких линейно независимых коциклов существует, очевидно, p штук, где $p = 2g - \dim \gamma H_1(\tilde{P})$, и для каждого из них мы предъявим сейчас некоторый элемент $b(\alpha)$ из $\Delta^*(V)$. Будем считать, что коцикл α реализован в виде окружности, гладко погруженной в поверхность \tilde{P} . Условие ортогональности этого коцикла всем атомным окружностям означает, что его индекс пересечения с каждой из них равен нулю.

Построение элемента $b(\alpha)$ мы разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Рассмотрим произвольную атомную окружность γ_i и все точки пересечения этой окружности с коциклом α . Считая, что на атомной окружности и на коцикле задана какая-то ориентация, каждой из точек пересечения мы можем приписать знак плюс или минус, как это обычно делается при определении индекса пересечения. Поскольку индекс пересечения α и γ_i равен нулю, то точек

пересечения четное число и все они могут быть разбиты на пары, отвечающие разным знакам. Рассмотрим произвольную такую пару x и x' .

Шаг 2. Будем двигаться от точки x вдоль атомной окружности γ_i (можно выбрать любое из двух возможных направлений движения) и ставить по очереди числа $+1$ и -1 на встречающихся вершинах до тех пор, пока не дойдем до точки x' . Первое число ставится по следующему правилу. Точка x лежит на каком-то ребре графа K . Это ребро имеет свою собственную каноническую ориентацию. Если индекс пересечения данного ребра графа K с окружностью α в точке x положителен, то в первой встретившейся нам вершине графа K ставим знак $+1$, в противном случае -1 (рис. 6.18). Затем на всех остальных встречающихся вершинах знаки чередуются. Если через какую-то вершину мы проходим два раза, то мы суммируем те числа, которые должны на нее поставить. Таким образом, мы получим некоторый набор чисел $b(x, x')$ на одной из двух половинок атомной окружности, на которую ее делят точки x и x' .

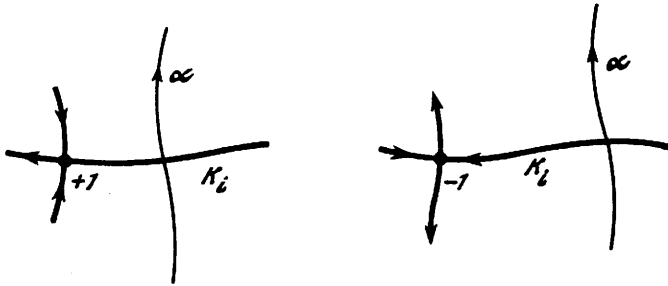


Рис. 6.18

Шаг 3. Прделаем теперь ту же самую процедуру для всех остальных парных точек пересечения коцикла и атомной окружности γ_i . Затем повторим то же самое для каждой атомной окружности. Если через какую-либо вершину графа мы проходим несколько раз, то все числа, поставленные на нее, суммируются. Другими словами, мы суммируем между собой все наборы $b(x, x')$ (рассматриваемые как 0-цепи).

В результате мы получим некоторый набор чисел на вершинах графа K (т.е. 0-цепь), который и обозначим через $b(\alpha)$. Отметим, что этот набор будет определен, вообще говоря, неоднозначно. Однако он всегда будет удовлетворять следующему легко проверяемому свойству: 1-коцепь $\vartheta(b(\alpha))$ является коциклом, гомологичным α . Другими словами, описанное выше отображение b , сопоставляющее каждому коциклу некоторую 0-цепь $b(\alpha)$, является обратным отображением к ϑ . См. определение ϑ перед леммой 6.9.

Как мы уже отмечали выше, существует $p = 2g - \dim \gamma H_1(\tilde{P})$ линейно независимых классов $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in H^1(\tilde{P})$, ортогональных подпространству $\gamma H^1(\tilde{P})$. Обозначим отвечающие им 0-цепи, построенные описанным выше способом, через $b(\alpha_1), \dots, b(\alpha_p)$.

Предложение 6.8. *Набор 0-цепей $b(\gamma_1), \dots, b(\gamma_{q-1}), b(\alpha_1), \dots, b(\alpha_p)$ образует базис пространства $\Delta^*(V)$.*

Доказательство.

Доказательство этого утверждения фактически вытекает из леммы 6.10, которая дает интерпретацию элементов пространства $\Delta^*(V)$ как 1-коциклов комплекса \tilde{P} , или, что то же самое, как 1-коциклов из $Z^1(\tilde{P})$, удовлетворяющих условию симметричности. Напомним, что каждой 0-цепи мы сопоставили выше некоторую 1-коцепь: каждой вершине S графа K мы сопоставили 1-коцепь вида $\vartheta(S) = K_i + K_{i'}$, где K_i и $K_{i'}$ — ребра графа K , выходящие из вершины S , и затем продолжили это отображение по линейности. Для доказательства нашего утверждения нам нужно, в частности, показать, что 1-коцепи, отвечающие при описанном соответствии 0-цепям

$$b(\gamma_1), \dots, b(\gamma_{q-1}), \quad b(\alpha_1), \dots, b(\alpha_p),$$

являются коциклами и кроме того линейно независимы.

Рассмотрим сначала 1-коцепь, отвечающую 0-цепи $b(\gamma_i)$. Пример изображен на рис. 6.17. Легко видеть, что эта коцепь является не только коциклом, но даже и кограницей вида $\delta(\sum S^*)$, где суммирование ведется по всем белым вершинам S атомной окружности γ_i . Напомним, что выше (см. лемму 6.11) белым цветом мы обозначили те вершины, которые являются концами ребер атомной окружности. Далее, мы показали в лемме 6.11, что белые вершины атомной окружности склеиваются в некоторую вершину комплекса \tilde{P} . Отсюда следует, что построенные нами 0-цепи $b(\gamma_1), \dots, b(\gamma_{q-1})$ в точности отвечают элементарным кограницам вида $\delta(\tilde{S}_1^*), \dots, \delta(\tilde{S}_{q-1}^*)$, где $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_{q-1}$ — вершины комплекса \tilde{P} , отвечающие атомным окружностям.

Рассмотрим теперь 1-коцепь, отвечающую 0-цепи $b(\alpha)$, где α — один из коциклов $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Мы утверждаем, что эта коцепь является коциклом, гомологичным коциклу α . Если мы это проверим, то наше утверждение будет доказано, поскольку коциклы $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ были выбраны независимыми по модулю кограниц (т. е. как классы когомологий). Для проверки нам следует вернуться к процедуре построения $b(\alpha)$ по коциклу α . Без ограничения общности мы можем считать, что окружность, реализующая коцикл α составлена из ребер сопряженного графа K^* . Эти ребра находятся во взаимно однозначном соответствии с точками пересечения коцикла α и графа K . Все такие точки пересечения при построении цепи $b(\alpha)$ были разбиты на пары x, x' . На аналогичные пары $K_{j(x)}^*, K_{j(x')}^*$ будут разбиты и ребра графа K^* . Таким образом,

$$\alpha = \sum (\pm K_{j(x)}^* \pm K_{j(x')}^*),$$

где суммирование ведется по всем парным точкам пересечения (x, x') , а знаки зависят от согласованности собственной ориентации ребра сопряженного графа и ориентации коцикла α , рассматриваемого как погруженная окружность. См. рис. 6.18.

Поскольку $b(\alpha) = \sum b(x, x')$, то 1-коцепь, соответствующая 0-цепи $b(\alpha)$, получается суммированием 1-коцепей, соответствующих элементарным 0-цепям $b(x, x')$.

Легко видеть, что каждая из этих 1-коцепей отличается от $(\pm K_{j(x)}^* \pm K_{j(x')}^*)$ на некоторую кограницу, а именно на общую кограницу всех белых вершин, через которые мы проходили, двигаясь по атомной окружности γ_i из точки x в точку x' (рис. 6.19).

Таким образом, мы можем задать интересующее нас пространство $\Delta(V)$ допустимых Δ -инвариантов двумя способами:

- 1) как ортогональное дополнение к подпространству $\Delta^*(V)$, базис в котором был только что описан;
- 2) как образ заданного явной формулой оператора $\phi'_1: B_0^* \rightarrow B_0$.

Теперь мы опишем область значений Z -инварианта.

Предложение 6.9. *Любой класс гомологий из группы $H_1(\tilde{P})$ реализуется как Z -инвариант некоторой гамильтоновой системы (с одной степенью свободы) на данном атоме V . Другими словами, $Z(V) = H_1(\tilde{P})$.*

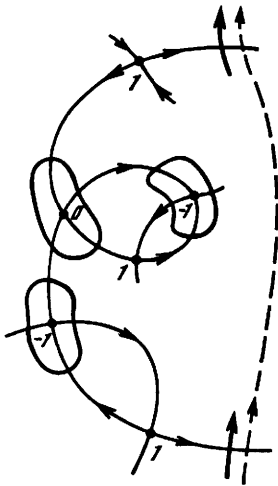


Рис. 6.19

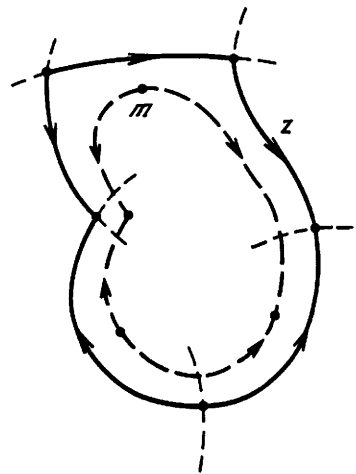


Рис. 6.20

Доказательство.

Поскольку нашей целью является реализация всех элементов группы H_1 , то достаточно доказать предложение для базисных 1-циклов на поверхности P . Возьмем произвольный базисный цикл z из группы $H_1(\tilde{P})$. Можно считать, что он геометрически реализован на поверхности \tilde{P} какой-то самонепересекающейся окружностью, составленной из ребер графа K , причем каждое ребро входит в него ровно один раз (т.е. с кратностью 1), рис. 6.20. Другими словами, цикл z задается как 1-цепь, принимающая на ребрах графа K значения ± 1 или 0. Мы

должны найти подходящий 1-коцикл m из $H^1(\tilde{P})$ такой, что действуя оператором ϕ'_2 на этот коцикл, мы и получаем цикл z .

Оператор ϕ'_2 был индуцирован на группе 1-когомологий операцией вклейки-вырезания Φ_m на 0-модели. С геометрической точки зрения 1-коцикл m (имеющий носитель на графе K) можно трактовать как 1-цикл на той же поверхности \tilde{P} , имеющий носитель на двойственном графе. Двойственный граф $K^* = \Gamma$ состоит из отрезков, трансверсальных ребрам графа K и пересекающих их «в середине» ровно по одному разу. Концы ребер графа Γ — это центры 2-клеток поверхности \tilde{P} . Пусть 1-коцикл m реализуется в виде окружности (пунктир на рис. 6.20), составленной из некоторых ребер графа Γ . Эта пунктирная окружность идет «вдоль» окружности 1-цикла z и гомологична ему.

Рассмотрим ленту L , границей которой является пара циклов z и m , и все вершины графа K , принадлежащие циклу z . В каждой такой вершине встречаются 4 ребра. Два из них лежат в цикле z , а два других в нем не лежат. Рассмотрим те из них, которые имеют непустое пересечение с выбранной нами лентой (они могут входить в нее или выходить из нее). Обозначим эти ребра через K_1, \dots, K_{2p} . Легко видеть, что их четное число. Отметим далее, что ориентации каждой пары соседних ребер из K_1, \dots, K_{2p} — противоположны. При обходе вдоль z их ориентации чередуются (входит-выходит).

Запишем теперь коцикл m как линейную комбинацию ребер графа Γ . Легко видеть, что $m = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i K_i^*$, где K_i^* — ребра графа Γ , двойственные к указанным выше ребрам K_1, \dots, K_{2p} графа K . Здесь $m = \{m_i\}$, где $m_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq 2p$. При этом $m_i = +1$, если ребро K_i входит в ленту L , и $m_i = -1$, если ребро K_i выходит из ленты L . Операция вклеивания-вырезания будет устроена как обычно. Если $m_i = +1$, мы вклеим прямоугольник «длины 1» в ребро K , а если $m_i = -1$, то из ребра K_i мы вырежем прямоугольник «длины 1».

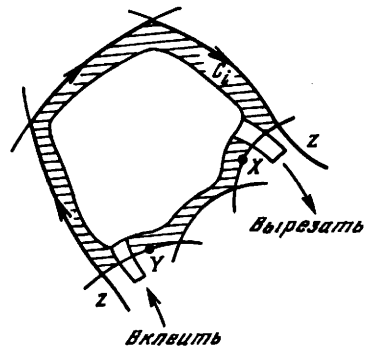


Рис. 6.21

Вычислим теперь цепь l (Z -инвариант системы, полученной из 0-модели операцией Φ_m). Легко проверяется, что при вклеивании-вырезании прямоугольника на некотором ребре графа K изменения Z -инварианта касаются только ребер, лежащих на границе двух колец, примыкающих к данному ребру. Таким образом, в рассматриваемом случае нетривиальные коэффициенты l_j цепи l будут стоять только на тех ребрах графа K , которые принадлежат границам колец C_1, \dots, C_p , примыкающих с внутренней стороны к циклу z . С внешней стороны цикла z никаких изменений не происходит. Возьмем какое-то конкретное кольцо C_i из указанного набора колец. Надо доказать, что коэффициенты l_j , отвечающие данному кольцу, равны нулю на всех ребрах графа K (инцидентных с данным кольцом), которые не являются ребрами цикла z , а на ребрах цикла z эти коэффициенты должны равняться 1.

Выберем на кольце C_i начальную точку раздела X на первом ребре, выхо-

двигаясь из ленты L (рис. 6.21). Напомним, что после этого все остальные точки раздела однозначно восстанавливаются. Для вычисления цепи l нужно проанализировать смещения этих точек раздела после применения операции вклейки-вырезания. Рассмотрим серию точек раздела на тех ребрах, которые не лежат в цикле z . Поскольку выбор начальной точки раздела X — в нашей власти, то мы можем считать, что после вклеивания-вырезания эта точка остается на месте.

Начнем двигаться от нее вдоль кольца «внутри» цикла z . Следующие точки раздела (не лежащие на цикле z) также останутся на прежних местах. Это следует из того, что вклеивание-вырезание не изменило полного периода потока вдоль кольца, а расстояния между этими точками раздела и начальной точкой X вычисляются как некоторые функции (см. предложение 6.3) от «конечной части» полного периода потока на рассматриваемом кольце и значений Λ -инварианта. Таким образом, до тех пор, пока мы движемся по кольцу C_i вне цикла z , точки раздела остаются на прежних местах, а потому значения цепи l на соответствующих ребрах графа равны нулю (смещений точек раздела нет). Наконец, мы доходим до цикла z (рис. 6.21) и выходим на первое его ребро. Здесь мы выполнили операцию вклеивания прямоугольника «длины 1» в поток. Более точно, мы вклеиваем прямоугольник на последнем ребре, которое втыкается в цикл z между точками S и Y . Здесь S — вершина графа, лежащая на цикле z , а Y — точка раздела этого ребра. Следовательно, точка Y — последняя из точек раздела, остающихся на месте, а все остальные точки раздела, следующие за ней вдоль кольца C и лежащие на цикле z , сместятся «назад» (по отношению к направлению потока w) на «величину 1». Однако важно отметить, что все «парные им» точки раздела, появляющиеся из наружных колец (примыкающих к циклу z снаружи), не изменились. Следовательно, «расстояния» между парными (положительными и отрицательными) точками раздела на всех ребрах цикла z (примыкающих к кольцу C_i) стали равны 1. Если кольцо C_i было положительным, то значения l_j цепи l будут равняться -1 (поскольку «назад отъехали» положительные точки раздела на ребрах). Соответственно, если кольцо было отрицательным, то соответствующие l_j будут равняться $+1$. Все числа l_j на ребрах графа, инцидентных кольцу, но лежащих вне цикла z , будут равняться нулю (здесь точки раздела не сместились).

Совершенно аналогичные рассуждения проводятся и для всех других колец типа C_i , примыкающих к циклу z изнутри, т. е. со стороны ленты L .

В результате мы получаем 1-цепь $l = \sum_{i=1}^{2p} l_i K_i$, где K_i — совокупность ребер цикла z . При этом числа l_i равны $+1$ или -1 если, соответственно, кольцо отрицательно или положительно. Вне цикла z цепь l равна нулю.

Мы утверждаем, что в действительности верно равенство: $l = \pm z$, где знак определяется выбором ориентации z . В самом деле, двигаясь вдоль z в направлении положительного ребра потока w и вдоль отрицательного кольца типа C_i , мы ставим на этом ребре коэффициент $+1$. Это рассуждение повторяется до тех пор, пока мы движемся вдоль данного кольца (пока оно «не сошло» с цикла z). Как только мы переходим на следующее кольцо, меняется ориентация ребра графа K (поток переворачивается), также меняется знак кольца (например, вместо положительного кольца мы вышли на отрицательное кольцо) и также меняет-

ся коэффициент l_j , который теперь становится равным -1 . Но все это означает лишь то, что значения цепи l и цикла z на этих следующих ребрах продолжают совпадать.

Этот же факт можно усмотреть и из других, более формальных соображений. Дело в том, что m — это 1-коцикл, а при отображении, индуцированном операцией вклеивания-вырезания, 1-коциклы переходят в 1-циклы (лемма 6.6). Поэтому l (как образ m) — это цикл. Ясно, что он должен совпадать с z (с точностью до знака), поскольку оба они имеют одинаковый носитель (на ребрах графа K).

Итак, мы реализовали любой базисный 1-цикл z как Z -инвариант, предъявив (посредством операций вклеивания-вырезания) гамильтонову систему (получающуюся из 0-модели) со значением Z -инварианта, равным z . Отсюда следует, что можно таким же образом реализовать произвольный 1-цикл z , разложив его по базису одномерной группы гомологий поверхности \tilde{P} . Предложение 6.9 полностью доказано. ■

Важный комментарий. Из доказательства предложения 6.9 видно, что образом 1-коцикла m при отображении ϕ'_2 является 1-цикл z , причем из рис. 6.20 видно также, что их носители гомологичны. Грубо говоря, цикл z идет «рядом» с 1-коциклом m . Отсюда сразу следует, что отображение ϕ'_2 является в действительности известным отображением Пуанкаре $H^1(\tilde{P}) \rightarrow H_1(\tilde{P})$, устанавливающим изоморфизм между 1-когомологиями и 1-гомологиями двумерной замкнутой поверхности.

Следствие. Гомоморфизм ϕ'_2 является изоморфизмом двойственности Пуанкаре как между группами $H^1(\tilde{P}, \mathbb{R}) \cong H_1(\tilde{P}, \mathbb{R})$, так и между целочисленными группами $H^1(\tilde{P}, \mathbb{Z}) \cong H_1(\tilde{P}, \mathbb{Z})$.

Предложение 6.10. Пусть на седловом атоме V заданы произвольные допустимые значения инвариантов Λ , Δ и Z . Тогда на этом атоме существует гамильтонова система (получаемая операциями вклеивания-вырезания из 0-модели атома V) с заданными значениями инвариантов Λ , Δ и Z .

Доказательство.

Мы должны доказать, что можно реализовать систему с любой наперед заданной тройкой инвариантов Λ , Δ и Z . Фактически это мгновенно будет следовать из факта независимости Δ и Z , т. е. из факта, что между ними нет никаких соотношений. Берем систему, реализующую требуемые значения Δ и Z .

Мы уже знаем, что такая система существует и может быть получена из 0-модели подходящей операцией вклейки-вырезания (см. параграф 6.4). Начнем применять к ней операции Φ_m , где в качестве 1-коцепи m берем 1-коциклы. В результате мы будем получать гамильтоновы системы с прежним значением Δ -инварианта (см. лемму 6.6). Само собой, при этих операциях не меняется и Λ -инвариант. В то же время значения Z -инварианта будут меняться. Как было доказано в предложении 6.9, в результате мы можем реализовать любой 1-цикл из группы $H_1(\tilde{P})$.

Таким образом, можно произвольно менять Z -инвариант, не меняя при этом значений инвариантов Λ и Δ , что и требовалось доказать. Предложение 6.10 доказано. ■

6.6. Теорема классификации гамильтоновых систем на замкнутой поверхности с точностью до топологической сопряженности

Получив классификацию гамильтоновых систем с точностью до топологической сопряженности в окрестности особого слоя, мы можем теперь классифицировать их в целом на компактной замкнутой двумерной поверхности. К атомным инвариантам нам нужно будет добавить еще лишь несколько естественных инвариантов. Опишем их.

Функция Морса F (гамильтониан системы) расслаивает поверхность P на линии уровня. Ясно, что структура этого одномерного лиувиллева слоения является инвариантом системы. Эта структура может быть описана с помощью некоторого графа, который мы будем называть молекулой Y , отвечающей этой функции. См. пример на рис. 6.22. Согласно результатам главы 2, эта молекула является полным траекторным инвариантом этой гамильтоновой системы на 2-поверхности.

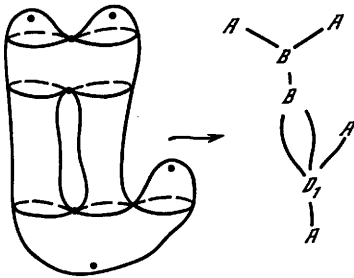


Рис. 6.22

Это следует из того, что мы дополнительно потребовали сохранения ориентации поверхности при сопрягающем гомеоморфизме.

Поверхность P представима в виде склейки некоторого числа атомов P_c^2 (рис. 6.22), т.е. 2-поверхностей с краем, уже изученных нами ранее в главе 2. Каждый атом является трубчатой окрестностью своего графа K_c , который, в свою очередь, является просто критической линией уровня функции F .

Опишем, наконец, последний инвариант, классифицирующий системы на ребре молекулы, т.е. на однопараметрическом семействе замкнутых траекторий.

Пусть e — произвольное ребро молекулы Y , т.е. однопараметрическое семейство неособых линий уровня гамильтониана F . Каждая из них является интегральной траекторией поля ω , поэтому определен ее период $\Pi(F)$. В результате на ребре e получаем гладкую функцию $\Pi(F)$. Это одномерный аналог функции

На каждом ребре молекулы Y поставим стрелку, указывающую направление роста функции F . Тем самым, все ребра молекулы получают определенную (и фиксированную) ориентацию. Будем предполагать в дальнейшем, что все ориентации ребер в Y фиксированы (молекулу Y можно называть в таком случае ориентированной).

При топологической сопряженности ориентированные ребра молекулы Y должны переходить в ориентированные ребра молекулы Y' .

вращения. Ясно, что инвариантом системы является не сама эта функция, а ее класс топологической сопряженности. Так же, как и в случае функции вращения, мы можем задать класс топологической сопряженности этой функции с помощью построенного по ней R -вектора, состоящего из последовательных значений этой функции в точках локального минимума и максимума.

Разумеется, это можно сделать только при выполнении некоторых условий на функцию $\Pi(F)$. Поэтому для простоты мы будем предполагать, что все функции периодов $\Pi(F)$ на ребрах молекулы Y имеют конечное число локальных минимумов и максимумов. Тогда R -вектор будет корректно определен и будет иметь на каждом ребре молекулы конечное число компонент.

Это условие конечности совершенно естественно. Например, если гамильтониан F — аналитическая функция на вещественно-аналитическом симплектическом 2-многообразии, то и функция периодов $\Pi(F)$ также будет аналитической, следовательно, либо $\Pi(F)$ постоянна, либо удовлетворяет нашему условию конечности. Однако ситуация, когда $\Pi(F)$ постоянна, легко вычленяется в особый (и не очень интересный) случай. В самом деле, если $\Pi(F)$ постоянна на каком-то ребре, то ребро обоими своими концами соединяет два атома A (поскольку при приближении к седловому атому $\Pi(F)$ стремится к бесконечности). Но тогда данная система, как легко видеть, является системой вида $w = c \frac{\partial}{\partial \varphi}$ на двумерной сфере, где c — некоторая постоянная, а φ — стандартный полярный угол. Этим замечанием мы фактически классифицировали все такие системы (с точностью до сопряженности).

Впрочем, мы можем отказаться от условия конечности, называя инвариантом класс топологической сопряженности функции периода.

Итак, на каждом ребре молекулы появился еще один естественный инвариант — R -вектор соответствующей функции периода $\Pi(F)$ на этом ребре.

Определение 6.8. Рассмотрим гладкую гамильтонову систему w с одной степенью свободы на замкнутой симплектической поверхности P^2 . Сопоставим ей следующий объект

$$Y^* = \{Y, \Lambda, \Delta, Z, R\},$$

состоящий из ориентированной молекулы Y , снабженной Λ -инвариантом, Δ -инвариантом, Z -инвариантом и R -инвариантом. Будем называть Y^* *точной молекулой* системы w . Будем говорить, что две точные молекулы совпадают, если существует гомеоморфизм одной молекулы на другую, совмещающий все ее перечисленные инварианты.

Теорема 6.3. Пусть даны две гладкие гамильтоновы системы w и w' с морсовскими гамильтонианами F и F' , удовлетворяющими условию конечности на гладких замкнутых компактных ориентируемых симплектических поверхностях P^2 и P'^2 . Пусть Y^* и Y'^* — соответствующие им точные молекулы. Тогда эти системы топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их точные молекулы совпадают.

Доказательство.

а) Пусть системы w и w' топологически сопряжены. Тогда совпадение их

точных молекул фактически уже доказано нами выше, так как для каждого из инвариантов было доказано утверждение о его сохранении при топологическом сопряжении. В одну сторону теорема доказана.

б) Обратное, пусть даны две интегрируемые системы w и w' с совпадающими точными молекулами. Нужно доказать существование гомеоморфизма поверхности P^2 на P'^2 , переводящего поток w в поток w' . Мы знаем, что такой гомеоморфизм существует в окрестности каждого атома (теорема 6.1), и нам остается лишь сшить их на ребрах молекулы в единый гомеоморфизм, сопрягающий потоки. Это, очевидно, можно сделать, поскольку функции периодов на каждой паре соответствующих друг другу ребер сопряжены. Теорема 6.3 доказана. ■

Сформулируем следствие из этой теоремы для класса так называемых простых интегрируемых гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Систему мы назовем простой, если ее гамильтониан F является простой функцией Морса, т. е. на каждом критическом уровне функции F лежит ровно одна критическая точка. В терминах молекул Y это означает, что молекула состоит лишь из атомов типов A и B .

Следствие. *Рассмотрим класс простых интегрируемых систем с одной степенью свободы. Две системы из этого класса топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их молекулы Y_1 и Y_2 совпадают, и для каждой пары соответствующих друг другу ребер этих молекул функции периодов топологически сопряжены.*

ГЛАВА 7

Гладкая сопряженность гамильтоновых потоков на двумерных поверхностях

7.1. Построение гладких инвариантов на 2-атомах

В этой главе мы рассмотрим вопрос о классификации гамильтоновых векторных полей на 2-поверхностях в гладком случае. Разумеется, все топологические инварианты, построенные нами выше, остаются и гладкими инвариантами, но их, конечно, недостаточно для гладкой классификации. Однако, хотя гладких инвариантов больше чем топологических, устроены они более естественным образом. Мы начнем с изучения атомных гладких инвариантов. Итак, пусть, как и выше, (P, K) — некоторый 2-атом с гладким гамильтоновым векторным полем $v = \text{sgrad } f$ на нем. Без ограничения общности в этом параграфе мы будем предполагать, что $K = f^{-1}(0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой главе гамильтониан системы будет обозначаться через f вместо F . Напомним, что мы использовали обозначение F для гамильтониана Пуанкаре на трансверсальной 2-площадке, а f обозначал у нас ранее интеграл исходной системы на M^4 . Вообще говоря, функции f и F , конечно, различны. Но с другой стороны, изменяя симплектическую структуру на трансверсальной площадке, мы можем в качестве гамильтониана потока Пуанкаре рассматривать дополнительный интеграл f . Мы можем произвести такую замену, поскольку нас интересует гамильтонов поток сам по себе, а не конкретный способ его задания с помощью симплектической структуры и гамильтониана. Кроме того, в настоящей главе речь будет идти о потоках на двумерных поверхностях, т. е. о самостоятельной задаче, представляющей интерес даже вне связи с классификацией систем на изознергетических 3-поверхностях.

Сначала естественно рассмотреть вопрос о классификации гамильтонова векторного поля в окрестности особой точки гамильтониана f , т. е. вершины атома.

Если атом имеет тип A (т. е. точка является точкой минимума или максимума гамильтониана), то исследование этого случая не представляет труда. Траектории этого векторного поля являются окружностями вокруг особой точки, и это поле полностью характеризуется функцией периода этих траекторий.

Рассмотрим седловой случай. Поскольку гамильтоново векторное поле полностью определяется симплектической структурой и гамильтонианом, то наша задача может быть решена при помощи следующей леммы о каноническом виде гамильтониана, доказанной в [262].

Лемма 7.1. Пусть S — невырожденная седловая особая точка гамильтониана f . Тогда существует регулярная система координат (x, y) такая, что

а) $\omega = dx \wedge dy$;

б) $f = f(z)$, где $z = xy$.

Это утверждение можно рассматривать как естественное обобщение двух классических результатов: леммы Морса и теоремы Дарбу. Нам будет удобно переформулировать его в следующей эквивалентной форме.

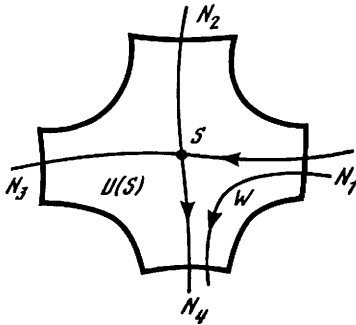


Рис. 7.1

Лемма 7.2. Пусть S — невырожденная седловая особая точка гамильтониана f . Тогда существует регулярная система координат (x, y) такая, что

а) $f = xy$;

б) $\omega = \omega(z) dx \wedge dy$ где $z = xy$.

Кроме этой леммы нам понадобится также знать ответ на следующий вопрос: как найти функцию $\omega(z)$, не находя явно каноническую систему координат из леммы 7.2. Чтобы на него ответить, определим Λ^* -инвариант особой точки, имеющий одну и ту же природу с введенным выше Λ -инвариантом. Выберем в окрестности особой точки S любую систему координат (u, v) , в которой гамильтониан записывается в виде $f = uv$, и пусть $\omega = \omega(u, v) du \wedge dv$. Разложим функцию $\omega(u, v)$ в ряд Тейлора в точке S :

$$\omega(u, v) \simeq \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} u^i v^j$$

и положим

$$\Lambda^*(S) = \Lambda_f^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k, \quad \text{где } \lambda_k = a_{kk}.$$

Определение 7.1. Ряд $\Lambda^*(S)$ называется Λ^* -инвариантом седловой особой точки S .

Покажем, что Λ^* -инвариант не зависит от выбора системы координат (u, v) . Для этого дадим еще одно бескоординатное определение этого инварианта через некоторые естественные характеристики векторного поля w . Рассмотрим крест $U(S)$, окружающий особую точку S , показанный на рис. 7.1. Кривые N_1, N_2, N_3, N_4 являются гладкими и пересекают траектории поля w трансверсально. Ясно, что при любых гладких диффеоморфизмах качественный вид этой области сохраняется.

Рассмотрим, как и выше, функцию $\pi(f)$, которая для каждой траектории с фиксированным значением функции f указывает время движения вдоль участка этой траектории γ_f , высекаемого отрезками N_1 и N_2 . Выше (лемма 6.2) мы получили следующее представление для функции $\pi(f)$:

$$\pi(f) = - \left(\sum_{k=0}^n a_{kk} f^k \right) \ln f + c_n(f),$$

где $c_n(f)$ — функция класса C^n на отрезке $[0, f_0]$.

Легко видеть, что в этом представлении полином от f , стоящий перед логарифмом, определен однозначно. Что произойдет с функцией $\pi(f)$, при диффеоморфизме, меняющем область G ? Легко видеть, что отрезки N_i заменятся на некоторые другие трансверсальные отрезки N'_i , что повлияет лишь на функцию $c_n(f)$, к которой добавится некоторая C^∞ -гладкая функция, характеризующая «расстояние» между новыми и старыми отрезками.

Таким образом, коэффициенты полинома $\sum_{k=0}^n a_{kk} f^k$ могут быть определены инвариантным образом как коэффициенты в асимптотике функции $\pi(f)$. С другой стороны эти коэффициенты в совокупности задают Λ^* -инвариант особой точки S .

КОММЕНТАРИЙ. Как уже было отмечено в следствии из леммы 6.2, функция $\pi(f)$ допускает следующее представление:

$$\pi(f) = -\lambda(f) \ln f + c(f),$$

где $\lambda(f)$ и $c(f)$ — C^∞ -гладкие функции на $[0, f_0]$. Легко видеть, что Λ^* -инвариант векторного поля в особой точке S — это в точности ряд Тейлора функции $\lambda(f)$.

Итак, в частности, мы показали, что «канонический вид» симплектической структуры (см. лемму 7.2) определен почти однозначно. Говоря точнее, однозначно будет определено тейлоровское разложение $\omega(z)$ в нуле. Нетрудно показать с другой стороны, что любая функция $\tilde{\omega}(z)$ с тем же тейлоровским разложением может быть реализована путем выбора подходящей системы координат. Заметим еще, что во всех этих рассуждениях гамильтониан f предполагался фиксированным. Поэтому в результате мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 7.1. Пусть S_i — невырожденная седловая особая точка гамильтониана f_i , ω_i — соответствующая симплектическая структура, $i = 1, 2$. Тогда если Λ^* -инварианты точек S_1 и S_2 совпадают, то существует локальный диффеоморфизм $\xi: U_1(S_1) \rightarrow U_2(S_2)$ такой, что $\xi^*(f_2) = f_1$ и $\xi^*(\omega_2) = \omega_1$. И обратно, если такой диффеоморфизм существует, то Λ^* -инварианты особых точек S_1 и S_2 совпадают.

Мы сформулировали это предложение в терминах гамильтониана и симплектической структуры. На самом деле нас интересует гамильтоново векторное поле. Но поскольку оно полностью определяется парой f, ω , то мы можем переформулировать это предложение следующим образом.

Следствие. Пусть S_i — невырожденная седловая особая точка гамильтониана f_i и $w = \text{sgrad } f$ — соответствующее гамильтоново векторное поле, $i = 1, 2$. Тогда если Λ^* -инварианты точек S_1 и S_2 совпадают, то существует локальный диффеоморфизм $\xi: U_1(S_1) \rightarrow U_2(S_2)$, сохраняющий гамильтониан (т. е. $f_2 \circ \xi = f_1$) и переводящий поле w_1 в поле w_2 . И обратно, если такой диффеоморфизм существует, то Λ^* -инварианты особых точек S_1 и S_2 совпадают. Другими словами, гамильтоновы векторные поля w_1 и w_2 сопряжены (с условием сохранения гамильтониана) тогда и только тогда, когда их Λ^* -инварианты совпадают.

Условие сохранения гамильтониана для нас, однако, является лишним и от него можно естественным образом избавиться. Для этого следует проконтролировать зависимость Λ^* от выбора гамильтониана.

Пусть g — некоторый другой гамильтониан данного векторного поля в окрестности точки S (разумеется и симплектическая структура тоже другая). Пусть $g(S) = 0$. Тогда, поскольку гамильтонианы друг через друга выражаются, мы можем разложить f в точке S в ряд по степеням g :

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g^k, \quad b_1 \neq 0.$$

Легко видеть, что в результате мы получим новый ряд $\Lambda_g(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_k \tilde{z}^k$, который получается из $\Lambda_f(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k$ формальной заменой $z = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{z}^k$. Таким образом, инвариант Λ^* определен, вообще говоря, по модулю формальных замен, и мы можем сформулировать окончательный результат следующим образом.

Предложение 7.2. *Два гамильтоновых векторных поля, заданные в окрестностях своих седловых особых точек, гладко сопряжены тогда и только тогда, когда их Λ^* -инварианты сопряжены формально.*

Нетрудно описать все классы сопряженности гамильтоновых векторных полей в седловой особой точке. Этих классов столько же, сколько классов формально сопряженных степенных рядов в указанном выше смысле. Для степенных рядов (от одной переменной) нетрудно указать канонический представитель в каждом классе.

Лемма 7.3. *Любой степенной ряд от одной переменной формально сопряжен одному из следующих полиномов:*

$$\begin{aligned} &\lambda, \\ &\lambda + z, \\ &\lambda + z^2, \quad \lambda - z^2, \\ &\lambda + z^3, \\ &\lambda + z^4, \quad \lambda - z^4, \\ &\dots\dots \\ &\lambda + z^{2k-1}, \\ &\lambda + z^{2k}, \quad \lambda - z^{2k}, \\ &\dots \end{aligned}$$

и так далее, где λ — некоторое число. Все эти полиномы попарно не сопряжены. Доказательство.

Рассмотрим произвольный степенной ряд

$$\lambda + a_n w^n + a_{n+1} w^{n+1} + \dots$$

Пусть n — четно и $a_n > 0$. Тогда этот ряд формально сопряжен полиному $\lambda + z^n$. Формула замены такова:

$$z = w(a_n + a_{n+1}w + \dots)^{1/n}.$$

Здесь, конечно, имеется в виду формальное разложение радикала в ряд Тейлора по степеням w . Если $a_n < 0$, то формула замены пишется аналогично.

Если n нечетно, то формула — аналогична. Лемма доказана. ■

КОММЕНТАРИЙ. В общем случае (не обязательно гамильтоновом) гладкая классификация потоков в окрестности седловой особой точки может быть получена с помощью теоремы Ченя (которая сводит гладкую классификацию к формальной классификации степенных рядов) и теоремы Пуанкаре–Дюлака (которая определяет канонический вид соответствующего степенного ряда), см. [11]. Последнее наше утверждение тоже может быть получено с использованием этих классических результатов. Однако в дальнейшем нам понадобится условие сохранения гамильтониана, поэтому мы действовали несколько иначе.

Ниже нам будет полезно еще одно утверждение, касающееся поведения системы в окрестности седловой особой точки. Рассмотрим снова крест $U(S)$, окружающий особую точку, рис. 7.1. Легко видеть, что изменением границ креста, т. е. отрезков N_1, N_2, N_3, N_4 , мы можем добиться того, чтобы все четыре функции $\pi_i(f)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) имели вид

$$\pi_i(f) = -\lambda(f) \ln |f|,$$

т. е. все функции вида $c(f)$ из разложения, выписанного выше, тождественно равны нулю. Крест $U(S)$, удовлетворяющий этому условию, мы будем называть каноническим. Подчеркнем, что это понятие зависит от выбора гамильтониана.

Рассмотрим теперь гамильтоново векторное поле w в целом на атоме, т. е. в некоторой окрестности критического слоя $K = f^{-1}(0)$ гамильтониана f . Если мы выбросим из поверхности P граф K , состоящий из незамкнутых траекторий и особых точек поля w , то поверхность распадется в несвязное объединение колец. Каждое кольцо C_n является однопараметрическим семейством замкнутых траекторий, причем функция f может быть рассмотрена как естественный параметр данного семейства. Поскольку каждая траектория замкнута, то она имеет некоторый период, и мы можем для каждого кольца C_n определить естественную функцию периода $\Pi_n(f)$, указывающую, чему равен период траектории с данным значением функции f на ней.

Ясно, что функции периода с точностью до сопряжения являются инвариантами векторного поля f . В непрерывном случае, кстати, они также являются инвариантами. Но там мы должны были рассматривать сопряженность с точностью до гомеоморфизмов, поэтому этот инвариант оказывался тривиальным. Действительно, все функции периодов монотонно стремятся к бесконечности при подходе к особому слою, поэтому с топологической точки зрения любые две из них сопряжены. В гладком случае ситуация другая.

Рассмотрим сначала функцию периодов на одном из колец. Она, как мы уже видели, имеет представление

$$\Pi_n(f) = -A(f) \ln f + B(f),$$

где A и B — некоторые гладкие функции на $[0, f_0]$. Сами эти функции однозначно не определены, но их тейлоровские разложения в нуле будут определены

однозначно, причем ряд Тейлора функции $A(f)$ будет совпадать с суммой Λ^* -инвариантов всех вершин (особых точек), мимо которых проходит это кольцо. Рассмотрим две функции указанного типа

$$\begin{aligned}\Pi(f) &= -A(f) \ln f + B(f), \\ \Pi'(f') &= -A'(f') \ln f' + B'(f').\end{aligned}$$

Что можно сказать о их гладкой сопряженности? Другими словами, когда существует гладкая на отрезке $[0, \varepsilon_0]$ замена $f' = \tau(f)$ такая, что

$$\Pi(f) = \Pi'(\tau(f))?$$

Оказывается, условие гладкой сопряженности накладывает очень серьезные ограничения на пару этих функций. Вопрос сводится к классификации пар $\tilde{A}(f), \tilde{B}(f)$ тейлоровских разложений функций A и B в нуле. Нетрудно выписать формальные преобразования этих рядов при формальной замене f на f' . Но мы не будем этого делать, а укажем некоторый (тоже формальный) способ выбора некоторого канонического представителя в каждом классе.

Лемма 7.4. *Для любой функции вида $\Pi(f) = -A(f) \ln f + B(f)$ существует гладкая замена $f = \tau(f')$ на $[0, \varepsilon_0]$, приводящая эту функцию к виду $\Pi(\tau(f')) = -A'(f') \ln f'$, т. е. полностью уничтожающая конечную часть этого представления. Функция $\tau(f')$ определена при этом однозначно, с точностью до любых «бесконечно малых» изменений, не меняющих ее ряд Тейлора. Две функции вида*

$$-A'(f') \ln f' \quad \text{и} \quad -A''(f'') \ln f'',$$

гладко сопряжены на некотором достаточно малом отрезке $[0, \varepsilon_0]$ тогда и только тогда, когда тейлоровские разложения функций A' и A'' совпадают.

Таким образом, класс гладкой сопряженности функции периода (в окрестности особого слоя) может быть параметризован некоторым степенным рядом. В частности, таких классов и, следовательно, гладких инвариантов бесконечное число (точнее — счетное число вещественных параметров).

Отметим, что наш случай еще сложнее. Мы имеем не одну, а несколько функций периодов для одного и того же атома, которые отвечают его кольцам. Причем, говоря о сопряженности двух наборов функций периодов, мы должны помнить, что сопрягающая замена $f' = \tau(f)$ должна быть одной и той же для всех функций из этого набора, что еще более увеличит число инвариантов. Ясно, что с формальной точки зрения вопрос о сопряженности двух наборов функций периодов может быть решен с использованием леммы 7.4.

Чтобы далее не заниматься формальной стороной этого вопроса, мы будем предполагать далее, что функции периодов фиксированы. Существуют ли какие-нибудь еще гладкие атомные инварианты помимо функций периодов и Λ^* -инвариантов?

Оказывается, если атом является плоским, то этих инвариантов уже достаточно. Если же нет, то появляется еще один Z^* -инвариант, который является гладким аналогом топологического Z -инварианта. Опишем эту конструкцию. Ее

идея полностью соответствует доказательству того факта, что любую систему можно построить с помощью операции вклейки-вырезания из системы с нулевыми инвариантами Δ и Z (см. предложение 6.4).

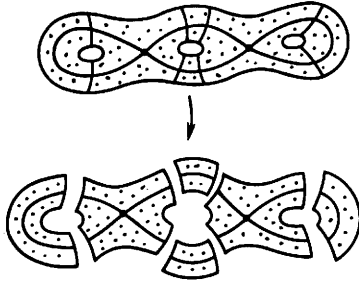


Рис. 7.2

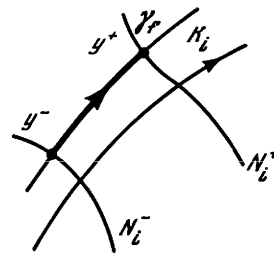


Рис. 7.3

Итак, рассмотрим произвольную гладкую систему $w = \text{sgrad } f$ на атоме P . Рассмотрим все вершины графа K и окружим их каноническими крестами. Теперь «разрежем» атом вдоль граничных отрезков этих крестов. В результате атом распадется на «кресты» и «прямоугольники» (см. рис. 7.2). Термин «прямоугольник» мы употребляем здесь довольно условно. Точнее следовало бы говорить об участке атома, ограниченном двумя трансверсальными отрезками N_i^+ и N_i^- к одному и тому же ребру K_i графа K . Оба эти отрезка параметризованы значением гамильтониана f в их точках. Рассмотрим функцию $m_i(f)$, которая измеряет «расстояние» между этими отрезками. Более точно, если γ_f — некоторая траектория векторного поля w с данным значением гамильтониана f на ней и $y^+ = N_i^+ \cap \gamma_f$, $y^- = N_i^- \cap \gamma_f$ (см. рис. 7.3), то $m_i(f)$ — это расстояние между этими точками в смысле гамильтонова потока σ^t , т. е.

$$y^+ = \sigma^{m_i(f)}(y^-).$$

Таким образом, на каждом ребре графа K возникла некоторая гладкая функция $m_i(f)$. Рассмотрим теперь формальную коцепь $m^* = \sum \tilde{m}_i K_i^*$, где K_i^* — ребра сопряженного графа, интерпретируемую как базис в пространстве одномерных коцепей, а \tilde{m}_i — формальный ряд Тейлора функции $m_i(f)$ в нуле. Эта цепь является точным гладким аналогом коцепи m , которая фигурировала в определении операции вклейки-вырезания. В гладком случае также есть естественный аналог этой операции, однако здесь естественно считать, что боковые стороны «прямоугольников» являются криволинейными, так что «прямоугольник» имеет переменную ширину, измеряемую как раз функцией m_i .

Ясно, что коцепь m^* определена неоднозначно, поскольку она зависит от выбора канонических крестов вокруг каждой вершины. Однако мы утверждаем, что если гамильтониан считается фиксированным, то инвариантом является класс этой коцепи $[m^*]$ по модулю кограниц $B^1(P, \mathbb{R}[f])$ с коэффициентами в кольце степенных рядов $\mathbb{R}[f]$.

Покажем это. Для этого достаточно проверить, что класс $[m^*]$ не зависит от выбора канонических крестов.

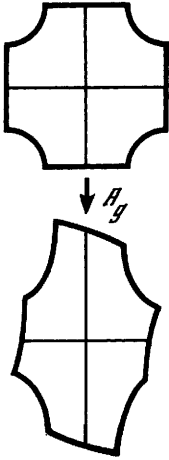


Рис. 7.4

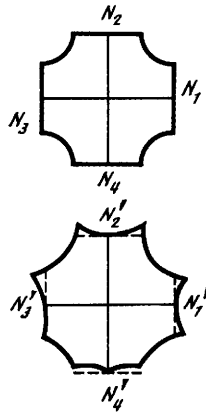


Рис. 7.5

Тот факт, что при изменении m^* на кограницу система не меняется, уже был фактически доказан в лемме 6.5, единственное отличие состояло в том, что в топологическом случае коэффициентами были вещественные числа, которые в гладком случае заменились формальными степенными рядами.

Посмотрим более подробно, в чем состоит произвол в выборе канонического креста $U(S)$, окружающего вершину S . Другими словами, каким преобразованиям можно подвергать такой крест с сохранением его каноничности.

Во-первых, можно подвергнуть крест сдвигу вдоль векторного поля w , т. е. преобразованию вида σ^{t_0} . Поскольку поток

имеет интеграл f , мы можем обобщить это преобразование следующим естественным образом. Пусть $g(f)$ — произвольная гладкая функция. Тогда каждую точку x мы будем сдвигать вдоль ее траектории на величину $g(f(x))$. Другими словами, мы зададим преобразование следующей формулой

$$A_g(x) = \sigma^{g(f(x))}(x).$$

Легко видеть, что это преобразование сохраняет все свойства канонического креста. Что произойдет при этом с коцепью m^* ? Легко видеть, что к ней просто добавится кограница вида $\widehat{g\delta}(S^*)$, где \widehat{g} — ряд Тейлора функции $g(f)$ в нуле, а S^* — элементарная 0-коцепь, принимающая значение 1 на вершине S и нуль на всех остальных вершинах. Преобразование $A_g(x)$ показано на рис. 7.4.

Еще одно преобразование креста состоит в том, что его граничные отрезки N_1, N_2, N_3, N_4 мы можем заменить на произвольные отрезки, N'_1, N'_2, N'_3, N'_4 , которые в точках графа K отличаются от начальных отрезков N_1, N_2, N_3, N_4 на малые «бесконечного порядка» (см. рис. 7.5). Другими словами, N_i и N'_i в точке графа K имеют касание бесконечного порядка малости. Ясно, что при этом функции $m_i(f)$ на ребрах графа, вообще говоря, изменятся, но их тейлоровские разложения в нуле останутся прежними, и коцепь m^* не изменится вовсе.

Легко видеть, что любое преобразование канонического креста сводится к композиции преобразований двух описанных типов (т. е. сдвига и изменения границы на малую бесконечного порядка).

Таким образом, класс коцепи m^* по модулю кограниц определена корректно и, следовательно, является инвариантом.

Теперь, как мы это уже делали в топологическом случае для 1-цепи l , мы можем изготовить из коцепи m^* два инварианта. Во-первых, мы можем рассмотреть ее кограницу $\Delta^* = \delta m^*$. Это, действительно, — гладкий инвариант. Но он, оказывается, не является новым, поскольку, просуммировав коэффициенты 1-коцепи m^* по каждому кольцу C_n (в этом и состоит взятие кограницы),

мы получим конечные части функций периодов

$$\Pi_n(f) = -A(f) \ln |f| + B(f),$$

точнее, тейлоровские разложения функций $B_n(f)$ в нуле. Действительно, все члены, содержащие логарифмы, мы загнали в канонические кресты, а все «конечные части» распределили по коэффициентам m^* . Таким образом, Δ^* -инвариант нам уже известен из функций периодов.

Кроме этого, мы можем ортогонально спроектировать коцень m^* на пространство коциклов $Z^1(\tilde{P}, \mathbb{R}[f])$ и рассмотреть соответствующий класс когомологий $Z^* \in H^1(\tilde{P}, \mathbb{R}[f])$.

Определение 7.2. Класс когомологий Z^* мы будем называть Z^* -инвариантом интегрируемой гамильтоновой системы w на атоме (P, K) .

Как мы видим, в гладком случае по существу сохранились все типы траекторных инвариантов: Λ -инвариант превратился в Λ^* -инвариант, Δ -инвариант (0-граница) превратился в Δ^* -инвариант (2-кограница или, что то же самое, 0-граница сопряженного графа), класс 1-гомологий Z превратился в класс 1-когомологий Z^* . В гладком случае элементами (коэффициентами) всех этих наборов являются формальные степенные ряды, а не вещественные числа, как в топологическом. Это совершенно естественно, поскольку, говоря неформально, мы должны сшить производные всех порядков. Более того, если мы хотим построить C^k -классификацию, то нам достаточно будет просто обрубить эти ряды на определенном шаге. Но здесь мы не будем вдаваться в детали этого вопроса.

7.2. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с точностью до гладкой сопряженности

Итак, все гладкие инварианты описаны и мы можем сформулировать теорему гладкой классификации гамильтоновых потоков на атоме.

Потребуем сначала, чтобы при сопрягающем диффеоморфизме сохранялся гамильтониан системы. Тогда мы попросту можем считать, что нам даны две системы на одной и той же поверхности P и с одним и тем же гамильтонианом f , однако симплектические структуры для этих систем различны.

Теорема 7.1. Пусть на 2-атоме P заданы два гамильтоновых потока σ_1^t и σ_2^t (с одним и тем же гамильтонианом, но с разными симплектическими структурами). Пусть соответствующие функции периода, Λ^* -инварианты и Z^* -инварианты совпадают. Тогда потоки σ_1^t и σ_2^t гладко сопряжены, т. е. существует диффеоморфизм $\xi: P \rightarrow P$ такой, что $\xi \circ \sigma_1^t = \sigma_2^t \circ \xi$. При этом диффеоморфизм ξ может быть выбран сохраняющим гамильтониан.

Доказательство.

Во-первых, отметим, что совпадение Λ^* -инвариантов гарантирует существование сопрягающего диффеоморфизма ξ в окрестности каждой особой точки гамильтониана, при этом диффеоморфизм может быть выбран сохраняющим гамильтониан. Наша задача теперь — сшить эти локальные диффеоморфизмы в

единый диффеоморфизм, определенный на всей поверхности P . Это действительно можно сделать, поскольку функции периодов совпадают.

Выберем для каждой вершины S_j графа K канонический крест $U_1(S_j)$ в смысле потока σ_1^t и рассмотрим локальный сопрягающий диффеоморфизм в окрестности этой вершины. Пусть $U_2(S_j) = \xi(U_1(S_j))$ — образ креста $U_1(S_j)$. Ясно, что $U_2(S_j)$ является каноническим крестом для потока σ_2^t . В результате мы получаем два разбиения поверхности P на «канонические кресты» и «прямоугольники», отвечающие двум рассматриваемым гамильтоновым потокам. Для каждого из прямоугольников определена его ширина, т. е. функция вида $m_i(f)$ (см. выше построение инварианта m^*). Обозначим в нашем случае эти функции через $m_{1i}(f)$ и $m_{2i}(f)$, где $m_{ki}(f)$ — «ширина» прямоугольника на i -ом ребре графа K , отвечающего k -ой системе (разумеется, «ширина» понимается в смысле этой же системы), $k = 1, 2$. Эти разбиения, в частности, определяют коцепи m_1^* и m_2^* .

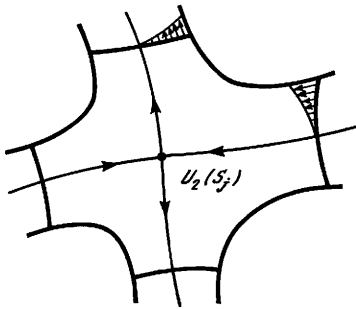


Рис. 7.6

Когда можно продолжить локальные диффеоморфизмы ξ_j до глобального сопрягающего диффеоморфизма, определенного на всем атоме? Очевидно, это можно сделать тогда и только тогда, когда $m_{1i}(f) \equiv m_{2i}(f)$ для любого i . Оказывается, этого легко можно добиться изменением локальных диффеоморфизмов ξ_j . Действительно, вместо диффеоморфизмов ξ_j мы можем рассмотреть сопрягающие диффеоморфизмы вида $A_g \circ \xi_j$, где как и выше,

$$A_g = \sigma_2^{g(f(x))}(x)$$

и g — некоторая гладкая функция. В результате мы можем изменить коцепь m_2^* на произвольную кограницу и тем самым добиться того, что $m_1^* = m_2^*$.

Это означает, что мы добились того, что функции $m_{1i}(f)$ и $m_{2i}(f)$ почти совпадают, более точно, совпадают их тейлоровские разложения в нуле.

Теперь нужно уравнивать эти функции тождественно. Эту процедуру можно провести на каждом кольце атома P по отдельности. Для этого достаточно воспользоваться следующими преобразованиями канонических крестов. Рассмотрим крест $U_2(S_j)$ (рис. 7.6).

Траектории, входящие и выходящие из вершины S_j , делят этот крест на четыре куска. Рассмотрим C^∞ -гладкую функцию, которая на трех из этих кусков тождественно равна нулю, а на четвертом имеет вид $h(f)$, где h имеет нуль бесконечного порядка при $f = 0$ (например, $h = m_{1i}(f) - m_{2i}(f)$). Таким образом, $h(x)$ — гладкая функция в окрестности $U_2(S_j)$, являющаяся интегралом потока σ_2^t . Рассмотрим теперь преобразование креста $U_2(S_j)$, задаваемое формулой

$$B_h(x) = \sigma_1^{h(x)}(x).$$

Это преобразование является тождественным на трех из четырех частей креста, а четвертая часть подвергается сдвигу, который вблизи графа K является «почти тождественным». С помощью такого преобразования

мы можем подправлять функции $m_{2i}(f)$ на каждом кольце, добиваясь равенств $m_{1i}(f) = m_{2i}(f)$. Легко видеть, что используя условие совпадения функций периодов, мы можем это сделать одновременно для всех i . В результате мы сможем сшить локальные сопрягающие диффеоморфизмы в единый сопрягающий диффеоморфизм, что и требовалось. Теорема доказана. ■

КОММЕНТАРИЙ. Доказательство теоремы 7.1 может быть получено другим способом. Идея состоит в том, чтобы сравнивать не сами гамильтоновы потоки σ_1^t и σ_2^t , а соответствующие им симплектические структуры ω_1 и ω_2 на поверхности P (если гамильтонианы фиксированы, то эти задачи эквивалентны). Далее диффеоморфизм ξ , переводящий ω_1 в ω_2 , может быть построен с помощью метода, предложенного Мозером в [337]. При этом, однако, нужно следить за сохранением гамильтониана. Эта идея была реализована Б. С. Кругликовым [98], получившим также некоторые обобщения теоремы 7.1 (в частности, на случай гладкости C^k). В работе Dufour J.-P., Molino P., Toulet A. [274] был исследован тесно связанный с нашей задачей вопрос о классификации троек $(P^2, \omega, \mathcal{F})$, где ω — симплектическая структура на поверхности P^2 , а \mathcal{F} — одномерное слоение с особенностями, порожденное некоторой функцией Морса на P^2 .

Как теперь отказаться от условия сохранения гамильтониана? Достаточно посмотреть, что будет происходить с инвариантами фиксированной гамильтоновой системы, если ее гамильтониан мы будем менять (меняя одновременно и симплектическую структуру, но оставляя систему неизменной). В принципе, мы можем сформулировать явно некоторое формальное правило изменения инвариантов. Например, для Λ^* -инварианта это будет формальное сопряжение степенных рядов. Остальные инварианты также могут быть представлены в виде некоторых степенных рядов, и для них тоже можно указать закон формального сопряжения. В результате окончательная формулировка теоремы классификации будет такой: две гамильтоновы системы w_1 и w_2 на атоме гладко сопряжены тогда и только тогда, когда наборы их инвариантов $(\Lambda_1^*, \Delta_1^*, Z_1^*)$ и $(\Lambda_2^*, \Delta_2^*, Z_2^*)$ сопряжены формально.

Однако правило формального сопряжения будет довольно громоздким, поэтому мы поступим иначе и еще раз напомним метод, позволяющий тестировать две заданные системы на сопряженность. Итак, пусть на одном и том же атоме даны две гамильтоновы системы. Рассмотрим функции периодов этих систем на кольцах атома. Фиксируем какое-либо кольцо и сравним функции периодов $\Pi_1(f_1)$ и $\Pi_2(f_2)$ на этом кольце. Они, разумеется, не обязаны совпадать, поскольку аргументы этих функций (гамильтонианы) никак между собой не связаны. Согласно лемме 7.4 мы можем изменить гамильтонианы f_1 и f_2 таким образом, чтобы эти функции приобрели вид

$$\Pi_i(f'_i) = -A_i(f'_i) \ln |f'_i|, \quad i = 1, 2.$$

После такой замены гамильтонианов в случае сопряженности систем наборы инвариантов $(\Lambda_1^*, \Delta_1^*, Z_1^*)$ и $(\Lambda_2^*, \Delta_2^*, Z_2^*)$ обязаны совпадать. Таким образом, при условии, что какое-то кольцо атома мы считаем выделенным, мы можем определить инварианты гамильтонова потока, которые не будут зависеть от выбора гамильтониана.

ЗАМЕЧАНИЕ. С формальной точки зрения эта процедура может быть интерпретирована следующим образом. Каждой гамильтоновой системе с заданным гамильтонианом можно поставить в соответствие набор инвариантов. Меняя гамильтониан, мы автоматически меняем эти инварианты. В результате на множестве инвариантов возникает действие «группы замен гамильтонианов». Настоящим инвариантом потока, который не зависит от выбора гамильтониана, является орбита этого действия. Процедура, описанная выше, состоит в точности в том, что для каждой орбиты мы однозначно указываем некоторый представитель. Этот представитель выделяется тем условием, что значение Δ^* -инварианта на выделенном кольце равно нулю.

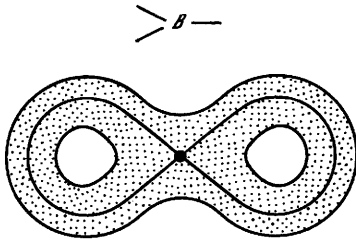


Рис. 7.7

Наконец, полезно посмотреть, как устроены эти инварианты в случае простейших атомов. В случае атома B (рис. 7.7) имеется одна вершина, следовательно, инвариантами являются два степенных ряда. Наиболее естественными инвариантами здесь являются функции периодов на кольцах атома. Теорема классификации для этого атома звучит очень естественно: две системы на атоме B гладко сопряжены тогда и только тогда, когда гладко сопряжены функции периодов. Подчеркнем, однако, один существенный момент. В данном контексте гладкая сопряженность означает не только то, что сопрягающие диффеоморфизмы являются гладкими вплоть до нуля (ноль включается), но и то, что эти диффеоморфизмы гладко сшиваются в нуле. Другими словами, все три диффеоморфизма обязаны иметь одно и то же тейлоровское разложение в нуле. Отметим также, что функции периода на разных кольцах не могут выбираться совершенно произвольно друг от друга. Необходимым является следующее условие. Если мы рассмотрим сумму функций периодов по всем отрицательным кольцам и аналогичную сумму — по всем положительным:

$$\Pi^-(f) = -A^-(f) \ln |f| + B^-(f), \quad f \in [-f_0, 0),$$

$$\Pi^+(f) = -A^+(f) \ln |f| + B^+(f), \quad f \in (0, f_0],$$

то тейлоровские разложения функций A^- и B^- обязаны совпадать с тейлоровскими разложениями функций A^+ и B^+ соответственно.

Наконец, существует гамильтониан, для которого функция периода на внешнем кольце имеет вид

$$\Pi_1(f) = -A(f) \ln |f|.$$

Тогда на двух оставшихся кольцах функции периода будут иметь вид

$$\Pi_2(f) = -\frac{1}{2}A(f) \ln |f| + B(f),$$

$$\Pi_3(f) = -\frac{1}{2}A(f) \ln |f| - B(f),$$

и корректно определенными инвариантами будут тейлоровские разложения функций $A(f)$ и $B(f)$ в нуле.

Рассмотрим также еще один важный случай атома C_2 (рис. 7.8), который часто встречается в конкретных задачах. Часто на этом атоме бывает определена естественная инволюция (центральная симметрия в \mathbb{R}^3 относительно начала координат), которая меняет поток на противоположный. В силу такой симметрии Λ^* -инварианты вершин совпадают, так же как и функции периодов на кольцах одного знака. Посмотрим, сколько существенных инвариантов будет в этом случае. Снова выберем гамильтониан так, чтобы на одном из положительных колец функция периода принимала вид:

$$\Pi_1(f) = -A(f) \ln |f|.$$

Тогда на втором положительном кольце в силу симметрии функция периода будет такой же

$$\Pi_2(f) = -A(f) \ln |f|.$$

Опять-таки, в силу симметрии, функции на оставшихся двух отрицательных кольцах будут совпадать:

$$\Pi_3(f) = -A(f) \ln |f| + B(f),$$

$$\Pi_4(f) = -A(f) \ln |f| - B(f),$$

Коэффициенты перед логарифмами будут совпадать, поскольку каждое кольцо проходит мимо одних и тех же особых точек. Что же касается конечных частей, то по условию, сформулированному выше, тейлоровское разложение функции $B(f) + B(f) = 2B(f)$ должно быть тождественно нулевым, т. е. функция $B(f)$ является малой бесконечного порядка в нуле и не дает никакого инварианта. Таким образом, при условии симметричности атома и системы на нем гладким инвариантом будет лишь один степенной ряд (ряд Тейлора функции $A(f)$ в нуле).

Наконец, самое последнее замечание состоит в том, что в гладком случае нет никаких нетривиальных ограничений на инварианты (аналогичных тем, которые обсуждались в параграфе 3 главы 6). Λ^* -инвариант может быть совершенно произвольным с единственным условием, что его первый член положителен; на Z^* -инвариант вообще нет никаких ограничений. Функции периодов $\Pi_n(f)$ должны обладать двумя естественными свойствами:

- 1) коэффициент перед логарифмом должен быть равен сумме Λ^* -инвариантов тех вершин графа, мимо которых проходит кольцо;
- 2) сумма тейлоровских разложений их конечных частей по положительным кольцам равна аналогичной сумме по отрицательным.

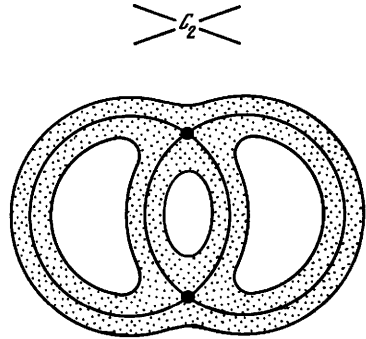


Рис. 7.8

ГЛАВА 8

Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Второй шаг

Введение

Здесь мы изложим общую схему построения траекторных инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Итак, пусть v — интегрируемая гамильтонова система на трехмерной изоэнергетической поверхности Q^3 , f — дополнительный боттовский первый интеграл системы, $Q = \sum Q_c$ — каноническое разложение на компоненты, каждая из которых содержит ровно один особый слой лиувиллева слоения. Такое разложение мы называем «атомным». Напомним, что выше мы использовали для Q_c также обозначение $U(L)$, где $L \subset f^{-1}(c)$ — особый слой, отвечающий критическому значению c интеграла f на Q .

Одна из трудностей, которая встречается при построении инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем на изоэнергетических 3-многообразиях, состоит в том, что многие объекты, возникающие в рамках этой теории естественным образом, зависят от выбора базисных циклов на торах Лиувилля. Прежде всего мы имеем в виду матрицы склейки и функции вращения. Поэтому решение задачи об инвариантах системы мы разделим на две части. Сначала мы предположим, что базисы на торах Лиувилля фиксированы, определим необходимые инварианты и покажем, что системы эквивалентны, если эти инварианты совпадают. См. ниже понятие избыточного оснащения. После этого мы проанализируем то, что происходит при изменении базисов на лиувиллевских торах и сделаем инвариант корректно определенным, т. е. не зависящим от выбора базиса.

Другими словами, из избыточного оснащения путем факторизации по действию «группы замен базисов» мы построим «t»-молекулу, в топологическом случае, и «st»-молекулу, в гладком случае. Эти молекулы будут полностью определять слоение изоэнергетической поверхности Q^3 на траектории системы, т. е. будут полными траекторными инвариантами системы.

Отметим, что излагаемая ниже конструкция применима для атомов общего вида. Однако при рассмотрении гладкого случая мы будем для простоты предполагать, что все атомы являются плоскими, и кроме того не имеют критических окружностей с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами.

8.1. Избыточное t -оснащение молекулы (топологический случай). Основная лемма о t -оснащениях

Начнем с того, что для каждого 3-атома в молекуле выберем и зафиксируем какое-то трансверсальное сечение P_{tr} , а также допустимые системы координат на граничных торах 3-атома. При этом, для каждого 3-атома трансверсальные сечения и допустимые системы координат нужно выбирать согласованно. Чтобы уточнить, что здесь мы имеем в виду, придется по отдельности рассмотреть все три возможных случая.

Случай 1: Атом A .

Случай 2: Седловой 3-атом, у которого все критические окружности имеют ориентированные сепаратрисные диаграммы (атом без звездочек).

Случай 3: Седловой 3-атом, у которого есть критические окружности с неориентируемыми диаграммами (атом со звездочками).

Начнем со случая атома A . Трансверсальное сечение P_{tr} в данном случае определено однозначно с точностью до изотопии, и является 2-диском. Его границей является исчезающий цикл λ на граничном торе полнотория. Этот цикл мы выбираем за первый цикл допустимой системы координат. Второй цикл μ выбираем произвольно, лишь бы пара циклов (λ, μ) образовывала базис на 2-торе.

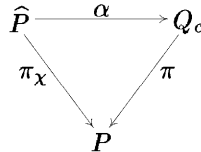
Рассмотрим второй случай, т. е. седловой атом без звездочек. Здесь мы фиксируем на границе каждого куска Q_c допустимые системы координат (λ_j, μ_j) следующим образом. Напомним, что индекс j нумерует граничные торы куска Q_c . В качестве первого цикла λ_j допустимой системы координат мы возьмем слой расслоения Зейферта. Второй цикл μ_j высекается на граничном торе T_j трансверсальным сечением P_{tr} , другими словами, $\mu_j = P_{tr} \cap T_j$. Отметим, что если атом является плоским (т. е. P_{tr} вкладывается в плоскость), то сечение P_{tr} однозначно с точностью до изотопии определяется набором циклов $\{\mu_j\}$, т. е. своей границей. Однако в общем случае это неверно, т. е. по допустимой системе координат трансверсальное сечение, вообще говоря, однозначно не восстанавливается.

Теперь перейдем к последнему случаю, т. е. к атому со звездочками. В данном случае неверно, что циклы $\{\mu_j\}$ допустимой системы координат являются границей трансверсального сечения $P_{tr} \subset Q_c$. Грубо говоря, эти циклы $\{\mu_j\}$ составляют всего лишь «половину границы» трансверсального сечения. Более того, для случая атомов со звездочками трансверсальных сечений «очень много». Они могут иметь разную топологию и быть не гомеоморфными. Поэтому сначала нам придется выбрать и фиксировать топологический тип трансверсальных сечений в таких 3-атомах.

Пусть нам задан 3-атом Q_c , имеющий критические окружности с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами. Ему, как мы показали в главе 3, соответствует 2-атом P со звездочками, являющийся просто базой соответствующего расслоения Зейферта на Q_c . В качестве трансверсального сечения P_{tr} мы должны взять некоторый дубль этого атома, т. е. двумерную поверхность \hat{P} с инволюцией χ такую, что $P = \hat{P}/\chi$ (см. подробности в главе 3). Нам нужно выбрать канонический тип этого дубля. Рассмотрим для этого все вершины-звездочки 2-атома P . Каждую из них соединим разрезом с положительной граничной

окружностью 2-атома, проходящей мимо этой вершины. Другими словами, мы делаем разрезы 2-атома из «в одном и том же направлении» — от вершин звездочек к положительной границе 2-атома. Затем берем два экземпляра получившейся поверхности и склеиваем из них дубль \widehat{P} , отождествляя берега «одинаковых разрезов», т. е. отвечающих одной и той же вершине-звездочке. См. рис. 8.1. На этом дубле очевидно определена инволюция χ , единственными неподвижными точками которой являются вершины-звездочки.

Построим теперь вложение дубля \widehat{P} в 3-атом Q_c в виде трансверсального сечения P_{tr} . Вложение должно быть таким, чтобы следующая диаграмма оказалась коммутативной:



Существование такого сечения фактически уже было доказано выше. См. главы 3, 5.

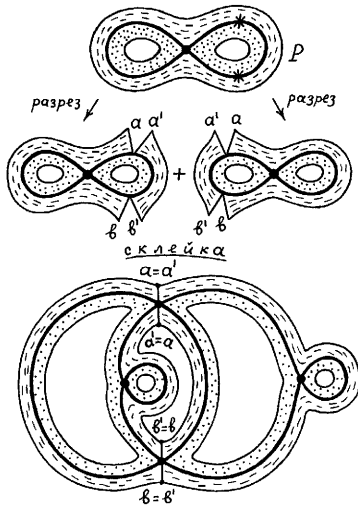


Рис. 8.1

в качестве базисного цикла мы берем один из них. Если тор — положительный, то возможны два случая: либо $\widehat{\mu}_j$ — объединение двух несвязных циклов, либо $\widehat{\mu}_j$ — один цикл, имеющий индекс пересечения 2 со слоем расслоения Зейферта. Несложно понять, когда реализуется каждый из этих случаев. Рассмотрим для этого проекцию $\pi: P_{tr} \rightarrow P$ и образ $\pi(\widehat{\mu}_j)$. Этот образ, очевидно, представляет собой одну из граничных окружностей поверхности P . Пусть s_j — число вершин-звездочек, мимо которых проходит данная окружность (или, что тоже самое, число разрезов, которые мы делали при построении дубля, выходящих на эту окружность). Тогда, если s_j четно, то $\widehat{\mu}_j$ — пара несвязных циклов и, наоборот, если s_j нечетно, то $\widehat{\mu}_j$ — связный цикл. В обоих случаях мы определим

Начиная с этого момента, для атомов со звездочками мы будем рассматривать только такие трансверсальные сечения $\alpha(\widehat{P}) = P_{tr}$. Поясним теперь, как используя это сечение, построить допустимые системы координат на граничных торах 3-атома Q_c . Рассмотрим произвольный граничный тор $T_j \subset \partial Q_c$. В качестве первого базисного цикла по определению берется слой расслоения Зейферта. Далее, как мы это уже делали в главе 4, положим $\widehat{\mu}_j = P_{tr} \cap T_j$. Все торы T_j естественным образом делятся на положительные и отрицательные (по знаку функции вращения в допустимой системе координат, см. об этом ниже). Легко видеть, что в случае отрицательного тора $\widehat{\mu}_j$ представляет собой несвязное объединение двух гомологичных между собой циклов, каждый из которых является сечением расслоения Зейферта. В

базисный цикл μ_j из соотношения

$$\mu_j = \frac{1}{2}(\widehat{\mu}_j + s_j \lambda).$$

Это соотношение имеет смысл, поскольку выражение, стоящее в скобках, в обоих случаях является «двукратным» циклом. Итак, мы указали явные формулы, которые связывают границу трансверсального сечения $\partial P_{tr} = \{\widehat{\mu}_j\}$ с базисными циклами допустимой системы координат.

Фиксируем теперь для каждого седлового 3-атома Q_c (со звездочками или без) трансверсальное сечение P_{tr} . Для атомов типа A фиксируем структуру тривиального S^1 -расслоения, выбрав каким-то образом слой μ на его граничном торе. Напомним, что в отличие от седловых атомов в этом случае неоднозначность состоит в выборе слоя расслоения Зейферта, тогда как трансверсальное сечение определено однозначно. Набор фиксированных сечений для седловых атомов и слоев для атомов типа A , мы будем обозначать через \mathbb{P} .

Комментарий. В дальнейшем, говоря о наборе \mathbb{P} , мы будем употреблять термин «набор сечений», хотя для атомов типа A мы выбираем не сечение, а слой. Это не должно нас смущать, поскольку в действительности «теория сечений» играет основную роль во всех наших построениях.

Итак, пусть нам задан конкретный набор сечений \mathbb{P} . Тогда мы можем произвести вычисления многих естественных объектов. А именно, мы можем вычислить все матрицы склейки, все векторы вращения, все Λ -, Δ - и Z -инварианты потоков Пуанкаре для каждого конкретного сечения $P_{tr} \subset Q_c$. Проведем эту процедуру. Введем следующие обозначения:

- e_j — ребро молекулы W ;
- (λ_j^-, μ_j^-) и (λ_j^+, μ_j^+) — допустимые системы координат на начале и конце ребра e_j соответственно, зависящие от \mathbb{P} ;
- $C_j(\mathbb{P})$ — соответствующая матрица склейки на ребре e_j ;
- $R_j^-(\mathbb{P})$ и $R_j^+(\mathbb{P})$ — векторы вращения гамильтоновой системы v на ребре e_j в этих системах координат;
- $\Lambda_c(\mathbb{P})$, $\Delta_c(\mathbb{P})$ и $Z_c(\mathbb{P})$ — Λ , Δ и Z -инварианты потоков Пуанкаре для каждого 3-атома Q_c , при данном выборе набора глобальных сечений \mathbb{P} .

Комментарий. Напомним наше предположение о том, что все седловые критические окружности интеграла f на Q^3 являются гиперболическими. Это гарантирует нам, что гамильтониан Пуанкаре на трансверсальном 2-сечении будет функцией Морса. См. выше предложение 5.5. Поэтому Λ -, Δ - и Z -инварианты будут корректно определены для каждого седлового атома.

Определение 8.1. Совокупность объектов

$$\mathbb{T} = \{C_j(\mathbb{P}), R_j^-(\mathbb{P}), R_j^+(\mathbb{P}), \Lambda_c(\mathbb{P}), \Delta_c(\mathbb{P}), Z_c(\mathbb{P})\}$$

мы будем называть *избыточным t -оснащением* молекулы W .

Другими словами, рассматривая избыточное t -оснащение, мы собираем вместе всю информацию об атомных и реберных траекторных инвариантах. Следующее утверждение показывает, что этой информации достаточно для траекторной классификации.

Лемма 8.1 (Основная). Пусть v_1 и v_2 — две интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических 3-поверхностях Q_1 и Q_2 соответственно. Пусть их молекулы совпадают. Эти системы траекторно топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют наборы сечений \mathbb{P}_1 и \mathbb{P}_2 , для систем v_1 и v_2 соответственно, такие, что отвечающие им избыточные t -оснащения совпадают.

КОММЕНТАРИЙ. Эта лемма показывает, что набор описанных нами траекторных инвариантов является полным. Следовательно, никаких других инвариантов (для целей траекторной классификации) искать уже не нужно. В то же время нужно отметить, что некоторым недостатком обнаруженных инвариантов является то, что они определены не однозначно, а зависят от выбора трансверсальных сечений. Однако эту неоднозначность можно устранить с помощью некоторой формальной процедуры. Грубо говоря, нужно произвести факторизацию избыточных t -оснащений по действию группы замен трансверсальных сечений. Это будет сделано в следующем параграфе.

Доказательство.

В одну сторону утверждение очевидно. Действительно, если системы эквивалентны, то для любого набора \mathbb{P}_1 мы можем в качестве \mathbb{P}_2 рассмотреть образ \mathbb{P}_1 при гомеоморфизме ξ , устанавливающем траекторную эквивалентность между системами. Тогда все инварианты, входящие в избыточное t -оснащение, совпадут. Докажем предложение в обратную сторону. Нужно показать, что две системы v_1 и v_2 с совпадающими избыточными t -оснащениями траекторно эквивалентны. Начнем со случая седловых атомов. Рассмотрим заданные нам наборы сечений \mathbb{P}_1 и \mathbb{P}_2 . Из совпадения на них Λ -, Δ - и Z -инвариантов для v_1 и v_2 следует, что порождаемые ими потоки Пуанкаре w_1 и w_2 топологически сопряжены на заданных выше сечениях (см. теоремы 6.1 и 6.2). Отсюда следует, что системы v_1 и v_2 траекторно эквивалентны на соответствующих седловых атомах (см. теорему редукции 5.1 главы 5). В случае атомов A ситуация совершенно аналогична и даже проще, поскольку здесь никаких атомных инвариантов нет. Достаточно знать поведение функции вращения на ребре молекулы вблизи атома A . А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 8.2. Пусть даны две интегрируемые системы v_1 и v_2 на 3-атоме A , то есть в окрестности устойчивой периодической траектории. Пусть функции вращения ρ_1 и ρ_2 этих систем сопряжены (непрерывно или гладко) в этой окрестности. Тогда системы v_1 и v_2 траекторно эквивалентны (топологически или гладко соответственно).

Доказательство.

Это утверждение является следствием доказанной выше теоремы редукции систем двух степеней свободы к системам одной степени свободы. Как будет показано ниже (в этой же главе), функция вращения системы v_i на 3-атоме A совпадает с функцией периода редуцированной системы на 2-атоме A , то есть на двумерном диске. В результате, вопрос о траекторной эквивалентности систем на 3-атоме A сводится к доказательству сопряженности редуцированных систем w_1 и w_2 на двумерном диске, при условии, что функции периодов сопря-

жены. Но в этом предположении можно написать явную формулу, задающую искомый гомеоморфизм (или диффеоморфизм, соответственно). Легко видеть (см., например [281]), что для каждой системы w_i на 2-диске существуют локальные канонические координаты p_i и q_i такие, что гамильтонианы F_i систем w_i запишутся в виде $F_i = F_i(p_i^2 + q_i^2)$. При этом функции периодов $\Pi_i(s_i)$ будут иметь следующий вид:

$$\Pi_i(s_i) = 2\pi \left(\frac{\partial F_i}{\partial s_i} \right)^{-1},$$

где $s_i = p_i^2 + q_i^2$. Если функции вращения сопряжены при помощи замены $s_2 = s_2(s_1)$, то гомеоморфизм (соответственно, диффеоморфизм), сопрягающий системы w_1 и w_2 , может быть записан в следующем простом виде: $\varphi_1 = \varphi_2$, $s_2 = s_2(s_1)$, где φ_i — полярные углы, отвечающие «декартовым» координатам p_i, q_i . Следовательно, потоки Пуанкаре на двумерном диске сопряжены, а потому исходные системы v_1 и v_2 траекторно эквивалентны на 3-атоме A . Лемма доказана. ■

Итак, вблизи особых слоев (то есть, на 3-атомах) данные системы v_1 и v_2 траекторно эквивалентны. Кроме того, по условию, совпадают векторы вращения сравниваемых систем на соответствующих ребрах молекул W_1 и W_2 . Отсюда и из предложений 5.2 и 5.3 главы 5 следует, что системы v_1 и v_2 траекторно эквивалентны на каждом ребре. Осталось сшить имеющиеся траекторные эквивалентности на атомах и на ребрах. Итак, рассмотрим произвольное ребро e , примыкающее к какому-либо атому V . Вблизи атома на некотором однопараметрическом семействе торов Лиувилля $T \times [a, b]$ мы имеем два различных траекторных изоморфизма:

$$\xi, \eta: T^2 \times [a, b] \rightarrow T^2 \times [a', b'].$$

Для сшивания мы должны построить некоторый новый траекторный изоморфизм $\zeta: T^2 \times [a, b] \rightarrow T^2 \times [a', b']$, который совпадает с ξ в окрестности одного граничного тора, т.е. на множестве $T^2 \times [a, a + \varepsilon]$, и совпадает с η в окрестности второго граничного слоя, т.е. на множестве $T^2 \times [b - \varepsilon, b]$. Отметим, что оба изоморфизма в нашей ситуации являются послойными, т.е. образом тора Лиувилля из семейства $T^2 \times [a, b]$ является некоторый тор Лиувилля из семейства $T^2 \times [a', b']$, причем один и тот же для обоих диффеоморфизмов. Дело в том, что при траекторных изоморфизмах обязано сохраняться число вращения, которое вблизи седлового атома меняется монотонно. Кроме этого траекторные изоморфизмы ξ и η являются гомотопически эквивалентными. Это связано с тем, что гомотопический класс отображения определяется образами базисных циклов на торе, т.е. циклов, задающих допустимые системы координат. В нашем случае образы базисных циклов фиксированы, поскольку фиксированы наборы сечений. Требуемое сшивание возможно в силу следующей леммы о сшивании, которая справедлива как в гладком, так и в топологическом случае.

Лемма 8.3 (Лемма о сшивании). Пусть заданы два различных траекторных изоморфизма между интегрируемыми гамильтоновыми системами v_1 и v_2 ,

ограниченными на однопараметрические семейства лиувиллевых торов:

$$\xi, \eta: T^2 \times [a, b] \rightarrow T^2 \times [a', b'].$$

Пусть $\xi(T^2 \times \{c\}) = \eta(T^2 \times \{c\})$ и кроме того ξ и η гомотопны. Тогда существует сшивающий траекторный изоморфизм ζ такой, что

$$\zeta = \xi \text{ на множестве } T^2 \times [a, a + \varepsilon], \text{ и}$$

$$\zeta = \eta \text{ на множестве } T^2 \times [b - \varepsilon, b].$$

Доказательство.

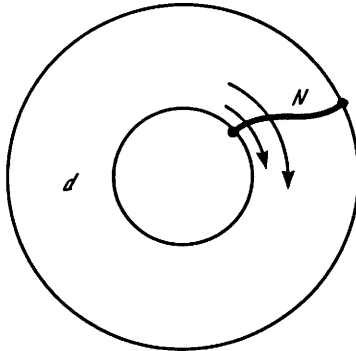


Рис. 8.2

Без ограничения общности мы можем считать, что функция вращения меняется мало на нашем семействе торов. Иначе мы можем разбить все на узкие кусочки и доказывать для каждого из них лемму по отдельности. Это условие нужно нам для существования трансверсального сечения. В нашем случае, впрочем, оно будет выполнено автоматически, поскольку вблизи атома такое сечение всегда существует.

Итак, рассмотрим произвольное трансверсальное сечение $P = S^1 \times [a, b] \subset T^2 \times [a, b]$ к векторному полю v_1 и построим соответствующее ему трансверсальное сечение P' к векторному полю v_2 в семействе $T^2 \times [a', b']$ так, чтобы вблизи граничного тора $T^2 \times \{a\}$ оно совпадало с образом $\xi(P)$, а вблизи другого граничного тора $T^2 \times \{b\}$ с образом $\eta(P)$. Легко видеть, что такая трансверсаль P' существует.

Далее, на трансверсалиях P и P' возникают потоки Пуанкаре, которые будут сопряжены в силу теоремы редукции. Изоморфизм \varkappa , сопрягающий эти потоки, определен неоднозначно. Произвол состоит в следующем. Пусть N — произвольная кривая, соединяющая пару точек на двух компонентах границы кольца P и трансверсальная траекториям потока Пуанкаре (рис. 8.2). Тогда в качестве образа N при отображении \varkappa мы можем взять произвольную аналогичную трансверсальную кривую N' на кольце P' . Легко видеть, что если образ $\varkappa(N)$ фиксирован, то далее \varkappa однозначно восстанавливается.

В нашем случае в качестве трансверсали N' на кольце P' мы возьмем такую кривую, которая вблизи одной граничной окружности совпадает с $\xi(N)$, а вблизи другой граничной окружности совпадает с $\eta(N)$. Внутри кольца кривая N' может быть выбрана произвольным образом, лишь бы она была гладкой и трансверсальной потоку Пуанкаре. После этого мы можем однозначно восстановить изоморфизм $\varkappa: P \rightarrow P'$, переводящий поток Пуанкаре σ^t на P в поток Пуанкаре σ'^t на P' . Ясно, что по построению, вблизи первой граничной окружности \varkappa совпадает с ограничением $\xi|_P$, а вблизи другой граничной окружности с $\eta|_P$.

Теперь нам нужно продолжить отображение $\varkappa: P \rightarrow P'$ до траекторного изоморфизма ζ между семействами торов Лиувилля $T^2 \times [a, b]$ и $T^2 \times [a', b']$. Такое продолжение всегда возможно.

Дадим формальное построение. Сделаем гладкую замену времени на траекториях потоков v и v' так, чтобы время движения от произвольной точки $x \in P$ (соответственно, $x' \in P'$) до точки $\sigma(x) \in P$ (соответственно, $\sigma'(x') \in P'$) было равно единице. Тогда на семействах торов $T^2 \times [a, b]$ и $T^2 \times [a', b']$ возникают естественные системы координат (x, t) и (x', t') , где x и x' — точки на поверхностях P и P' соответственно, а t и t' — новые времена вдоль потоков. При этом точки $(x, t + 1)$ и $(\sigma(x), t)$ отождествляются. Аналогично, имеем $(x', t' + 1) = (\sigma'(x'), t')$. Точку x в свою очередь удобно представлять в виде пары (φ, f) , где φ — параметр на окружности, а f — параметр на отрезке $[a, b]$. Аналогично, имеем $x' = (\varphi', f')$.

Теперь изоморфизм ζ в координатах может быть записан следующим образом:

$$\zeta(x, t) = (x' = \kappa(x), t' = t'(x, t)),$$

причем

- 1) t' монотонна;
- 2) $t'(x, t + 1) = t'(\sigma(x), t) + 1$;
- 3) $t'(x, 0) = 0, t'(x, 1) = 1$.

Отображение, удовлетворяющее этим условиям, очевидно, существует, поскольку потоки Пуанкаре σ^t и σ'^t сопряжены. Возьмем произвольное такое отображение ζ .

Соответствующую функцию $t'(x, t)$ мы обозначим через $\tilde{t}'(x, t)$. Затем «продеформируем» отображение так, чтобы вблизи граничных торов оно совпадало с ξ и η соответственно. Ясно, что формулы изоморфизмов ξ и η в координатах имеют такой же вид, что и выписанные выше формулы для ζ . Отличие состоит лишь в выборе функции t' . Обозначим эти функции для ξ и η через t'_ξ и t'_η соответственно. Определим теперь новую функцию t' по формуле

$$t'(x, t) = \begin{cases} (1 - c(f))t'_\xi(x, t) + c(f)\tilde{t}'(x, t) & \text{при } f \in [a, a + 2\varepsilon], \\ \tilde{t}'(x, t) & \text{при } f \in [a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon], \\ (1 - c(f))t'_\eta(x, t) + c(f)\tilde{t}'(x, t) & \text{при } f \in [b - 2\varepsilon, b]. \end{cases}$$

Здесь $c(f)$ — гладкая функция, график которой изображен на рис. 8.3. Легко видеть, что функция $t'(x, t)$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Лемма о сшивании доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно увидеть, что доказательство леммы справедливо и в гладком случае. Более того, все доказательство построено по существу на неявном предположении о гладкости всех рассматриваемых объектов. Это вполне естественно, поскольку, как мы уже видели, вся негладкость сосредоточена только на особых слоях, а сшивание производится на некотором удалении от них. Эту лемму мы используем ниже при рассмотрении гладкого случая.

Итак, сшивая между собой с помощью этой леммы атомные и реберные траекторные изоморфизмы, мы получаем в результате глобальный траекторный изоморфизм, что и требовалось.

Основная лемма в топологическом случае доказана. ■

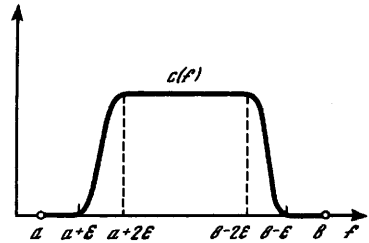


Рис. 8.3

8.2. Группа замен трансверсальных сечений. Операция вклейки-вырезания

Из леммы 8.1 сразу вытекает способ построения траекторных инвариантов. Нам следует лишь подобрать такие комбинации из элементов избыточного t -оснащения, которые не зависят от выбора набора сечений \mathbb{P} .

С формальной точки зрения мы можем рассмотреть следующую конструкцию. Пусть \mathbb{T} — избыточное t -оснащение, соответствующее некоторому набору трансверсальных сечений \mathbb{P} . Если мы изменим набор сечений, то избыточное t -оснащение также изменится по некоторому вполне определенному правилу. На самом деле это означает, что на множестве всех избыточных t -оснащений $\{\mathbb{T}\}$ действует группа замен трансверсальных сечений, которую мы обозначим через $G\mathbb{P}$. Оказывается, в качестве $G\mathbb{P}$ следует рассматривать прямую сумму групп целочисленных когомологий $H^1(P_c, \mathbb{Z})$ для всех седловых атомов данной молекулы и еще s экземпляров группы целых чисел \mathbb{Z} . Каждый экземпляр соответствует некоторому атому типа A .

Таким образом, $G\mathbb{P} = (\oplus_c H^1(P_c, \mathbb{Z})) \oplus \mathbb{Z}^s$.

Это утверждение является общим фактом из трехмерной топологии. Сейчас мы его прокомментируем. Рассмотрим два различных трансверсальных сечения P_{tr} и P'_{tr} на каком либо седловом 3-атоме Q_c . Чем они отличаются друг от друга? Здесь придется рассмотреть отдельно два случая: атомы без звездочек, и атомы со звездочками.

Начнем с атомов без звездочек. В этом случае 3-атом имеет тип прямого произведения $(Q_c, f^{-1}(c)) = (P_c, K_c) \times S^1$. Рассмотрим два трансверсальных сечения

$$j: P_c \rightarrow Q_c \text{ и } j': P_c \rightarrow Q_c, P_{tr} = j(P_c), P'_{tr} = j'(P_c).$$

Поскольку оба сечения интересуют нас с точностью до изотопии, то мы можем без ограничения общности считать, что сечения P_{tr} и P'_{tr} пересекаются с критическими окружностями атома в одних и тех же точках. Это означает, что образы каждой вершины графа при отображениях j и j' совпадают. Рассмотрим произвольное ребро K_i графа K и его образы $j(K_i)$ и $j'(K_i)$. Ясно, что $j(K_i) = P_{tr} \cap L_i$ и $j'(K_i) = P'_{tr} \cap L_i$, где L_i — одно из колец, из которых состоит критический уровень $f^{-1}(c)$ интеграла f . Итак, мы имеем на кольце L_i два ребра $j(K_i)$ и $j'(K_i)$ с совпадающими концами, лежащими на противоположных граничных окружностях кольца.

На кольце L_i имеется ориентированный цикл λ — слой тривиального расслоения Зейферта. На ребрах $j(K_i)$ и $j'(K_i)$ также имеются естественные ориентации, заданные потоками Пуанкаре w и w' . Эти потоки индуцированы, в свою очередь, одним и тем же гамильтоновым полем v на кольце L_i . Отсюда следует, что имеет естественный смысл следующее разложение: $j'(K_i) = j(K_i) + m_i \lambda$, где m_i — некоторое целое число, положительное или отрицательное. Комментарий к этой формуле: разность $j'(K_i) - j(K_i)$, очевидно, является 1-циклом на кольце L_i с образующей λ . Следовательно, этот 1-цикл кратен λ с некоторым целым коэффициентом m_i .

Итак, в результате сравнения двух сечений, на ребре K_i появилось целое число m_i . Этот набор целых чисел мы будем интерпретировать как 1-коцепь m и называть различающей коцепью. Заметим теперь, что коцепь m определена с точностью до целочисленной кограницы. Действительно, рассмотрим образ некоторой вершины графа K_c при отображении j' . Поскольку сечения нас интересуют с точностью до изотопии, то мы можем протянуть эту вершину вдоль слоя тривиального S^1 -расслоения и вернуться на прежнее место. С одной стороны при такой операции сечение изменилось на изотопное, с другой, как нетрудно увидеть, к различающей коцепи m добавилась элементарная кограница, отвечающая данной вершине графа K_c . Таким образом, корректно определенной различающей двух сечений является в данном случае элемент целочисленной группы когомологий $C^1(K_c, \mathbb{Z})/B^1(K_c, \mathbb{Z}) = H^1(K_c, \mathbb{Z})$. Учитывая, что атом P_c стягивается на свой граф K_c , мы можем интерпретировать построенную различающую m как элемент группы $H^1(P_c, \mathbb{Z})$.

Обратно, пусть $P_{tr} = j(P_c)$ — произвольное сечение и m — любой элемент из $H^1(P_c, \mathbb{Z})$. Тогда можно однозначно, с точностью до изотопии восстановить новое сечение $P'_{tr} = j'(P_c)$ такое, что различающая между P_{tr} и P'_{tr} будет как раз равняться m .

Рассмотрим теперь случай атомов со звездочками. Общая схема рассуждений сохраняется. В этом случае в качестве трансверсальных сечений мы должны рассматривать вложения дубля \widehat{P}_c соответствующего атома со звездочками (P_c, K_c) . Итак, пусть даны два вложения

$$j: \widehat{P}_c \rightarrow Q_c, \quad j': \widehat{P}_c \rightarrow Q_c.$$

Напомним, что говоря здесь о вложении дубля, мы рассматриваем только такие вложения, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{P} & \xrightarrow{j} & Q_c \\ \pi_\chi \searrow & & \swarrow \pi \\ & P_c & \end{array}$$

коммутативна.

Легко видеть, что с помощью изотопии можно добиться того, чтобы эти вложения совпадали на малых окрестностях вершин дубля \widehat{P} . Обозначим через \widehat{K}_c граф, являющийся дублем графа K_c и лежащий в дубле \widehat{P}_c . Тогда то же рассуждение, что и выше, дает соотношение:

$$j'(\widehat{K}_i) = j(\widehat{K}_i) + m_i \lambda,$$

где $\{m_i\}$ — целые числа, а \widehat{K}_i — ребра графа \widehat{K}_c . Это соотношение аналогично формуле $K'_i = K_i + m\lambda$, полученной нами выше для атомов без звездочек.

Каждое кольцо L_i особого слоя L пересекается, в данном случае, с трансверсальным сечением не по одному отрезку, как в случае атомов без звездочек, а по двум отрезкам. Эти отрезки переходят друг в друга при инволюции τ , определенной на дубле. Их можно обозначить через \widehat{K}_i и $\tau(\widehat{K}_i)$. Тогда соотношение,

аналогичное полученному выше для отрезка \widehat{K}_i , будет верно и для отрезка $\tau(\widehat{K}_i)$. А именно:

$$j'(\tau(\widehat{K}_i)) = j(\tau(\widehat{K}_i)) + m\lambda,$$

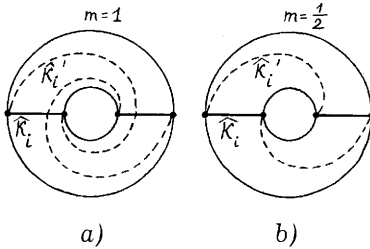


Рис. 8.4

где m_i — те же самые, что и в формуле для ребер \widehat{K}_i .

Получающийся набор чисел $\{m_i\}$ можно интерпретировать как « τ -симметричную» 1-коцепь, то есть элемент группы $C^1(K_c, \mathbb{Z})$. Другими словами, эта коцепь принимает одинаковые значения на «парных ребрах», переходящих друг в друга при инволюции τ . Следовательно, набор чисел $\{m_i\}$ можно интерпретировать как 1-коцепь на графе $K_c = \widehat{K}_c/\tau$. Таким образом, 1-коцепь $\{m_i\}$ на самом деле лежит в

группе $C^1(K_c, \mathbb{Z})$. Далее, как и в предыдущем случае, легко заметить, что эта коцепь определена по модулю 1-кограницы, и мы приходим к тому же самому результату: различающей двух сечений является элемент группы одномерных когомологий $H^1(P_c, \mathbb{Z})$.

Обратно, если задан произвольный элемент $m \in H^1(P_c, \mathbb{Z})$, то всегда можно построить по нему трансверсальное сечение $P'_{tr} = j'(\widehat{P}_c)$ в 3-атоме Q_c , отличающееся от сечения $P_{tr} = j(\widehat{P}_c)$ на этот коцикл m .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если не накладывать никаких дополнительных ограничений на выбор трансверсального сечения, как это предусмотрительно сделали мы, то числа $\{m_i\}$ могут оказаться не целыми, а полуцелыми. Дело в том, что отбросив условие принадлежности двух сечений к одному классу (см. выше условие коммутативности диаграммы), мы сразу же увидим, что отрезки $P_{tr} \cap L_i = \widehat{K}$ и $P'_{tr} \cap L_i = \widehat{K}'$ могут отличаться внутри кольца L_i на полуцелое число оборотов. См. рис. 8.4(b). В этом случае топологический тип трансверсального сечения может измениться. Поскольку мы хотим работать в классе сечений одного и того же топологического типа, мы запретили «полуцелые обороты» условием совпадения двух вложений j и j' дубля \widehat{P}_c в окрестности его вершин. В результате всегда появляется лишь «целочисленная намотка», изображенная на рис. 8.4(a).

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы видим, что с формальной точки зрения группа замен трансверсальных сечений одинаково устроена как в случае атомов без звездочек, так и для атомов со звездочками. Это — группа одномерных когомологий $H^1(P_c, \mathbb{Z})$. Формально, инварианты (Λ, Δ, Z) редуцированной системы тоже одинаково устроены как для атомов без звездочек, так и для атомов со звездочками. Эти два наблюдения, сделанные А. В. Скопенковым [258], позволяют легко включить атомы со звездочками в общую теорию классификации интегрируемых систем.

В случае атома типа A аналог «различающей» m вводится аналогичным образом. Напомним, что топологически атом A представляет собой полноторие, и произвол в этом случае состоит в выборе слоя μ тривиального расслоения Зейферта на этом граничном торе. Ясно, что два таких слоя всегда связаны соотношением $\mu' = \mu + m\lambda$, где λ — меридиан полнотория, а m — некоторое целое

число. Именно это число и является аналогом «различающей», и мы для удобства будем употреблять этот термин как для седловых атомов, так и для атомов типа A .

Итак, если мы имеем некоторый набор сечений $\mathbb{P} = \{P_{tr}\}$ и некоторый набор коциклов $\mathbb{M} = \{m_c\} \in G\mathbb{P}$, то мы можем естественным способом построить новый набор сечений \mathbb{P}' , являющийся результатом действия \mathbb{M} на \mathbb{P} .

Таким образом, мы можем определить действие группы замен трансверсальных сечений $G\mathbb{P}$ на множестве всех трансверсальных сечений $\{\mathbb{M}\}$. Отметим, что структура группы $G\mathbb{P}$ очень проста: это свободная абелева группа \mathbb{Z}^{n+k} , где n — число замкнутых гиперболических траекторий системы с ориентируемыми сепаратрисными диаграммами, k — общее число всех атомов. Здесь мы пользуемся тем, что размерность группы гомологий $H^1(P_c, \mathbb{Z})$ для каждого отдельного седлового атома вычисляется по следующей простой формуле: $\dim H^1(P_c, \mathbb{Z}) = s_c + 1$, где s_c — число вершин графа K_c кратности четыре (т.е. число гиперболических траекторий с ориентируемыми сепаратрисными диаграммами, попавших в данный атом).

Следующее утверждение дает ответ на вопрос о том, что происходит с потоком Пуанкаре при замене трансверсального сечения.

Предложение 8.1.

- а) Пусть Q_c — 3-атом без звездочек, w и w' — потоки Пуанкаре, порожденные системой v на сечениях $P_{tr} = j(P_c) \subset Q_c$ и $P'_{tr} = j'(P_c) \subset Q_c$. Пусть далее $m \in H^1(P_c, \mathbb{Z})$ — определенный выше различающий 1-коцикл. Тогда поток w' на 2-атоме P_c получается из w применением операции вклейки-вырезания Φ_{-m} .
- б) Пусть Q_c — 3-атом со звездочками, w и w' — потоки Пуанкаре, порожденные системой v на сечениях $P_{tr} = j(\hat{P}_c)$ и $P'_{tr} = j'(\hat{P}_c)$, где \hat{P}_c — канонический дубль. Пусть далее $m \in H^1(P_c, \mathbb{Z})$ — определенный выше различающий 1-коцикл. Тогда система w' на дубле P_c получается из системы w , применением операции вклейки-вырезания $\Phi_{-\hat{m}}$, где 1-коцикл \hat{m} обозначает «поднятие» 1-коцикла m с атома $P_c = \hat{P}_c/\tau$ на его дубль \hat{P}_c . Другими словами, \hat{m} — симметричный 1-коцикл, принимающий одинаковые значения на тех ребрах графа K_c , которые переходят друг в друга при инволюции τ : если 1-коцикл m принимает значение m_i на ребре K_i графа K , то \hat{m} принимает значение m_i как на \hat{K}_i , так и на $\tau(\hat{K}_i)$.

Доказательство предложения 8.1.

Начнем со случая атомов без звездочек. Достаточно доказать предложение 8.1 для элементарного 1-коцикла m , который равен нулю на всех ребрах графа K_c , кроме одного ребра K_i , на котором он равен 1.

Рассмотрим рис. 8.5, на котором изображено плоское кольцо L_i с двумя трансверсальными гладкими кривыми $j(K_i)$ и $j'(K_i)$, изображенными жирными линиями. Здесь $j'(K_i)$ получается из $j(K_i)$ намоткой с коэффициентом $m_i = 1$ вдоль оси кольца. Тонкой линией изображена траектория векторного

поля $v = \text{sgrad } H$, поведение которой в силу наших предположений соответствует рис. 3.16(b). Напомним, что ребра $j(K_i)$ и $j'(K_i)$ являются пересечениями трансверсальных сечений P_{tr} и P'_{tr} с кольцом L_i . Мы выбрали их специальным образом, чтобы доказательство сформулированного утверждения было более наглядным. Мы вправе делать это, поскольку сечение можно подвергать изотопии без изменения его свойств.

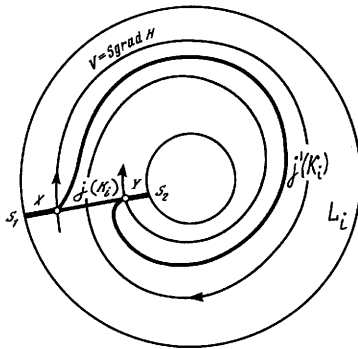


Рис. 8.5

На отрезках S_1X и YS_2 ребра $j(K_i)$ и $j'(K_i)$ совпадают, а накрутка производится на интервале XY . Следовательно, на отрезках S_1X и YS_2 потоки Пуанкаре σ^t и σ'^t совпадают. Что происходит между точками X и Y ? Легко видеть по нашему построению, что $Y = \sigma^2(X)$ и в то же время $Y = \sigma'^1(X)$. На всех близких торах при аналогичном выборе сечений, т.е. когда они совпадают всюду за исключением правильно подобранного участка, ситуация будет в точности аналогичной. Таким образом, потоку σ^t требуется на единицу больше времени, чтобы пройти участок от X до Y , чем потоку σ'^t . Но это и означает, что поток σ'^t получается из σ^t вырезанием куска единичной длины, что и требовалось доказать.

Пункт «б», т.е. случай атомов со звездочками, доказывается аналогично. Нужно в точности повторить все предыдущие рассуждения для обоих парных ребер \hat{K}_i и $\tau(\hat{K}_i)$. Предложение 8.1 доказано. ■

8.3. Действие группы замен $G\mathbb{P}$ на множестве избыточных оснащений

Замечательным является тот факт, что действие $G\mathbb{P}$ на множестве сечений индуцирует естественное действие на множестве $\{\mathbb{T}\}$ допустимых избыточных t -оснащений. Пусть нам дана система v и набор сечений $\mathbb{P} = \{P_{tr}\}$. Тогда корректно определено соответствующее этому набору избыточное t -оснащение \mathbb{T} . Подействуем на \mathbb{P} некоторым элементом группы замен $G\mathbb{P}$. Получим некоторый новый набор сечений \mathbb{P}' , которому соответствует новое избыточное оснащение \mathbb{T}' . По определению мы будем считать, что \mathbb{T}' является результатом действия элемента \mathbb{M} на избыточное t -оснащение \mathbb{T} .

Подчеркнем, что нетривиальность этой конструкции заключается в корректности такого определения: \mathbb{T}' зависит только от \mathbb{T} и \mathbb{M} , и не зависит от специфики системы v и набора сечений \mathbb{P} .

Эту теорему мы сейчас докажем, опираясь на уже развитую нами теорию. Мы убедимся в этом с помощью явных формул, описывающих это действие.

Кроме различающей 1-коцепи m_c мы будем рассматривать различающую 2-коцепь $k_c = \delta m_c$, которая строится следующим образом. Отметим, что m_c является коциклом для поверхности P_c . Однако с точки зрения замкнутой по-

верхности \tilde{P}_c , которая получается из P_c заклеивкой всех граничных окружностей дисками, коцень m_c будет иметь, вообще говоря, нетривиальную кограницу δm_c , которую мы и обозначаем через k_c .

Коцень k_c сопоставляет каждому граничному тору 3-атома Q_c некоторое целое число k_n , которое на самом деле нам много раз встречалось в формулах замены допустимых систем координат на граничных торах атома (см. главу 4). Напомним эти формулы:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda'_n, \\ \mu_n &= \mu'_n + k_n \lambda'_n.\end{aligned}$$

Отметим, что в терминах сечений \mathbb{P} и \mathbb{P}' различающая 2-коцень k_c имеет очень естественный смысл. В случае атомов без звездочек она показывает, как различаются границы сечений P_{tr} и P'_{tr} . Отметим, что различающая 1-коцень m_c описывает различие между самими сечениями, т. е. содержит более точную информацию. Через \mathbb{K} мы будем обозначать набор $\{k_c\}$. В случае атомов со звездочками интерпретация 2-коцепи k_c в общем-то остается той же. Но поскольку тут речь должна идти о дублях, то границы сечений $P_{tr} = j(\hat{P}_c)$ и $P'_{tr} = j'(\hat{P}_c)$ «различаются» на $2k_c$.

Приведенные выше рассуждения касались седловых атомов. В случае атома типа A мы в качестве аналога 2-коцепи k_c будем рассматривать одно целое число k , сопоставленное единственному граничному тору. В качестве такого числа мы берем при этом само число m , определенное выше из соотношения $\mu' = \mu + m\lambda$. Другими словами, в этом случае одно и то же число m выступает в качестве аналога различающей 1-коцепи m_c и различающей 2-коцепи $k_c = \delta m_c$.

Итак, на каждом граничном торе каждого атома Q_c появилось целое число k_n . Можно считать, следовательно, что эти числа стоят на начале и на конце каждого ребра e_j молекулы W . Поэтому нумерацию этих чисел мы будем производить двумя способами:

- 1) k_j^+ и k_j^- , где j нумерует ребра молекулы W , при этом знак «-» соответствует началу, а знак «+» — концу ребра e_j ;
- 2) k_n , где n нумерует граничные торы атома Q_c , и речь идет о коэффициентах соответствующей 2-коцепи k_c .

Аналогичным соглашением мы будем пользоваться для нумерации векторов вращения R^- , R^+ и допустимых систем координат (λ, μ) на торах Лиувилля. При таком подходе многие формулы должны упроститься.

Предложение 8.2. Пусть \mathbb{P} — произвольный набор трансверсальных сечений для некоторой интегрируемой системы v на изоэнергетической поверхности Q^3 . Пусть \mathbb{M} — произвольный элемент из группы замен $G\mathbb{P}$ и $\mathbb{K} = \delta\mathbb{M}$. Другими словами, \mathbb{M} и \mathbb{K} — наборы различающих 1- и 2-коцепей соответственно. Пусть \mathbb{P}' — набор сечений, полученный из \mathbb{P} заменой \mathbb{M} , \mathbb{T} и \mathbb{T}' — избыточные t -оснащения, отвечающие наборам \mathbb{P} и \mathbb{P}' . Тогда элементы этих t -оснащений связаны друг с другом следующим образом:

$$1) C_j' = \begin{pmatrix} \alpha_j' & \beta_j' \\ \gamma_j' & \delta_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_j^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_j^- & 1 \end{pmatrix} = (A_j^+)^{-1} C_j A_j^-, \text{ где } A_j^\mp = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_j^\mp & 1 \end{pmatrix},$$

$$2) (R_j^-)' = R_j^- + k_j^-, (R_j^+)' = R_j^+ + k_j^+,$$

$$3) \Lambda'_c = \Lambda_c,$$

$$4) \Delta'_c = \Delta_c + \phi'_1(k_c) \text{ или, что то же самое, } \Delta'_c = \Delta_c + \phi_1(m_c),$$

$$5) Z'_c = Z_c + \phi_2(m_c).$$

Доказательство.

Формула 1 доказана в главе 4. Формула 2 следует из предложения 1.14. Формулы 3, 4, 5 следуют из свойств операции вклейки-вырезания, описанной в параграфе 2 главы 6, и предложения 8.1, которое интерпретирует действие элемента m_c на трансверсальное сечение как вклейку-вырезание. Предложение доказано. ■

Следствие. Действие группы замен на множестве избыточных t -оснащений корректно определено. В частности, это действие не зависит от выбора конкретной гамильтоновой системы и набора трансверсальных сечений, реализующих данное t -оснащение.

8.4. Три общих принципа построения инвариантов

Теперь мы можем сформулировать общие принципы построения траекторных инвариантов.

Первый общий принцип. Пусть g — некоторая функция на множестве всех избыточных t -оснащений, являющаяся инвариантом описанного выше действия группы замен. Пусть далее, g принимает значения в некотором «разумном множестве»:

$$g: \mathbb{T} \rightarrow X,$$

$$g(\mathbb{T}) = g(\mathbb{T}'), \text{ если } \mathbb{T}' = \mathbb{M}(\mathbb{T}).$$

Через X здесь обозначено множество возможных значений функции g . Например, вещественные числа, проективное пространство, коцепи, цепи, циклы и т.п.

Тогда g , уже как функция на множестве интегрируемых гамильтоновых систем, является топологическим траекторным инвариантом интегрируемых гамильтоновых систем на изоэнергетических 3-поверхностях.

Второй общий принцип. Пусть g_1, \dots, g_p — набор топологических траекторных инвариантов, описанный в первом общем принципе. Пусть этот набор является полным, т.е. позволяет различать орбиты действия группы замен на множестве избыточных t -оснащений. Тогда объект (W, g_1, \dots, g_p) является полным топологическим траекторным инвариантом интегрируемых гамильтоновых систем на изоэнергетических поверхностях. Этот объект можно назвать t -молекулой, интерпретируя g_1, \dots, g_p как некоторые метки, навешиваемые на молекулу W . Другими словами, две интегрируемые гамильтоновы системы топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им t -молекулы совпадают.

Таким образом, наша задача свелась к довольно формальному поиску инвариантов действия группы $G\mathbb{P}$ на множестве $\{\mathbb{T}\}$.

Третий общий принцип. При правильном подходе к проблеме классификации, сначала мы рассматриваем пространство всех избыточных t -оснащений, затем действие на нем группы замен сечений, в результате чего получаем пространство орбит. Возможно, оно плохо устроено, если гамильтонова система достаточно сложна. После этого мы должны рассмотреть это пространство орбит и задать на нем набор «функций», разделяющих орбиты.

Наш третий принцип заключается в том, что полный набор инвариантов может выбираться неоднозначно. Каждый раз такой выбор может определяться специфическими свойствами молекулы системы. Это означает, что t -молекула может задаваться разными способами. Однако естественно, что любой способ выбора конкретного вида t -молекулы должен учитывать, что базируется она на «обязательной части», а именно — на меченой молекуле W^* . Но «расширять», дополнять молекулу W^* новыми параметрами-инвариантами можно разными способами.

Например, работая лишь с простыми молекулами, можно ограничиться добавлением к молекуле W^* вводимого нами ниже b -инварианта и векторов вращения. При рассмотрении сложных молекул придется добавлять более деликатный $\Delta\tilde{Z}[\theta]$ -инвариант.

8.5. Допустимые избыточные оснащения и их реализация

8.5.1. Реализация оснащения на атоме

Пусть P_c^2 — седловой 2-атом, со звездочками или без, и Q_c — отвечающее ему 3-многообразие, т. е. седловой 3-атом.

Лемма 8.4.

- а) Пусть на 2-атоме P_c , без звездочек, задана произвольная гамильтонова система с морсовским гамильтонианом $w = \text{sgrad } F$. Тогда эта система может быть реализована как поток Пуанкаре для некоторой интегрируемой гамильтоновой системы $v = \text{sgrad } H$ с двумя степенями свободы на симплектическом 4-многообразии M^4 , диффеоморфном прямому произведению $Q_c^3 \times (-1, 1)$.
- б) Пусть на дубле \hat{P}_c 2-атома P_c со звездочками, задана гамильтонова система с морсовским гамильтонианом $w = \text{sgrad } F$, инвариантная относительно инволюции $\chi: \hat{P}_c \rightarrow \hat{P}_c$. Тогда эта система может быть реализована как поток Пуанкаре для некоторой интегрируемой гамильтоновой системы $v = \text{sgrad } H$ с двумя степенями свободы на симплектическом 4-многообразии M^4 диффеоморфном прямому произведению $Q_c^3 \times (-1, 1)$. Здесь Q_c^3 — 3-атом, отвечающий 2-атому $P_c = \hat{P}/\chi$.

Доказательство.

а) Пусть ω — симплектическая структура на P_c , отвечающая гамильтониану F и полю w . Рассмотрим 4-многообразие $\widetilde{M} = P_c \times [0, 2\pi] \times (-1, 1)$ с симплектической структурой $\widetilde{\Omega} = \omega + dH \wedge d\varphi$, где H и φ — естественные координаты на $(-1, 1)$ и $[0, 2\pi]$ соответственно. Ясно, что $\widetilde{\Omega}$ действительно является симплектической структурой на \widetilde{M} , и гамильтоново поле

$$\text{sgrad } H = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

имеет интеграл F . отождествим теперь два основания цилиндра

$$P_c \times (-1, 1) \times \{0\} \text{ и } P_c \times (-1, 1) \times \{2\pi\}$$

по диффеоморфизму $g(p, H, 2\pi) = (\sigma(p), H, 0)$, где $\sigma = \sigma^1$ — сдвиг на единичное время вдоль векторного поля w . Здесь (p, H) — точка из $P_c \times (-1, 1)$.

В результате мы получим многообразие $M^4 = P_c \times S^1 \times (-1, 1)$, причем симплектическая структура $\widetilde{\Omega}$ превратится в гладкую симплектическую структуру на M . Дело в том, что симплектическая структура ω сохраняется при отображении σ .

Ясно, что в результате отображение $\sigma: P_c \rightarrow P_c$ будет отображением Пуанкаре гамильтонова потока $v = \text{sgrad}(H)$ на каждой изоэнергетической поверхности, и гамильтоново векторное поле v удовлетворяет всем необходимым требованиям.

б) В случае атомов со звездочками поступим аналогично. А именно, рассмотрим цилиндр $\widetilde{M} = \widehat{P}_c \times [0, \pi] \times (-1, 1)$, и отождествим его основания

$$\widehat{P}_c \times (-1, 1) \times \{0\} \text{ и } \widehat{P}_c \times (-1, 1) \times \{\pi\}$$

по диффеоморфизму вида $g(p, H, \pi) = (\chi\sigma^{1/2}(p), H, 0)$. Как и в предыдущем случае, мы получим симплектическое многообразие с гамильтоновым потоком $\text{sgrad } H$, трансверсальным сечению \widehat{P}_c . При этом «однократное» отображение Пуанкаре на этом сечении будет иметь вид $\bar{\sigma} = \chi\sigma^{1/2}$. Мы же в качестве отображения Пуанкаре на атомах со звездочками рассматриваем «двукратное» отображение, которое в данном случае приобретает вид

$$\sigma = \sigma^{-2} = \chi\sigma^{1/2}\chi\sigma^{1/2} = \chi^2\sigma^1 = \sigma^1,$$

что и требовалось. Лемма 8.4 доказана. ■

В частности, эта лемма показывает, что мы можем реализовать любую допустимую тройку (Λ, Δ, Z) (см. параграф 3 главы 6) как тройку атомных инвариантов системы с двумя степенями свободы, т.е. как элемент некоторого избыточного t -оснащения.

Отметим еще одну простую, но важную связь между системой на 3-атоме и ее редукцией на 2-атоме. При изучении систем на 2-атоме P^2 мы много раз рассматривали функцию Π , которая каждой замкнутой траектории μ ставила в

соответствие ее период. Каждой замкнутой траектории редуцированной системы на P отвечает некоторый тор Лиувилля, на котором определено число вращения ρ . Легко видеть, что между числами ρ и Π имеется очень простая связь. Чтобы сформулировать ответ в удобной для нас форме, условимся рассматривать функцию периода со знаком. А именно, мы будем ставить «плюс», если траектория находится на положительном кольце, и «минус», если на отрицательном.

Отметим, что траектория μ , будучи пересечением тора с трансверсальным сечением, может рассматриваться как один из базисных циклов допустимой системы координат, дополнительный к циклу λ , который является слоем расслоения Зейферта. Однако две ориентации μ — как траектории редуцированной системы и как цикла допустимой системы координат — могут не совпадать. Это в точности соответствует тому, что период траектории μ в этом случае следует брать со знаком «минус». Уточним, что в используемых сейчас обозначениях в случае атома типа A по определению допустимой считается пара $(-\mu, \lambda)$, а не (λ, μ) .

Итак, пусть на μ выбрана ориентация как на цикле допустимой системы координат. Тогда легко проверяется следующее утверждение, которое иногда даже кладут в основу определения числа вращения.

Лемма 8.5. Пусть Q_c — произвольный атом, со звездочками или без, и Π — период замкнутой интегральной траектории μ поля Пуанкаре w на некоторой трансверсальной площадке $P_{tr} \subset Q_c$. Пусть T — соответствующий этой траектории тор Лиувилля в Q_c и ρ — число вращения системы v на торе T относительно системы координат, состоящей из следующих двух циклов: первый λ — слой расслоения Зейферта, второй μ — пересечение трансверсального сечения атома с данным тором. Тогда $\rho = \pi$.

Отметим, что эта лемма позволяет нам разделить кольца атома на положительные и отрицательные очень естественным образом: знак кольца определяется знаком функции вращения на соответствующем кольце семействе торов Лиувилля.

Следствие. Пусть Q_c — седловой атом со звездочками или без. Тогда функция вращения ρ , записанная в допустимой системе координат стремится к бесконечности при приближении тора Лиувилля к особому слою $f^{-1}(c)$. В случае же атома A предел функции вращения ρ при сжатии тора Лиувилля на устойчивую замкнутую траекторию может быть произвольным вещественным числом и не может быть равен бесконечности.

Укажем на важную связь между мультипликаторами отображения Пуанкаре и функцией вращения. Рассмотрим 3-атом A , представляющий собой окрестность устойчивой периодической траектории, расслоенную на торы Лиувилля. Обозначим через ν мультипликатор этой периодической траектории. Напомним, что ν — это собственное число линеаризации отображения Пуанкаре на произвольном трансверсальном сечении P_{tr} . При этом есть два собственных числа ν и ν^{-1} . Пусть далее ρ_0 — предел функции вращения ρ при стремлении тора Лиувилля к периодической траектории. При этом функция вращения ρ вычисляется в допустимой системе координат на торе Лиувилля. В данном случае первый базисный цикл лежит на трансверсальном сечении P_{tr} , а второй является слоем расслоения Зейферта и направлен вдоль периодической траектории.

Предложение 8.3. *Имеет место формула:*

$$\nu = e^{2\pi i \rho}.$$

Замечание. Подчеркнем, что в этом утверждении мы поменяли местами в базе на торе Лиувилля циклы λ и μ . Следовательно, здесь функция вращения ρ отличается от функции вращения, обсуждавшейся выше. А именно, если обозначить прежнюю функцию через $\tilde{\rho}$, то связаны они так: $\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.

Доказательство.

Отметим, что в этом утверждении мы поменяли базисные циклы, о которых шла речь в лемме 8.5. Поэтому в данном случае число вращения и период потока Пуанкаре на трансверсальном сечении связаны соотношением $\rho^{-1} = \Pi$. Таким образом, доказываемая нами формула является в действительности утверждением о гамильтоновой системе с одной степенью свободы на трансверсальном сечении P_{tr} , поскольку функция Π и мультипликатор ν характеризуют поток Пуанкаре на сечении P_{tr} . Требуемое утверждение будет вытекать из следующего факта, справедливого для гамильтоновых систем с одной степенью свободы.

Пусть P_0 — невырожденный локальный минимум (или максимум) гамильтониана $F(x, y)$. Положим для определенности $F(P_0) = 0$. Пусть $\Pi(c)$ — период потока $w = \text{sgrad } F$ вдоль замкнутой траектории вида $\gamma_c = \{F = c\}$ и $\Pi_0 = \lim_{c \rightarrow 0} \Pi(c)$. Пусть σ — сдвиг на время, равное 1, вдоль интегральных траекторий потока $w = \text{sgrad } F$. Рассмотрим линейризацию $d\sigma$ этого отображения σ и пусть ν и ν^{-1} — это собственные числа линейризации в точке P_0 .

Предложение 8.4. *Имеет место формула:*

$$\nu = e^{\pm 2\pi i / \Pi_0}.$$

Доказательство.

По лемме Морса, выберем такие локальные координаты в окрестности точки P_0 , в которых функция F запишется в виде $F(x, y) = x^2 + y^2$. Поскольку такие координаты не обязаны быть каноническими, то форма ω запишется относительно них в виде $\omega = \omega(x, y) dx \wedge dy$, где $\omega(x, y)$ — некоторая гладкая функция. Тогда векторное поле $w = \text{sgrad } F$ запишется в виде:

$$\text{sgrad } F = \left(-\frac{y}{\omega(x, y)}, \frac{x}{\omega(x, y)} \right).$$

Рассмотрим второе векторное поле $\xi = (-y, x)$. Оно пропорционально w , и $w = \frac{\xi}{\omega(x, y)}$. Период поля ξ постоянен и равен 2π . Поэтому период $\Pi(c)$ поля w оценивается следующим образом:

$$2\pi \min \omega(x, y) \leq \Pi(c) \leq 2\pi \max \omega(x, y),$$

где \min и \max берутся по окружности $\{F = c\}$ с центром в точке P_0 . Переходя к пределу, при $c \rightarrow 0$, получаем отсюда следующее равенство:

$$\Pi(0) = 2\pi \omega(0, 0).$$

С другой стороны, линеаризация поля $w = \frac{\xi}{\omega(x, y)}$ в точке P_0 имеет вид $\frac{\xi}{\omega(0, 0)} = \frac{(-y, x)}{\omega(0, 0)}$. Следовательно, собственные числа линеаризации выглядят так:

$$\nu = e^{\pm i/\omega(0,0)}.$$

Сравнивая это выражение с $\Pi(0)$, получаем искомую формулу:

$$\nu = e^{\pm 2\pi i/\Pi(0)}.$$

Предложение 8.4 доказано. ■

Предложение 8.3, очевидно, вытекает из предложения 8.4. ■

8.5.2. Реализация оснащения на ребре молекулы

В этом пункте мы докажем техническое утверждение, позволяющее реализовать на ребре молекулы систему с произвольной гладкой функцией вращения $\rho(f)$.

Пусть дано четырехмерное многообразие $M^4 = T^2 \times (a, b) \times (-1, 1)$, в котором выделены следующие два открытых подмножества (см. рис. 8.6):

$$M_1 = T^2 \times (a, a + \varepsilon) \times (-1, 1) \text{ и } M_2 = T^2 \times (b - \varepsilon, b) \times (-1, 1).$$

Будем считать, что на M^4 заданы две функции H и f , причем H — параметр на интервале $(-1, 1)$, а f — параметр на интервале (a, b) . На двух множествах M_1 и M_2 у нас заданы симплектические структуры ω_1 и ω_2 такие, что естественные слоения на 2-торы являются лагранжевыми. Это означает, что заданные на M_i две функции H и f коммутируют относительно заданных структур ω_i .

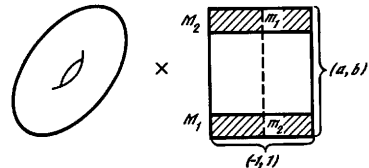


Рис. 8.6

Рассмотрим на каждом торе T^2 из нашего двухпараметрического семейства некоторый базис (λ, μ) (один и тот же для всех торов).

Пусть теперь задана некоторая гладкая функция $\rho(f)$ на интервале (a, b) . Будем считать, что при $a < f < a + \varepsilon$ и при $b - \varepsilon < f < b$ эта функция ρ является функцией вращения интегрируемой системы $v = \text{sgrad } H$ на трехмерном уровне $\{H = 0\}$. Параметром внутри однопараметрического семейства торов на $\{H = 0\}$ будет функция f . Ниже мы хотим реализовать эту функцию как функцию вращения некоторой гамильтоновой системы с гамильтонианом H на уровне $\{H = 0\}$, поэтому мы должны наложить на нее еще одно естественное ограничение, связанное с тем, что она определяет направление векторного поля v с точностью до знака.

Однако, если мы знаем начальное направление векторного поля и функцию вращения, мы можем однозначно определить его конечное положение, непрерывно поворачивая поле, согласно поведению функции вращения. Мы будем поэтому

предполагать, что при формальном переносе вектора v с уровня $\{f = a\}$ на уровень $\{f = b\}$ согласно правилу, определяемому функцией $\rho(f)$, мы приходим снова к полю $v = \text{sgrad} H$, которое уже определено на этом уровне, а не к полю $-v$.

Далее, зададим одну и ту же ориентацию на всех 2-торах тривиального расслоения M^4 , и будем предполагать, что пара $(\text{sgrad} H, \text{sgrad} f)$ как базис в касательном пространстве к тору одинаково ориентирована на верхнем и на нижнем семействе торов, т. е. внутри M_1 и M_2 .

Лемма 8.6. *В сформулированных выше предположениях существует симплектическая структура Ω на всем многообразии M^4 , продолжающая две исходные структуры ω_1 и ω_2 , заданные на «граничном воротнике» $M_1 \cup M_2$. При этом она удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) *Исходное тривиальное расслоение M^4 на двумерные торы является лагранжевым, т. е. функции H и f коммутируют на M^4 .*
- 2) *Функция вращения интегрируемой гамильтоновой системы $v = \text{sgrad} H$ на однопараметрическом семействе 2-торов Лиувилля $\{H = 0\}$ совпадает с заданной заранее функцией $\rho(f)$.*

Доказательство.

Определим внутри M_1 и M_2 переменные действие-угол, отвечающие заданным симплектическим структурам ω_1 и ω_2 и фиксированной паре циклов (λ, μ) .

Продолжим переменные угол φ_1 и φ_2 с граничного воротника внутрь всего M^4 произвольным гладким способом. Это очевидно можно сделать, поскольку база тривиального расслоения у нас стягиваема. В результате получим две гладкие глобальные функции φ_1 и φ_2 , заданные уже на всем M^4 . Теперь мы хотим продолжить внутрь всего M^4 переменные действия s_1 и s_2 . При этом нам придется следить за поведением функции вращения.

Предположим на мгновение, что мы уже продолжили симплектическую 2-форму и переменные действия s_1 и s_2 внутрь M^4 . Тогда функция вращения на уровне $H = 0$ может быть вычислена по формуле

$$\rho = \frac{\partial H / \partial s_1}{\partial H / \partial s_2}.$$

Или, что то же самое:

$$\rho = -\frac{\partial s_2 / \partial f}{\partial s_1 / \partial f}.$$

Функция ρ нам дана, и нам нужно найти функции $s_1(H, f)$ и $s_2(H, f)$, удовлетворяющие этому соотношению, учитывая кроме того, что отображение $(H, f) \rightarrow (s_1(H, f), s_2(H, f))$ должно быть погружением.

Возьмем две гладкие функции $a(f)$ и $b(f)$, не обращающиеся одновременно в нуль, такие, что $\rho(f) = \frac{a(f)}{b(f)}$. Пусть, кроме того, $\frac{\partial s_1}{\partial f} = -b(f)$ и $\frac{\partial s_2}{\partial f} = a(f)$ при $H = 0$ на «граничном воротнике» $M_1 \cup M_2$.

Мы приходим к следующей задаче: нужно найти на плоскости (s_1, s_2) гладкую кривую $\gamma = \gamma(f) = (s_1(f), s_2(f))$ такую, чтобы она удовлетворяла следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\gamma}{df} = (-b(f), a(f)).$$

Это уравнение имеет решение, определенное однозначно с точностью параллельного переноса на плоскости. Возьмем какое-нибудь решение $\gamma = \gamma(f)$. На каждом из двумерных прямоугольников m_1 и m_2 на рис. 8.6, изображающих два граничных воротника M_1 и M_2 , у нас заданы обе пары функций: (H, f) и (s_1, s_2) . Поэтому на каждом прямоугольнике мы можем выразить s_1 и s_2 через функции H и f . Напомним, что H и f — это декартовы координаты на двумерных прямоугольниках m_1 и m_2 . В результате мы получаем гладкое регулярное погружение каждого прямоугольника m_1 и m_2 в плоскость $\mathbb{R}(s_1, s_2)$. Образом являются два криволинейных погруженных прямоугольника \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 (рис. 8.7).

Напомним, что переменные действия s_1 и s_2 определены как функции от H и f не однозначно, а с точностью до некоторых аддитивных постоянных. Это означает, что описанные погружения также определены не однозначно, а именно, с точностью до произвольного сдвига на плоскости $\mathbb{R}^2(s_1, s_2)$. В результате мы получаем на плоскости (s_1, s_2) три объекта: кривую γ и два погруженных криволинейных прямоугольника. Каждый из них независимо друг от друга может смещаться параллельно самому себе на плоскости. Ясно, что комбинируя подходящим образом эти сдвиги, можно добиться того, чтобы в результате возникла картина, показанная на рис. 8.7: кривая γ начинается из одного прямоугольника и в конце концов приходит в другой. При этом нужно отметить, что мы используем здесь тот факт, что при $a < f < a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon < f < b$ кривая $\gamma(f)$ может быть совмещена с образцами двух интервалов, являющихся пересечениями интервала $\{H = 0\}$ с m_1 и m_2 . Именно это мы и делаем.

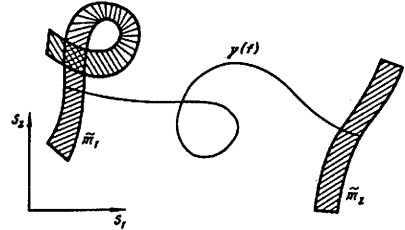


Рис. 8.7

Сказанное выше означает, что в действительности нам задано погружение в плоскость двух прямоугольников m_1, m_2 , соединенных прямолинейным отрезком (рис. 8.6). Наша задача заключается в распространении этого погружения на весь прямоугольник $(a, b) \times (-1, 1)$. Ясно, что это можно сделать.

Следует подчеркнуть здесь одну тонкость, оставшуюся «за кадром». Дело в том, что если бы два исходных погружения прямоугольников m_1 и m_2 отличались бы друг от друга ориентацией погружения, т. е. если бы мы «перевернули» один из них, то, конечно, нам не удалось бы продолжить погружение на весь прямоугольник $(a, b) \times (-1, 1)$. Однако здесь мы опирались на согласованность ориентаций, учтенную в условиях, сформулированных перед леммой 8.6.

Рассмотрим теперь построенные функции s_1 и s_2 как переменные действия на всем M^4 .

Запишем искомую симплектическую структуру на всем M^4 в следующем каноническом виде:

$$\Omega = ds_1 \wedge d\varphi_1 + ds_2 \wedge d\varphi_2.$$

Ясно, что эта форма удовлетворяет всем требованиям. Лемма доказана. ■

Отметим, что все локальные минимумы и максимумы функции вращения $\rho(f)$, дающие нам R -вектор, прекрасно видны на построенной нами кривой $\gamma(f)$. А именно, легко проверяется, что эти точки находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками перегиба гладкой кривой $\gamma(f)$ на евклидовой плоскости переменных (s_1, s_2) .

8.5.3. Реализация избыточного t -оснащения на всей молекуле

Пусть дана молекула W и некоторое ее абстрактное избыточное t -оснащение:

$$\mathbb{T} = (C_j, R_j^+, R_j^-, \Lambda_c, \Delta_c, Z_c).$$

Здесь j нумерует ребра молекулы, а c — ее вершины, т. е. атомы. Участвующие здесь объекты не являются произвольными. Опишем ограничения, которым они должны удовлетворять. Эти ограничения разбиваются на два типа. Первые из них — естественные условия, которым должен удовлетворять каждый из перечисленных объектов по отдельности. Ограничения второго типа можно условно назвать перекрестными. Они связывают между собой различные объекты.

Ограничения 1-го типа.

- 1) Целочисленные 2×2 матрицы C_j должны иметь определитель, равный -1 .
- 2) Векторы R_j^- и R_j^+ должны быть R -векторами вращения некоторых реальных функций $\rho_j(t)$, удовлетворяющих описанным в параграфе 5 главы 5 свойствам. Это означает, что должны быть выполнены некоторые очевидные и естественные условия, вытекающие из определения вектора вращения. Например, между двумя соседними минимумами должен быть максимум или полюс. Легко составить формальный список этих условий, однако мы его здесь не приводим, поскольку их характер совершенно ясен.

Далее, если ребро выходит из седлового атома (соотв. атома A), то первая компонента вектора R^- должна быть бесконечной (соотв. конечной). Если, напротив, ребро входит в седловой атом (соотв. в атом A), то последняя компонента вектора R^+ должна быть бесконечной (соотв. конечной). Это сразу следует из леммы 8.5.

- 3) $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ — набор из n вещественных положительных чисел, рассматриваемых с точностью до пропорциональности, т. е. — точка проективного пространства. Здесь n — число вершин атома P^2 , и все числа Λ_i поставлены во взаимно-однозначное соответствие с вершинами атома.

- 4) $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ — вещественная 0-цепь на вершинах атома P^2 , принадлежащая множеству допустимых 0-цепей $\Delta(P_c)$. См. главу 6.
- 5) Z — произвольный элемент группы гомологий $H_1(\tilde{P}_c^2, \mathbb{R})$, где \tilde{P}_c^2 — замкнутая поверхность, которая получается из атома P_c^2 заклеивкой граничных окружностей дисками.

Ограничения 2-го типа (перекрестные).

- 1) Функции вращения ρ^+ , ρ^- и компоненты матрицы склейки C на каждом ребре связаны соотношением, указанным в предложении 1.14 главы 1:

$$\rho^- = \frac{\alpha\rho^+ - \gamma}{\beta\rho^+ + \delta}.$$

Соответствующему соотношению должны удовлетворять и векторы вращения R^- и R^+ . Это означает на самом деле, что вектор вращения R^- может быть вычислен через R^+ и матрицу склейки C .

- 2) Все ребра, инцидентные с седловым атомом, можно разбить на два класса двумя естественными способами. Вместо этих ребер можно говорить о кольцах 2-атома. Первый способ — топологический: мы считаем, что кольца принадлежат разным классам, если они лежат по разные стороны от графа K_c . Второй способ связан с разбиением множества колец на положительные и отрицательные кольца в смысле знака функции вращения. Такое разбиение мы также можем провести, зная значения крайних компонент векторов вращения, т. е. пределов функций вращения при подходе к данному атому. Требуется, чтобы оба способа давали один и тот же результат.
- 3) Заметим, что зная крайние компоненты векторов вращения и используя некоторые уже сделанные ранее соглашения, мы всегда можем точно определить предельные положения $v(0)$ и $v(1)$ векторного поля v , т. е. на начале и конце ребра. Например, для седловых атомов направление $v(0)$ дает нам направление λ^- , а направление $v(1)$ указывает нам направление λ^+ . Для атома A мы также можем однозначно восстановить направление векторов $v(0)$ и $v(1)$. Зная крайнюю компоненту вектора вращения, можно восстановить $v(0)$ с точностью до замены его направления на противоположное. Окончательный выбор направления задается тем условием, что в разложении $v(0) = a\lambda^- + b\mu^-$ коэффициент b должен быть положительным. Аналогично поступаем и с вектором $v(1)$, учитывая разложение $v(1) = a\lambda^+ + b\mu^+$, в котором $b > 0$.

Итак, мы всегда можем однозначно восстановить $v(0)$ и $v(1)$ в базисах (λ^-, μ^-) и (λ^+, μ^+) соответственно. Зная матрицу склейки, мы можем записать эти предельные положения в одном и том же базисе, например, в (λ^-, μ^-) .

Но, с другой стороны, стартуя с начального положения $v(0)$ и поворачивая его в соответствии с информацией, записанной в векторе R^- , мы можем вычислить предельное положение $v(1)$ еще одним независимым способом. Условие,

которому должно удовлетворять избыточное оснащение, состоит в том, что предельные положения вектора $v(1)$, вычисленные двумя независимыми способами, должны совпадать. Если этого условия не накладывать, то эти предельные положения будут совпадать лишь с точностью до знака.

Определение 8.2. Абстрактное t -оснащение молекулы W , удовлетворяющее перечисленным выше требованиям первого и второго типов, мы назовем *допустимым избыточным t -оснащением* молекулы W .

Теорема 8.1. Пусть дано произвольное допустимое избыточное t -оснащение молекулы W . Тогда существует четырехмерное симплектическое многообразие $M^4 = Q^3 \times D^1$ с интегрируемой системой $v = \text{sgrad } H$ описанного выше типа и существует набор трансверсальных сечений: внутри многообразия $Q^3 = \{H = 0\}$ для всех атомов, такие, что соответствующее избыточное t -оснащение

$$\mathbb{T}(v) = (C_j(\mathbb{P}), R_j^-(\mathbb{P}), R_j^+(\mathbb{P}), \Lambda_c(\mathbb{P}), \Delta_c(\mathbb{P}), Z_c(\mathbb{P}))$$

совпадает с исходным, заданным заранее допустимым t -оснащением молекулы.

Доказательство.

Берем молекулу W , ее матрицы склейки C_j и сначала изготавливаем из этого материала 3-многообразие Q^3 , склеивая его из отдельных 3-атомов в соответствии с требованиями, диктуемыми матрицами склейки, как это уже было сделано в главе 4. При этом сначала мы выбрали и фиксировали на каждом 3-атоме свое трансверсальное сечение. Оно дает допустимую систему координат, позволяющую определять склейки. Затем умножаем полученное многообразие Q на интервал $(-1, 1)$ и получаем четырехмерное многообразие, на котором имеется структура слоения на 2-торы и на особые слои.

Следуя уже примененному однажды приему, берем «узкие 3-атомы» Q_c^3 в Q и для каждого из них строим требуемую интегрируемую систему на $Q_c^3 \times (-1, 1)$, в соответствии с леммой 8.4 о реализации системы на атоме. Это означает, что мы задали на «узких 4-атомах» $Q_c^3 \times D^1$ симплектическую структуру. Все эти структуры задают на M^4 одну и ту же ориентацию. Это следует из явной формулы для Ω , приведенной в доказательстве леммы 8.4. Заметим, что при этом мы автоматически реализовали все объекты из избыточного оснащения, за исключением векторов вращения. Далее, с помощью леммы 8.6 мы можем продолжить симплектическую структуру на каждое из ребер молекулы таким образом, чтобы получить на этом ребре требуемый вектор вращения R^+ . Тогда в силу сказанного ранее, вектор R^- восстановится однозначно по R^+ и соответствующей матрице склейки.

При этом все условия применимости леммы 8.6, накладываемые на характер поведения функции вращения на концах ребер, автоматически выполняются в описанных выше ограничениях на оснащение. Нужно также проверить условие о согласованности ориентаций пары векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f$ на концах ребер, для применения леммы 8.6. Это вытекает из следующего соглашения об ориентации многообразий M^4 , Q^3 и граничных тором атома Q_c^3 .

Симплектическая структура на M^4 задает такую ориентацию, что для любой функции f , независимой с H , четверка векторов

$$\text{sgrad } H, \text{grad } H, \text{sgrad } f, \text{grad } f$$

имеет положительную ориентацию. Это верно для любой пары функций. Поскольку $\text{grad } H \neq 0$ всюду на Q , то мы положим по определению, что тройка

$$\text{sgrad } H, \text{sgrad } f, \text{grad } f|_{Q^3}$$

задает положительную ориентацию на Q . Здесь f — произвольный интеграл векторного поля $\text{sgrad } H$, и от его выбора, как легко видеть, ориентация не зависит.

Наконец, ориентацию на граничных торах Лиувилля мы определяем с помощью внешней нормали. В результате, пара

$$\text{sgrad } H, \text{sgrad } f$$

задает на граничном торе атома положительную ориентацию тогда и только тогда, когда вектор $\text{grad } f|_{Q^3}$ направлен наружу из атома.

Итак, имея естественную ориентацию на M^4 , мы можем естественным образом задать ориентации на граничных торах атомов. Из сказанного сразу следует, что если в качестве f взять функцию монотонно меняющуюся на ребре, то ориентация пары $\text{sgrad } H, \text{sgrad } f$ на начале и на конце ребра будет одинаковой, что и требуется.

Теорема реализации доказана. ■

8.6. Построение траекторных инвариантов в топологическом случае. Определение t -молекулы

В этом параграфе мы построим траекторные инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, следуя первому общему принципу, сформулированному выше. Другими словами, траекторные инварианты будут построены как некоторые функции на множестве избыточных t -оснащений, инвариантные относительно действия группы замен GP .

8.6.1. R -инвариант и индекс вращения на ребре

Пусть дана молекула W^* и пусть e — произвольное ребро, на котором заданы два вектора R^+ и R^- .

Определение 8.3. В качестве инварианта, стоящего на ребре e с меткой $r \neq \infty$, мы возьмем вектор $R = \beta R^- - \alpha$. В качестве инварианта, стоящего на ребре e с меткой $r = \infty$, мы возьмем вектор вращения R^- по модулю 1. Будем иногда обозначать этот инвариант $R \bmod 1$.

Вектор R на конечном ребре и вектор $R \bmod 1$ на бесконечном ребре молекулы мы будем называть R -инвариантом системы на данном ребре.

КОММЕНТАРИЙ. В этом определении вычитание числа из вектора понимается так: из каждой компоненты вектора вычитается это число. При этом $\infty - \alpha = \infty$. Говоря о $R \bmod 1$, мы имеем в виду, что все компоненты вектора определены с точностью до целого числа, одинакового для всех компонент.

Тот факт, что построенный нами набор чисел R действительно является корректно определенным инвариантом системы, не зависящим от выбора трансверсальных сечений, сразу следует из явных формул действия группы замен $G\mathbb{P}$ (предложение 8.2). Отметим, что для конечных ребер R -инвариант имеет естественный смысл. Он просто является R -вектором для функции вращения ρ , записанной в «базисе» λ^- , λ^+ , который определен однозначно и не зависит от выбора трансверсальных сечений. Термин «базис» мы взяли в кавычки, поскольку циклы λ^- , λ^+ являются независимыми, но базиса фундаментальной группы, вообще говоря, не образуют. Это, однако, не препятствует тому, чтобы записать функцию вращения относительно этой пары циклов.

Вектор вращения R фактически описывает эволюцию вектора $v(t)$ нашей системы при изменении t вдоль ребра молекулы. Определим еще один траекторный инвариант $\text{ind } R$, называемый индексом системы на ребре и показывающий «число оборотов», совершенных вектором $v(t)$ при его движении вдоль ребра. Этот инвариант однозначно вычисляется по R -вектору, поэтому его не нужно вносить в полный окончательный список независимых инвариантов. Однако этот индекс необходим для формулировки ограничений на векторы вращения, накладываемые системой.

Поскольку число оборотов, совершаемое вектором $v(t)$, не является целым, то нам понадобится некоторая дополнительная конструкция. Дадим точное определение.

Шаг 1. Восстановим по R -вектору функцию вращения $\rho(t)$ с точностью до сопряженности. Затем мы восстановим по $\rho(t)$ функцию угла

$$\psi(t) = \text{arccctg } \rho(t): t \rightarrow S^1.$$

Углы $\psi(0)$ и $\psi(1)$ всегда удовлетворяют некоторым естественным ограничениям, сформулированным выше при обсуждении перекрестных ограничений 2-го типа. См. пункт 3.

Шаг 2. Отметим, что интегрируемую невырожденную систему v можно всегда так пошевелить в окрестности атома A на ребре, чтобы предельное положение вектора системы совпало по направлению с любым наперед заданным вектором $\nu = a\lambda + b\mu$, где $b > 0$. Здесь λ и μ — допустимая система координат. Доказательство следует из того факта, что в окрестности атома A система движется по торах Лиувилля, являющимся граничными торами «тонкого» полнотория с очень «маленьким» меридианом. Запишем поле в виде $v(t) = a(t) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + b(t) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$. Здесь переменная-угол отвечает сжимающемуся циклу λ , и поэтому, рассматривая произвольные конечные возмущения функции $a(t)$, мы будем получать

малые возмущения поля v (в смысле C^0 -метрики). Итак, шевеля систему, мы можем произвольно менять предельное положение вектора v в некоторой полуплоскости.

Шаг 3. Шевельем систему в окрестности атома A так, чтобы предельное положение угла ψ стало кратным $\frac{\pi}{2}$. Этим условием оно будет определено однозначно, поскольку мы не имеем права выходить за пределы полуплоскости.

Отметим, что в окрестности седлового атома шевеление системы не влияет на предельное положение вектора, но здесь и без этого шевеления предельное положение вектора v уже совпадает с одним из базисных циклов λ^- , λ^+ (в зависимости от того, начало или конец ребра мы рассматриваем). Таким образом, предельное положение угла кратно $\frac{\pi}{2}$ автоматически.

Шаг 4. После этого определим индекс $\text{ind } R$ системы v на ребре, положив $\text{ind } R = 2 \frac{(\psi(1) - \psi(0))}{\pi}$. Индекс не зависит от выбора шевеления системы. Ясно, что он полностью определяется лишь вектором вращения R и типом ребра.

Замечание. Это определение впервые возникло в теории бордизмов интегрируемых гамильтоновых систем и принадлежит А. В. Болсинову и Т. З. Нгуену. Оно было, в частности, использовано Т. З. Нгуеном в работе [342] для построения примера интегрируемой системы не бордантной нулю.

8.6.2. b -инвариант (на радикалах молекулы)

Подобно тому, как выше было введено понятие семьи молекулы, мы введем сейчас еще одно аналогичное понятие — понятие радикала, как части молекулы.

Напомним, что ребра молекулы с конечными r -метками мы называем конечными, а ребра с бесконечными r -метками — бесконечными.

Определение 8.4. Бесконечные ребра, векторы вращения которых R бесконечны, т. е. состоят только из бесконечных компонент, назовем *супербесконечными*.

Во избежание путаницы термин «бесконечное ребро» мы в дальнейшем будем употреблять только для ребер, не являющихся супербесконечными.

Разрежем молекулу W^* по всем конечным и бесконечным ребрам, не являющимися супербесконечными. В результате молекула распадется в несвязное объединение некоторых подграфов двух типов: атомы A и куски, не содержащие ни одного атома A . Дело в том, что ребра, инцидентные атому A , не могут быть супербесконечными. Это вытекает из того, что крайние компоненты вектора вращения, инцидентные с A , обязаны быть конечными. См. определение допустимого t -оснащения в параграфе 5.

Определение 8.5. *Радикалами будем называть* связные куски второго типа, т. е. отличные от A . Будем обозначать радикал буквой U .

Отметим, что все ребра, целиком входящие в радикал, являются супербесконечными. Каждая семья молекулы распадается в сумму некоторого числа радикалов. Однако существуют радикалы, не содержащиеся ни в одной семье.

Рассмотрим произвольный радикал U молекулы W^* и все ребра, инцидентные с ним, т. е. такие, что хотя бы один их конец принадлежит радикалу. Ребра, целиком содержащиеся в радикале, т. е. супербесконечные ребра, естественно назвать внутренними ребрами радикала. Остальные инцидентные с ним ребра назовем внешними по отношению к данному радикалу. Они ему не принадлежат.

Каждому ребру e_j , инцидентному с радикалом U , сопоставим целое число $[\theta]_j$ по следующему правилу:

$$[\theta]_j = \begin{cases} \left[\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right], & \text{если } e_j \text{ — конечное ребро,} \\ & \text{выходящее из радикала } U, \\ \left[-\frac{\delta_j}{\beta_j} \right], & \text{если } e_j \text{ — конечное ребро,} \\ & \text{входящее в радикал } U, \\ [MR_j^+], & \text{если } e_j \text{ — бесконечное ребро,} \\ & \text{входящее в радикал } U, \\ -[MR_j^-], & \text{если } e_j \text{ — бесконечное ребро,} \\ & \text{выходящее из радикала } U, \\ -\left[\frac{\gamma_j}{\alpha_j} \right], & \text{если } e_j \text{ — супербесконечное внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты матрицы склейки на соответствующем ребре, а MR^+ и MR^- — средние арифметические конечных компонент соответствующих векторов вращения. Через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.

Ясно, что набор чисел $[\theta]$ является функцией избыточного оснащения.

Определение 8.6. *b-инвариантом* радикала U называется число

$$b(U) = \sum_j [\theta]_j.$$

Это определение в точности аналогично определению n -метки, данному в параграфе 3 главы 4. В действительности эти инварианты тесно связаны между собой. См. об этом ниже. При определении инварианта b мы использовали ту же самую идею: каждое входящее в него слагаемое изменяется при замене трансверсальных сечений на некоторое конечное число, однако, слагаемые подобраны таким образом, чтобы общая сумма не менялась.

Действительно, посмотрим как меняются компоненты $[\theta]$ при замене трансверсального сечения для атомов, принадлежащих радикалу. Из предложения 8.2 сразу следует, что изменение происходит по следующему простому правилу

$$[\theta]'_n = [\theta]_n + k_n,$$

где индекс n нумерует ребра, инцидентные атому V_c , а k_n являются коэффициентами различающих 2-коцепи k_c . Если мы рассматриваем коэффициент $[\theta]_j$, стоящий на внутреннем ребре радикала, то для него нужно учитывать оба коэффициента k_j^+, k_j^- , стоящие на начале и конце ребра, т. е.

$$[\theta]'_j = [\theta]_j + k_j^+ + k_j^-.$$

Условимся записывать все это семейство соотношений как

$$[\theta]' = [\theta] + q,$$

где $q = (k_{c_1}, \dots, k_{c_p})$ — набор различающих 2-коцепей для всех атомов, входящих в семью.

Если замена сечения происходит на атомах, не входящих в данный радикал, то никаких изменений не происходит.

Поскольку каждая 2-коцепь k_c является кограницей, то сумма ее коэффициентов равна нулю. Отсюда следует, что сумма всех $[\theta]_j$ по всем ребрам радикала не изменилась. Инвариантность b по отношению к действию группы замен $G\mathbb{P}$ доказана. Согласно первому общему принципу это означает, что b является корректно определенным топологическим траекторным инвариантом системы.

Пусть теперь дана какая-то семья в молекуле W^* . Как было уже сказано, семья распадается в сумму непересекающихся радикалов. Согласно главе 4, каждая семья несет на себе целочисленную метку n .

Каждый радикал U несет на себе целочисленную метку b (b -инвариант).

Предложение 8.5. Метка n равна сумме b -инвариантов всех радикалов, составляющих данную семью.

Замечание. Это соотношение является единственным, которому удовлетворяют b -инварианты радикалов. Это означает в действительности, что b -инварианты могут принимать произвольные значения независимо друг от друга и других, ранее открытых инвариантов. В этом смысле b -инвариант является новым, независимым траекторным инвариантом интегрируемых систем.

Доказательство.

Начнем с того, что дадим полное определение (новой) метки n . Пусть S — произвольная семья молекулы. Напомним, что радикалы, составляющие данную семью S , получаются из нее разрезанием по бесконечным, но не супербесконечным ребрам. При подсчете метки n каждому такому ребру e_k ставится в соответствие число $-\frac{\gamma_k}{\alpha_k}$. С точки зрения радикалов этому же ребру ставятся в соответствие два числа

$$[MR_k^+] \quad \text{и} \quad -[-MR_k^+].$$

Заметим теперь, что две функции вращения ρ^- и ρ^+ на бесконечном (или на супербесконечном) ребре связаны соотношением:

$$\rho^- = -\rho^+ - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Следовательно, $MR^- = -MR^+ - \frac{\gamma}{\alpha}$.

Отсюда получаем, что

$$[MR_k^+] - [-MR_k^-] = -\frac{\gamma_k}{\alpha_k}.$$

Таким образом, при переходе от семьи S к сумме составляющих ее радикалов, каждое число $-\frac{\gamma_k}{\alpha_k}$ (стоявшее на бесконечном, но не супербесконечном ребре) распадается в сумму двух чисел

$$[MR_k^+] \quad \text{и} \quad -[-MR_k^-].$$

На всех остальных ребрах семьи вообще никаких изменений при этом не происходит. Следовательно, общая сумма чисел вида $[\theta]_k$ не изменится. Предложение доказано. ■

8.6.3. $\tilde{\Lambda}$ -инвариант

Определение 8.7. В качестве $\tilde{\Lambda}$ -инварианта данного атома мы просто возьмем инвариант Λ для любого трансверсального сечения в Q_c^3 , являющийся составной частью избыточного t -оснащения.

Неизменность $\tilde{\Lambda}$ при изменении сечения следует из пункта 3 предложения 8.2.

8.6.4. $\tilde{\Delta Z}[\tilde{\theta}]$ -инвариант

Построение этого инварианта мы начнем со следующего полезного замечания. Если внимательно посмотреть на формулы преобразования избыточного t -оснащения под действием группы замен $G\mathbb{P}$ (предложение 8.2), то легко заметить, что почти во всех формулах принимает участие различающая 2-коцепь k_c . Исключение составляет только закон изменения Z -инварианта. Оказывается, небольшой модификацией Z -инварианта можно добиться того, чтобы он, как и все остальные инварианты, менялся с помощью различающей 2-коцепи k_c , а не 1-коцепи m_c . Это изменение позволит нам на самом деле несколько упростить группу $G\mathbb{P}$, заменив \mathbb{M} на $\mathbb{K} = \delta\mathbb{M}$.

Это обстоятельство имеет вполне содержательную интерпретацию: для подсчета инвариантов нам нужны не сами трансверсальные сечения, а лишь их границы, т. е. допустимые системы координат на граничных торах.

Итак, рассмотрим следующую конструкцию. Пусть P_{tr} — некоторое трансверсальное сечение в 3-атоме Q_c . По этому сечению однозначно строится Z -инвариант рассматриваемой системы $Z_c \in H_1(\tilde{P}_c, \mathbb{R})$. Рассмотрим проекцию

$$\xi: H_1(\tilde{P}_c, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\tilde{P}_c, S^1) = H_1(\tilde{P}_c, \mathbb{R})/H_1(\tilde{P}_c, \mathbb{Z}),$$

и образ Z -инварианта $\xi(Z_c) \in H_1(\tilde{P}_c, S^1)$. Мы утверждаем, что при замене Z_c на $\xi(Z_c)$ мы никакой информации о системе не теряем. Действительно, рассмотрим произвольные замены трансверсальной площадки P_{tr} , которые не меняют ее границы. Это в точности означает, что различающая 2-коцепь k_c в этом случае равна нулю или, что то же самое, различающая 1-цепь m_c является коциклом с точки зрения поверхности \tilde{P}_c . Что произойдет при такой замене с элемента-

ми избыточного t -оснащения? Согласно предложению 8.2 изменения коснутся лишь Z -инварианта:

$$Z_c \rightarrow Z_c + \phi_2(m_c).$$

Однако мы знаем, что для коциклов отображение ϕ_2 является двойственностью Пуанкаре. Поэтому в результате Z_c изменится на *целочисленный* цикл, а класс $\xi(Z_c)$, следовательно, останется прежним. Отметим, что любой целочисленный цикл может быть реализован путем подбора соответствующего коцикла m_c . Тем самым никакой информации мы не потеряли.

Отметим, наконец, что при произвольных заменах трансверсального сечения класс $\xi(Z_c)$ меняется по следующему естественному закону, в котором участвует уже лишь k_c , а не m_c (сравните с предложением 8.2):

$$\xi(Z_c)' = \xi(Z_c) + \tilde{\phi}_2(k_c),$$

где $\tilde{\phi}_2: B^2(\tilde{P}_c, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\tilde{P}_c, S^1)$ однозначно определяется из условия коммутативности следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C^1(\tilde{P}_c, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi_2} & H_1(\tilde{P}_c, \mathbb{R}) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \xi \\ B^2(\tilde{P}_c, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{\phi}_2} & H_1(\tilde{P}_c, S^1) \end{array}$$

Этот оператор определен корректно, поскольку, как мы только что показали $\xi\phi_2(\ker(\delta)) = 0$.

Рассмотрим снова радикал U и произвольный набор различающих 2-коцепей $q = (k_{c_1}, \dots, k_{c_p})$ для атомов, входящих в данный радикал.

Возьмем теперь какое-то избыточное t -оснащение молекулы W и извлечем из него для данного радикала U следующие два набора элементов. Если V_{c_1}, \dots, V_{c_p} — атомы радикала U , то рассмотрим наборы

$$\Delta = (\Delta_{c_1}, \dots, \Delta_{c_p}) \text{ и } Z = (Z_{c_1}, \dots, Z_{c_p}),$$

где Δ_{c_i}, Z_{c_i} — Δ - и Z -инварианты, отвечающие атому V_{c_i} , и кроме того рассмотрим набор целых чисел $[\theta]$, стоящих на ребрах радикала, определенный выше.

Как мы уже договорились, Z -инварианты мы будем теперь рассматривать по модулю целочисленных коциклов. Условно мы запишем это как

$$\xi(Z) = (\xi(Z_{c_1}), \dots, \xi(Z_{c_p})).$$

Для краткости мы условимся обозначать набор $\{\phi'_1(k_{c_1}), \dots, \phi'_1(k_{c_p})\}$ через $\phi'_1(q)$. Аналогично, $\tilde{\phi}_2(q) = \{\tilde{\phi}_2(k_{c_1}), \dots, \tilde{\phi}_2(k_{c_p})\}$. Операторы $\phi'_1, \tilde{\phi}_2$ для каждого оператора были определены выше.

Рассмотрим множество всех троек вида $(\Delta, Z, [\theta])$.

Определение 8.8. Два набора $(\Delta, Z, [\theta])$ и $(\Delta', Z', [\theta'])$ назовем *эквивалентными*, если существует набор различающих 2-коцепей q такой, что

$$\begin{aligned} q &= [\theta'] - [\theta], \\ \phi'_1(q) &= \Delta - \Delta', \\ \tilde{\phi}_2(q) &= \xi(Z) - \xi(Z'). \end{aligned}$$

Инвариантом $\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]$ интегрируемой системы на данном радикале U мы назовем класс эквивалентности тройки $\Delta, Z, [\theta]$, построенной по избыточному t -оснащению молекулы W .

Докажем инвариантность, пользуясь первым принципом. Подействуем на тройку $(\Delta, Z, [\theta])$ некоторым элементом группы замен $G\mathbb{P}$. Получим некоторую новую тройку $(\Delta', Z', [\theta'])$. Нам достаточно показать, что они эквивалентны в смысле определения 8.8. Каждому элементу группы замен соответствует набор различающих 2-коцепей $\mathbb{K} = \{k_c\}$. Возьмем в качестве 1-цепи q на радикале U набор различающих 2-коцепей, отвечающих атомам радикала: $q = \{k_{c_1}, \dots, k_{c_p}\}$. Тогда для этого набора все соотношения будут, очевидно, выполнены.

Итак, все необходимые траекторные инварианты интегрируемых систем построены.

КОММЕНТАРИЙ. Отметим некоторую тяжеловесность последнего инварианта. Возникает естественный вопрос: можно ли было определить эти инварианты с помощью «простых явных формул»? Оказывается, в самом общем случае таких «простых» формул нет. Дело в том, что пространство орбит действия группы замен $G\mathbb{P}$ может быть нехаусдорфовым для молекул определенных типов. Поэтому непрерывных функций, различающих орбиты, может не существовать.

То, что мы сделали в этом параграфе, можно назвать попыткой разделить действие очень большой группы на очень большом пространстве на несколько различных действий меньших групп на отдельных кусках молекулы. Этими кусками в данном случае оказались радикалы молекулы. Другими словами, мы попытались разложить действие на «неприводимые компоненты». Согласно третьему принципу построения инвариантов для систем разных типов мы можем действовать по-разному, выбирая полный набор инвариантов, и ниже мы покажем, как это можно делать в некоторых частных случаях, когда можно предъявить «явные формулы» для инвариантов.

8.6.5. Окончательное определение t -молекулы интегрируемой системы

Пусть задана интегрируемая гамильтонова система v на изоэнергетическом 3-многообразии Q .

1 Шаг. Рассмотрим отвечающую ей меченую молекулу W^* . Она включает в себя r -метки, n -метки и ε -метки.

2 Шаг. Строим на каждом ребре e_i молекулы R -инвариант R_i . Их совокупность обозначим через $\{R\}$.

3 Шаг. Выделяем в молекуле W^* радикалы U .

4 Шаг. На каждом седловом атоме V молекулы W^* строим $\tilde{\Lambda}$ -инвариант.

5 Шаг. На каждом радикале U молекулы W строим $\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]$ -инвариант.

Определение 8.9. Объект

$$W^{*t} = ((W, r, \varepsilon), \{R\}, \{\tilde{\Lambda}\}, \{\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]\})$$

называется топологической траекторной молекулой или, короче, t -молекулой данной интегрируемой системы v на данном изоэнергетическом 3-многообразии Q .

Комментарий. Как видно из определения 8.9, обычная меченая молекула W вошла в t -молекулу не полностью: из нее выпал важный параметр — n -метки. Это произошло потому, что n -инвариант в действительности распадается в «объединение» b -инвариантов. При этом, b -инварианты, в свою очередь, выражаются через $\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]$ -инвариант.

Нам следует обсудить здесь еще один вопрос: что означает выражение «две t -молекулы совпадают». Это требует некоторых разъяснений, поскольку этот объект довольно сложен. Итак, пусть W_1^{*t} и W_2^{*t} — две t -молекулы. Во-первых, они являются графами с ориентированными ребрами и с вершинами разных типов. Разумеется, при гомеоморфизме одной молекулы на другую ориентации ребер должны сохраняться и каждая вершина первой молекулы должна переходить в такую же вершину второй молекулы. Более того, задание молекулы предполагает, что для каждого атома молекулы установлено взаимно-однозначное соответствие между ребрами, входящими и выходящими в него и граничными окружностями соответствующего 2-атома из канонического списка. Поэтому гомеоморфизм между молекулами предполагает существование соответствующих гомеоморфизмов для всех его вершин как двумерных поверхностей. Причем на границе 2-атома этот гомеоморфизм уже фактически определен отображением между графами. Таким образом, для совпадения двух t -молекул должны быть определены гомеоморфизм графов и гомеоморфизмы между соответствующими друг другу 2-атомами, т. е. вершинами графов. И наконец, эти гомеоморфизмы должны сохранять все «числовые параметры t -молекулы».

Из этого комментария видно, что сравнение t -молекул в общем случае может оказаться трудной задачей (впрочем, как и сравнение двух произвольных графов). Разумеется, в реальных ситуациях, когда мы сравниваем конкретные примеры интегрируемых систем, проблем такого сорта как правило не возникает.

Следует обратить внимание еще на одно обстоятельство. Определение t -молекулы зависит от выбора двух ориентаций: ориентации трехмерного многообразия Q^3 и ориентации ребер молекулы. Отметим, что мы постоянно пользовались терминами типа «начало» или «конец ребра» и, кроме того, мы использовали ориентацию Q^3 для определения допустимых систем координат.

В принципе мы выше уже договорились, что при траекторной эквивалентности должна сохраняться ориентация изоэнергетического многообразия, но от

этого условия вполне можно отказаться, описав явно изменения параметров t -молекулы при замене ориентации на Q .

Аналогичным образом дело обстоит с ориентацией на ребрах. Для каждой конкретной системы мы можем договориться ориентировать их по направлению возрастания дополнительного интеграла f и потом требовать «сохранения» этого направления при траекторных изоморфизмах. Тогда данное выше определение t -молекулы абсолютно корректно. Или же мы можем указать, что происходит с t -молекулой при изменении ориентации ребер, а затем считать t -молекулы, получающиеся друг из друга такими преобразованиями, по определению совпадающими. Это вполне разумно, поскольку с содержательной точки зрения изменение направления стрелки на ребре вообще ничего не меняет.

Итак, в заключение этого параграфа мы опишем формальные преобразования t -молекулы, связанные с изменением ориентаций.

8.6.6. Влияние ориентации на инварианты

Как уже сказано выше, мы можем менять ориентацию 3-многообразия Q , а также ориентацию ребра молекулы. Как реагируют на это введенные нами инварианты? В этом пункте мы ограничимся рассмотрением атомов без звездочек. Присутствие звездочек, конечно, несколько усложняет картину, но мы не будем на этом задерживаться. Следуя нашим общим принципам, нужно посмотреть, что происходит с избыточным t -оснащением:

$$\mathbb{T}(v) = (C_j(\mathbb{P}), R_j^-(\mathbb{P}), R_j^+(\mathbb{P}), \Lambda_c(\mathbb{P}), \Delta_c(\mathbb{P}), Z_c(\mathbb{P})).$$

При изменении ориентации изоэнергетической поверхности Q^3 меняются допустимые системы координат. А именно, для седловых атомов — меняется знак второго базисного цикла μ , а для атомов типа A — меняется знак первого базисного цикла λ . Кроме этого меняется ориентация на каждом трансверсальном сечении, что вызывает, в частности, замену знаков на кольцах атома: положительные кольца становятся отрицательными и наоборот. Отсюда легко следует, что избыточное t -оснащение изменится следующим образом.

- 1) На ребрах между двумя седловыми атомами и на ребрах между двумя атомами типа A матрица перехода $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ приобретет вид $C' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix}$.
На ребрах между седловым атомом и атомом A матрица C перейдет в $C' = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}$.
- 2) Векторы вращения R^- и R^+ на каждом ребре поменяют знаки.
- 3) Λ -инварианты не изменятся.
- 4) Δ - и Z -инварианты домножатся на -1 .

Посмотрим теперь, что происходит при изменении ориентации на каком-либо ребре молекулы W .

- 1) Матрица перехода C заменяется на обратную $C' = C^{-1}$.
- 2) Новый вектор R^- получается из старого вектора R^+ переписыванием его компонент в обратном порядке. Аналогичным образом новый R^+ получается из старого R^- .
- 3) Λ -инвариант не изменится.
- 4) Δ - и Z -инварианты не изменятся.

Поскольку окончательные траекторные инварианты R , $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]$ являются функциями от избыточных оснащений, мы можем явно указать закон их преобразования.

Предложение 8.6.

- а) Изменение ориентации Q следующим образом преобразует траекторный R -инвариант:
 - а-1. Если конечное ребро соединяет два седловых атома или два атома типа A , то R -вектор на этом ребре не меняется.
 - а-2. Если конечное ребро соединяет седловой атом с атомом A , то R -вектор на этом ребре меняет знак.
 - а-3. Если ребро бесконечное, то R -вектор меняет знак во всех случаях.
- б) Изменение ориентации ребра молекулы следующим образом преобразует траекторный R -инвариант:
 - б-1. На конечном ребре молекулы новый R -вектор получается из исходного следующей процедурой. Нужно восстановить по исходному R -вектору соответствующую функцию вращения $\rho(t)$, $t \in (0, 1)$. Она восстанавливается с точностью до сопряженности, что не влияет на закон преобразования R -вектора. Затем следует рассмотреть новую функцию $\tilde{\rho}(t) = \rho^{-1}(1-t)$ и взять для нее соответствующий R -вектор.
 - б-2. На бесконечном ребре новый R -вектор получается из исходного путем переписывания его компонент в обратном порядке и домножением их на -1 .

Предложение 8.7. При изменении ориентаций Q и ребер молекулы инвариант $\tilde{\Lambda}$ не меняется.

Предложение 8.8.

- а) При изменении ориентации Q траекторный $\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]$ -инвариант заменяется на $(-\tilde{\Delta})(-\tilde{Z})[-\tilde{\theta}]$, что означает следующее: класс эквивалентности тройки $(\Delta, Z, [\theta])$ переходит в класс эквивалентности следующей тройки: $(-\Delta, -Z, [-\theta])$.
- б) При изменении ориентации ребра e_j молекулы траекторный $\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]$ -инвариант, отвечающий радикалу U , изменяется только в следующих двух случаях:

б-1. Ребро e_j является внешним бесконечным ребром, входящим в радикал U , и число MR_j^+ не целое. Тогда в тройке $(\Delta, Z, [\theta])$ компоненты Δ и Z не меняются, а число $[\theta]_j$ увеличивается на единицу. Здесь $[\theta]_j$ — компонента θ -цепи $[\theta]$, отвечающая ребру e_j . См. определение $[\theta]$ выше.

б-2. Ребро e_j является внешним бесконечным ребром, выходящим из радикала U , и число MR_j^- не целое. Тогда в тройке $(\Delta, Z, [\theta])$ компоненты Δ и Z не меняются, а число $[\theta]_j$ уменьшается на единицу. Здесь $[\theta]_j$ — компонента θ -цепи $[\theta]$, отвечающая ребру e_j .

8.7. Теорема топологической траекторной классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы

Теперь мы, наконец, можем сформулировать и доказать одну из основных теорем настоящей книги. Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии M^4 и ограничим ее на компактную связную регулярную изоэнергетическую поверхность $Q^3 = \{H = h = \text{const}\}$.

Рассмотрим следующий естественный класс (v, Q^3) невырожденных интегрируемых систем $v = \text{sgrad } H$ на изоэнергетических 3-многообразиях Q^3 . Мы будем предполагать выполненными следующие условия.

1) Топологическая устойчивость. Q^3 является компактным гладким замкнутым 3-многообразием, топологически устойчивым для данной системы, т. е. при малом изменении значения h энергии H тип лиувиллева слоения системы v не меняется, т. е. система остается лиувиллево эквивалентной исходной.

2) Боттовость. Дополнительный гладкий интеграл f , ограниченный на изоэнергетическую поверхность Q^3 , является функцией Ботта, т. е. все его критические многообразия в Q являются невырожденными. Кроме того, мы будем предполагать, что все эти критические подмногообразия одномерны, т. е. являются окружностями. Другими словами, нет критических торов и бутылок Клейна.

3) Гиперболичность особых траекторий. Все седловые критические окружности интеграла f являются гиперболическими траекториями гамильтонова потока v . Это означает, что дифференциал отображения Пуанкаре для каждой периодической траектории поля v , являющейся в то же время критической седловой окружностью интеграла f , отличен от тождественного отображения и от «минус тождественного»: $d\sigma \neq \pm \text{id}$.

4) Нерезонансность. Система v является нерезонансной, т. е. иррациональные торы Лиувилля всюду плотны в Q .

5) Условие конечности. Функции вращения системы v должны иметь лишь конечное число локальных минимумов, максимумов и полюсов.

Наша основная цель — классифицировать динамические системы указанного типа с точностью до траекторной эквивалентности, топологической и гладкой.

Предположим, что система v удовлетворяет условиям 1–5, перечисленным выше. Каждой такой системе можно сопоставить ее t -молекулу, определенную в предыдущем параграфе.

Теорема 8.2.

- а) t -молекула W^{*t} интегрируемой гамильтоновой системы указанного выше типа, с двумя степенями свободы, является ее корректно определенным траекторным топологическим инвариантом.
- б) Две интегрируемые системы топологически траекторно эквивалентны, если и только если их t -молекулы совпадают.

Доказательство.

Пункт а) этой теоремы следует из первого принципа построения траекторных инвариантов и уже фактически доказан в предыдущем параграфе.

Действительно, выше мы определили избыточное t -оснащение молекулы W , которое фактически уже является траекторным инвариантом. Единственный недостаток — в неоднозначности его выбора, т. е. в его зависимости от выбора набора трансверсальных сечений. Эту неоднозначность мы ликвидировали в предыдущем параграфе, перейдя от избыточного t -оснащения к t -молекуле, которая инвариантна по отношению к заменам сечений и потому корректно определена.

Докажем пункт б) сформулированной теоремы, т. е. покажем, что t -молекула является полным траекторным инвариантом системы.

В силу второго принципа достаточно доказать, что предъявленные нами выше объекты W^{*t} , рассматриваемые как функции на множестве всех допустимых избыточных t -оснащений, разделяют орбиты действия группы замен $G^{\mathbb{P}}$, т. е. для любых двух несовпадающих орбит этого действия обязательно найдется хотя бы один параметр, входящий в t -молекулу, который принимает на этих орбитах разные значения. Другими словами, две орбиты совпадают тогда и только тогда, когда совпадают значения, принимаемые на них t -молекулами.

Доказательство разобьем на несколько этапов.

Рассмотрим два элемента пространства $\{\mathbb{T}\}$, т. е. два избыточных t -оснащения:

$$\mathbb{T} = (C, R^+, R^-, \Lambda, \Delta, Z) \text{ и } \mathbb{T}' = (C', R'^+, R'^-, \Lambda', \Delta', Z').$$

Нам дано, что значения t -молекулы W'^t как функции на пространстве $\{\mathbb{T}\}$, совпадают на этих двух t -оснащениях. Нужно вывести отсюда, что существует такая замена трансверсальных сечений внутри каждого атома, которая совмещает эти два t -оснащения.

Этап 1. Начнем с рассмотрения седловых атомов, организованных в радикалы. Разбиение молекулы W на радикалы однозначно определяется t -оснащением, а

также его можно восстановить, зная t -молекулу. В самом деле, r -метки и векторы вращения $\{R\}$, заключенные в t -молекулу, позволяют судить, какие ребра молекулы W являются конечными, какие бесконечными, и какие — супербесконечными. Поэтому, из совпадения t -молекул сравниваемых гамильтоновых систем v_1 и v_2 следует, что обе сравниваемые молекулы W_1 и W_2 одинаковым образом разбиты на радикалы. Для упрощения рассуждений, мы можем отождествить обе молекулы W_1 и W_2 , считая их одной и той же молекулой W , на которой заданы два, вообще говоря, различных t -оснащения \mathbb{T} и \mathbb{T}' .

Этап 2. Возьмем произвольный радикал U в молекуле W и отвечающие ему две тройки: (Δ, Z, θ) и (Δ', Z', θ') . Возникшие здесь наборы θ , как и θ' , определяются в точности так же, как и введенный нами выше целочисленный набор $[\theta]$. Но только нужно вместо целых частей коэффициентов, участвующих в определении $[\theta]$ (см. выше параграф 6), брать сами эти коэффициенты. Покажем, что используя r -метки на конечных ребрах, векторы вращения $R \bmod 1$ на бесконечных ребрах и целочисленные параметры $[\theta]$, мы можем однозначно восстановить вещественные значения θ . Пусть, например, $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$. Это число, очевидно, можно

восстановить, зная $\left[\frac{\alpha}{\beta} \right]$ и метку $r = \frac{\alpha}{\beta} \bmod 1$. Если же $\theta = MR^-$, то это число можно восстановить, зная вектор $R^- \bmod 1$ и $-[MR^-]$. Аналогичные рассуждения повторяются для других типов значений θ . Нам дано, что тройки $(\Delta, Z, [\theta])$ и $(\Delta', Z', [\theta'])$ эквивалентны, поскольку соответствующие значения $\tilde{\Delta}, \tilde{Z}, [\tilde{\theta}]$ -вариантов совпали. Их эквивалентность в точности означает, что существует замена трансверсальных сечений внутри радикала U , которая переводит первую тройку во вторую. Выполнив эту замену сечений, мы добиваемся того, что теперь выполняется равенство:

$$(\Delta, Z, [\theta]) = (\Delta', Z', [\theta']).$$

Отметим, что эту процедуру можно делать абсолютно независимо для всех радикалов внутри молекулы. Это является следствием предложения 8.2, согласно которому замена площадки в атоме влияет только на параметры $(\Delta, Z, [\theta])$, отвечающие данному атому. Далее, выше было сказано, что по целочисленным значениям $[\theta]$ можно однозначно восстановить сами вещественные значения всех компонент набора θ . Следовательно, выполнив указанную замену сечений, мы в действительности совмещаем не только целые части $[\theta]$ и $[\theta]'$, но и сами наборы θ и θ' . Поэтому мы добились того, что

$$(\Delta, Z, \theta) = (\Delta', Z', \theta')$$

на всех радикалах молекулы.

Этап 3. Теперь мы можем считать, после замены сечений, что в избыточных оснащениях \mathbb{T} и \mathbb{T}' совпадают все «седловые атомные параметры», т. е. (Λ, Δ, Z) . Кроме того, совпадают параметры θ . Напомним, что θ — это функция от матриц

склеек C и векторов вращения R^+ и R^- . Мы утверждаем, что на всех ребрах молекулы W , соединяющих пары седловых атомов, из сказанного выше уже автоматически вытекает совпадение матриц склеек C и C' , а также векторов вращения R^+ и R^- , R'^+ и R'^- . В самом деле, пусть e — ребро, соединяющее два седловых атома. Возможны три случая:

- а) ребро e — конечно,
- б) ребро e — бесконечно,
- в) ребро e — супербесконечно.

Последовательно разберем все три случая.

Этап 4-а. Пусть ребро e — конечно, т.е. r -метка $\frac{\alpha}{\beta}$ — конечное число ($\beta \neq 0$).

Разбивая молекулу W на радикалы, мы должны разрезать все конечные ребра, в том числе и ребро e , посередине. В результате разрезанное ребро превращается в два внешних ребра некоторых радикалов. На каждом из них у нас присутствовало число вида θ . Таким образом, ребру e отвечают два числа, которые мы обозначим через θ^+ и θ^- , где знак определяется направлением, ориентацией исходного ребра e в молекуле W . Из определения параметров вида θ следует, что

$$\theta^+ = -\frac{\delta}{\beta} = -\frac{\delta'}{\beta'} \quad \text{и} \quad \theta^- = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Здесь $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ — целые числа, являющиеся коэффициентами матрицы склейки C , стоящей на данном ребре. Числа α и β взаимно простые, так как определитель матрицы C равен -1 . Кроме того, знаки β и β' совпадают, поскольку совпадают ε и ε' , которые и указывают знак β и β' . Отсюда следует, что матрицы C и C' совпадают. Теперь нужно доказать, что совпадают и векторы вращения. Они восстанавливаются при помощи следующих явных формул из вектора вращения R и коэффициентов матрицы склейки C (см. определение 8.3):

$$R = \beta R^- - \alpha.$$

Вектор R^+ можно восстановить по вектору R^- и матрице склейки C , которая является матрицей перехода от базиса λ^-, μ^- к базису λ^+, μ^+ (предложение 1.14). Итак, мы полностью восстановили на ребре e матрицу склейки C и векторы вращения R^+ и R^- .

Этап 4-б. Пусть ребро e бесконечно, т.е. $\beta = 0$. При этом нам известно, что векторы вращения R^+ и R^- содержат хотя бы один конечный элемент. Опять на ребре e возникают два числа θ^+ и θ^- , как и в пункте 4-а. При этом $\theta^+ = MR^+$ (= среднему арифметическому всех конечных компонент вектора R^+) и $\theta^- = MR^-$. Кроме того, нам задан вектор $R \bmod 1$, где $R = R^-$ по определению. Ясно, что зная θ^- и $R \bmod 1$, можно однозначно восстановить сам вектор R^- . Далее, используя формулу $\rho^+ = -\rho^- - \varepsilon\gamma$, получаем, что $R^+ = -R^- - \varepsilon\gamma$. Поскольку θ^+ является средним арифметическим вектора R^+ , то аналогичную формулу получаем и для θ^+ , т.е. $\theta^+ = -\theta^- - \varepsilon\gamma$. Следовательно, из этих формул

можно однозначно восстановить и число γ , так как ε нам известно. Восстановив R^- , мы теперь можем восстановить и вектор R^+ , опираясь на формулу, приведенную выше. В случае бесконечного ребра матрица склейки C устроена очень просто, а именно:

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \gamma & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Следовательно, она также однозначно восстанавливается по γ и ε . Итак, мы однозначно восстановили C , R^+ и R^- .

Этап 4-в. Пусть теперь ребро e супербесконечно, т. е. $\beta = 0$ и вектор вращения R не имеет ни одной конечной компоненты. В этом случае ребро e является внутренним ребром некоторого радикала U . На этом ребре стоит число θ , равное $-\frac{\gamma}{\alpha}$. Но $\alpha = \varepsilon$, следовательно, как и в пункте 5-в, матрицу C можно однозначно восстановить. Далее, вектор R^- не содержит конечных элементов, поэтому приведение его по модулю 1 никакой информации не уничтожает. Вектор R^+ выражается через R^- по формуле: $R^+ = -R^- - \varepsilon\gamma$ и, следовательно, может отличаться от R^- лишь «знаком бесконечностей», его составляющих. Отметим, что γ вообще не влияет на бесконечные компоненты.

Резюме: сделав описанную выше замену сечений внутри седловых атомов, мы добились того, что совпали все матрицы склейки C и все векторы вращения R^+ и R^- на всех ребрах, соединяющих седловые атомы в молекуле W . Осталось разобраться с ребрами, один из концов которых есть атом A , или оба конца — атомы A .

Этап 5. Пусть ребро e соединяет седловой атом с атомом A . Здесь возможны два случая: ребро e конечное или ребро e бесконечное. Супербесконечным ребро e здесь быть не может.

Пусть ребро e конечно.

Пусть, для определенности, оно направлено от седлового атома к атому A . Параметр стоит на ребре e . Он равен $\frac{\alpha}{\beta}$. Как и выше, зная знак β , т. е. ε , которое нам известно, мы можем однозначно восстановить пару целых чисел α и β , т. е. первую строку матрицы склейки C . Вторую ее строку восстановить однозначно нельзя. Но мы еще не использовали возможность замены сечений внутри атомов A . Выше мы делали такие замены лишь внутри седловых атомов. Теперь, делая подходящую замену внутри атома A , мы добиваемся того, что матрицы склейки C и C' совпали. Это, конечно, можно сделать. Далее, как и на этапе 4-а, мы можем восстановить векторы вращения R^+ и R^- , используя вектор R и матрицу склейки.

Пусть теперь ребро e бесконечно.

Пусть оно, для определенности, направлено от седлового атома к атому A . Опять мы можем сделать подходящую замену трансверсального сечения внутри атома A таким образом, чтобы матрица склейки приобрела вид $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$. Поскольку параметры ε совпадают, то и матрицы склейки теперь тоже совпадут. Далее,

как и в пункте 4-б, зная $\theta^- = MR^-$ и зная вектор $R^- \bmod 1$, мы можем восстановить сам вектор R^- . При этом вектор R^+ равен εR^- , в данном случае.

Таким образом, если молекула W отлична от $A \text{---} A$, то пункт (б) теоремы 8.2 доказан.

Этап 6. Пусть теперь молекула W имеет вид $A \text{---} A$. Тогда t -молекула имеет вид $W^{*t} = ((W, r, \varepsilon), R)$. Изменяя трансверсальные сечения, системы координат внутри атомов A , можно стандартным способом добиться совпадения матриц склейки C и C' , так как нам дано, что меченые молекулы W^* совпадают. Если ребро e конечно, то как и на этапе 4-а, векторы вращения R^+ и R^- восстанавливаются по матрице склейки и вектору R . Отметим, что здесь такое ребро только одно. Если же ребро e бесконечно, то можно считать, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$. Сделаем следующие замены внутри обоих атомов A :

$$\begin{cases} \lambda^+ = \lambda'^+ \\ \mu^+ = \mu'^+ + k\lambda'^+, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^- = \lambda'^- \\ \mu^- = \mu'^- - k\lambda'^-. \end{cases}$$

Легко проверяется, что при такой замене матрица склейки C не меняется (см. предложение 8.2). При этом векторы вращения изменяются по следующему правилу: $R^+ \rightarrow R^+ + k$ и $R^- \rightarrow R^- - k$. Пользуясь такой заменой и вектором вращения $R = R^- \bmod 1$, можно добиться того, чтобы векторы R^- совпали. В нашем случае $R^+ = -R^-$, следовательно, автоматически совпадут и векторы R . Итак, с помощью подходящих замен внутри атомов A , мы добились совпадения двух избыточных t -оснащений. Итак, пункт (б) теоремы 8.2 полностью доказан.

Теорема 8.2 доказана. ■

Сделаем еще несколько важных общих замечаний по поводу проблемы классификации. Мы сопоставили интегрируемой гамильтоновой системе некоторый объект, позволяющий тестировать системы на топологическую траекторную эквивалентность. Однако для того, чтобы считать проблему классификации решенной, мы должны ответить на вопрос о том, какие именно абстрактные t -молекулы могут быть реализованы как t -молекулы интегрируемых систем. Другими словами, мы должны описать класс допустимых t -молекул. Фактически, ответом на этот вопрос является теорема реализации 8.1. Прокомментируем это несколько подробнее.

Рассмотрим пространство $\{\mathbb{T}\}$ всех допустимых избыточных t -оснащений какой-то одной фиксированной молекулы W , см. параграф 5.

Определение 8.10. Назовем t -молекулы, отвечающие допустимым избыточным t -оснащениям, *допустимыми t -молекулами* W^{it} .

Ясно, что эти и только эти молекулы могут быть реализованы как молекулы интегрируемых гамильтоновых систем.

Это определение, действительно, имеет разумный смысл, поскольку, во-первых, множество допустимых t -оснащений инвариантно по отношению к действию группы $G\mathbb{P}$ (т. е. при переходе к t -молекуле не происходит перемешивания допустимых и недопустимых объектов). Во-вторых, если нам дана t -молекула,

то по ней несложно явно восстановить какое-либо из соответствующих ей избыточных t -оснащений и провести тем самым явную проверку допустимости.

Более того, можно явно выписать формальные условия, которым должны удовлетворять параметры t -молекулы. Полный их список содержится в нашей работе [33].

8.8. Частный случай: простые интегрируемые системы и их топологическая траекторная классификация

Определение 8.11. Интегрируемая гамильтонова система называется *простой* на данном изоэнергетическом 3-многообразии Q , если на каждом критическом уровне ее дополнительного интеграла f , внутри Q , лежит ровно одна критическая окружность функции f . В терминах молекулы W это означает, что допустимы только три простейших типа атомов: A , B и A^* . См. рис. 8.8.

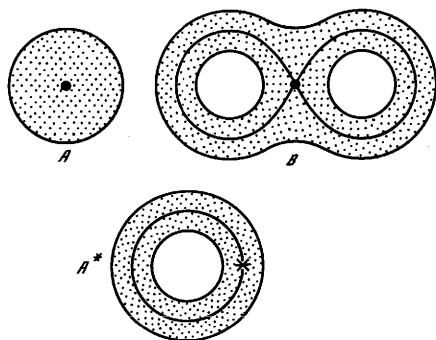


Рис. 8.8

Известно (см. работу Т. З. Нгуена [138]), что произвольная гладкая невырожденная интегрируемая система может быть сделана простой путем малого гладкого возмущения в классе интегрируемых систем. Однако в реальных задачах часто присутствует некоторая симметрия, которая является причиной возникновения сложных атомов. См. [139], [154], [219].

Описанные выше возмущения, вообще говоря, меняют тип гамильтониана, что выводит нас за рамки конкретной изучаемой системы. Поэтому выше мы рассматривали общий случай, включающий в себя теорию

сложных атомов и молекул. Тем не менее случаи простых систем встречаются довольно часто, многие описанные инварианты при этом упрощаются, и ниже мы дадим переформулировку общей теоремы классификации для этого специального случая.

Напомним, что t -молекула W^{*t} включает в себя следующие траекторные инварианты:

- 1) R -векторы, стоящие на каждом ребре молекулы;
- 2) Λ -инварианты всех седловых атомов;
- 3) $\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]$ -инварианты, стоящие на всех радикалах молекулы.

Проанализируем специфику этих инвариантов в случае простых систем. Первый инвариант — R -вектор — имеет «реберную» природу, т. е. описывает поведение систем на ребре молекулы, поэтому «простота» атомов никак на него не влияет и он остается без изменения.

Λ -инвариант становится тривиальным, поскольку атом имеет лишь одну вершину, и мы можем вообще исключить Λ из числа траекторных инвариантов.

Из тройки $(\Delta, Z, [\theta])$ только инвариант $[\theta]$ содержит в себе нетривиальную информацию, два других инварианта Δ и Z равны нулю опять-таки в силу простоты атома. Проанализируем определение 8.8. В рассматриваемом случае оно сводится к следующему. Две 0-цепи на граф-радикале $[\theta]$ и $[\theta']$ называются эквивалентными, если их разность является границей некоторой целочисленной 1-цепи q . Это в точности означает, что суммы коэффициентов этих 0-коцепей равны между собой. Но эта сумма коэффициентов по определению является b -инвариантом системы на рассматриваемом радикале. Итак, в итоге довольно громоздкий $\tilde{\Delta}\tilde{Z}[\tilde{\theta}]$ -инвариант превратился в b -инвариант, который представляет собой просто целое число.

В итоге мы получаем следующую траекторную молекулу W^{*t} в случае простых систем.

Определение 8.12. В случае простых систем *траекторной молекулой*, или короче *t -молекулой*, $W^{*t} = (W^*, R, b)$ мы назовем меченую молекулу W^* , снабженную дополнительно R -инвариантами всех ее ребер и b -инвариантами всех ее радикалов.

Учитывая общую теорему классификации и рассуждения, приведенные выше, мы приходим к следующему результату.

Теорема 8.3. Пусть v — простая интегрируемая гамильтонова система, т. е. ее молекула W на данном изоэнергетическом 3-многообразии состоит только из атомов A, A^* и B . Тогда отвечающая этой системе t -молекула $W^{*t} = (W^*, R, b)$ корректно определена, т. е. не зависит от выбора допустимых координат, и является полным траекторным инвариантом интегрируемой системы. Это означает, что две интегрируемые системы рассматриваемого класса топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их (простые) t -молекулы совпадают.

Как мы видим, в этом важном частном случае траекторные инварианты сильно упростились. Отметим также, что для простых молекул вся дополнительная информация о траекториях системы содержится в функциях вращения.

8.9. Теория гладкой траекторной классификации

В настоящем параграфе мы изложим теорию гладкой траекторной классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенную в [24], [25], [26]. Здесь, как обычно, под гладкостью мы понимаем C^∞ -гладкость.

Ниже, для простоты, мы будем предполагать, что все атомы являются плоскими и без звездочек. Это означает, в частности, что плоскими, т. е. допускающими вложение в плоскость, являются все трансверсальные сечения P_c . Отметим, что в реальных примерах интегрируемых гамильтоновых систем, известных нам, это условие всегда выполняется. На самом деле общий метод построения инвариантов, который был предложен выше, и который мы сейчас применим

в гладком случае, абсолютно пригоден в случае неплоских атомов и атомов со звездочками. Действительно, выше мы описали полностью атомные инварианты в общем случае. Однако мы уже видели, что при рассмотрении самого общего случая возникают чисто технические проблемы при описании инвариантов действия группы замен. Поэтому здесь мы решили ограничиться наиболее важным для приложений случаем, где, как мы вскоре увидим, теорема классификации приобретает очень естественную формулировку.

Итак, прежде всего мы построим так называемое избыточное st -оснащение для системы. При этом мы будем считать, что боттовский первый интеграл f гамильтоновой системы v фиксирован, поэтому, в частности, избыточное st -оснащение и st -молекула будут зависеть от выбора первого интеграла.

На граничных торах каждого 3-атома Q_c мы вводим и фиксируем некоторые допустимые системы координат — пару ориентированных циклов. Один из циклов этой системы — слой расслоения Зейферта, другой — пересечение тора Лиувилля с трансверсальным сечением $P_c \subset Q_c$. Напомним, что в случае плоских атомов задание сечения и задание допустимой системы координат, т. е. границы сечения, — это одно и то же.

Таким образом, как и выше, мы получаем на каждом ребре две системы координат (λ_j^-, μ_j^-) и (λ_j^+, μ_j^+) и можем определить, следовательно, пару функций вращения ρ_j^- и ρ_j^+ . Кроме того, на каждом ребре имеется целочисленная матрица склейки C_j , которая по определению является матрицей перехода от базиса (λ_j^-, μ_j^-) к базису (λ_j^+, μ_j^+) .

Наконец, для каждой вершины каждого седлового атома P_c мы определим по указанному выше правилу Λ^* -инвариант. При этом в качестве гамильтониана редуцированной системы мы будем рассматривать дополнительный интеграл f , а симплектическую структуру на сечении P_c подберем соответствующим образом под этот гамильтониан. Таким образом, фиксируя допустимые системы координат, или, что то же самое, набор трансверсальных сечений \mathbb{P} , мы можем определить следующий набор

$$\mathbb{ST} = (C_j, \rho_j^-(\mathbb{P}), \rho_j^+(\mathbb{P}), \Lambda_c^*).$$

Определение 8.13. Совокупность всех матриц склеек, функций вращения и Λ -инвариантов

$$\mathbb{ST} = (C_j, \rho_j^-(\mathbb{P}), \rho_j^+(\mathbb{P}), \Lambda_c^*)$$

называется *избыточным st -оснащением* молекулы W .

Разумеется, избыточное st -оснащение существенным образом зависит от выбора допустимых систем координат на торах Лиувилля. Следующий шаг — доказательство основной леммы, которая показывает, что информации, содержащейся в избыточном оснащении, достаточно для классификации. Рассмотрим две интегрируемые системы v_1 и v_2 с одной и той же молекулой W .

Лемма 8.7 (Основная). Пусть при некотором выборе допустимых систем координат избыточные st -оснащения \mathbb{ST}_1 и \mathbb{ST}_2 молекулы W , отвечающие системам v_1 и v_2 , совпадают. Тогда эти системы гладко траекторно эквивалентны.

Доказательство основной леммы.

Итак, пусть нам даны две интегрируемые гамильтоновы системы, ограниченные на трехмерные изоэнергетические поверхности, отвечающие одной и той же «грубой» молекуле W . Пусть кроме того избыточные st -оснащения молекулы W , отвечающие данным системам, совпадают при некотором выборе допустимых систем координат.

Начнем с того, что построим траекторные диффеоморфизмы сначала на атомах, а затем сошьем их в единый диффеоморфизм, продолжив подходящим образом на ребра.

Согласно теореме редукции для доказательства эквивалентности систем v_1 и v_2 на 3-атоме Q^3 , — т.е. в узкой окрестности особого слоя, — нам достаточно проверить сопряженность соответствующих потоков Пуанкаре σ_1^t и σ_2^t на фиксированных трансверсальных сечениях. У нас уже есть необходимые инструменты для такой проверки. Мы имеем в виду теорему гладкой классификации систем на атоме. См. теорему 7.1 главы 7. Согласно этой теореме, в плоском случае нам достаточно проверить совпадение Λ^* -инвариантов и функций периодов. Но Λ^* -инварианты совпадают как элементы совпадающих избыточных st -оснащений \mathcal{ST}_1 и \mathcal{ST}_2 . Что же касается функций периодов, то они, по лемме 8.5, просто совпадают с функциями вращения из избыточных st -оснащений и поэтому равны между собой. Итак, системы гладко траекторно эквивалентны в окрестности каждого атома.

Они также траекторно эквивалентны на каждом ребре, поскольку функции вращения совпадают. Нам остается сшить траекторные изоморфизмы на атомах и ребрах в единый траекторный диффеоморфизм. Но мы уже умеем это делать. См. лемму 8.3 о сшивании. Основная лемма доказана. ■

Теперь, следуя общей конструкции построения инвариантов, мы должны рассмотреть действие группы замен трансверсальных сечений $G^{\mathbb{P}}$ на множестве избыточных st -оснащений и выделить полный набор инвариантов этого действия. В гладком случае и сама эта группа и ее действие на множестве st -оснащений будут точно такими же как в топологическом случае. См. параграфы 2 и 3 этой главы. Более точно, эти преобразования выглядят следующим образом:

$$1) C_j' = \begin{pmatrix} \alpha_j' & \beta_j' \\ \gamma_j' & \delta_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_j^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_j^- & 1 \end{pmatrix} = (A_j^+)^{-1} C_j A_j^-, \text{ где } A_j^{\mp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_j^{\mp} & 1 \end{pmatrix},$$

$$2) (\rho_j^-)' = \rho_j^- + k_j^-, (\rho_j^+)' = \rho_j^+ + k_j^+,$$

$$3) \Lambda_c'^* = \Lambda_c^*,$$

где k_j^+ и k_j^- — коэффициенты так называемых различающих 2-коцепей. См. параграфы 2, 3 этой главы. Эти коцепи стоят на начале и конце каждого ребра e_j , и основное их свойство состоит в том, что сумма этих чисел, стоящих вокруг каждого седлового атома, равна нулю.

Мы можем теперь легко описать полный набор инвариантов описанного действия. Согласно второму принципу, в совокупности они дадут необходимый набор параметров st -молекулы.

Итак, перейдем к описанию этих инвариантов. Они будут очень похожи на инварианты, определенные нами для топологического случая.

Начнем с реберных инвариантов. Как мы уже знаем, единственным инвариантом на ребре является функция вращения. См. параграф 1 главы 5. Функции ρ_j^- , ρ_j^+ для этой цели, однако, не очень годятся, поскольку они зависят от выбора допустимых систем координат. Таким образом, проблема заключается в том, чтобы выбрать на торах однопараметрического семейства некоторый естественный однозначно определенный базис. Если ребро e_j конечно, то это очень легко сделать. Действительно, геометрически условие $r \neq \infty$ означает, что однозначно определенные циклы λ^+ и λ^- на торах Лиувилля данного семейства независимы, поэтому пара λ^+ , λ^- вполне пригодна для использования в качестве «базиса» для записи функции вращения. Тот факт, что на самом деле они не образуют базиса в целочисленной решетке в данном случае не важен.

Переписывая функцию вращения в этом «базисе», мы получаем новую функцию (см. предложение 1.14)

$$\rho_j = \beta_j \rho_j^- - \alpha_j,$$

где α_j и β_j — коэффициенты матрицы склейки C_j . Отметим, что абсолютно то же самое мы сделали при построении R -инварианта.

Если же ребро является бесконечным, т. е. $r_j = \infty$, то циклы λ^+ и λ^- гомологичны, и у нас нет никакого однозначного способа построения базиса на торах рассматриваемого семейства. Поэтому в качестве инварианта как и в топологическом случае мы рассмотрим функцию ρ_j^- по модулю единицы. Это означает, что две функции совпадают, если их разность является постоянной функцией, принимающей некоторое целое значение. Мы будем обозначать этот инвариант через $\rho_j \bmod 1$.

Итак, на каждом ребре появился некоторый инвариант: функция ρ_j или $\rho_j \bmod 1$ в зависимости от типа ребра.

Следующий инвариант — это просто Λ^* -инвариант каждого атома. Он не зависит от выбора сечения и потому, согласно первому принципу, является траекторным инвариантом. Оказывается, этих двух самых естественных инвариантов уже достаточно для классификации.

Подведем итоги. Фиксируя интеграл f , мы получаем некоторый новый объект $W^{*st} = \{W, r_j, \varepsilon_j, n_k, \rho_j, \Lambda_m\}$, называемый st -молекулой. Здесь:

W — молекула системы.

r_j, ε_j — r - и ε -метки, стоящие на ребрах молекулы. Индекс j нумерует ребра, см. главу 4.

n_k — n -метки, стоящие на семьях молекулы. Индекс k нумерует семьи, см. главу 4.

ρ_j — функция вращения на ориентированном ребре молекулы. На бесконечных ребрах функция вращения берется по модулю целых чисел, т. е. $\rho \bmod 1$.

Λ_m^* — Λ^* -инварианты гиперболических траекторий системы, стоящие на соответствующих вершинах седловых атомах. Индекс m нумерует вершины седловых атомов.

Теорема 8.4. Пусть (v_1, Q_1) и (v_2, Q_2) — две интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями, ограниченные на изоэнергетические подмногообразия. Пусть все атомы, входящие в соответствующие молекулы — плоские и без звездочек. Системы (v_1, Q_1) и (v_2, Q_2) гладко траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют боттовские интегралы f_1 и f_2 систем (v_1, Q_1) и (v_2, Q_2) такие, что отвечающие им st -молекулы W_1^{*st} и W_2^{*st} совпадают.

КОММЕНТАРИЙ. Другими словами, необходимые и достаточные условия существования гладкого траекторного изоморфизма состоят в следующем:

- 1) системы должны иметь одинаковое слоение Лиувилля,
- 2) после подходящей замены первых интегралов должны совпадать функции вращения ρ и Λ^* -инварианты гиперболических замкнутых траекторий.

Никаких других инвариантов не требуется.

КОММЕНТАРИЙ. Некоторая трудность применения этой теоремы состоит в том, что пока совершенно непонятно каким образом можно установить существование или, наоборот, несуществование требуемой в теореме замены пары интегралов. Тем не менее, первым шагом всегда должно быть вычисление st -молекул для систем, предъявленных для тестирования. Когда эти молекулы вычислены, нужно выяснять следующий вопрос: существует ли замена интеграла для одной из систем, при которой ее st -молекула переходит в соответствующую st -молекулу второй системы? На самом деле этот вопрос может быть решен на формальном уровне (см. [24], [25]).

Доказательство.

Мы хотим показать, что сведений о лиувилевом слоении, и функций вида ρ и $\rho \bmod 1$ достаточно для классификации.

Итак, пусть st -молекулы систем v_1 и v_2 совпадают. Возьмем произвольное избыточное st -оснащение для первой системы, фиксируя для нее некоторые допустимые системы координат. Будем теперь подбирать замену допустимых систем координат так, чтобы получить избыточное st -оснащение, совпадающее с некоторым фиксированным st -оснащением, отвечающим второй системе. Мы будем употреблять далее нижние индексы 1 и 2, чтобы различать между собой объекты, относящиеся к первой и второй системе соответственно.

Сделаем такую замену допустимых систем координат, чтобы совпали все матрицы склейки C_j на всех ребрах. Это возможно в силу теории лиувиллевой классификации. Легко видеть, что после этого функции вращения ρ_1^- и ρ_2^- на конечных ребрах совпадут, поскольку они однозначно выражаются через инвариантные функции из st -молекулы и коэффициенты матрицы склейки. Аналогичные рассуждения применимы к ρ_1^+ и ρ_2^+ . Λ -инварианты также совпадают автоматически, поскольку они вообще не меняются при заменах допустимых систем координат.

Нам остается, таким образом, уравнивать функции вращения на бесконечных и супербесконечных ребрах. Пока они совпадают у нас по модулю единицы. Следующий шаг — это уравнивание функций вращения на бесконечных ребрах. Разрежем молекулу по всем конечным ребрам. Она распадется на некоторое число кусков, которые мы назовем семьями. Отметим, что это не совсем совпадает с классическим понятием семьи.

Наше первое утверждение состоит в том, что если кусок является настоящей семьей, т.е. не содержит атомов типа A , и кроме того является деревом, то автоматически при совпадении матриц склеек все функции вращения ρ_{1j}^- и ρ_{2j}^- на внутренних ребрах этой семьи будут совпадать не по модулю единицы, а в точности.

Действительно, рассмотрим крайнюю вершину радикала-дерева. Из нее выходит ровно одно бесконечное ребро. Без ограничения общности будем считать, что все ребра выходят из этой вершины. Функции вращения ρ_{1j}^- и ρ_{2j}^- совпали на всех ребрах e_j , выходящих из данной вершины, за исключением этого единственного бесконечного ребра. На этом ребре функции вращения в принципе могут отличаться друг от друга на некоторое целое число. Покажем, что на самом деле они совпадают. Для этого вспомним, что сумма так называемых конечных частей функций вращения (они же — функции периодов редуцированной системы) на данном атоме по всем ребрам, выходящим из этого атома, равна нулю. Отсюда мгновенно следует, что конечные части двух функций вращения на рассматриваемом бесконечном ребре совпадают. Но тогда, очевидно, совпадают и сами функции. Действительно, если бы эти функции отличались на константу, то на ту же самую константу должны были бы отличаться их конечные части. Отметим, что после этого функции ρ_{1j}^+ и ρ_{2j}^+ также автоматически совпадут, поскольку они однозначно выражаются через ρ_{1j}^- и ρ_{2j}^- и матрицы склейки.

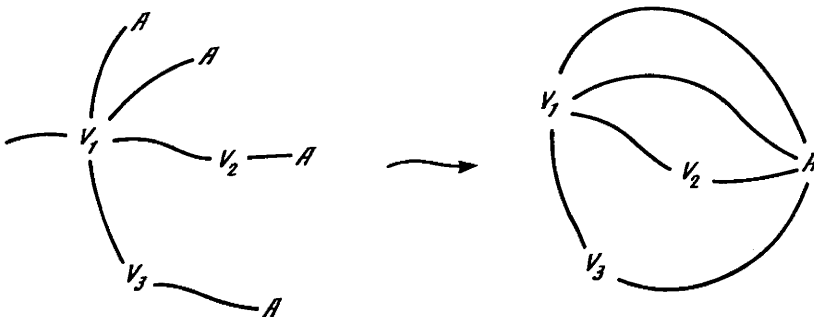


Рис. 8.9

Теперь, используя этот факт, мы можем двигаться по дереву-семье дальше, доказывая последовательно совпадение функций вращения на всех ребрах семьи.

Рассмотрим теперь случай, когда семья U не является деревом или содержит атомы типа A . Если семья содержит атомы типа A , то изготовим из нее новый геометрический объект \tilde{U} , склеив вместе все атомы A в одну точку (рис. 8.9).

Если этот новый граф не имеет циклов, то исходный кусок содержал не более одного атома типа A , все остальные атомы были седловые. В этом случае мы

можем дословно повторить наше рассуждение, сделанное выше, перебирая последовательно все крайние вершины этого дерева, но не трогая атома A , оставляя его для последнего шага.

Пусть, наконец, \tilde{U} деревом не является. Рассмотрим произвольный цикл этого графа. Мы утверждаем, что можно таким образом изменить допустимые системы координат для второй системы, чтобы матрицы склейки не изменились, а на одном из ребер этого цикла функции ρ_{1j}^- и ρ_{2j}^- совпали. При этом изменения систем координат на торах будут происходить только на ребрах этого цикла, в частности, на всех остальных ребрах функции вращения меняться не будут.

Итак, возьмем произвольный цикл, т.е. замкнутую ломаную без самопересечений, образованную ребрами e_1, \dots, e_m . Без ограничения общности мы можем считать, что ориентация на ребрах соответствует некоторой ориентации на цикле (рис. 8.10).

Возьмем произвольное ребро e_{j_0} из этого цикла, соединяющее некоторые атомы V_{j_1} и V_{j_2} , т.е. две вершины рассматриваемой ломаной. Предположим, что функции вращения на ребре e_{j_0} не совпали, другими словами, $\rho_{1j_0}^- = \rho_{2j_0}^- - k$. Здесь индексы 1 и 2 соответствуют номеру оснащения, а не номеру ребра. Сделаем тогда следующую допустимую замену координат на всех ребрах e_j , образующих данный цикл:

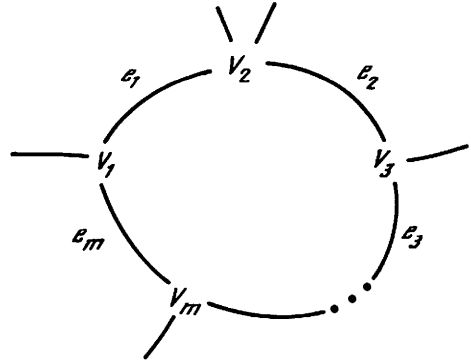


Рис. 8.10

$$\begin{cases} \lambda_j^{+'} = \lambda_j^+ \\ \mu_j^{+'} = \mu_j^+ - k\lambda_j^+, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_j^{-'} = \lambda_j^- \\ \mu_j^{-'} = \mu_j^- + k\lambda_j^-. \end{cases}$$

Легко видеть, что такая замена координат допустима. Действительно, если конец или начало ребра является атомом типа A , то такая замена допустима по определению. Если же конец ребра является седловым атомом, то из этого атома по нашему построению обязательно выходит некоторое ребро из рассматриваемого цикла (рис. 8.10). Поэтому замена затрагивает одновременно два ребра инцидентных данному атому, причем сумма коэффициентов « k » для этой замены равна нулю, что и означает допустимость замены. См. параграф 1 главы 4.

Далее, легко видеть, что замена не меняет матриц склеек. Единственные изменения в избыточном st -оснащении \mathbb{ST}_1 относятся к функциям вращения на ребрах, образующих цикл. Ко всем этим функциям вращения ρ_{2j}^- добавляется целое число k . Поэтому, в частности, на выбранном нами бесконечном ребре e_{j_0} функции вращения $\rho_{2j_0}^-$ и $\rho_{1j_0}^-$ совпали.

Теперь мы это ребро больше не трогаем. Если в радикале после удаления ребра e_1 остались некоторые циклы, мы повторяем описанную процедуру до тех пор, пока радикал не превратится в дерево или в несвязное объединение деревьев. Для деревьев, как мы уже видели, совпадение функций вращения будет иметь

место автоматически, если на всех остальных ребрах, окружающих это дерево, функции вращения уже уравнены.

Итак, мы уравнили функции вращения на всех ребрах молекулы, что и требовалось. Теперь избыточные оснащения совпали, и мы можем применить основную лемму, согласно которой системы будут гладко траекторно эквивалентны. Теорема доказана. ■

ГЛАВА 9

Лиувиллева классификация интегрируемых систем с двумя степенями свободы в четырехмерных окрестностях особых точек

В настоящей главе излагаются результаты, полученные несколькими авторами, а именно, Л. М. Лерманом, Я. Л. Уманским, [105], [106], [327], А. В. Болсиновым [24], В. С. Матвеевым [110], [111], Т. З. Нгуеном [341], [344]. При этом мы придерживаемся общей идеи настоящей книги и стараемся излагать все факты с единой точки зрения теории топологических инвариантов интегрируемых систем. Предыдущие главы были посвящены изучению интегрируемой гамильтоновой системы на трехмерной изоэнергетической поверхности. Здесь же мы хотим обсудить ее поведение на четырехмерном симплектическом многообразии. Главным образом нас будет интересовать топологическая структура особенностей слоения Лиувилля.

9.1. L -тип четырехмерной особенности

Пусть $x_0 \in M^4$ — невырожденная особая точка отображения момента $\mathcal{F} = (H, f): M^4 \rightarrow R^2$ интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом H и первым интегралом f на симплектическом многообразии (M^4, ω) . Как мы уже видели в главе 1, особые точки могут быть лишь следующих четырех типов:

- а) центр-центр,
- б) седло-центр,
- в) седло-седло,
- г) фокус-фокус.

Нашей целью является описание структуры лиувиллева слоения в четырехмерной окрестности U^4 особого слоя L , проходящего через точку x_0 . Оказывается, точки первых трех типов имеют некоторые инварианты общей природы, которые мы здесь опишем.

Наложим следующие естественные условия на интегрируемую систему.

Условие 1. Каждый слой слоения Лиувилля компактен.

Условие 2. Все особые точки, лежащие на слое L , являются невырожденными. (См. определение 1.23 из главы 1).

Условие 3. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки $\mathcal{F}(x_0)$ в образе отображения момента \mathcal{F} имеет вид, показанный на рис. 9.1(а, б, с, д).

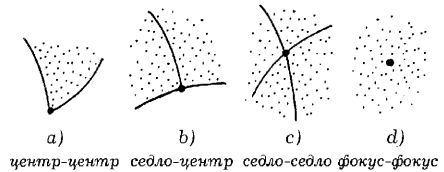


Рис. 9.1

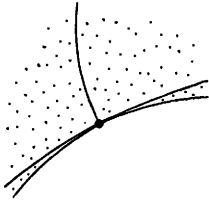
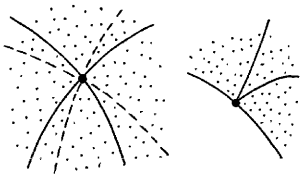


Рис. 9.2

бифуркационной диаграмме, но эти крестики для разных точек не совпадают. В случае центр-седло мы запрещаем аналогичные ситуации, показанные на рис. 9.3(b).



а) седло-седло б) центр-седло

Рис. 9.3

КОММЕНТАРИЙ (к условию 3). Первая запрещенная ситуация показана на рис. 9.2, когда две дуги бифуркационной диаграммы касаются друг друга в особой точке $y_0 = \mathcal{F}(x_0)$ с бесконечным порядком касания. Эта ситуация возможна для гладких систем, но невозможна для аналитических. Вторая запрещенная ситуация показана на рис. 9.3(a). Здесь в одну и ту же особую точку $\mathcal{F}(x_0)$ бифуркационной диаграммы проектируются несколько различных точек, например, типа седло-седло. Каждая из них дает «крестик» на

Условие 4. Прямые, задаваемые уравнением $H = h = \text{const}$, пересекают бифуркационную диаграмму Σ трансверсально в окрестности точки y_0 .

КОММЕНТАРИЙ (к условию 4). Для изучения структуры слоения на торы Лиувилля это условие не очень существенно, поскольку заменяя гамильтониан H на функцию вида $\tilde{H} = H + \lambda f$ всегда можно добиться его выполнения. Однако это усло-

вие приобретает нетривиальный смысл, если мы хотим выделить гамильтониан H из двумерного семейства коммутирующих функций. Например, это условие будет гарантировать, что гамильтоново векторное поле $\text{sgrad } H$ не имеет никаких других положений равновесия кроме особых точек, лежащих на слое L .

Условие 5. Без ограничения общности, можно считать, что особый слой L является полным прообразом точки y_0 при отображении \mathcal{F} , и его 4-окрестность U является полным прообразом некоторого диска с центром в точке y_0 .

КОММЕНТАРИЙ (к условию 5). Это условие попросту означает, что мы рассматриваем связную компоненту прообраза $\mathcal{F}^{-1}(y_0)$ точки $y_0 \in \Sigma$ и соответствующую связную компоненту прообраза ее окрестности.

Условие 6. Будем считать все рассматриваемые в этой главе объекты, — а именно, многообразия, симплектические структуры, гамильтонианы, интегралы, — вещественно-аналитическими.

КОММЕНТАРИЙ (к условию 6). Это условие на самом деле очень существенно. Все утверждения остаются справедливыми и для гладкого случая. Но для доказательства соответствующих «гладких утверждений» нужны гладкие аналоги теорем 1.5 и 1.7 (из главы 1), которые мы в нашей книге не доказываем. Насколько нам известно, полное доказательство этих фактов нигде до сих пор не опубликовано. См. подробности в приложении 3 к настоящей книге.

Рассмотрим в окрестности U^4 строение множества K критических точек отображения момента \mathcal{F} . Для точек первых трех типов множество K состоит из двух частей P_1 и P_2 — грубо говоря, прообразов двух гладких дуг γ_1 и γ_2

бифуркационной диаграммы, пересекающихся в ее особой точке. Более точно,

$$P_1 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_1) \cap K, \quad P_2 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_2) \cap K.$$

Предложение 9.1. Пусть z_1, \dots, z_s — невырожденные критические точки отображения момента \mathcal{F} , лежащие на особом слое $L = \mathcal{F}^{-1}(y_0)$. Тогда:

- 1) P_1 и P_2 являются двумерными симплектическими многообразиями с краем, пересекающимися трансверсально в точности в точках z_1, \dots, z_s .
- 2) Гамильтониан H , ограниченный на подмногообразия P_1 и P_2 , является функцией Морса с единственным критическим значением, а его особые точки совпадают с точками z_1, \dots, z_s .
- 3) Все критические точки z_1, \dots, z_s , лежащие на особом слое L , обязательно имеют один и тот же тип. Другими словами, они все одновременно имеют либо тип седло-седло, либо седло-центр, либо центр-центр.

Доказательство.

1) Множество критических точек K состоит из нульмерных и одномерных орбит пуассонова действия абелевой группы \mathbb{R}^2 , порожденной сдвигами вдоль интегральных траекторий полей $\text{sgrad } f$ и $\text{sgrad } H$. Все точки z_1, \dots, z_s невырождены по предположению, а потому изолированы. Ясно, что они являются нульмерными орбитами группы \mathbb{R}^2 . Никаких других нульмерных орбит в окрестности особого слоя L , очевидно, нет. Поэтому нам нужно изучить поведение и характер одномерных орбит в окрестности особого слоя L . Мы утверждаем, что все эти одномерные орбиты являются невырожденными. Легко видеть, что каждая из таких орбит проходит вблизи какой-то точки из множества точек z_1, \dots, z_s . Поэтому достаточно убедиться, что любая одномерная орбита, проходящая через окрестность точки z_i — невырождена. Это легко следует из локальной структуры особенности отображения момента в невырожденной особой точке z_i . Действительно, согласно теореме 1.5 из главы 1, в окрестности точки z_i существуют регулярные гладкие координаты p_1, p_2, q_1, q_2 , относительно которых функции H и f запишутся в виде:

$$H = H(\alpha, \beta), \quad f = f(\alpha, \beta),$$

где функции α и β в зависимости от типа особой точки имеют вид:

- а) $\alpha = p_1^2 + q_1^2, \beta = p_2^2 + q_2^2$, в случае центр-центр,
- б) $\alpha = p_1^2 + q_1^2, \beta = p_2 q_2$, в случае центр-седло,
- в) $\alpha = p_1 q_1, \beta = p_2 q_2$, в случае седло-седло.

При этом гладкая замена $(H, f) \rightarrow (\alpha, \beta)$ является невырожденной, т. е. $\frac{\partial(H, f)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0$. Следовательно, множество критических точек и их свойства для

отображений $\mathcal{F} = (H, f): U \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\tilde{\mathcal{F}} = (\alpha, \beta): U \rightarrow \mathbb{R}^2$ будут одни и те же. Остается заметить, что для функций α, β множество критических точек локально устроено очень просто: оно состоит из двух двумерных поверхностей, задаваемых уравнениями:

$$(p_1 = 0, q_1 = 0) \text{ и } (p_2 = 0, q_2 = 0).$$

Эти две поверхности пересекаются трансверсально в невырожденной особой точке z_i и кроме того обе, локально, являются симплектическими многообразиями. Невырожденность особых точек (в смысле отображения $\tilde{\mathcal{F}}$), из которых состоят эти две пересекающиеся поверхности, очевидна (см. определения 1.23, 1.25 из главы 1).

Таким образом, все одномерные орбиты действия группы \mathbb{R}^2 , попавшие в окрестность особого слоя L , оказываются невырожденными. Как было показано в предложении 1.18 главы 1, множество критических точек отображения момента в окрестности невырожденной орбиты локально устроено как симплектическое двумерное многообразие. Тем самым мы доказали, что пересечение множества K критических точек отображения момента с окрестностью $U(L)$ является двумерным симплектическим многообразием, самопересекающимся в особых точках z_1, \dots, z_s . В то же время, ясно, что оно состоит в действительности из двух многообразий P_1 и P_2 , каждое из которых двумерно и симплектично. Они отвечают дугам γ_1 и γ_2 на бифуркационной диаграмме, и пересекают друг друга в точках z_1, \dots, z_s . Отметим, что многообразия P_i не обязаны быть связными.

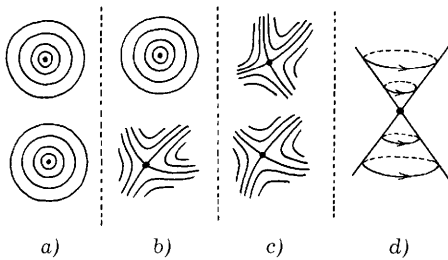


Рис. 9.4

По существу это утверждение следует из условия 4, то есть из того, что линии $H = \text{const}$ пересекают обе дуги γ_1 и γ_2 бифуркационной диаграммы трансверсально. В силу следствия из предложения 1.18 главы 1, все точки, кроме точек z_1, \dots, z_s являются регулярными для функции H , ограниченной на 2-многообразия P_i . Сами точки z_1, \dots, z_s хотя и являются особыми, но они — невырожденные (как критические точки

функции H , ограниченной на P_i). Это следует из локальной структуры особенности. Действительно, функция H имеет здесь вид $H = H(\alpha, \beta)$, причем $\frac{\partial H}{\partial \alpha} \neq 0$ и $\frac{\partial H}{\partial \beta} \neq 0$ в силу условия 4. В окрестности точки z_j на многообразии P_i в качестве локальных координат можно взять p_i, q_i . Отсюда видно, что ограничение H на P_i в локальных координатах запишется как $H(p_i^2 + q_i^2)$, либо как $H(p_i q_i)$. Из этих условий сразу следует, что $H: P_i \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса, что и требовалось.

3) На рис. 9.4 представлена локальная картина строения малой окрестности невырожденной особой точки. В первых трех случаях эта малая окрестность имеет тип прямого произведения. Легко видеть, что в случае центр-центр осо-

бый слой L нульмерен, т. е. состоит из одной точки, в силу связности. Для случая центр-седло особый слой L одномерен. Случай седло-седло и случай фокус-фокус характеризуются тем, что здесь особый слой L — двумерен. Из невырожденности сразу следует, что особый слой во всех своих точках обязан иметь одну и ту же размерность. Отсюда ясно, что точки типа центр-центр и центр-седло не могут «перемешиваться» ни с какими другими точками.

Докажем, что особый слой не может одновременно содержать точки типа седло-седло и фокус-фокус. Допустим противное. Тогда обязательно найдется двумерная орбита, в замыкании которой содержатся точки разных типов: седло-седло и фокус-фокус. В случае фокус-фокус существует линейная комбинация $\lambda H + \mu f$ функций H и f , с постоянными коэффициентами, такая, что все траектории векторного поля $\text{sgrad}(\lambda H + \mu f)$ замкнуты на особом слое L вблизи особой точки типа фокус-фокус. Это следует из локального строения этой точки (см. также подробное описание точек типа фокус-фокус ниже). Все траектории указанного поля замкнуты на двумерной орбите и имеют один и тот же конечный период. С другой стороны, в окрестности точки седло-седло время прохождения по траектории вблизи особой точки стремится к бесконечности, когда траектория приближается к этой точке. Даже если бы траектория была замкнута, ее период при приближении к особой точке должен был бы стремиться к бесконечности. Получили противоречие. Предложение доказано. ■

Из пункта 3 предложения 9.1 видно, что можно говорить о типе самого особого слоя L , а не только о типе особой точки. Поскольку на особом слое перемешивания точек разных типов не происходит, то весь слой естественно может быть отнесен к одному из следующих типов: центр-центр, центр-седло, седло-седло либо фокус-фокус.

Заметим также, что тип особенности по своей природе напоминает понятие индекса особой точки в классической теории Морса. Однако в классическом случае аналог доказанного нами утверждения неверен: особый слой может содержать особые точки разных индексов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подмногообразия P_1 и P_2 могут быть несвязными, но в то же время их объединение всегда связно, как будет показано ниже.

Рассмотрим пары $V_1 = (H|_{P_1}, P_1)$ и $V_2 = (H|_{P_2}, P_2)$, где H — гамильтониан. Из пункта 2 предложения 9.1 следует, что функция H задает на каждой поверхности P_1 и P_2 структуру атома. При этом точки z_1, \dots, z_s являются вершинами этого атома. Таким образом, V_1 и V_2 являются двумя атомами, естественно связанными с особым слоем L и точкой y_0 . Отметим, что оба атома V_1 и V_2 ориентируемы, поскольку соответствующие им поверхности P_1 и P_2 — симплектические, а следовательно, — ориентируемые.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подчеркнем, что в отличие от предыдущего здесь мы разрешаем атомам V_1 и V_2 быть несвязными.

Определение 9.1. Пара (V_1, V_2) называется l -типом особенности отображения момента \mathcal{F} в точке $y_0 \in \Sigma$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае фокус-фокус понятие l -типа отсутствует.

Типы атомов V_1 и V_2 полностью определяются типом особенности. А именно:

- а) если особенность имеет тип центр-центр, то атомы V_1, V_2 оба имеют тип A ,
- б) если особенность имеет тип центр-седло, то один из атомов имеет тип A , а другой атом — седловой,
- в) в случае седло-седло оба атома — седловые.

Понятие l -типа полезно для классификации 4-мерных особенностей. Идея состоит в следующем. Можно ввести естественное понятие сложности 4-мерной особенности как числа особых точек z_1, \dots, z_s на особом слое L . Ясно, что число s является сложностью атомов V_1 и V_2 , т. е. s — число их вершин. Поэтому для 4-мерной особенности фиксированной сложности имеется лишь конечное число возможных l -типов, и все их можно перечислить. Фиксируя l -тип, можно затем попытаться описать все соответствующие ему 4-мерные особенности. Отметим впрочем, что l -тип не является полным различающим инвариантом, поэтому может существовать несколько разных особенностей с одним и тем же l -типом. Однако, как мы покажем далее, число особенностей с одним и тем же l -типом всегда конечно.

9.2. Круговая молекула четырехмерной особенности

Опишем еще один полезный инвариант особенностей отображения момента \mathcal{F} . Пусть Σ — бифуркационная диаграмма, расположенная в плоскости $\mathbb{R}^2(H, f)$. Как мы уже видели, обычно бифуркационная диаграмма представляет из себя набор гладких кривых, которые могут пересекаться или касаться друг друга в некоторых точках. Кроме того, Σ может содержать изолированные точки. Гладкие дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ диаграммы Σ как правило соответствуют однопараметрическим семействам невырожденных одномерных орбит пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 . Предположим, что это условие выполнено. Диаграмма обычно имеет особые точки. Точка y_0 из Σ называется особой, если она принадлежит к одному из следующих двух типов.

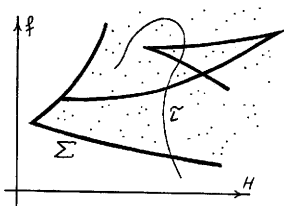


Рис. 9.5

Тип 1: точка принадлежит образу $f(K \setminus \tilde{K})$, где \tilde{K} — множество невырожденных замкнутых одномерных орбит пуассонова действия \mathbb{R}^2 на M^4 .

Тип 2: точка y_0 является точкой пересечения (или самопересечения) гладких дуг диаграммы Σ .

Обозначим множество особых точек диаграммы Σ через Σ_0 . Обычно Σ_0 — это конечное множество изолированных точек. Если Σ представлять в виде одномерного клеточного комплекса, то Σ_0 — это как раз множество его вершин.

Теперь введем понятие допустимой кривой.

Определение 9.2. Гладкая параметризованная кривая τ без самопересечений в плоскости $\mathbb{R}^2(H, f)$ называется *допустимой*, если она пересекает бифуркационную диаграмму Σ трансверсально и не проходит через особые точки бифуркационной диаграммы Σ (рис. 9.5).

Рассмотрим теперь полный прообраз $Q_\tau = \mathcal{F}(\tau)$ в M^4 . Для допустимой кривой τ это — трехмерное гладкое многообразие. Параметр t параметризованной кривой $\tau(t)$ может быть рассмотрен как гладкая функция на 3-многообразии Q_τ . Эта функция, очевидно, является боттовской, если τ — допустимая кривая. При этом мы, конечно, считаем, что многообразие Q_τ является изоэнергетической поверхностью для гамильтоновой системы с гамильтонианом $H_\tau(H, f)$, который обладает тем свойством, что на плоскости $\mathbb{R}^2(H, f)$ кривая задается уравнением $\{H_\tau = \text{const}\}$. Тем самым, на Q_τ имеется структура слоения Лиувилля, а следовательно, возникает инвариант этого слоения — меченая молекула W^* , которую мы обозначим через $W^*(\tau)$.

Лемма 9.1. *Молекула $W^*(\tau)$ не меняется при гладкой изотопии τ_s кривой τ на плоскости \mathbb{R}^2 в классе допустимых кривых.*

Доказательство получается обычными рассуждениями. ■

Пусть теперь y_0 из Σ_0 — некоторая изолированная особая точка бифуркационной диаграммы. Рассмотрим окружность τ малого радиуса с центром в точке y_0 . Предположим, что τ — допустимая кривая и что она остается таковой при уменьшении ее радиуса.

Определение 9.3. Меченая молекула $W^*(\tau)$ называется *круговой молекулой* особой точки y_0 бифуркационной диаграммы Σ .

Меченая молекула описывает структуру лиувиллева слоения границы 4-мерной окрестности U особого слоя $L = \mathcal{F}^{-1}(y_0)$. Она показывает, что происходит, когда мы обходим вокруг особенности. Важно то, что происходящие при этом события мы можем описать в терминах уже известного нам инварианта — меченой молекулы. Как мы увидим ниже, круговая молекула позволяет описывать структуру не только границы 4-мерной окрестности особенности, но и самой этой окрестности. Другими словами, как оказывается, во многих случаях круговая молекула оказывается полным инвариантом 4-мерной особенности в смысле лиувиллевой эквивалентности.

Гипотеза (А. Т. Фоменко). *Если все особые точки z_1, \dots, z_s на особом слое L являются невырожденными, то круговая молекула является полным инвариантом 4-мерной особенности в смысле лиувиллевой эквивалентности. Другими словами, две гамильтоновы системы лиувиллево эквивалентны в некоторых окрестностях своих невырожденных особенностей тогда и только тогда, когда их круговые молекулы совпадают.*

Эта гипотеза ниже будет доказана в некоторых важных случаях. Опыт исследования конкретных примеров интегрируемых систем показывает, что как правило, различные 4-мерные особенности действительно имеют различные круговые молекулы, даже если условие невырожденности нарушается. Таким образом, круговая молекула — хороший инвариант, позволяющий эффективно различать типы особенностей.

Как мы увидим ниже, круговые молекулы полезны при вычислении инвариантов интегрируемых систем на произвольных изоэнергетических поверхностях.

9.3. Случай центр-центр

Пусть x — особая точка типа центр-центр в 4-многообразии M , L — проходящий через нее особый слой, и $U(L)$ — его 4-мерная окрестность в M .

Теорема 9.1. *Существует ровно одна, с точностью до лиувиллевой эквивалентности, особенность типа центр-центр. Ее структура такова.*

- а) Особый слой L совпадает с самой точкой x .
- б) Окрестность $U(L)$ является 4-мерным шаром.
- в) l -тип этой особенности имеет вид (A, A) .
- г) Круговая молекула особенности имеет вид $A \text{---} A$, причем метка $\tau = 0$. См. рис. 9.6.
- д) Канонический вид этой особенности задается парой коммутирующих функций $H = \alpha(p_1^2 + q_1^2) + \beta(p_2^2 + q_2^2)$, и $f = p_2^2 + q_2^2$, где постоянные α и β отличны от нуля.

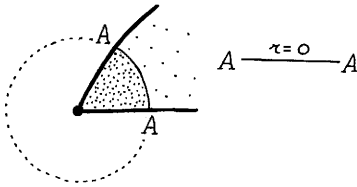


Рис. 9.6

КОММЕНТАРИЙ. Этот случай является самым простым, и здесь можно доказать более сильное утверждение. А именно, что все особенности типа центр-центр симплектоморфны. Причем, это верно для произвольной размерности. Этот факт можно найти, например, в работе Элиассона [281]. Более того, в данном случае в окрестности точки центр-центр действие группы \mathbb{R}^2 «факторизуется» до гамильтонова дей-

ствия тора T^2 . Этот случай, — когда тор гамильтонова действует на симплектическом многообразии, — полностью исследован и изложен, например, в книге М. Audin [236].

Доказательство.

Доказательство сразу следует из локальной теоремы классификации невырожденных особых точек. См. теорему 1.5 главы 1. Согласно этой теореме, существует симплектическая система координат p_1, q_1, p_2, q_2 такая, что $H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$ и $f = (p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$. Причем замена

$$(H, f) \rightarrow (\tilde{H}, \tilde{f}) = (p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$$

является гладкой и регулярной.

Отсюда следует, что особый слой $L = \{H = 0, f = 0\}$ совпадает с невырожденной особой точкой $x = (0, 0, 0, 0)$, а его окрестность $U(L)$ является четырехмерным шаром, причем мы можем без ограничения общности считать, что координаты p_1, q_1, p_2, q_2 действуют на всей этой окрестности. Отсюда следует, что любые две особенности типа центр-центр лиувиллево эквивалентны. Поскольку любая особенность типа центр-центр изоморфна особенности, у которой слоение Лиувилля задается каноническими функциями (\tilde{H}, \tilde{f}) .

Ограничивая функцию H на поверхности $P_1 = \{p_2 = 0, q_2 = 0\}$, $P_2 = \{p_1 = 0, q_1 = 0\}$, получаем очевидно функции, зависящие только от $p_1^2 + q_1^2$ и $p_2^2 + q_2^2$ соответственно. Таким функциям отвечают особенности, описываемые атомом A . Поэтому l -тип особенности центр-центр имеет вид (A, A) .

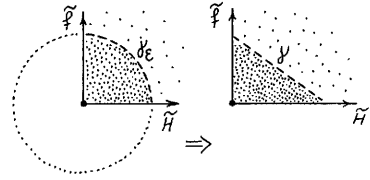


Рис. 9.7

Поскольку замена $(H, f) \rightarrow (p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$ регулярна, то вместо функций H и f при изучении структуры особенности мы можем рассмотреть функции $\tilde{H} = p_1^2 + q_1^2$ и $f = p_2^2 + q_2^2$. Напомним, что круговая молекула описывает структуру лиувиллева слоения на трехмерном многообразии $\mathcal{F}^{-1}(\gamma_\epsilon)$, где γ_ϵ — окружность радиуса ϵ с центром в точке $\mathcal{F}(x)$. В данном случае вместо окружности удобнее взять отрезок τ_ϵ , задаваемый на плоскости уравнением $\tilde{H} + f = \epsilon$ (рис. 9.7). Отметим, что дуга окружности γ_ϵ , попавшая в образ отображения момента, может быть гладко продеформирована в отрезок τ_ϵ в классе допустимых кривых. См. определение допустимости выше. Поэтому структура слоения Лиувилля на прообразе дуги окружности и на прообразе отрезка τ_ϵ — одна и та же. Таким образом, нужно описать структуру слоения на 3-сфере $p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2 = \epsilon$, задаваемого на этой сфере функцией $f = p_2^2 + q_2^2$. Слоение, порождаемое ею на 3-сфере, хорошо известно и задается молекулой A — A с меткой $r = 0$ (см. предложение 4.3 главы 4). Теорема доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Стоит отметить, что особенность типа центр-центр имеет вид прямого произведения атома A на атом A . См. рис. 9.8. Как мы увидим далее, аналог этого обстоятельства справедлив для любых невырожденных особенностей. В более сложных случаях, вроде седло-седло, особенность будет иметь вид «почти прямого» произведения, то есть фактора прямого произведения двух атомов по свободному действию некоторой конечной группы.

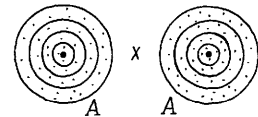


Рис. 9.8

ЗАМЕЧАНИЕ. В конкретных примерах механических систем особенности вида центр-центр в точности отвечают устойчивым невырожденным положениям равновесия. Они встречаются практически во всех интегрируемых системах.

9.4. Случай центр-седло

Пусть x — особая точка типа центр-седло в 4-многообразии M , L — проходящий через нее особый слой и $U(L)$ — его 4-мерная окрестность в M .

Приведем пример особенности типа центр-седло. Рассмотрим произвольный седловой атом $V = (P, K)$ и один атом A . Эти 2-атома являются двумерными поверхностями с симплектической структурой, причем на каждом из них задана функция f_1 и f_2 (соответственно), определяющая на соответствующей поверхности структуру атома, т.е. одномерное слоение Лиувилля с единственным особым слоем. Рассмотрим прямое произведение $A \times V$ и определим на нем симплектическую структуру как сумму исходных симплектических структур на A и V . См. рис. 9.9. Функции f_1 и f_2 естественным образом поднимаются

на это прямое произведение и коммутируют относительно указанной симплектической структуры. Поэтому они определяют слоение Лиувилля. Легко видеть, что оно имеет ровно одну особенность типа центр-седло, причем прямое произведение $A \times V$ является регулярной окрестностью одномерного особого слоя L . Особой слой L — это в точности граф K атома V . Точки типа центр-седло — это в точности вершины атома V . В дальнейшем будем обозначать такую каноническую особенность через $A \times V$.

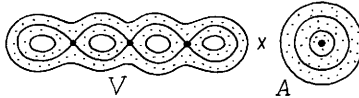


Рис. 9.9

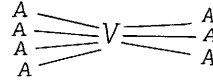


Рис. 9.10

Теорема 9.2. Любая особенность типа центр-седло лиувиллево эквивалентна канонической особенности вида $A \times V$ для некоторого подходящего седлового атома $V = (P, K)$. При этом справедливы также следующие утверждения.

- а) Особый слой L совпадает с графом K атома V .
- б) Окрестность $U(L)$ является прямым произведением двумерного диска на двумерную поверхность P .
- в) l -тип этой особенности имеет вид (sA, V) , где s — это число вершин графа K . Через sA здесь обозначено несвязное объединение s экземпляров атома A .
- г) Круговая молекула особенности центр-седло имеет вид, показанный на рис. 9.10, причем r -метки на всех ребрах равны бесконечности. На всех входящих ребрах атома V , — например, на левых на рис. 9.10, — метка ε одна и та же, и путем выбора ориентации может быть сделана равной $+1$. Тогда на всех исходящих ребрах ребра атома V , — справа на рис. 9.10, — метка одна и та же и равна -1 .
- д) Изоэнергетическая 3-поверхность Q , отвечающая круговой молекуле особенности центр-седло, является связной суммой $s + 1$ экземпляров 3-многообразий $S^1 \times S^2$, т. е.

$$Q = (S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2) \quad (s + 1 \text{ раз}).$$

Доказательство.

Выше было доказано, что все особые точки на связном особом слое L всегда имеют один и тот же тип. Пусть s — число особых точек на слое L . Все они имеют тип центр-седло. Рассмотрим любую из них. В ее окрестности всегда можно выбрать локальную регулярную систему координат p_1, q_1, p_2, q_2 , относительно которой слоение Лиувилля задается парой коммутирующих функций $p_1^2 + q_1^2$ и $p_2 q_2$. Следовательно, особый слой в окрестности каждой особой точки выглядит как одномерный крест, т. е. как два трансверсально пересекающихся отрезка.

Следовательно, весь особый слой L получается склейкой таких «крестов», т. е. является некоторым графом с s вершинами, каждая из которых имеет кратность 4. Обозначим его через K . Сейчас мы увидим, что он естественным образом вкладывается в некоторый 2-атом V .

Действительно, как мы показали выше, множество особых точек отображения момента, попавших в окрестность $U(L)$, представляет собой две трансверсально пересекающиеся поверхности. Поскольку мы рассматриваем сейчас особенность типа седло-центр, то одна из этих поверхностей P_1 представляет собой несвязное объединение s экземпляров атома типа A , а другая P_2 имеет структуру седлового атома $V = (P_2, K_2)$. Легко видеть, что особый слой L целиком состоит из критических точек, поэтому он целиком лежит в поверхности P_2 . Кроме того, $H(L) = \text{const}$, поэтому L — это не что иное как граф K_2 .

Идея дальнейшего доказательства довольно естественна. Мы разрежем окрестность $U(L)$ на некоторые стандартные куски, каждый из которых представляет собой регулярную окрестность особой точки типа седло-центр. Структура слоения Лиувилля в каждой из таких точек нам уже хорошо известна: согласно теореме 1.5 главы 1 оно представляет собой прямое произведение расслоенного диска и расслоенного креста (рис. 9.12). Затем мы покажем, что при сделанных выше ограничениях обратная склейка окрестности $U(L)$ из стандартных кусков проводится однозначно с точностью до по-слойной изотопии. В результате из локальных «прямых произведений» мы получим «глобальное прямое произведение», что и требуется. Эта же идея будет использована нами и в других случаях.

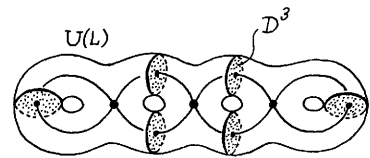


Рис. 9.11

Отметим середины всех ребер графа K , т. е. слоя L , вложенного в 4-многообразии $U(L)$. Напомним, что $U(L)$ является окрестностью особого слоя $L = K$. См. рис. 9.11. В середине каждого ребра рассмотрим трехмерный диск, трансверсальный ребру графа $L = K$. Разрежем теперь 4-многообразие $U(L)$ по всем этим трехмерным шарам. Многообразие распадется в объединение 4-мерных блоков, каждый из них, очевидно, является регулярной окрестностью особой точки графа L и имеет поэтому структуру указанного выше прямого произведения.

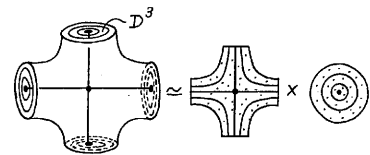


Рис. 9.12

Займемся теперь обратной склейкой. Начнем с того, что «улучшим» функции H и f в окрестности особого слоя L . Сделаем регулярную замену

$$\tilde{H} = \tilde{H}(H, f) \text{ и } \tilde{f} = \tilde{f}(H, f)$$

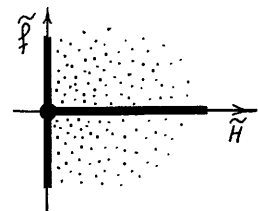


Рис. 9.13

такую, чтобы бифуркационная диаграмма в окрестности точки $\mathcal{F}(x)$ «выпрямилась», то есть приняла вид, показанный на рис. 9.13: прямолинейный отрезок

ортогонально втыкается в середину другого отрезка. В результате две поверхности P_1 и P_2 в M^4 стали критическими невырожденными подмногообразиями для двух новых функций \tilde{f} , \tilde{H} . Более точно, двумерная поверхность P_1 — критическая для \tilde{f} , а P_2 — критическая для \tilde{H} . При этом, P_1 — критическое подмногообразие индекса $\lambda = 1$, то есть седловое. А P_2 — это критическое подмногообразие индекса $\lambda = 0$, т.е. отвечающее минимуму. Мы оказались в ситуации обобщенной леммы Морса–Ботта (см. предложение 1.16 главы 1). Применим эту лемму. Тогда в некоторой окрестности 2-многообразия P_2 существуют две гладкие независимые, всюду на окрестности, функции x_1, y_1 , что $\tilde{H} = x_1^2 + y_1^2$. Аналогично, в некоторой окрестности поверхности P_1 , являющейся несвязным объединением s экземпляров 2-дисков, т.е. атомов A , также существуют две гладкие независимые функции x_2, y_2 такие, что $\tilde{f} = x_2 y_2$. На самом деле пока что эта пара функций x_2, y_2 определена не на всем элементарном 4-блоке, а лишь на его части, являющейся прямым произведением атома A на малую окрестность центра двумерного креста. Нам же нужно продолжить эту пару функций с этой окрестности на весь крест. Это, очевидно, можно сделать, не теряя их независимости и так, чтобы по-прежнему $\tilde{f} = x_2 y_2$. В результате мы получаем четверку функций x_1, y_1, x_2, y_2 на всем элементарном 4-блоке. Они являются на нем регулярными гладкими координатами, — не обязательно, впрочем, симплектическими, — относительно которых

$$\tilde{H} = x_1^2 + y_1^2 \quad \text{и} \quad \tilde{f} = x_2 y_2.$$

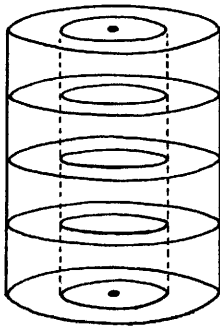


Рис. 9.14

Итак, на каждом 4-блоке определена структура 2-слоения, показанная на рис. 9.12. При склейке границ 4-блоков мы должны «хорошо» склеить 1-слои каждого «заполненного цилиндра» вида $I \times D^2$. Каждый такой 3-цилиндр расслоен на концентрические окружности, центры которых расположены на его оси — отрезке I . См. рис. 9.14. Эти окружности являются следами слоев слоения Лиувилля на границе 4-блока. На границе блока они задаются уравнениями: $H = \text{const}$ и $f = \text{const}$. Следовательно, для каждой такой окружности на границе одного 4-блока мы всегда можем найти ровно одну соответствующую окружность на границе соседнего блока, а именно, взяв окружность с точно такими же значениями функций \tilde{H} и \tilde{f} . См. рис. 9.14.

Склеиваем эти окружности. Ясно, что тем самым мы однозначно задаем, с точностью до послышной изотопии, диффеоморфизм склейки двух «краевых» 3-цилиндров $I \times D^2$. Осталось заметить, что функции \tilde{H} и \tilde{f} заданы глобально на всем 4-многообразии $U(L)$, что дает нам возможность производить все склейки по стандартному и однозначно определенному правилу. Ясно, что в результате на $U(L)$ естественно возникает структура прямого произведения двух атомов A и V .

Пункты (а), (б), (в) теоремы немедленно следуют из этого утверждения.

Перейдем к вычислению круговой молекулы. На рис. 9.15 показана дуга γ_ϵ , прообразом которой является 3-многообразие Q_ϵ . Точке y_2 отвечает седловая бифуркация. Поскольку особенность x имеет тип прямого произведения $A \times V$, то ясно, что эта бифуркация отвечает атому V . Аналогично, точкам y_1 и y_3 отвечают бифуркации-атомы A . Поэтому молекула, пока без меток, очевидно имеет требуемый вид, показанный на рис. 9.10. Осталось найти метки.

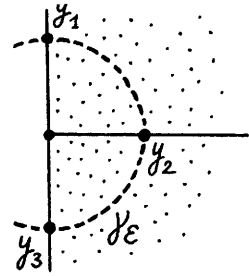


Рис. 9.15

Рассмотрим точку на произвольном ребре молекулы и отвечающий ей тор Лиувилля. На это торе возьмем два цикла. Первый — тот, который сжимается в точку при подходе к точке y_1 .

Второй цикл — это тот, который превращается в седловую критическую окружность при подходе к точке y_2 . Очевидно, что это — *один и тот же цикл*. Этот цикл показан на рис. 9.9 как одна из окружностей, на которые расслоен атом A . В смысле имеющейся структуры прямого произведения этот цикл представляет собой неособый слой атома A , умноженный на вершину атома V . Как мы знаем из главы 4, это означает, что соответствующая r -метка равна бесконечности. Следовательно, на всех ребрах молекулы нужно поставить r -метки, равные бесконечности.

Вычислим метки типа ϵ . Они стоят на ребрах молекулы и определяются взаимными ориентациями циклов. Рассмотрим исходный гамильтониан H на $U(L)$. Поверхности P_1 и P_2 инвариантны относительно гамильтонова потока $\text{sgrad } H$ и, следовательно, этот поток задает естественную ориентацию на всех критических окружностях. Рассмотрим произвольный тор Лиувилля. Его можно естественным образом отождествить с произведением двух критических окружностей, одна из которых лежит на поверхности P_1 , а вторая на поверхности P_2 .

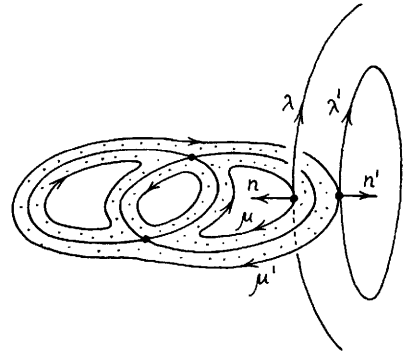


Рис. 9.16

Поскольку обе эти окружности ориентированы потоком, то на торе возникает естественная ориентация. С другой стороны, на этом же торе, — как на торе из лиувиллева слоения на Q_ϵ , — есть еще одна ориентация. В нашем случае тор Лиувилля ограничивает полноторие, поэтому может рассматриваться как граничный тор 3-атома A . Ориентация полнотория, индуцированная фиксированной ориентацией на Q_ϵ при помощи внутренней нормали к границе полнотория, задает некоторую ориентацию на граничном торе. Сравним две возникшие ориентации на одном и том же торе. Если они совпадают, то метка ϵ равна $+1$. Если противоположны, то $\epsilon = -1$.

В нашем случае эти ориентации показаны на рис. 9.16. На двух изображенных торах видно, что ориентации троек (n, λ, μ) и (n', λ', μ') различны. Следовательно, ϵ -метки, стоящие на ребрах, отвечающих этим торах Лиувилля, имеют

разные знаки. На этом рисунке взяты торы из разных семейств по отношению к атому V . Как видно из того же рисунка, — на торах, отвечающих ребрам одного типа, либо справа, либо слева от атома, метка ϵ — одна и та же. Дело в том, что ориентации указанных троек совпадают.

Осталось вычислить топологию 3-многообразия Q_ϵ . Но это уже было сделано выше в предложении 4.5 главы 4. Теорема доказана. ■

9.5. Случай седло-седло

9.5.1. Структура особого слоя

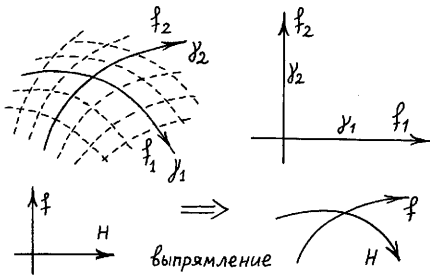


Рис. 9.17

Пусть L — особый слой типа седло-седло и $y = \mathcal{F}(L)$ — особая точка бифуркационной диаграммы, соответствующая данному особому слою отображения момента \mathcal{F} . Согласно сделанным выше предположениям, окрестность точки y_0 на бифуркационной диаграмме Σ имеет вид двух трансверсально пересекающихся гладких дуг γ_1 и γ_2 . См. рис. 9.1(с). Сделаем локальную замену координат на плоскости $\mathbb{R}^2(H, f)$ в окрестности точки y_0 , чтобы гладкие

дуги γ_1 и γ_2 превратились в прямолинейные отрезки координатных осей, пересекающиеся под прямым углом (рис. 9.17). Обозначим возникающие при этом новые локальные координаты через f_1 и f_2 . При этом кривая γ_1 задается уравнением $f_2 = 0$, а γ_2 уравнением $f_1 = 0$. Будем считать, что $\frac{\partial H}{\partial f_i} > 0$ для $i = 1, 2$. Это всегда можно сделать, поменяв, если нужно, знак функции f_i . Функции f_1 и f_2 можно, очевидно, рассматривать как новые интегралы исходной гамильтоновой системы, вместо исходных интегралов H и f .

Предложение 9.2. Пусть s — число особых точек z_1, \dots, z_s типа седло-седло на особом слое L . Тогда L является двумерным клеточным комплексом, склеенным из $4s$ квадратов. Внутренности этих квадратов являются двумерными орбитами пуассонова действия группы $\mathbb{R}^2(H, f)$.

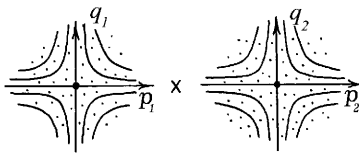


Рис. 9.18

Стороны квадратов (без вершин) являются одномерными невырожденными незамкнутыми орбитами действия группы $\mathbb{R}^2(H, f)$, а вершины квадратов являются особыми точками z_1, \dots, z_s , т.е. нульмерными орбитами.

Стороны каждого квадрата лежат в подмногообразиях $P_1 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_1) \cap K$ и $P_2 = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_2) \cap K$,

причем противоположные стороны квадрата лежат в одном и том же подмногообразии, а смежные — в разных.

Доказательство.

Изучим сначала структуру комплекса L в окрестности каждой особой точки z_i . Согласно теореме 1.5 из главы 1, существует локальная система координат p_1, p_2, q_1, q_2 в окрестности точки z_i такая, что структура слоения Лиувилля задается совместными поверхностями уровня функций p_1q_1 и p_2q_2 . Это означает, что локально структура слоения Лиувилля имеет вид прямого произведения двух элементарных одномерных гиперболических слоений на плоскости. Другими словами, нужно перемножить два двумерных расслоенных седла, показанных на рис. 9.18. В частности, особый слой L в окрестности точки z_i имеет локально вид $\gamma \times \gamma$, где γ — это одномерный крест, т. е. два трансверсально пересекающихся интервала.

Ясно, что все точки z_1, \dots, z_s являются нульмерными орбитами действия \mathbb{R}^2 , причем согласно нашим предположениям на L никаких других нульмерных орбит нет.

Изучим теперь одномерные орбиты действия \mathbb{R}^2 на особом слое L . Все они, по определению, лежат в множестве K особых точек \mathcal{F} . С другой стороны, в окрестности особого слоя L множество особых точек отображения \mathcal{F} является объединением P_1 и P_2 . Следовательно, все одномерные орбиты действия \mathbb{R}^2 в окрестности L лежат либо в P_1 , либо в P_2 . Более того, ясно, что одномерные орбиты действия \mathbb{R}^2 , попавшие в L , — это в точности ребра графов K_1 и K_2 , являющихся остовами атомов V_1 и V_2 , задающихся ограничением гамильтониана H на каждую из поверхностей P_1 и P_2 (рис. 9.19). В частности, все одномерные орбиты, лежащие на особом слое, незамкнуты и невырождены, их общее число равно $4s$. А именно, по $2s$ штук на каждом из графов K_i . Каждая такая орбита имеет гиперболический тип, поэтому для любой ее внутренней точки x особенность комплекса L в малой окрестности $U(x)$ имеет тип четверной линии (рис. 9.20), т. е. локально комплекс L гомеоморфен прямому произведению $\gamma \times D^1$.

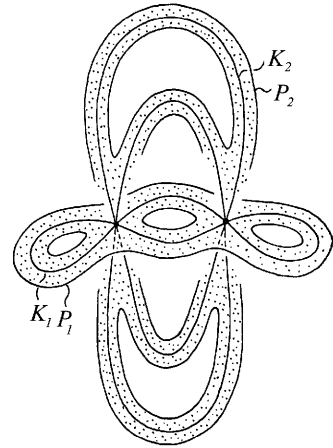


Рис. 9.19

Как ведут себя поля $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } f_1$ и $\text{sgrad } f_2$ на одномерных орбитах?

Поток $\text{sgrad } f_1$ течет и нетривиален вдоль 1-орбит, попавших в P_1 . При этом он обращается в нуль на 1-орбитах, оказавшихся в P_2 . Другими словами, поток $\text{sgrad } f_1$ течет по ребрам графа K_1 и неподвижен на ребрах графа K_2 .

Поле $\text{sgrad } f_2$ ведет себя аналогично: он течет по ребрам графа K_2 и неподвижен на ребрах графа K_1 .

Поток $\text{sgrad } H$ нетривиален на всех одномерных орбитах, как в P_1 , так и в P_2 . Причем, он течет в том же направлении, что и потоки $\text{sgrad } f_1$ и $\text{sgrad } f_2$ на соответствующих ребрах. Это следует из условия, что $\frac{\partial H}{\partial f_i} > 0$ для $i = 1, 2$, наложенного нами выше.

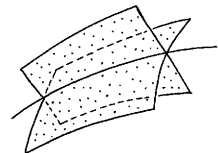


Рис. 9.20

Переходя к двумерным орбитам G действия \mathbb{R}^2 , отметим общий факт: точки, лежащие в замыкании двумерной орбиты, но ей не принадлежащие, обязательно содержатся либо в одномерных, либо в нульмерных орбитах действия. Другими словами, $\overline{G} \setminus G \subset (K_1 \cup K_2)$.

Пусть теперь G — двумерная орбита пуассонова действия $\mathbb{R}^2(H, f)$, принадлежащая особому слою L и содержащая в своем замыкании точку z_1 . Известно, что двумерная орбита пуассонова действия диффеоморфна либо тору, либо цилиндру, либо плоскости. Как мы уже видели выше, тор и цилиндр исключаются, поэтому орбита G диффеоморфна плоскости. Рассмотрим ее замыкание \overline{G} . Посмотрим, как она подходит к своим граничным точкам, лежащим в $K_1 \cup K_2$.

К нульмерным орбитам, т.е. к вершинам z_1, \dots, z_s графа $K_1 \cup K_2$ она каждый раз подходит одинаковым образом. Как мы уже видели выше, в окрестности точки z_i особый слой L локально представляет собой прямое произведение $\gamma \times \gamma$. Оно, очевидно, допускает естественную стратификацию на нульмерные, одномерные и двумерные страты.

Легко видеть, что здесь имеется 16 двумерных стратов, каждый из которых является частью двумерной орбиты, попавшей в окрестность особой точки z_i . С другой стороны, очевидно, что замыкание каждого страта представляет собой гладкое погружение «прямого угла» в M^4 . Таким образом, орбита G вблизи особой точки z_i выглядит как обычный угол с вершиной z_i , стороны которого являются ребрами двух разных графов K_1 и K_2 . Отметим, что орбита может несколько раз возвращается к одной и той же особой точке, поэтому ей может отвечать несколько различных углов.

К одномерным орбитам, т.е. к ребрам графа $K_1 \cup K_2$, двумерная орбита также каждый раз подходит «хорошо», т.е. в виде фрагмента полуплоскости — одного из четырех гладких листов, показанных на рис. 9.20. Конечно, одна и та же орбита может возвращаться к одному ребру несколько раз. На самом деле, как мы сейчас покажем, — не более двух.

Лемма 9.2. *Замыкание каждой двумерной орбиты $G \subset L$ является многоугольником с четным числом сторон, гладко погруженным в M^4 .*

Доказательство.

Тот факт, что замыкание \overline{G} является погруженным многоугольником сразу следует из только что описанного поведения орбиты вблизи своих граничных точек.

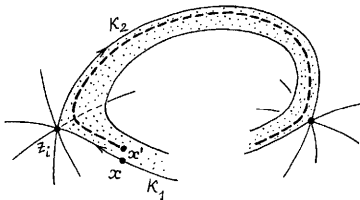


Рис. 9.21

Нужно лишь доказать четность числа его сторон. Этот факт почти очевиден. В самом деле, пусть x — точка на границе 2-орбиты G , лежащая, например, на каком-то ребре графа K_1 . Двинемся по орбите вдоль этого ребра в какую-нибудь сторону. Дойдя до ближайшей вершины графа K_1 , мы вынуждены будем повернуть здесь на какое-то другое ребро, но уже графа K_2 . Это следует из локального поведения орбиты вблизи особой точки (см. выше). Пройдя до конца это ребро графа K_2 , мы вновь повернем на какое-то ребро графа K_1 . И так далее до тех пор, пока

мы не вернемся в начальную точку. Подчеркнем, что такое движение полностью и однозначно диктуется нам орбитой G , примыкающей к графу $K_1 \cup K_2$ своей границей. Другими словами, мы последовательно движемся вдоль ребер графа $K_1 \cup K_2$, перемещаясь по орбите G вблизи ее границы (рис. 9.21). Поскольку у каждой вершины мы меняли граф, то число сторон, мимо которых мы прошли — четно. Лемма доказана. ■

Таким образом, \overline{G} можно рассматривать как погружение в M^4 многоугольника \tilde{G} с четным числом сторон. Его внутренность диффеоморфно отображается на орбиту G , а стороны переходят в некоторые ребра графа $K_1 \cup K_2$. Другими словами, орбиту G можно интерпретировать как двумерную клетку, приклеиваемую к одномерному остову $K_1 \cup K_2$ по некоторому отображению своей границы.

Лемма 9.3. *Многоугольник \tilde{G} является квадратом.*

Замечание. Это означает, что у него только четыре стороны. Ясно, что в этом случае одна пара его противоположных сторон отображается в граф K_1 , а другая — в граф K_2 . Заметим, что рассматриваемое нами погружение $\tilde{G} \rightarrow \overline{G} \subset M^4$ вложением, вообще говоря, не является. Некоторые вершины и даже стороны могут слиться между собой. Однако на внутренности квадрата \tilde{G} и на внутренности каждой стороны это погружение будет вложением.

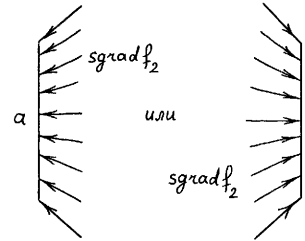


Рис. 9.22

Доказательство.

Рассмотрим два коммутирующих векторных поля $\text{sgrad } f_1$ и $\text{sgrad } f_2$ на замыкании \overline{G} орбиты G . Поскольку \overline{G} является погружением G , то оба поля можно поднять на многоугольник \tilde{G} . Число его сторон четно, причем половина сторон отображается на ребра графа K_1 , а другая половина — на ребра графа K_2 , чередуясь между собой. Пусть a — произвольная сторона многоугольника \tilde{G} , принадлежащая графу K_1 после погружения в M^4 . Рассмотрим поведение поля $\text{sgrad } f_2$ в окрестности ребра a . Ребро a является невырожденной одномерной орбитой действия группы \mathbb{R}^2 , следовательно, интегральные траектории поля $\text{sgrad } f_2$ трансверсально входят в ребро a , или выходят из него. На самом же ребре a поле $\text{sgrad } f_2$ равно нулю (рис. 9.22). Аналогичное рассуждение для потока $\text{sgrad } f_1$ верно для ребер, отвечающих графу K_2 .

Рассмотрим ребро многоугольника, на котором поле $\text{sgrad } f_1$ отлично от нуля. Тогда на двух соседних ребрах поток $\text{sgrad } f_1$ равен нулю. Картина поведения интегральных траекторий поля $\text{sgrad } f_1$ показана на рис. 9.23. В одно из этих ребер поток втекает, а из другого вытекает. В результате получается полная картина поведения потока $\text{sgrad } f_1$ в окрестности границы многоугольника, показанная на рис. 9.24.



Рис. 9.23

Заметим теперь, что $\text{sgrad } f_1$ не имеет нулей внутри многоугольника \tilde{G} . Применяя к рис. 9.24 стандартные рассуждения с индексом векторного поля, легко убеждаемся, что такая ситуация возможна лишь в случае, когда \tilde{G} является квадратом. Лемма доказана. ■

На рис. 9.25 изображена окончательная картина поведения траекторий обоих полей $\text{sgrad } f_1$ и $\text{sgrad } f_2$ на квадрате.

Подведем итог. Мы описали одномерные и двумерные клетки комплекса L . Его двумерные клетки являются квадратами, а одномерные — это ребра графов $K_1 \cup K_2$.

Лемма 9.4. Число квадратов равно $4s$, где s — число особых точек особого слоя L .

Доказательство.

Пусть k — число квадратов. Подсчитаем общее число углов всех квадратов двумя способами. С одной стороны оно, очевидно, равно $4k$. С другой стороны, в каждой особой точке z_i сходятся 16 углов, а таких разных точек s штук. Таким образом, общее число углов оказывается равным $16s$. Итак $16s = 4k$, т.е. $k = 4s$. Лемма доказана. ■

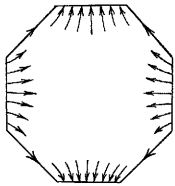


Рис. 9.24

Лемма 9.5. Особый слой L является результатом погружения в M^4 нескольких торов и бутылок Клейна.

Доказательство.

Разобьем стороны всех квадратов, участвующих в склейке L , на два класса. Первый класс — это ребра графов K_1 и K_2 , в которые потоки $\text{sgrad } f_1$ и $\text{sgrad } f_2$, соответственно, втекают. Второй класс, наоборот, — это ребра графов K_1 и K_2 , из которых потоки $\text{sgrad } f_2$ и $\text{sgrad } f_1$, соответственно, вытекают.

Выполним теперь частичную склейку квадратов, отождествляя друг с другом только ребра, принадлежащие одному классу. Отметим, что при полной склейке мы должны были бы отождествлять между собой ребра по четыре, поскольку каждое ребро комплекса L является четверной линией. Мы же разбили сейчас каждую четверку на две пары и отождествляем между собой только ребра, попавшие в одну пару.

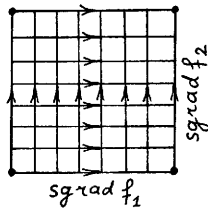


Рис. 9.25

Поскольку все ребра склеиваются теперь попарно, то мы получим некоторую замкнутую поверхность. Она разбита на квадраты, причем каждая вершина разбиения имеет, как нетрудно заметить, кратность 4. Подсчитывая эйлерову характеристику, получаем ноль. Значит, эта поверхность является несвязным объединением нескольких торов и бутылок Клейна. Продолжив склейки, получим погружение этого объединения в M^4 . Лемма доказана. ■

Как мы покажем далее, особый слой L всегда является пространством типа $K(\pi, 1)$, т.е. все его гомотопические группы, начиная со второй, равны нулю.

Оказывается топология комплекса L не определяет однозначно структуру слоения Лиувилля в своей окрестности $U(L)$. Оказывается для построения полного инварианта особенности достаточно объединить два уже построенных инварианта: комплекс L и l -тип. Этот новый инвариант будет удобен для перечисления возможных типов особенностей.

9.5.2. Cl -тип особенности

Понятие Cl -типа особенности было впервые введено А. В. Болсиновым и В. С. Матвеевым.

Напомним, что l -типом особенности седло-седло является пара атомов (V_1, V_2) , где $V_i = (P_i, K_i)$. При этом объединение графов K_1 и K_2 — это в точности одномерный остов комплекса L , а поверхности P_1 и P_2 задают множество критических точек отображения момента, попавших в окрестность особого слоя.

Определение 9.4. Cl -типом особенности типа седло-седло называется тройка (L, V_1, V_2) и пара вложений $\xi_i: K_i \rightarrow L^{(1)}$, где $i = 1, 2$, а $L^{(1)}$ — это одномерный остов L .

В этом определении мы игнорируем ориентации на атомах V_1 и V_2 .

Комментарий. Таким образом, Cl -тип является просто объединением двух объектов — l -типа, т. е. пары атомов (V_1, V_2) и двумерного комплекса L . При этом, мы должны постоянно помнить, что объединение графов K_1 и K_2 — это в точности одномерный скелет 2-комплекса L . Эту информацию мы указываем, задавая и фиксируя два отображения ξ_1 и ξ_2 (см. выше). Таким образом, члены тройки (L, V_1, V_2) не являются независимыми, а сцеплены общим одномерным остовом комплекса L .

Теорема 9.3 (В. С. Матвеев). Cl -тип является полным инвариантом особенности типа седло-седло в смысле лувиллевой эквивалентности. Это означает, что если две особенности седло-седло имеют одинаковый Cl -тип, то существуют инвариантные окрестности $U(L)$ и $U'(L')$ особых слоев L и L' и послыйный диффеоморфизм $U(L) \rightarrow U'(L')$, сохраняющий направление гамильтонова векторного поля на одномерных орбитах.

Доказательство будет дано ниже.

Эта важная теорема позволяет классифицировать и перечислять особенности типа седло-седло в порядке возрастания их сложности. При этом, под сложностью особенности седло-седло мы понимаем число s особых точек z_1, \dots, z_s на особом слое L . Эта программа классификации будет также реализована ниже. Мы перечислим все особенности седло-седло сложности 1 и 2. Их оказалось, соответственно, 4 и 39.

Чтобы перейти к классификации особенностей, нам требуется описать некоторые свойства Cl -типа. Дело в том, что не любая тройка (L, V_1, V_2) , заданная абстрактно, является допустимой, т. е. может быть реализована как Cl -тип некоторой особенности.

Пусть нам дана некоторая абстрактная тройка (L, V_1, V_2) , где L — двумерный клеточный комплекс, $V_i = (P_i, K_i)$ — атомы одинаковой сложности s , т. е. с одинаковым числом вершин, равным s . Причем определены вложения $\xi_i: K_i \rightarrow L^{(1)}$, где $i = 1, 2$, а $L^{(1)}$ — это одномерный остов L .

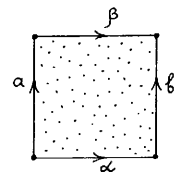


Рис. 9.26

Определение 9.5. Абстрактная тройка (L, V_1, V_2) с парой вложений ξ_1 и ξ_2 называется *допустимым Cl -типом*, если выполнены следующие условия:

- 1) Все ребра одномерного остова L можно разбить на два непересекающихся класса так, что множество ребер одного класса — это образ ребер графа K_1 , а множество ребер второго класса — это образ ребер графа K_2 . В частности, $L^{(1)} = \xi_1(K_1) \cap \xi_2(K_2)$. Ребра первого класса назовем K_1 -ребрами и будем обозначать латинскими буквами, а ребра второго класса назовем K_2 -ребрами и будем обозначать греческими буквами.
- 2) Комплекс L склеен из $4s$ квадратов.
- 3) Противоположные стороны квадратов принадлежат одному классу ребер и имеют одинаковую ориентацию. Смежные ребра принадлежат разным классам (рис. 9.26).
- 4) Каждое ребро комплекса L является четверной линией (рис. 9.20). Это означает, что к нему примыкают ровно 4 квадрата с учетом кратности, т. е. один и тот же квадрат может примыкать к этому ребру двумя своими противоположными сторонами (рис. 9.27). Рассыпав комплекс на квадраты, мы увидим, что каждая буква встречается на ребрах квадратов по 4 раза.
- 5) Все углы у всех квадратов разные, т. е. буквенные метки и ориентации на сторонах разных углов — различны, т. е. не могут быть совмещены.
- 6) Рассмотрим фрагмент комплекса L , состоящий из двух квадратов, склеенных по стороне a (рис. 9.28). Ребра снабжены ориентациями, как показано на рис. 9.28. Пару ребер α, β можно рассмотреть как базис на атоме V_2 в начальной точке ребра a (рис. 9.29). Пара ребер γ, δ образуют базис на том же атоме V_2 , но — в конечной точке ребра a . Требуется, чтобы эти базисы определяли одинаковую ориентацию атома V_2 .

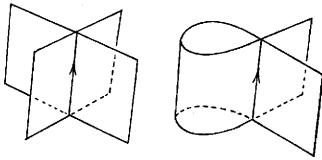


Рис. 9.27

Чтобы прояснить это определение, переформулируем его несколько в других терминах.

Возьмем некоторый l -тип, т. е. просто пару атомов (V_1, V_2) . При этом, на их поверхностях P_1 и P_2 задана и фиксирована ориентация, а также задана ориентация ребер графов K_1 и K_2 , согласованная со структурой атома. Имеется лишь два способа согласованно ориентировать ребра K_i на

атоме V_i , а именно, если интерпретировать K_i как особую линию уровня функции f_i , ориентацию следует взять либо по направлению потока $\text{sgrad } f_i$, либо по направлению потока $-\text{sgrad } f_i$. Ребра графа K_1 пометим латинскими буквами, а графа K_2 — греческими.

Фиксировав (V_1, V_2) , опишем допустимые комплексы L , которые можно приклеить к этим атомам. Комплекс L зададим как набор квадратов с ориентированными и мечеными сторонами. Предварительно зададим некоторую биекцию между вершинами атома V_1 и вершинами атома V_2 . Напомним, что их поверхности P_1 и P_2 пересекаются в многообразии M^4 как раз по вершинам атомов V_1 и V_2

(рис. 9.19). Это и задает взаимно-однозначное соответствие между вершинами данных атомов. Должны выполняться следующие условия:

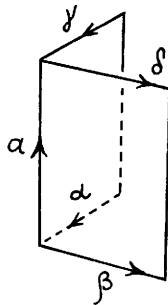


Рис. 9.28

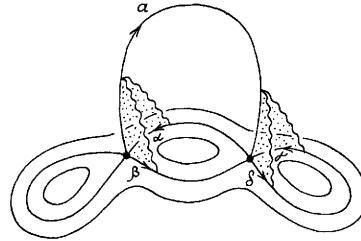


Рис. 9.29

А) Граница каждого квадрата должна изображаться замкнутым путем в объединении графов $K_1 \cup K_2$. Иначе квадрат нельзя будет приклеить к одномерному остову.

В) Противоположные стороны квадратов имеют одинаковую ориентацию и принадлежат одному классу, т. е. являются либо K_1 -, либо K_2 -ребрами. Смежные стороны принадлежат разным классам.

С) Комплекс L в окрестности своей каждой вершины, т. е. где пересекаются два атома, устроен как прямое произведение «крест на крест». Каждый такой крест можно интерпретировать как четверки ребер, инцидентных данной вершине в графах K_1 и K_2 . Это сразу дает нам список углов всех квадратов, сходящихся в данной вершине. В частности, в каждой вершине сходятся 16 углов и все они различны. Пример показан на рис. 9.30.

Д) Условие согласованности ориентаций. Два ребра графа K_i , одно из которых входит, а второе выходит из некоторой его вершины, задают некоторую ориентацию на поверхности P_i . Каждое ребро a (рис. 9.29), выйдя из некоторой вершины S , приходит в некоторую другую вершину S' . Вдоль ребра a скользит одномерный крест, замечая при этом двумерный комплекс (рис. 9.20 и рис. 9.31). В начале ребра крест задает некоторую ориентацию на поверхности P_i , поскольку можно фиксировать порядок концов креста. В конце ребра a , вернувшись на ту же поверхность P_i , он тоже задает некоторую его ориентацию (рис. 9.31). Требуется, чтобы эти ориентации совпали.

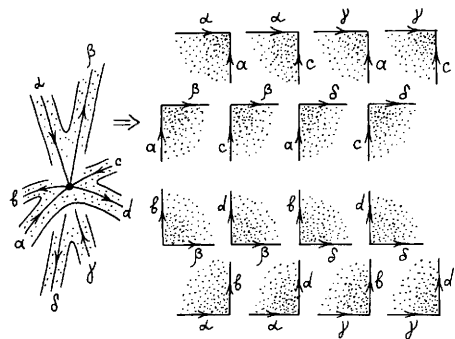


Рис. 9.30

Можно предложить еще одну интерпретацию описанных правил склейки. Комплекс L должен получаться так.

(*) Он склеен из квадратов.

(**) К каждому ребру примыкают 4 квадрата с учетом кратности.

(***) Фрагмент комплекса L , являющийся окрестностью ребра a , имеет вид одной и двух «деталей», показанных на рис. 9.32. Вторая получается из первой просто циклической перестановкой меток ребер на втором ее конце. Это — поворот на 180° .

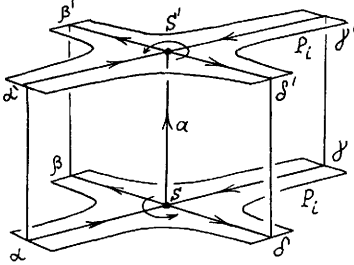


Рис. 9.31

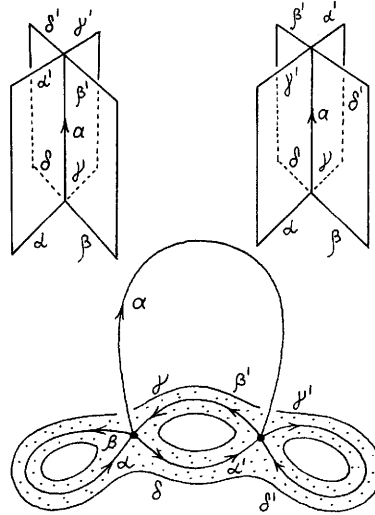


Рис. 9.32

Теорема 9.4 (Теорема реализации. В. С. Матвеев). *Допустимые CI -типы и только они реализуются как CI -типы особенностей типа седло-седло.*

Следовательно, набор описанных выше допустимых CI -типов дает полный список всех особенностей типа седло-седло, с точностью до эквивалентности.

Доказательство будет дано ниже.

9.5.3. Список особенностей типа седло-седло малой сложности

В этом параграфе мы перечислим все особенности типа седло-седло сложности 1 и сложности 2. Идея перечисления такова. Сначала опишем все l -типы сложности 1 и сложности 2, а затем для каждого фиксированного l -типа перечислим все отвечающие ему комплексы L , пользуясь свойствами (*), (**), (***) (см. выше).

В случае сложности 1 имеется только один l -тип, а именно (B, B) . Дело в том, что существует лишь один седловой атом сложности 1, и это — атом B .

Перейдем к перечислению CI -типов сложности 1. Квадраты, из которых склеен комплекс L , — т. е. особый слой, — имеют ориентированные стороны, помеченные латинскими и греческими буквами. Как обычно, обходя границу квадрата, запишем слово, перечисляя последовательно встречающиеся буквы на

сторонах квадрата. При этом каждую букву мы снабжаем степенью ε , где числа $\varepsilon_i = \pm 1$ и указывают ориентацию сторон при обходе по границе квадрата.

Теорема 9.5 (Л. М. Лерман и Я. Л. Уманский). Пусть особый слой L -типа седло-седло содержит ровно одну особую точку, т. е. имеет сложность 1. Тогда комплекс L гомеоморфен одному из следующих четырех комплексов (рис. 9.33):

- 1) $a\alpha a^{-1}\alpha^{-1}$, $b\alpha b^{-1}\alpha^{-1}$, $b\beta b^{-1}\beta^{-1}$, $a\beta a^{-1}\beta^{-1}$.
- 2) $a\alpha b^{-1}\alpha^{-1}$, $b\alpha a^{-1}\alpha^{-1}$, $a\beta b^{-1}\beta^{-1}$, $b\beta a^{-1}\beta^{-1}$.
- 3) $a\beta a^{-1}\alpha^{-1}$, $a\alpha a^{-1}\beta^{-1}$, $b\beta b^{-1}\beta^{-1}$, $b\alpha b^{-1}\alpha^{-1}$.
- 4) $a\alpha b^{-1}\beta^{-1}$, $a\beta b^{-1}\alpha^{-1}$, $b\alpha a^{-1}\beta^{-1}$, $b\beta a^{-1}\alpha^{-1}$.

Две особенности типа седло-седло сложности один лувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны.

Доказательство.

Сразу отметим, что все четыре указанные в теореме комплексы являются допустимыми, т. е. удовлетворяют всем требуемым свойствам (*), (**), (***). Покажем, что других допустимых комплексов нет. Рассмотрим квадраты, сходящиеся на ребре α . В силу условия (***) возможны только два случая, изображенные на рис. 9.34(a) и рис. 9.34(b).

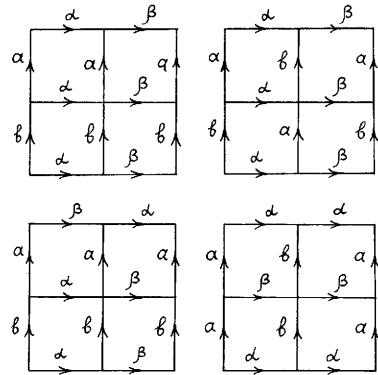


Рис. 9.33

Каждый из них далее может дать по три принципиально различных возможности. А именно, к этому ребру могут примыкать, — в обоих случаях а и б, — два, три или четыре квадрата. См., соответственно, рис. 9.34-а1, рис. 9.34-а2, рис. 9.34-а3 и рис. 34-б1, рис. 9.34-б2, рис. 9.34-б3.

В случаях а3 и б3 мы сразу получаем полное описание комплекса L . Оба этих случая являются допустимыми. Случай а3 соответствует *первому* комплексу из теоремы, а случай б3 отвечает *четвертому* комплексу.

В случаях а2 и б2 не хватает одного квадрата. Его, однако, можно однозначно указать из условия, что все углы квадратов должны быть разными. См. условие (***) для ребра β . Случай а2 соответствует *третьему* комплексу теоремы. Случай б2 не является допустимым, поскольку условие (***) нарушается для ребер a и b .

Каждый из случаев а1 и б1 дает еще по две возможности, а именно, а11, а12 и б11, б12. Дополнительные пары квадратов указаны на рис. 9.34-а11, рис. 9.34-а12, рис. 9.34-б11, рис. 9.34-б12. Случай а11 соответствует первому комплексу теоремы. Случаи а12 и б11 на самом деле эквивалентны и получают друг из друга заменой α на β . Оба они соответствуют третьему комплексу теоремы. Чтобы это увидеть, нужно в случае а12 сделать следующие переобозначения: $a \rightarrow \alpha$, $b \rightarrow \beta$, $\alpha \rightarrow b$, $\beta \rightarrow a$.

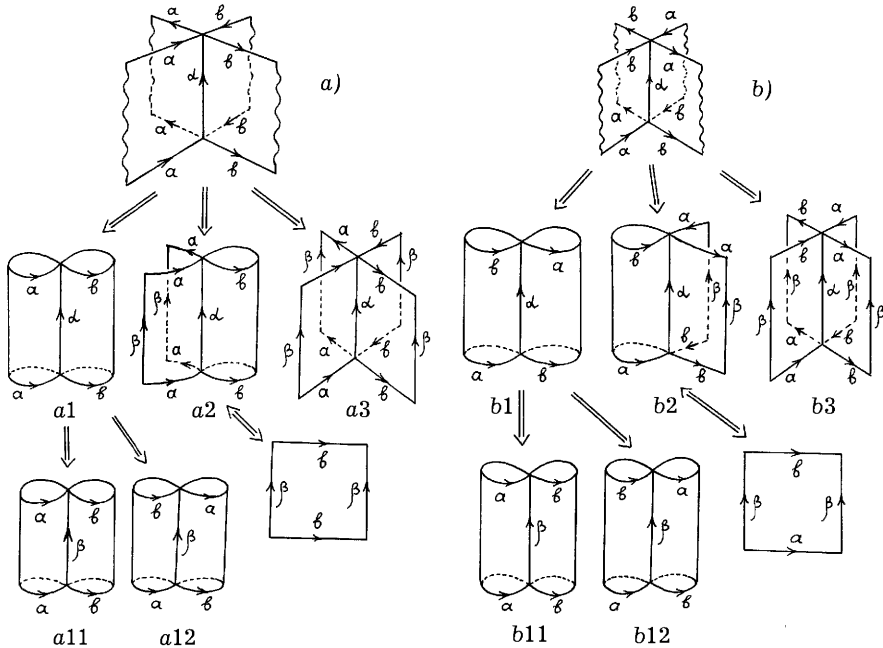


Рис. 9.34

Остался случай b12. Он соответствует *второму* комплексу теоремы. Теорема доказана. ■

Эта теорема дает полный список особенностей типа седло-седло сложности один, с точностью до лувиллевой эквивалентности.

Приведем четыре круговые молекулы, соответствующие описанным выше особенностям типа седло-седло с ровно одной особой точкой на слое L .

Теорема 9.6 (А. В. Болсинов). *Круговые молекулы особенностей типа седло-седло с ровно одной особой точкой на слое L , соответствующие случаям 1–4 из теоремы 9.5, перечислены на рис. 9.35.*

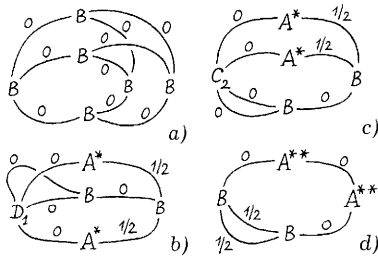


Рис. 9.35

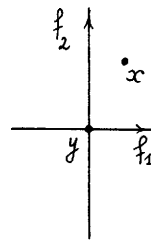


Рис. 9.36

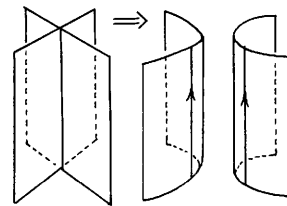


Рис. 9.37

Схема доказательства. Рассмотрим особую точку y на бифуркационной диаграмме, которой отвечает особый слой L с ровно одной особой точкой седло-седло. Около точки y бифуркационная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 9.36,

т. е. две гладкие дуги трансверсально пересекаются в точке y . Пусть x — регулярная точка, близкая к точке y . Ее полный прообраз $\mathcal{F}^{-1}(x)$ при отображении момента состоит из нескольких торов Лиувилля. При приближении точки x к точке y можно считать, что эти торы склеены из тех же самых квадратов, из которых склеен и особый слой L . Отличие состоит в том, что при построении слоя L эти квадраты склеиваются своими границами вдоль четверных ребер. То есть, на одном ребре сходятся 4 квадрата. При построении неособого слоя $\mathcal{F}^{-1}(x)$, эти же квадраты склеиваются *по два*. Другими словами, при смещении из точки y в точку x происходит распад особенности, показанный на рис. 9.37. Каждая особенность распадается двумя разными способами в зависимости от расположения точки x . Точка x может находиться в одном из четырех квадрантов, на которые дуги бифуркационной диаграммы разбивают окрестность особой точки y . Для каждого из этих квадрантов мы можем теперь явно выписать семейство торов Лиувилля. Кроме того, при переходе из квадранта в квадрант мы понимаем — как торы Лиувилля перестраиваются друг в друга. Другими словами, мы легко выявляем все бифуркации торов Лиувилля при переходе через дуги бифуркационной диаграммы. Эти бифуркации и являются атомами круговой молекулы. После этого остается для каждого из указанных выше четырех случаев провести конкретный подсчет, следуя описанной схеме. Детали мы опускаем и приводим на рис. 9.35 лишь окончательный результат.

Перейдем к классификации особенностей седло-седло сложности два. Прежде всего опишем априори возможные l -типы. Поскольку мы допускаем несвязность атома, то к списку атомов сложности два — C_1, C_2, D_1, D_2 — нужно добавить два «несвязных атома»: BB и BB' (рис. 9.38).

Поскольку особый слой L связан, то по крайней мере один из атомов, участвующих в формировании l -типа, должен быть связным. Поэтому априори существует 18 различных l -типов сложности два.

Теорема 9.7 (А. В. Болсинов). Пусть особый слой L типа седло-седло содержит ровно две особых точки. Число различных особенностей, соответствующих фиксированному l -типу указано в следующем списке:

$$\begin{array}{cccc}
 (BB, C_1) - 7, & (BB, C_2) - 7, & (BB, D_1) - 6, & (BB, D_2) - 6, \\
 (BB', C_1) - 1, & (BB', C_2) - 1, & (BB', D_1) - 0, & (BB', D_2) - 0, \\
 (C_1, C_1) - 1, & (C_1, C_2) - 2, & (C_1, D_1) - 2, & (C_1, D_2) - 0, \\
 & (C_2, C_2) - 2, & (C_2, D_1) - 2, & (C_2, D_2) - 0, \\
 & & (D_1, D_1) - 2, & (D_1, D_2) - 0, \\
 & & & (D_2, D_2) - 0.
 \end{array}$$

Таким образом, всего насчитывается ровно 39 разных особенностей. Структура отвечающих им 39 особых слоев L изображена в таблице 9.1.

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 9.5. Каждый фиксированный l -тип мы снабжаем дополнительной структурой — биекцией между вершинами графов K_1 и K_2 и ориентацией их ребер. В данном случае, в силу малой сложности и симметрий атомов эта дополнительная структура выбирается однозначно с точностью до гомеоморфизма.

Затем мы перечисляем всевозможные допустимые заклейки одномерного остова K_1 и K_2 квадратами, пользуясь условиями (*), (**), (***) .

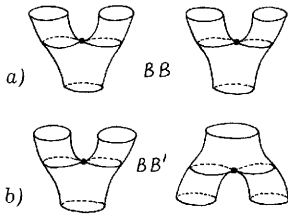


Рис. 9.38

КОММЕНТАРИЙ. Таким образом, существует 39 различных особенностей типа седло-седло сложности два. Отметим, что некоторые комплексы из этого списка гомеоморфны между собой. Мы уже обращали внимание на это обстоятельство: топология особого слоя не определяет, вообще говоря, топологию его окрестности. В данном случае особенности, имеющие одинаковые комплексы L , имеют, разумеется, различные CI -типы.

КОММЕНТАРИЙ. Аналогичным образом можно классифицировать и все особенности типа седло-седло сложности 3. Их оказалось 256. Эта классификация оказалась более громоздкой и по этой причине здесь опущена. Вычисления на компьютере были выполнены Н. А. Максимовой.

В принципе, описанная процедура дает алгоритм перечисления особенностей любой сложности. Однако их число быстро растет с ростом сложности.

Теорема 9.8 (В. С. Матвеев). *Круговые молекулы особенностей типа седло-седло с двумя особыми точками на слое L , соответствующие 39 случаям из теоремы 9.7, перечислены в таблице 9.2.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 9.6 и фактически заключается в аккуратном исследовании каждого из 39 случаев.

Следствие. *Круговая молекула для особенностей типа седло-седло сложности 1 и 2 является полным инвариантом слоения Лиувилля в окрестности этой особенности.*

Доказательство.

Достаточно заметить, что все круговые молекулы, перечисленные на рис. 9.35 и в таблице 9.2, — различны. ■

9.6. Представление четырехмерной особенности типа седло-седло как почти прямого произведения двумерных атомов

Выше мы дали полную классификацию особенностей седло-седло в терминах CI -типов. Несмотря на эффективность этого описания, оно все-таки несколько громоздко. Подойдем к их описанию с другой стороны. Попробуем представить себе — как могут они быть устроены. Простейший способ получения 4-мерной особенности типа седло-седло состоит в прямом перемножении двух двумерных особенностей, т. е. атомов. Приведем простейший пример.

Рассмотрим два атома B , т. е. две двумерные ориентируемые поверхности P_1, P_2 с функциями f_1, f_2 . Особая линия уровня функции f_1 на каждом атоме P_i — это восьмерка, т. е. простейшая седловая особенность. Зададим на P_i

симплектическую структуру и рассмотрим прямое произведение $P_1 \times P_2$ с симплектической структурой, являющейся суммой двух симплектических структур ω_1 и ω_2 . Функции f_1 и f_2 , продолженные на $P_1 \times P_2$, очевидно, коммутируют относительно этой структуры и задают слоение Лиувилля на $P_1 \times P_2$. Это слоение имеет ровно одну особенность типа седло-седло. Ее особый слой L является прямым произведением двух восьмерок. Эта особенность в теореме 9.5 указана как первая в списке.

Ясно, что таким же образом можно перемножать и любые седловые атомы V_1 и V_2 , получая при этом все новые и новые примеры 4-мерных особенностей седло-седло. Эту конструкцию можно несколько модернизировать. Приведем пример.

Рассмотрим прямое произведение $C_2 \times B$ двух атомов: C_2 и B , получим 4-мерное симплектическое многообразие, структура которого является прямой суммой симплектических структур сомножителей. Рассмотрим на атомах C_2 и B центральные симметрии, которые обозначим τ_1 и τ_2 соответственно. Ясно, что инволюция τ_1 не имеет на атоме C_2 неподвижных точек. Определим инволюцию τ на $C_2 \times B$ при помощи естественной формулы: $\tau(x, y) = (\tau_1(x), \tau_2(y))$. Очевидно, что она свободно действует на $C_2 \times B$, т.е. не имеет неподвижных точек. См. рис. 9.39. Кроме того, инволюция сохраняет симплектическую структуру на $C_2 \times B$. Поэтому можно профакторизовать $C_2 \times B$ по этому действию группы \mathbb{Z}_2 . В результате получится 4-многообразие $(C_2 \times B)/\mathbb{Z}_2$, на котором, очевидно, возникает интегрируемая система с ровно одной особенностью седло-седло. Проанализировав топологию получившегося особого слоя, мы увидим, что она имеет тип 2 из теоремы 9.5.

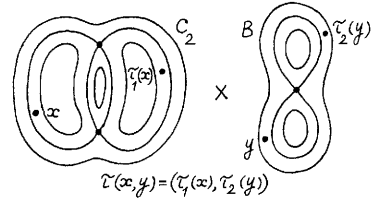


Рис. 9.39

Петрудно видеть, что особенности вида 3 и 4 из этой же теоремы 9.5, могут быть описаны в рамках такой же конструкции, а именно: прямое произведение атомов с последующей его факторизацией по свободному действию некоторой конечной группы.

Оказывается, в этом проявляется некоторый общий факт: в некотором смысле любая особенность типа седло-седло получается таким образом.

Пусть V_1 и V_2 — два седловых атома со своими симплектическими структурами и, соответственно, функциями Морса f_1 и f_2 . Пусть на каждом атоме симплектически действует одна и та же конечная группа G , причем действие сохраняет функции f_1 и f_2 . Тогда на прямом произведении $V_1 \times V_2$ определена симплектическая структура, как сумма двух структур атомов. Определена также структура лиувиллева слоения, задаваемого парой коммутирующих функций f_1, f_2 . Определено действие группы G , задаваемое формулой $\varphi(g)(x_1, x_2) = (\varphi_1(g)(x_1), \varphi_2(g)(x_2))$, где φ_i — действие G на атоме V_i . Очевидно, действие φ — симплектическое и сохраняет структуру слоения Лиувилля. Если действие φ — свободно, то можно рассмотреть фактор-многообразие $(V_1 \times V_2)/G$. Оно, очевидно, тоже симплектическое, имеет естественную структуру слоения Лиувилля, и является 4-мерной окрестностью связного особого слоя L типа седло-седло.

Определение 9.6. Описанная выше четырехмерная особенность седло-седло будет называться *особенностью типа почти прямого произведения*.

Напомним, что, как всегда, мы рассматриваем особенности, удовлетворяющие естественным условиям невырожденности, сформулированным ранее.

Теорема 9.9 (Т. З. Нгуен [344]). *Любая четырехмерная особенность $U(L)$ седло-седло имеет тип почти прямого произведения.*

Доказательство.

Фактически нужно доказать, что для каждой такой особенности существует некоторое накрытие, диффеоморфное прямому произведению двух 2-атомов, причем группа накрытия действует покомпонентно и свободно на этом прямом произведении.

Рассмотрим универсальное 4-мерное накрытие $\tilde{U} \rightarrow U(L)$ окрестности особого слоя L . Это — снова симплектическое 4-многообразие, на котором задана пара коммутирующих функций \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 . Они получаются естественным поднятием на \tilde{U} функций f_1, f_2 , заданных на 4-многообразии $U(L)$. В результате на \tilde{U} также возникает структура лиувиллева слоения. Слои его будут в действительности некомпактными, в отличие от слоения на U . Отметим, что \tilde{U} можно представить в виде 4-мерной регулярной окрестности $\tilde{U}(\tilde{L})$ особого слоя L , задаваемого уравнениями $\tilde{f}_1 = 0, \tilde{f}_2 = 0$.

Лемма 9.6.

- 1) *Универсальное 4-мерное накрытие $\tilde{U}(\tilde{L})$ любой особенности $U(L)$ типа седло-седло послойно диффеоморфно универсальному накрытию над прямым произведением $B \times B$ двух атомов B .*
- 2) *Это 4-мерное универсальное накрытие $\tilde{U}(\tilde{L})$ является прямым произведением $\tilde{B} \times \tilde{B}$ двух экземпляров универсального накрытия \tilde{B} над двумерным атомом B , показанного на рис. 9.40. Накрытие \tilde{B} над атомом B является двумерной окрестностью плоского бесконечного дерева, каждая вершина которого имеет кратность 4. Каждая ветвь дерева ветвится до бесконечности.*

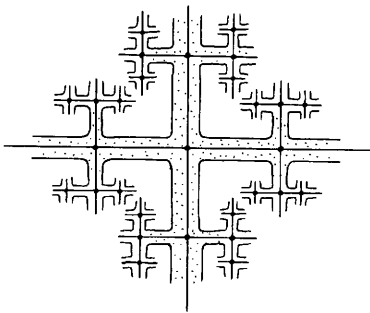


Рис. 9.40

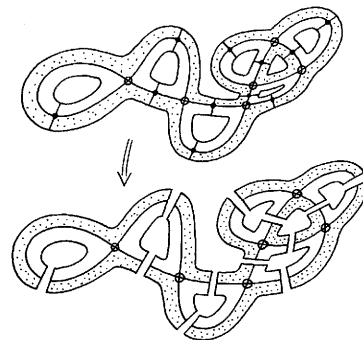


Рис. 9.41

Доказательство.

Чтобы сделать доказательство понятнее, мы начнем с двумерного случая (так сказать со случая «одной степени свободы»). Рассмотрим 2-атом V и построим над ним универсальное накрытие. Мы утверждаем, что оно для всех атомов — одно и то же с точностью до послыюного диффеоморфизма и имеет вид, изображенный на рис. 9.40. Докажем это. Разрежем атом V на двумерные кресты, как показано на рис. 9.41. Мы берем точки на серединах всех ребер и проходящие через них интегральные траектории векторного поля $\text{grad } f$. Здесь f — функция, определяющая 2-атом V .

С другой стороны, универсальное накрывающее пространство \tilde{B} , показанное на рис. 9.40, тоже очевидно представляется в виде бесконечного объединения таких же крестов. Чтобы построить искомое накрытие $\tilde{B} \rightarrow V$, возьмем какой-нибудь крест из пространства \tilde{B} и гомеоморфно отобразим его на любой из крестов атома V . При этом нужно следить за сохранением значения функции f и ориентации. При отображении креста на крест это, очевидно, всегда можно сделать. После этого продолжаем построенное отображение на соседние кресты в \tilde{B} , отображая их соответствующим образом на соседние кресты в V . Ясно, что такое продолжение всегда возможно и определено однозначно с точностью до послыюного диффеоморфизма. Поскольку \tilde{B} не содержит циклов, то продолжая этот процесс, мы получим послыюное отображение $\tilde{B} \rightarrow V$, являющееся, очевидно, искомым универсальным накрытием.

Совершенно аналогичная конструкция проходит в четырехмерном случае (и даже в многомерном). Для этого нужно в 2-комплексе L рассмотреть все составляющие его квадраты и каждый из них разрезать на 4 маленьких квадрата как показано на рис. 9.42. После этого нужно продолжить эти разрезы с 2-комплекса L на всю 4-окрестность $U(L)$ по аналогии с тем, как это мы сделали в двумерном случае. То есть нужно из каждой точки разреза на L выпустить интегральные траектории всех векторных полей вида

$$\lambda \text{grad } f_1 + \mu \text{grad } f_2$$

при всех λ и μ . Локально получится двумерная гладкая поверхность, «вырастающая» из данной точки и трансверсальная исходному квадрату. В результате возникает трехмерная поверхность разреза, являющаяся, очевидно, гладкой во всех точках, не принадлежащих одномерному остову комплекса L . Впрочем, в точках из L она тоже является гладкой, как мы увидим ниже. При этом в точках, являющихся центрами 2-квадратов, сходятся ровно 4 гладкие 3-поверхности разреза. Посмотрим, как ведет себя 3-поверхность разреза в окрестности середины ребра одномерного остова комплекса L .

На каждом ребре одномерного остова комплекса L сходятся ровно по 4 квадрата. Возьмем середину ребра одномерного остова. В эту точку P входят ровно 4 линии разреза от четырех соседних квадратов. Эти линии отмечены пунктирами

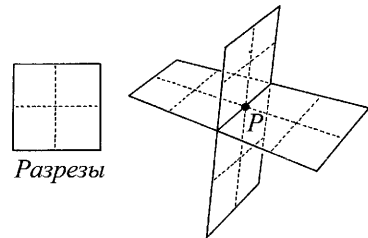


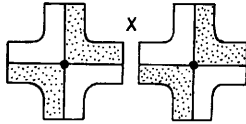
Рис. 9.42

на рис. 9.42. Локально, около точки P всегда можно выбрать такую регулярную систему координат x, y, z, t , в которой функции f_1 и f_2 запишутся либо как

$$f_1 = x^2 - y^2, \quad f_2 = z,$$

либо, наоборот, как

$$f_2 = x^2 - y^2, \quad f_1 = z.$$



Прямое произведение

Рис. 9.43

Легко видеть, что выбирая подходящим образом риманову метрику, можно добиться, чтобы 3-поверхность разреза в окрестности точки P тоже была гладкой. Например, имела бы простой вид: $t = t_0 = \text{const}$. Далее, легко видеть, что разрезая $U(L)$ вдоль этих трехмерных поверхностей, мы превратим $U(L)$ в несвязное объединение какого-то числа 4-мерных элементарных блоков, каждый из которых диффеоморфен прямому произведению «креста на крест» (рис. 9.43). Причем, на этом прямом произведении естественно определена структура 2-слоения, задаваемого функциями f_1, f_2 .

Отметим, что на каждом 4-блоке «крест на крест» на самом деле задана структура стандартного 2-слоения, *одна и та же* для всех блоков и имеющая тип прямого произведения. В самом деле, 2-многообразия P_i являются невырожденными критическими подмногообразиями для функций f_i соответственно. По обобщенной лемме Морса–Ботта, применяемой к каждому 4-блоку по отдельности, в окрестности той части 2-поверхности P_i , которая попала внутрь данного 4-блока, существуют регулярные координаты x_i, y_i , относительно которых функция f_i запишется так: $f_i = x_i y_i$. Каждую из пар функций-координат x_i, y_i можно продолжить на весь 4-блок. В результате, слои 2-слоения будут задаваться простыми уравнениями $x_1 y_1 = \text{const}$ и $x_2 y_2 = \text{const}$. Таким образом, на каждом 4-блоке возникают координаты x_1, y_1, x_2, y_2 , относительно которых исходное слоение превращается в *стандартное 2-слоение*. В этом смысле все 4-блоки «устроены совершенно одинаково».

Построим теперь 4-мерное пространство $\tilde{U}(\tilde{L})$, накрывающее 4-многообразие $U(L)$. Как мы сейчас покажем, в действительности пространство $\tilde{U}(\tilde{L})$ послойно диффеоморфно прямому произведению $\tilde{B} \times \tilde{B}$. В самом деле, это прямое произведение тоже представляется в виде объединения и склейки элементарных блоков «крест на крест». На $\tilde{B} \times \tilde{B}$ также заданы две функции \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 , определяющие структуру лиувиллева слоения. Построим теперь послойное отображение

$$\tilde{B} \times \tilde{B} \rightarrow U(L).$$

Берем произвольный элементарный блок из $\tilde{B} \times \tilde{B}$ и произвольный элементарный блок из $U(L)$. Отображаем блок из $\tilde{B} \times \tilde{B}$ на блок из $U(L)$ при помощи послойного диффеоморфизма, переводящего функции \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 в функции f_1, f_2 и сохраняющего ориентацию. Теперь, как и в двумерном случае, легко видеть, что это отображение легко продолжить, однозначно с точностью до послойной эквивалентности, на все соседние блоки «крест на крест». Распространяя это

отображение «во все стороны», мы и получаем искомое послынное отображение $\tilde{B} \times \tilde{B} \rightarrow U(L)$. Построенное отображение будет универсальным накрытием. При этом оно сохраняет ориентацию и переводит слоение Лиувилля в слоение Лиувилля. Дело в том, что на каждом шаге мы требуем, чтобы функции \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 переходили в функции f_1, f_2 . Таким образом, для всех особенностей типа седло универсальное накрытие одно и то же, что и требовалось доказать.

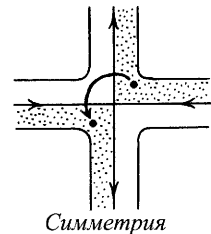
Теперь механизм возникновения структуры почти прямого произведения начинает становиться понятным. Мы видим, что универсальное накрытие над $U(L)$ является прямым произведением \tilde{B} на \tilde{B} . Чтобы теперь вернуться к $U(L)$, придется факторизовать это прямое произведение по действию фундаментальной группы. Как мы сейчас увидим, эту факторизацию можно разделить на два этапа. Сначала профакторизовать $\tilde{B} \times \tilde{B}$ по некоторой подгруппе так, чтобы получить прямое произведение двух компактных 2-атомов. И лишь затем «дофакторизовать» по действию некоторой конечной группы. Это и даст утверждение теоремы 9.9.

Рассмотрим универсальное накрывающее 4-многообразие $\tilde{B} \times \tilde{B}$ над $U(L)$. Оно односвязно, и на нем действует скольжениями фундаментальная группа $Y = \pi_1(U(L))$. Легко видеть, что это действие является симплектическим, то есть сохраняет симплектическую структуру, естественно возникающую на $\tilde{B} \times \tilde{B}$, сохраняет значения обоих интегралов f_1, f_2 , а поэтому переводит слои слоения Лиувилля в слои слоения Лиувилля. То есть элементы группы Y скольжений накрытия фактически являются автоморфизмами 2-слоения на 4-многообразии $\tilde{B} \times \tilde{B}$. Рассмотрим полную группу автоморфизмов слоения Лиувилля на $\tilde{B} \times \tilde{B}$. Профакторизуем ее по подгруппе изотопий слоения, то есть будем рассматривать автоморфизмы слоения с точностью до послынных изотопий. В результате получится дискретная группа. Она изоморфна группе

$$\text{Aut} \times \text{Aut},$$

где группа Aut является дискретной группой автоморфизмов накрытия \tilde{B} , то есть одного сомножителя в прямом произведении $\tilde{B} \times \tilde{B}$. Поскольку накрытие $\tilde{B} \times \tilde{B}$ является прямым произведением, то его дискретная группа автоморфизмов также распадается в прямое произведение $\text{Aut} \times \text{Aut}$.

Легко видеть далее, что группа Aut изоморфна группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. То есть, — свободному произведению группы $\mathbb{Z}(a)$, порожденной образующей a , и группы $\mathbb{Z}_2(s)$, порожденной образующей s второго порядка. Предъявим действие образующих a и s в явном виде на накрытии \tilde{B} . Преобразование $s: \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ порождается симметрией двумерного креста, показанной на рис. 9.44. Другими словами, s — это центральная симметрия пространства \tilde{B} относительно одной из вершин, порожденная центральной симметрией атома B . Ясно, что s является инволюцией.



Симметрия

Рис. 9.44

Преобразование $a: \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ определяется как элементарный сдвиг, как элементарное скольжение накрытия \tilde{B} по себе, задаваемое рисунком 9.45. То есть нужно рассмотреть одну из образующих фундаментальной группы атома B

и взять порожденный ею сдвиг на универсальном накрытии \tilde{B} атома B . На рис. 9.45 показано действие этого преобразования a . Оно получается так. Выберем на «дереве» \tilde{B} произвольную вершину 0 и объявим ее центром «деревя». Затем рассмотрим «сдвиг» всего «деревя» \tilde{B} вверх на единицу, после чего повернем все «деревя» как жесткое целое вокруг точки 0 на угол $\frac{\pi}{2}$. Результат и есть преобразование a .

Итак, мы описали явным образом действие на \tilde{B} двух образующих a и s группы Aut . Ясно, что на прямом произведении $\tilde{B} \times \tilde{B}$ действует прямое произведение этих групп $\text{Aut} \times \text{Aut}$. Причем, эта группа является максимальной дискретной группой автоморфизмов накрытия $\tilde{B} \times \tilde{B}$. Следовательно, группа скольжений Y может быть рассмотрена как подгруппа в этой группе.

Рассмотрим пересечение группы Y с двумя сомножителями $\text{Aut} \times \{e\}$ и $\{e\} \times \text{Aut}$ в группе $\text{Aut} \times \text{Aut}$. Положим

$$Y_1 = Y \cap (\text{Aut} \times \{e\}), \quad Y_2 = Y \cap (\{e\} \times \text{Aut}).$$

Легко видеть, что каждая из подгрупп Y_1 и Y_2 является нормальным делителем в группе Y . Кроме того, обе эти подгруппы имеют конечный индекс в $\text{Aut} \times \{e\}$ и $\{e\} \times \text{Aut}$ соответственно. Этим мы скоро воспользуемся.

Рассмотрим далее $Y_1 \times Y_2$ как подгруппу в группе Y . Поскольку $Y_1 \times Y_2$ лежит в группе автоморфизмов накрытия $\tilde{B} \times \tilde{B}$, то можно на первом шаге профакторизовать накрытие $\tilde{B} \times \tilde{B}$ по этой подгруппе. Мы утверждаем, что в результате получится компактное 4-многообразие.

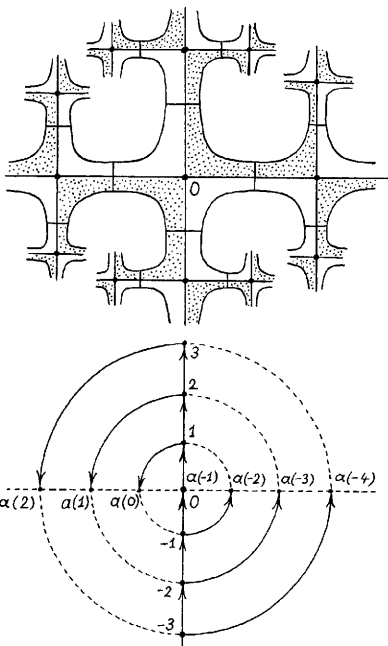


Рис. 9.45

В самом деле, вся группа Y действует свободно на накрытии $\tilde{B} \times \tilde{B}$, поскольку является фундаментальной группой базы. Подгруппа $Y_1 \times Y_2$, следовательно, также действует свободно на накрытии, поэтому фактор-пространство является многообразием.

Далее, поскольку каждый из сомножителей Y_1 и Y_2 имеет конечный индекс в «своей» группе Aut , то подгруппа $Y_1 \times Y_2$ имеет конечный индекс в группе $\text{Aut} \times \text{Aut}$, и следовательно в группе Y . Отсюда следует, что фактор пространство $(\tilde{B} \times \tilde{B}) / (Y_1 \times Y_2)$ компактно.

Кроме того, оно, очевидно, является прямым произведением 2-многообразий

$$\tilde{B}/Y_1 \text{ и } \tilde{B}/Y_2,$$

то есть произведением двух некоторых компактных 2-атомов V_1 и V_2 .

Осталось вспомнить, что каждая группа Y_1 и Y_2 является нормальным делителем

в группе Y . Следовательно, их произведение $Y_1 \times Y_2$ также является нормальным делителем в Y . Поэтому определена фактор-группа $G = Y/(Y_1 \times Y_2)$. Итак, с одной стороны мы имеем

$$V_1 \times V_2 = (\tilde{B} \times \tilde{B})/(Y_1 \times Y_2),$$

а с другой стороны,

$$U(L) = (\tilde{B} \times \tilde{B})/Y.$$

Следовательно, $U(L) = (V_1 \times V_2)/G$, где G является конечной группой, так как $Y_1 \times Y_2$ имеет конечный индекс в Y . Теорема 9.9 доказана. ■

Для всех особенностей седло-седло сложностей 1 и 2, перечисленных выше в теоремах Л. М. Лермана, Я. Л. Уманского и А. В. Болсинова, можно предъявить также другое представление, следуя теореме Т. З. Нгуена. То есть представить их в виде почти прямого произведения.

В качестве примера рассмотрим структуру невырожденной особенности в случае двух степеней свободы при условии, что особый слой содержит ровно одну критическую точку типа седло-седло. Согласно теореме о топологическом разложении, окрестность этого особого слоя может быть представлена в виде произведения двух седловых атомов с последующей факторизацией. Оказывается, в этом случае имеется ровно четыре возможности, перечисляемые ниже и соответствующие, разумеется, четырем случаям, перечисленным в теореме 9.5.

- 1) прямое произведение $B \times B$ двух атомов типа B ;
- 2) $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$, где группа \mathbb{Z}_2 действует на каждом из сомножителей как центральная симметрия;
- 3) $(B \times D_1)/\mathbb{Z}_2$, где группа \mathbb{Z}_2 действует на каждом из сомножителей как центральная симметрия;
- 4) $(C_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, где две образующие α и β группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ действуют следующим образом. Рассмотрим рис. 9.46, на котором дано несколько иное представление для атома C_2 . Здесь α действует как симметрия относительно оси Ox на первом экземпляре атома C_2 , и как симметрия относительно оси Oz на втором. Вторая образующая β , наоборот, действует как симметрия относительно Oz на первом сомножителе и как симметрия относительно оси Ox на втором.

Соответствующие круговые молекулы без меток изображены на рис. 9.35. Стандартные обозначения для атомов см. в таблице 1 главы 2.

Интересно, что первые три из четырех описанных особенностей встречаются в задачах классической механики (первая и третья — в интегрируемом случае Ковалевской, а вторая — в случае Горячева–Чаплыгина). Авторам неизвестно, реализуется ли в интегрируемых системах механики и физики четвертая возможность. Во всяком случае ее нет в известных на сегодняшний день интегрируемых случаях динамики твердого тела, интегрируемых геодезических потоках

на двумерных поверхностях и целой серии других систем, для которых топологические инварианты были вычислены. См. подробности в томе 2 настоящей книги.

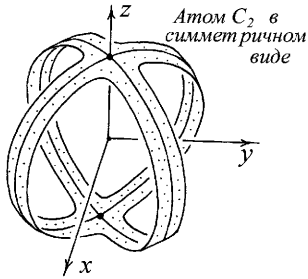


Рис. 9.46

Для 39 случаев особенностей типа седло-седло сложности два, перечисленных в теореме 9.7, их представление в виде почти прямых произведений было получено В.В. Корнеевым. Этот результат приведен в таблице 9.3.

Комментарии к таблице В. Корнеева 9.3.

Во втором столбце таблицы 9.3 указаны номера, которые присвоены перечисляемым здесь особенностям в таблице 9.1 и 9.2. Номера одних и тех же особенностей в разных таблицах оказались разными по той причине, что в таблицах 9.1 и 9.2 особенности упорядочены по их l -типу. В то же время,

в таблице 9.3 особенности упорядочены по типам действующих групп.

В третьем столбце таблицы 9.3 указаны атомы, являющиеся сомножителями почти прямого произведения. Эти атомы изображены в последней части таблицы 9.1. Здесь же указаны группы симметрий атомов и их образующие. Более того, сами атомы изображены в таблице 9.1 в «симметричном виде», чтобы можно было наглядно увидеть их группы симметрий. Здесь через α во всех случаях мы обозначаем центральную симметрию, т. е. симметрию относительно «центра атома» в специально подобранном нами симметричном изображении атома. Через γ мы обозначаем поворот атома на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг того же «центра атома». Наконец, через β мы обозначаем дополнительную симметрию атома, которая для разных атомов имеет разный смысл. Каждый раз мы указываем действие симметрии β явным образом. С этой целью мы указываем в таблице 9.1 — как именно симметрия действует на ребрах графа K атома. По этой информации действие симметрии на всем атоме восстанавливается однозначно.

В последнем столбце таблицы 9.3 указана группа, действующая на прямом произведении двумерных атомов. Все эти группы абелевы, за исключением последнего случая, когда на прямом произведении действует группа диэдра D_4 . Эта группа некоммутативна.

Во всех случаях действующая группа имеет не более двух образующих. Покомпонентное действие этих образующих на прямом произведении двух атомов указано в четвертом столбце таблицы 9.3. Например, в случае № 32 на прямом произведении $C_2 \times P_4$ первая образующая e_1 группы $G = \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ действует по следующему правилу:

$$e_1(C_2 \times P_4) = (\alpha(C_2) \times \gamma^2(P_4)).$$

Это означает, что на первой компоненте, т. е. на C_2 , образующая e_1 действует как симметрия α , а на второй компоненте, т. е. на P_4 , — как симметрия γ^2 . Обозначения для этих симметрий указаны в той же таблице 9.1 (в ее последней части). В рассматриваемом случае α — это центральная симметрия атома C_2 ,

а γ — поворот атома P_4 на угол $\frac{\pi}{2}$ (в частности γ^2 — это тоже центральная симметрия).

Аналогичным образом, вторая образующая e_2 группы $G = \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ действует по правилу:

$$e_2(C_2 \times P_4) = (\beta(C_2) \times \beta(P_4)).$$

9.7. Доказательства теорем 9.3 и 9.4

Доказательство теоремы 9.3.

Рассмотрим особый слой L типа седло-седло и его 4-окрестность $U(L)$. Как мы видели выше, эта 4-окрестность может быть представлена в виде склейки элементарных 4-блоков вида «крест на крест». Число таких элементарных блоков в точности равно числу особых точек типа седло-седло, лежащих на особом слое L . Как склеивается $U(L)$ из этих 4-блоков? Чтобы описать склейку, достаточно задать пары склеиваемых компонент 3-границ, то есть пары «трехмерных шайб», каждая из которых есть прямое произведение «крест на отрезок». Причем для каждой такой пары склеиваемых 3-шайб нужно указать правило их склейки. Для этого нужно задать правило склейки креста с крестом и отрезка с отрезком. Если мы знаем комбинаторную структуру комплекса L , то мы, очевидно, знаем и структуру разбиения 3-компонент границы на пары. При склейке двух 3-шайб нужно описать — как склеиваются два соответствующих 2-креста и два 1-отрезка. Склейка двух 2-крестов однозначно восстанавливается по комбинаторной структуре комплекса L . Каждой такой склейке взаимно-однозначно отвечает некоторое ребро комплекса L . Каждое такое ребро является четверной линией, то есть на нем трансверсально сходятся четыре квадрата (рис. 9.47). Концевым точкам отрезка S_i и S_j отвечают в $U(L)$ два блока вида «крест на крест». Как они склеиваются? Граница каждого из них является произведением 2-креста на отрезок. Склейка двух 2-крестов, отвечающих вершинам S_i и S_j , полностью задается четверной линией α (рис. 9.47). Осталось склеить два отрезка, на которые прямым образом умножаются 2-кресты.

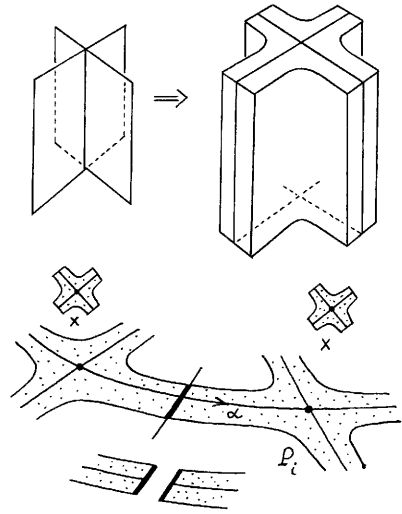


Рис. 9.47

См. рис. 9.48. Их можно интерпретировать как берега трансверсальных разрезов на одном из атомов P_1 , или P_2 , которому принадлежит ребро α . Структура этого атома однозначно диктует правило склейки этих двух отрезков между собой.

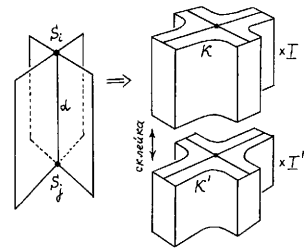


Рис. 9.48

Изложенное рассуждение показывает, что по Cl -типу особенности однозначно, в комбинаторном смысле, восстанавливается правило склейки окрестности $U(L)$ из элементарных блоков вида «крест на крест».

Другими словами, на односвязной накрывающей $\tilde{U}(\tilde{L})$ действие фундаментальной группы $Y = \pi_1 U(L)$ восстанавливается однозначно. Поскольку $U(L) = (\tilde{U}(\tilde{L}))/Y = (\tilde{B} \times \tilde{B})/Y$, то 4-многообразие $U(L)$ полностью определяется своим Cl -типом. Дело в том, что универсальное накрывающее пространство для всех атомов — одно и то же. Более того, — как мы только что выяснили, — действие на нем фундаментальной группы Y , как группы скольжений, — также *одно и то же*. Следовательно, и фактор-пространства у них — изоморфны. Теорема доказана. ■

Доказательство теоремы 9.4.

Пусть задан произвольный допустимый Cl -тип. Нужно реализовать его как Cl -тип некоторой особенности типа седло-седло. Как мы уже выяснили выше, для этого достаточно предъявить подгруппу Y в группе $\text{Aut} \times \text{Aut}$ такую, чтобы фактор-пространство $(\tilde{B} \times \tilde{B})/Y$ обладало бы заданным заранее Cl -типом. Берем 2-комплекс L и его универсальную накрывающую \tilde{L} . Утверждается, что эта универсальная накрывающая — *одна и та же* для любых допустимых 2-комплексов L . Чтобы доказать это, достаточно предъявить накрывающую \tilde{L} в явном виде. В качестве \tilde{L} мы возьмем особый слой в 4-комплексе $\tilde{B} \times \tilde{B}$, описанный нами выше. Этот слой является прямым произведением двух «1-деревьев», каждое из которых в свою очередь является универсальным накрытием «восьмерки». Легко видеть, что 2-комплекс \tilde{L} удовлетворяет всем свойствам допустимого комплекса из определения 9.5, за исключением одного условия — конечности. Так как каждое «1-дерево» — бесконечно. Кроме того, проекция $\tilde{L} \rightarrow L$, сохраняющая комбинаторную структуру допустимого комплекса, также восстанавливается однозначно в комбинаторном смысле. Дело в том, что если задать произвольным образом образ какого-то одного квадрата, с метками на его сторонах, то после этого отображение проекции однозначно распространяется во все стороны от этого начального квадрата. А именно, последовательно переходя через ребра склеенных квадратов, с учетом меток на них, мы в конце концов перебираем все квадраты и определяем проекцию во всех точках \tilde{L} .

Теперь заметим, что на универсальном накрывающем пространстве \tilde{L} естественным образом действует фундаментальная группа $\pi_1(L)$, как группа скольжений накрытия $L \rightarrow \tilde{L}$. С другой стороны, поскольку \tilde{L} вложено в $\tilde{B} \times \tilde{B}$, то на \tilde{L} действует группа $\text{Aut} \times \text{Aut}$. Следовательно, действие группы $\pi_1(L)$ скольжениями на \tilde{L} задает нам вложение этой группы в группу $\text{Aut} \times \text{Aut}$. Итак, мы предъявили некоторую подгруппу в группе $\text{Aut} \times \text{Aut}$, отвечающую выбранному нами Cl -типу. Теперь берем 4-пространство $\tilde{U}(\tilde{L}) = \tilde{B} \times \tilde{B}$, 2-остовом которого и является \tilde{L} . Рассмотрим на нем действие группы $\pi_1(L)$, уже реализованной нами в виде подгруппы в полной дискретной группе автоморфизмов. Факторизуя 4-многообразие $\tilde{U}(\tilde{L}) = \tilde{B} \times \tilde{B}$ по этому действию, мы и получаем некоторое компактное 4-многообразие $U(L)$. Очевидно, что оно и дает нам искомую реализацию выбранного Cl -типа. Теорема реализации доказана. ■

9.8. Случай особенности типа фокус-фокус

9.8.1. Структура особого слоя типа фокус-фокус

Пусть L — особый слой лиувиллева слоения, содержащий одну или несколько особых точек типа фокус-фокус. Обозначим эти точки через x_1, \dots, x_n . Напомним, что согласно теореме 1.5 главы 1 в окрестности точки x_i существует каноническая система координат p_1, q_1, p_2, q_2 такая, что гамильтониан H и дополнительный интеграл f могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} H &= H(f_1, f_2), \\ f &= f(f_1, f_2), \end{aligned}$$

где $f_1 = p_1 q_1 + p_2 q_2$, $f_2 = p_2 q_1 - p_1 q_2$. Отметим, что замена

$$(H, f) \rightarrow (f_1, f_2)$$

является регулярной, и поэтому функции f_1, f_2 локально можно представить как гладкие функции от H и f . В частности, слоение, задаваемое интересующей нас парой функций H и f , совпадает со слоением, задаваемым более простыми функциями f_1 и f_2 .

Для понимания локальной структуры слоения в окрестности особой точки удобно перейти к комплексным переменным

$$\begin{aligned} z &= q_1 + i q_2, \\ w &= p_1 - i p_2. \end{aligned}$$

Тогда функции f_1 и f_2 могут быть представлены соответственно как вещественная и мнимая части комплексной функции $F = zw$. Отсюда, в частности, следует, что особый слой L локально устроен как пара трансверсально пересекающихся лагранжевых дисков, задаваемых уравнениями $z = 0$ и $w = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что вещественная особенность типа фокус-фокус совпадает с простейшей невырожденной комплексной особенностью типа двойной точки.

Отметим, что функция f_2 задает в окрестности особой точки типа фокус-фокус гамильтоново S^1 -действие. Это сразу следует из того, что все интегральные траектории векторного поля $\text{sgrad } f_2$ замкнуты с периодом 2π . Причем это действие является свободным всюду за исключением единственной неподвижной точки, совпадающей с особой точкой типа фокус-фокус. Это легко следует из явного вида векторного поля $\text{sgrad } f_2$, которое в комплексных координатах w и z записывается так:

$$\dot{w} = iw, \quad \dot{z} = -iz.$$

Поэтому действие окружности S^1 задается простой формулой:

$$(z, w) \rightarrow (e^{-i\varphi} z, e^{i\varphi} w).$$

Рассмотрим окрестность одной точки типа фокус-фокус и ее шаровую окрестность. Границей окрестности является 3-сфера, на которой указанное действие окружности задает расслоение, топологически эквивалентное известному расслоению Хопфа.

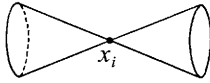


Рис. 9.49

Изучим теперь структуру особого слоя L в целом. На нем лежит n особых точек типа фокус-фокус. В окрестности каждой из них особый слой представляет собой трансверсальное пересечение двух дисков. Условно можно изобразить их в виде окрестности вершины конуса (рис. 9.49).

Утверждается, что весь особый слой L получается из таких пар путем их естественной склейки в цепочку (рис. 9.50). Получается последовательность 2-сфер, на каждой из которых отмечена пара точек, и соседние сферы склеены по этим точкам. Подчеркнем, что в каждой точке x_i две соседние сферы пересекаются трансверсально внутри 4-мерного многообразия. Этот же особый слой L можно представить и по-другому. Вспомним, что особый слой L «происходит» из двумерного тора, когда тот стремится к особому слою. Этот процесс можно представлять себе так: на торе выделяются n параллельных нетривиальных циклов, каждый из которых стягиваются в точку. Это — исчезающие циклы. В результате получается «тор с n перетяжками» (рис. 9.50). Получившуюся картину мы оформим в виде леммы.

Лемма 9.7. *Особый слой L гомеоморфен двумерному тору с n «перетяжками», где n — число точек типа фокус-фокус, лежащих на слое L .*

Доказательство.

Особый слой L состоит из орбит действия абелевой группы \mathbb{R}^2 . Следовательно, каждая орбита может быть либо точкой (нульмерной орбитой), либо прямой или окружностью (одномерной орбитой), либо диском, тором или кольцом (двумерной орбитой). Ясно, что нульмерные орбиты — это в точности особые точки типа фокус-фокус, то есть точки x_1, \dots, x_n . Далее мы утверждаем, что одномерных орбит нет вообще. Напомним, что по предположению, все орбиты действия \mathbb{R}^2 невырождены. В самом деле, если допустить существование невырожденных одномерных орбит, то они организуются в одномерные семейства (предложение 1.18 главы 1).

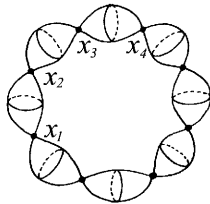


Рис. 9.50

При отображении момента каждое такое семейство проектируется в гладкую одномерную дугу на бифуркационной диаграмме. Однако в нашем случае бифуркационная диаграмма является изолированной точкой. Следовательно, никаких одномерных орбит нет. Перейдем к двумерным орбитам. Мы утверждаем, что торов и дисков здесь нет. В самом деле, поскольку одномерных орбит нет, то каждая двумерная орбита из особого слоя должна примыкать по крайней мере к одной особой точке. В окрестности этой точки определено свободное действие окружности (см. выше). Это действие естественным образом продолжается на все орбиты, проходящие через окрестность особой точки. Таким образом, на всех двумерных орбитах особого слоя L имеется свободное действие окружности. Ясно, что это возможно только при условии, что все эти орбиты гомеоморфны кольцу. Итак, особый слой L склеен из нульмерных орбит и колец. Причем кольца примыкают к нульмерным орбитам в точности так, как описано выше. Другими словами, граница каждого кольца стягивается в две осо-

бные точки. В результате n особых точек последовательно соединены кольцами. Лемма доказана. ■

Лемма 9.8. *На $U(L)$ определено гладкое гамильтоново действие окружности S^1 , являющееся свободным всюду за исключением особых точек x_1, \dots, x_n и оставляющее каждый слой слоения Лиувилля инвариантным. Такое действие определено однозначно с точностью до замены ориентации на действующей окружности S^1 . Доказательство.*

Мы уже видели, что действие окружности с нужными нам свойствами определено по отдельности в окрестности каждой особой точки x_i . Возьмем одну из них. В ее окрестности, в подходящей системе координат p_1, q_1, p_2, q_2 , — являющейся на самом деле канонической, — гамильтониан этого действия есть функция $f_2 = p_1 q_2 - p_2 q_1$. На самом деле эта функция является вполне определенной функцией от f и H , т.е. $f_2 = f_2(f, H)$. Поскольку f и H заданы глобально на всем $U(L)$, и функцию f_2 можно считать заданной на всем $U(L)$. С другой стороны, интегральные траектории поля $\text{sgrad } f_2$ замкнуты с периодом 2π в окрестности точки x_i . В частности, они замкнуты и на каждом торе Лиувилля, проходящем через окрестность точки x_i . Но в таком случае интегральные траектории поля $\text{sgrad } f_2$ будут замкнуты на всем торе Лиувилля, т.е. «вдали» от точки x_i . Следовательно, интегральные траектории поля $\text{sgrad } f_2$ замкнуты с периодом 2π на всех торах Лиувилля в $U(L)$. Тогда, по непрерывности, они замкнуты и на всей окрестности $U(L)$. Но это и означает, что на окрестности $U(L)$ гладко действует окружность S^1 , с периодом 2π . Ясно, что слои Лиувилля в $U(L)$ инвариантны относительно этого действия. Дело в том, что гамильтониан этого действия, то есть функция f_2 , является функцией от H и f . Однозначность действия, с точностью до замены ориентации на действующей окружности, следует из локальной однозначности в окрестности даже одной особой точки x_i . Лемма доказана. ■

9.8.2. Классификация особенностей типа фокус-фокус

Особый слой L удобно представить в виде объединения n «элементарных блоков» L_i , гомеоморфных окрестности вершины конуса. Другими словами, элементарный блок L_i — это окрестность особой точки x_i внутри особого слоя. Эта окрестность гомеоморфна паре трансверсально пересекающихся дисков.

Теперь распространим это разбиение особого слоя L на 4-мерную окрестность $U(L)$, чтобы представить $U(L)$ в виде объединения n элементарных 4-блоков U_i . Для этого разрежем $U(L)$ по трехмерным многообразиям, гомеоморфным $S^1 \times D^2$, где окружности S^1 являются срединными окружностями колец, соединяющих особые точки типа фокус-фокус. Разрезая слой L по этим окружностям, мы разбиваем его в объединение элементарных 2-блоков L_i . Чтобы разрезать $U(L)$, нужно распространить разрез с особого слоя L на соседние с ним слои-торы. На каждом близком торе нужно взять окруж-

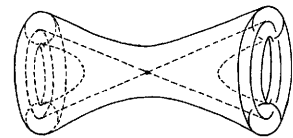


Рис. 9.51

ность, близкую к выделенной нами окружности на L . Следовательно, граница каждого 4-блока U_i состоит из двух полноторий $S^1 \times D^2$. См. условный рис. 9.51. С топологической точки зрения элементарный 4-блок U_i можно рассматривать как регулярную ε -окрестность точки типа фокус-фокус в $U(L)$. Другими словами, 4-блок U_i — это пересечение $U(L)$ с четырехмерным шаром D^4 радиуса ε с центром в точке типа фокус-фокус.

Пересечение 4-блока U_i с граничной сферой S^3 состоит из двух «тонких» полноторий, расположенных в сфере следующим образом. Нужно рассмотреть сферу S^3 , вложенную стандартным образом в $\mathbb{C}^2(z, w)$ и задаваемую уравнением $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Элементарный 4-блок U_i можно представить тогда в виде: $\{|zw| < \varepsilon\} \cap D$, то есть это — часть ε -окрестности двумерной поверхности $\{zw = 0\}$, попавшая в 4-шар. Напомним, что уравнение $zw = 0$ задает особый слой L в шаре D^4 . Легко видеть, что множество $\{|zw| < \varepsilon\}$ высекает на границе 4-диска D^4 два «тонких» полнотория. Два тора, являющихся границами этих полноторий, задаются в сфере S^3 следующими уравнениями:

$$|z| = \alpha, \quad |w| = \beta \text{ (первый тор)}, \quad |z| = \beta, \quad |w| = \alpha \text{ (второй тор)}.$$

Здесь α и β удовлетворяют соотношениям: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha\beta = \varepsilon$, $\alpha > \beta > 0$. Отметим, что эти два полнотория зацеплены внутри 3-сферы с коэффициентом зацепления, равным 1.

Таким образом, все элементарные 4-блоки U_i устроены одинаково. То есть, $U(L)$ склеено из n «одинаковых кусков» U_i , каждый из которых является в то же время окрестностью «своей» особой точки типа фокус-фокус. При этом соседние 4-блоки U_i и U_{i+1} склеиваются друг с другом по некоторому диффеоморфизму граничных полноторий.

Теорема 9.10. *Число n особых точек типа фокус-фокус на особом слое L является единственным, а потому полным топологическим инвариантом особенности слоения Лиувилля типа фокус-фокус. Другими словами, две особенности типа фокус-фокус лиувиллево эквивалентны при помощи послыного гомеоморфизма тогда и только тогда, когда на их особых слоях имеется одинаковое число особых точек.*

Доказательство.

Достаточно доказать, что 4-мерная окрестность $U(L)$ особого слоя L определяется однозначно, с точностью до послыного гомеоморфизма, если заранее задано число n особых точек на слое L . Другими словами, достаточно проверить, что $U(L)$ однозначно, с точностью до послыного гомеоморфизма, склеивается из n элементарных 4-блоков. Для этого изучим подробнее склейку двух соседних граничных полноторий. Каждое из них тривиальным образом расслоено на окружности, параллельные оси полнотория. Они являются пересечениями торов Лиувилля с границей 4-блока, т. е. со 3-сферой S^3 . Следовательно, в каждом блоке они задаются уравнениями $f = \text{const}$, $H = \text{const}$ и $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

Полнотория склеиваются так, что эти два расслоения на окружности послыно отождествляются. Каков произвол при такой склейке? Чтобы ответить на этот вопрос, удобно представить каждое из склеиваемых полноторий как прямое произведение $D^2 \times S^1$. Напомним, что на каждом элементарном блоке U_i мы имеем

стандартные канонические координаты p_1, p_2, q_1, q_2 такие, что

$$\begin{aligned} H &= H(f_1, f_2), \\ f &= f(f_1, f_2), \end{aligned}$$

где $f_1 = p_1q_1 + p_2q_2, f_2 = p_2q_1 - p_1q_2$. Напомним, что замена

$$(H, f) \rightarrow (f_1, f_2)$$

является регулярной, и поэтому функции f_1, f_2 локально можно представить как гладкие функции от H и f . Легко видеть, что здесь без ограничения общности якобиан замены $(H, f) \rightarrow (f_1, f_2)$ можно считать положительным.

На граничном полнотории $D^2 \times S^1$ для i -го 4-блока U_i функции f_1, f_2 можно рассматривать как локальные координаты на диске D^2 . При отождествлении двух граничных полноторий, функции H и f должны сохраняться. С другой стороны, на соседних 4-блоках U_i и U_{i+1} зависимость функций H и f от функций f_1 и f_2 , вообще говоря, разная. Поэтому в терминах функций f_1 и f_2 отображение, склеивающее два соседних полнотория, становится, вообще говоря, нетривиальным диффеоморфизмом с положительным якобианом.

Следующее техническое утверждение показывает, что такой диффеоморфизм можно без ограничения общности считать попросту тождественным.

Лемма 9.9. *Рассмотрим окрестность $U(x)$ особой точки $x \in M^4$ типа фокус-фокус (стандартный 4-блок) и соответствующее отображение момента $\mathcal{F}: U(x) \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{F}(x) = (0, 0)$. Пусть ξ — произвольный локальный диффеоморфизм в образе, т. е. $\xi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, оставляющий точку $(0, 0)$ неподвижной и не меняющий ориентации плоскости. Тогда его всегда можно «накрыть» некоторым послойным гомеоморфизмом окрестности $U(x)$ на себя, то есть таким гомеоморфизмом $\widehat{\xi}$, что $\mathcal{F}\widehat{\xi} = \xi\mathcal{F}$. Более того, можно считать, что гомеоморфизм $\widehat{\xi}$ послойно изотопен тождественному.*

Замечание. Эта лемма на самом деле означает, что окрестность $U(x)$ точки типа фокус-фокус имеет весьма большую группу послойных гомеоморфизмов $U(x)$ на себя. Другими словами, с помощью этих гомеоморфизмов в $U(x)$ можно произвольным образом «перемешивать» слои слоения Лиувилля.

Доказательство.

Нам удобно будет доказывать наше утверждение в комплексной форме, т. е. отождествить окрестность точки фокус-фокус с двумерным комплексным пространством $\mathbb{C}^2(z, w)$, а образ отображения момента \mathcal{F} с \mathbb{C} . При этом в силу локальной теоремы 1.5 из главы 1 мы считаем, что $\mathcal{F}(z, w) = zw$.

Рассмотрим сначала вещественный аналог доказываемого утверждения. Пусть $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольный диффеоморфизм, сохраняющий точку 0 и не меняющий ориентации. Построим гомеоморфизм (на самом деле легко строится диффеоморфизм) $\widehat{\xi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что $F\widehat{\xi} = \xi F$, где $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение вида $F(x, y) = xy$. Другими словами, мы строим послойный гомеоморфизм для слоения, задаваемого линиями уровня функции F . Этот гомеоморфизм должен перемешивать слои в соответствии с диффеоморфизмом (заданным на базе).

Рассмотрим векторное поле $\text{grad} F = (y, x)$ и определим отображение $\varphi(x, y, \alpha)$, которое сдвигает точку (x, y) вдоль интегральной траектории этого векторного поля до точки (x', y') такой, что $F(x', y') = x'y' = \alpha$. Здесь мы предполагаем, что знак α совпадает со знаком $F(x, y) = xy$.

Теперь гомеоморфизм $\widehat{\xi}$ можно задать по следующей формуле:

$$\widehat{\xi}(x, y) = \varphi(x, y, \xi(xy)).$$

Легко проверяется, что $\widehat{\xi}$ обладает требуемыми свойствами. Отметим, кстати, что $\widehat{\xi}$ является тождественным на особом слое $F = 0$.

Теперь аналогичным образом построим гомеоморфизм $\widehat{\xi}$ в комплексном случае. Нам будет удобно задавать комплексные числа с помощью модуля и аргумента. Тогда отображение \mathcal{F} можно представить в виде

$$(|z|, |w|, (\arg(z), \arg(w))) \rightarrow (|zw|, \arg(z) + \arg(w)).$$

Рассмотрим теперь отображение $\widehat{\xi}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, задаваемое следующим образом:

$$(|z|, |w|, \arg(z), \arg(w)) \rightarrow (|z'|, |w'|, \arg(z'), \arg(w')),$$

где

$$\begin{aligned} (|z|, |w|) &= \varphi(|z|, |w|, |\xi(zw)|); \\ \arg(z') &= \arg(z) + \lambda(\arg(\xi(zw)) - \arg(zw)), \\ \arg(w') &= \arg(w) + (1 - \lambda)(\arg(\xi(zw)) - \arg(zw)). \end{aligned}$$

Здесь отображение φ уже было определено выше, а $\lambda = \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{|w|}{|z|}\right)$.

Легко проверяется, что это отображение удовлетворяет требуемому свойству $\mathcal{F}\widehat{\xi} = \xi\mathcal{F}$ и является гомеоморфизмом. Кроме того, отображение $\widehat{\xi}$ является тождественным на особом слое $\{\mathcal{F} = 0\}$.

Чтобы построить изотопию, достаточно рассмотреть изотопию ξ_t в образе такую, что $\xi_0 = \text{id}$, $\xi_1 = \xi$, и применить указанные выше формулы. Лемма доказана. ■

С помощью этой леммы все диффеоморфизмы склейки можно сделать тождественными относительно стандартных переменных f_1, f_2 (см. выше) на базах D^2 граничных полноторий. Осталось посмотреть, как устроена склейка на слоях-окружностях S^1 тривиально расслоенного полнотория $D^2 \times S^1$.

Ясно, что с точностью до послышной изотопии имеется лишь два способа отождествить слои полноторий, а именно, с сохранением ориентации окружностей и с обращением ориентации. На самом деле никакого произвола здесь нет. Чтобы это увидеть, достаточно воспользоваться существованием глобального гамильтонова действия окружности S^1 на $U(L)$, построенного в лемме 9.8. С помощью этого действия на склеиваемых расслоенных полноториях мы можем одновременно и согласованно ориентировать все слои-окружности. После этого склейка элементарных 4-блоков происходит однозначно, с точностью до послышной изотопии. Тем самым, слоение Лиувилля на получающемся 4-многообразии

тоже определено однозначно в указанном смысле. Следовательно, если число n особых точек на слое L заранее задано, то топология $U(L)$ со слоением Лиувилля на нем восстанавливается однозначно, с точностью до послойной топологической эквивалентности. Теорема доказана. ■

Важный комментарий. В теореме 9.10 не случайно говорится о классификации особенностей фокус-фокус с точностью до послойных гомеоморфизмов. Дело в том, что если на особом слое L имеется несколько особых точек, то гладкая классификация таких особенностей устроена сложнее. Оказывается, топологически эквивалентные особенности типа фокус-фокус могут оказаться с гладкой точки зрения различными, т. е. могут не переводиться друг в друга послойным диффеоморфизмом. Другими словами, существуют нетривиальные гладкие инварианты, различающие особенности типа фокус-фокус с точностью до послойных диффеоморфизмов. Причина этого заключается в том, что в гладком случае лемма 9.9 становится неверной. В частности, для существования послойного диффеоморфизма $\hat{\xi}$ (накрывающего диффеоморфизм ξ , действующий на базе) необходимо, чтобы дифференциал $d\xi$ диффеоморфизма ξ в неподвижной точке был комплексным.

9.8.3. Модельный пример особенности типа фокус-фокус и теорема реализации

Рассмотрим один элементарный 4-блок и изготовим из него открытое симплектическое 4-многообразие без границы, на котором будет определено слоение Лиувилля с ровно одной особенностью типа фокус-фокус. Ее мы и назовем модельным примером. Опишем построение этого примера.

Напомним, что симплектическая структура на $\mathbb{C}^2(z, w)$ задается формулой $\text{Re}(dw \wedge dz) = dp \wedge dq = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$. Рассмотрим теперь в $\mathbb{C}^2(z, w)$ 4-мерную область U , задаваемую следующими формулами:

$$|zw| < \varepsilon, \quad |z| < 1 + \delta, \quad |w| < 1 + \delta.$$

Эта область является окрестностью «координатного креста», то есть двух ортогонально пересекающихся в точке $(0, 0)$ координатных 2-дисков: $\{|z| \leq 1, w = 0\}$ и $\{z = 0, |w| \leq 1\}$. См. условный рис. 9.52. Рассмотрим открытые 4-окрестности граничных окружностей каждого из этих дисков в области U . Обозначим их через

$$U_z = U \cap \{(1 + \delta)^{-1} < z < 1 + \delta\}, \quad U_w = U \cap \{(1 + \delta)^{-1} < w < 1 + \delta\}.$$

Они заштрихованы на рис. 9.52. Топологически каждая из них очевидно гомеоморфна прямому произведению $S^1 \times D^3$, т. е. — окружности на 3-диск. Склеим эти 4-окрестности друг с другом по отображению $\xi: U_w \rightarrow U_z$, задаваемому

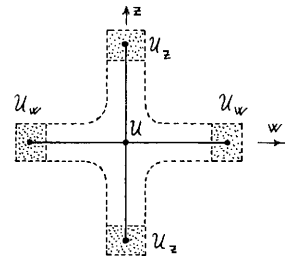


Рис. 9.52

следующей формулой:

$$\xi: (z, w) \rightarrow (w^{-1}, zw^2).$$

Это отображение выбрано так, что оно является комплексным. Далее, легко проверяется, что оно является симплектическим, поскольку $dw \wedge dz = d(zw^2) \wedge d(w^{-1})$. Кроме того, оно сохраняет функцию zw .

Легко видеть, что в результате получается некоторое 4-мерное комплексное симплектическое многообразие U_1 , на котором корректно определена голоморфная функция F , которая в локальных координатах имеет вид zw . Эта функция имеет ровно одну особую точку $(0, 0)$. Особый слой $F = 0$ получается в результате склейки двух трансверсально пересекающихся дисков по их границам, т. е. является сферой с одной точкой самопересечения, а само получившееся многообразие U_1 представляет собой регулярную окрестность этого слоя вида $\{|F| < \varepsilon\}$, расслоенную на компактные неособые слои, диффеоморфные двумерным торам.

С вещественной точки зрения мы получили две коммутирующие функции $f_1 = \operatorname{Re} F$, $f_2 = \operatorname{Im} F$, задающие на полученном многообразии U_1 структуру лиувиллева слоения с единственным особым слоем типа фокус-фокус, содержащим одну особую точку.

Аналогичным образом можно построить модельный пример особенности, в котором будет n особых точек типа фокус-фокус. Нужно последовательно, «по цепочке» склеить n экземпляров многообразия U как было описано выше. Получится многообразие U_n .

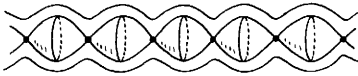


Рис. 9.53

Можно поступить и по-другому, а именно, рассмотрев n -кратное накрытие над многообразием U_1 . Здесь мы используем тот факт, что фундаментальная группа особого слоя в U_1 , как и самого U_1 , равна \mathbb{Z} . Выберем в ней подгруппу $n\mathbb{Z}$ и построим, стандартным приемом, накрытие, отвечающее этой подгруппе. Полученное многообразие U_n также имеет фундаментальную группу, изоморфную \mathbb{Z} . Отметим, что универсальное накрытие U_∞ над U_1 совпадает с универсальным накрытием над U_n . Другими словами, разные многообразия U_m и U_k имеют одно и то же универсальное накрытие U_∞ . Причем и структура возникающего на U_∞ лиувиллева слоения тоже будет одна и та же для разных U_m и U_k . См. рис. 9.53. Слои лиувиллева слоения здесь некомпактны и являются бесконечными 2-цилиндрами. На этом универсальном накрытии естественно действует группа \mathbb{Z} , как группа сдвигов. Итак, любая особенность типа фокус-фокус получается из этой универсальной модели путем факторизации по подгруппе индекса n в группе \mathbb{Z} . Подчеркнем, что это утверждение справедливо лишь в дифференциально-топологическом смысле. С симплектической точки зрения неверно, что любая особенность типа фокус-фокус получается факторизацией из одной универсальной модели, с фиксированной на ней одной и той же симплектической структурой. Дело в том, что имеются нетривиальные симплектические инварианты, отличающие друг от друга некоторые особенности типа фокус-фокус даже если у них одинаковое число особых точек на особом слое L . Поэтому хотя с дифференциально-топологической точки зрения есть ровно одно слоение

типа U_∞ , на нем можно задать много неэквивалентных симплектических структур.

9.8.4. Круговая молекула и группа монодромии особенности типа фокус-фокус

Круговая молекула является инвариантом лиувиллева слоения, возникающего на 3-многообразии Q_{γ_ϵ} . Здесь γ_ϵ — окружность радиуса ϵ в плоскости $\mathbb{R}^2(H, f)$, а Q_{γ_ϵ} — полный прообраз окружности при отображении момента \mathcal{F} . См. рис. 9.54. Совершенно ясно, что топологически 3-многообразие Q_{γ_ϵ} является расслоением над окружностью γ_ϵ со слоем тор Лиувилля. Это расслоение полностью определяется своей группой монодромии, т.е. автоморфизмов фундаментальной группы 2-тора на себя, возникающей при обходах по базе-окружности γ_ϵ . Поскольку $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, то речь тут идет о циклических подгруппах группы автоморфизмов $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Отметим, что 3-многообразие Q_{γ_ϵ} можно представлять себе как результат отождествления по диффеоморфизму двух граничных торов прямого произведения $T^2 \times D^1$. На рис. 9.55 — это торы T_0 и T_1 , «основания цилиндра». Диффеоморфизм ψ , склеивающий эти два тора, индуцирует автоморфизм ψ_* группы $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ как фундаментальной группы тора. Автоморфизм ψ_* однозначно задается целочисленной унимодулярной матрицей. Эта матрица, конечно, зависит от выбора базиса на торе, то есть от базиса в группе $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Но ее класс сопряженности является полным инвариантом слоения. Эта матрица называется также матрицей монодромии. Она естественно возникает, когда мы сравниваем на торе два базиса: исходный и получившийся из него после «обноса» вдоль окружности γ_ϵ . Мы возвращаемся на прежний тор, но с каким-то преобразованным базисом. Матрица перехода между этими двумя базисами и есть матрица монодромии. Таким образом, интересующая нас круговая молекула — это окружность, снабженная «меткой» — классом сопряженности матрицы монодромии.

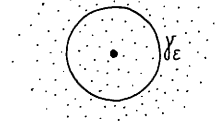


Рис. 9.54

Теорема 9.11. *Круговая молекула является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности особенности слоения типа фокус-фокус. Если на особом слое лежат n точек типа фокус-фокус, то матрица монодромии имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Мы дадим два доказательства. Первое — явно указав базис на торе Лиувилля и результат его «обноса» вдоль окружность γ_ϵ . Второе — путем анализа соотношений в фундаментальной группе многообразия Q_{γ_ϵ} .

Начнем со случая одной особой точки на слое L , то есть когда $n = 1$. Для доказательства теоремы в этом случае достаточно воспользоваться построен-

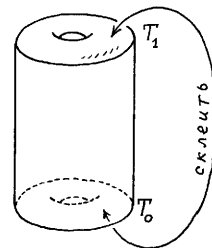


Рис. 9.55

ным выше модельным примером особенности типа фокус-фокус и вычислить на нем в явном виде матрицу монодромии. Напомним, что на модельном 4-многообразии U_1 заданы комплексные координаты (z, w) . Хотя они «покрывают» все 4-многообразие U_1 , но не являются однозначно заданными координатами. Они являются координатами внутри лишь одной карты, замыкание которой дает все U_1 . На U_1 задана также голоморфная функция $F = zw$, отображающая U_1 на плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, т.е. на комплексную прямую. Ясно, что это и есть отображение момента, отвечающее коммутирующим вещественным функциям $f_1 = \text{Re } F$, $f_2 = \text{Im } F$. Следовательно, 3-многообразие Q_{γ_ε} задается уравнением $|F(z, w)| = \varepsilon$, то есть $|zw| = \varepsilon$. Опишем полезное представление многообразия Q_{γ_ε} . Рассмотрим в \mathbb{C}^2 3-многообразие с краем, задаваемое условиями:

$$|zw| = \varepsilon, \quad |z| \leq 1, \quad |w| \leq 1.$$

Его край состоит из двух 2-мерных торов, задаваемых так:

$$T_w = \{|z| = \varepsilon, |w| = 1\}, \quad T_z = \{|w| = \varepsilon, |z| = 1\}.$$

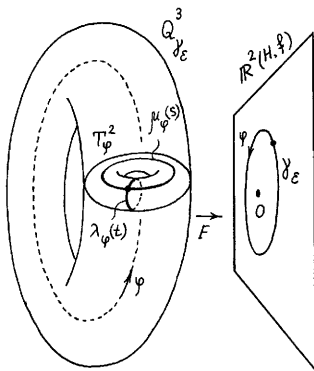


Рис. 9.56

Многообразие Q_{γ_ε} получается из описанного выше 3-многообразия путем склейки этих двух граничных торов по диффеоморфизму, задаваемому формулой:

$$\xi: T_w \rightarrow T_z, \quad \text{где } \xi: (z, w) \rightarrow (w^{-1}, zw^2).$$

Получившееся 3-многообразие Q_{γ_ε} расслоено на двумерные торы Лиувилля T_φ , где φ — параметр, угол на окружности γ_ε . То есть

$$T_\varphi = \{zw = \varepsilon e^{i\varphi}\}.$$

Построим теперь на каждом из этих 2-торов T_φ базис $(\lambda_\varphi, \mu_\varphi)$, гладко зависящий от параметра φ .

Наша цель — найти матрицу монодромии. Эта матрица получится как матрица перехода на торе $T_0 = T_{2\pi}$ от базиса (λ_0, μ_0) к базису $(\lambda_{2\pi}, \mu_{2\pi})$.

Мы зададим базис $(\lambda_\varphi, \mu_\varphi)$ в явном виде, предъявив соответствующие формулы. Через t мы обозначим угловой параметр на циклах $\lambda_\varphi(t)$ и $\mu_\varphi(t)$. См. рис. 9.56.

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(t) &= (\varepsilon e^{i\varphi} e^{2\pi i t}, e^{-2\varphi i t}), & t \in [0, 1], \\ \mu_\varphi(s) &= (\varepsilon s^{-1} e^{i\varphi \tau(s)}, s e^{i\varphi(1-\tau(s))}), & s \in [\varepsilon, 1]. \end{aligned}$$

Здесь $\tau(s) = (s - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1}$.

Переменная обе компоненты, сразу убеждаемся, что оба цикла лежат на торе $T_\varphi = \{zw = \varepsilon e^{i\varphi}\}$. Также очевидно, что $\lambda_\varphi(t)$ является нетривиальным циклом без самопересечений на этом торе. Проверим, что кривая $\mu_\varphi(s)$ также является нетривиальным циклом без самопересечений на этом же торе. В самом

деле, при $s = \varepsilon$ мы получаем точку $(1, \varepsilon e^{i\varphi})$ на торе T_z . При $s = 1$ мы получаем точку $(\varepsilon e^{i\varphi}, 1)$ на торе T_w . Напомним теперь, что эти два тора нужно склеить при помощи отображения ξ , чтобы получить многообразие Q_{γ_ε} . Легко видеть, что отображение ε склеивает две точки: $(1, \varepsilon e^{i\varphi})$ и $(\varepsilon e^{i\varphi}, 1)$. То есть действительно получается замкнутый цикл.

Сравним теперь базисы (λ_0, μ_0) и $(\lambda_{2\pi}, \mu_{2\pi})$. Имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= (\varepsilon e^{2\pi it}, e^{-2\pi it}), & \mu_0(s) &= (\varepsilon s^{-1}, s). \\ \lambda_{2\pi}(t) &= (\varepsilon e^{2\pi it}, e^{-2\pi it}), & \mu_{2\pi}(s) &= (\varepsilon s^{-1} e^{2\pi i t}(s), s e^{-2\pi i t}(s)). \end{aligned}$$

Ясно, что $\lambda_0 = \lambda_{2\pi}$, а $\mu_{2\pi} = \lambda_0 + \mu_0$. Отсюда и следует, что матрица монодромии имеет искомый вид. Теорема доказана для $n = 1$. Если же n произвольно, то ясно, что предыдущая формула примет следующий вид: $\lambda_0 = \lambda_{2\pi}$, а $\mu_{2\pi} = n\lambda_0 + \mu_0$. Это вытекает, например, из того, что для случая n особых точек матрица монодромии, отвечающая $n = 1$, возводится в n -ю степень. Последнее утверждение хорошо видно после перехода к n -листному накрытию. См. рис. 9.57. Теорема полностью доказана. ■

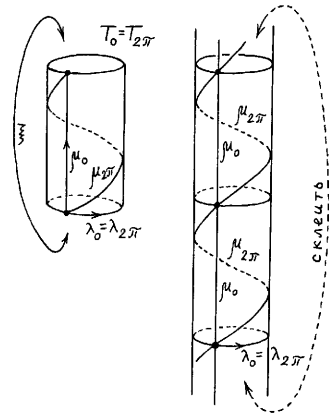


Рис. 9.57

Комментарий. Граничный тор T_z , — он же тор T_w после склейки, — пересекается со всеми торами вида T_φ по циклам λ_φ . Но все эти циклы на торе T_z гомологичны одному и тому же циклу λ_0 . Кроме того, все циклы вида λ_φ являются орбитами действия окружности S^1 на Q_{γ_ε} .

Вкратце опишем теперь и другое доказательство этой же теоремы. Отметим, что на 3-многообразии Q_{γ_ε} есть *два разных* расслоения на двумерные торы. Мы использовали оба. Первое расслоение — на торы Лиувилля, то есть на торы вида T_φ . Базой расслоения является окружность γ_ε . Второе — расслоение на торы T'_s вида:

$$T'_s = \{|z| = \varepsilon s^{-1}, |w| = s\}. \quad \text{Здесь } s \in [\varepsilon, 1].$$

При этом тор T_z , — он же тор T_w после склейки, — естественно включен в это семейство. А именно, $T'_1 = T_w$, а $T'_\varepsilon = T_z$.

Матрицу монодромии расслоения Q_{γ_ε} над окружностью можно проинтерпретировать в терминах фундаментальной группы многообразия Q_{γ_ε} . Имеет место следующее общее утверждение. Пусть $\pi: Q_{\gamma_\varepsilon} \rightarrow S^1$ является расслоением со слоем 2-тор. Выберем три образующих в группе $\pi_1(Q_{\gamma_\varepsilon})$. Пусть γ — образующая, гомеоморфно проектирующаяся на базу S^1 , а α и β — две образующие на слое, то есть на торе. См. рис. 9.58. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(Q_{\gamma_\varepsilon})$

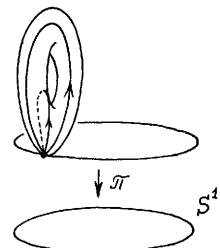


Рис. 9.58

порождена этими тремя образующими α, β, γ , между которыми нужно задать следующие соотношения: 1) α и β — коммутируют, и 2) соотношение

$$\begin{pmatrix} \gamma\alpha\gamma^{-1} \\ \gamma\beta\gamma^{-1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

где C — некоторая матрица. Матрица C и есть *матрица монодромии* данного расслоения. Отметим, что мы использовали здесь аддитивную запись, поскольку образующие α и β коммутируют.

Вычислим фундаментальную группу многообразия Q_{γ_ε} , используя сначала структуру расслоения на торы T'_s . В качестве γ мы возьмем цикл $\gamma = \mu_0(s) = (\varepsilon s^{-1}, s)$ (см. выше). В качестве α и β возьмем два базисных цикла на торе $T_w = \{|w| = 1, |z| = \varepsilon\}$, задающиеся следующими явными формулами в координатах (z, w) :

$$\alpha = (\varepsilon e^{2\pi it}, 1), \quad \beta = (\varepsilon, e^{-2\pi it}), \quad t \in [0, 1].$$

Используя отображение ξ , склеивающее многообразие Q_{γ_ε} , и действующее по формуле $\xi: (z, w) \rightarrow (w^{-1}, zw^2)$, можно сразу выписать матрицу монодромии в базисе α, β . Эта матрица задает отображение ψ_* фундаментальной группы тора. Она будет такова:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, соотношения в фундаментальной группе многообразия Q_{γ_ε} таковы:

$$\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta^{-1}, \quad \gamma\beta\gamma^{-1} = \alpha\beta^2.$$

Перейдем теперь к другим образующим в фундаментальной группе многообразия Q_{γ_ε} . А именно, к образующим, отвечающим расслоению многообразия на торы Лиувилля: $Q_{\gamma_\varepsilon} \rightarrow \gamma_\varepsilon$. На торе T_φ , являющемся слоем этого расслоения, при $\varphi = 0$, возьмем образующие $\tilde{\alpha} = \lambda_0, \tilde{\beta} = \mu_0$ (см. выше). Из явных формул для них сразу следует, что

$$\tilde{\alpha} = \alpha\beta, \quad \tilde{\beta} = \gamma.$$

В качестве цикла $\tilde{\gamma}$, однозначно проектирующегося на окружность γ_ε , возьмем, например, α .

Перепишем теперь соотношения в фундаментальной группе Q_{γ_ε} в новых образующих $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$. Отметим, что образующие $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ коммутируют, как базисные циклы, лежащие на торе $T_{\varphi=0}$. Впрочем, в этом можно убедиться и формально, используя выписанные выше соотношения.

Интересующая нас матрица монодромии в новом базисе «с волнами» определяется так (см. выше):

$$\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1} \\ \tilde{\gamma}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1} \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем элементы $\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}$ и $\tilde{\gamma}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}$. Получим: $\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1} = \alpha\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta = \tilde{\alpha}$, и далее $\tilde{\gamma}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1} = \alpha\gamma\alpha^{-1} = \alpha(\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})\gamma = \alpha\beta\gamma = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$. То есть, матрица монодромии \tilde{C} выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана. ■

Замечание. Из явного вида матрицы монодромии в случае особенности типа фокус-фокус видно, что она имеет «собственный вектор». Более точно, на каждом торе Лиувилля существует цикл, инвариантный относительно действия группы монодромии. Другими словами, во всей окрестности $U(L)$ особенности типа фокус-фокус можно выбрать «гладкое поле окружностей». На самом деле это поле нам уже известно. Это — в точности орбиты действия окружности S^1 на 4-многообразии $U(L)$.

Замечание. Рассмотрим 4-многообразие $U(L) \setminus L$, которое, очевидно, является расслоением со слоем тор Лиувилля над двумерным диском без точки, т. е. над кольцом. Напомним, что мы рассматриваем случай особенности типа фокус-фокус, для которой бифуркационная диаграмма состоит из одной точки, из центра диска. Согласно теореме Дюистермаата на базе такого расслоения всегда существует целочисленная аффинная структура [275]. Другими словами, базу можно представить в виде объединения некоторого числа карт с локальными координатами так, что функции перехода из карты в карту задаются линейными аффинными преобразованиями с целочисленными матрицами. Рассмотрим группу голономии этой аффинной структуры. Это будет некоторая подгруппа в группе $GL(2, \mathbb{Z})$. В нашем случае база двумерна. Легко видеть, что группа голономии в нашем случае просто совпадает с группой монодромии расслоения $Q_{\gamma_\varepsilon} \rightarrow \gamma_\varepsilon$. И следовательно, как мы показали выше, изоморфна группе \mathbb{Z} , образующая которой представлена матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. В следующей части нашей книги мы приведем конкретные примеры физических систем, в которых встречаются особенности типа фокус-фокус. К таким системам относятся, в частности, известные интегрируемые системы Лагранжа и Клебша в динамике тяжелого твердого тела, а также — сферический маятник и уравнения движения так называемого 4-мерного твердого тела.

Замечание. Особенности типа фокус-фокус исследовались также в ряде других работ, например, в [265].

Замечание. Отметим, что локально особенность типа фокус-фокус можно рассматривать как особенность комплексной функции двух комплексных переменных. К таким особенностям можно применить (локально) классическую теорию Пикара–Лефшеца. В частности, характер монодромии тоже имеет естественную интерпретацию в рамках этой классической теории. Этот случай — простейший с точки зрения общей теории Пикара–Лефшеца. Однако с глобальной точки зрения особенность фокус-фокус не обязана быть комплексной (она комплексная лишь локально). Следовательно, при исследовании ее глобальных свойств нужны дополнительные соображения.

9.9. Представление многомерных невырожденных особенностей слоений Лиувилля в виде почти прямых произведений

Здесь мы кратко изложим теорему Т. З. Нгуена [344]. Она обобщает уже доказанный выше результат о распадении четырехмерных особенностей слоений Лиувилля в почти прямые произведения 2-атомов. Оказывается, аналогичное утверждение справедливо и для широкого класса многомерных особенностей слоений Лиувилля интегрируемых систем с любым числом степеней свободы.

Напомним, что как и выше, под особенностью слоения Лиувилля мы понимаем малую окрестность особого слоя, рассматриваемую с точностью до послышной эквивалентности. Можно говорить о ростке слоения в окрестности особого слоя.

Будем называть особенность слоения Лиувилля невырожденной, если все особые точки отображения момента \mathcal{F} , лежащие на особом слое, являются невырожденными в смысле определения 1.24 главы 1 тома 1. Возьмем особые точки минимального ранга i на особом слое L . Тогда для каждой такой точки определен ее тип, а именно, тройка целых чисел (m_1, m_2, m_3) , описанная в главе 1. Можно показать, что тип (m_1, m_2, m_3) одинаков для всех особых точек минимального ранга на данном особом слое слоения Лиувилля. Следовательно, можно говорить о ранге i особого слоя слоения Лиувилля и о его типе (m_1, m_2, m_3) .

Прежде чем формулировать теорему, нам потребуется еще одно дополнительное условие на особенности слоения Лиувилля. Это условие — *условие нерасщепляемости* — выделяет широкий и естественный класс таких особенностей. Во всех известных нам физических и геометрических примерах интегрируемых систем оно выполняется.

Начнем с простейшего примера. Пусть мы имеем интегрируемую систему с двумя степенями свободы. Рассмотрим ее ограничение на фиксированный регулярный уровень энергии $Q^3 = (H = h)$. Выше мы определили топологическую устойчивость системы на Q^3 . Это означает, что при малом изменении уровня энергии h топологический тип слоения Лиувилля не меняется. Точнее, слоения Лиувилля на близких уровнях энергии послышно эквивалентны исходному слоению. На самом деле это условие носит локальный характер, и его можно переформулировать в терминах бифуркационной диаграммы отображения момента \mathcal{F} в окрестности каждого отдельного 3-атома в Q^3 .

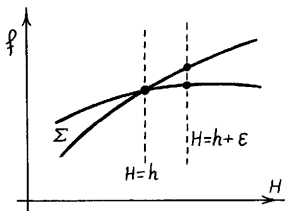


Рис. 9.59

Единственным случаем, когда система с невырожденными особенностями неустойчива, является ситуация распада сложного 3-атома в объединение нескольких более простых 3-атомов. Это распадение можно увидеть непосредственно на бифуркационной диаграмме. Действительно, рассмотрим невырожденные критические окружности на данном 3-атоме. Все они находятся на одном уровне дополнительного интеграла f . При отображении момента \mathcal{F} все они отображаются в одну и ту же точку. С другой стороны, каждая из этих окружностей включается в однопараметрическое семейство, возникающее при изменении h .

Это семейство окружностей отображается в гладкую дугу на плоскости (H, f) . Количество таких дуг равно числу критических окружностей данного 3-атома.

Если распада 3-атома не происходит, то очевидно, что все эти дуги совпадают на плоскости $\mathbb{R}^2(H, f)$. Наоборот, если 3-атом распадается, то среди критических окружностей есть такие, которые переходят на разные уровни интеграла f . Поэтому соответствующие кривые на плоскости (H, f) расходятся (рис. 9.59).

Условие «нераспадения» 3-атома можно переформулировать еще и так. Рассмотрим особый слой L слоения Лиувилля в M^4 и точки x , где отображение момента \mathcal{F} имеет минимальный ранг. В рассматриваемом случае — это точки x , лежащие на критических окружностях. Отметим, что при отображении момента \mathcal{F} весь слой L переходит в одну точку. Выберем на каждой такой критической окружности ровно одну точку, представителя x_i . Для каждой точки x_i возьмем ее небольшую окрестность в M^4 , рассмотрим образ этой окрестности в $\mathbb{R}^2(H, f)$ и ее локальную бифуркационную диаграмму Σ_{x_i} . Легко видеть, что диаграмма Σ_{x_i} не зависит от выбора представителя x_i на данной критической окружности. В результате мы получаем на плоскости $\mathbb{R}^2(H, f)$ несколько локальных диаграмм вида Σ_{x_i} , когда x_i пробегает все критические точки, лежащие на критических окружностях, на данном особом слое L .

Теперь условие нераспадения 3-атома формулируется так: все локальные бифуркационные диаграммы Σ_{x_i} должны совпадать друг с другом и, следовательно, совпадать с диаграммой локально, в окрестности точки $\mathcal{F}(L)$. Другими словами, бифуркационная диаграмма не расщепляется на несколько кусков.

Совершенно аналогичным образом условие нерасщепляемости переформулируется и для случая произвольных невырожденных особенностей, в том числе и для многомерного случая, т. е. с произвольным числом степеней свободы.

Для аналитических многомерных систем достаточно почти дословно повторить описанное выше определение. Рассмотрим невырожденную особенность лиувиллева слоения на M^{2n} . Пусть L — соответствующий особый слой. Через Σ_L обозначим локальную бифуркационную диаграмму отображения момента \mathcal{F} , ограниченного на достаточно малую окрестность слоя L в M^{2n} . Рассмотрим теперь точки минимального ранга на особом слое L слоения Лиувилля. Можно показать, что эти критические точки заполняют критические торы размерности i . Выберем на каждом из них точку-представителя x_j . Построим для ее достаточно малой окрестности в M^{2n} локальную бифуркационную диаграмму Σ_{x_j} в \mathbb{R}^n . Требуется, чтобы для всех точек-представителей $\{x_j\}$ эти бифуркационные диаграммы $\{\Sigma_{x_j}\}$ совпадали между собой. Более того, здесь нужно еще дополнительно потребовать, чтобы в Σ_L «ничего другого не было», то есть чтобы диаграмма Σ_L совпала со всеми диаграммами Σ_{x_j} для всех x_j .

Вспомним теперь, что вид локальных диаграмм Σ_{x_j} нами был уже описан. См. главу 1 тома 1. С точностью до диффеоморфизма — это канонические бифуркационные диаграммы модельных особенностей. Эти бифуркационные диаграммы на самом деле «кусочно-линейные» и состоят из «кусков плоскостей». Более точно, для особенности ранга i нужно рассмотреть некоторый набор трансверсально пересекающихся плоскостей в евклидовом пространстве, в количест-

ве $n - i$. Получится некоторый клеточный комплекс. Искомые бифуркационные диаграммы Σ_{x_j} являются его частями», то есть клеточными подкомплексами в «кусочно-линейных» комплексах указанного вида. См. рис. 1.12, главы 1, тома 1.

Определение 9.7. Невырожденная особенность слоения Лиувилля в M^{2n} удовлетворяет условию нерасщепляемости, если ее бифуркационная диаграмма Σ в \mathbb{R}^n приводится некоторым диффеоморфизмом к канонической диаграмме, соответствующей типу данной особенности. См. главу 1.

Комментарий. В основу определения 9.7 мы положили свойства бифуркационной диаграммы данной системы. Дело в том, что приступая к анализу той или иной системы, необходимо сначала проверить выполнимость условия нерасщепляемости. Реально такую проверку можно сделать именно на основе бифуркационной диаграммы, которая обычно известна.

Комментарий. Невырожденные особенности, удовлетворяющие условию нерасщепляемости, являются в определенном смысле наиболее простыми. Их бифуркационные диаграммы «не содержат ничего лишнего». Мы имеем в виду следующее. Бифуркационная диаграмма невырожденной особенности общего вида, т. е. не обязательно нерасщепляемой, всегда содержит в себе некоторую каноническую бифуркационную диаграмму, как подмножество. Условие нерасщепляемости означает, что кроме этой канонической бифуркационной диаграммы в диаграмме «больше ничего нет».

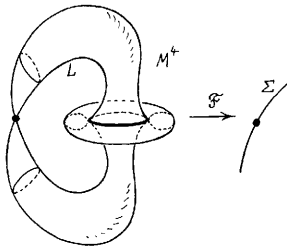


Рис. 9.60

Комментарий. Укажем пример невырожденной, однако расщепляемой, в указанном смысле, особенности. На рис. 9.60 изображен особый слой L слоения Лиувилля, на котором есть одна точка типа фокус-фокус и одна критическая седловая окружность. Эта окружность является линией касания 2-тора со сферой, у которой отождествлены две точки. Эти точки и дают особенность типа фокус-фокус. Ясно, что бифуркационная диаграмма этой особенности является гладкой дугой. Дуга проходит через точку, в которую проектируются как точка типа фокус-фокус со

слоя L , так и седловая критическая окружность. В смысле нашего определения, эта особенность конечно расщепляема. Она удовлетворяла бы условию нерасщепляемости, если бы состояла только из одной точки. В рассматриваемом случае есть «лишний кусок» — это дуга, проходящая через точку.

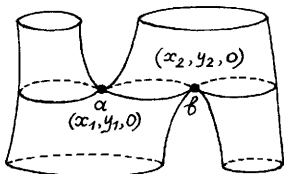


Рис. 9.61

Здесь ясно виден один из механизмов, рождающих расщепляемые особенности. Появление «лишней» дуги связано с тем, что на особом слое одновременно с точкой максимального вырождения типа фокус-фокус лежит еще и замкнутая орбита пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 . В общем случае ситуация аналогична: сделанное нами ограничение запрещает существование на особом слое L ранга i замкнутых орбит раз-

мерности больше i . Отметим, что в рассмотренном примере точка типа фокус-фокус и одномерная замкнутая орбита могут быть разведены на разные слои путем малого возмущения пуассонова действия \mathbb{R}^2 . В результате особенность расщепится на две более простые особенности, которые уже будут удовлетворять условию нерасщепляемости.

Комментарий. Приведем второй пример невырожденной расщепляемой особенности. Рассмотрим двумерную поверхность P^2 в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, показанную на рис. 9.61. Функция высоты $f(x, y, z) = z$ имеет ровно одно критическое значение $z = 0$. Причем на соответствующем уровне функции лежат ровно две седловые критические точки $a = (x_1, y_1, 0)$ и $b = (x_2, y_2, 0)$. Пусть поверхность P является неособой двумерной поверхностью уровня некоторой гладкой функции H , то есть $P^2 = \{H(x, y, z) = 0\}$. Рассмотрим 4-мерное евклидово пространство как симплектическое 4-многообразие $M^4 = \mathbb{R}^4(x, y, u, v)$, с симплектической структурой $\omega = dx \wedge dy + du \wedge dv$. Построим две функции \tilde{H} и \tilde{f} на M^4 , положив:

$$\tilde{H} = H(x, y, u^2 + v^2), \quad \tilde{f} = f(x, y, u^2 + v^2).$$

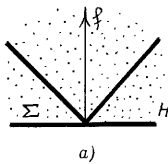


Рис. 9.62

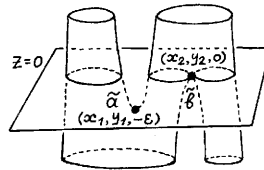
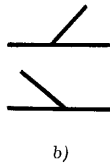
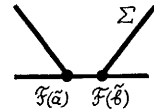


Рис. 9.63



Функции \tilde{H} и \tilde{f} коммутируют на M^4 и задают отображение момента $\mathcal{F}: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(H, f)$. Точки \tilde{a} и \tilde{b} в M^4 с координатами $\tilde{a} = (x_1, y_1, 0, 0)$ и $\tilde{b} = (x_2, y_2, 0, 0)$ являются изолированными невырожденными критическими точками типа центр-седло для слоения Лиувилля, определяемого функциями \tilde{H}, \tilde{f} . Обе точки лежат на одном особом слое L слоения Лиувилля. Бифуркационная диаграмма отображения момента \mathcal{F} показана на рис. 9.62. Множество критических точек отображения момента состоит из трех компонент. Первая — это двумерная плоскость, состоящая из точек вида $(x, y, 0, 0)$. Все такие точки являются критическими для функции \tilde{f} . Вторая и третья компоненты тоже двумерны и порождены критическими точками a и b . Первая компонента проектируется при отображении момента \mathcal{F} в горизонтальную прямую (рис. 9.62), являющуюся границей верхней полуплоскости. Вторая компонента проектируется в левый луч, а третья компонента — в правый луч. Локальные бифуркационные диаграммы для каждой из точек \tilde{a} и \tilde{b} показаны на рис. 9.62. Это — прямая с левым лучом, и прямая с правым лучом. Видно, что ни одна из них не совпадает с полной бифуркационной диаграммой, которая состоит из прямой с обоими лучами. Следовательно, эта особенность неустойчива. Как и в предыдущем примере, описанная особенность слоения Лиувилля может быть сделана нерасщепляемой при подходящем малом шевелении пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 . Соответствующее возмущение изображено на рис. 9.63.

КОММЕНТАРИЙ. Еще один механизм возникновения расщепляемых особенностей появляется в гладком случае. Здесь проявляется отличие от аналитического случая, где такой механизм не действует. Это — уже знакомое нам, по главе 1 тома 1, расщепление дуг бифуркационной диаграммы в особой точке диаграммы. Рассмотрим невырожденную особенность аналитического лиувиллева слоения. Оказывается, бывают такие ситуации, когда при аналитическом возмущении эта особенность не меняет своего топологического типа, а при подходящем гладком возмущении, — меняет. Связано это (см. главу 1) именно с тем, что гладким возмущением можно расщепить одну из дуг диаграммы Σ в некоторой особой точке. Например, на две дуги, касающиеся друг друга в точке расщепления. Аналитическим же возмущением такого расщепления добиться нельзя.

КОММЕНТАРИЙ. Следует отметить, что мы частично изменили терминологию, использовавшуюся в первоначальной работе Т. З. Нгуена. Он называл описанные выше особенности «устойчивыми». Мы же называли их «удовлетворяющими условию нерасщепляемости». Дело в том, что обычно под термином «устойчивость» понимается устойчивость по отношению к каким-либо возмущениям. На самом деле, между устойчивостью в этом смысле и понятием нерасщепляемости, конечно, существует некоторая связь, что, в частности, показывают приведенные выше примеры. Тем не менее, эти условия не эквивалентны.

Особенности интегрируемых систем, устойчивые по отношению к малым возмущениям системы, т. е. гамильтониана и интеграла, обсуждаются в приложении, написанном В. В. Калашниковым (мл.).

Опишем теперь простой и естественный способ конструирования многомерных особенностей слоения Лиувилля. Возьмем простейшие особенности, то есть двумерные атомы и четырехмерные особенности типа фокус-фокус, которые описаны и классифицированы в предыдущем разделе. Возьмем прямое произведение какого-то числа таких двумерных и четырехмерных особенностей, т. е. многообразий, расслоенных, соответственно, на окружности и на 2-торы.

После этого следует домножить получившееся многообразие на «тривиальный сомножитель», являющийся прямым произведением вида $T^i \times D^i$, т. е. произведением тора на диск. Эти сомножители снабжены естественным слоением Лиувилля без особенностей.

На каждом сомножителе была какая-то симплектическая структура и структура элементарного слоения Лиувилля, задаваемого коммутирующими функциями. Ясно, что на всем прямом произведении естественно возникает некоторая симплектическая структура, получающаяся как прямая сумма симплектических структур сомножителей. При этом и функции естественным образом продолжаются с прямых сомножителей до полного набора коммутирующих функций на прямом произведении.

Таким образом, на описанном прямом произведении естественно возникает структура слоения Лиувилля: его слоями являются прямые произведения слоев элементарных слоений Лиувилля на сомножителях.

Многомерные особенности описанного типа мы будем называть «особенностями типа прямого произведения». Конечно, здесь мы рассматриваем эти особенности с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Эту конструкцию можно слегка обобщить, введя класс особенностей, которые естественно назвать «почти прямыми произведениями». Расширение класса происходит также очень естественным способом. Рассмотрим модельную особенность $U^{2n} = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$ типа прямого произведения со стандартной симплектической структурой на нем, полученной прямым суммированием симплектических структур сомножителей. Здесь V_k — описанные выше сомножители трех типов: V_k является либо 2-атомом (типа A или седловым), либо четырехмерной окрестностью слоя типа фокус-фокус, либо тривиальным расслоением на торы $T^i \times D^i$.

Пусть теперь на этой особенности типа прямого произведения действует некоторая конечная группа G , причем действие удовлетворяет следующим условиям.

- 1) Действие свободное.
- 2) Действие покомпонентное, т. е. группа G переводит в себя каждый из прямых сомножителей V_k . Это означает, что действие группы G коммутирует с проекциями прямого произведения на каждый из прямых сомножителей. Другими словами, если g — элемент группы G , а φ — действие на $U^{2n} = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$, то действие φ имеет вид:

$$\varphi(g)(x_1, \dots, x_p) = (\varphi_1(g)(x_1), \dots, \varphi_p(g)(x_p)),$$

где φ_k — действие группы G на компоненте V_k .

- 3) На каждом прямом сомножителе действие φ_k является симплектическим и послонным, т. е. сохраняет структуру слоения Лиувилля. Более того, будем предполагать, что действие φ_k сохраняет и соответствующие функции (см. выше), определяющие слоение Лиувилля.
- 4) На каждом эллиптическом прямом сомножителе V_s , — т. е. попросту на 2-атомах A , — действие φ_s группы G является тривиальным.

Рассмотрим фактор-пространство $U^{2n} = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$ по такому действию группы G . Этот фактор U^{2n}/G будет многообразием, поскольку действие группы G — свободное. На фактор-многообразии U^{2n}/G также переносятся все описанные структуры. А именно, — симплектическая структура и структура слоения Лиувилля. В результате получается симплектическое $2n$ -мерное многообразие U^{2n}/G , со слоением Лиувилля, определяемым набором из n коммутирующих гладких независимых функций. Это слоение Лиувилля обладает особым слоем, на котором происходит бифуркация n -мерных торов Лиувилля. Итак, мы построили некоторую многомерную особенность.

Определение 9.8. Сконструированные модельные особенности вида U^{2n}/G мы будем называть *особенностями типа «почти прямого произведения»*. Все особенности, лиувиллево эквивалентные этим модельным особенностям, мы также назовем *особенностями типа «почти прямого произведения»*.

Теорема 9.12 (Т. З. Нгуен). *Любая невырожденная многомерная особенность, удовлетворяющая условию нерасщепляемости, является особенностью типа почти прямого произведения.*

В этом смысле типичные, т. е. нерасщепляемые, многомерные особенности полностью описываются при помощи 2-атомов и 4-мерных особенностей типа фокус-фокус.

Мы опускаем здесь доказательство этой теоремы в произвольном многомерном случае. Для четырехмерного случая она уже была доказана нами выше.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует подчеркнуть, что теорема 9.12 носит существенно топологический, а не симплектический характер. Более точно, утверждается, что любая невырожденная нерасщепляемая особенность послойно гладко эквивалентна некоторой модельной особенности типа почти прямого произведения. Но это послойное отображение (диффеоморфизм) отнюдь не обязано быть симплектоморфизмом. То есть симплектическая форма на почти прямом, или на топологически прямом произведении может не быть прямой суммой симплектических структур прямых сомножителей.

В качестве примера приведем полученную В. В. Калашниковым (мл.) классификацию шестимерных особенностей типа седло-седло-седло сложности один, т. е. с одной критической невырожденной точкой ранга ноль на особом слое.

Теорема 9.13 (В. В. Калашников (мл.)). *Пусть особый слой L типа седло-седло-седло в шестимерном симплектическом многообразии содержит ровно одну особую невырожденную точку. Все такие различные особенности перечислены в таблице 9.4. Таким образом, всего насчитывается ровно 32 разных особенности.*

КОММЕНТАРИЙ. Стоит отметить, что все эти особенности «изготовлены» всего лишь из четырех различных 2-атомов, а именно: B , D_1 , C_2 , P_4 . Все эти 2-атомы показаны на рис. 9.64, рис. 9.65, рис. 9.66, рис. 9.67. Никаких других, более сложных атомов здесь, как выяснилось, не появляется.

Классификация указанных особенностей дана в терминах почти прямых произведений 2-атомов. Во втором столбце таблицы указаны три сомножителя, образующих данную особенность. В последнем столбце таблицы 9.4 указана группа G , действующая на прямом произведении этих 2-атомов. После факторизации по ней, получается сама особенность. Действие группы G описано в третьем столбце таблицы. Во всех случаях (кроме случая 19) группа G является прямым произведением нескольких экземпляров группы \mathbb{Z}_2 , и поэтому имеет k естественных образующих (где k — число сомножителей). Для каждой из этих образующих в третьем столбце таблицы указано ее действие на прямом произведении трех 2-атомов. Поскольку это действие является покомпонентным, то мы указываем соответствующие отображения (симметрии 2-атомов) на каждой компоненте. Список всех необходимых симметрий приведен на рис. 9.64–9.67.

Например, особенность номер 8 получается так. Нужно взять прямое произведение трех 2-атомов $C_2 \times D_1 \times C_2$ и рассмотреть на нем действие группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Эта группа действует на произведении трех 2-атомов покомпонентно следующим образом.

Первая образующая e_1 группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ действует так:

$$e_1(C_2 \times D_1 \times C_2) = (\alpha(C_2) \times \text{id}(D_1) \times \beta(C_2)).$$

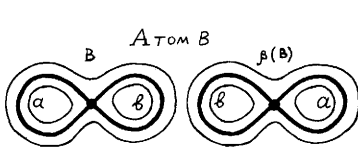
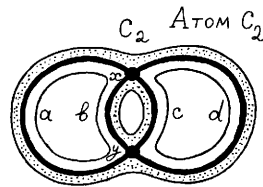
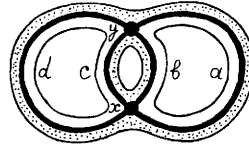


Рис. 9.64



$\alpha(C_2)$



$\beta(C_2)$

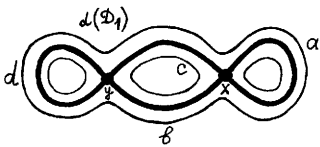
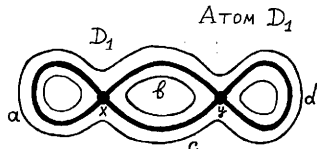
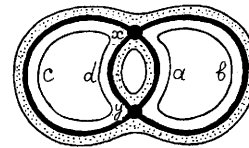


Рис. 9.65

Рис. 9.66

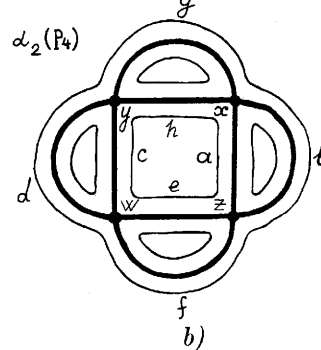
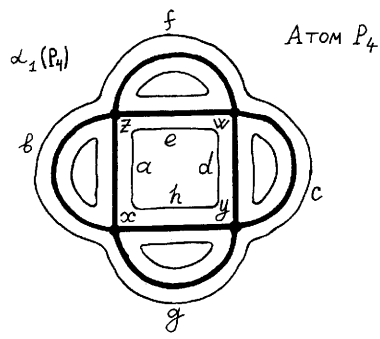
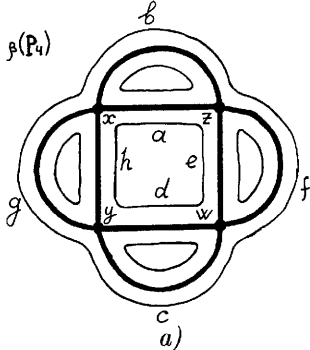
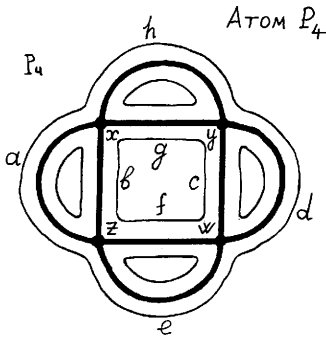


Рис. 9.67

Вторая образующая e_2 группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ действует так:

$$e_2(C_2 \times D_1 \times C_2) = (\text{id}(C_2) \times \alpha(D_1) \times \beta(C_2)).$$

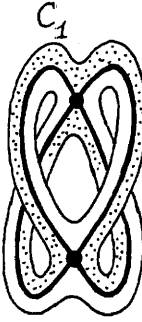
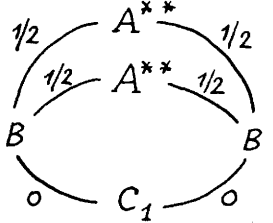
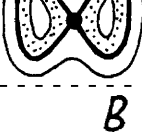
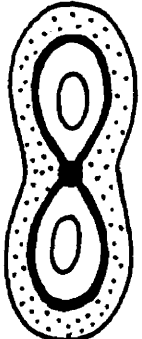
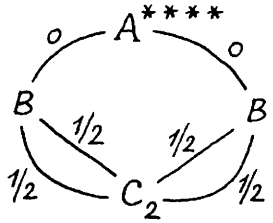
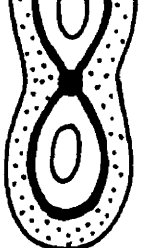
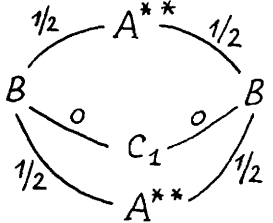
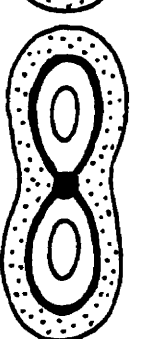
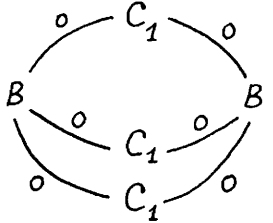
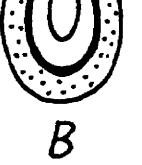
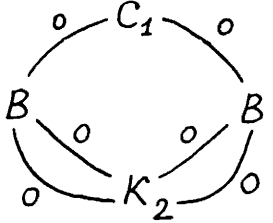
Третья образующая e_3 группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ действует так:

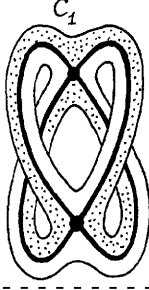
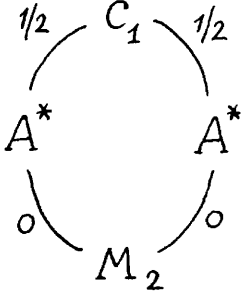
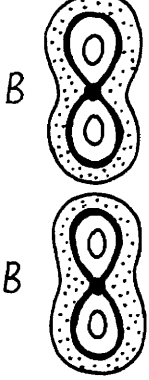
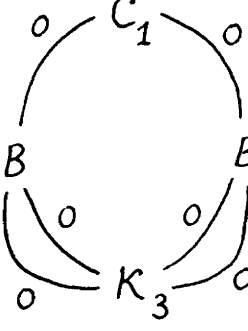
$$e_3(C_2 \times D_1 \times C_2) = (\beta(C_2) \times \text{id}(D_1) \times \alpha(C_2)).$$

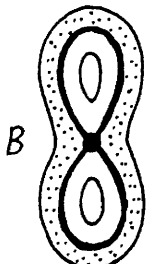
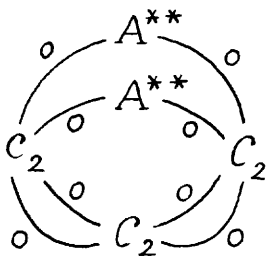
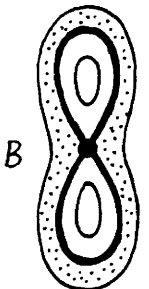
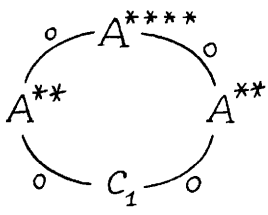
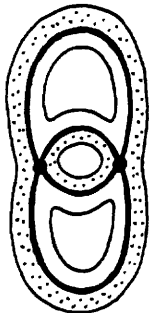
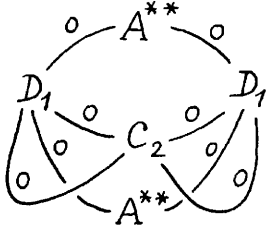
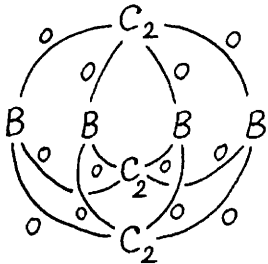
Здесь α и β — симметрии 2-атомов, показанные на рис. 9.65, рис. 9.66. На этих рисунках указаны образы ребер одномерных остовов 2-атомов. По этой информации сама симметрия (действующая на атоме в целом) легко восстанавливается.

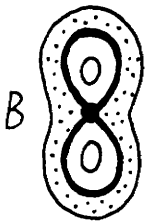
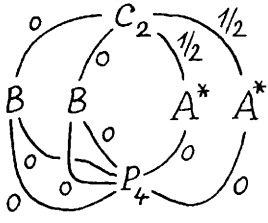
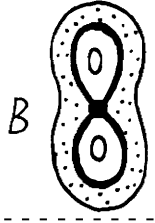
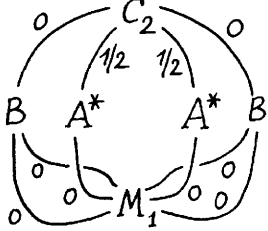
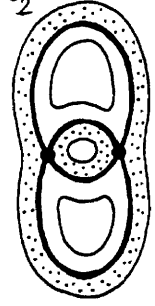
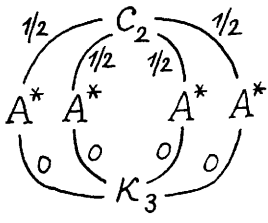
Таблицы к главе 9

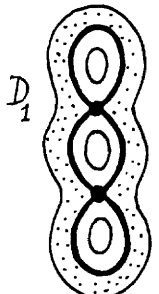
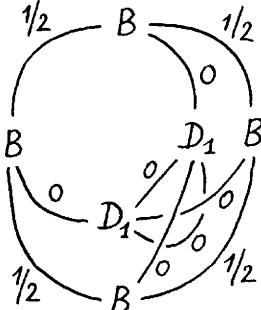
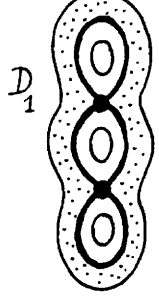
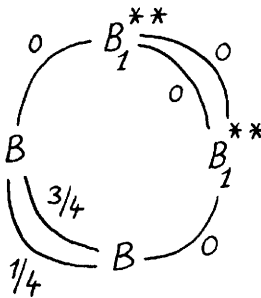
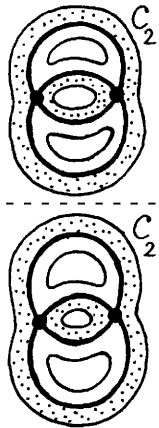
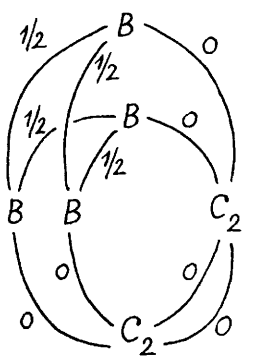
Таблица 9.1

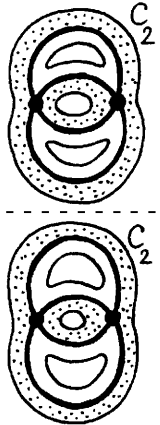
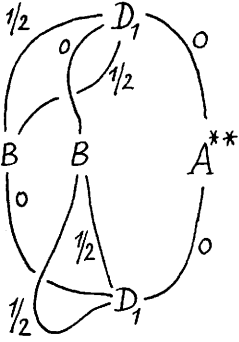
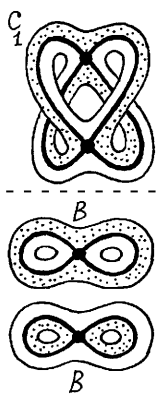
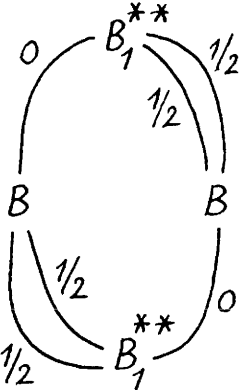
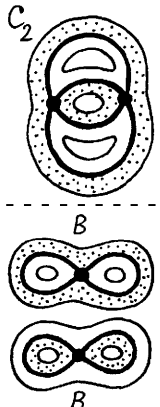
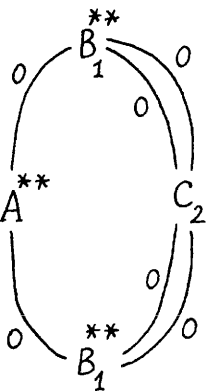
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																														
 <p>C_1</p>	<table border="1" style="text-align: center; width: 100%;"> <tr><td></td><td>b</td><td>c</td><td>a</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>d</td><td>b</td><td>c</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>b</td><td>c</td><td>a</td><td>d</td><td></td></tr> </table>		b	c	a	d		1	3	1	3	1			a	d	b	c		2	4	2	4	2			b	c	a	d		 <p style="text-align: right;">1</p>
	b	c	a	d																												
1	3	1	3	1																												
	a	d	b	c																												
2	4	2	4	2																												
	b	c	a	d																												
 <p>B</p> 	<table border="1" style="text-align: center; width: 100%;"> <tr><td></td><td>b</td><td>c</td><td>a</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>d</td><td>b</td><td>c</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>b</td><td>c</td><td>a</td><td>d</td><td></td></tr> </table>		b	c	a	d		1	3	2	4	1			a	d	b	c		1	3	2	4	1			b	c	a	d		 <p style="text-align: right;">2</p>
	b	c	a	d																												
1	3	2	4	1																												
	a	d	b	c																												
1	3	2	4	1																												
	b	c	a	d																												
	<table border="1" style="text-align: center; width: 100%;"> <tr><td></td><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>b</td><td>d</td><td>a</td><td>c</td><td></td></tr> </table>		a	c	b	d		1	3	1	3	1			a	c	b	d		2	4	2	4	2			b	d	a	c		 <p style="text-align: right;">3</p>
	a	c	b	d																												
1	3	1	3	1																												
	a	c	b	d																												
2	4	2	4	2																												
	b	d	a	c																												
	<table border="1" style="text-align: center; width: 100%;"> <tr><td></td><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> </table>		a	c	b	d		1	3	1	3	1			a	c	b	d		2	4	2	4	2			a	c	b	d		 <p style="text-align: right;">4</p>
	a	c	b	d																												
1	3	1	3	1																												
	a	c	b	d																												
2	4	2	4	2																												
	a	c	b	d																												
 <p>B</p>	<table border="1" style="text-align: center; width: 100%;"> <tr><td></td><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> </table>		a	c	b	d		1	3	1	4	1			a	c	b	d		2	4	2	3	2			a	c	b	d		 <p style="text-align: right;">5</p>
	a	c	b	d																												
1	3	1	4	1																												
	a	c	b	d																												
2	4	2	3	2																												
	a	c	b	d																												

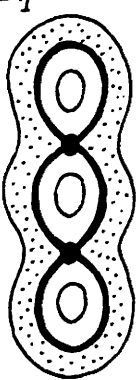
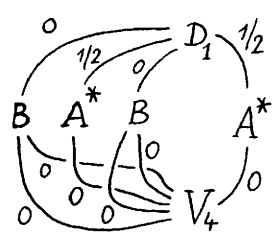
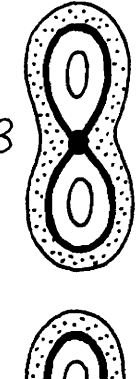
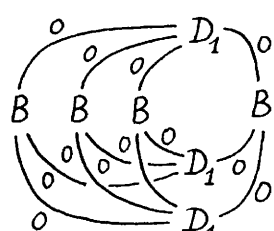
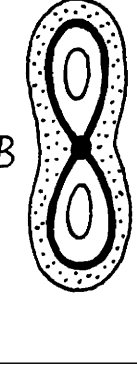
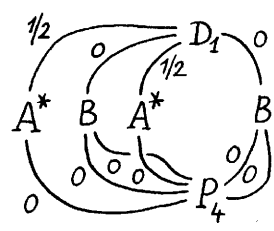
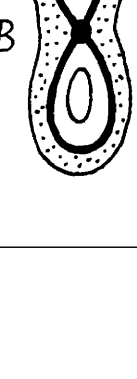
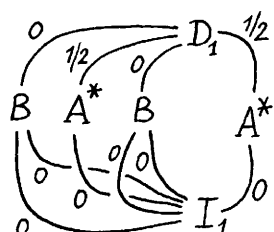
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																														
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> <td></td> </tr> </table>		a	c	b	d		1	3	1	3	2			a	c	b	d		2	4	2	4	1			a	c	b	d		 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 30px; float: right;">6</div>
	a	c	b	d																												
1	3	1	3	2																												
	a	c	b	d																												
2	4	2	4	1																												
	a	c	b	d																												
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> <td></td> </tr> </table>		a	c	b	d		1	3	2	4	1			a	c	b	d		2	4	1	3	2			a	c	b	d		 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 30px; float: right;">7</div>
	a	c	b	d																												
1	3	2	4	1																												
	a	c	b	d																												
2	4	1	3	2																												
	a	c	b	d																												

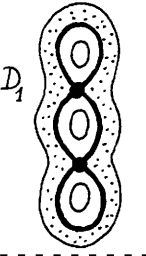
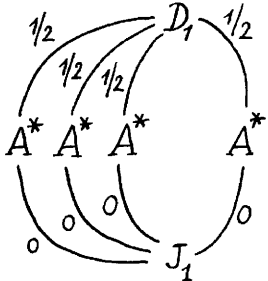
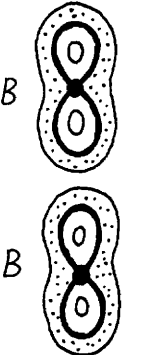
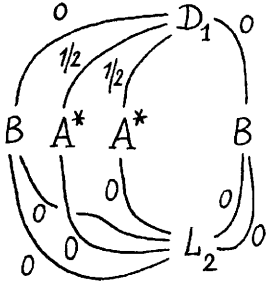
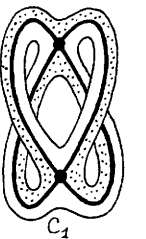
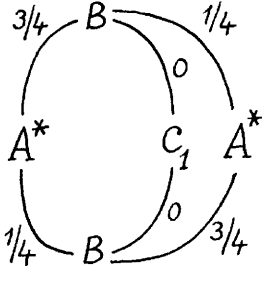
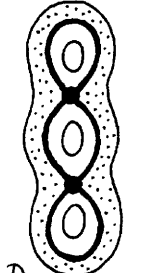
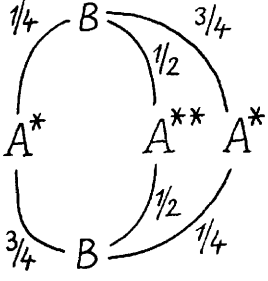
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																									
 <p><i>B</i></p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>b</td> <td>d</td> <td>a</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> </tr> </table>		a	c	b	d	1	3	1	3	1		b	d	a	c	2	4	2	4	2		a	c	b	d	 <p style="text-align: right;">8</p>
	a	c	b	d																							
1	3	1	3	1																							
	b	d	a	c																							
2	4	2	4	2																							
	a	c	b	d																							
 <p><i>B</i></p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>b</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>d</td> <td>a</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>b</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>c</td> </tr> </table>		b	c	b	c	1	3	2	4	1		a	d	a	d	1	3	2	4	1		b	c	b	c	 <p style="text-align: right;">9</p>
	b	c	b	c																							
1	3	2	4	1																							
	a	d	a	d																							
1	3	2	4	1																							
	b	c	b	c																							
 <p><i>C₂</i></p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> </tr> </table>		a	c	b	d	1	3	1	3	1		a	c	b	d	2	4	2	4	2		a	c	b	d	 <p style="text-align: right;">10</p>
	a	c	b	d																							
1	3	1	3	1																							
	a	c	b	d																							
2	4	2	4	2																							
	a	c	b	d																							
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> </table>		a	b	d	c	1	3	1	3	1		a	b	d	c	2	4	2	4	2		a	b	d	c	 <p style="text-align: right;">11</p>
	a	b	d	c																							
1	3	1	3	1																							
	a	b	d	c																							
2	4	2	4	2																							
	a	b	d	c																							

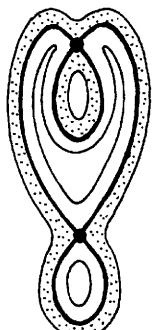
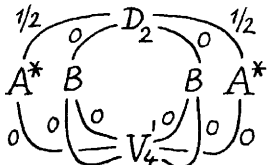
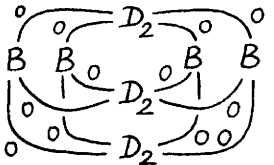
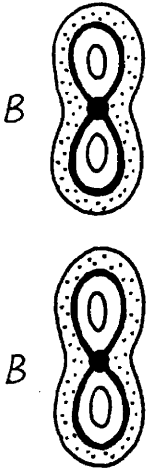
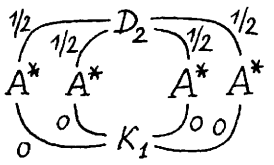
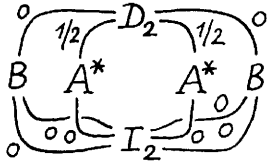
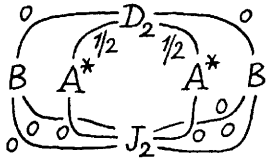
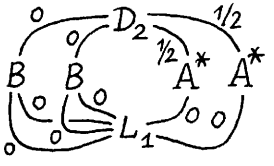
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																									
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td></td> <td>4</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> </table>		a	b	d	c	1	3	2	3	1	2	a	b	d	c		4	1	4	2		a	b	d	c	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">12</div>
	a	b	d	c																							
1	3	2	3	1																							
2	a	b	d	c																							
	4	1	4	2																							
	a	b	d	c																							
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td></td> <td>4</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> </table>		a	b	d	c	1	3	2	4	2	2	a	b	d	c		4	1	3	1		a	b	d	c	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">13</div>
	a	b	d	c																							
1	3	2	4	2																							
2	a	b	d	c																							
	4	1	3	1																							
	a	b	d	c																							
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td></td> <td>4</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>c</td> </tr> </table>		a	b	d	c	1	3	2	4	1	2	a	b	d	c		4	1	3	2		a	b	d	c	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">14</div>
	a	b	d	c																							
1	3	2	4	1																							
2	a	b	d	c																							
	4	1	3	2																							
	a	b	d	c																							

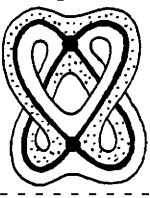
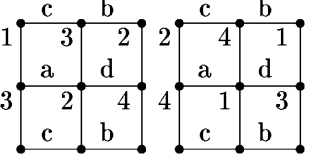
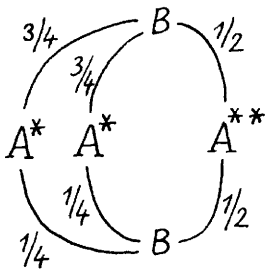
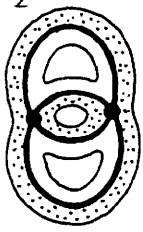
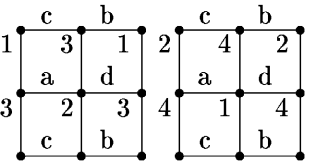
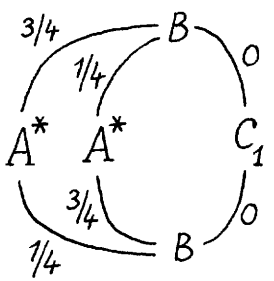
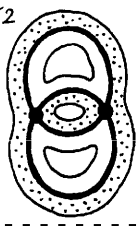
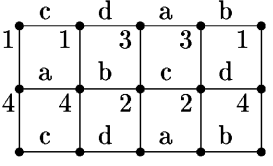
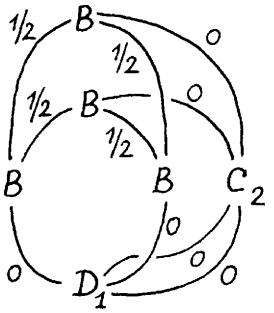
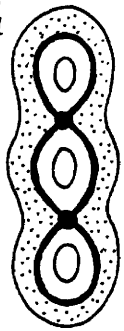
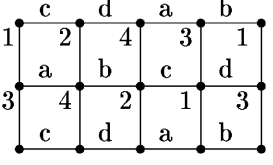
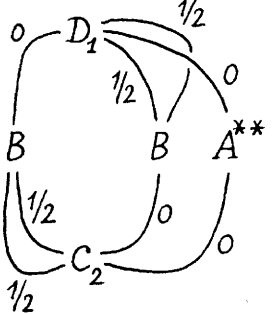
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																									
 <p>D_1</p>	<table border="1" data-bbox="374 323 645 485"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> <td>a</td> <td>b</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> </table>		a	b	c	d	4	4	2	2	4		c	d	a	b	3	3	1	1	3		a	b	c	d	 <p>15</p>
	a	b	c	d																							
4	4	2	2	4																							
	c	d	a	b																							
3	3	1	1	3																							
	a	b	c	d																							
 <p>D_1</p>	<table border="1" data-bbox="374 667 645 829"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>d</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> </table>		a	b	c	d	4	1	2	3	4		d	a	b	c	2	1	4	3	2		a	b	c	d	 <p>16</p>
	a	b	c	d																							
4	1	2	3	4																							
	d	a	b	c																							
2	1	4	3	2																							
	a	b	c	d																							
 <p>C_2</p>	<table border="1" data-bbox="374 1063 645 1225"> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>a</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>d</td> <td>b</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>b</td> <td>d</td> <td>a</td> </tr> </table>		c	b	d	a	1	3	1	3	1		a	d	b	c	4	2	4	2	4		c	b	d	a	 <p>17</p>
	c	b	d	a																							
1	3	1	3	1																							
	a	d	b	c																							
4	2	4	2	4																							
	c	b	d	a																							

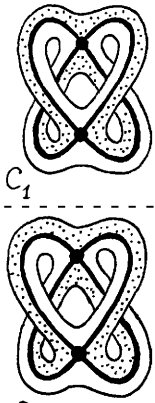
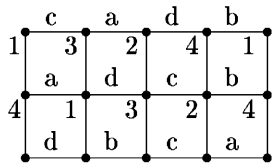
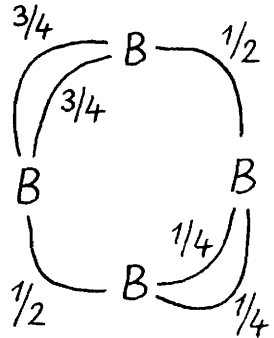
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																															
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>b</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>d</td> <td>a</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>b</td> <td></td> </tr> </table>		c	b	c	b		1	3	2	4	1			a	d	a	d		3	1	4	2	3			c	b	c	b			18
	c	b	c	b																													
1	3	2	4	1																													
	a	d	a	d																													
3	1	4	2	3																													
	c	b	c	b																													
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>b</td> <td>c</td> <td>a</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>d</td> <td>b</td> <td>c</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>b</td> <td>c</td> <td>a</td> <td>d</td> <td></td> </tr> </table>		b	c	a	d		1	3	2	3	1			a	d	b	c		1	4	2	4	1			b	c	a	d			19
	b	c	a	d																													
1	3	2	3	1																													
	a	d	b	c																													
1	4	2	4	1																													
	b	c	a	d																													
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>b</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>c</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>d</td> <td>a</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>b</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>c</td> <td></td> </tr> </table>		b	c	b	c		1	3	2	4	1			a	d	a	d		1	4	2	3	1			b	c	b	c			20
	b	c	b	c																													
1	3	2	4	1																													
	a	d	a	d																													
1	4	2	3	1																													
	b	c	b	c																													

I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																									
<p>D_1</p> 	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> </table>		a	b	c	d	2	2	3	4	1	1	a	b	c	d		1	4	3	2		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">21</div>
	a	b	c	d																							
2	2	3	4	1																							
1	a	b	c	d																							
	1	4	3	2																							
	a	b	c	d																							
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> </table>		a	b	c	d	2	2	3	3	2	1	a	b	c	d		1	4	4	1		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">22</div>
	a	b	c	d																							
2	2	3	3	2																							
1	a	b	c	d																							
	1	4	4	1																							
	a	b	c	d																							
<p>B</p> 	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td></td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> </table>		a	b	c	d	2	1	4	3	2	1	a	b	c	d		2	3	4	1		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">23</div>
	a	b	c	d																							
2	1	4	3	2																							
1	a	b	c	d																							
	2	3	4	1																							
	a	b	c	d																							
<p>B</p> 	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> </table>		a	b	c	d	2	2	3	3	1	1	a	b	c	d		1	4	4	2		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">24</div>
	a	b	c	d																							
2	2	3	3	1																							
1	a	b	c	d																							
	1	4	4	2																							
	a	b	c	d																							

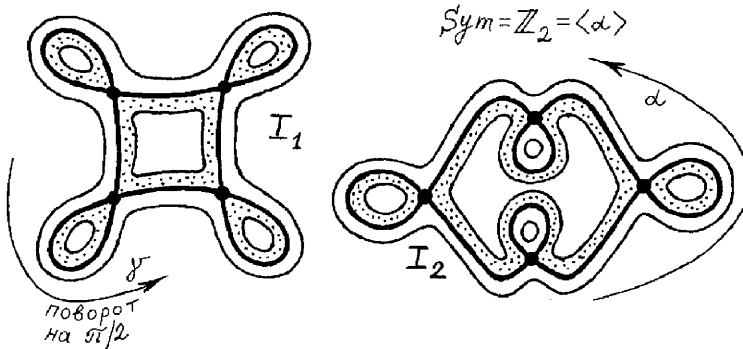
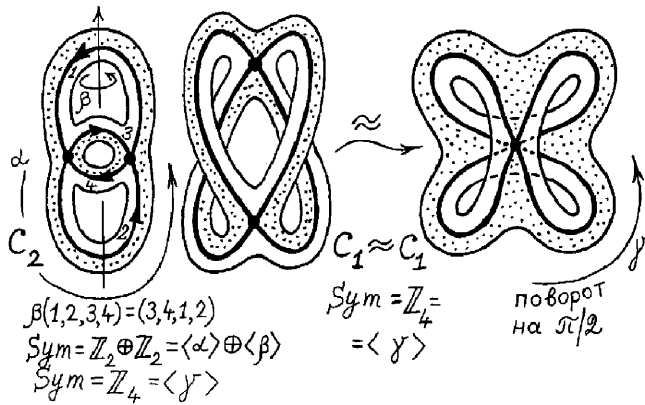
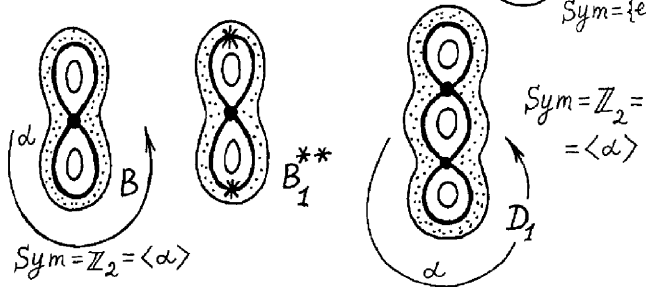
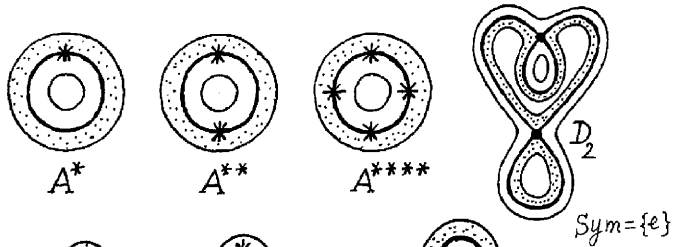
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																															
 <p>D_1</p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> </tr> </table>		a	b	c	d		2	1	4	3	1			a	b	c	d		1	2	3	4	2			a	b	c	d		 <p>D_1</p> <p>A^* A^* A^* A^*</p> <p>J_1</p>	25
	a	b	c	d																													
2	1	4	3	1																													
	a	b	c	d																													
1	2	3	4	2																													
	a	b	c	d																													
 <p>B</p> <p>B</p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> </tr> </table>		a	b	c	d		2	1	4	4	2			a	b	c	d		1	2	3	3	1			a	b	c	d		 <p>D_1</p> <p>B A^* A^* B</p> <p>L_2</p>	26
	a	b	c	d																													
2	1	4	4	2																													
	a	b	c	d																													
1	2	3	3	1																													
	a	b	c	d																													
 <p>C_1</p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> </table>		c	d		c	d	1	1	3	2	2	4		a	b		a	b	3	3	2	4	4	1		c	d		c	d	 <p>B A^* C_1 A^*</p> <p>B B</p>	27
	c	d		c	d																												
1	1	3	2	2	4																												
	a	b		a	b																												
3	3	2	4	4	1																												
	c	d		c	d																												
 <p>D_1</p>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> <td></td> <td>a</td> <td>b</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> </table>		c	d		c	d	1	2	4	2	1	3		a	b		a	b	3	4	1	4	3	2		c	d		c	d	 <p>B A^* A^{**} A^*</p> <p>B B</p>	28
	c	d		c	d																												
1	2	4	2	1	3																												
	a	b		a	b																												
3	4	1	4	3	2																												
	c	d		c	d																												

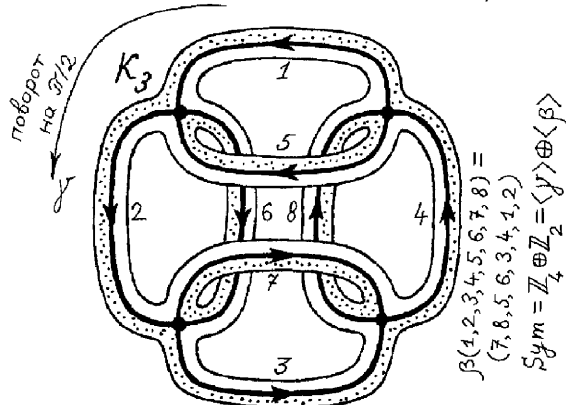
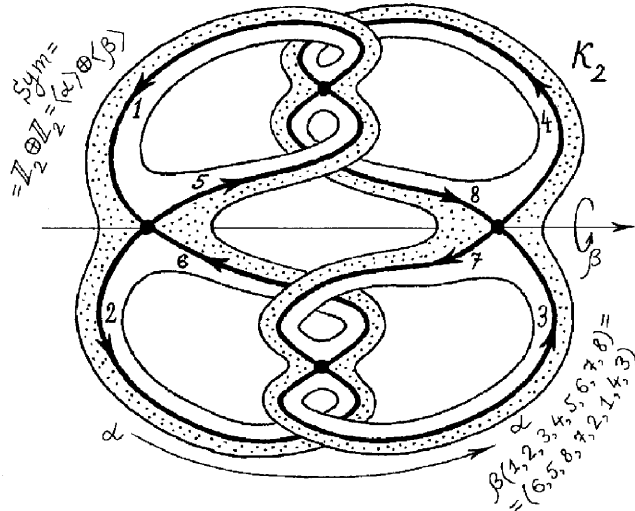
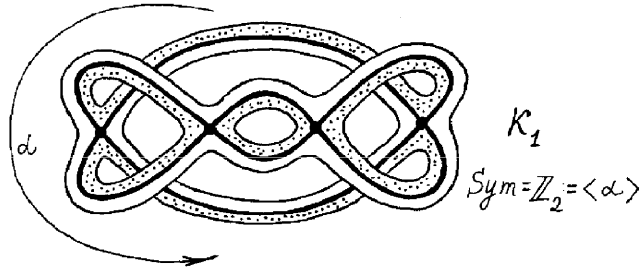
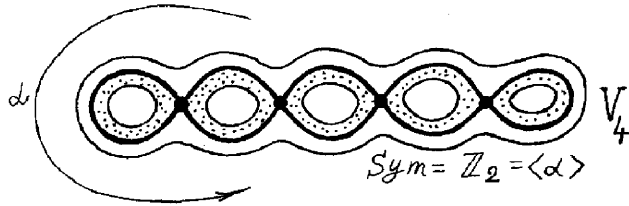
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула																									
D_2 	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> </table>		a	b	c	d	2	2	3	4	1		a	b	c	d	1	1	4	3	2		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">29</div>
		a	b	c	d																						
2	2	3	4	1																							
	a	b	c	d																							
1	1	4	3	2																							
	a	b	c	d																							
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> </table>		a	b	c	d	2	2	3	3	2		a	b	c	d	1	1	4	4	1		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">30</div>	
	a	b	c	d																							
2	2	3	3	2																							
	a	b	c	d																							
1	1	4	4	1																							
	a	b	c	d																							
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> </table>		a	b	c	d	2	1	4	3	2		a	b	c	d	1	2	3	4	1		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">31</div>
		a	b	c	d																						
	2	1	4	3	2																						
	a	b	c	d																							
1	2	3	4	1																							
	a	b	c	d																							
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> </table>		a	b	c	d	2	2	3	3	1		a	b	c	d	1	1	4	4	2		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">32</div>	
	a	b	c	d																							
2	2	3	3	1																							
	a	b	c	d																							
1	1	4	4	2																							
	a	b	c	d																							
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> </table>		a	b	c	d	2	1	4	3	1		a	b	c	d	1	2	3	4	2		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">33</div>	
	a	b	c	d																							
2	1	4	3	1																							
	a	b	c	d																							
1	2	3	4	2																							
	a	b	c	d																							
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr> </table>		a	b	c	d	2	1	4	4	2		a	b	c	d	1	2	3	3	1		a	b	c	d	 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">34</div>	
	a	b	c	d																							
2	1	4	4	2																							
	a	b	c	d																							
1	2	3	3	1																							
	a	b	c	d																							

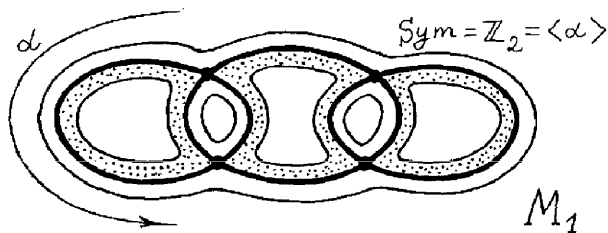
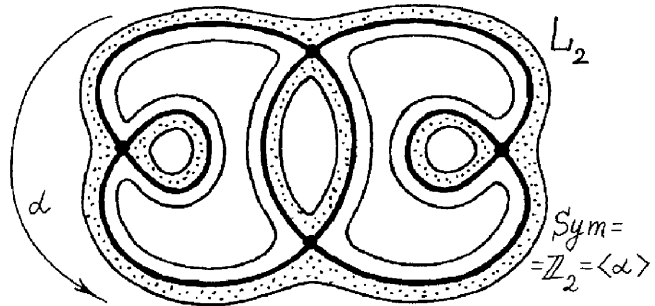
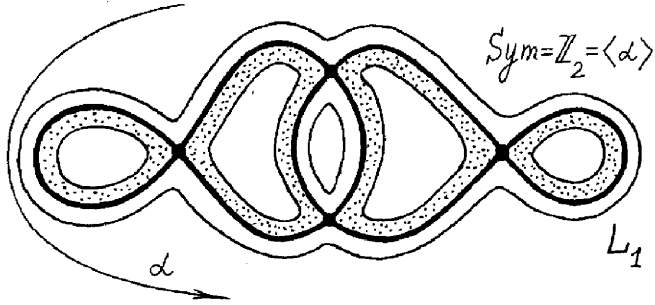
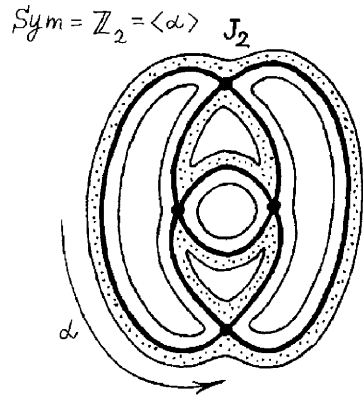
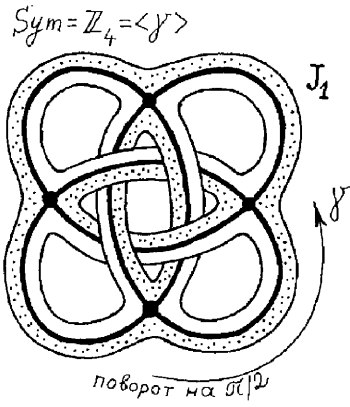
I-тип	Особый слой L	Круговая молекула
<p>C_1</p> 		 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">35</div>
<p>C_2</p> 		 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">36</div>
<p>C_2</p> 		 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">37</div>
<p>D_1</p> 		 <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; float: right;">38</div>

I-тип	Особый слой L	Круговая молекула
 <p>C_1</p>		
		39

Атомы, участвующие в классификации







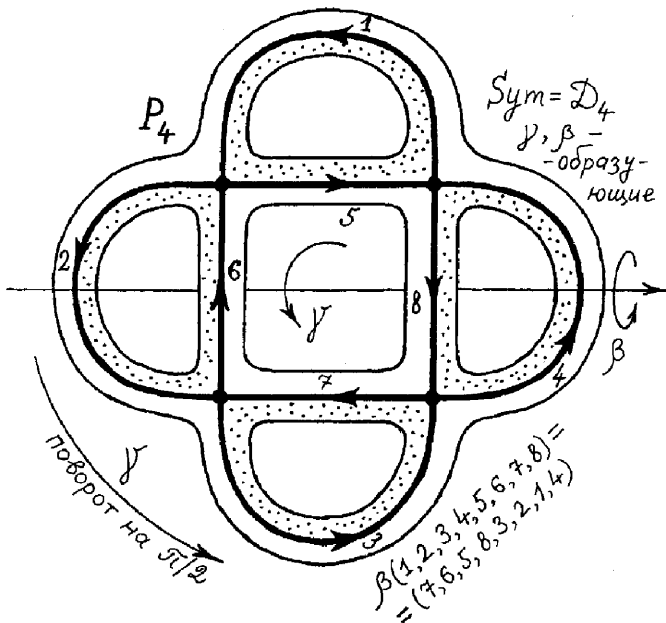
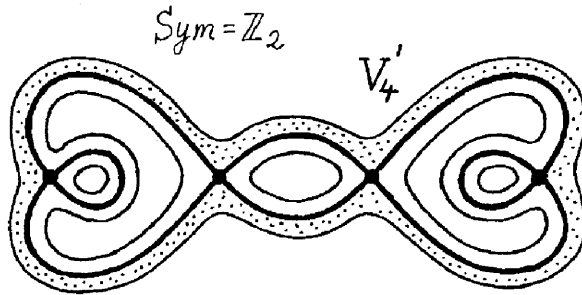
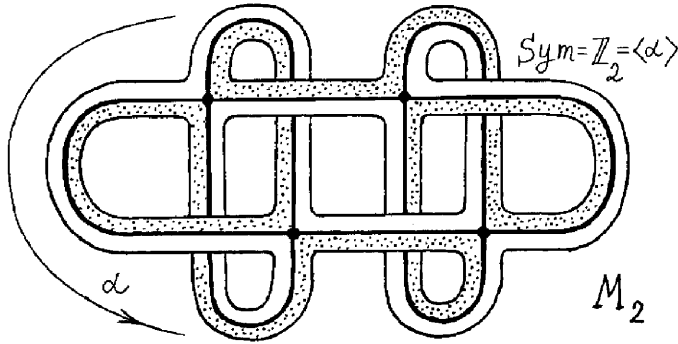


Таблица 9.2

<p>Diagram 1: A circular graph with nodes B, C_1, B, B. Edges are labeled A^{**}, A^{**}, $1/2$, $1/2$, $1/2$, $1/2$.</p>	<p>Diagram 2: A circular graph with nodes B, C_2, B, B. Edges are labeled A^{****}, $1/2$, $1/2$, $1/2$, $1/2$.</p>	<p>Diagram 3: A circular graph with nodes B, C_1, B, B. Edges are labeled A^{**}, $1/2$, $1/2$, $1/2$, $1/2$.</p>
<p>Diagram 4: A circular graph with nodes B, C_1, B, B. Edges are labeled C_1, C_1, C_1.</p>	<p>Diagram 5: A circular graph with nodes B, C_1, B, B. Edges are labeled C_1, K_2.</p>	<p>Diagram 6: A circular graph with nodes A^*, M_2, A^*. Edges are labeled C_1, $1/2$, $1/2$.</p>
<p>Diagram 7: A circular graph with nodes B, C_1, B, B. Edges are labeled C_1, K_3.</p>	<p>Diagram 8: A circular graph with nodes C_2, A^{**}, C_2, B. Edges are labeled A^{**}, A^{**}, C_2, C_2.</p>	<p>Diagram 9: A circular graph with nodes A^{**}, C_1, A^{**}. Edges are labeled A^{****}, A^{**}, A^{**}.</p>
<p>Diagram 10: A circular graph with nodes D_1, A^{**}, D_1, C_2. Edges are labeled A^{**}, C_2, A^{**}.</p>	<p>Diagram 11: A circular graph with nodes B, C_2, B, B. Edges are labeled C_2, C_2, C_2.</p>	<p>Diagram 12: A circular graph with nodes B, C_2, B, A^*. Edges are labeled C_2, $1/2$, $1/2$, A^*, A^*.</p>

<p>13</p>	<p>14</p>	<p>15</p>
<p>16</p>	<p>17</p>	<p>18</p>
<p>19</p>	<p>20</p>	<p>21</p>
<p>22</p>	<p>23</p>	<p>24</p>

<p>25</p>	<p>26</p>	<p>27</p>
<p>28</p>	<p>29</p>	<p>30</p>
<p>31</p>	<p>32</p>	<p>33</p>
<p>34</p>	<p>35</p>	<p>36</p>
<p>37</p>	<p>38</p>	<p>39</p>

Таблица 9.3

	Номер случая в табл. 9.1, 9.2	Сомножители	Действие	Группа
1	4	$B \times C_1$	тривиальное	$\{e\}$
2	11	$B \times C_2$	тривиальное	$\{e\}$
3	22	$B \times D_1$	тривиальное	$\{e\}$
4	30	$B \times D_2$	тривиальное	$\{e\}$
5	3	$C_1 \times D_1$	(γ^2, α)	\mathbb{Z}_2
6	15	$D_1 \times D_1$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
7	24	$B \times I_1$	(α, γ^2)	\mathbb{Z}_2
8	32	$B \times I_2$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
9	31	$B \times K_1$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
10	34	$B \times L_1$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
11	26	$B \times L_2$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
12	25	$B \times J_1$	(α, γ^2)	\mathbb{Z}_2
13	33	$B \times J_2$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
14	13	$B \times M_1$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
15	6	$B \times M_2$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
16	21	$B \times V_4$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
17	29	$B \times V'_4$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
18	1	$C_1 \times C_2$	(γ^2, α)	\mathbb{Z}_2
19	17	$C_2 \times C_2$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
20	8	$C_2 \times C_2$	$(\alpha, \alpha\beta)$	\mathbb{Z}_2
21	37	$D_1 \times C_2$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
22	10	$D_1 \times C_2$	$(\alpha, \alpha\beta)$	\mathbb{Z}_2
23	5	$B \times K_2$	(α, α)	\mathbb{Z}_2
24	14	$B \times K_3$	(α, γ^2)	\mathbb{Z}_2

	Номер случая в табл. 9.1, 9.2	Сомножители	Действие	Группа
25	7	$B \times K_3$	(α, β)	\mathbb{Z}_2
26	12	$B \times P_4$	(α, γ^2)	\mathbb{Z}_2
27	23	$B \times P_4$	(α, β)	\mathbb{Z}_2
28	27	$C_1 \times I_1$	(γ, γ)	\mathbb{Z}_4
29	35	$C_1 \times K_3$	(γ, γ)	\mathbb{Z}_4
30	36	$C_1 \times P_4$	(γ, γ)	\mathbb{Z}_4
31	28	$C_1 \times J_1$	(γ, γ)	\mathbb{Z}_4
32	38	$C_2 \times P_4$	$(\alpha, \gamma^2), (\beta, \beta)$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$
33	18	$C_2 \times P_4$	$(\alpha, \beta), (\beta, \beta\gamma^2)$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$
34	20	$C_2 \times P_4$	$(\alpha, \gamma^3\beta), (\beta, \beta\gamma^3)$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$
35	19	$C_2 \times K_2$	$(\alpha, \beta), (\beta, \alpha\beta)$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$
36	9	$C_2 \times K_3$	$(\alpha, \beta\gamma^2), (\beta, \beta)$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$
37	2	$C_2 \times K_3$	$(\alpha, \beta\gamma^2), (\beta, \gamma^2)$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$
38	39	$K_3 \times K_3$	$(\gamma, \gamma), (\beta, \beta\gamma^2)$	$\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_2$
39	16	$P_4 \times P_4$	$(\gamma, \gamma), (\gamma^3\beta, \beta)$	D_4

Таблица 9.4

	Образующие канонической модели			Порождающие группы симметрий	Группа симметрий
	1	2	3		
1	B	B	B	—	$\{0\}$
2	C_2	B	C_2	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\beta, \text{id}, \alpha)$	$\oplus_2 \mathbb{Z}_2$
3	B	B	D_1	$(\beta, \text{id}, \alpha)$	\mathbb{Z}_2
4	B	B	C_2	$(\beta, \text{id}, \alpha)$	\mathbb{Z}_2
5	C_2	C_2	C_2	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta), (\beta, \beta, \alpha)$	$\oplus_3 \mathbb{Z}_2$

Таблица 9.4 (продолжение)

	Образующие канонической модели			Порождающие группы симметрий	Группа симметрий
	D_1	C_2	C_2		
6	D_1	C_2	C_2	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta), (\text{id}, \beta, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
7	B	C_2	C_2	$(\text{id}, \alpha, \beta), (\beta, \beta, \alpha)$	$\oplus_2 Z_2$
8	C_2	D_1	C_2	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta), (\beta, \text{id}, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
9	D_1	D_1	B	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta)$	$\oplus_2 Z_2$
10	B	D_1	C_2	$(\text{id}, \alpha, \beta), (\beta, \text{id}, \alpha)$	$\oplus_2 Z_2$
11	C_2	D_1	B	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta)$	$\oplus_2 Z_2$
12	C_2	C_2	C_2	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta), (\beta, \text{id}, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
13	D_1	C_2	B	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta)$	$\oplus_2 Z_2$
14	B	C_2	C_2	$(\text{id}, \alpha, \beta), (\beta, \text{id}, \alpha)$	$\oplus_2 Z_2$
15	C_2	C_2	B	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta)$	$\oplus_2 Z_2$
16	D_1	B	C_2	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\text{id}, \beta, \alpha)$	$\oplus_2 Z_2$
17	C_2	C_2	C_2	$(\alpha, \beta, \beta), (\beta, \alpha, \beta), (\beta, \beta, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
18	C_2	C_2	C_2	$(\alpha, \beta, \text{id}), (\beta, \alpha, \beta), (\beta, \beta, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
19	P_4	P_4	B	$(\alpha_1, \beta, \beta), (\alpha_2, \beta, \text{id}), (\beta, \alpha_1, \beta), (\beta, \alpha_2, \text{id})$	G_{16}
20	C_2	C_2	P_4	$(\alpha, \beta, \text{id}), (\beta, \alpha, \text{id}), (\beta, \beta, \alpha_1), (\beta, \text{id}, \alpha_2)$	$\oplus_4 Z_2$
21	C_2	C_2	C_2	$(\alpha, \beta, \text{id}), (\beta, \alpha, \beta), (\beta, \text{id}, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
22	C_2	C_2	B	$(\alpha, \beta, \beta), (\beta, \alpha, \beta)$	$\oplus_2 Z_2$
23	C_2	C_2	P_4	$(\alpha, \beta, \text{id}), (\beta, \alpha, \text{id}), (\beta, \beta, \alpha_1), (\text{id}, \beta, \alpha_2)$	$\oplus_4 Z_2$
24	D_1	C_2	B	$(\alpha, \beta, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta)$	$\oplus_2 Z_2$
25	P_4	C_2	B	$(\alpha_1, \beta, \text{id}), (\alpha_2, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta)$	$\oplus_3 Z_2$
26	P_4	C_2	B	$(\alpha_1, \beta, \beta), (\alpha_2, \text{id}, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta)$	$\oplus_3 Z_2$
27	D_1	B	C_2	$(\alpha, \beta, \beta), (\text{id}, \beta, \alpha)$	$\oplus_2 Z_2$
28	P_4	B	C_2	$(\alpha_1, \beta, \text{id}), (\alpha_2, \text{id}, \beta), (\text{id}, \beta, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
29	P_4	B	C_2	$(\alpha_1, \beta, \beta), (\alpha_2, \text{id}, \beta), (\text{id}, \beta, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
30	C_2	P_4	B	$(\alpha, \text{id}, \beta), (\beta, \alpha_1, \beta), (\text{id}, \alpha_2, \beta)$	$\oplus_3 Z_2$
31	C_2	C_2	C_2	$(\alpha, \beta, \text{id}), (\text{id}, \alpha, \beta), (\beta, \text{id}, \alpha)$	$\oplus_3 Z_2$
32	C_2	C_2	B	$(\alpha, \beta, \beta), (\text{id}, \alpha, \beta)$	$\oplus_2 Z_2$

Литература

- [1] *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
- [2] *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы. // ДАН СССР, 1937, Т. 14, № 5, с. 247–250.
- [3] *Аносов Д. В.* Грубые системы. // Труды МИАН, т. 169, М.: Наука, 1985.
- [4] *Аносов Д. В., Арансон С. Х., Брошштейн И. У., Гринес В. З.* Гладкие динамические системы. II. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 1. М.: ВИНТИ, 1985, с. 151–242.
- [5] *Аношкина Е. В.* Топологическая классификация интегрируемого случая типа Горячева–Чаплыгина с обобщенным потенциалом в динамике твердого тела. // УМН, 1992, т. 47, вып. 3(285), с. 149–150.
- [6] *Аношкина Е. В.* Топологическая классификация интегрируемого случая типа Горячева–Чаплыгина с обобщенным потенциалом в динамике твердого тела. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 11–17.
- [7] *Аношкина Е. В.* О топологии интегрируемого случая движения гиростата в потенциальном поле сил типа Горячева. // Вестник МГУ, Сер. 1, Матем., механ., 1998, № 1, с. 23–29.
- [8] *Апанасов Б. Н.* Заполнение пространства многогранниками и деформация неполных гиперболических структур. // Сиб. Мат. Журнал, 1986, т. 27, № 4, с. 3–19.
- [9] *Апанасов Б. Н.* Геометрия дискретных групп и многообразий. М.: Наука, 1991.
- [10] *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях. // УМН, 1986, т. 41, вып. 1(247), с. 149–169.
- [11] *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. I. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 1. М.: ВИНТИ, 1985, с. 7–149.
- [12] *Арнольд В. И., Гивенталь А. Б.* Симплектическая геометрия. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 4. М.: ВИНТИ, 1985, с. 7–139.

- [13] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 3, М.: ВИНТИ, 1985, с. 5–304.
- [14] Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977.
- [15] Бабенко И. К., Нехорошев Н. Н. О комплексных структурах на двумерных торах, допускающих метрики с нетривиальным квадратичным интегралом. // Матем. заметки. 1995, т. 58, № 5, с. 643–652.
- [16] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд., М.: Наука, 1990.
- [17] Берзин Д. В. Геометрия орбит коприсоединенного представления специальных групп Ли. Кандидатская диссертация. 1997 год, МГУ, мех.-матем. ф-т.
- [18] Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: МИР, 1981.
- [19] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М. Л.: Гостехиздат. 1941.
- [20] Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. М.: Гостехиздат, 1957.
- [21] Бобенко А. И. Уравнения Эйлера на $so(4)$ и $e(3)$. Изоморфизм интегрируемых случаев. // Функциональный анализ и его приложения, 1986, т. 20, вып. 1, с. 64–66.
- [22] Болотин С. В. Вариационные методы построения хаотических движений в динамике твердого тела. // Прикл. мат. и мех. 1992, т. 56, вып. 2, с. 230–239.
- [23] Болсинов А. В. Согласованные скобки Пуассона и полнота семейств функций в инволюции. // Известия АН СССР (сер. матем.), 1991, т. 55, № 1, с. 68–92.
- [24] Болсинов А. В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Матем. сборник, 1995, т. 186, № 1, с. 3–28.
- [25] Болсинов А. В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Случай систем с плоскими атомами. // УМН, 1994, т. 49, вып. 4, с. 173–174.
- [26] Болсинов А. В. О классификации гамильтоновых систем на двумерных поверхностях // УМН, 1994, т. 49, вып. 6, с. 195–196.
- [27] Болсинов А. В. Многомерные случаи Эйлера и Клебша и лиевы пучки. // В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу, М.: МГУ, 1991, вып. 24, с. 8–12.

- [28] Болсинов А. В. Инварианты Фоменко в теории интегрируемых гамильтоновых систем. // УМН, 1997, т. 52, вып. 5(317), с. 113–132.
- [29] Болсинов А. В., Козлов В. В., Фоменко А. Т. Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела. // УМН, 1995, т. 50, вып. 3, с. 3–32.
- [30] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. // УМН 1990, т. 45, вып. 2, с. 49–77.
- [31] Болсинов А. В., Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Нерешенные проблемы в теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.: МГУ, 1993, вып. 25, часть 1, с. 6–17.
- [32] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация интегрируемых систем типа Эйлера в динамике твердого тела. // УМН, 1993, т. 48, вып. 5, с. 163–164.
- [33] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I. // Матем. Сборник, 1994, т. 185, № 4, с. 27–80. II. // Матем. сборник, 1994, т. 185, № 5, с. 27–78.
- [34] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация простых интегрируемых систем на трехмерных поверхностях постоянной энергии. // Доклады РАН, 1993, т. 332, № 5, с. 553–555.
- [35] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела. // Доклады РАН, 1994, т. 339, вып. 3, с. 293–296.
- [36] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева–Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела. // Матем. заметки, 1994, т. 56, № 2, с. 139–142.
- [37] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторные инварианты интегрируемых гамильтоновых систем. Случай простых систем. Траекторная классификация систем типа Эйлера в динамике твердого тела. // Известия РАН, серия матем. 1995, т. 59, вып. 1, с. 65–102.
- [38] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела. // Функциональный анализ и его приложения. 1995, т. 29, № 3, с. 1–15.
- [39] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Нерешенные проблемы и задачи в теории топологической классификации интегрируемых систем. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 18–31.

- [40] *Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Чанг К.* Три типа бордизмов интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Вычисление групп бордизмов. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 32–72.
- [41] *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Размерность пространства интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Труды МИРАН, 1996, т. 216, с. 45–69.
- [42] *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука, 1997.
- [43] *Болсинов А. В., Дуллин Х.* О случае Эйлера в динамике твердого тела и задаче Якоби. // Регулярная и хаотическая динамика. 1997, т. 2, № 1, с. 13–25.
- [44] *Борисов А. В., Симаков Н. Н.* Бифуркации удвоения периода в динамике твердого тела. // Регулярная и хаотическая динамика. 1997, т. 2, № 1, с. 64–74.
- [45] *Борисов А. В., Цыгвинцев А. В.* Показатели Ковалевской и интегрируемые системы классической динамики. // Регулярная и хаотическая динамика, 1996, т. 1, № 1, с. 15–28.
- [46] *Ботт Р.* Многообразия, на которых все геодезические замкнуты. В кн.: Расслоенные пространства, М.: ИЛ, 1958, с. 115–123. (*Bott R.* On manifolds all of whose geodesics are closed. // *Ann. Math.*, v. 60, № 3, pp. 375–382).
- [47] *Браилов А. В.* Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения. // ДАН СССР, 1983, т. 268, № 5, с. 1043–1046.
- [48] *Браилов А. В., Фоменко А. Т.* Топология интегральных многообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем. // Матем. сборник, 1987, т. 133, № 3, с. 375–385.
- [49] *Браилов Ю. А., Кудрявцева Е. А.* Устойчивая топологическая несопряженность гамильтоновых систем на двумерных поверхностях. // Вестник МГУ, серия матем., 1998 (в печати).
- [50] *Буземан Г.* Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962.
- [51] *Бялый М. Л.* О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе. // Функциональный анализ и его приложения. 1987, т. 21, вып. 4, с. 64–65.
- [52] *Вариационные принципы механики.* М.: ГИФМЛ, 1959.
- [53] *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1987, т. 16, М.: ВИНТИ, с. 5–85.

- [54] *Веселов А. П.* Конечнозонные потенциалы и интегрируемая система на сфере с квадратичным потенциалом. // *Функц. анализ.*, 1980, т. 14, № 1, с. 48–50.
- [55] *Винберг Э. Б.* Гиперболические группы отражений. // *УМН.* 1985, т. 40, вып. 1(241), с. 29–66.
- [56] *Гайдукоев Е. В.* Асимптотические геодезические на римановом многообразии, негомеоморфном сфере. // *ДАН СССР*, 1966, т. 169, № 5, с. 999–1001.
- [57] *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
- [58] *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
- [59] *Горячев Д. Н.* О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$. // *Матем. сборник*, 1900, т. 21, № 3.
- [60] *Горячев Д. Н.* Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера. // *Варшав. Унив. Изв.* 1916, кн. 3, с. 1–15.
- [61] *Громоу Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: МИР, 1971.
- [62] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.
- [63] *Гюйгенс Х.* Три мемуара по механике. М.: изд-во АН СССР, 1951.
- [64] *Денисова Н. В.* О структуре полей симметрий геодезических потоков на двумерном торе. // *Матем. Сборник*, 1997, т. 188, вып. 7, с. 107–122.
- [65] *Динабург Е. И.* Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем. // *Известия АН СССР, серия матем.* 1971, т. 35, вып. 2, с. 324–366.
- [66] *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. 2-е изд. М.: Наука, 1986, 760 с.
- [67] *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы. I. // *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, т. 4, М.: ВИНТИ, 1985, с. 179–284.
- [68] *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. В томе 1 «Собрания сочинений». Т. 1, 2. Москва, 1949.
- [69] *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато. // *УМН*, 1992, т. 47, № 2, с. 53–115.
- [70] *Илиев И. П., Семерджиев Х. И.* О голономных механических системах с двумя степенями свободы, допускающие квадратические интегралы. // *Известия вузов, Математика*, 1972, 2, с. 51–53.

- [71] *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка, 1979.
- [72] *Калашиников В. В. (мл.)*. Боттовость и свойства общего положения интегрируемых гамильтоновых систем. // УМН, 1993, т. 48, вып. 6, с. 151–152.
- [73] *Калашиников В. В. (мл.)*. О типичности боттовских интегрируемых гамильтоновых систем. // Матем. сборник, 1994, т. 185, вып. 1, с. 107–120.
- [74] *Калашиников В. В. (мл.)*. Топологический анализ некоторых систем внутримолекулярной динамики вещества. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 91–97.
- [75] *Калашиников В. В. (мл.)*. Геометрическое описание минимаксных инвариантов Фоменко интегрируемых гамильтоновых систем на S^3 , RP^3 , $S^1 \times S^2$, T^3 . // УМН, 1991, т. 46, вып. 4(280), с. 151–152.
- [76] *Калашиников В. В. (мл.)*. Топологическая классификация квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе. // УМН, 1995, т. 50, вып. 1, с. 201–202.
- [77] *Калашиников В. В. (мл.)*. О топологической структуре интегрируемых гамильтоновых систем, близких к данной. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 2, с. 98–112.
- [78] *Каток С. Б.* Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела. // УМН, 1972, т. 27, вып. 2, с. 124–133.
- [79] *Клингенберг В.* Лекции о замкнутых геодезических. М.: МИР, 1982.
- [80] *Ковалевская С. В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. В книге «Научные работы». М.: Наука, 1948, с. 153–220.
- [81] *Козлов В. В.* Две интегрируемые задачи классической динамики. // Вестник МГУ, 1981, № 4, с. 80–83.
- [82] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Изд-во МГУ, 1980.
- [83] *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем. // ДАН СССР. 1979. т. 249, № 6, с. 1299–1302.
- [84] *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: изд-во УдГУ, 1995.
- [85] *Козлов В. В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Прикладная математика и механика, т. 59, 1995, с. 3–9.
- [86] *Козлов В. В., Денисова Н. В.* Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе. // Матем. сборник, 1994, т. 185, с. 49–64.

- [87] *Козлов В. В., Денисова Н. В.* Симметрии и топология динамических систем с двумя степенями свободы // Матем. сборник. 1993, т. 184, № 9, с. 125–148.
- [88] *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* Об интегрируемости гамильтоновых систем. // Вестник МГУ, серия матем., механ., 1979, № 6, с. 88–91.
- [89] *Козлов В. В., Трещев Д. В.* Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений. // Матем. сборник, 1988, т. 135(177), вып. 1, с. 119–138.
- [90] *Козлов В. В., Трещев Д. В.* Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием. // Известия АН СССР, Сер. матем., 1989, т. 51, № 537–556.
- [91] *Кокстер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.
- [92] *Колокольцов В. Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом. // Известия АН СССР. Сер. матем. 1982, т. 46, № 5, с. 994–1010.
- [93] *Колокольцов В. Н.* Новые примеры многообразий с замкнутыми геодезическими. // Вестник МГУ, серия матем. механ. 1984, вып. 4, с. 80–82.
- [94] *Колокольцов В. Н.* Полиномиальные интегралы геодезических потоков на компактных поверхностях. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. МГУ, механико-математический факультет, 1984.
- [95] *Коровина Н. В.* Максимально симметричные бифуркации функций Морса на двумерных поверхностях. // Вестник МГУ, серия матем., 1998 (в печати).
- [96] *Кругликов Б. С.* О продолжении симплектической формы и пары функций в инволюции с $S^1 \times I \times T^2$. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 98–108.
- [97] *Кругликов Б. С.* Существование пары дополнительных боттовских интегралов для резонансной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 109–112.
- [98] *Кругликов Б. С.* Точная гладкая классификация гамильтоновых векторных полей на двумерных многообразиях. // Матем. заметки, т. 61, вып. 2, 1997, с. 179–200.
- [99] *Кудрявцева Е. А.* Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты. // Матем. Сборник, 1998 (в печати).
- [100] *Кудрявцева Е. А.* Устойчивые инварианты сопряженности гамильтоновых систем на двумерных поверхностях. // ДАН РАН, 1998 (в печати).

- [101] *Кудрявцева Е. А.* Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях. В книге: Топологические методы в теории гамильтоновых систем. М.: Факториал, 1998, с. 147–202.
- [102] *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Тома 1, 2. М.: Гостехиздат, 1950.
- [103] *Леонтович Е. А., Майер А. Г.* О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории. // ДАН СССР, 1937, т. 14, № 5, с. 251–257.
- [104] *Леонтович Е. А., Майер А. Г.* О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории. // ДАН СССР, 1955, т. 103, № 4, с. 557–560.
- [105] *Лерман Л. М., Уманский Я. Л.* Классификация четырехмерных интегрируемых систем в расширенных окрестностях простых особых точек. В книге: Методы качественной теории бифуркаций, Горький: изд-во Горьковского ун-та, 1988, с. 67–76.
- [106] *Лерман Л. М., Уманский Я. Л.* Классификация четырехмерных интегрируемых систем и пуассонова действия R^2 в расширенных окрестностях простых особых точек. I, II, III. I: // Матем. Сборник, 1992, т. 183, № 12, с. 141–176. II: // Матем. Сборник, 1993, т. 184, № 4, с. 103–138. III: // Матем. Сборник, 1995, т. 186, № 10, с. 89–102.
- [107] *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости. В кн.: Собр. соч. т. 1, М.: изд-во АН СССР, 1954, с. 320–324.
- [108] *Майер А. Г.* О траекториях на ориентируемых поверхностях. // Матем. сборник., 1943, т. 12(54), № 1, с. 71–84.
- [109] *Мантуров В. О.* Атомы. Узлы. Бифуркации. // Вестник МГУ, 1998 (в печати).
- [110] *Матвеев В. С.* Вычисление значений инварианта Фоменко точки типа седло-седло интегрируемой гамильтоновой системы. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Москва, МГУ, изд-во МГУ, 1993, вып. 25, часть 1, с. 75–104.
- [111] *Матвеев В. С.* Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа седло-седло и фокус-фокус. // Матем. сборник, 1996, т. 187, № 4, с. 29–58.
- [112] *Матвеев В. С.* Пример геодезического потока на бутылке Клейна, интегрируемого полиномом по импульсам четвертой степени. // Вестник МГУ, Сер. 1, Матем. механ., 1997, № 4, с. 47–48.

- [113] *Матвеев В. С.* Квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе и бутылке Клейна. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 1, с. 96–102.
- [114] *Матвеев В. С.* Топологическая классификация квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна. (в печати).
- [115] *Матвеев В. С.* Особенности отображения момента и топологическое строение интегрируемых геодезических потоков. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Москва, МГУ, мех-матем. ф-т, 1996.
- [116] *Матвеев В. С., Топалов П. Й.* Поля Якоби интегрируемых геодезических потоков. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, том 2, № 1, с. 103–116.
- [117] *Матвеев В. С., Топалов П.* Сопряженные точки гиперболических геодезических квадратично интегрируемых геодезических потоков на замкнутых поверхностях. // Вестник МГУ, Сер. 1, матем., механ., 1998, № 1, с. 60–62.
- [118] *Матвеев В. С., Топалов П. Й.* Геодезическая эквивалентность метрик на поверхностях и их интегрируемость. // Доклады РАН (в печати).
- [119] *Матвеев С. В.* Специальные остовы кусочно-линейных многообразий. // Матем. сборник, 1973, т. 92, с. 282–293.
- [120] *Матвеев С. В.* Преобразования специальных спайнов и гипотеза Зимана. // Известия АН СССР, 1987, т. 51, с. 1104–1116.
- [121] *Матвеев С. В.* Сложности 3-многообразий и их перечисление в порядке возрастания сложности. // ДАН СССР, 1988, т. 301, с. 280–283.
- [122] *Матвеев С. В.* Один способ задания 3-многообразий. // Вестник МГУ, 1975, т. 30, № 3, с. 11–20.
- [123] *Матвеев С. В.* Классификация достаточно больших трехмерных многообразий. // УМН, 1997, т. 52, вып. 5(317), с. 147–174.
- [124] *Матвеев С. В., Савватеев В. В.* Трехмерные многообразия, имеющие простые специальные остовы. // Coll. Math. 1974, v. 32, F. 2, pp. 83–97.
- [125] *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Изознергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий. // УМН, 1988, т. 43, вып. 1(259), с. 5–22.
- [126] *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами. // Матем. заметки, 1988, т. 43, № 5, с. 663–671.
- [127] *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: изд-во МГУ, 1991. Второе переработанное издание. М.: Наука, 1998.

- [128] *Матвеев С. В., Фоменко А. Т., Шарко В. В.* Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем. // Матем. сборник, 1988, т. 135(177), № 3, с. 325–345.
- [129] *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: МИР, 1971.
- [130] *Милнор Дж.* Теорема об h -кобордизме. М.: Мир, 1969.
- [131] *Мищенко А. С.* Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах. // Матем. заметки, 1982, т. 31, № 2, с. 257–262.
- [132] *Мищенко А. С.* Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1983, т. 21, изд-во МГУ, с. 13–22.
- [133] *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. // Известия АН СССР, сер. матем. 1978, т. 42, № 2, с. 396–415.
- [134] *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
- [135] *Мозер Дж.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем. // УМН, 1981, т. 36, вып. 5, с. 109–151.
- [136] *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. // УМН, 1982, т. 37, вып. 5, с. 3–49.
- [137] *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнений Кирхгофа свободного движения твердого тела в идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника–Шнирельмана–Морса (ЛШМ). // Функциональный анализ и его приложения, 1982, т. 15, № 3, с. 54–66.
- [138] *Нгуен Т. З.* О свойстве общего положения простых боттовских интегралов. // УМН, т. 45, вып. 4(274), 1990, с. 162–162.
- [139] *Нгуен Т. З.* Топологические инварианты интегрируемых геодезических потоков на многомерном торе и сфере. // Труды МИРАН, т. 205, 1994, с. 73–91.
- [140] *Нгуен Т. З., Полякова Л. С., Селиванова Е. Н.* Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралам на двумерных ориентируемых римановых многообразиях. // Функциональный анализ, 1993, т. 27, вып. 3, с. 42–56.
- [141] *Нгуен Т. З., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере. // УМН, 1990, т. 45, вып. 6, с. 91–111.
- [142] *Нехорошев Н. Н.* Переменные действие-угол и их обобщения. // Труды Моск. Матем. Общества, 1972, т. 26, № 1, с. 181–198.

- [143] *Окунева Г. Г.* Некоторые геометрические свойства приведенного многообразия положений в динамике твердого тела. // Вестник МГУ, сер. матем., механ., 1986, № 4, с. 55–59.
- [144] *Ольшанецкий М. А., Переломов А. М., Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А.* Интегрируемые системы. II. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 16, М.: ВИНТИ, 1987, с. 86–226.
- [145] *Орел О. Е.* Топологический анализ окрестности вырожденной одномерной орбиты пуассоновского действия R^2 на симплектическом многообразии M^4 . // УМН, 1993, т. 48, вып. 6, с. 165–166.
- [146] *Орел О. Е.* Исследование окрестности вырожденной одномерной орбиты пуассонова действия R^2 в M^4 . // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 113–130.
- [147] *Орел О. Е.* Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева–Чаплыгина. // Матем. сборник, 1995, т. 186, вып. 2, с. 105–128.
- [148] *Орел О. Е.* Функции вращения в проблеме траекторной классификации геодезических потоков эллипсоидов и задачи Эйлера динамики твердого тела. // Вестник МГУ, серия матем., 1996, вып. 1, с. 24–32.
- [149] *Орел О. Е.* Критерий траекторной эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности эллиптических орбит. Траекторный инвариант задачи Лагранжа. // Матем. сборник, 1997, т. 188, вып. 7, с. 139–160.
- [150] *Орел О. Е., Ш. Такахаши* Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина методами компьютерного анализа. // Матем. сборник, 1996, т. 187, № 1, с. 95–112.
- [151] *Орел О. Е.* Алгебро-геометрические скобки Пуассона в проблеме точного интегрирования. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 2, с. 90–97.
- [152] *Орел О. Е.* О несопряженности случая Эйлера в динамике твердого тела и задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Матем. заметки, т. 61, вып. 2, 1997, с. 252–258.
- [153] *Орел О. Е.* Интегрируемые задачи Эйлера и Якоби топологически не сопряжены. // Доклады РАН, 1997, т. 354, № 3, с. 307–309.
- [154] *Ошемков А. А.* Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $SO(4)$. // УМН, 1990, т. 42, вып. 2, с. 199–200.
- [155] *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 131–140.

- [156] *Ошемков А. А.* Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. 23, Москва, изд-во МГУ, 1988, с. 122–132.
- [157] *Ошемков А. А.* Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. 25, часть 2, Москва, МГУ, 1993, с. 23–109.
- [158] *Ошемков А. А.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях. (в печати).
- [159] *Палис Ж., В. ди Мелу.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: МИР, 1986.
- [160] *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
- [161] *Пидкуйко С. И., Степин А. М.* Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем. // ДАН СССР, 1978, т. 239, № 1, с. 50–53.
- [162] *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
- [163] *Погосян Т. И.* Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела. // Мех. тверд. тела, вып. 12, Киев: Наукова думка, 1980, с. 9–16.
- [164] *Погосян Т. И.* Области возможности движения в задаче Клебша. Критический случай. // Мех. тверд. тела, вып. 15, Киев: Наукова думка, 1983, с. 3–23.
- [165] *Погосян Т. И.* Критические интегральные поверхности задачи Клебша. // Мех. тверд. тела, вып. 16, Киев: Наукова думка, 1984, с. 19–24.
- [166] *Погосян Т. И., Харламов М. П.* Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении твердого тела в линейном поле сил. // ПММ, 1979, т. 43, с. 419–428.
- [167] *Полякова Л. С.* Инварианты интегрируемых случаев Эйлера и Лагранжа. // УМН, т. 44, вып. 3(267), 1989, с. 171–172.
- [168] *Прасолов В. В., Соловьев Ю. П.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: Факториал, 1997.
- [169] Проблемы Гильберта. Сборник статей. Под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969.
- [170] *Пуанкаре А.* О геодезических линиях на выпуклых поверхностях. Избр. труды, т. 2, М.: Наука, 1972, с. 733–774.

- [171] *Садов Ю. А.* Переменные действие-угол в задаче Эйлера–Пуансо. // ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 962–964.
- [172] *Селиванова Е. Н.* Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности. // Матем. сборник, 1992, т. 183, вып. 4, с. 69–86.
- [173] *Селиванова Е. Н.* Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.: изд-во МГУ, 1993, вып. 25, часть 2, с. 110–132.
- [174] *Селиванова Е. Н.* Траекторные изоморфизмы лиувиллевых систем на двумерном торе. // Матем. сборник, 1995, вып. 10, с. 141–160.
- [175] *Селиванова Е. Н.* Топология задачи о трех точечных вихрях. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 141–149.
- [176] *Селиванова Е. Н., Степин А. М.* О динамических свойствах геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе. // Труды МИРАН, т. 216, 1996, с. 158–175.
- [177] *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. М.: МИР, 1986.
- [178] *Смейл С.* Топология и механика. // УМН, т. 15, № 2, 1972, с. 77–125.
- [179] *Смейл С.* Неравенства Морса для динамических систем. Сб. пер. мат., 1967, т. 11, № 4, с. 79–87.
- [180] *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы, // УМН, 1970, т. 25, вып. 1, с. 113–185.
- [181] *Смоленцев.* О принципе Мопертюи. // Сиб. матем. журнал, 1979, т. 20, № 5.
- [182] *Сретенский Л. Н.* Движение гироскопа Горячева–Чаплыгина. // Известия АН СССР, 1953, № 1.
- [183] *Сретенский Л. Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. // Вестник МГУ, 1963, № 3.
- [184] *Сретенский Л. Н.* О некоторых случаях интегрирования уравнений движения гиростата. // Доклады АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
- [185] *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: 1893.
- [186] *Степин А. М.* Интегрируемые гамильтоновы системы. I, II. В кн.: Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. Киев, ин-т математики АН УССР, 1981, с. 116–170.
- [187] *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: МИР, 1970.

- [188] *Тайманов И. А.* Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях. // Изв. АН СССР, 1987, т. 51, вып. 2, с. 429–435.
- [189] *Тайманов И. А.* Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 150–163.
- [190] *Тайманов И. А.* О топологических свойствах интегрируемых геодезических потоков. // Матем. заметки. 1988, т. 44, вып. 2, с. 283–284.
- [191] *Татаринов Я. В.* К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией. // Вестник МГУ, 1973, № 5, с. 70–77.
- [192] *Татаринов Я. В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. // Вест. МГУ, сер. матем., механ. 1974, № 6, с. 99–105.
- [193] *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. М.: изд-во МГУ, 1981.
- [194] *Тен В. В.* Локальные интегралы геодезических потоков. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 2, с. 87–89.
- [195] *Топалов П.* Переменная действия и гамильтониан Пуанкаре в окрестности критической окружности. // УМН, т. 50, вып. 1, 1995, с. 213–214.
- [196] *Топалов П.* Гомологические свойства меток инварианта Фоменко–Цишанга. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 164–171.
- [197] *Топалов П.* Включение бутылок Клейна в теорию топологической классификации гамильтоновых систем. // УМН, т. 49, вып. 1, 1994, с. 227–228.
- [198] *Топалов П.* Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела. // Матем. сборник, т. 187, № 3, 1996, с. 143–160.
- [199] *Топалов П.* Тензорные инварианты натуральных механических систем на компактных поверхностях и соответствующие им интегралы. // Матем. Сборник, 1997 (в печати).
- [200] *Топалов П.* Критические точки функции вращения интегрируемой гамильтоновой системы. // УМН, 1996, т. 51, вып. 4(310), с. 147–148.
- [201] *Топалов П.* Вычисление топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Москва, МГУ, мех-матем. ф-т, 1996.
- [202] *Топалов П. Й.* Отображение Пуанкаре в регулярных окрестностях особых слоев Лиувилля интегрируемой гамильтоновой системы. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 2, с. 79–86.

- [203] Трофимов В. В. Обобщенные классы Маслова на пространстве путей симплектического многообразия. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 172–199.
- [204] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. М.: Факториал, изд-во «Просперус» УдГУ, 1995.
- [205] Уманский Я. Л. Схема трехмерной динамической системы Морса–Смейла без замкнутых траекторий. // ДАН СССР, 1976, т. 230, № 6, с. 1286–1289.
- [206] Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. // Известия АН СССР. 1986, т. 50, № 6, с. 1276–1307.
- [207] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [208] Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем. // ДАН СССР, 1986. т. 287, № 5, с. 1071–1075.
- [209] Фоменко А. Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем. // Известия АН СССР. сер. матем. т. 55, № 4, 1991, с. 747–779.
- [210] Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю. // Функциональный анализ и его приложения. 1988. т. 22, вып. 4. с. 38–51.
- [211] Фоменко А. Т. Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях. // Функциональный анализ и его приложения. 1991, т. 25, вып. 4, с. 23–35.
- [212] Фоменко А. Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем. // УМН, 1989, т. 44, вып. 1(265), с. 145–173.
- [213] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [214] Фоменко А. Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике. // ДАН СССР, 1987, т. 294, № 2, с. 283–287.
- [215] Фоменко А. Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем. // Известия АН СССР, 1988, т. 52, № 2, с. 378–407.
- [216] Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Известия АН СССР, 1990, т. 54, № 3, с. 546–575.

- [217] *Фоменко А. Т., Шарко В. В.* Точные круглые функции Морса, неравенства типа Морса и интегралы гамильтоновых систем. // Украинский математический журнал. 1989, т. 41, №6, с. 723–732.
- [218] *Форстер О.* Римановы поверхности. М., Мир, 1980.
- [219] *Харламов М. П.* Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тела. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.
- [220] *Харламов М. П.* Топологический анализ классических интегрируемых случаев динамики твердого тела. // Доклады АН СССР, 1983, т. 273, вып. 6, с. 1322–1325.
- [221] *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: изд-во НГУ, 1965.
- [222] *Чаплыгин С. А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. В томе 1 «Собрания сочинений», (тома 1,2). ОГИЗ, М.-Л., 1948.
- [223] *Чаплыгин С. А.* Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. В томе 1 «Собрания сочинений», (тома 1,2). ОГИЗ, М.-Л., 1948, с. 337–346.
- [224] *Эйлер Л.* Механика. М.-Л., ГИТТЛ, 1938.
- [225] *Якоби К.* Лекции по динамике. М.-Л., 1936.
- [226] *Язъя Х. М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата. // Вестник МГУ, сер. матем., механ., 1987, №4, с. 88–90.
- [227] *Adams C. C.* Hyperbolic structures on link complements. Preprint, University of Wisconsin, Madison, WI, 1983.
- [228] *Adams C. C.* The non-compact hyperbolic 3-manifold of minimal volume. // Proc. Amer. Math. Soc. 1987, v. 100, pp. 601–606.
- [229] *Adler M. P., van Moerbeke P.* Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves and linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. // Adv. Math., 1980, v. 30, pp. 267–379.
- [230] *Adler M., van Moerbeke P.* The Kowalewski and Henon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$. A two-dimensional family of Lax pairs. // Comm. Math. Phys. 1988. v. 113, №4, pp. 659–700.
- [231] *Adler M., van Moerbeke P.* The complex geometry of the Kowalevski–Painlevé analysis. // Invent. Math. v. 97, 1989, pp. 3–51.
- [232] *Adler M. and P. van Moerbeke.* Kowalewski’s asymptotic method, Kac-Moody algebras, and regularizations. // Comm. Math. Phys., v. 83, 1982, pp. 83–106.

- [233] *Albert C., Brouzet R., Dufour J.-P., editors.* Integrable Systems and Foliations. // Birkhäuser, Progress in Mathematics, v. 145, 1997.
- [234] *Asimov D.* Round handles and non-singular Morse–Smale flows. // Ann. Math., 1975, v. 102, № 1, pp. 41–54.
- [235] *Atiyah M.* Convexity and commuting Hamiltonians. // Bull. London Math. Soc. 1982, № 14, pp. 1–15.
- [236] *Audin M.* The topology of torus action on symplectic manifolds. // Progr. Math., v. 93, Basel, Birkhäuser, 1991.
- [237] *Audin M.* Spinning Tops. // Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Vol. 51. Cambridge University Press, 1996.
- [238] *Audin M.* Courbes Algébriques et Systèmes Intégrables: Géodesiques des quadriques. // Expo. Math. 12, 1994, pp. 193–226.
- [239] *Audin M., Silhol R.* Variétés Abéliennes Réelles et Toupie de Kowalewski Compositio Math. 87, 1993, pp. 153–229.
- [240] *Bar-Natan D.* On the Vassiliev knot invariants. // Topology, 1995, v. 34, № 2, pp. 423–472.
- [241] *Bates L.* Monodromy in the champagne bottle. // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 1991, v. 42, pp. 837–847.
- [242] *Birkhoff G. D.* Sur le problème restreint des trois corps.
I. Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, 1935, v. 4, pp. 267–306.
II. Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, 1936, v. 5, pp. 1–72.
- [243] *Bogoyavlensky O. I.* New integrable problem of classical mechanics. // Com. Math. Phys. 1984, v. 94, pp. 255–269.
- [244] *Bogoyavlensky O. I.* On perturbations of the periodic Toda lattices. // Com. Math. Phys. v. 51, 1976, pp. 201–209.
- [245] *Bolotin S. V., Negrini P.* Variational criteria for nonintegrability. // Russian Journal of Math. Physics. (to appear).
- [246] *Bolotin S. V.* Homoclinic orbits of geodesic flows on surfaces. // Russian Journal of Math. Physics, 1992, v. 1.
- [247] *Bolotin S. V., Kozlov V. V.* Symmetry fields of geodesic flows. // Russian Journal of Math. Phys. v. 3, № 3, pp. 279–295.
- [248] *Bolsinov A. V.* Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets. // Acta Applic. Math., 24 (1991), pp. 253–274.
- [249] *Bolsinov A. V.* Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant. // In: Advances in Soviet Mathematics. v. 6, AMS, pp. 147–183.

- [250] *Bolsinov A. V.* Fomenko's invariants in the theory of integrable Hamiltonian systems. // *Topology and Applications*. International Topological Conference dedicated to P. S. Alexandroff's 100-th birthday. Moscow, May 27–31, 1996, Moscow, Phasis, pp. 27–34.
- [251] *Bolsinov A. V.* Integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. // In: *Fomenko A. T., Kunii T. L. Topological Modeling for Visualization*. Springer-Verlag, 1997, pp. 313–330.
- [252] *Bolsinov A. V., Fomenko A. T.* Application of classification theory for integrable Hamiltonian systems to geodesic flows on 2-sphere and 2-torus and to the description of the topological structure of momentum mapping near singular points. // *Journal of Mathematical Sciences*, v. 78, № 5, 1996, pp. 542–555.
- [253] *Bolsinov A. V., Oshemkov A. A., Sharko V. V.* On classification of flows on manifolds. I. // *Methods of Functional Analysis and Topology*, 1996, v. 2, № 2, pp. 190–204.
- [254] *Bott R.* Nondegenerate critical manifolds. // *Annals of Mathematics*, v. 60, 1954, pp. 249–261.
- [255] *Calogero F.* Exactly solvable one-dimensional many-body problems. // *Lett. Nuovo Cimento*, v. 13, 1975, pp. 411–416.
- [256] *Calogero F.* Solution of the one-dimensional N -body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials. // *J. Math. Phys.* v. 12, 1971, pp. 419–436.
- [257] *Casler B. G.* An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary. // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1965, v. 16, № 4, pp. 559–566.
- [258] *Cavicchioli A., Repovš D., Skopenkov A.* An extension of the Bolsinov–Fomenko theorem on orbital classification of integrable Hamiltonian systems. (In print).
- [259] *Chinburg T.* Volumes of hyperbolic manifolds. // *J. Diff. Geom.* 1983, v. 18, pp. 783–789.
- [260] *Chinburg T.* A small arithmetic hyperbolic 3-manifolds. // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1987, v. 100, pp. 140–144.
- [261] *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. // *Math. Ann.*, Leipzig, 1871, № 3, S. 238–262.
- [262] *Colin de Verdière Y., Vey J.* Le lemme de Morse isochore. // *Topology*, v. 18(1979), pp. 283–293.
- [263] *Cushman R. H.* Geometry of the bifurcations of the Henon–Heiles family. // *Proceedings of the Royal Society, London, series A*, 1982, v. 382, pp. 361–371.
- [264] *Cushman R. H., Bates L. M.* *Global aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1997.

- [265] *Cushman R., Knörrer H.* The energy momentum mapping of the Lagrange top. // *Lecture notes in math.* 1985, v. 1136, pp. 12–24.
- [266] *Cushman R., van de Meer J.-C.* The Hamiltonian Hopf bifurcation in the Lagrange top. // *Lecture notes in math.*, 1991, v. 1416, pp. 26–38.
- [267] *Darboux G.* Sur le problème de Pfaff. // *Bulletin des Sciences Mathématique*, 1882, v. 6, pp. 14–36 and pp. 48–68.
- [268] *Darboux G.* Lecons sur la théorie generale des surfaces et les applications géométriques du calcul infenitesimal. Paris, Gautier, Villar, 1891.
- [269] *Dimitrov I.* Bifurcations of Invariant Manifold in the Gelfand–Dikii System. // *Physics letters A*, 163, 1992, pp. 286–292.
- [270] *Dini U.* Sopra un problema che si presenta nella theoria generale delle rapprezetazioni geografice di unasuperficie su di unáltra // *Ann. di Math.* Ser. 2, т. 3, 1869, 269–293.
- [271] *Dirac P.* Generalized Hamiltonian dynamics. // *Canadian Journal of Mathematics*, 1950, v. 2, pp. 129–148.
- [272] *Donagi R., Markman E.* Spectral Covers, Algebraically Completely Integrable Hamiltonian Systems and Moduli of Bundles. Montecatini Terme // 1993, *Lecture Notes in Math.*, v. 1620.
- [273] *Dragovich V. I.* On integrable potential perturbations of the Jacobi problem dor the geodesics on the ellipsoid. // *J. Phys. A: Math. Gen.* v. 29, 1996, pp. 317–321.
- [274] *Dufour J.-P., Molino P., Toulet A.* Classification des systems integrables en dimension 2 et invariants des modeles de Fomenko. // *C. R. Ac. Sc.*, 1994.
- [275] *Duistermaat J. J.* On global action-angle variables. // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1980, v. 33, pp. 678–706.
- [276] *Dullin H. R., Wittek A.* Efficient calculation of actions. // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27(1994), pp. 7461–7474.
- [277] *Dullin H. R., Juhnke M., Richter P.* Action integrals and energy surfaces of the Kovalevskaya top. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 4, №6, 1994, pp. 1535–1562.
- [278] *Dullin H. R., Wittek A.* Complete Poincaré sections and tangent sets. // *J. Phys. A: Math. Gen.* 28(1995), pp. 7157–7180.
- [279] *Dullin H. R., Matveev V. S., Topalov P. J.* On integrals of third degree in Momenta. (in print).
- [280] *Edwards C. H.* Concentricity in 3-manifolds. // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1964, v. 113, №3, pp. 406–423.

- [281] *Eliasson L. H.* Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case. // *Comm. Math. Helv.*, 65(1990), pp. 4–35.
- [282] *Euler L.* Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. // *Mémoires de l'academie des sciences de Berlin*, 1758, v. 14, pp. 154–193.
- [283] *Farkas Hershel M., Kra Irwin.* Riemann Surfaces. Springer-Verlag, 1980.
- [284] *Flaschka H., Ratiu T.* A Morse theoretic proof of Poisson Lie Convexity. // In: *Integrable Systems and Foliations* (Editors: Albert C., Brouzet R., Dufour J.-P.) Birkhäuser, Progress in Mathematics, v. 145, 1997, pp. 49–71.
- [285] *Fleitas G.* Classification of gradient-like flows on dimensions two and three. // *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 1975, v. 6, pp. 155–183.
- [286] *Fomenko A. T.* Topological Classification of All Integrable Hamiltonian Differential Equations of General Type with Two Degrees of Freedom. // In: *The Geometry of Hamiltonian Systems. Proc. of a Workshop Held June 5–16, 1989. Berkeley, USA*, Springer-Verlag, 1991, pp. 131–339.
- [287] *Fomenko A. T.* Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics. Kluwer Acad. Publ.: Amsterdam, 1988.
- [288] *Fomenko A. T.* Symplectic Geometry. (Second edition). Gordon and Breach, 1995.
- [289] *Fomenko A. T.* The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom. // In: *Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc.*, v. 6, 1991, pp. 1–36.
- [290] *Fomenko A. T.* Theory of rough classification of integrable nondegenerate Hamiltonian differential equations on four-dimensional manifolds. Application to classical mechanics. // In: *Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc.* v. 6, 1991, pp. 305–344.
- [291] *Fomenko A. T.* List of all integrable Hamiltonian systems of general type with two degrees of freedom. «Physical zone» in this table. // In: *Integrable and Superintegrable Systems. Edit. B. Kupershmidt. World Scientific Publ. Co. Ptl. Ltd.* 1990, pp. 134–164.
- [292] *Fomenko A. T.* A new topological invariant of topological Hamiltonian systems of differential equations and applications to problems in physics and mechanics. // In: *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 years after Lagrange. (Edit. M. Francaviglia). Elsevier Science Publishers B. V.*, 1991, pp. 127–155.
- [293] *Fomenko A. T.* Rough classification of integrable Hamiltonians on four-dimensional symplectic manifolds. // In: «From Topology to Computation». Proceedings of the Smalefest. 1993. Springer-Verlag, pp. 561–586.

- [294] *Fomenko A. T., editor.* Topological Classification of Integrable Hamiltonian Systems. // Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc., v. 6, 1991.
- [295] *Fomenko A. T., Nguen T. Z.* Topological classification of integrable nondegenerate Hamiltonians on the isoenergy three-dimensional sphere. // In: Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc., v. 6, 1991, pp. 267–296.
- [296] *Fomenko A. T., Trofimov V. V.* Integrable systems on Lie algebras and symmetric spaces. Gordon and Breach, 1988.
- [297] *Fomenko A. T., Matveev S. V.* Computers and visualization in Hyperbolic three-dimensional geometry and topology. // In: Fomenko A. T., Kunii T. L. Topological Modeling for Visualization. Springer-Verlag, 1997, pp. 289–307.
- [298] *Franks J.* The periodic structure of non-singular Morse–Smale flows. // Comment. Math. Helv. 1978, v. 53, № 2, pp. 279–294.
- [299] *Funk P.* Über Flächen mit lauter descglossebeb geodätischen Linien. // Math. Ann. 74, 1913, pp. 278–300.
- [300] *Gavrillov L.* Explicit solutions of the Goryachev–Chaplygin top. Доклады Болгарской академии наук 1987, v. 40, № 4 pp. 19–22.
- [301] *Gavrillov L., Ouazzani-Jamil M., Caboz R.* Bifurcation diagrams and Fomenko’s surgery on Liouville tori of the Kolossoff potential $U = \rho + \frac{1}{\rho} - k \cos \varphi$. // Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4-e série, t. 26, 1993, pp. 545–564.
- [302] *Gavrillov L.* The complex geometry of Lagrange top. // Prépublication № 61 du Laboratoire de Mathématiques Emile Picard. Univeristé Toulouse III, 1995.
- [303] *Gavrillov L.* Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Hénon–Heiles system. // Physica D 34 (1989), pp. 223–239, North-Holland Physics Publishing Division, Amsterdam.
- [304] *Goldstein H.* Classical Mechanics. Addison-Wesley, Reading, MA, 2nd edition 1980.
- [305] *Guillemin V.* The Radon transform on Zoll surfaces. Preprint, 1976.
- [306] *Guillemin V., Sternberg S.* Symplectic Techniques in Physics. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1984.
- [307] *Hadamar M.* Sur la précession dans le mouvement dun corps pesant de révolution fixé par un point de son axe. Bulletin des Sciences Mathématiques, 1895, v. 19, pp. 228–230.
- [308] *Haefliger A., Reeb G.* Varietes (non separees) a une dimension et structures feuilletées du plan. // Enseign. Math., 3(1957), pp. 107–126.

- [309] *Hall L. S.* A theory of exact and approximate configuration invariants. // *Physica D*, v. 8, 1983, pp. 90–116.
- [310] *Hamilton W.* On a general method in dynamics by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central characteristic function. I. // *Philosophical Transactions*, 1834, pp. 247–308. *Mathematical Papers*, v. I, pp. 103–161. II. // *Philosophical Transactions*, 1835, pp. 95–114. *Mathematical Papers*, v. II, pp. 162–211.
- [311] *Hopf H.* Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphären auf der Kugelfläche. // *Mathematische Annalen*, 1931, 104:637–665.
- [312] *Horozov E.* Perturbations of the spherical pendulum and abelian integrals. // *Journal für reine and angewandte Mathematik*, 1990, v. 408, pp. 114–135.
- [313] *Hurwitz A., Courant R.* Vorlesungen über allgemeine Funktionen theorie und elliptische Funktionen. Springer, Berlin, 1929.
- [314] *Huygens C.* l'Horloge à Pendule. Paris, 1673. *Oeuvres Complètes*, v. 18, 69–368. English translation by R. J. Blackwell, Christiaan Huygens' the pendulum clock, Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1985.
- [315] *Ito H.* Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems. // *Comment. Math. Helvetici*. 1989, v. 64, pp. 412–461.
- [316] *Jacobi C. C. J.* Vorlesungen über Dynamic. *Gesammelte Werke*, Supplementband. Berlin, 1884; G. Reimer, Berlin 1891. Reprint: Chelsea, New York, 1967.
- [317] *V. V. Kalashnikov (junior).* Description of the structure of Fomenko invariants on the boundary and inside Q -domains, estimates of their number on the lower boundary for the manifolds S^3 , RP^3 , $S^1 \times S^2$, and T^3 . // In: *Advances in Soviet Mathematics*. v. 6, 1991, AMS pp. 297–304.
- [318] *V. V. Kalashnikov (junior).* A Class of Generic Integrable Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedom. Preprint №907, University Utrecht, Dept. of Math., March 1995.
- [319] *Kiyohara K.* Two classes of Riemannian manifolds whose geodesic flows are integrable. // *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* №619, v. 130. 1997, pp. 1–143.
- [320] *Kiyohara K.* Compact Liouville surfaces, // *J. Math. Soc. Japan* 43 1991, pp. 555–591.
- [321] *Knörrer H.* Geodesics on quadrics and a mechanical problem of C. Neumann. // *J. Reine Angew. Math.*, 334, 1982, pp. 69–78.
- [322] *Knörrer H.* Geodesics of the ellipsoid. // *Invent. Math.*, v. 39, 1980, pp. 119–143.

- [323] *Knörrer H.* Singular fibers of the momentum mapping for integrable Hamiltonian systems. // *J. Reine Angew. Math.*, 1985, v. 355, pp. 67–107.
- [324] *Kowalewski S.* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. // *Acta Math.* v. 12, 1889, pp. 177–232.
- [325] *Kozlov V. V.* Integrable and Nonintegrable Hamiltonian systems. // *Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys.*, 1988, v. 8, pp. 1–81.
- [326] *Kozlov V. V., Fedorov Yu. N.* Memoire on Integrable Systems. Springer-Verlag (in print).
- [327] *Lerman L. M., Umanskii Ya. L.* Structure of the Poisson action of R^2 on a four-dimensional symplectic manifold. I, II. // *Selecta Math. Sov.* 1987, v. 6, pp. 365–396, and 1988, v. 7, pp. 39–48.
- [328] *Liouville J.* Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, présentée au bureau des longitudes le 29 juin 1853. // *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1855, v. 20, pp. 137–138.
- [329] *Lützen L.* Joseph Liouville. Springer Verlag, New York, 1990.
- [330] *Marsden J., Ratiu T.* Introduction to Mechanics and Symmetry. Springer Verlag, New York, 1994.
- [331] *Marsden J., Weinstein A.* Reduction of symplectic manifolds with symmetry. // *Reports on Mathematical Physics.* 1974, v. 5, pp. 121–130.
- [332] *Matveev S. V.* Three-dimensional manifolds having simple special spines. // *Colloq. Math.*, 32 (1974), pp. 83–97.
- [333] *Meyer K. R.* Energy functions for Morse–Smale systems // *Amer. J. Math.*, 1968, v. 90, № 4, pp. 1031–1040.
- [334] *Miyoshi S.* Foliated round surgery of codimension-one foliated manifolds. // *Topology*, 1982, v. 21, № 3, pp. 245–262.
- [335] *Morgan J. W.* Non-singular Morse–Smale flows on 3-dimensional manifolds. // *Topology*, 1979, v. 18, № 1, pp. 41–53.
- [336] *Moser J.* On the volume elements on a manifold. // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 (1965), № 2, pp. 286–294.
- [337] *Moser J.* Various aspects of integrable Hamiltonian systems. // *Prog. Math.*, v. 8. Boston: Birkhäuser. 1980, pp. 233–289.
- [338] *Moser J.* Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations. // *Adv. Math.*, v. 16, 1975, pp. 197–220.
- [339] *Nguen T. Z.* On the complexity of integrable Hamiltonian systems on three-dimensional isoenergy submanifolds. // In: *Advances in Soviet Mathematics.* v. 6, 1991, AMS pp. 229–255.

- [340] *Nguyen Tien Zung*. Contact 3-manifolds. Integrable Hamiltonian Systems, and Exotic Symplectic Structures in R^4 . Preprint. International Centre for Theoretical Physics. Miramare-Trieste. August 1992.
- [341] *Nguyen Tien Zung*. Arnold–Liouville with singularities. Preprint, Ref. S.I.S.S.A. 153/94/M, October 1994 — revised January 1995.
- [342] *Nguyen T. Z.* The symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. Thèse. Université de Strasbourg, 1994.
- [343] *Nguyen T. Z.* Singularities of integrable geodesic flows on multidimensional torus and sphere. // *J. Geometry and Physics*. (to appear).
- [344] *Nguyen Tien Zung*. Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems. // *Letters in Mathematical Physics*, 1995, v. 33, pp. 187–193.
- [345] *Nguyen T. Z. and Polyakova L. S.* A topological classification of integrable geodesic flows of the two-dimensional sphere with quadratic in momenta additional integral. // *Journal of Nonlinear Sciences*, 1992, v. 6, pp. 85–108.
- [346] *Okuneva G. G.* Integrable Hamiltonian systems in analytic dynamics and mathematical physics. // In: *Advances in Soviet Mathematics*. v. 6, 1991, AMS, pp. 37–66.
- [347] *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.* Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras. // *Invent. Math.*, 1976, v. 37, № 2, pp. 93–108.
- [348] *Orel O. E.* Topological and orbital analysis of integrable Lagrange and Goryachev–Chaplygin problems. // In: *Fomenko A. T., Kunii T. L. Topological Modeling for Visualization*. Springer-Verlag, 1997, pp. 331–347.
- [349] *Orlik P.* Seifert manifolds. // *Lecture notes in Math.* 1972, v. 281. Springer Verlag, New York.
- [350] *Oshemkov A. A.* Fomenko Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations. // *Advances in Soviet Mathematics*, AMS, v. 6, 1991, pp. 67–146.
- [351] *Paternain G. P.* On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows. // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 1992, v. 12, pp. 109–121.
- [352] *Paternain G. P., Spatzier R. J.* New examples of manifolds with completely integrable geodesic flows. // *Adv. Math.*, 1994., v. 108, № 2, pp. 346–366.
- [353] *Paternain G. P.* Entropy and completely integrable Hamiltonian systems. // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1991, v. 113, № 3, pp. 871–873.

- [354] *Peixoto M. M.* On the classification of flows of 2-manifolds. // In: Dynamical Systems. Proc. Symp. Univ. of Bahia, New York-London: Acad. Press., 1973, pp. 389–419.
- [355] *Peixoto M. M.* Structural stability on two-dimensional manifolds. I, II. // Topology, 1962, v. 1, № 2, pp. 101–120; Topology, 1963, v. 2, № 2, pp. 179–180.
- [356] *Peixoto M. C., Peixoto M. M.* Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. // Anais Acad. Brasil. Ciências, 1959, v. 31, № 2, pp. 135–160.
- [357] *Piovan L.* Cyclic coverings of Abelian varieties and the Goryachev–Chapuygin top. // Math. Ann, 1992, v. 294, pp. 755–764.
- [358] *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Vols. 1–3, Gauthier-Villars, Paris, 1892/1893/1898. Reprint: Dover, New York, 1957.
- [359] *Poisson L.* Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de la mécanique. // Journal de l’Ecole Polytechnique, 1809, 8 (15 cahier).
- [360] *Polyakova L. S.* Topological invariants for some algebraic analogs of the Toda lattice. // In: Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc. v. 6, 1991, pp. 185–208.
- [361] *Raffy M. L.* Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques. // J. de Math., 4 ser., 10(1894).
- [362] *Reeb G.* Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique. // Comptes Rendus Acad. Sciences Paris. 1946, v. 22, pp. 847–849.
- [363] *Reiman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body. // Commun. Math. Phys. 1986, v. 105, pp. 461–472.
- [364] *Russmann H.* Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslosung. // Math. Ann. 1964, v. 154, pp. 284–300.
- [365] *Schlichenmaier Martin.* An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces. // Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1989, v. 322.
- [366] *Scott P.* The geometries of 3-manifolds. // Bull. Amer. Math. Soc. 1983, v. 15, pp. 401–487.
- [367] *Seifert H., Weber C.* Die beiden Dodekaederraume. // Math. Zeitschrift, B. 37 (1933), S. 237–253.

- [368] *Selivanova E. N.* Topological classification of integrable Bott geodesic flows on the two-dimensional torus. // In: Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc. v. 6, 1991, pp. 209–228.
- [369] *Siegel C. L.* On the integrals of canonical systems. // Ann. Math., 1941, 42, pp. 806.
- [370] *Smale S.* Topology and mechanics. I. // Inventiones Mathematicae, 1970, v. 10, pp. 305–331. II. // Inventiones Mathematicae, 1970, v. 11, pp. 45–64.
- [371] *Smale S.* On gradient dynamical systems. // Annals of Math., 1961, v. 74, pp. 199–206.
- [372] *Spatzier R. J.* Riemannian Manifolds with Completely Integrable Geodesic Flows. // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Amer. Math. Soc. 1993, v. 54, Part 3, pp. 599–608.
- [373] *Steklov V. A.* Remarque sur un probleme de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indefini et sur le probleme de M. de Brun. // Comptes Rendus de l'Acad. sci., Paris, 1902, 135, pp. 526–528.
- [374] *Sternberg S.* Lectures on Differential Geometry. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1964.
- [375] *Taimanov I. A.* Integrable geodesic flows of non-holonomic metrics. (to appear).
- [376] *Takahashi S.* Numerical calculation of the orbital invariant of Goryachev–Chaplygin and Lagrange systems. // In: Fomenko A. T., Kunii T. L. Topological Modeling for Visualization. Springer-Verlag, 1997, pp. 349–377
- [377] *Thimm A.* Integrable geodesic flows on homogeneous spaces. // Ergod. Theory and Dynam. Syst. 1981, v. 1, № 4, pp. 495–517.
- [378] *Thurston W. P.* The Geometry and Topology of 3-Manifolds. Preprint, 1981.
- [379] *Thurston W. P.* Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. // Bull. Amer. Math. Soc., 1982, v. 6, № 3, pp. 357–381.
- [380] *Thurston W. P.* Existence of codimension-one foliations. // Ann. Math. 1976, v. 104, № 2, pp. 249–268.
- [381] *Toda M.* Theory of nonlinear lattices. Springer, Berlin, 1981.
- [382] Topological Classification of Integrable Systems. // In: Advances in Soviet Mathematics. Editor A. T. Fomenko. Amer. Math. Soc. v. 6, 1991.
- [383] *Trofimov V. V.* Symplectic connections and Maslov–Arnold characteristic classes. // In: Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc. v. 6, 1991, pp. 257–266.

- [384] *Vey J.* Sur certain systemes dynamiques separables. // Amer. J. Math., 1978, v. 100, pp. 591–614.
- [385] *Veselov A. P.* Two remarks about the connection of Jacobi and Neumann integrable systems. // Math. Zeitschrift, 216 (1994), pp. 337–345.
- [386] *Waldhausen F.* Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I,II. // Invent. Math. 1967, v. 3, № 4, pp. 308–333; 1967, v. 4, № 2, pp. 88–117.
- [387] *Wang X.* The C^* -algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 1990, v. 10, pp. 565–597.
- [388] *Weinstein A.* Symplectic geometry. // Bulletin of the American Mathematical Society, 1981, v. 5, pp. 1–13.
- [389] *Weeks J.* Hyperbolic structures of three-manifolds. // Ph. Dr. Thesis. Department of Mathematics, Princeton University, 1985.
- [390] *Whittaker E. T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1937.
- [391] *Williamson J.* On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. // Amer. J. Math., 1936, v. 58, № 1, pp. 141–163.
- [392] *Williamson J.* On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics. // American Journal of Mathematics, 1937, v. 59, pp. 599–617.
- [393] *Yamato Kazuo.* A class of Riemannian manifolds with integrable geodesic flows. // J. Math. Soc. Japan. v. 47, № 4, 1995, pp. 719–733.
- [394] *Yehia H. M.* New integrable cases in dynamics of rigid bodies. // Mech. Res. Com. 1986, v. 13(3), pp. 169–172.
- [395] *Zoll O.* Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischen Linien. // Math. Ann., 57, 1903, pp. 108–133.

Дополнительная литература

- [396] *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
- [397] *Калашников В. В. (мл.).* Типичные интегрируемые гамильтоновы системы на четырехмерном симплектическом многообразии. // Известия РАН, серия матем., 1998, т. 62, вып. 2, с. 49–74.
- [398] *Богоявленский О. И.* Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n . // Известия АН СССР, серия матем., 1985, т. 49, № 5, с. 899–915.
- [399] *Веселов А. П.* Уравнение Ландау–Лифшица и интегрируемые системы классической механики. // Доклады АН СССР, 1983, т. 270, № 5, с. 1094–1097.

- [400] *Елеонский В. М., Кулагин Н. Е.* О новых случаях интегрируемости уравнений Ландау–Лифшица. // *ЖЭТФ*, 1983, т. 83, № 2, с. 616–629.
- [401] *Babenko I. K.* Les flots géodesiques quadratiquement intégrables sur les surfaces fermées et les structures complexes correspondantes. // Preprint, Inst. de Recherche Math. Avancée, Strasbourg.
- [402] *Матвеев В. С., Ошемков А. А.* Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло. // *Вестник МГУ, серия матем.*, 1998 (в печати).
- [403] *Матвеев В. С., Топалов П. Й.* Геодезическая эквивалентность метрик на поверхностях и их интегрируемость. // *Доклады РАН*, 1998 (в печати).
- [404] *Кудрявцева Е. А.* Приведение функций Морса на поверхностях к каноническому виду путем гладкой деформации. // *Регулярная и хаотическая динамика*. 1998 (в печати).
- [405] *Матвеев В. С., Топалов П.* Метрика на сфере, геодезически эквивалентная метрике постоянной кривизны, сама является метрикой постоянной кривизны. // *Вестник МГУ, серия матем.*, 1998, № 5, с. 57–59.

Алексей Викторович Болсинов
Анатолий Тимофеевич Фоменко

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

ГЕОМЕТРИЯ, ТОПОЛОГИЯ, КЛАССИФИКАЦИЯ

Том I

Дизайнер С. А. Кузнецов
Компьютерная подготовка А. В. Широбоков
В. А. Чернойван
Рисунки А. Т. Фоменко
Корректурa А. Н. Коробейникова

Лицензия ЛР № 020411 от 16.02.97. Подписано к печати 30.05.99

Формат $70 \times 100^{1/16}$. Усл. печ. л. 35,97. Уч. изд. л. 31,37.

Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern Roman

Заказ № К88 Тираж 1000 экз.

Издательский дом «Удмуртский университет»,
426011, г. Ижевск, ул. Майская, 23.

Республиканская типография
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.