

**ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА**

М.: Энергия, 1975, 209 стр.

Книга посвящена применению вариационных методов исследования задач теплообмена. Рассматриваются как линейные, так и нелинейные системы со сложным теплообменом. Для пояснения математических методов приводится большое количество решений конкретных задач.

Книга предназначена для научных работников и инженеров, работающих в различных областях физики, и в первую очередь в теплофизике.

**Содержание**

Предисловие редактора русского перевода	5
Предисловие автора	8
<b>Глава первая. Основной вариационный принцип в теплопроводности</b>	
1.1. Введение	13
1.2. Вариационный принцип для изотропной теплопроводности	15
1.3. Обобщенные координаты	19
1.4. Уравнения Лагранжа и принцип минимальной диссипации	21
1.5. Анизотропная теплопроводность	25
1.6. Источники тепла	28
1.7. Численный пример	31
<b>Глава вторая. Общая теория линейных систем</b>	
2.1. Введение	34
2.2. Диссипативная функция граничных условий	36
2.3. Линейные уравнения Лагранжа	39
2.4. Моды тепловой релаксации	42
2.5. Ортогональность и нормальные координаты	46
2.6. Квазистационарное течение	53
2.7. Пример. Слабые решения	55
<b>Глава третья. Операционный формализм</b>	
3.1. Введение	58
3.2. Тепловая восприимчивость	59
3.3. Полное тепловое сопротивление	64
3.4. Преобразования Фурье и Лапласа	67
3.5. Операционные методы	70
3.6. Операторно-вариационный принцип	73
3.7. Принцип взаимовлияния	75
3.8. Непрерывный спектр релаксации	79

<b>Глава четвертая. Сопряженные поля</b>	
4.1. Введение	81
4.2. Циклические координаты и сопряженные поля	83
4.3. Принцип минимальной диссипации для сопряженных полей	87
4.4. Дополнительная формулировка сопряженных полей	89
4.5. Связь с функцией Грина	94
4.6. Сопряженные поля и нормальные координаты	98
4.7. Пример сопряженных полей	104
<b>Глава пятая. Нелинейные системы</b>	
5.1. Введение	106
5.2. Тепловой потенциал нелинейных систем	107
5.3. Вариационный принцип	108
5.4. Сопряженные поля для нелинейных систем	111
5.5. Оплавление и излучение	115
5.6. Нагревание и охлаждение стенки с нелинейными свойствами	118
<b>Глава шестая. Конвективный теплообмен</b>	
6.1. Введение	121
6.2. Функция влияния	122
6.3. Уравнения Лагранжа для теплопроводности при наличии конвекции на границе	127
6.4. Сопряженные поля для конвективного теплообмена	129
6.5. Унифицированные уравнения для системы «твердое тело - жидкость» при наличии конвекции	134
<b>Глава седьмая. Теплообмен в пограничном слое</b>	
7.1. Введение	140
7.2. Аналогия теплопроводности	142
7.3. Вариационная оценка функции влияния	144
7.4. Общие вариационные методы	148
7.5. Ламинарный пограничный слой	154
7.6. Турбулентный пограничный слой	159
7.7. Приложения	165
<b>Глава восьмая. Дополнительные вариационные принципы</b>	
8.1. Введение	167
8.2. Теплопроводность линейных систем	169
8.3. Операционные принципы	177

8.4. Теплопроводность в нелинейных системах	181
8.5. Конвективные системы	184
Приложение А. Физические аналогии	
А.1. Введение	189
А.2. Перенос массы	190
А.3. Термодинамика необратимых процессов	192
А.4. Обобщенные координаты и функциональный анализ	199
Список литературы	204

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $C$  — постоянная;
- $c$  — теплоемкость;
- $D$  — диссипативная функция;
- $E$  — вектор функционального пространства;
- $\mathcal{E}$  — коэффициент турбулентной диффузии;
- $F$  — заданное поле теплового потока, зависящее только от координат;
- $H$  — поле теплового смещения;
- $\dot{H}$  — плотность теплового потока;
- $h$  — энтальпия;
- $\mathbf{Hn} dA$  — тепловой поток через элемент поверхности  $dA$ ;
- $J$  — плотность потока энергии или массы;
- $K$  — коэффициент теплообмена;
- $k$  — коэффициент теплопроводности;
- $\mathcal{L}$  — символ преобразования Лапласа;
- $\dot{M}$  — суммарная плотность диффузионного потока;
- $m$  — концентрация;
- $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали;
- $Q$  — обобщенная сила;
- $q_i$  — обобщенные координаты;
- $s$  — элемент поверхности;
- $S$  — поверхность;
- $t$  — время;

- $V$  — тепловой потенциал;
- $w$  — объемная плотность источников тепла;
- $\varepsilon$  — степень черноты;
- $\eta$  — функция Хевисайда;
- $\theta$  — температура;
- $\Theta$  — векторные поля теплового потока;
- $\psi$  — температура в аналоговой модели;
- $\tau$  — объем;
- $\omega$  — частота гармонических колебаний.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей книга выдающегося ученого, академика Бельгийской академии наук, действительного члена Национальной инженерной академии США, профессора Мориса Био представляет большой интерес для теплофизиков и теплотехников. Разработанный им метод вариационного исчисления позволяет решать широкий круг задач теплопроводности и теплопередачи, в частности задачи нестационарной теплопроводности в телах сложной конфигурации, конвективного теплообмена при ламинарном и турбулентном течении, провести расчеты теплопередачи в теплообменных аппаратах и т. д. Известно, что все вариационные методы решения задач математической физики, в том числе и вариационный метод М. Био, являются приближенными методами. Однако по сравнению с другими вариационными методами, применяемыми в задачах теплопереноса, метод М. Био является наиболее точным, так как варьирование происходит по вектору теплового смещения, в результате чего в основных соотношениях отсутствуют пространственные производные температуры. Это дает возможность получить высокую точность приближенных решений, а также решать такие задачи, когда распределение температуры в теле описывается прерывными функциями. Вариационный метод М. Био является аналогом вариационного метода Журдена в классической аналитической механике, в котором варьирование происходит по скоростям. Известно, что в аналитической механике на основе понятия виртуальной работы используются вариационные методы Гаусса и Даламбера — Лагранжа. На основе этих методов разработаны и другие вариационные методы решения задач теплопереноса, как, например, вариационный метод И. Дярматы, но они разработаны не в такой степени, чтобы решать широкий круг задач теплопереноса, как при помощи метода М. Био.

Большим достоинством вариационного метода М. Био является то, что он дает возможность решать нелиней-

ные задачи теплопроводности и задачи теплопроводности, когда коэффициент теплопроводности является тензорной величиной в анизотропных телах. Автор весьма успешно использовал операционное исчисление Хевисайда и интегральные преобразования Фурье и Лапласа и получил вариационные соотношения в операторной форме. Это не только значительно упростило решение задач, но и расширило область применения вариационного метода в теплотехнике.

Особо надо отметить разработанный им способ решения задач конвективного теплообмена при обтекании тел ламинарным и турбулентным потоком жидкости (обычно вариационные методы применяются при решении задач теплопроводности). Важно это не только потому, что вариационный метод применяется к решению задачи конвективного теплообмена, но, главным образом, потому, что задача конвективного теплообмена решается как сопряженная задача. Обычно задачи конвективного теплообмена решаются на основе так называемого закона конвективного теплообмена Ньютона, когда на границе твердое тело — жидкость принимаются граничные условия третьего рода. Физически правильно поставленная задача конвективного теплообмена должна решаться с учетом взаимного влияния температурных полей жидкости и твердого тела (сопряженные задачи). В вариационном методе М. Био эта взаимосвязь теплопереноса в жидкости и в твердом теле осуществляется при помощи функции влияния. Таким образом, метод М. Био дает правильную постановку и решение задачи конвективного теплообмена, отвечающих современным представлениям физического механизма тепло- и массообмена. Кроме того, второй способ решения задач конвективного теплообмена на основе унифицированных уравнений позволяет решать задачи теплообмена при фильтрации жидкости через пористые среды при ламинарном и турбулентном течении двухфазной системы «жидкость — твердые частицы», так как уравнения Лагранжа применимы не только для теплопроводности, но и для конвекции. Этот важный фундаментальный результат, полученный автором, будет иметь большое значение в дальнейшем развитии теории конвективного теплообмена.

Успешное применение методов аналитической механики в теории теплообмена является не случайным. В настоящее время быстро развивается нелинейная тер-

момеханика сплошных сред, которая включает в себя последние достижения не только современной механики жидкостей, но и термодинамики необратимых процессов и теории тепло- и массообмена. Метод нелинейной термомеханики позволяет заложить основы развития нелинейной теории теплообмена. Монография М. Био является важным вкладом в решении важнейшего вопроса современной теории теплообмена, так как надо еще раз отметить, что вариационные методы автора дают возможность решать нелинейные задачи теплопереноса. Приближенность этих решений не умаляет их значения, так как нелинейные задачи в подавляющем большинстве случаев решаются только приближенно, а высокая точность решений делает их пригодными для практического использования в инженерной практике.

В качестве единственного замечания редактора можно отметить конспективность изложения, в результате чего в небольшой по объему монографии рассмотрены основные вопросы применения вариационных методов в теории теплообмена.

Следует отметить удачное методическое построение книги: перед каждой главой приводится краткое содержание и основные результаты, теоретические выводы иллюстрируются конкретными примерами. Поэтому книга может служить в качестве учебного пособия для аспирантов и студентов старших курсов теплотехнических специальностей высших учебных заведений. Редактор и переводчики стремились сохранить стиль изложения, его краткость и четкость.

*А. Лыков*



## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В данной книге разрабатывается вариационный подход к переносу тепла теплопроводностью и конвекцией. Цель книги — предложить основы единого рассмотрения необратимых процессов методами, аналогичными методам классической механики, что позволяет формулировать явления переноса тепла и диссипативных процессов в сложных системах с помощью уравнений типа Лагранжа и обобщенных координат. Одновременно такой подход дает возможность использовать многочисленные аппроксимации и значительные упрощения при практическом решении большого класса задач физики.

Следует иметь в виду, что предлагаемый здесь вариационный анализ выходит за рамки традиционной схемы, в основе которой лежит условие аддитивности скалярной функции, характеризующей механическую систему. Методы рассматриваемого анализа включают обобщение понятия виртуальной работы в классической механике. Кроме того, сам принцип виртуальной работы рассматривается в более широком аспекте и выводится из понятия «вариационного скалярного произведения». В результате получены вариационные уравнения, включающие величины различного типа, причем некоторые из них являются действительными вариациями скаляров, в то время как другие аналогичны величинам, определяющим обобщенные силы в лагранжевой механике.

Большая часть книги, состоящей из восьми глав, посвящена исключительно вопросам переноса тепла, что создает основу для иллюстрации различных точек зрения и методов, используемых при решении многих практических задач.

Приложение вариационного анализа к другим областям физики, а также некоторые общие математические аспекты данного вопроса рассматриваются в приложении.

В гл. 1 при рассмотрении линейной теплопроводности вводится основная форма вариационного принципа, исходя из понятий термодинамического потенциала, диссипативной функции и обобщенной термодинамической силы.

Сохранение энергии играет роль голономной связи. Диссипативная функция, выраженная через производную по времени от вектора теплового смещения, является обобщением понятия, введенного Релеем для механических систем с вязкой диссипацией. Это обобщение тесно связано с принципом взаимности Онзагера в термодинамике необратимых процессов. Полученные уравнения Лагранжа в обобщенных координатах приводят к принципу минимальной диссипации. Возможности и точность метода иллюстрируются на примере простой задачи распространения тепла в стенке с использованием понятия глубины проникновения.

В гл. 2 рассматриваются общие характеристики линейных систем, и выводятся соответствующие линейные уравнения Лагранжа. Физическая модель включает локальное линейное граничное условие теплопереноса, часто используемое на практике в качестве аппроксимации. Это достигается путем введения диссипации на границе в диссипативную функцию, описывающую систему в целом. Одной из важных особенностей линейных систем является наличие релаксационных мод и нормальных координат. Интересной особенностью нормальных координат при рассмотрении процесса теплопроводности является свойство бесконечного вырождения, связанное со стационарным потоком. Использование нормальных координат может привести к «слабым решениям» в смысле функционального анализа, что иллюстрируется на примере решения задачи проникновения тепла в стенку.

Операционная формулировка линейной системы с зависимыми от времени параметрами представлена в гл. 3. Общий вид тепловой восприимчивости и полного теплового сопротивления устанавливается на основе неотрицательного и положительно-определенного характера основных квадратичных форм, описывающих систему. Эти результаты определяют реакцию для гармонической временной зависимости; переходные процессы анализируются на основе преобразований Фурье — Лапласа. Получаемые операционные формулы значительно упрощаются сохранением в производной по времени простого оператора, введенного впервые Хевисайдом. Тогда преобразования Лапласа можно выразить через обобщенные функции. По своей природе операционные уравнения приводят непосредственно к вариационным принципам в операторной форме. Эти принципы могут быть выра-

жены по-разному в зависимости от формы представления дифференциального оператора в виде обычной алгебраической или числовой переменной или в виде свертки преобразования Лапласа от произведения во временном интервале. В этой главе также выводится с вариационной точки зрения единое правило взаимосвязи термодинамических систем, обеспечивающее общую основу для формулировки разнообразных методов конечных элементов. Кроме того, здесь на примере иллюстрируется понятие непрерывного спектра релаксации и показывается значение этого понятия в операционных методах.

Метод сопряженных полей, изложенный в гл. 4, может использоваться для определения температурного поля по бездивергентному полю вектора теплового смещения. Бездивергентность соответствует циклическим координатам в классической механике; она может не учитываться, когда необходимо рассчитать только температуру. Показано, что этот метод связан с наличием нормальных координат с бесконечной вырождаемостью. Метод иллюстрируется на примере задачи нагрева тел сложных конфигураций.

Применение вариационных принципов к нелинейным системам с зависимыми от температуры параметрами рассматривается в гл. 5. Обобщение понятия термодинамического потенциала приводит к уравнениям, аналогичным тем, которые были получены для линейных систем. При определенных условиях метод сопряженных полей может использоваться в нелинейных задачах. Рассматриваются также частные нелинейные задачи с нелинейными свойствами. К ним относятся, например, задачи об излучении и оплавлении поверхностей. На простом примере с помощью численного счета показано различие между нагреванием и охлаждением, вызванное нелинейностью.

В гл. 6 вариационные методы используются для решения линейных и нелинейных задач конвективного переноса тепла. Рассмотрены решения в двух приближениях. В первом приближении рассматривается теплопроводность в неподвижном твердом теле, границы которого находятся в контакте с движущейся жидкостью. Характеристики переноса тепла на границах определяются функцией влияния. Эта функция в свою очередь определяется как распределение температуры на границе, обусловленное подводом к жидкости в данной точке на

работе по термодинамике необратимых процессов, включающей теплопроводность как частный случай [Л. 1-4]. Введем величину

$$X_i = Q_i - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (1.4.8)$$

Тогда уравнения Лагранжа (1.4.6) примут вид:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = X_i. \quad (1.4.9)$$

Теперь допустим, что  $\mathbf{H}$  не содержит времени в явном виде; тогда получим  $\dot{\mathbf{H}}$  из уравнения (1.4.1) в виде

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (1.4.10)$$

а также диссипативную функцию  $D$ , являющуюся положительно определенной квадратичной формой в переменных  $\dot{q}_i$ . В этом случае уравнения (1.4.9) показывают, что условие  $X_i = 0$  означает  $\dot{q}_i = 0$  и является условием статического равновесия. Поэтому будем называть  $X_i$  силами, определяющими неравновесное состояние.

Для данных значений  $q_i$  диссипативная функция зависит от производных по времени  $\dot{q}_i$ . Потребуем, чтобы  $D$  было минимальным при изменении векторов  $\dot{q}_i$ , удовлетворяющих условиям вида

$$\sum_i X_i \dot{q}_i = \text{const}. \quad (1.4.11)$$

Это приводит к уравнению

$$\sum_i \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} - \Lambda X_i \right) \delta \dot{q}_i = 0, \quad (1.4.12)$$

где  $\Lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа. Положив  $\Lambda = 1$ , из уравнения (1.4.12) легко получить уравнение (1.4.9). Таким образом, принцип минимальной диссипации при условии (1.4.11) определяет скорость изменения тепловой системы в любой момент времени. Это является физическим объяснением уравнений Лагранжа. Заметим, что в механической или электрической аналоговой модели условие (1.4.11) выражает постоянство работы сил, обуславливающих неравновесное состояние.

Положим также

$$Q_i = - \iint_A \theta \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{n} dA. \quad (1.4.5)$$

Подставив выражения (1.4.4) и (1.4.5) в уравнения (1.3.7), получим:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} = Q_i. \quad (1.4.6)$$

При наличии  $n$  обобщенных координат  $q_i$  эти уравнения составляют систему  $n$  дифференциальных уравнений для неизвестных  $q_i$ .

Уравнения (1.4.6) имеют такой же вид, как и уравнения Лагранжа в механике, описывающие медленное движение диссипативной системы, когда пренебрегают силами инерции. Функция  $V$  — потенциальная энергия, а  $D$  — диссипативная функция. В правой части уравнения  $Q_i$  — обобщенная внешняя сила, приложенная к системе и определяемая методом виртуальной работы.

По аналогии с механикой в задачах теплопроводности мы будем называть  $V$  тепловым потенциалом, а  $D$  — диссипативной функцией.

Величины  $Q$  представляют собой обобщенные тепловые движущие силы, обусловленные распределением температуры на границе. Поэтому мы будем называть их тепловыми силами по аналогии с механикой. Их можно определить методом виртуальной работы. Это следует из рассмотрения соотношения, полученного из уравнений (1.3.4) и (1.4.5):

$$\sum_i Q_i \delta q_i = - \sum_i \iint_A \theta \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{n} \delta q_i dA = - \iint_A \theta \mathbf{n} \delta H dA. \quad (1.4.7)$$

Допустим, что изменяется только одна координата на единицу  $\delta q_i$ . Тогда правая часть уравнения (1.4.7) представляет собой соответствующую тепловую силу  $Q_i$ . Используя механическую модель, можно объяснить выражение (1.4.7) как виртуальную работу сил давления —  $\mathbf{n} \delta H$  в объеме потока жидкости, поступающего через единицу площади на границе.

*Принцип минимальной диссипации.* Из частного случая уравнений Лагранжа (1.4.6) сразу становится ясно, что они эквивалентны принципу минимальной диссипации. Это было показано автором в 1955 г. в более общей

ностью. Это становится очевидным, если иметь в виду, что мы рассматриваем системы с молекулярной структурой и что в качестве приближения для их описания используем понятие континуума.

Поэтому физически справедливо рассматривать также дискретную систему, состоящую из ряда конечных ячеек. Это ячейки могут быть очень маленькими, оставаясь, однако, достаточно большими с точки зрения молекулярных масштабов, так что законы статистической термодинамики остаются справедливыми для каждой ячейки. Их можно представить себе в виде кубика, к каждой грани которого приложен вектор теплового смещения. Тогда температура ячейки будет определяться величинами этих векторов на каждой грани, подчиняющимися закону сохранения энергии в виде (1.2.2). Определенные таким образом дискретные векторы описывают физическую систему и могут рассматриваться как частный случай обобщенных координат.

#### 1.4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИП МИНИМАЛЬНОЙ ДИССИПАЦИИ

Интеграл по объему в уравнениях (1.3.7) можно выразить в более простой форме, из которой станет ясным его физический смысл. Поскольку обобщенные координаты  $q_i$  являются функциями времени, можно записать:

$$\dot{H} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.4.1)$$

Уравнение (1.4.1) получается после дифференцирования выражения (1.3.1) по времени. Из уравнения (1.4.1) следует:

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.4.2)$$

Тогда, положив

$$D = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{1}{k} \dot{H}^2 d\tau, \quad (1.4.3)$$

найдем:

$$\frac{\partial D}{\partial q_i} = \iiint_V \frac{1}{k} \dot{H} \frac{\partial \dot{H}}{\partial q_i} d\tau = \iiint_V \frac{1}{k} \dot{H} \frac{\partial H}{\partial q_i} d\tau. \quad (1.4.4)$$

где  $H_i$  — поле, которое либо является заданной функцией времени, либо не зависит от времени.

Выражения (1.3.3) включают как частный случай ряды Фурье и разложения по ортогональным функциям. Поэтому в дальнейшем будем считать справедливым представление поля  $\mathbf{H}$  в виде обобщенных координат. На математическом языке абстрактных пространств это означает, что это представление справедливо везде, за исключением множества точек с нулевой или конечной мерой.

Вариационный принцип (1.2.9) можно сформулировать с помощью обобщенных координат, используемых вместо компонент самого поля. Рассмотрим произвольные вариации  $\delta q_i$  обобщенных координат. Соответствующими вариациями поля являются

$$\delta \mathbf{H} = \sum^i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.3.4)$$

Выражение (1.2.8) для  $V$  есть функция  $q_i$ , и можно записать:

$$\delta V = \sum^i \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.3.5)$$

Учитывая соотношения (1.3.4) и (1.3.5), запишем уравнение (1.2.9) в виде

$$\begin{aligned} \sum^i \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} + \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} d\tau \right) \delta q_i = \\ = - \sum^i \delta q_i \iint_A \theta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \mathbf{n} dA. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Поскольку вариации  $\delta q_i$  являются произвольными, из (1.3.6) вытекают соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} d\tau = - \iint_A \theta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \mathbf{n} dA. \quad (1.3.7)$$

Число таких уравнений равно числу обобщенных координат.

*Выбор обобщенных координат для описания физической системы.* Всегда можно выбрать такое число обобщенных координат и сделать это таким образом, что система с физической точки зрения будет описана пол-

точка зрения не является новой и соответствует понятию, известному в классической механике как принцип виртуальной работы. В механике он формулируется в виде принципа Даламбера. Эти принципы приводят к вариационным уравнениям, аналогичным уравнению (1.2.9). Абстрагируясь, можно утверждать, что в основе этого метода лежит понятие вариационного скалярного произведения. Оно является выражением скалярного произведения в функциональном пространстве. В этом выражении некоторые члены можно преобразовать в величины, представляющие собой вариации инвариантов функционалов, соответствующие традиционным понятиям вариационного исчисления. Остальные члены, которые нельзя выразить таким образом, относятся к другой категории и называются в лагранжевой механике обобщенными силами. Несколько подробнее эти аспекты вариационных методов обсуждаются в приложении (§ А.4), где показано, как их можно перевести на абстрактный язык функционального анализа и теории множеств.

### 1.3. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

Вариационный принцип (1.2.4) приобретает новый смысл, если выразить его с помощью обобщенных координат. Представим поле  $\mathbf{H}$  в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (1.3.1)$$

Иными словами, будем считать, что это поле является заданной функцией пространственных координат  $x, y, z$ , времени  $t$  и некоторого числа параметров  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Эти параметры есть неизвестные функции времени, которые можно считать обобщенными координатами, представляющими поле  $\mathbf{H}$ . Мы можем использовать конечное число  $q_i$  или бесконечное счетное множество координат в зависимости от типа задачи и необходимой точности представления неизвестного поля. В частности, можно выбрать линейное представление в виде конечного или бесконечного числа рядов. В этом случае можно записать:

$$\mathbf{H} = \sum_i q_i H_i(x, y, z, t) \quad (1.3.2)$$

или

$$\mathbf{H} = \sum_i q_i H_i(x, y, z), \quad (1.3.3)$$



дет показано в следующем параграфе при введении обобщенных координат.

*Теплопроводность, зависящая от времени.* Приведенный вывод вариационного принципа остается справедливым и в том случае, когда коэффициент теплопроводности является функцией не только координат, но и времени

$$k = k(x, y, z, t). \quad (1.2.10)$$

Это замечание весьма полезно не столько потому, что такое свойство имеет место в физической реальности, сколько в связи с другими явлениями, приводящими к математически эквивалентным уравнениям с коэффициентом теплопроводности, зависящим от времени.

*Система с подвижными границами.* Вариационный принцип (1.2.9) применим также к системам с подвижными границами. Это следует из того, что интегралы по объему и поверхности распространяются на мгновенные геометрические конфигурации, которые отличаются друг от друга в разные моменты времени. Следовательно, вариационный принцип является формулировкой закона, который управляет распределением плотности теплового потока  $\mathbf{H}$  в любой момент времени для данного распределения температуры  $\theta$ . Поэтому вариационный принцип можно использовать для решения задач теплопроводности для систем с подвижными границами.

*Уравнение Фурье.* В данном анализе тепловое поле описывается двумя уравнениями. Уравнение (1.2.2) описывает закон сохранения энергии, а уравнение (1.2.4) — закон теплопроводности. Это разделение есть прямой результат введения векторного поля теплового смещения  $\mathbf{H}$  в качестве дополнительной переменной. Исключив  $\mathbf{H}$  из уравнений (1.2.2) и (1.2.4), получим:

$$\operatorname{div} (k \operatorname{grad} \theta) = c \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (1.2.10a)$$

Это хорошо известное уравнение Фурье, используемое обычно для описания переноса тепла. Оно объединяет закон сохранения энергии и закон теплопроводности в одно уравнение. Однако во многих случаях предпочтительнее использовать два отдельных уравнения (1.2.2) и (1.2.4). В частности, такое разделение приводит к вариационному принципу (1.2.5), с помощью которого можно приближенно проверить закон теплопроводности при строгом выполнении закона сохранения энергии.

*Обобщенные вариационные методы.* Вариационный принцип, выраженный уравнением (1.2.9), следует понимать в более широком смысле, выходящем за рамки традиционных понятий вариационного исчисления. Эта

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к ограничивающей поверхности  $A$ . Из уравнения (1.2.3) выводим:

$$-\iiint_V \theta \operatorname{div} (\delta \mathbf{H}) d\tau = \iiint_V c\theta \delta\theta d\tau = \delta V. \quad (1.2.7)$$

Скаляр  $V$  определяется как

$$V = \frac{1}{2} \iiint_V c\theta^2 d\tau. \quad (1.2.8)$$

Он играет роль потенциала, что станет яснее при рассмотрении этой величины в связи с введением обобщенных координат в § 1.3. Подставив  $\delta V$  в уравнение (1.2.6), получим:

$$\delta V + \iiint_V \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} \delta \mathbf{H} d\tau = - \iint_A \theta \mathbf{n} \delta \mathbf{H} dA. \quad (1.2.9)$$

Это выражение является вариационным принципом для теплопроводности\*. Уравнение (1.2.9) должно выполняться при произвольных вариациях поля  $\mathbf{H}$ , где  $\theta$  определяется как функция  $\mathbf{H}$  соотношением (1.2.2). Таким образом, вариационный принцип (1.2.9) является уравнением теплопроводности (1.2.4), для которого закон сохранения энергии (1.2.2) выполняется автоматически.

Интеграл по объему  $(1/k) \dot{\mathbf{H}} \delta \mathbf{H}$  имеет важный физический смысл, связанный с понятием диссипации, что бу-

---

\* Вариационное уравнение (1.2.9) получено на основе соотношения вариационного принципа (1.2.5), где вариация производится по вектору  $\mathbf{H}$ . Такое выражение вариационного принципа в теории теплопроводности аналогично вариационному принципу Журдена в аналитической механике, где вариация функции принуждения производится по скорости (вектор  $\mathbf{H}$  является аналогом скорости  $\dot{x}$ ). В вариационном принципе Даламбера — Лагранжа вариация производится по координатам ( $x$ ), а в наиболее общем принципе Гаусса вариация функции принуждения производится по ускорению ( $\ddot{x}$ ). Принцип Гаусса применим к голономным и неголономным системам, связи в которых могут быть и нелинейными относительно скоростей [Л. 1-12]. Применение вариационного принципа Гаусса в теории теплопроводности, где вариация производится по плотности потока тепла  $\mathbf{H}$  (вектор плотности теплового потока  $\mathbf{H}$  является аналогом ускорения  $\ddot{x}$ ), рассматривается в работе [Л. 1-13]. Если вариацию производить по термодинамическим силам  $\nabla\theta$  (градиент температуры  $\nabla\theta$  является аналогом силы  $x$  в механике), то получим вариационный принцип Дярматы в термодинамике необратимых процессов [Л. 1-14]. Другие возможные формулировки задач переноса содержатся в [Л. 1-15—1-17]. (Прим. ред.)

да мы рассмотрим закон сохранения энергии

$$c\theta = -\operatorname{div} \mathbf{H}, \quad (1.2.2)$$

где  $\theta$  — температура.

В таком виде он не содержит производной по времени и может рассматриваться как голономная связь. Следовательно, уравнение (1.2.2) должно рассматриваться как нечто большее, нежели соотношение, которое следует проверять физическим решением. Это соотношение должно также выполняться для вариаций  $\delta \mathbf{H}$  и  $\delta \theta$ . Поэтому можно записать:

$$c\delta\theta = -\operatorname{div}(\delta\mathbf{H}). \quad (1.2.3)$$

В рассматриваемом методе производная по времени используется в уравнении теплопроводности, имеющем вид:

$$\operatorname{grad} \theta + \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (1.2.4)$$

Уравнения (1.2.2) и (1.2.4) дают полную формулировку задачи теплопроводности при заданных ограничениях.

Вариационные принципы получаются следующим образом. Рассмотрим вариацию  $\delta \mathbf{H}$  поля  $\mathbf{H}$  и соответствующие вариации  $\delta \theta$  при условии (1.2.3). Умножим уравнение (1.2.4) на  $\delta H$  и проинтегрируем по объему среды  $\tau$ . Тогда получим:

$$\iiint_{\tau} \left( \operatorname{grad} \theta + \frac{1}{k} \mathbf{H} \right) \delta \mathbf{H} d\tau = 0. \quad (1.2.5)$$

Интегрирование первого члена по частям дает:

$$\iiint_{\tau} \left( -\theta \operatorname{div}(\delta \mathbf{H}) + \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} \delta \mathbf{H} \right) d\tau = - \iint_A \theta \mathbf{n} \delta \mathbf{H} dA, \quad (1.2.6)$$

\* Соотношение (1.2.2) аналогично уравнению баланса тепла. Вектор  $\dot{\mathbf{H}}$  является вектором плотности потока тепла, т. е.  $\mathbf{H} = \int_0^t \dot{\mathbf{H}} dt$ . Согласно закону сохранения энергии имеем:

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \dot{\mathbf{H}}.$$

В последнем равенстве изменен порядок операции  $\frac{\partial}{\partial t}$  и  $\operatorname{div}$ . Умножая обе части равенства на  $dt$  и интегрируя полученное соотношение по  $t$  (от 0 до  $t$ ), получаем  $c\theta = -\operatorname{div} \mathbf{H}$ . (Прим. ред.)

пользуются в классической механике диссипативных систем. Эти результаты применимы к термодинамической системе с неравномерным распределением температуры, что было приведено в статье [Л. 1-2], в которой рассматривался частный случай связанной термоупругости. Линейная теплопроводность рассматривается как частный случай процесса теплообмена в общей термодинамике. Это приложение к задачам теплопроводности было подробно рассмотрено в статье автора [Л. 1-3]. Анализ, проведенный в данной главе, основан главным образом на материале [Л. 1-3].

## 1.2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим твердое тело с изотропными теплофизическими свойствами, не зависящими от температуры. Среда может быть однородной и неоднородной. В последнем случае теплопроводность  $k(x, y, z)$  и удельная объемная теплоемкость  $c(x, y, z)$  являются функциями координат  $(x, y, z)$ . Теплоемкость, отнесенная к единице объема, в отличие от общепринятой, отнесенной к единице массы, вводится для того, чтобы избежать использования плотности  $\rho$ , поскольку она не играет никакой роли в тех явлениях, которые рассматриваются в данной книге.

В классическом описании тепловых явлений используется температура в качестве скалярного поля. Основная особенность данного вариационного метода заключается в введении векторного поля в основные законы теплопроводности. Это векторное поле  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ , которое мы назовем тепловым смещением, является функцией времени и координат. Оно определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(x, y, z, t), \quad (1.2.1)$$

где  $\dot{\mathbf{H}}$ , есть вектор, представляющий локальную плотность потока тепла на единицу площади. Следовательно, вектор  $\mathbf{H}$  является интегралом по времени от вектора плотности потока тепла  $\mathbf{H}$ .

Принципы, по которым была выбрана такая форма для описания теплового потока, станут понятными, ког-

нительные — силы. Эти дополнительные принципы будут рассмотрены в гл. 8.

Еще одним важным преимуществом основного вариационного принципа является отсутствие в его формулировке какой-либо пространственной производной температуры. Это повышает точность приближенных решений. Достигается также большая гибкость при выборе таких решений, поскольку в приближенное представление температурного поля могут вводиться скачки. Сам температурный градиент не требует подгонки.

Пользуясь понятием обобщенных координат и вариационным принципом с помощью выражений, аналогичных механическим силам и потенциалам, а также диссипативной функции Релея, приходят к дифференциальным уравнениям типа Лагранжа. Принцип минимальной диссипации получается как следствие. Основное значение обобщенных координат как способа полного описания физической системы обсуждается в связи с рассмотрением дискретной молекулярной структуры.

Эти результаты получены в § 1.3 и 1.4. В § 1.5 они обобщаются на случай анизотропной теплопроводности. Определение диссипативной функции для этого случая требует применения термодинамики необратимых процессов, в основе которой лежат соотношения Онзагера. Введение непрерывно распределенных источников тепла рассматривается в § 1.6. Для этого случая выводятся соответствующие уравнения Лагранжа.

В последнем параграфе результаты применяются для простой задачи о нагревании пластины, которая хорошо иллюстрирует точность и гибкость данного метода. В частности, показано, насколько упрощается задача при использовании понятия глубины проникновения в качестве обобщенной координаты в начальной фазе процесса. Хотя система является физически линейной, начальная фаза описывается в таком случае нелинейным уравнением, а вторая фаза — другими координатами, что ведет к линейным уравнениям.

Принципы, излагаемые в этой главе в связи с теплопроводностью, составляют частный случай общего метода линейной термодинамики необратимых процессов, разработанного автором в 1954 г. [Л. 1-1], [Л. 1-5]. Было показано, что большой класс необратимых процессов может быть описан обобщенными координатами, соответствующими тем же уравнениям Лагранжа, которые ис-

# ОСНОВНОЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

## 1.1. ВВЕДЕНИЕ

Для того чтобы познакомить читателя с основными понятиями и методами, представленными в этой книге, мы ограничимся в первой главе рассмотрением теплопроводности в системе со свойствами, не зависящими от температуры. Такая система является физически линейной. Более общий случай нелинейной среды с зависящими от температуры свойствами будет рассмотрен в гл. 5.

Основное понятие о поле теплового смещения вводится в § 1.2. Это понятие приводит к основному вариационному принципу, который вначале излагается в связи с изотропной теплопроводностью. Для этого случая характерны две основные особенности, которые естественно вытекают из понятия теплового смещения. Первая особенность состоит в том, что температура и тепловое смещение являются сопряженными переменными, аналогичными силе и движению в механике. Второй особенностью является то, что закон сохранения энергии тождественно выполняется при выборе переменных систем в виде, аналогичном голономной связи в механике. Одно из преимуществ такого подхода заключается в особом виде соответствующего вариационного принципа, с помощью которого можно приблизительно проверить закон теплопроводности, удовлетворяя закону сохранения энергии.

Важной особенностью данного метода является возможность применения принципа виртуальной работы и понятия обобщенной силы в термодинамике.

Полученный таким образом вариационный принцип можно назвать основным в отличие от дополнительного. Существование этих двух форм вытекает из аналогичной двойственности в классической механике, где основные вариационные принципы выражают движения, а допол-

конвекцией. Операционная формулировка, а также методы взаимовлияния и конечных элементов рассматриваются с точки зрения дополнительных принципов.

В восьми главах книги рассмотрение ведется только на примере переноса тепла. Однако как физические, так и математические аспекты данного вопроса гораздо шире. Поэтому, чтобы показать другие возможности метода, в книге дается приложение. Показано применение вариационного подхода в таких областях физики, как массообмен и термодинамика необратимых процессов. Приводится иллюстрация применения метода Лагранжа к анализу задачи термоупругости. Очевидна также возможность применения данного метода к вязким жидкостям при использовании классической диссипативной функции Релея. Аналогичные методы можно применять также для описания электромагнитных явлений. Показаны более широкие математические возможности анализа, основанного на понятии скалярного произведения. Данное понятие представляет собой эффективное средство преобразования в функциональном пространстве. Оно включает такие методы, как преобразование линейных дифференциальных уравнений в нелинейные с помощью координат типа глубины проникновения. Такое рассмотрение дает возможность свести в единую систему различные методы, известные в прикладной математике под разными названиями. Кроме того, существование порога разрешения в физических задачах позволяет дать более реалистическое определение понятия полноты для обобщенных координат, которое учитывает дискретный характер вещества в противоположность математической модели континуума.

границе единичного потока тепла при условии, что вне этой точки граница является адиабатической. Когда функция влияния известна, можно с помощью уравнений Лагранжа полностью сформулировать задачу теплопроводности, включая конвекцию на границе. В этом случае также применяется метод сопряженных полей. Второе приближение заключается в рассмотрении неподвижного твердого тела и движущейся жидкости, представленных как единая система. В этом случае, используя определение диссипативной функции, учитывающей конвекцию, получают вариационные принципы и уравнения Лагранжа для всей системы.

Задача переноса тепла в пограничном слое, рассматриваемая в гл. 7, представляет особый практический интерес. В этой задаче вариационным методом может быть рассчитана функция влияния, позволяющая определить характеристики переноса тепла. По аналогии с методами расчета теплопроводности проводится анализ конвекции в пограничном слое. Эта аналогия позволяет провести такой анализ задачи, в результате которого определяются как важные физические свойства, так и основные различия между ламинарным и турбулентным режимами. Этим режимам соответствуют две различные по виду функции влияния универсального характера. Такой подход дает простые, но имеющие физический смысл методы решения многих технических задач, к которым, например, относятся задачи теории теплообменников и аэродинамического нагрева.

В гл. 8 рассматриваются дополнительные принципы. Обычно физические системы могут быть описаны переменными двух видов, называемых интенсивными и экстенсивными. В механике, например, такая двойная система переменных представлена силами и связанными с ними смещениями. Вариационные принципы, выраженные через смещения, ведут к дополнительным принципам, выраженным через силы. В случае только тепловых явлений температуру и тепловое смещение можно рассматривать соответственно как интенсивную и экстенсивную переменные, что по аналогии с механикой ведет к двойственности, когда вариационные принципы могут быть выражены, как и в предыдущих главах, через тепловое смещение или в дополнительном виде через температуру. Эти дополнительные принципы выводятся для линейных и нелинейных систем с теплопроводностью и



Как и раньше, уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\text{grad } \theta + \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (1.6.10)$$

Уравнения (1.6.9) и (1.6.10) тождественны уравнениям (1.2.3) и (1.2.4). Кроме того, можно записать:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.6.11)$$

что аналогично уравнению (1.4.2). Поэтому, применяя такие же преобразования, как в § 1.3 и 1.4, получаем уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i. \quad (1.6.12)$$

Тепловой потенциал  $V$  есть функция неизвестного поля  $\mathbf{H}^+$ , выраженного по уравнению (1.6.5) через  $\theta$ . Рассмотрим этот частный случай диссипативной функции. Для изотропной теплопроводности она равна:

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}}^2 d\tau, \quad (1.6.13)$$

где

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^+ + \dot{\mathbf{H}}^* \quad (1.6.14)$$

и

$$\dot{\mathbf{H}}^+ = \sum_i \frac{\partial \mathbf{H}^+}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{H}^+}{\partial t}. \quad (1.6.15)$$

В результате получим:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial D^+}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^+, \quad (1.6.16)$$

$$D^+ = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} (\dot{\mathbf{H}}^+)^2 d\tau, \quad (1.6.17)$$

где

$$Q_i^+ = - \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \frac{\partial \mathbf{H}^+}{\partial q_i} \dot{\mathbf{H}}^* d\tau. \quad (1.6.18)$$

Используя эти определения, получаем уравнения Лагранжа (1.6.12) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D^+}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + Q_i^+. \quad (1.6.19)$$

Скорость тепловыделения в единице объема в единицу времени обозначим:

$$w = w(x, y, z, t). \quad (1.6.1)$$

Она считается заданной функцией, которая может зависеть от времени и координат. Теплоемкость  $c(x, y, z)$  также может быть функцией координат. Запишем закон сохранения энергии в виде

$$c\theta = -\operatorname{div} \mathbf{H} + \int_0^t w dt. \quad (1.6.2)$$

Выразим тепловое смещение  $\mathbf{H}$  в виде суперпозиции двух отдельных полей

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^*, \quad (1.6.3)$$

где  $\mathbf{H}^*$  удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{H}^* = \int_0^t w dt. \quad (1.6.4)$$

Это уравнение не определяет  $\mathbf{H}^*$  однозначно, поэтому необходимо выбрать любое поле, удовлетворяющее уравнению (1.6.4). Тогда такое поле может рассматриваться как заданная функция времени и координат. Подставив  $\mathbf{H}$  в уравнение (1.6.2), получим:

$$c\theta = -\operatorname{div} \mathbf{H}^+. \quad (1.6.5)$$

Неизвестное поле  $\mathbf{H}^+$  считается функцией обобщенных координат

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^+(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (1.6.6)$$

Будем рассматривать уравнение (1.6.5) как голономную связь, справедливую при всех произвольных вариациях поля. Отсюда

$$c\delta\theta = -\operatorname{div} \delta\mathbf{H}^+. \quad (1.6.7)$$

В действительности изменяются только обобщенные координаты, так что вариации  $\delta\mathbf{H}^+$  и  $\delta\mathbf{H}$  равны, т. е.

$$\delta\mathbf{H}^+ = \delta\mathbf{H} = \sum_i^i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.6.8)$$

Следовательно, можно записать уравнение (1.6.7)

$$c\delta\theta = -\operatorname{div} \delta\mathbf{H}. \quad (1.6.9)$$

Это выражение определяет диссипативную функцию при анизотропном коэффициенте теплопроводности. Используя это определение  $D$ , получаем объемный интеграл в выражении (1.5.10) в виде

$$\iiint \sum_{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_j \delta H_i d\tau = \sum_k \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k. \quad (1.5.19)$$

С другой стороны, можно записать:

$$\delta V = \sum_k \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (1.5.20)$$

Термодинамическую силу  $Q_k$  можно определить в виде, аналогичном уравнению (1.4.7), положив

$$\sum_k Q_k \delta q_k = - \iint_A \sum_i \theta n_i \delta H_i dA, \quad (1.5.21)$$

где

$$Q_k = - \iint_A \sum_i \theta n_i \frac{\partial H_i}{\partial q_k} dA. \quad (1.5.22)$$

Поскольку  $\delta q_k$  — величина произвольная, подставив значения (1.5.19), (1.5.20) и (1.5.21) в уравнения (1.5.10), получим:

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k. \quad (1.5.23)$$

Таким образом уравнения Лагранжа (1.4.6) обобщаются для анизотропной теплопроводности.

Удельная объемная теплоемкость  $c(x, y, z)$  может быть функцией координат. Как и для изотропной теплопроводности (§ 1.2), результаты для анизотропной теплопроводности также применимы к задаче с подвижными границами, а также к теплопроводности как функции времени и координат.

## 1.6. ИСТОЧНИКИ ТЕПЛА

Применим полученные результаты к системе с тепловыми источниками. Для упрощения записи примем изотропную теплопроводность, что можно сделать без потери общности, поскольку методика одинакова как в случае изотропной, так и анизотропной теплопроводности.

Интегрирование по частям с учетом уравнений (1.5.3) и (1.2.8) дает:

$$\delta V + \iiint_{\tau} \left( \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_j \delta H_i \right) d\tau = - \iint_A \sum^i \theta n_i \delta H_i dA, \quad (1.5.10)$$

где  $n_i$  — компоненты единичной внешней нормали к ограничивающей поверхности  $A$ , а  $V$  — тепловой потенциал, определяемый уравнением (1.2.8).

Рассмотрим поле теплового смещения, описываемое  $n$  обобщенными координатами  $q_k$ . Компоненты этого поля запишутся в виде

$$H_i = H_i(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (1.5.11)$$

Получим:

$$\dot{H}_i = \sum^k \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H_i}{\partial t}. \quad (1.5.12)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{H}_i}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.5.13)$$

и

$$\delta H_i = \sum^k \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum^k \frac{\partial \dot{H}_i}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k. \quad (1.5.14)$$

Теперь рассмотрим интеграл по объему в уравнении (1.5.10). Используя выражения (1.5.14), преобразуем в нем подынтегральное выражение к виду

$$\sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_j \delta H_i = \sum^k \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_j \frac{\partial \dot{H}_i}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k. \quad (1.5.15)$$

Теперь используем свойство взаимности

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}. \quad (1.5.16)$$

Учитывая это соотношение, можно переписать уравнение (1.5.15) в виде

$$\sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_j \delta H_i = \sum^k \delta q_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{1}{2} \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_i \dot{H}_j \right). \quad (1.5.17)$$

Положим

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_i \dot{H}_j d\tau. \quad (1.5.18)$$

Обозначим координаты  $x, y, z$  через  $x_i$ . При анизотропном коэффициенте теплопроводности уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\sum^j k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \dot{H}_i = 0, \quad (1.5.4)$$

где  $k_{ij}$  — тензор коэффициента теплопроводности.

Важное свойство коэффициента теплопроводности выражается соотношением

$$k_{ij} = k_{ji}. \quad (1.5.5)$$

Следовательно,  $k_{ij}$  — симметричный тензор, состоящий из шести независимых компонент. Это свойство вытекает из принципа Онзагера. Уравнение (1.5.5) можно считать частным случаем соотношений взаимности Онзагера. Экспериментальной проверкой установлено, что эти свойства обычно справедливы в отсутствие сильного магнитного поля.

Для вывода вариационного принципа необходимо записать уравнения (1.5.4) в форме, аналогичной (1.2.4). Отсюда можно найти решение уравнений (1.5.4) для трех компонент градиента температуры.

Получим:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sum^j \lambda_{ij} \dot{H}_j = 0. \quad (1.5.6)$$

Компоненты тензора  $\lambda_{ij}$  являются элементами обратной матрицы  $[k_{ij}]$ :

$$[\lambda_{ij}] = [k_{ij}]^{-1}. \quad (1.5.7)$$

Тензор  $\lambda_{ij}$  представляет собой тепловое сопротивление. Этот тензор также симметричен. Следовательно,

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}. \quad (1.5.8)$$

Теперь, умножив (1.5.6) на  $\delta H_i$ , произведя суммирование по всем трем компонентам и проинтегрировав результат по объему  $\tau$ , получим:

$$\iiint_{\tau} \left( \sum^i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \delta H_i + \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_j \delta H_i \right) d\tau = 0. \quad (1.5.9)$$

с понятием «порога разрешимости». Это понятие более подробно описано в приложении (§ А.4). В этом смысле уравнения Лагранжа дают точную формулировку физического процесса. Они имеют также еще одно преимущество — выявляют фундаментальные математические особенности задачи. Кроме того, используемый метод инвариантен к системам отсчета и любому частному представлению неизвестных.

*Уравнения Лагранжа как метод приближенного анализа.* Естественно предположить, что решение многих задач принадлежит к классу функций с одним или более неизвестными параметрами. Например, можно ожидать, что неизвестное поле, зависящее от времени, принадлежит к классу функций

$$H = H(q_1, q_2, x, y, z), \quad (1.4.18)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — неизвестные параметры, являющиеся функциями времени и играющие роль обобщенных координат. Можно также сказать, что вариации  $\delta H$  подчиняются голономным связям с двумя степенями свободы, соответствующими двум произвольным вариациям  $\delta q_1$ ,  $\delta q_2$ . Вариационный принцип остается справедливым для этих вариаций и приводит к двум дифференциальным уравнениям Лагранжа для определения зависимых от времени  $q_1$  и  $q_2$ . В физике и технике некоторые характерные решения часто известны заранее, например интуитивно, из прошлого опыта или из математических требований к решению. В этих случаях формулировка Лагранжа дает метод, который концентрирует внимание исключительно на неизвестных характеристиках и представляет поэтому эффективное средство приближенного анализа при решении сложных практических задач. Следствия этого подхода также рассматриваются в приложении (§ А.4).

## 1.5. АНИЗОТРОПНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

До сих пор мы рассматривали теплопроводность в изотропных средах.

Сейчас переходим к рассмотрению анизотропной теплопроводности. В этом случае удобнее выразить поле теплового смещения  $H$  через его компоненты

$$H_i = H_i(x, y, z, t). \quad (1.5.1)$$

Уравнения (1.2.2) и (1.2.3) запишутся в виде

$$c\theta = - \sum_i^i \frac{\partial H_i}{\partial x_i}; \quad (1.5.2)$$

$$c\delta\theta = - \sum_i^i \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta H_i). \quad (1.5.3)$$

Потребовав, чтобы выражение

$$P = D - \sum_i X_i \dot{q}_i \quad (1.4.13)$$

было минимальным при изменении  $\dot{q}_i$ , получим эквивалентный вариационный принцип. Тогда из него также следует уравнение (1.4.9).

Легко проверить, что описанные вариационные принципы справедливы и в том случае, если  $\mathbf{H}$  содержит время в явном виде. Однако физическое объяснение становится более сложным, так как  $\dot{q}_i = 0$  не соответствует теперь статическому равновесию.

Вернувшись к уравнению теплопроводности (1.2.4), легко получить для него вариационный принцип, тесно связанный с приведенными выше формулами,

$$\text{grad } \theta + \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (1.4.14)$$

Рассмотрим выражение

$$P = \iiint_{\tau} \left( \dot{\mathbf{H}} \text{grad } \theta + \frac{1}{2k} \dot{\mathbf{H}}^2 \right) d\tau, \quad (1.4.15)$$

где  $\tau$  — объем тепловой системы. Из условия минимума  $P$  при изменении  $\dot{\mathbf{H}}$  следует уравнение теплопроводности (1.4.14). Это аналогично минимизации  $P$  в уравнении (1.4.13). Легко показать, что закон теплопроводности получается из условия минимума величины

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}}^2 d\tau \quad (1.4.16)$$

при условии

$$\iiint_{\tau} \dot{\mathbf{H}} \text{grad } \theta d\tau = \text{const}. \quad (1.4.17)$$

Сравнив (1.4.17) с уравнением (1.4.11), увидим, что  $\text{grad } \theta$  играет роль силы локально неравновесного состояния. Эти результаты легко обобщаются на случай анизотропной теплопроводности.

*Фундаментальное значение уравнений Лагранжа.* Как указывалось в предыдущем параграфе, теоретически всегда можно выбрать конечное, хотя и большое число, обобщенных координат таким образом, что физическая система будет описана полностью в соответствии

Выражение  $D^+$  — диссипативная функция поля  $\mathbf{H}^+$ . Это поле также определяет  $\theta$  [уравнение (1.6.5)]. Слагаемое  $Q^+_i$  выражает обобщенную движущую силу, обусловленную источниками тепла.

Аналогичные результаты получаются для более общего случая анизотропной теплопроводности с помощью выражения (1.5.18), используемого для диссипативной функции.

*Классические уравнения теплопроводности при наличии источников тепла.* Приведенные результаты получены из уравнений (1.6.2) и (1.6.10), рассматриваемых в отдельности. Исключив поле  $\mathbf{H}$  из этих двух уравнений, получим классическое уравнение температурного поля при наличии источников тепла

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \theta) + w. \quad (1.6.19a)$$

Аналогичное уравнение для анизотропной теплопроводности можно получить, заменив уравнение (1.6.10) уравнением (1.5.4)

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + w. \quad (1.6.19b)$$

## 1.7. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Применение этих результатов можно проиллюстрировать решением следующей задачи, из которой станут понятны некоторые характерные особенности данного метода.

Рассмотрим пластину толщиной  $l$  с постоянной теплопроводностью  $k$  и объемной теплоемкостью  $c$ . Начальная температура пластины  $\theta=0$ . В момент  $t=0$  одна сторона пластины при  $x=0$  мгновенно достигает постоянной температуры  $\theta=\theta_0$ . Другая сторона  $x=l$  теплоизолирована.

Разделим тепловой процесс на две фазы. В первой фазе будем считать, что нагрев происходит по толщине  $x=q_1$ , меньшей толщины пластины  $l$ , и температурное поле хорошо аппроксимируется выражением

$$\theta = \theta_0 \left( 1 - \frac{x}{q_1} \right)^2. \quad (1.7.1)$$

Эта параболическая аппроксимация показана на рис. 1.1 (кривая 1). Проникновение тепла по толщине  $q_1$  есть обобщенная координата, определяемая как функция времени.

Поскольку решается одномерная задача, достаточно рассмотреть цилиндр с единичной площадью поперечного сечения с осью, перпендикулярной стенке. Запишем тепловой потенциал

$$Y = \frac{1}{2} c \int_0^{q_1} \theta^2 dx = \frac{1}{10} c \theta_0^2 q_1. \quad (1.7.2)$$



Тепловое смещение получаем из уравнения (1.2.2), которое в данном случае имеет вид:

$$c\theta = -\frac{dH}{dx}. \quad (1.7.3)$$

Учитывая условие  $H=0$  при  $x=q_1$ , получаем:

$$H = c\theta_0 \left( \frac{q_1}{3} - x + \frac{x^2}{q_1} - \frac{x^3}{3q_1^2} \right). \quad (1.7.4)$$

Диссипативная функция имеет вид:

$$D = \frac{1}{2k} \int_0^{q_1} \dot{H}^2 dx = \frac{13}{630} \frac{c^2 \theta_0^2}{k} q_1 \dot{q}_1^2. \quad (1.7.5)$$

Обобщенную тепловую силу  $Q_1$  получим из рассмотрения виртуального теплового смещения  $\delta H = \frac{1}{3} c\theta_0 \delta q_1$  при  $x=0$ . Из уравнения (1.4.7) можно записать:

$$Q_1 \delta q_1 = \theta_0 \delta H, \quad (1.7.6)$$

откуда

$$Q_1 = \frac{1}{3} c\theta_0. \quad (1.7.7)$$

Уравнение (1.4.6) для неизвестной координаты Лагранжа  $q_1$  будет иметь вид:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = Q_1. \quad (1.7.8)$$

Подставив значения  $V$ ,  $D$ ,  $Q_1$  из уравнений (1.7.2), (1.7.5) и (1.7.7), получим уравнение первого порядка

$$\frac{13}{315} q_1 \dot{q}_1 = \frac{7}{30} \frac{k}{c}, \quad (1.7.9)$$

где  $\dot{q}_1$  — дифференциал по времени. Для начального условия  $\dot{q}_1 = 0$  при  $t=0$  найдем:

$$q_1 = 3,36 \sqrt{\left( \frac{k}{c} t \right)}. \quad (1.7.10)$$

Первая фаза процесса заканчивается, когда  $q_1$  становится равным  $l$  в момент времени  $t_1$

$$t_1 = 0,0885 \frac{cl^2}{k}. \quad (1.7.11)$$

Время перехода определяет промежуток времени, необходимый для распространения тепла по всей толщине  $l$  исследуемого материала.

Во второй фазе, соответствующей интервалу времени  $t > t_1$ , происходит повышение температуры на изолированной границе  $x=l$ .

В этой фазе процесса температура может быть также представлена с хорошим приближением параболической зависимостью

$$\theta = (\theta_0 - q_2) \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + q_2, \quad (1.7.12)$$

которая показана на рис. 1.1 (кривая 2). Обобщенной координатой  $q_2$  будет неизвестная температура на границе  $x=l$ . Взяв значение  $\theta$  из уравнения (1.7.12), получим тепловой потенциал в виде

$$V = \frac{1}{2} c \int_0^l \theta^2 dx = \left( \frac{1}{10} \theta_0^2 + \frac{2}{15} \theta_0 q_2 + \frac{4}{15} q_2^2 \right) cl. \quad (1.7.13)$$

Тепловое смещение  $H$  получается при интегрировании уравнения (1.7.3) со значением  $\theta$  из уравнения (1.7.12) с граничным условием  $H=0$  при  $x=l$ . Вычислим диссипативную функцию

$$D = \frac{1}{2k} \int_0^l H^2 dx = \frac{34}{315} \frac{c^2 l^3}{k} q_2^2. \quad (1.7.14)$$

Обобщенная сила получается из рассмотрения виртуального теплового смещения  $\delta H = \frac{2}{3} lc \delta q_2$ . Используя уравнение (1.4.7), запишем:

$$Q_2 \delta q_2 = \theta_0 \delta H, \quad (1.7.15)$$

откуда

$$Q_2 = \frac{2}{3} \theta_0 lc. \quad (1.7.16)$$

Подставив (1.7.13), (1.7.14) и (1.7.16) в уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial q_2} = Q_2, \quad (1.7.17)$$

получим линейное дифференциальное уравнение для  $q_2$ :

$$q_2 + 4,57 t_1 \dot{q}_2 = \theta_0, \quad (1.7.18)$$

где  $t_1$  — время перехода (1.7.11). Пронтегрируем уравнение (1.7.18) для  $t=t_1$  при начальном значении  $q_2=0$

$$\frac{q_2}{\theta_0} = 1 - \exp \left\{ -0,218 \left( \frac{t}{t_1} - 1 \right) \right\}. \quad (1.7.19)$$

Приближенные значения  $\theta/\theta_0$ , полученные из уравнения (1.7.1) для первой фазы и из уравнения (1.7.12) для второй фазы, приведены на рис. 1.2 в зависимости от  $x/l$  для трех значений безразмерного параметра времени  $t/t_1$ . Штриховыми линиями показаны точные значения, полученные в виде классического разложения Фурье, описанного в работе Карслоу и Егера [Л. 1-6]. Сравнение показывает отличное соответствие результатов.

Простота приближенного решения по сравнению с классическим методом прежде всего объясняется тем, что представление распределения температуры в виде

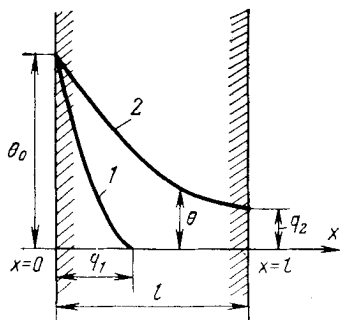


Рис. 1.1. Распределение температуры  $\theta$  для первой (1) и второй (2) фаз при нагревании пластины, теплоизолированной на границе  $x=l$ .

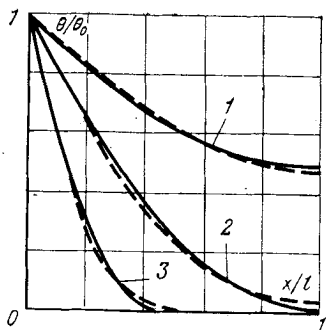


Рис. 1.2. Распределение температуры в пластине в различные моменты времени.  
 — — — предлагаемый метод;  
 - - - точное решение.  
 1 —  $t/t_1=4$ ; 2 —  $t/t_1=1$ ;  
 3 —  $t/t_1=0.2$ .

рядов Фурье не очень удобно и приводит в начальной фазе к плохой сходимости результатов\*. Наше решение, в котором две фазы рассматриваются с помощью двух совершенно различных методов, позволяет избежать этого. Можно подобрать эти методы в соответствии с характерными особенностями каждой фазы.

Ряд задач нестационарной теплопроводности, решенных методом, используемым в данной книге, описывается в [Л. 1-3, 1-7—1-11].

## Глава вторая

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

## 2.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрим общую теорию тепловых систем, свойства которых не зависят от температуры. Такие физические системы составляют большой класс и могут быть представлены с помощью обобщен-

\* Точное решение простейших задач теплопроводности при граничных условиях первого рода можно представить не только в форме Фурье, но и в форме Лапласа, которая удобна для расчетов при малых значениях чисел Фурье — см. [Л. 1-18]. (Прим. ред.)

ных координат и описаны одноподобными линейными уравнениями Лагранжа. Это дает возможность разработать унифицированную теорию таких систем [Л. 2-1, 2-2], что будет показано в § 2.2. В частности, эта формулировка включает часто встречающиеся граничные условия, входящие в диссипативную функцию системы в целом. Линейные уравнения Лагранжа рассматриваются в § 2.3. Они выводятся из двух квадратичных форм, определяющих тепловой потенциал и диссипативную функцию. Особое внимание уделяется свойствам этих форм с точки зрения их положительной определенности, так как они играют существенную роль при нахождении решений дифференциальных уравнений.

При отсутствии обобщенных сил изменение системы во времени может быть представлено модами тепловой релаксации, что показано в § 2.4. Эти моды представляют собой собственные решения, каждое из которых пропорционально экспоненциально убывающей функции времени. Свойство ортогональности релаксационных мод выводится в § 2.5 одновременно с описанием соответствующих координат. Реакция системы в результате воздействия заданных тепловых сил выражается в замкнутом виде с помощью нормальных координат. При изложении материала особое внимание уделено важным частным случаям кратных и нулевых характеристических корней. Показано, что нулевые корни соответствуют стационарному тепловому потоку.

Когда система подвергается воздействию каких-либо тепловых сил, состояние ее можно считать стационарным, т. е. мгновенное значение величин этих тепловых сил можно принять постоянным. При изменении тепловых сил для решения можно использовать непрерывную последовательность стационарных состояний. Такое решение, справедливое для бесконечно медленных изменений, можно назвать квазистационарным. При этом вводятся некоторые поправки (см. § 2.6). Для этой цели удобно использовать нормальные координаты. Как указывалось выше, решения такого типа применимы также в случае медленно изменяющихся температур, поскольку он близок к случаю квазистационарного теплового потока.

В качестве иллюстрации свойств нормальных координат в § 2.7 рассматривается задача о нестационарном тепловом потоке в пластине. Этот пример позволяет

понять физический смысл так называемых «слабых» решений, возникающих при использовании обобщенных координат.

## 2.2. ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

До сих пор вопрос о граничных условиях не рассматривался. Температура поверхности считалась заданной функцией времени и координат, что означает существование обобщенных сил, которые можно считать движущими силами системы. Во многих случаях температура поверхности не задается заранее, а известными являются некоторые теплообменные характеристики на границе.

Рассмотрим частный случай линейного граничного условия. Будем считать, что нормальная компонента локальной плотности теплового потока  $\dot{H}_n$  на единицу площади поверхности пропорциональна разности температуры поверхности  $\theta$  и температуры окружающей среды  $\theta_a$

$$\dot{H}_n = K(\theta - \theta_a), \quad (2.2.1)$$

где  $K$  — коэффициент теплообмена на поверхности. Температура определяется из условия, что, если  $\theta = \theta_a$ , то тепловой поток на поверхности равен нулю. Величину  $\theta_a$  можно назвать адиабатической температурой поверхности. Уравнение (2.2.1) показывает, что тепловой поток пропорционален отклонению от адиабатической температуры.

Уравнение поверхностного теплообмена (2.2.1) является приближенным, и справедливость его сильно зависит от характера рассматриваемой задачи. Например, теплообмен на поверхности может происходить за счет излучения при наличии небольших отклонений от адиабатической температуры. В таком случае уравнение (2.2.1) представляет собой линеаризацию закона лучистого теплообмена. С другой стороны, понятие локального коэффициента теплообмена  $K$  не является физически корректным при описании теплового потока между твердой стенкой и движущейся средой [Л. 2-3]. Поэтому использование уравнения (2.2.1) в данном случае будет ограничено определенным классом задач и воз-

можно только после тщательного исследования используемых аппроксимаций\*.

В гл. 6 и 7 будет рассмотрен общий случай теплообмена в движущейся среде.

В связи с законом поверхностного теплообмена (2.2.1) возникает вопрос о возможности включения его в диссипативную функцию. Для этого запишем уравнения Лагранжа (1.5.23) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D'}{\partial \dot{q}_i} = Q'_i. \quad (2.2.2)$$

Согласно (1.5.18) диссипативная функция для твердого тела в случае анизотропной теплопроводности будет:

$$D' = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \sum^{jk} \lambda_{jk} \dot{H}_j \dot{H}_k d\tau. \quad (2.2.3)$$

Тепловая сила  $Q'_i$  определяется температурой на границе  $A$  объема  $\tau$ .

Запишем уравнение (1.5.22) в векторной форме

$$Q'_i = \iint_A \theta \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{n} dA. \quad (2.2.4)$$

В выражение (2.2.4) подставим значение

$$\theta = \frac{1}{K} H_n + \theta_a, \quad (2.2.5)$$

определяемое из уравнения (2.2.1). Тогда получим:

$$Q'_i = - \iint_A \frac{1}{K} \dot{H}_n \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{n} dA - \iint_A \theta_a \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{n} dA. \quad (2.2.6)$$

Рассмотрим первый член. В соответствии с уравнением (1.4.2) можно записать:

$$\iint_A \frac{1}{K} \dot{H}_n \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{n} dA = \iint_A \frac{1}{K} \dot{H}_n \frac{\partial \dot{H}_n}{\partial q_i} dA; \quad (2.2.7)$$

---

\* Физически правильная постановка задачи теплообмена при обтекании твердого тела движущейся жидкостью является сопряженной. Применимость формулы (2.2.1) к расчету конвективного теплообмена определяется величиной критерия сопряженности Брюна  $B_{гх} < (B_{гх})_{\text{мин}}$ . (Прим. ред.)

отсюда, положив

$$D'' = \frac{1}{2} \iint_A \frac{1}{K} \dot{H}^2_n dA \quad (2.2.8)$$

и

$$Q_i = - \iint_A \theta_a \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{n} dA, \quad (2.2.9)$$

выводим:

$$Q'_i = - \frac{\partial D'}{\partial q_i} + Q_i. \quad (2.2.10)$$

Выражение для  $D''$  аналогично выражению для  $D'$ . Оно представляет собой диссипативную функцию теплопереноса на границе. Суммарная диссипативная функция будет:

$$D_i = D' + D''. \quad (2.2.11)$$

С учетом выражений (2.2.3) и (2.2.8) представим  $D$  в явном виде

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \sum^{jk} \lambda_{jkr} \dot{H}_j \dot{H}_k d\tau + \frac{1}{2} \iint_A \frac{1}{K} \dot{H}^2_n dA. \quad (2.2.12)$$

В случае изотропной теплопроводности получаем более простую форму

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \mathbf{H}^2 d\tau + \frac{1}{2} \iint_A \frac{1}{K} \dot{H}^2_n dA. \quad (2.2.13)$$

Используя для  $D$  выражение (2.2.12) или (2.2.13), перепишем уравнение (2.2.2) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} = Q_i. \quad (2.2.14)$$

Диссипативная функция  $D$  в этом уравнении состоит из объемной диссипации  $D'$  и диссипации на границе  $D''$ . Тепловая сила (2.2.9), являющаяся движущей силой системы, выражается теперь через адиабатическую температуру  $\theta_a$ .

Частным случаем рассмотренного здесь поверхностного теплообмена можно считать ситуацию, когда все рассматриваемые процессы происходят на поверхности как бы покрытой слоем материала с нулевой теплоем-

костью, отделяющим твердое тело от окружающей среды. Локальная температура окружающей среды —  $\theta_a$ , а локальная характеристика теплопереноса этого тонкого слоя выражается коэффициентом теплообмена  $K$ , зависящим от толщины и теплопроводности слоя.

Следует отметить, что приведенные результаты справедливы для самого общего случая, когда  $K$  может быть функцией времени  $t$  и координат  $x, y, z$  на границе.

### 2.3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Обобщенные координаты  $q_i$  могут быть выбраны таким образом, чтобы они были связаны с полем  $\mathbf{H}$  линейной зависимостью

$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{H}^{(i)}(x, y, z) q_i, \quad (2.3.1)$$

где  $\mathbf{H}^{(i)}(x, y, z)$  — конфигурации данного поля, не зависящие от времени. Может быть бесконечное число обобщенных координат, для которых выражение (2.3.1) есть бесконечный ряд векторных полей. Поля  $\mathbf{H}^{(i)}$  можно выбирать произвольно, однако они должны с достаточной степенью точности отображать физическую сущность задачи. В математическом смысле их можно выбрать таким образом, чтобы они описывали поле с любой степенью точности вблизи множества  $N$  точек  $P_k$  в любой заданной области. Число  $N$  этих точек может быть сколь угодно велико. Эти  $3N$  компонент поля  $\mathbf{H}$  в точках  $P_k$  являются функциями  $3N$  обобщенных координат  $q_k$ , связанных линейной зависимостью (2.3.1). Единственным требованием в этом случае является то, чтобы преобразование было неособенным. Поэтому с физической точки зрения представление непрерывного поля в виде обобщенных координат не ограничивает его общности.

Применим линейное соотношение (2.3.1) к системе со свойствами, не зависящими от температуры. Тогда задача будет как математически, так и физически линейной. Поскольку теплоемкость, теплопроводность и коэффициент поверхностного теплообмена не зависят от температуры, тепловой потенциал и диссипативная функция имеют вид квадратичной формы с постоянными коэффициентами. Они строятся следующим образом.



Температурное поле  $\theta$  вводится с помощью теплового смещения  $\mathbf{H}$  по уравнению (1.2.2). Запишем:

$$\theta = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{H}. \quad (2.3.2)$$

Подставив выражение (2.3.1), получим температуру в виде

$$\theta = \sum_i \theta^{(i)}(x, y, z) q_i, \quad (2.3.3)$$

где

$$\theta^{(i)} = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{H}^{(i)}. \quad (2.3.4)$$

Таким образом, поле  $\theta$  выражается суперпозицией скалярных полей  $\theta^{(i)}$  с амплитудами, пропорциональными обобщенным координатам  $q_i$ . Тепловой потенциал будет:

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} c \theta^2 d\tau. \quad (2.3.5)$$

Подставив в него значение  $\theta$  из уравнения (2.3.3), получим квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} q_i q_j \quad (2.3.6)$$

с коэффициентами

$$a_{ij} = \iiint_{\tau} c \theta^{(i)} \theta^{(j)} d\tau. \quad (2.3.7)$$

В случае изотропной теплопроводности диссипативная функция, определяемая из уравнения (2.2.13), имеет вид:

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \mathbf{H}^2 d\tau + \frac{1}{2} \iint_A \frac{1}{K} H_n^2 dA. \quad (2.3.8)$$

Она учитывает диссипацию в объеме  $\tau$  твердого тела и диссипацию на поверхности  $A$ , обусловленную коэффициентом теплообмена  $K$ . Подставив в выражение (2.3.8)  $\mathbf{H}$  из уравнения (2.3.1), получим диссипативную функцию в квадратичной форме

$$D = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_{ij} q_i q_j \quad (2.3.9)$$

с коэффициентами

$$b_{ij} = \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \mathbf{H}^{(i)} \mathbf{H}^{(j)} d\tau + \iint_A \frac{1}{K} H_n^{(i)} H_n^{(j)} dA. \quad (2.3.10)$$

При анизотропной теплопроводности используем значение диссипативной функции из выражения (2.2.12). Коэффициенты  $b_{ij}$  в этом случае будут:

$$b_{ij} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \sum_{kl} \lambda_{kl} H_n^{(i)} H_n^{(j)} d\tau + \frac{1}{2} \iint_A \frac{1}{K} H_n^{(i)} H_n^{(j)} dA. \quad (2.3.11)$$

Обобщенные тепловые силы в соответствии с уравнением (2.2.9) равны:

$$Q_i = - \iint_A \theta_a \mathbf{H}^{(i)} \mathbf{n} dA. \quad (2.3.12)$$

С учетом выражений (2.3.6) и (2.3.9) уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (2.3.13)$$

записывается в виде

$$\sum^{(i)} a_{ij} \dot{q}_j + \sum^{(i)} b_{ij} \ddot{q}_j = Q_i. \quad (2.3.14)$$

Эта система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

По определению квадратичных форм (2.3.6) и (2.3.9) коэффициенты удовлетворяют соотношениям симметрии:

$$a_{ij} = a_{ji}; \quad b_{ij} = b_{ji}. \quad (2.3.15)$$

Рассмотрим теперь некоторые важные ограничения, вытекающие из свойств квадратичных форм. Возьмем диссипативную функцию

$$D = D' + D'', \quad (2.3.16)$$

где  $D'$  и  $D''$  — соответственно диссипативные функции для объема твердого тела и на границе, определяемые уравнениями (2.2.3) и (2.2.8) соответственно. Эти выражения не могут быть отрицательными или равными нулю, если плотность теплового потока  $\mathbf{H}$  не равна ну-

лю в каждой точке твердого тела и на границе. Это следует из того, что выражение  $\sum_{ij} \lambda_{kj} \dot{H}_k \dot{H}_j$  пропорционально локальной скорости приращения энтропии, являющейся положительно определенной величиной. Поэтому выраженная через тепловой поток диссипативная функция является положительно определенной. Кроме того, будем считать преобразование (2.3.1) неособенным. Это означает, что поле  $\mathbf{H}$  не может быть равным нулю, если все обобщенные координаты также не равны нулю. В этом случае диссипативная функция, выраженная в зависимости от  $\dot{q}_i$ , также положительно определена.

Это свойство нельзя применить к тепловому потенциалу. По определению он не может быть отрицательной величиной, но может быть равным нулю при значениях поля  $\mathbf{H}$ , для которых  $\theta=0$ . В соответствии с уравнением (1.2.2) это имеет место для компонент поля  $\mathbf{H}$ , так что

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (2.3.17)$$

Поэтому тепловой потенциал может быть равным нулю при значениях обобщенных координат, не равных нулю. Говоря математическим языком, тепловой потенциал может быть положительно полуопределенным.

Вместе с соотношениями симметрии (2.3.15) эти свойства являются основными при общем анализе линейных тепловых систем, что будет рассмотрено в последующих параграфах.

## 2.4. МОДЫ ТЕПЛОВОЙ РЕЛАКСАЦИИ

Когда тепловые силы  $Q_i=0$ , уравнение (2.3.14) принимает вид:

$$\sum^{(i)} a_{ij} \dot{q}_j + \sum^{(i)} b_{ij} \ddot{q}_j = 0. \quad (2.4.1)$$

Это линейные однородные уравнения. В физическом смысле они могут описывать твердое тело, внутренняя начальная температура которого не равна поверхностной температуре, поддерживаемой постоянной. Поскольку начало отсчета температуры выбирается произвольно, значение поверхностной температуры принимаем равным нулю.

В случае, когда граничные условия выражаются через коэффициенты теплообмена, твердое тело и его гра-

ницы рассматриваются как единая система. Как показано в § 2.2, граничные условия учитываются введением в выражение для диссипативной функции соответствующего члена. В данном случае термодинамическая сила равна нулю и соответствует твердому телу, помещенному в термостат.

Это обстоятельство выражается приравниванием адиабатической температуры  $\theta_a$  нулю. Наконец, тепловая сила  $Q_i$  также стремится к нулю, если некоторые участки границы являются теплонепроницаемыми. Это можно увидеть из выражения (2.2.9), поскольку  $(\partial \mathbf{H} / \partial q_i) \mathbf{n}$  стремится к нулю в точках, где тепловой поток на границе отсутствует.

С физической точки зрения решение уравнения (2.4.1) должно описывать температурное поле, которое асимптотически стремится к нулю, поскольку оно стремится в равновесию. Рассмотрим решение типа

$$q_i = C_i e^{pt}, \quad (2.4.2)$$

где  $C$  и  $p$  — постоянные. Подставив (2.4.2) в уравнение (2.4.1), получим:

$$\sum^{(i)} (a_{ij} + pb_{ij}) C_j = 0. \quad (2.4.3)$$

Уравнения (2.4.3) являются линейными алгебраическими уравнениями относительно переменных  $C$  и с неизвестным параметром  $p$ . Они разрешимы, если их детерминант равен нулю. Запишем:

$$\det |a_{ij} + pb_{ij}| = 0. \quad (2.4.4)$$

При наличии  $n$  переменных это алгебраическое уравнение  $n$ -й степени относительно  $p$  называется характеристическим уравнением. В соответствии с классической теорией матриц все корни его должны быть действительными. Это вытекает из следующих допущений:

1. Коэффициенты  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  симметричны ( $a_{ij} = a_{ji}$  и  $b_{ij} = b_{ji}$ ).

2. Квадратичная форма  $D = \frac{1}{2} \sum^{(ij)} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$  является положительно определенной.

То, что корни  $p$  обязательно должны быть действительными, можно показать, взяв комплексную величину  $p$  и с ней сопряженную

$p^*$ . Соответствующие комплексные величины  $C_j$  и  $C_j^*$  удовлетворяют уравнениям:

$$\sum^{(j)} (a_{kj} + pb_{kj}) C_j = 0; \sum^k (a_{kj} + p^*b_{kj}) C_k^* = 0. \quad (2.4.4a)$$

Умножим первые уравнения на  $C_k^*$  и просуммируем по всем значениям  $k$ . Аналогично умножим вторые уравнения на  $C_j$  и просуммируем по всем значениям  $j$ . Вычтем один результат из другого

$$(p - p^*) \sum^{kj} b_{kj} C_j C_k^* = 0. \quad (2.4.4б)$$

Положив  $C_j = \alpha_j + i\beta_j$ , можем записать:

$$\sum^{kj} b_{kj} C_j C_k^* = \sum^{kj} b_{kj} (\alpha_k \alpha_j + \beta_k \beta_j). \quad (2.4.4в)$$

Поскольку  $D = \frac{1}{2} \sum^{kj} b_{kj} q_k q_j$  является положительно

определенным, выражение (2.4.4в) также положительно определено. Из уравнения (2.4.4б) следует, что  $p = p^*$ . Следовательно, значения  $p$  действительны. Кроме того, корни должны быть положительными. Это можно показать, рассмотрев корень  $p$  и соответствующие действительные постоянные  $C_j$ , удовлетворяющие уравнениям (2.4.3). Умножив эти уравнения на  $C_i$  и просуммировав их, получим:

$$\sum^{ij} (a_{ij} + pb_{ij}) C_i C_j = 0, \quad (2.4.5)$$

откуда

$$p = -\frac{V_c}{D_c}, \quad (2.4.6)$$

где

$$V_c = \sum^{ij} a_{ij} C_i C_j; \quad D_c = \sum^{ij} b_{ij} C_i C_j. \quad (2.4.7)$$

Теперь  $D_c$  является положительно определенной величиной, а  $V_c$  — положительно полуопределенной. Поэтому  $p$  либо равно нулю, либо отрицательная величина.

Рассмотрим систему  $n$  обобщенных координат  $q_i$ . Характеристическое уравнение (2.4.4) будет тогда  $n$ -й степени. Допустим, что все корни различны. Можно записать  $n$  значений этих корней в виде

$$p = -\lambda_s, \quad (2.4.8)$$

где  $s=1, 2, \dots, n$ , а  $\lambda_s$  либо положительна, либо равна нулю. Тогда получим решение дифференциального уравнения (2.4.1)

$$q_i = \sum_{s=1}^n C_i^{(s)} e^{-\lambda_s t}. \quad (2.4.9)$$

Характеристические решения  $C_i^{(s)} e^{-\lambda_s t}$  называются модами тепловой релаксации. Они являются выражением тепловых полей постоянной конфигурации с экспоненциально убывающими во времени амплитудами. Коэффициенты  $\lambda_s$  — постоянные релаксации.

Для данного значения  $s$  постоянные  $C_i^{(s)}$  определяются только из их отношений. Для пояснения запишем:

$$C_i^{(s)} = C^{(s)} \varphi_i^{(s)}, \quad (2.4.10)$$

где  $C^{(s)}$  — произвольная амплитуда, а  $\varphi_i^{(s)}$  — постоянные значения, удовлетворяющие определенному условию нормировки. В данном случае целесообразно выбрать в качестве условия нормирования следующее соотношение:

$$\sum_{ij} b_{ij} \varphi_i^{(s)} \varphi_j^{(s)} = 1. \quad (2.4.11)$$

Этот выбор можно объяснить тем обстоятельством, что  $D$  положительно определена. Теперь общим решением уравнения (2.4.9) будет:

$$q_i = \sum_{s=1}^n C^{(s)} \varphi_i^{(s)} e^{-\lambda_s t}, \quad (2.4.12)$$

т. е. сумма релаксационных мод  $\varphi_i^{(s)} \exp(-\lambda_s t)$  с произвольными амплитудами  $C^{(s)}$ .

Когда все характеристические корни  $p = -\lambda_s$  различны, существование общего решения в виде (2.4.12) вытекает из классической теоремы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При наличии кратных характеристических корней (2.4.12) уже не является общим решением [Л. 2-4], так как общее решение может содержать члены типа  $t^k e^{-\lambda_s t}$ . Однако в данном частном случае, ограниченном уравнением (2.4.1), можно показать, что общее решение (2.4.12), содержит только экспоненциальные члены и остается также справедли-

вым в случае кратных корней. Это вытекает из симметрии коэффициентов ( $a_{ij}=a_{ji}$ ,  $b_{ij}=b_{ji}$ ) и положительной определенности диссипативной функции  $D$ . Более подробно этот случай будет рассмотрен в следующем параграфе при изложении метода обобщенных координат.

*Вариационный принцип и релаксационные моды.* Рассмотрим квадратичные формы  $V_c$  и  $D_c$ , определяемые уравнениями (2.4.7). Они являются функциями переменных  $C_i$ . Ищем стационарные значения  $V_c$ , поэтому положим:

$$\delta V_c = 0 \quad (2.4.13)$$

для вариаций  $\delta C_i$ , удовлетворяющих условию постоянства  $D_c$ . Эта задача на экстремум с дополнительным ограничением

$$D_c = \text{const} \quad (2.4.14)$$

является типичной задачей вариационного исчисления. Ее решение получим, приравняв нулю вариацию без ограничения

$$\delta(V_c + pD_c) = 0, \quad (2.4.15)$$

где постоянная  $p$  является неопределенным множителем Лагранжа. В явном виде выражение (2.4.15) запишется

$$\sum_{ij} (a_{ij} + pb_{ij}) C_j \delta C_i = 0. \quad (2.4.16)$$

Это необходимо проверить для произвольных значений вариаций  $\delta C_i$ . В результате получим соотношения

$$\sum_{(i)} (a_{ij} + pb_{ij}) C_j = 0, \quad (2.4.17)$$

эквивалентные уравнениям (2.4.3). Следовательно, с помощью вариационного принципа (2.4.13) и (2.4.14) можно получить эквивалентные релаксационные моды. Соответствующие значения множителя Лагранжа  $p$  являются корнями характеристического уравнения (2.4.4).

## 2.5. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ И НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим две релаксационные моды

$$q_i = C_i^{(s)} e^{-\lambda_s t}, \quad q_i = C_i^{(r)} e^{-\lambda_r t} \quad (2.5.1)$$

с различными постоянными релаксации

$$\lambda_s \neq \lambda_r. \quad (2.5.2)$$

Они удовлетворяют уравнениям

$$\sum_j (a_{ij} C_j^{(s)} - \lambda_s b_{ij} C_j^{(s)}) = 0; \quad \sum_j^{(i)} (a_{ij} C_j^{(r)} - \lambda_r b_{ij} C_j^{(r)}) = 0. \quad (2.5.3)$$

Умножив первое уравнение (2.5.3) на  $C_i^{(r)}$  и просуммировав результат по  $i$ , получим:

$$\sum^{ij} (a_{ij} C_j^{(s)} C_i^{(r)} - \lambda_s b_{ij} C_j^{(s)} C_i^{(r)}) = 0. \quad (2.5.4)$$

Аналогично, умножив второе уравнение (2.5.3) на  $C_i^{(s)}$ , получим:

$$\sum^{ij} (a_{ij} C_j^{(r)} C_i^{(s)} - \lambda_r b_{ij} C_j^{(r)} C_i^{(s)}) = 0. \quad (2.5.5)$$

Теперь вычтем уравнение (2.5.5) из уравнения (2.5.4) с учетом свойства симметрии коэффициентов ( $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $b_{ij} = b_{ji}$ ). В результате получим:

$$(\lambda_s - \lambda_r) b_{ij} C_i^{(r)} C_j^{(s)} = 0. \quad (2.5.6)$$

Поскольку  $\lambda_r \neq \lambda_s$ , из (2.5.6) следует:

$$\sum^{ij} b_{ij} C_i^{(r)} C_j^{(s)} = 0. \quad (2.5.7)$$

С учетом уравнения (2.5.4) это также означает

$$\sum^{ij} a_{ij} C_i^{(r)} C_j^{(s)} = 0. \quad (2.5.8)$$

Соотношения (2.5.7) и (2.5.8) являются хорошо известными условиями ортогональности, которые удовлетворяются характеристическими решениями систем, определяемых парой квадратичных форм.

Условия ортогональности можно выразить с помощью нормированных амплитуд  $\varphi_i^{(s)}$  релаксационных мод, что следует из условия нормировки (2.4.11). Подставив значения  $C_i^{(s)}$  из (2.4.10) в соотношения (2.5.7) и (2.5.8), получим условия ортогональности релаксационных мод в виде

$$\sum^{ij} b_{ij} \varphi_i^{(r)} \varphi_j^{(s)} = 0; \quad \sum^{ij} a_{ij} \varphi_i^{(r)} \varphi_j^{(s)} = 0. \quad (2.5.9)$$

При выводе свойства ортогональности предполагалось  $\lambda_r \neq \lambda_s$ . Однако это свойство можно распространить на моды с одинаковыми постоянными релаксации. Рассмотрим, например,  $k$  мод  $\varphi_i^{(s)}$  ( $s = m+1, m+2, \dots, m+k$ ), входящих в общее решение (2.4.12) с одинаковыми по-



стоянными релаксации  $\lambda$ . Можно показать, что выбор  $\varphi_i^{(s)}$ , представляющих эти моды, не является однозначным и может быть использована любая система независимых базисных векторов. Легко проверить, что они всегда могут быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворить первому соотношению (2.5.9). Вследствие уравнения (2.5.4) второе соотношение (2.5.9) удовлетворяется автоматически.

Введем скалярные и векторные поля

$$\theta^{(s)} = \sum_i \theta^{(i)} \varphi_i^{(s)}; \quad \mathbf{H}^{(s)} = \sum_i \mathbf{H}^{(i)} \varphi_i^{(s)}, \quad (2.5.10)$$

где  $\theta^{(i)}$  и  $\mathbf{H}^{(i)}$  — поля, описываемые уравнениями (2.3.3) и (2.3.1). При таком представлении полей температуры и теплового смещения релаксационные моды запишутся в виде

$$\theta = C^{(s)} \theta^{(s)} e^{-\lambda s t}; \quad \mathbf{H} = C^{(s)} \mathbf{H}^{(s)} e^{-\lambda s t}. \quad (2.5.11)$$

Следовательно,  $\theta^{(s)}$  и  $\mathbf{H}^{(s)}$  можно считать нормированными полями, определяющими характеристические решения.

Рассмотрим два температурных поля  $\theta^{(r)}$  и  $\theta^{(s)}$ , соответствующие релаксационным модам с различными постоянными релаксации. Находим:

$$\iiint_{\tau} c \theta^{(r)} \theta^{(s)} d\tau = 0. \quad (2.5.12)$$

Это легко проверить, если вместо  $\theta^{(s)}$  и  $\theta^{(r)}$  подставить выражения (2.5.10) с учетом (2.3.7) для  $a_{ij}$  и условия ортогональности (2.5.9).

Аналогично в случае изотропной теплопроводности, используя значения  $b_{ij}$  из (2.3.10), выводим:

$$\iiint_{\tau} \frac{1}{k} \mathbf{H}^{(r)} \mathbf{H}^{(s)} d\tau + \iint_A \frac{1}{K} H_n^{(r)} H_n^{(s)} dA = 0. \quad (2.5.13)$$

Поэтому уравнения (2.5.12) и (2.5.13) выражают свойства ортогональности релаксационных мод с помощью полей, характеризующих эти моды.

Для анизотропной теплопроводности условие ортогональности (2.5.13) заменяется выражением

$$\iiint_{\tau} \sum_{kj} \lambda_{kj} H_n^{(r)} H_j^{(s)} d\tau + \iint_A \frac{1}{K} H_n^{(r)} H_n^{(s)} dA = 0. \quad (2.5.14)$$

*Нормальные координаты.* Рассмотрим линейную систему, описываемую  $n$  обобщенными координатами  $q_i$  и двумя квадратичными формами

$$V = \frac{1}{2} \sum^{ij} a_{ij} q_i q_j; \quad D = \frac{1}{2} \sum^{ij} b_{ij} q_i q_j. \quad (2.5.15)$$

Форма  $D$  является положительно определенной. Одна из основных алгебраических теорем утверждает [Л. 2-5], что если  $D$  положительно определенная форма, то можно найти неособенное преобразование  $n$  переменных  $q_i$  в  $n$  переменные  $\xi_i$  таким образом, что  $V$  и  $D$  будут суммой квадратов  $\xi_i$ . Это преобразование имеет вид:

$$q_i = \sum^s \varphi_i^{(s)} \xi_s. \quad (2.5.16)$$

Неособенным преобразованием называется такое преобразование, когда детерминант коэффициентов  $\varphi_i^{(s)}$  порядка  $n \times n$  не стремится к нулю. Следовательно, значения  $q_i$  не могут быть равны нулю, если все значения  $\xi_s$  также не равны нулю. Эта теорема утверждает, что существует такое преобразование (2.5.16), для которого  $V$  и  $D$  будут:

$$V = \frac{1}{2} \sum^s \lambda_s \xi_s^2; \quad D = \frac{1}{2} \sum^s \xi_s^2. \quad (2.5.17)$$

Кроме того, значения  $\lambda_s$  суть  $n$  корней характеристического уравнения

$$\det |a_{ij} - \lambda b_{ij}| = 0. \quad (2.5.18)$$

Все корни этого уравнения действительны. Поскольку  $V$  принято здесь положительно полуопределенной формой, значения  $\lambda_s$  не могут быть отрицательными. Однако некоторые из этих значений могут быть нулевыми, в этом случае квадратичная форма содержит число слагаемых  $V$  меньше  $n$ .

Эта теорема не требует, чтобы значения  $\lambda_s$  были строго различными. Может существовать любое число равных значений, соответствующих кратным корням характеристического уравнения с любой кратностью. Переменные  $\xi_s$  определяют нормальные координаты. В этих пе-

ременных уравнения Лагранжа при отсутствии тепловых сил будут иметь вид:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_s} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_s} = 0. \quad (2.5.19)$$

Используя в нем значения  $V$  и  $D$  из (2.5.17), получаем  $n$  несвязанных дифференциальных уравнений:

$$\lambda_s \xi_s + \dot{\xi}_s = 0. \quad (2.5.20)$$

Решение этих уравнений будет иметь вид:

$$\xi_s = C^{(s)} e^{-\lambda_s t}. \quad (2.5.21)$$

Они описывают моды тепловой релаксации, о которых уже говорилось в § 2.4. Подставив значения  $\xi_s$  из (2.5.21) в преобразование (2.5.16), получим:

$$q_i = \sum_s C^{(s)} \varphi_i^{(s)} e^{-\lambda_s t}, \quad (2.5.22)$$

что совпадает с выражением (2.4.12).

Это уравнение выражает свойство, о котором также говорилось в § 2.4: общее решение системы дифференциальных уравнений (2.4.1) является суммой действительных показательных функций и включает случай характеристических корней любой кратности. Заметим, что для нулевых корней  $\lambda_s = 0$  соответствующие экспоненциальные члены вырождаются в постоянные значения  $C^{(s)} \varphi_i^{(s)}$ .

В случае кратных характеристических корней существует неопределенность в выборе коэффициентов  $\varphi^{(s)}$ . Для иллюстрации рассмотрим случай трех равных значений характеристических корней:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \quad (2.5.23)$$

Ограничимся в выражении (2.5.17) членами, содержащими соответствующие нормальные координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Тогда запишем:

$$V = \frac{1}{2} \lambda_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2); \quad D = \frac{1}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2). \quad (2.5.24)$$

Координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  можно считать прямоугольными в трехмерном пространстве. Вращение системы координат преобразует  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$  в новые переменные так, что

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \xi'^2_1 + \xi'^2_2 + \xi'^2_3. \quad (2.5.25)$$

Следовательно, при этих новых переменных квадратичные формы (2.5.17) не изменяются. Та же неопределенность имеет место всегда, когда имеется квадратный корень любой кратности.

Если преобразования (2.5.16) подставить в квадратичные формы (2.5.15), последние приводятся к выражениям (2.5.17). Поскольку скалярные произведения  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  должны обращаться в нуль, необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\sum_{ij} a_{ij} \varphi_i^{(r)} \varphi_j^{(s)} = 0; \quad \sum_{ij} b_{ij} \varphi_i^{(r)} \varphi_j^{(s)} = 0; \quad (r \neq s). \quad (2.5.26)$$

Они идентичны условиям ортогональности (2.5.9), выведенным для случая  $\lambda_r \neq \lambda_s$ . В данном случае уравнения (2.5.26) выводятся по-другому — как следствие уравнения (2.5.16). Это показывает, что преобразования (2.5.26) справедливы для кратных корней и, следовательно, не требуют различия между значениями  $\lambda_r$  и  $\lambda_s$ .

Выражение (2.5.17) для  $D$  также требует, чтобы коэффициенты  $\varphi_i^{(s)}$  в преобразовании (2.5.16) удовлетворяли соотношениям:

$$\sum_{ij} b_{ij} \varphi_i^{(s)} \varphi_j^{(s)} = 1. \quad (2.5.27)$$

Это выражение тождественно условию нормировки (2.4.11) для релаксационных мод.

Теперь рассмотрим систему, на которую действуют тепловые силы  $Q_i$ . Обобщенные координаты подчиняются дифференциальным уравнениям

$$\sum_i a_{ij} \dot{q}_j + \sum_j b_{ij} \dot{q}_j = Q_i. \quad (2.5.28)$$

Эти уравнения можно представить с помощью преобразования (2.5.16) в нормальных координатах  $\xi_s$ . Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_s} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_s} = \Xi_s, \quad (2.5.29)$$

где  $V$  и  $D$  даются уравнениями (2.5.17), а  $\Xi_s$  — обобщенная сила, сопряженная с координатой  $\xi_s$ . Значение  $\Xi_s$  находим с помощью уравнения (1.4.7). В соответствии с этим уравнением можно записать тождество

$$\sum_i Q_i \delta q_i = \sum_s \Xi_s \delta \xi_s. \quad (2.5.30)$$

С помощью преобразования (2.5.16) вариации  $\delta q_i$  и  $\delta \xi_s$  связаны следующим образом:

$$\delta q_i = \sum_1^s \varphi_i^{(s)} \delta \xi_s. \quad (2.5.31)$$

Подставив эти значения в уравнение (2.5.30), получим:

$$\Xi_s = \sum_1^i \varphi_i^{(s)} Q_i, \quad (2.5.32)$$

что является определением нормальных сил через первоначальные значения  $Q_i$ .

Дифференциальные уравнения (2.5.29) для нормальных координат запишутся в явном виде

$$\lambda_s \xi_s + \dot{\xi}_s = \Xi_s. \quad (2.5.33)$$

Если  $Q_i$  — заданные функции времени, значения  $\Xi_s(t)$  также являются известными функциями времени, определяемыми из соотношений (2.5.32). Допустим, что на невозмущенную систему в момент времени  $t=0$  начинается воздействие сил  $\Xi_s$ , тогда

$$\xi_s = \Xi_s = 0 \quad t < 0. \quad (2.5.34)$$

В этом случае решение уравнения (2.5.33) является полностью определенным и дается хорошо известным выражением

$$\xi_s = e^{-\lambda_s t} \int_0^t e^{\lambda_s t'} \Xi_s(t') dt'. \quad (2.5.35)$$

Если в момент  $t=0$  на систему начинает действовать постоянная сила  $\Xi_s$ , выражение (2.5.35) для  $\xi_s$  принимает вид:

$$\xi_s = (1 - e^{-\lambda_s t}) \frac{\Xi_s}{\lambda_s}. \quad (2.5.36)$$

Как уже указывалось, какое-то число постоянных релаксации  $\lambda_s$  равно нулю. Они соответствуют компонентам поля теплового смещения  $\mathbf{H}$ , для которого  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . Соответствующие нормальные координаты описываются дифференциальными уравнениями

$$\dot{\xi}_s = \Xi_s. \quad (2.5.37)$$

Когда в момент  $t=0$  начинают действовать постоянные силы  $\Xi_s$ , решение (2.5.37) принимает вид:

$$\xi_s = \Xi_s t. \quad (2.5.38)$$

Эти нормальные координаты представляют решение, соответствующее стационарному течению, достигаемому асимптотически для больших значений времени  $t$ . В стационарном течении тепловое смещение  $\mathbf{H}$  в соответствии с уравнением (2.5.38) является линейной функцией времени.

## 2.6. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим систему, на которую воздействуют медленно изменяющиеся тепловые силы. При бесконечно медленном изменении тепловое поле проходит (в пределе) непрерывный ряд стационарных состояний. Это означает, что в любой момент времени температура и тепловой поток адекватны их значениям при постоянных тепловых силах, определенных для данного момента. Мы будем называть решение такого типа квазистационарным.

Это понятие включает в себя способ решения нестационарных тепловых задач, когда квазистационарное решение берется в качестве первого приближения и к нему добавляются поправки, связанные с нестационарным поведением. Решения такого типа должны быстро сходиться, особенно в задачах с медленно изменяющимися температурами. Для иллюстрации в конце следующего параграфа будет рассмотрен пример.

Обозначим через  $\theta^*$  температурное поле, определяемое квазистационарным решением. Будем считать, что оно вычисляется отдельно и является известной функцией времени и координат:

$$\theta^* = \theta^*(x, y, z, t). \quad (2.6.1)$$

Его можно рассчитать любым известным методом, применяемым для решения стационарных тепловых задач, включая, конечно, вариационные методы. Искомое температурное поле системы будет:

$$\theta = \theta^+ + \theta^*, \quad (2.6.2)$$

где  $\theta^+$  — поправка на нестационарное поведение. Рассмотрим случай изотропной теплопроводности. Поскольку  $\theta^*$  — квазистационарное температурное поле, оно удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta^*) = 0. \quad (2.6.3)$$

С другой стороны, температура  $\theta$  удовлетворяет уравнению теплопроводности (1.2.10а)

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) = c \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (2.6.4)$$

Подставив значение  $\theta$  из (2.6.2) в уравнение (2.6.4) с учетом (2.6.3), получим:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta^*) = c \frac{\partial \theta^+}{\partial t} + c \frac{\partial \theta^*}{\partial t}. \quad (2.6.5)$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (1.6.19а) показывает, что  $\theta^+$  описывает температурное поле в модели с распределенными источниками тепла, равными

$$w = -c \frac{\partial \theta^*}{\partial t}. \quad (2.6.6)$$

Кроме того, на границе  $\theta = \theta^*$ , что следует из определения стационарного решения. Следовательно, в модели с источниками граничное условие будет:

$$\theta^+ = 0. \quad (2.6.7)$$

Уравнения Лагранжа для этой модели выводятся в § 1.6. Для данного случая они формулируются следующим образом.

Выбираем поле  $\mathbf{H}^*$  по уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{H}^* = \int_0^t w dt = -c \theta^*. \quad (2.6.8)$$

Поле  $\mathbf{H}^*$  не определяется однозначно через  $\theta^*$ . Известное поле  $\mathbf{H}^+$ , представляющее поправку из-за нестационарного поведения, запишется как функция обобщенных координат  $q_i$

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^+(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (2.6.9)$$

Температурная поправка будет

$$\theta^+ = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{H}^*. \quad (2.6.10)$$

Тогда в соответствии с уравнением (1.6.19) можно записать:

$$\frac{\partial V^+}{\partial q_i} + \frac{\partial D^+}{\partial q_i} = Q^+_i, \quad (2.6.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V^+ &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} c (\theta^+)^2 d\tau; \\ D^+ &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} (\dot{H}^+)^2 d\tau; \\ \dot{Q}^+_{,i} &= - \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \frac{\partial H^+}{\partial q_{i,1}} \dot{H}^* d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.12)$$

Поскольку  $\theta^+ = 0$  на границе, значение  $Q_i$  в модели с источниками стремится к нулю. Соотношение (2.6.11) является уравнением Лагранжа для обобщенных координат, определяющих поправку  $\theta^+$ .

## 2.7. ПРИМЕР. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

Одномерная задача о диффузии тепла в пластине толщиной  $l$ , одна сторона которой теплоизолирована, рассматривалась в § 1.7. При рассмотрении использовалось понятие глубины проникновения. Для иллюстрации метода, разработанного в данной главе, рассмотрим нагревание пластины, обе стороны которой теплопроницаемы. Для решения используем совершенно иной метод, основанный на нормальных координатах.

Сначала рассчитаем моды тепловой релаксации. Они соответствуют граничному условию, когда температура на обеих сторонах пластины при  $x=0$  и  $x=l$  равна нулю ( $\theta=0$ ) (рис. 2.1). Представим тепловое смещение  $H(x)$  в виде

$$H = q_0 + \sum^n q_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.7.1)$$

где  $n$  — целое положительное число. Соответствующее температурное поле  $\theta = -(1/c) dH/dx$  будет:

$$\theta = \frac{\pi}{cl} \sum^n n q_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.7.2)$$

Оно удовлетворяет граничному условию  $\theta=0$  при  $x=0$  и  $x=l$ . В данном случае достаточно рассчитать тепловой потенциал и диссипативную функцию для объема цилиндра, перпендикулярного пластине с площадью основания, равной единице. Запишем:

$$V = \frac{1}{2} c \int_0^l \theta^2 dx; \quad D = \frac{1}{2k} \int_0^l \dot{H}^2 dx. \quad (2.7.3)$$



Используя свойство ортогональности тригонометрических функций в уравнениях (2.7.1) и (2.7.2), приведем выражение (2.7.3) к сумме квадратов

$$V = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{cl} \sum_{n=1}^n n^2 q_n^2; \quad D = \frac{l}{2k} q_0^2 + \frac{1}{4} \frac{l}{k} \sum_{n=1}^n q_n^2. \quad (2.7.4)$$

В отсутствие тепловых сил обобщенные координаты  $q_0, q_n$  описываются уравнениями Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q_n} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} = 0; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_0} = 0. \quad (2.7.5)$$

Подставив сюда значения  $V$  и  $D$  из (2.7.4), получим:

$$\lambda_n q_n + \dot{q}_n = 0; \quad \dot{q}_0 = 0, \quad (2.7.6)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 k n^2}{c l^2}. \quad (2.7.7)$$

Решениями уравнений (2.7.6) будут:

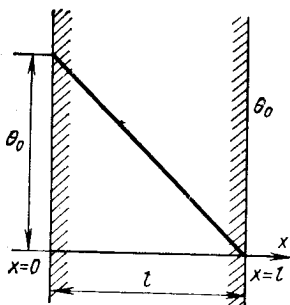
$$q_n = C_n e^{-\lambda_n t}; \quad q_0 = \text{const}, \quad (2.7.8)$$

где  $C_n$  — произвольные постоянные. Эти решения представляют релаксационные моды пластины. Отметим существование моды  $q_0$  с постоянным значением, соответствующим случаю нулевой постоянной релаксации ( $\lambda_r = 0$ ).

Эти результаты показывают, что  $q_0$  и  $q_n$  пропорциональны нормальным координатам  $\xi_n$ , рассмотренным в § 2.5. То, что они не удовлетворяют тому же условию нормировки, что и  $\xi_r$ , несущественно. Поэтому  $q_0$  и  $q_n$  можно назвать также нормальными координатами.

В качестве иллюстрации общего метода, описанного в § 2.5, можно использовать эти нормальные координаты для расчета нестационарной тепловой диффузии в пластине, когда в момент  $t=0$  поверхность пластины при  $x=0$  мгновенно принимает температуру  $\theta = \theta_0$ . Будем считать,

Рис. 2.1. Тепловой поток через пластину.



что противоположная поверхность остается при нулевой температуре [Л. 2-6]. К уравнениям Лагранжа (2.7.5) необходимо добавить обобщенные силы  $Q_0$  и  $Q_n$ . В результате получим:

$$\frac{\partial V}{\partial q_n} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} = Q_n; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_0} = Q_0. \quad (2.7.9)$$

Для нахождения обобщенных сил необходимо вычислить

$$\theta_0 \delta H = Q_0 \delta q_0 + \sum_{n=1}^n Q_n \delta q_n, \quad (2.7.10)$$

где  $\delta H$  — вариация  $H$  при  $x=0$ . В соответствии с уравнением (2.7.1) эта вариация равна:

$$\delta H = \delta q_0 + \sum^n \delta q_n. \quad (2.7.11)$$

Подставив это значение в уравнение (2.7.10) и приравняв коэффициенты  $\delta q_0$  и  $\delta q_n$  в обеих частях, получим:

$$Q_0 = Q_n = \theta_0. \quad (2.7.12)$$

При этих значениях, а также используя значения  $V$  и  $D$  из выражений (2.4.7), можно записать:

$$\lambda_n q_n + \dot{q}_n = \frac{2k}{l} \theta_0; \quad q_0 = \frac{k}{l} \theta_0. \quad (2.7.13)$$

Решениями этих уравнений с начальными условиями  $q_0 = q_n = 0$  в момент  $t=0$  будут:

$$q_n = \frac{2k\theta_0}{l\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}); \quad q_0 = \frac{k}{l} \theta_0 t. \quad (2.7.14)$$

Подставив эти значения в выражения (2.7.1) и (2.7.2), получим зависимость от времени разложения Фурье для  $H$  и  $\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{k}{l} \theta_0 t + \frac{2k\theta_0}{l} \sum^n \frac{1}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}) \cos \frac{n\pi x}{l}; \\ \theta &= \frac{2\theta_0}{\pi} \sum^n \frac{1}{n} (1 - e^{-\lambda_n t}) \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7.15)$$

С течением времени эти значения стремятся к стационарному решению. Для  $t=\infty$  предельные значения  $\dot{H} = \partial H / \partial t$  и  $\theta$  будут:

$$\dot{H} = \frac{k\theta_0}{l}; \quad \theta = \frac{2\theta_0}{\pi} \sum^n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} = \theta_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (2.7.16)$$

Полученное предельное значение  $\theta$  является хорошо известным разложением в ряд Фурье линейной функции  $\theta_0(1-x/l)$ . Эта линейная функция описывает стационарное распределение температуры в пластине при граничных условиях  $\theta = \theta_0$  при  $x=0$  и  $\theta=0$  при  $x=l$ . Предельное значение  $\dot{H} = k\theta_0/l$  является также стационарной плотностью теплового потока через стенку. Оно иллюстрирует физический смысл координаты

$$q_0 = \frac{k}{l} \theta_0 t, \quad (2.7.17)$$

являющейся линейно возрастающим тепловым смещением в пластине в стационарном состоянии.

*Слабые решения.* Обратим внимание на одну важную особенность выражения (2.7.15) для  $\theta$ . Вследствие того, что ряд Фурье для  $\theta$  обращается в нуль при  $x=0$ , граничное условие  $\theta = \theta_0$  в этой точ-

ке не удовлетворяется никогда. Однако в точке  $x$ , расположенной бесконечно близко к началу координат, значение температуры мгновенно возрастает до  $\theta_0$ . Следовательно, если исключить точку  $x=0$ , граничное условие  $\theta=\theta_0$  удовлетворяется. Здесь мы имеем дело с хорошо известным случаем неравномерной сходимости ряда Фурье. Используя математическую терминологию, можно сказать, что решение несправедливое в конечном числе точек, существует почти всюду. Такое решение иногда называется слабым решением. Имеются также случаи, когда решение несправедливо для бесконечного ряда точек, при условии, что этот ряд имеет нулевую меру. Такие слабые решения типичны для задач, которые решаются с помощью нормальных координат. Однако они не теряют своего физического смысла, поскольку точками, в которых они справедливы, можно пренебречь. Это явление иллюстрирует математические трудности, возникающие при решении физических задач при введении понятия континуума. Действительно, с точки зрения физики понятие континуума довольно искусственно, и эти трудности обычно исчезают при рассмотрении физической сущности задачи.

Решение, удовлетворяющее граничному условию, можно получить, представив выражение (2.7.15) для  $\theta$  в виде

$$\theta = \theta_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{2\theta_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\lambda_n t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.7.18)$$

Это решение можно получить непосредственно, применив метод, описанный в § 2.6, с использованием стационарного решения и поправок, найденных с помощью нормальных координат. Это решение быстро сходится для больших значений  $t$ . Как уже отмечалось, решения такого типа, являющиеся комбинацией стационарного поля и поправок, обусловленных нестационарностями, обычно из-за требований быстрой сходимости применимы для медленно изменяющихся температур.

Другим примером решения такого типа является выражение (1.7.12) для второй стадии нагрева пластины с теплоизолированной поверхностью при  $x=l$ . Стационарная часть решения в этом случае является постоянной температурой  $\theta_0$  по толщине пластины.

### Глава третья

## ОПЕРАЦИОННЫЙ ФОРМАЛИЗМ

### 3.1. ВВЕДЕНИЕ

Операционный формализм, введенный Хевисайдом, является эффективным средством для анализа линейных тепловых систем. Он применим к большому классу задач, в которых физические свойства систем не зависят от времени и температуры. Операционный метод содержит несколько разных, но взаимосвязанных математических теорий. В частности, как показано автором в рабо-

те по термодинамике необратимых процессов, существует возможность вывода вариационных принципов в операционной форме.

В § 3.2 и 3.3 вводятся понятия тепловой восприимчивости и полного теплового сопротивления для гармонической зависимости от времени. Это приводит к понятию внутренних и внешних координат тепловых систем и позволяет получить общие выражения для тепловой восприимчивости и полного теплового сопротивления, которые представляются в виде разложений по элементарным дробям.

Применение преобразований Фурье и Лапласа для расчета нестационарных тепловых полей рассматривается в § 3.4. В § 3.5 показан переход от этих методов к основному операционному формализму. Особое внимание уделяется использованию «обобщенных функций» для упрощения и обобщения операционных методов.

Эти результаты позволяют вывести вариационные принципы в операционной форме. Как показано в § 3.6, формулировка этих принципов содержит методы, соответствующие трем различным подходам: операционному, алгебраическому и формулировке свертки.

В § 3.7 вариационный принцип развивается для взаимосвязанных систем. Он позволяет сформулировать уравнения для сложной системы с известными тепловыми сопротивлениями подсистем. В результате приходим к аналогу общей теоремы механики, в которой внутренние силы можно исключить с помощью понятия виртуальной работы. Предлагается также иная форма этого принципа. Из рассмотренных вариационных принципов легко вывести один из вариантов метода «конечных элементов».

В § 3.8 приводится пример применения операционного метода для решения одномерной задачи теплопроводности. Там же показано, как для неограниченной системы ввести понятие тепловой восприимчивости, описываемой с помощью непрерывного спектра постоянных релаксации.

## 3.2. ТЕПЛОВАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Рассмотрим систему, на которую воздействуют термодинамические силы, являющиеся гармоническими функциями времени. Обобщенные силы  $Q_i$  можно записать в виде  $Q_i \exp(i\omega t)$ , где  $Q_i$  — комплексная амплитуда

Аналогично, обобщенные координаты, представляющие стационарно-периодическую реакцию системы, необходимо заменить на  $q_i \exp(i\omega t)$  с комплексной амплитудой  $q_i$ . Применяв общие уравнения (2.3.14) для линейной системы, находим величины  $q_i$  из решения алгебраических уравнений

$$\sum_j^i (a_{ij} + pb_{ij}) q_j = Q_i, \quad (3.2.1)$$

где

$$p = i\omega.$$

Физический смысл такого периодического решения станет ясным, если допустить, что гармонические силы включаются в момент  $t=0$  и воздействуют на невозмущенную систему ( $q_i=0$  для  $t<0$ ). Отклик системы состоит из периодического и переходного решений. Переходный режим описывается выражениями (2.4.12), которые обычно содержат экспоненциально убывающие и постоянные члены. Следовательно, по истечении довольно большого промежутка времени стационарный отклик системы описывается суперпозицией гармонических решений и постоянных величин. Наличие постоянных членов в функции отклика системы в стационарном состоянии объясняется тем, что переходный режим может вызвать достаточное тепловое смещение, которое остается конечным с течением времени. Математически это обусловлено неопределенностью теплового потенциала и существованием нулевых значений постоянных релаксации.

Вследствие положительной определенности диссипативной функции определитель из коэффициентов  $b_{ij}$  не равен нулю. Следовательно, определитель для уравнений (3.2.1) также отличен от нуля. Поэтому можно решить эти уравнения относительно  $q_i$ . Запишем:

$$q_i = \sum_j^i A_{ij} Q_j. \quad (3.2.2)$$

Коэффициенты  $A_{ij}$  образуют комплексную матрицу тепловой восприимчивости системы. Из соотношений  $a_{ij} = -a_{ji}$  и  $b_{ij} = b_{ji}$  следует:

$$A_{ij} = A_{ji}. \quad (3.2.3)$$

Таким образом, матрица тепловой восприимчивости симметрична.

*Общая форма тепловой восприимчивости.* Элементы матрицы являются мероморфными функциями  $p$ . С помощью простых дробей можно получить общее выражение для этих функций, если ввести нормальные координаты [Л. 3-1]. В соответствии с уравнениями (2.5.16) переход от нормальных координат к координатам  $\xi_s$  записывается в виде

$$q_i = \sum^s \varphi_i^{(s)} \xi_s. \quad (3.2.4)$$

Силы  $\Xi_s$ , сопряженные с нормальными координатами, даются уравнениями (2.5.32). Они имеют вид:

$$\Xi_s = \sum^i \varphi_i^{(s)} Q_i. \quad (3.2.5)$$

Нормальные силы и нормальные координаты связаны уравнением (2.5.33). Для гармонической зависимости от времени эти уравнения запишутся в виде

$$\lambda_s \xi_s + p \xi_s = \Xi_s \quad (3.2.6)$$

или

$$\xi_s = \frac{\Xi_s}{\lambda_s + p}. \quad (3.2.7)$$

Объединив уравнения (3.2.4), (3.2.5) и (3.2.7), получим:

$$q_i = \sum^i \sum^s \frac{\varphi_i^{(s)} \varphi_j^{(s)}}{\lambda_s + p} Q_j. \quad (3.2.8)$$

Сравнивая полученные уравнения с уравнением (3.2.2), видим, что тепловая восприимчивость является матрицей, состоящей из элементов

$$A_{ij} = \sum^s \frac{\varphi_i^{(s)} \varphi_j^{(s)}}{\lambda_s + p}. \quad (3.2.9)$$

Следовательно, мы получили разложение  $A_{ij}$  на элементарные дроби. Существование кратных корней  $\lambda_s$  характеристического уравнения позволяет выразить величины  $A_{ij}$  в другой форме. Обозначим с помощью  $\lambda_s$  корень кратности  $k$ . В этом случае  $\lambda_s$  входит  $k$  раз в сумму (3.2.9). Корни  $\lambda_s$  связаны с  $k$  значениями  $\varphi_i^{(s+s')}$ , где  $s'$  принимает значения от 1 до  $k$ . Полагая

$$C_{ij}^{(s)} = \sum^{s'} \varphi_i^{(s+s')} \varphi_j^{(s+s')}, \quad (3.2.10)$$

запишем выражение (3.2.10) в виде

$$A_{ij} = \sum_{s=1}^s \frac{C_{ij}^{(s)}}{\lambda_s + p}. \quad (3.2.11)$$

В этом случае суммирование  $\sum$  проводится по несовпадающим значениям  $\lambda_s$ .

Интересным свойством коэффициентов  $C_{ij}^{(s)}$  является неотрицательный характер соответствующей квадратичной формы, которую можно получить из рассмотрения тождества:

$$\sum_{i=1}^{s'} \left( \sum_{i=1}^i \varphi_i^{s+s'} z_i \right)^2 = \sum_{ij} C_{ij}^{(s)} z_i z_j, \quad (3.2.12)$$

из которого следует неотрицательность квадратичной формы.

*Внутренние координаты.* В некоторых задачах нас будет интересовать поведение только небольшого числа координат функции отклика в результате воздействия соответствующих сил. Например, на некоторое число областей на границе воздействуют тепловые силы. Рассмотрим  $k$  таких областей, обозначенных  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , и будем считать, что температуры  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  приложены к границам областей, причем все они имеют постоянную амплитуду. Она является комплексной величиной, представляющей гармоническую функцию времени. Предполагается, что система характеризуется поверхностным коэффициентом теплообмена и что приложенные тепловые силы можно выразить с помощью адиабатических температур, как показано в § 2.2.

Обобщенные координаты делятся на две группы. Для обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_k$  можно взять средние нормальные тепловые смещения  $H_1, H_2, \dots, H_k$ , равномерно распределенные в каждой области. Эта первая группа будет называться внешними координатами. Если смещения  $H_1, H_2, \dots, H_k$  выбраны положительными и направленными внутрь областей, соответствующие тепловые силы имеют вид:

$$Q_1 = S_1 \theta_1; \quad Q_2 = S_2 \theta_2, \dots, \quad Q_k = S_k \theta_k. \quad (3.2.13)$$

Вся система представлена  $n$  обобщенными координатами ( $n > k$ ). Поэтому имеется  $(n-k)$  дополнительных

координат, описывающих поведение системы. Они выбираются таким образом, чтобы соответствующее тепловое смещение в областях  $S_1, S_2, \dots, S_k$  либо равнялось нулю, либо имело такую величину, чтобы его средняя нормальная компонента для каждой области равнялась нулю. Координаты этой группы мы будем называть внутренними координатами. Величины  $(n-k)$  тепловых сил, связанные с этими внутренними координатами, равны нулю.

Когда к областям  $S_1, S_2, \dots, S_k$  приложены тепловые силы  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ , внешние координаты можно выразить с помощью этих тепловых сил в виде

$$q_i = \sum_{j=1}^k A_{ij} Q_j \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (3.2.14)$$

Внешние координаты не описываются этим выражением. Система является «черным ящиком», внутренняя структура ее представлена только математическими свойствами элементов тепловой восприимчивости  $A_{ij}$ , зависящей от  $p$ .

*Свойство взаимности.* Рассмотрим две внешние области  $S_1$  и  $S_2$ , нагретые соответственно до температуры  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Среднее тепловое смещение через поверхности  $S_1$  и  $S_2$  обозначим через  $q_1 = H_1$  и  $q_2 = H_2$ . Их положительные значения соответствуют направлениям внутри областей. В этом случае соответствующие тепловые силы будут  $Q_1 = S_1 \theta_1, Q_2 = S_2 \theta_2$ . Тепловое смещение через поверхность  $S_2$  в результате воздействия температуры  $\theta_1$  на  $S_1$  равно:

$$H_2 = A_{21} S_1 \theta_1. \quad (3.2.15)$$

Аналогично тепловое смещение через поверхность  $S_1$ , обусловленное воздействием  $\theta_2$  на  $S_2$ , будет:

$$H_1 = A_{12} S_2 \theta_2. \quad (3.2.16)$$

Элементы восприимчивости удовлетворяют соотношению симметрии

$$A_{12} = A_{21}. \quad (3.2.17)$$

Следовательно, если  $\theta_1 = \theta_2$ , получим свойство взаимности

$$H_2 S_2 = H_1 S_1. \quad (3.2.18)$$



### 3.3. ПОЛНОЕ ТЕПЛОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Естественно, что уравнения (3.2.14) для внешних координат  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , выраженных с помощью сопряженных тепловых сил  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ , являются общими и могут применяться везде, где остальные тепловые силы считаются равными нулю

$$Q_{k+1} = Q_{k+2} = \dots = Q_n = 0. \quad (3.3.1)$$

Тепловая восприимчивость  $[A_{ij}]$  в уравнениях (3.2.14) является матрицей  $k \times k$ . Разрешив эти уравнения относительно  $Q_j$ , получим:

$$Q_i = \sum_{j=1}^k z_{ij} q_j \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (3.3.2)$$

Матрицу из комплексных коэффициентов  $Z_{ij}$  назовем полным тепловым сопротивлением системы. Поскольку  $A_{ij} = A_{ji}$ , имеем:

$$Z_{ij} = Z_{ji}. \quad (3.3.3)$$

Представляет интерес найти выражение для  $Z_{ij}$  в виде разложения на простые дроби, аналогичное уравнению (3.2.11).

Для того чтобы получить эти выражения, рассмотрим подсистему, описываемую координатами  $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_n$  [Л. 3-1]. При описании системы можно вместо  $(n-k)$  координат использовать нормальные координаты  $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n$  подсистемы. С помощью этих новых координат тепловой потенциал и диссипативная функция всей системы запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} q_i q_j + \sum_{is} a'_{is} q_i \xi_s + \frac{1}{2} \sum_s r_s \xi_s^2; \\ D &= \frac{1}{2} \sum_{ij} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{is} b'_{is} \dot{q}_i \dot{\xi}_s + \frac{1}{2} \sum_s \xi_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.4)$$

В этом суммировании  $i$  и  $j$  изменяются от 1 до  $k$ , а  $s$  принимают значения от  $k+1$  до  $n$ . При использовании этих новых переменных уравнения Лагранжа разделяются на две группы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} &= Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k); \\ \frac{\partial V}{\partial \xi_s} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_s} &= E_s \quad (s = k+1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (3.3.5)$$

Нормальные силы  $E_s$  даются уравнениями (2.5.32). Следовательно,

$$E_s = \sum_m^m \varphi_m^{(s)} Q_m, \quad (3.3.6)$$

где  $s$  и  $m$  принимают значения от  $k+1$  до  $n$ . В соответствии с соотношениями (3.3.1) значения  $Q_m$  равны нулю. Из этого следует, что

$$E_s = 0. \quad (3.3.7)$$

Для гармонической зависимости от времени уравнения (3.3.5) запишутся в явном виде как

$$\sum_j^j B_{ij} q_j + \sum_s^s B'_{is} \xi_s = Q_i; \quad \sum_i^i B'_{is} q_i + (p + r_s) \xi_s = 0, \quad (3.3.8)$$

где

$$B_{ij} = a_{ij} + pb_{ij}; \quad B'_{is} = a'_{is} + pb'_{is}. \quad (3.3.9)$$

Мы можем разрешить относительно  $\xi_s$  вторую группу уравнений (3.3.8)

$$\xi_s = - \sum_i^i \frac{B'_{is}}{p + r_s} q_i. \quad (3.3.10)$$

Подставив это значение в первую группу уравнений (3.3.8), получим:

$$Q_i = \sum_j^j Z_{ij} q_j, \quad (3.3.11)$$

где

$$Z_{ij} = B_{ij} - \sum_s^s \frac{B'_{is} E'_{js}}{p + r_s}. \quad (3.3.12)$$

Это выражение можно легко свести к постоянной величине, пропорциональной  $p$  и сумме простых дробей  $C_s/(p+r_s)$ .

Однако представляет интерес вывести несколько иное выражение для  $Z_{ij}$ , соответствующее аналоговой модели, описанной автором в работе по термодинамике необратимых процессов [Л. 3-1]. Выражение для  $Z_{ij}$  получается после подстановки в формулу (3.3.12) значений  $B'_{is}$  и  $B'_{js}$  из (3.3.9)

$$Z_{ij} = \sum_s^s \frac{p}{p + r_s} D_{ij}^{(s)} + D_{ij} + D_{ij} p. \quad (3.3.13)$$

При этом необходимо допущение

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= a_{ij} - \sum_s \frac{a'_{is} a'_{js}}{r_s}; & D'_{ij} &= b_{ij} - \sum_s b'_{is} b'_{js}; \\ D_{ij}^{(s)} &= \Psi_i^{(s)} \Psi_j^{(s)}; & \Psi_i^{(s)} &= \frac{a'_{is}}{r_s^{1/2}} - b'_{is} r_s^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.14)$$

Следует отметить возможность существования нулевых значений для  $r_s$ . Однако это не приводит к расходимости величин  $D_{ij}$  и  $\Psi_i^{(s)}$ , поскольку при  $r_s$ , равном нулю, соответствующие значения  $a'_{is}$  также должны стремиться к нулю. Для доказательства этого рассмотрим выражения (3.3.4) для  $V$ .

Если при  $a'_{is} \neq 0$   $r_s = 0$ , мы можем принять член  $a'_{is} q_i \xi_s$  отрицательным и бесконечно большим. Значит  $V$  может быть отрицательным, что противоречит основному свойству теплового потенциала.

Заметим, что подсистема может иметь кратные характеристические корни. Следовательно, как в аналогичном случае для  $C_{ij}^{(s)}$  из уравнения (3.2.10), можно ввести коэффициент

$$D_{ij}^{(s)} = \sum_{i'} \Psi_i^{(s+i')} \Psi_j^{(s+i')}, \quad (3.3.15)$$

где  $\sum_{i'}$  обозначает суммирование до показателя кратности, соответствующего определенному кратному корню  $r_s$ .

Как и в выражении (3.2.11), мы сделали вывод, что квадратичная форма  $\sum_{ij} D_{ij}^{(s)} z_i z_j$  является неотрицательной. Неотрицательность квадратичных форм  $\sum_{ij} D_{ij} z_i z_j$  и  $\sum_{ij} D'_{ij} z_i z_j$  покажем следующим образом. Уравнения (3.2.1) можно записать в виде

$$\sum_{\nu} (a_{\mu\nu} + p b_{\mu\nu}) q_{\nu} = Q_{\mu}, \quad (3.3.15a)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  принимают значения от 1 до  $n$ . Умножив эти уравнения на  $q_{\mu}$ , получим:

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu} q_{\mu} q_{\nu} + p \sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu} q_{\mu} q_{\nu} = \sum_{\mu} Q_{\mu} q_{\mu}. \quad (3.3.15b)$$

Поскольку  $\bar{Q}_{h+1} = \bar{Q}_{h+2} = \dots = \bar{Q}_n = \bar{0}$ , мы можем записать:

$$\sum_{\mu} Q_{\mu} q_{\mu} = \sum_i Q_i q_i = \sum_{ij} Z_{ij} q_i q_j. \quad (3.3.15\text{в})$$

Для  $p = 0$  получим:

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu} q_{\mu} q_{\nu} = \sum_{ij} D_{ij} q_i q_j, \quad (3.3.15\text{г})$$

а для  $p = \infty$

$$\sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu} q_{\mu} q_{\nu} = \sum_{ij} D'_{ij} q_i q_j. \quad (3.3.15\text{д})$$

Левые части уравнений (3.3.15г) и (3.3.15д) не могут быть отрицательными, поскольку они соответствуют тепловому потенциалу и диссипативной функции. Следовательно, квадратичные формы в правой части также не являются отрицательными.

### 3.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА

Нестационарную реакцию тепловой системы на воздействие сил, зависящих от времени, включенных в момент  $t=0$ , можно получить из матрицы тепловой восприимчивости  $A_{ij}(p)$ . Для этого имеется три связанных метода: преобразование Фурье, преобразование Лапласа и операционный метод.

Рассмотрим преобразование Фурье:

$$G_j(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} Q_j(t) dt. \quad (3.4.1)$$

Будем считать, что  $Q_j(t) = 0$  при  $t < 0$ , тогда (3.4.1) можно записать в виде

$$G_j(i\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} Q_j(t) dt. \quad (3.4.2)$$

Обратным преобразованием будет:

$$Q_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} G_j(i\omega) d\omega. \quad (3.4.3)$$

Если ввести переменную

$$p = i\omega, \quad (3.4.4)$$

то можно записать:

$$Q_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{pt} G_j(p) dp. \quad (3.4.5)$$

Это выражение представляет силу  $Q_j(t)$  в виде суперпозиции гармонических компонент, каждая из которых пропорциональна  $e^{i\omega t}$ . Частное решение дифференциального уравнения

$$\sum_{j=1}^k a_{jk} q_k + \sum_{j=1}^k b_{jk} \dot{q}_k = Q_j(t),$$

описывающего тепловую систему с помощью тепловой восприимчивости  $A_{kj}(p)$  из § 3.2, будет иметь вид:

$$q_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{pt} A_{kj}(p) G_j(p) dp. \quad (3.4.6)$$

Не нарушая записи, будем считать, что все другие силы, за исключением  $Q_j(t)$ , равны нулю. Общее решение, естественно, получается как суперпозиция всех таких решений.

Необходимо доказать, что решение (3.4.6) удовлетворяет начальным условиям. В начальный момент система находится в невозмущенном состоянии, что выражается условием

$$q_k(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (3.4.7)$$

В общем случае это условие легко проверить, деформируя путь интегрирования в (3.4.6) таким образом, чтобы при  $t < 0$  значение интеграла равнялось нулю. Это возможно для большинства задач и объясняется тем, что  $A_{kj}(p)$  и  $G_j(p)$ , являющиеся аналитическими функциями  $p$ , не имеют особенностей в полуплоскости, соответствующей действительной положительной части  $p$ . Справедливость этого для  $A_{kj}(p)$  подтверждает разложение по элементарным дробям (3.2.11). Справедливость этого утверждения для  $G_j(t)$  можно проверить, вычислив интеграл (3.4.2). Однако для большинства функций, встречающихся в физических задачах, это свойство имеет место.

Это лучше всего проиллюстрировать с помощью простого примера. Рассмотрим силу  $Q_j(t)$ , являющуюся функцией Хевисайда,

$$Q_j(t) = \eta(t). \quad (3.4.7a)$$

Она также называется единичной ступенчатой функцией  $\eta(t)$ , определяемой как

$$\begin{aligned}\eta(t) &= 0 \text{ при } t < 0; \\ \eta(t) &= 1 \text{ при } t > 0.\end{aligned}\tag{3.4.7б}$$

Эту функцию Хевисайда можно представить с помощью преобразования Фурье в виде

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp.\tag{3.4.7в}$$

Легко проверить обычными методами, что этот интеграл представляет разрывную функцию  $\eta(t)$ . Здесь  $c$  — произвольно малая, но положительная величина. Следовательно, контур интегрирования проходит сколь угодно близко к мнимой оси и расположен в полуплоскости, где  $p$  имеет положительную действительную часть. Если тепловая восприимчивость  $A_{ij}(p)$  связывает отклик  $q_k$  с силой  $Q_j$ , то отклик  $q_k = \alpha_k(t)$  на силу, описываемую ступенчатой функцией (3.4.7в), будет:

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{A_{kj}(p)}{p} dp.\tag{3.4.7г}$$

Поскольку  $A_{kj}(p)$  не имеет особенностей в полуплоскости, где действительная часть  $p$  положительна, очевидно, что, как и в уравнении (3.4.7в),  $\alpha_k(t) = 0$  для  $t < 0$ . Следовательно, начальное условие для невозмущенной системы удовлетворяется.

Отметим, что если мы определили  $\alpha_k(t)$ , реакция  $q_k(t)$  на воздействие произвольной силы  $Q_j(t)$  получается при суперпозиции как интеграл Дюамеля

$$q_k(t) = \int_0^t \alpha_k(t-t') dQ_j(t').\tag{3.4.7д}$$

В этом выражении интегрирование должно производиться по Стильтесу.

Уравнение (3.4.2) можно записать в виде

$$G_j(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} Q_j(t) dt,\tag{3.4.8}$$

где в данном случае  $p$  — действительное положительное число. Тогда функция  $G_j(p)$  является преобразованием Лапласа величины  $Q_j(t)$ . При заданном преобразовании Лапласа соотношение (3.4.8) является интегральным уравнением для  $Q_j(t)$ . Это решение является единственным в очень широком диапазоне условий. Соотношение (3.4.8) известно также как интегральное уравнение Карсона.

Основная теорема теории преобразований Лапласа — теорема о свертке — рассматривает произведение этих преобразований. Рас-

смотрим преобразование Лапласа  $\Lambda_1(p)$ ,  $\Lambda_2(p)$  от двух функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , определенных при  $t > 0$ :

$$\Lambda_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt; \quad \Lambda_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt. \quad (3.4.9)$$

Теорема утверждает, что произведение этих преобразований Лапласа имеет вид:

$$\Lambda_1(p) \Lambda_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_3(t) dt, \quad (3.4.10)$$

где

$$f_3(t) = \int_0^t f_1(t-t') f_2(t') dt' = \int_0^t f_2(t-t') f_1(t') dt'. \quad (3.4.11)$$

Следовательно, преобразование Лапласа от свертки  $f_3$  двух функций  $f_1$  и  $f_2$  получается как произведение преобразований Лапласа этих функций. Это свойство лежит в основе операционной алгебры, которую легко распространить на операционные методы [Л. 3-2].

### 3.5. ОПЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Чтобы не записывать в явном виде интегральные преобразования, можно непосредственно пользоваться дифференциальными и интегральными операторами как алгебраическими величинами.

Например, дифференциальные уравнения запишутся в символическом виде, если использовать символ для дифференциального оператора

$$p = \frac{d}{dt}. \quad (3.5.1)$$

Уравнения

$$\sum_k^k (a_{jk} + pb_{jk}) q_k = Q_j \quad (3.5.2)$$

можно считать дифференциальными уравнениями или соотношениями между преобразованиями Лапласа. Иными словами, переменные  $q_k$  и  $Q_j$  можно трактовать двояко. Они могут представлять функции времени. В этом случае говорят, что  $p$  воздействует на  $q_k$  как дифференциальный оператор по времени. Эти переменные могут также представлять преобразования Лапласа.

Решение уравнения (3.5.2) в виде соотношения (3.2.2) будет:

$$q_n = \sum_j^j A_{nj}(p) Q_j. \quad (3.5.3)$$

Его опять можно рассматривать как соотношение между преобразованиями Лапласа. Однако, если  $q_n$  и  $Q_j$  — функции времени, то  $A_{nj}(p)$  можно считать оператором, действующим на функции  $Q_j$ . Сформулируем некоторые основные правила операционного исчисления

$$\left. \begin{aligned} pf(t) &= \frac{d}{dt} f(t); \\ \frac{1}{p} f(t) &= \int_0^t f(t') dt'; \\ \frac{1}{p+a} f(t) &= e^{-at} \int_0^t e^{at'} f(t') dt'. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.4)$$

Для того чтобы избежать неопределенности, будем считать, что функции  $f(t)$  в начальный момент равны нулю ( $f(0) = 0$ ). Однако они мгновенно принимают разрывные значения в момент  $t > 0$ , сколь угодно близкий к  $t = 0$ . Применение правил операционного исчисления в таких случаях (с учетом скачков, рассматриваемых как предельный случай непрерывных функций) очень удобно при использовании обобщенных функций. Эти операционные правила можно вывести из интегрального уравнения (3.4.8) [Л. 3-3]. Очевидно, что третье свойство соответствует частному решению дифференциального уравнения

$$(p+a)z = f(t) \quad (3.5.5)$$

с начальным условием  $z(0) = 0$ . Применим правила операционного исчисления к случаю, когда  $f(t)$  равна функции Хевисайда

$$f(t) = \eta(t). \quad (3.5.6)$$

Выражения (3.5.4) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} p\eta(t) &= \delta(t); \text{ (функция Дирака)} \\ \frac{1}{p} \eta(t) &= t; \\ \frac{1}{p+a} \eta(t) &= \frac{1}{a} (1 - e^{-at}). \end{aligned} \right\} \quad (3.5.7)$$



Заметим, что при использовании обобщенных функций операторы  $p$  и  $1/p$  коммутативны. Эти правила операционного исчисления можно также применить к оператору восприимчивости  $A_{kj}(p)$ , если только допустить, что сила  $Q_j(t)$  — известная функция времени. Уравнение (3.4.3) сводится к

$$q_k = A_{kj}(p) Q_j(t), \quad (3.5.8)$$

где  $A_{kj}(p)$  в данном случае воздействует на функцию  $Q_j(t)$ . Для объяснения этого оператора вернемся к представлению его с помощью простых дробей (3.2.11). Это разложение имеет вид:

$$A_{kj}(p) = \sum_s \frac{C_{kj}^{(s)}}{\lambda_s + p}. \quad (3.5.9)$$

Следовательно, используя третье правило операционного исчисления (3.5.4), перепишем уравнение (3.5.8) в виде

$$q_k = \sum_s C_{kj}^{(s)} e^{-\lambda_s t} \int_0^t e^{\lambda_s t'} Q_j(t') dt'. \quad (3.5.10)$$

Заметим, что слагаемые, для которых  $\lambda_s = 0$ , представлены оператором  $1/p$ , который является обычным интегрированием

$$\frac{1}{p} Q_j(t) = \int_0^t Q_j(t') dt'. \quad (3.5.11)$$

Рассмотрим еще один пример оператора полного теплового сопротивления. При разложении по простым дробям его значение по уравнению (3.3.13) имеет вид:

$$Z_{kj}(p) = \sum_s \frac{p}{p + r_s} D_{kj}^{(s)} + D_{kj} + D'_{kj} p. \quad (3.5.12)$$

Обобщенная координата  $q_j(t)$ , являющаяся заданной функцией времени, порождает тепловую силу

$$Q_k = Z_{kj}(p) q_j(t). \quad (3.5.13)$$

Применение правил операционного анализа приводит к выражению для  $Q_k$  в виде

$$Q_k = \sum_s D_{kj}^{(s)} e^{-r_s t} \int_0^t e^{r_s t'} \frac{dq_j(t')}{dt'} dt' + \\ + D_{kj} q_j(t) + D'_{kj} \frac{d}{dt} q_j(t), \quad (3.5.14)$$

### 3.6. ОПЕРАТОРНО-ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Вернемся к уравнениям (1.2.2) и (1.2.4), в которых заменим дифференцирование по времени оператором  $p$ . Тогда они примут вид:

$$c\theta = \operatorname{div} \mathbf{H}; \operatorname{grad} \theta + \frac{p}{k} \mathbf{H} = 0. \quad (3.6.1)$$

В этих уравнениях переменные  $\theta$  и  $\mathbf{H}$  представляют соответствующие преобразования Лапласа. В этом случае  $p$  — алгебраическая величина. Поэтому мы можем решить уравнения (3.6.1), используя преобразования Лапласа для пространственных граничных условий.

Очевидно, можно записать вариационный принцип (1.2.9) с помощью преобразования Лапласа. Отсюда

$$\delta V + p \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \mathbf{H} \delta \mathbf{H} d\tau = - \iint_A \theta \mathbf{n} \delta \mathbf{H} dA. \quad (3.6.2)$$

Как и ранее,

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} c \theta^2 d\tau; \delta V = \iint_{\tau} c \theta \delta \theta d\tau. \quad (3.6.3)$$

Если ввести квадратичную форму

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \mathbf{H}^2 d\tau \quad (3.6.4)$$

и положить

$$\delta Q = - \iint_A \theta \mathbf{n} \delta \mathbf{H} dA, \quad (3.6.5)$$

то можно записать вариационный принцип (3.6.2) в виде

$$\delta V + p \delta \mathcal{D} = \delta Q. \quad (3.6.6)$$

Это выражение является частным случаем операторно-вариационного принципа, разработанного автором в работах по линейной термодинамике [Л. 3-4, 3-5]. Результаты использования операционных принципов легко обобщить на случай анизотропной теплопроводности.

Операторно-вариационный принцип имеет очень широкий смысл. Он дает весьма компактную формулировку различных типов преобразований, и его можно объяснить тремя способами.

## 1. Операционный метод.

В этом случае используются обобщенные координаты, линейно связанные с полем  $\mathbf{H}$ . Аналогично уравнению (2.3.1) можно записать:

$$\mathbf{H} = \sum^i \mathbf{H}^{(i)}(x, y, z) q_i. \quad (3.6.7)$$

Вариационный принцип (3.6.6) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (V + p\mathcal{D}) = Q_i, \quad (3.6.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum^{ij} a_{ij} q_i q_j; \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \sum^{ij} b_{ij} q_i q_j; \\ Q_i &= - \iint_A \theta n \mathbf{H}^{(i)} dA. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.9)$$

В явном виде уравнения (3.6.8) запишутся

$$\sum^i (a_{ij} + p b_{ij}) q_j = Q_i. \quad (3.6.10)$$

При  $p = d/dt$  они являются дифференциальными уравнениями тепловой системы.

## 2. Алгебраический метод.

Как уже указывалось, в связи с интегральным уравнением (3.4.8) преобразование Лапласа, будучи функцией действительных положительных значений  $p$ , однозначно определяет соответствующую функцию времени. В области действия преобразования Лапласа можно решить задачу для каждого действительного положительного значения  $p$  с помощью вариационного принципа (3.6.6). Поскольку в данном случае  $p$  — действительная положительная величина, решение можно получить в численном виде. Оно может быть наполовину численным, а наполовину алгебраическим. Конечно, пространственные граничные условия должны удовлетворяться  $\delta Q$  при заданной функции от  $p$ . Таким образом, приближенное вариационное решение, определяемое как функция от  $p$ , выражается с помощью обратного преобразования в ви-

де функции времени. Это можно практически осуществить, используя аналитические представления для функции от  $p$ .

### 3. Метод свертки.

Хорошо известно, что произведение двух преобразований Лапласа представляет собой свертку соответствующих функций, как следует из уравнения (3.4.10). Следовательно, в вариационном принципе (3.6.2) можно положить:

$$\left. \begin{aligned} \theta \delta \theta &= \int_0^t \theta(t-t') \delta \theta(t') dt'; \\ \mathbf{H} p \delta \mathbf{H} &= \int_0^t \mathbf{H}(t-t') \delta \dot{\mathbf{H}}(t') dt'; \\ \theta \delta \mathbf{H} &= \int_0^t \theta(t-t') \delta \mathbf{H}(t') dt'. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.11)$$

Величины  $\theta$  и  $\mathbf{H}$  являются теперь как функциями времени, так и координат и связаны условием  $s\theta = -\text{div } \mathbf{H}$ . Подставив выражения (3.6.11) в уравнение (3.6.2), получим вариационный принцип для неизвестного поля  $\mathbf{H}$  в виде функции времени и координат. Применение метода свертки для получения операторно-вариационных принципов рассматривалось в работе Шапери [Л. 3-6] и Гуртина [Л. 3-7].

## 3.7. ПРИНЦИП ВЗАИМОВЛИЯНИЯ

Рассмотрим тепловую систему, которую можно разделить на некоторое число областей, имеющих общие границы. Каждая область представляет подсистему, которую можно рассматривать в отдельности. В частности, мы можем определить общее термосопротивление каждой подсистемы. Покажем, что в этом случае можно получить операторные или интегро-дифференциальные уравнения для всей системы с помощью вариационного принципа, который аналогичен принципу виртуальной работы в механике [Л. 3-8].

Обозначим число различных областей системы через  $s$  (рис. 3.1). Тепловые сопротивления подсистем, соответствующих этим областям, обозначим через  $Z_{ij}^{(s)}$ . Как и ранее, при рассмотрении полного теплового сопротивле-

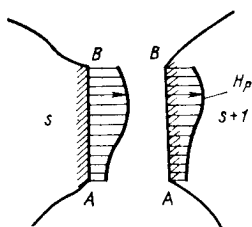
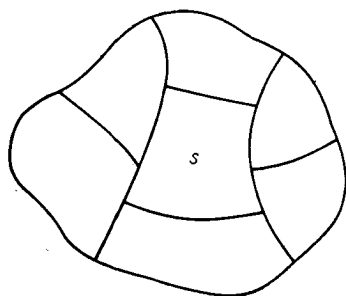


Рис. 3.1. Области системы и определение обобщенных координат на границе раздела  $AB$ .

ния необходимо определить соответствующие внешние координаты. В данном случае они определяются следующим образом.

Рассмотрим границу  $AB$ , общую для областей  $s$  и  $s+1$  (рис. 3.1). Выберем распределение теплового смещения с нормальной компонентой на границе раздела  $AB$ , выраженной  $H_p q_i$ , где  $H_p$  зависит только от координат границы раздела. Это является определением обобщенной координаты  $q_i$  для границы раздела  $AB$  и представляет общую внешнюю координату для двух смежных подсистем  $s$  и  $s+1$ .

В общем случае мы можем найти определенное число таких внешних координат для любой границы раздела между двумя смежными

областями. Для каждой области запишем уравнение

$$Q_i = \sum_{ij} Z_{ij}^{(s)} q_j, \quad (3.7.1)$$

где  $q_j$  — обобщенные координаты на границе этой области, а  $Q_i$  — соответствующие тепловые силы на этой границе. Поскольку  $Z_{ij}^{(s)} = Z_{ji}^{(s)}$ , из уравнения (3.7.1) получаем вариационное соотношение

$$\sum_i Q_i \delta q_i = \delta Z^{(s)}, \quad (3.7.2)$$

где

$$Z^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} Z_{ij}^{(s)} q_i q_j. \quad (3.7.3)$$

Суммирование распространяется на переменные, определенные для границ областей  $s$ .

Теперь просуммируем уравнения (3.7.2) для всех областей

$$\sum_i Q_i \delta q_i = \delta Z, \quad (3.7.4)$$

где

$$Z = \sum_s Z^{(s)}. \quad (3.7.5)$$

Этот результат можно объяснить с помощью  $Q_i \delta q_i$ . Суммирование  $\sum_i$  производится до переменных на границе всей системы и на границах раздела подсистем. Однако на границах подсистем слагаемые попарно группируются и взаимно сокращаются. Рассмотрим, например, координату  $q_i$  на границе раздела  $AB$ . Для области  $s$  соответствующая тепловая сила будет  $Q_i^{(s)}$ , а для области  $s+1$  —  $Q_i^{(s+1)}$ . Внешние нормальные векторы этих двух областей имеют противоположные направления, а температуры одинаковы. Отсюда

$$Q_i^{(s)} = -Q_i^{(s+1)} \quad (3.7.6)$$

и

$$(Q_i^{(s)} + Q_i^{(s+1)}) \delta q_i = 0. \quad (3.7.7)$$

Поэтому все силы на границах подобластей исчезают при суммировании в вариационном принципе (3.7.4). Легко показать, что из этого вариационного принципа получаются уравнения

$$\frac{\partial Z}{\partial q_i} = Q_i; \quad \frac{\partial Z}{\partial q_j} = 0. \quad (3.7.8)$$

В первой группе уравнений тепловые силы  $Q_i$  действуют на внешних границах всей системы, а  $q_i$  — обобщенные координаты на этих границах. Во второй подгруппе координаты  $q_j$  являются координатами на границах подсистем.

Из-за операторного характера  $Z$  уравнения (3.7.8) представляют собой систему интегро-дифференциальных уравнений для неизвестных  $q_i$  и  $q_j$ .

*Дополнительная форма принципа взаимовлияния.* Можно взять тепловые смещения на общих границах

подсистем с противоположными знаками. Тогда обобщенные силы на этих границах равны. Записывая уравнения (3.7.1) для каждой области  $s$  и разрешая их относительно  $q_i$

$$q_i = \sum_{ij} A_{ij}^{(s)} Q_j, \quad (3.7.9)$$

с помощью матрицы оператора  $[A_{ij}^{(s)}]$ , которая является обратной матрице  $[Z_{ij}^{(s)}]$ , имеем (3.7.9). Дополнительные квадратичные формы определяются следующими уравнениями:

$$A^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij}^{(s)} Q_i Q_j \quad (3.7.10)$$

и

$$A = \sum_s A^{(s)}. \quad (3.7.11)$$

Тогда следующий дополнительный вариационный принцип проверяется произвольной вариацией

$$\sum_i q_i \delta Q_i = \delta A, \quad (3.7.12)$$

которая следует из уравнения (3.7.9). Суммирование  $\sum_i q_i \delta Q_i$  содержит только переменные  $q_i$  на внешней границе всей системы. Переменные  $q_i$  на общих границах подсистем выпадают, поскольку они появляются попарно с обратными знаками. Из вариационного принципа (3.7.12) получаем операторные уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial Q_j} = q_j; \quad \frac{\partial A}{\partial Q_i} = 0. \quad (3.7.13)$$

В отличие от уравнений (3.7.8) в этих соотношениях температура на общих границах считается неизвестной, а  $q_j$  — переменные теплового смещения на границе всей системы. В общем случае они будут соответствовать интегро-дифференциальным уравнениям.

*Приложение вариационного принципа к методу конечных элементов.* Численный анализ нестационарного поля можно провести, разделив область на конечные элементы. Например, в двумерном поле элементы могут иметь вид треугольной сетки. Размеры элементов могут быть различными: от небольших в области больших гра-

диентов до значительных в областях с более равномерным распределением температуры. Выбор сетки зависит от необходимой точности и экономичности расчетов.

Затем вычисляются операторы  $Z_{ij}^{(s)}$  для типичной стандартной ячейки. Система уравнений для теплового смещения на общих границах получается из принципа взаимовлияния (3.7.4) или с помощью эквивалентного метода, где тепловые силы на этих границах приравняются друг другу при соответствующем изменении знака.

При использовании вариационного принципа в дополнительной форме вычисляются операторы по уравнению (3.7.9) и получаются уравнения (3.7.13) для неизвестных тепловых сил, которые можно определить с помощью температур в вершинах сетки.

## 3.8. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР РЕЛАКСАЦИИ

Применим операционный метод к задаче, которую мы уже рассматривали в § 2.7. Являясь иллюстративным примером, задача приводит к понятию непрерывного спектра релаксации.

Пластина толщиной  $l$  мгновенно нагревается до постоянной температуры  $\theta_0$  на границе  $x=0$  в момент  $t=0$ , а на границе  $x=l$  температура поддерживается постоянной, равной нулю. Тепловое смещение представим в виде

$$H = q_0 + \sum^n q_n \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad (3.8.1)$$

а соответствующую температуру

$$\theta = \frac{\pi}{cl} \sum^n n q_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.8.2)$$

Поскольку задача одномерна, вычислим  $V$  и  $\mathcal{D}$ , используя в качестве объема интегрирования цилиндр с образующей, параллельной оси  $x$ , с поперечным сечением, равным единице. Из уравнений (3.6.3) и (3.6.4) в данном случае имеем:

$$V = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{cl} \sum^n n^2 q_n^2; \quad \mathcal{D} = \frac{l}{2k} q_0^2 + \frac{1}{4} \frac{l}{k} \sum^n q_n^2. \quad (3.8.3)$$

Если  $\theta_0$  — температура при  $x=0$ , значения  $Q_0$  и  $Q_n$  будут:

$$Q_0 = Q_n = \theta_0. \quad (3.8.4)$$

Тогда операторные уравнения (3.6.8) примут вид:

$$(\lambda_n + p) q_n = \frac{2k}{l} \theta_0; \quad p q_0 = \frac{k}{l} \theta_0. \quad (3.8.5)$$

где

$$\lambda_n = \frac{k\pi^2 n^2}{cl^2}. \quad (3.8.6)$$

Решение в операторной форме уравнений (3.8.5) будет:

$$q_n = \frac{1}{p + \lambda_n} \frac{2k}{l} \theta_0; \quad [q_0 = \frac{k}{pl} \theta_0. \quad (3.8.7)$$



Правая часть уравнений представляет оператор, действующий на функцию  $\theta_0$ . В этом случае  $\theta_0$  — постоянная температура, мгновенно устанавливающаяся в момент  $t=0$ . Следовательно,  $\theta_0$  необходимо заменить на  $\theta_0\eta(t)$ . В соответствии с правилами операционного исчисления (3.5.7), уравнения (3.8.7) можно записать в виде

$$q_n = \frac{2k\theta_0}{l\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}); \quad q_0 = \frac{k}{l} \theta_0 t, \quad (3.8.8)$$

что совпадает с уравнениями (2.7.14).

Можно также выразить тепловую восприимчивость при  $x=0$ . Тогда тепловое смещение (3.8.1) принимает вид:

$$H = q_0 + \sum_n^n q_n. \quad (3.8.9)$$

Введем значения  $q_0$  и  $q_n$  из уравнения (3.8.7) и запишем:

$$H = A(p)\theta_0, \quad (3.8.10)$$

где

$$A(p) = \frac{k}{pl} + \sum_n^n \frac{2k}{l(p + \lambda_n)} \quad (3.8.11)$$

— восприимчивость на границе  $x=0$ . Это частный случай общего выражения (3.2.11) для тепловой восприимчивости. Следует отметить, что величина  $A$  из уравнения (3.2.11) может включать члены вида  $1/p$ , соответствующие нулевым значениям  $\lambda_n$ .

Рассматривая предельный случай пластины бесконечной толщины, можно прийти к понятию непрерывного спектра релаксации. В пределе сумма в уравнении (3.8.11) заменяется интегралом. Для того чтобы показать это, найдем приращение

$$\Delta V\bar{\lambda} = (\lambda_{n+1})^{1/2} - (\lambda_n)^{1/2} = \frac{\pi}{l} \left( \frac{k}{c} \right)^{1/2}. \quad (3.8.12)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{c}{k} \right)^{1/2} \Delta V\bar{\lambda}. \quad (3.8.13)$$

Для малых значений  $1/l$  приращение  $\Delta V\bar{\lambda}$  можно заменить дифференциалом

$$\Delta V\bar{\lambda} = \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (3.8.14)$$

В пределе суммирование в уравнении (3.8.11) можно заменить интегрированием

$$A(p) = \frac{(kc)^{1/2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{p + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.8.15)$$

Таким образом, тепловая восприимчивость выражается с помощью непрерывного спектра постоянных релаксаций  $\lambda$  с плотностью распределения  $1/\sqrt{\lambda}$

С помощью интегрирования уравнения (3.8.15) получим:

$$A(p) = \left( \frac{kc}{p} \right)^{1/2}, \quad (3.8.16)$$

которое представляет тепловую восприимчивость полупространства.

Следует отметить, что этот результат можно получить непосредственно из уравнения теплопроводности, записанного в операторной форме

$$k \frac{d^2\theta}{dx^2} = p c \theta. \quad (3.8.16a)$$

Решение этого уравнения (при граничных условиях при  $x=0$   $\theta=\theta_0$  и при  $x=\infty$   $\theta=0$ ) будет:

$$\theta = \theta_0 \exp \left\{ -x \left( \frac{cp}{k} \right)^{1/2} \right\}. \quad (3.8.16б)$$

Тепловое смещение при  $x=0$  равно:

$$H = -\frac{k}{p} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = \left( \frac{kc}{p} \right)^{1/2} \theta_0. \quad (3.8.16в)$$

Следовательно,  $H/\theta_0$  совпадает со значением  $A(p)$  из (3.8.16).

Следует отметить, что знак суммы в выражениях (3.2.11) и (3.3.13) для тепловой восприимчивости и полного теплового сопротивления можно заменить (частично или полностью) интегралом со спектральной плотностью распределения, если некоторые границы тепловой системы лежат в бесконечности. Мы можем также заметить сумму интегралом в приближенных вычислениях.

## Глава четвертая

# СОПРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ

## 4.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущем анализе тепловое поле описывалось с помощью векторов теплового смещения. Преимущество такой формулировки заключается в строгом выполнении закона сохранения энергии. В то же время она позволяет использовать принцип виртуальной работы, который дает общий подход, аналогичный методам классической механики. Однако описание векторного поля требует большего числа неизвестных, чем в скалярном представлении температурного поля. Это наиболее четко проявляется при решении двух- и трехмерных задач. Для того чтобы избежать трудностей, связанных с векторным опи-

санием, разработан метод, сочетающий в себе преимущества использования скалярного поля, при одновременном строгом выполнении закона сохранения энергии и возможности применения принципа виртуальной работы. Мы назвали этот метод методом сопряженных полей [Л. 4-1]. Он вытекает из существования циклических координат в том же смысле, что и в классической механике. Метод сопряженных полей имеет следующие преимущества:

1. При использовании этого метода без нарушения закона сохранения энергии значительно уменьшается число неизвестных в двух- и трехмерных задачах в результате разделения циклических координат и температурного поля.

2. Позволяет ввести координаты, которые содержат основные свойства физической системы (например, свойство взаимности). Поэтому координаты представляют частное решение задачи, что еще больше сокращает число неизвестных.

3. Процесс решения задачи двухступенчатый: сначала из принципа минимальной диссипации определяется сопряженное поле, а затем проводится интегрирование дифференциальных уравнений для неизвестных координат, описывающих температурное поле.

4. В стационарных задачах температура в одной части системы определяется независимо от температуры в другой. Они получаются непосредственно для любого распределения температуры на границе, причем не требуется повторных расчетов для каждой части.

Существование циклических координат, которые можно отделить от температурного поля, рассматривается в § 4.2. Даются определения сопряженного поля в виде векторного поля при заданной температуре. Как показано в § 4.3, сопряженное поле можно получить из температурного с помощью принципа минимальной диссипации. Существует другой способ нахождения сопряженного поля с помощью аналоговой модели. Показано, что эта модель также находится в соответствии с принципом минимальной диссипации. Связь между сопряженным полем и функцией Грина обсуждается в § 4.5.

Существование несвязанных циклических координат вытекает из свойства ортогональности нормальных координат, что обсуждается в § 4.6, где также вводится понятие циклического подпространства в виде бесконечно-

го множества нормальных координат, характеристические значения которых стремятся к нулю (случай бесконечного вырождения). Как уже указывалось, нахождение сопряженных полей для нормальных координат производится непосредственно. Обсуждается квазистационарное решение как простой метод представления температурного поля в виде ряда стационарных решений и суперпозиции релаксационных мод.

Частный случай использования сопряженных полей рассматривается в § 4.7.

## 4.2. ЦИКЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ И СОПРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ

Поле теплового смещения можно записать в виде

$$\mathbf{H} = \sum^i \Theta_i q_i + \sum^l \mathbf{F}_l f_l, \quad (4.2.1)$$

где

$$\Theta_i = \Theta_i(x, y, z); \quad \mathbf{F}_l = \mathbf{F}_l(x, y, z) \quad (4.2.2)$$

— заданные векторные поля. Последнее поле считается бездивергентным, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_l = 0. \quad (4.2.3)$$

Обобщенные координаты таким образом делятся на две группы. Система описывается  $v$  координатами  $q_i$  и  $k$  координатами  $f_l$ . Вместе они составляют  $n = v + k$  координат, которые полностью определяют поведение термодинамической тепловой системы. Температурное поле  $\theta$  получается из  $\mathbf{H}$  с помощью соотношения

$$\theta = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{H}. \quad (4.2.4)$$

Подставив в это уравнение значение  $\mathbf{H}$  из (4.2.1) и учитывая условие (4.2.3), получим:

$$\theta = \sum^i \theta_i q_i, \quad (4.2.5)$$

где

$$\theta_i = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \Theta_i. \quad (4.2.6)$$

В этих выражениях теплоемкость  $c(x, y, z)$  может быть функцией координат. При таких условиях тепло-

вой потенциал зависит только от координат  $q_i$  и выражается квадратичной формой

$$V = \frac{1}{2} \sum^{ij} a_{ij} q_i q_j. \quad (4.2.7)$$

При суммировании  $i$  и  $j$  принимают значения от 1 до  $\nu$ .

С другой стороны, диссипативная функция будет содержать все  $\nu+k$  координат  $q_i$  и  $f_l$ . Запишем:

$$D = \frac{1}{2} \sum^{ij} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum^{ii} b'_{ii} \dot{q}_i \dot{f}_i + \frac{1}{2} \sum^{lm} b''_{lm} \dot{f}_l \dot{f}_m. \quad (4.2.8)$$

Здесь  $i$  и  $j$  принимают все значения от 1 до  $\nu$ , а  $l$  и  $m$  — от 1 до  $k$ . Квадратичная форма  $D$  является положительно определенной. Она получается путем применения выражений (1.5.18) и (2.2.12) для изотропной или анизотропной теплопроводности. Здесь принимается, что теплопроводность  $k(x, y, z)$  или  $k_{ij}(x, y, z)$  может зависеть от координат и не зависеть от времени.

Из  $V$  и  $D$  получаем дифференциальные уравнения, описывающие поведение системы во времени:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{f}_l} = Q_l. \quad (4.2.9)$$

В этих уравнениях  $Q_i$  и  $Q_l$  — тепловые силы, соответствующие координатам  $q_i$  и  $f_l$ . Подставив выражения (4.2.7) и (4.2.8) в уравнения (4.2.9), получим в явном виде

$$\left. \begin{aligned} \sum^i a_{ij} q_j + \sum^i b_{ij} \dot{q}_j + \sum^i b'_{ii} \dot{f}_i &= Q_i; \\ \sum^i b'_{ii} \dot{q}_i + \sum^m b''_{lm} \dot{f}_m &= Q_l. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.10)$$

В этой системе  $k$  координат  $f_l$  не входят в выражение для теплового потенциала. Такая система обладает  $k$  циклическими координатами.

Эта терминология вводится автором в его работе по диссипативным явлениям [Л. 4-2]. Она аналогична терминологии, используемой в классической термодинамике, и относится к случаю системы с  $(\nu+k)$  степенями

свободы, когда потенциальная энергия содержит только  $\nu$  координат. Динамические уравнения можно свести к  $\nu$  уравнениям с  $\nu$  неизвестными, а остальные  $k$  координат обозначить как циклические. Этот метод применим также к термодинамической системе, описываемой уравнением (4.2.10). Покажем, что эти уравнения можно свести к системе, где переменные  $q_i$  и новые переменные  $f'_l$  не связаны.

Пусть система определяется теми же  $\nu$  координатами  $q_i$ , а также новым набором  $k$  координат  $f'_l$ . С помощью этих новых переменных старые координаты запишутся в виде

$$\dot{f}_l = \dot{f}'_l + \sum^j \alpha_{lj} \dot{q}_j, \quad (4.2.11)$$

где  $\alpha_{lj}$  — ( $k \times \nu$ ) коэффициентов, подлежащих определению. Подставив значения  $\dot{f}_l$  из (4.2.11) в диссипативную функцию (4.2.8), получим:

$$D = \frac{1}{2} \sum^{ij} \mathcal{B}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum^{il} \mathcal{B}'_{il} \dot{q}_i \dot{f}'_l + \frac{1}{2} \sum^{lm} b''_{lm} \dot{f}'_l \dot{f}'_m. \quad (4.2.12)$$

Новые коэффициенты будут:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B}_{ij} &= b_{ij} + \sum^l (b'_{il} \alpha_{lj} + b'_{jl} \alpha_{li}) + \sum^{lm} b''_{lm} \alpha_{li} \alpha_{mj}; \\ \mathcal{B}'_{il} &= b'_{il} + \sum^m b''_{lm} \alpha_{mi}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.13)$$

Переменные  $q_i$  и  $f'_l$  не связаны, если

$$\mathcal{B}'_{il} = b'_{il} + \sum^m b''_{lm} \alpha_{mi} = 0. \quad (4.2.14)$$

Для каждого значения  $i$  эти соотношения представляют систему  $k$  уравнений для неизвестных  $\alpha_{mi}$ . Поскольку  $D$  — положительно определенная величина, частная квадратичная форма  $\sum^{lm} b''_{lm} \dot{f}'_l \dot{f}'_m$  в выражении (4.2.8) также положительно определена. Следовательно, детерминант из коэффициентов  $b''_{lm}$  не равен нулю.

В этом случае уравнения (4.2.14) имеют единственное решение для  $a_{mi}$ . Несвязанные уравнения запишутся в виде

$$\sum^i a_{ij} \dot{q}_j + \sum^j \mathcal{B}_{ij} \dot{q}_j = Q'_i; \quad \sum^m b'_{lm} \dot{f}'_m = Q'_l. \quad (4.2.15)$$

Итак, мы получили систему двух независимых наборов дифференциальных уравнений: один относительно группы  $v$  переменных  $q_i$ , другой для группы  $k$  переменных  $f'_l$ . Переменные  $f'_l$  являются циклическими координатами.

Новые силы  $Q'_i$  и  $Q'_l$  определяются из принципа виртуальной работы следующим образом:

$$\sum^i Q'_i \delta q_i + \sum^l Q'_l \delta f'_l = \sum^i Q_i \delta q_i + \sum^l Q_l \delta f_l. \quad (4.2.16)$$

Подставив вместо  $\delta f_l$  их значения из уравнения (4.2.11) и приравняв коэффициенты  $\delta q_i$  и  $\delta f'_l$  в обеих частях уравнения (4.2.16), получим:

$$Q'_i = Q_i + \sum^l Q_l \alpha_{li}; \quad Q'_l = Q_l. \quad (4.2.17)$$

Важность полученных результатов будет видна из дальнейшего.

Предположим, мы вычислили коэффициенты  $\alpha_{li}$  из уравнения (4.2.14). Подставив значения  $f_l$  из (4.2.11) в выражение (4.2.1) для поля теплового смещения, получим:

$$H = \sum^i \Theta'_i q_i + \sum^l F_l f'_l, \quad (4.2.18)$$

где

$$\Theta'_i = \Theta_i + \sum^l F_l \alpha_{li}. \quad (4.2.19)$$

Если мы интересуемся только температурой, то можем опустить члены, содержащие циклические координаты  $f'_l$ . В этом случае исходим из температуры

$$\theta = \sum^i \theta_i q_i \quad (4.2.20)$$

и сопряженного теплового смещения

$$H' = \sum^i \Theta'_i q_i. \quad (4.2.21)$$

Компоненты векторных полей  $\Theta'_i$  можно также называть сопряженными с соответствующими скалярными полями  $\theta_i$ . Заметим, что удовлетворяется следующее соотношение:

$$\theta_i = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \Theta'_i. \quad (4.2.22)$$

Если опустить члены, содержащие циклические координаты, диссипативная функция (4.2.12) будет:

$$D' = \frac{1}{2} \sum^{ij} \mathcal{B}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4.2.23)$$

Отсюда получаем уравнение Лагранжа для координат  $q_i$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D'}{\partial \dot{q}_i} = Q'_i, \quad (4.2.24)$$

которое содержит только  $\nu$  неизвестных  $q_i$ .

Можно показать, что температуру можно получить независимо из выражения теплового потока, если исходить из суперпозиции фиксированной температурной конфигурации  $\theta_i$ , определяемой выражением (4.2.20), вычисляя для каждого поля  $\theta_i$  сопряженное векторное поле  $\Theta'_i$ .

### 4.3. ПРИНЦИП МИНИМАЛЬНОЙ ДИССИПАЦИИ ДЛЯ СОПРЯЖЕННЫХ ПОЛЕЙ

Покажем, что для данного температурного поля  $\theta_i$  сопряженное поле  $\Theta'_i$  можно вычислить с помощью принципа минимальной диссипации.

Будем считать, что все нециклические координаты, кроме  $q_i$ , равны нулю.

Поле теплового смещения (4.2.1) представляется в виде

$$\mathbf{H} = \Theta_i q_i + \sum^l \mathbf{F}_i f_i. \quad (4.3.1)$$

Выберем  $k$  координат  $f_l$ , пропорциональных  $q_i$ , и запишем

$$f_l = \beta_{li} q_i. \quad (4.3.2)$$



Пока еще не определены  $k$  коэффициентов  $\beta_{li}$ . Тепловое смещение (4.3.1) принимает вид:

$$\mathbf{H} = \left( \Theta_i + \sum^l \mathbf{F}_l \beta_{li} \right) q_i. \quad (4.3.3)$$

Производная по времени от  $\mathbf{H}$  будет:

$$\dot{\mathbf{H}} = \left( \dot{\Theta}_i + \sum^l \mathbf{F}_l \dot{\beta}_{li} \right) \dot{q}_i. \quad (4.3.4)$$

Следовательно, диссипативная функция при вариации только  $q_i$  будет:

$$D = \left( \frac{1}{2} b_{ii} + \sum^l b'_{il} \beta_{li} + \frac{1}{2} \sum^{lm} b''_{lm} \beta_{li} \beta_{mi} \right) \dot{q}_i^2. \quad (4.3.5)$$

Она получается подстановкой  $\dot{j}_l = \beta_{li} \dot{q}_i$  в уравнение (4.2.8).

Теперь выберем коэффициенты  $\beta_{li}$  таким образом, чтобы диссипация  $D$  была минимальной. Для этого необходимо, чтобы удовлетворялось следующее уравнение:

$$\frac{\partial D}{\partial \beta_{li}} = 0, \quad (4.3.6)$$

тогда

$$b'_{il} + \sum^m b''_{lm} \beta_{mi} = 0. \quad (4.3.7)$$

Но эти соотношения полностью аналогичны уравнениям (4.2.14) для определения коэффициентов  $\alpha_{mi}$ . Следовательно,

$$\beta_{li} = \alpha_{li}. \quad (4.3.8)$$

Поэтому, выбирая коэффициенты  $\beta_{li}$  таким образом, чтобы диссипативная функция была минимальной, получим выражение в скобках в уравнении (4.3.4), определяющее сопряженное поле (4.2.19):

$$\Theta'_i = \Theta_i + \sum^l \mathbf{F}_l \alpha_{li}. \quad (4.3.9)$$

*Аналоговая модель для сопряженного поля.* Эти результаты можно выразить в несколько ином виде. Будем исходить из заданного температурного поля

$$\theta = \theta_i q_i \quad (4.3.10)$$

и поля теплового смещения

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_i q_i. \quad (4.3.11)$$

Поле  $\mathbf{H}_i$  не определяется  $\theta_i$ . Однако оно удовлетворяет условию

$$c\theta_i = -\operatorname{div} \mathbf{H}_i. \quad (4.3.12)$$

Это условие можно записать в виде

$$\omega = \operatorname{div} \dot{\mathbf{H}}, \quad (4.3.13)$$

где

$$\omega = -c\dot{\theta} = -c\theta_i \dot{q}_i. \quad (4.3.14)$$

Уравнение (4.3.13) является такой аналоговой моделью, где плотность теплового потока  $\dot{\mathbf{H}}$  равна плотности теплового потока, обусловленного распределенными источниками тепла с мощностью тепловыделения  $\omega$  в единице объема. Можно также сказать, что тепловой поток имеет место в результате тепловых стоков с мощностью  $c\dot{\theta} = -\omega$ . Если  $\dot{q}_i = 1$ , можно записать:

$$\omega = -c\theta_i = \operatorname{div} \mathbf{H}_i; \quad \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_i. \quad (4.3.15)$$

При этих условиях  $\mathbf{H}_i$  является плотностью теплового потока, обусловленного наличием стоков  $c\theta_i = -\omega$ . Наложив дополнительное условие минимальной диссипативной функции при  $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_i$ , получим сопряженное поле  $\mathbf{H}_i$  в виде

$$\mathbf{H}_i = \boldsymbol{\Theta}'_i. \quad (4.3.16)$$

В следующем параграфе получим тот же результат, применив другой метод, и покажем, что условие минимума эквивалентно уравнениям для теплового потока в стационарном состоянии со стоками  $c\theta_i$  при граничном условии, когда адиабатическая внешняя температура  $\theta_a = 0$ .

#### 4.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА СОПРЯЖЕННЫХ ПОЛЕЙ

Характер и свойства сопряженных полей станут еще яснее при использовании несколько иного подхода.

Для простоты рассмотрим систему с изотропной теплопроводностью  $k(x, y, z)$ . Теплоемкость  $c(x, y, z)$  также является функцией координат.

На границе  $A$  объема  $\tau$  задается линейный теплоперенос, характеризующийся коэффициентом  $K(x, y, z)$ , который может зависеть от координат.

Рассмотрим скалярное поле

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z) \quad (4.4.1)$$

как функцию  $v$  обобщенных координат  $q_i$ . Наряду с ним рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(f_1, f_2, \dots, f_k, x, y, z), \quad (4.4.2)$$

которое зависит от  $k$  обобщенных координат  $f_l$ . Наложим условие бездивергентности этого поля, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0. \quad (4.4.3)$$

Запишем поле теплового смещения в виде

$$\mathbf{H} = -k \operatorname{grad} \psi + \mathbf{F}. \quad (4.4.4)$$

В этом выражении неизвестное поле  $\mathbf{H}$  представлено как функция  $v+k$  координат  $q_i$  и  $f_l$ . Температура  $\theta$  связана с векторным полем соотношением

$$c\theta = -\operatorname{div} \mathbf{H}. \quad (4.4.5)$$

Подставив в это соотношение значение  $\mathbf{H}$  из (4.4.4), получим:

$$c\theta = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \psi). \quad (4.4.6)$$

Следовательно, температурное поле зависит только от  $q_i$ . Покажем, что можно выбрать  $\psi$  таким образом, чтобы поля  $\psi$  и  $\mathbf{F}$  в дифференциальных уравнениях для обобщенных координат стали несвязанными.

Дифференциальные уравнения для  $q_i$  и  $f_l$  запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{f}_l} = Q_l. \quad (4.4.7)$$

Поскольку  $\theta$  зависит только от  $q_i$ , координаты  $f_l$  не входят в тепловой потенциал. Кроме того, в обобщенные тепловые силы  $Q_i$  входят только  $q_i$ . Следовательно, в уравнениях (4.4.7) связь осуществляется только с помощью диссипативной функции, которая вычисляется с помощью выражения (2.2.13), куда входит и диссипация на границе. Ее можно представить в виде суммы трех членов

$$D = D_q + D_{qf} + D_f. \quad (4.4.8)$$

Слагаемое  $D_q$  зависит от  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ , тогда как  $D_f$  зависит от  $f_l$  и  $\dot{f}_l$ . Таким образом, связь осуществляется толь-

ко через слагаемое

$$D_{qf} = - \iiint_{\tau} \dot{\mathbf{F}} \operatorname{grad} \psi \, d\tau - \iint_A \frac{k}{K} \dot{F}_n \operatorname{grad}_n \psi \, dA, \quad (4.4.9)$$

где  $\dot{F}_n$  и  $\operatorname{grad}_n \psi$  обозначают нормальные компоненты векторов на границе и проектируются на внешнюю нормаль.

Интегрируя по частям объемный интеграл в выражении (4.4.9) с учетом свойства  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ , преобразуем его в поверхностный интеграл

$$D_{qf} = - \iint_A \dot{F}_n \left( \psi + \frac{k}{K} \operatorname{grad}_n \psi \right) dA.$$

Это выражение стремится к нулю, если на границе удовлетворяется следующее условие:

$$K\psi + k \operatorname{grad}_n \psi = 0. \quad (4.4.10)$$

Поэтому поля  $\psi$  и  $\mathbf{F}$  не связаны, если  $\psi$  удовлетворяет граничному условию (4.4.10).

Этот результат можно объяснить следующим образом. Температурное поле

$$\theta = \theta(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z) \quad (4.4.11)$$

принимается неизвестным. Для любого заданного значения  $\theta$  мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение в частных производных (4.4.6) при граничном условии (4.4.10). Для каждого поля  $\theta$  оно однозначно определяет функцию  $\psi$  и векторное поле

$$\Theta' = -k \operatorname{grad} \psi, \quad (4.4.12)$$

являющееся тепловым смещением, сопряженным с температурным полем (4.4.11).

*Аналоговая модель для сопряженных полей.* Полученные результаты позволяют дать более точную формулировку аналоговой модели, рассмотренной в предыдущем параграфе. Рассмотрим температурное поле  $\theta(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z)$  для заданных значений  $q_i$ . Оно зависит только от  $x, y, z$ . Распределим по объему тепловые стоки, характеризующиеся скоростью поглощения тепла в единице объема

$$-\omega = c\theta. \quad (4.4.13)$$

Налагаем условие, что тепловой поток поступает из внешней области с нулевой адиабатической температурой  $\theta_a=0$ . Стационарное распределение температуры при наличии стоков обозначим через  $\psi$ . Оно получается из решения уравнения

$$-\omega = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \psi) \quad (4.4.14)$$

с граничным условием

$$K\psi + k \operatorname{grad}_n \psi = 0. \quad (4.4.15)$$

Значение полученной таким образом температуры совпадает со значениями  $\psi$ , найденными из уравнений (4.4.6) и (4.4.10). Следовательно, температурное поле, сопряженное с  $\theta$ , будет:

$$\Theta' = -k \operatorname{grad} \psi. \quad (4.4.16)$$

Этот вектор представляет плотность теплового потока в аналоговой модели с тепловыми стоками.

Если мы представим температуру в виде суперпозиции полей

$$\theta = \sum_i \theta_i q_i, \quad (4.4.17)$$

где  $\theta_i(x, y, z)$  — заданные скалярные распределения, то соответствующее тепловое смещение будет:

$$\mathbf{H} = \sum_i \Theta'_i q_i. \quad (4.4.18)$$

Всякое сопряженное поле  $\Theta'_i$  получаем из  $\theta_i$  с помощью аналоговой модели. Оно определяется плотностью теплового потока при наличии постоянных стоков тепла  $-\omega_i = c\theta_i$  и заданной нулевой адиабатической температуры на границе. Заметим, что, если на границе отсутствует пограничный слой ( $K=\infty$ ), адиабатическая температура равна поверхностной температуре твердого тела. В этом случае в аналоговой модели поддерживается постоянная нулевая температура, равная поверхностной температуре твердого тела.

*Вывод сопряженного поля с помощью принципа минимальной диссипации.* Необходимо рассчитать температуру  $\psi$  аналоговой модели. Плотность теплового потока  $\Theta'$  при наличии стоков тепла получается с помощью принципа минимальной диссипации, сформулированного

в предыдущем параграфе. Другой вывод этого принципа, приведенный ниже, показывает эквивалентность двух аналоговых моделей, описанных в этом и предыдущем параграфах. Рассмотрим диссипацию при плотности теплового потока  $\Theta'$ . Запишем:

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \Theta'^2 d\tau + \frac{1}{2} \iint_A \frac{1}{K} \Theta_n^2 dA. \quad (4.4.19)$$

Поскольку  $D$  представляет собой стационарный поток, возникающий при наличии стоков тепла  $-\omega$ , векторное поле  $\Theta'$  должно удовлетворять условию

$$\omega = \text{div } \Theta'. \quad (4.4.20)$$

Минимальное  $D$  при варьировании  $\Theta$  и ограничении (4.4.20) находим с помощью минимизации функционала

$$D = \iiint_{\tau} \left[ \frac{1}{2k} \Theta'^2 - \Lambda (\text{div } \Theta' - \omega) \right] d\tau + \frac{1}{2} \iint_A \frac{1}{K} \Theta_n^2 dA, \quad (4.4.21)$$

где  $\Lambda$  — множитель Лагранжа. Отсюда получаем уравнения Эйлера

$$\frac{1}{k} \Theta' + \text{grad } \Lambda = 0 \quad (4.4.22)$$

и граничное условие

$$\frac{1}{K} \Theta'_n - \Lambda = 0. \quad (4.4.23)$$

С учетом соотношения (4.4.20) получим уравнение

$$-\omega = \text{div} (k \text{ grad } \Lambda), \quad (4.4.24)$$

которое должно удовлетворять граничному условию

$$K\Lambda + k \text{ grad}_n \Lambda = 0. \quad (4.4.25)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (4.4.14) и (4.4.15), находим, что

$$\Lambda = \psi. \quad (4.4.26)$$

Из уравнения (4.4.22) следует, что

$$\Theta' = -k \text{ grad } \psi. \quad (4.4.27)$$

Следовательно, поле  $\Theta'$ , полученное с помощью минимизации функционала (4.4.19), совпадает с сопряженным полем, найденным из уравнения (4.4.12).

*Дальнейшее обобщение.* Выше мы считали, что выражения (4.4.1) и (4.4.11) для  $\theta$  и  $\psi$  не содержат времени в явном виде. Однако такое допущение необязательно. Рассмотрим температурное поле  $\theta = \theta(q_1, q_2, \dots, q_\nu, x, y, z, t)$ , которое содержит время в явном виде. Сопряженное поле при этом можно получить следующим образом. При заданном  $t$  и  $q_i$  распределим стоки тепла  $-\omega = c\theta$  по объему, принимая адиабатическую температуру на границе равной нулю. При этих условиях из стационарной температуры  $\psi$  получим сопряженное поле  $\Theta'(q_1, q_2, \dots, q_\nu, x, y, z, t) = -k \text{ grad } \psi$ .

Результаты этого параграфа получены для случая изотропной теплопроводности. Они легко обобщаются на случай анизотропной теплопроводности. Метод определения сопряженного поля с помощью аналоговой модели с распределенными стоками тепла из принципа минимальной диссипации применим и для анизотропной теплопроводности.

## 4.5. СВЯЗЬ С ФУНКЦИЕЙ ГРИНА

Рассмотрим температурное поле, записав его в виде

$$\theta(x) = \theta(q_1, q_2, \dots, q_\nu, x, y, z).$$

Для заданных значений  $q_i$  оно является функцией  $x, y, z$ . Введем обозначение  $\theta(x)$ , где  $x$  — сокращенная запись трех координат  $x, y, z$ . Векторное поле, сопряженное с  $\theta(x)$ , можно выразить с помощью функции Грина. Не нарушая общности, рассмотрим систему с изотропной теплопроводностью. Введем следующее допущение для функции Дирака в сокращенной форме

$$\delta(x, x') = \delta(x - x', y - y', z - z'), \quad (4.5.1)$$

где координаты  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  обозначены соответственно через  $x$  и  $x'$ . Определим функцию Грина, потребовав, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\text{div}(k \text{ grad } g) = c(x') \delta(x, x') \quad (4.5.2)$$

с граничным условием

$$Kg + k \text{ grad}_n g = 0. \quad (4.5.3)$$

В этих выражениях  $c(x') = c(x', y', z')$  обозначает теплоемкость, а операции  $\text{div}$  и  $\text{grad}$  производятся по переменным  $x, y, z$ .

Известное свойство функции Дирака выражается соотношением

$$c(x)\theta(x) = \int \int \int c(x') \theta(x') \delta(x, x') dx', \quad (4.5.4)$$

где  $dx'$  обозначает  $dx', dy', dz'$ . Следовательно, уравнение (4.4.6) можно переписать в виде

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \psi) = \iiint_V c(x') \theta(x') \delta(x, x') dx'. \quad (4.5.5)$$

Поскольку  $g$  удовлетворяет соотношению (4.5.2), решение уравнения (4.5.5) получается в виде

$$\psi = \iiint_V g(x, x') \theta(x') dx'. \quad (4.5.6)$$

Условие (4.5.3) для  $g$  означает, что функция  $\psi$  удовлетворяет граничному условию (4.4.10). Поэтому выражение  $\psi$  для поля, сопряженного с  $\theta(x)$ , в данном случае принимает вид:

$$\Theta'(x) = -k \iiint_V (\operatorname{grad} g) \theta(x') dx'. \quad (4.5.7)$$

Если представить температурное поле как

$$\theta(x) = \sum_i \theta_i(x) q_i, \quad (4.5.8)$$

то соответствующее тепловое смещение будет:

$$H(x) = \sum_i \Theta'_i(x) q_i. \quad (4.5.9)$$

Для каждой конфигурации температуры  $\theta_i(x)$  имеется сопряженное векторное поле  $\Theta'_i(x)$ . Каждое сопряженное поле получается из  $\theta_i(x)$  с помощью функции Грина по уравнению (4.5.7). Запишем:

$$\Theta'_i(x) = -k \iiint_V (\operatorname{grad} g) \theta_i(x') dx'. \quad (4.5.10)$$

Функция Грина применима также, когда  $\theta(x)$  содержит время  $t$  в явном виде. В этом случае  $\theta$  представляется в форме

$$\theta(x) = \theta(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (4.5.11)$$

Сопряженное поле получается подстановкой в уравнение (4.5.7) функции  $\theta(x)$  из уравнения (4.5.11).

*Стационарные решения.* Вывод сопряженных полей с помощью функции Грина позволяет проследить связь метода, описанного в данной работе, с некоторыми классическими результатами теории дифференциальных уравнений в частных производных.



При не зависящей от времени адиабатической температуре  $\theta_a$  на границе, т. е. при постоянных тепловых силах, система находится в стационарном состоянии, которое достигается спустя некоторое время и характеризуется температурным полем. Это стационарное решение легко получается при использовании сопряженных полей.

Представим температурное поле в виде линейной суперпозиции полей из уравнения (4.5.8) при соответствующем сопряженном поле (4.5.9). Поскольку мы используем сопряженные поля, необходимо, чтобы  $q_i$  было постоянным. Следовательно,  $\dot{q}_i = 0$  и диссипативная функция не рассматривается. Положив  $D = 0$ , получим уравнения Лагранжа для стационарного состояния в виде

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i. \quad (4.5.12)$$

Используя значение  $\theta$  из (4.5.8), выразим тепловой потенциал в виде:

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} c \theta^2 dx = \frac{1}{2} \sum^{ij} a_{ij} q_i q_j, \quad (4.5.13)$$

где

$$a_{ij} = \iiint_{\tau} c(x) \theta_i(x) \theta_j(x) dx. \quad (4.5.14)$$

Из уравнения (2.3.12) тепловые силы будут:

$$Q_i = - \iint_A \theta_a \Theta'_i \mathbf{n} dA, \quad (4.5.15)$$

где интегрирование производится по границе  $A$  объема  $\tau$ .

Теперь рассмотрим частный случай обобщенных координат, разделив объем  $\tau$  на небольшие ячейки объемом  $\tau_i$ . Положение каждой ячейки характеризуется координатой  $x_i$ . Рассмотрим ячейку  $\tau_i$ .

Определим функцию переменной  $x$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_i(x) &= 1 \text{ внутри ячейки;} \\ \theta_i(x) &= 0 \text{ вне ячейки.} \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Тогда мы можем записать температурное поле в виде

$$\theta(x) = \sum_i \theta_i(x) \theta(x_i), \quad (4.5.17)$$

где  $\theta(x_i)$  — локальная температура в точке  $x_i$ . Сравнив это уравнение с выражением (4.5.8), увидим, что локальная температура играет роль обобщенных координат

$$\theta(x_i) = q_i. \quad (4.5.18)$$

Подставив значения  $\theta_i$  из (4.5.16) в уравнение (4.5.10), получим следующие сопряженные поля:

$$\Theta'_i(x) = -k \{ \text{grad } g(x, x_i) \} \tau_i. \quad (4.5.19)$$

Вычислив  $a_{ij}$  из уравнения (4.5.14), найдем тепловой потенциал

$$V = \frac{1}{2} \sum_i c(x_i) \tau_i q_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i c(x_i) \theta^2(x_i) \tau_i. \quad (4.5.20)$$

Тепловая сила (4.5.15) равна:

$$Q_i = \tau_i \iint_A k \theta_{a\mathbf{n}} \{ \text{grad } g(x, x_i) \} dA. \quad (4.5.21)$$

Используя значения  $V$  и  $Q_i$  из (4.5.20) и (4.5.21), получим уравнения Лагранжа (4.5.12) в виде

$$c(x_i) \theta(x_i) = \iint_A k \theta_{a\mathbf{n}} \{ \text{grad } g(x, x_i) \} dA. \quad (4.5.22)$$

Следовательно, температурное поле  $\theta(x_i)$  можно определить непосредственно с помощью адиабатической температуры  $\theta_a$  на границе, используя функцию Грина  $g(x, x_i)$ . Уравнение (4.5.22) является классическим выражением функции Грина.

Для того чтобы определить локальную стационарную температуру, не требуется находить функции Грина. Это следует из уравнения (4.5.12), если подставить в него  $Q_i$  и  $V$  из (4.5.15) и (4.5.20):

$$c(x_i) \theta(x_i) = - \iint_A \theta_a \Theta'_i \mathbf{n} dA. \quad (4.5.23)$$

В этом выражении локальная температура  $\theta(x_i)$  ячейки  $\tau_i$  получается простой квадратурой из известного

сопряженного поля  $\Theta'_i$ . Это поле можно найти, минимизируя диссипацию в результате действия тепловых стоков  $c(x_i)\theta_i(x)$ . По определению  $\theta_i(x)$  из (4.5.16) это соответствует равномерному распределению стоков  $c(x_i)$  в ячейке  $\tau_i$ .

#### 4.6. СОПРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

В гл. 2 обсуждалось представление теплового потока с помощью нормальных координат. По уравнению (2.5.17) тепловой потенциал и диссипативная функция выражаются в обобщенных координатах  $\xi_s$  следующим образом:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^s \lambda_s \xi_s^2; \quad D = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^s \xi_s^2. \quad (4.6.1)$$

Полное описание тепловой системы включает бездивергентные поля смещения. Эти поля не влияют на температуру, и поэтому в тепловой потенциал не входят соответствующие им координаты. Этим полям соответствуют нормальные координаты с нулевыми характеристическими значениями  $\lambda_s$ .

Предположим, что  $\nu$  значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$  не равны нулю, а  $k$  остальных значений равны нулю. Тогда

$$\lambda_s = 0, \quad (4.6.2)$$

если  $s = \nu + 1, \nu + 2, \dots, \nu + k$ . Выражения (4.6.1) принимают вид:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\nu} \lambda_s \xi_s^2; \quad D = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\nu} \xi_s^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=\nu+1}^{\nu+k} \xi_s^2. \quad (4.6.3)$$

Циклическими координатами в этом случае являются величины  $\xi_{\nu+1}, \xi_{\nu+2}, \dots, \xi_{\nu+k}$ . В выражениях (4.6.3) они уже не связаны с нециклическими координатами  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$  и друг с другом.

Как указывалось в § 4.2, существование циклических координат непосредственно вытекает из выражений

(4.6.3). Это можно показать следующим образом. Введем линейное преобразование

$$\xi_s = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_{si} q_i, \quad (4.6.4)$$

где  $s=1, 2, \dots, \nu$ . Аналогично

$$\xi_s = \sum_{l=1}^k \gamma_{sl} f'_l, \quad (4.6.5)$$

где  $s=\nu+1, \nu+2, \dots, \nu+k$ . Подставив значения  $\xi_s$  из (4.6.4) и (4.6.5) в выражения (4.5.3), получим  $V$  и  $D$  в виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} q_i q_j, \\ D = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{B}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{lm} b''_{lm} \dot{f}'_l \dot{f}'_m, \quad (4.6.6)$$

где  $i$  и  $j$  принимают значения от 1 до  $\nu$ , а  $l$  и  $m$  — от 1 до  $k$ . Переменные  $f'_l$  не входят в выражения для  $V$ . Они являются циклическими координатами. Кроме того, все связывающие члены, содержащие в себе  $q_i$  и  $f'_l$ , равны нулю, что совпадает с результатами § 4.2.

*Бесконечное вырождение. Циклическое подпространство.* Предыдущие рассуждения показывают, что возможность разделения циклических и нециклических координат вытекает из свойств нормальных координат. Циклические координаты можно рассматривать как линейную комбинацию релаксационных мод вырождения с нулевыми характеристическими корнями  $\lambda_s$ . Вследствие свойств ортогональности эта линейная комбинация не содержит релаксационных мод, соответствующих нециклическим координатам, для которых корни  $\lambda_s$  не равны нулю.

Уравнения для циклических координат не связаны, и их можно получить из выражения (4.6.6) для  $D$  в виде

$$\sum_{m} b''_{lm} \dot{f}'_m = F_l, \quad (4.6.7)$$

где  $F_l$  — обобщенная сила, сопряженная с координатой  $f'_l$ . С математической точки зрения полное описание поля, соответствующего циклическим координатам, тре-

бует бесконечного числа таких координат. Действительно, в данном случае мы имеем дело с функциональным пространством всех полей  $\mathbf{H}$ , обладающих свойством  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , которое можно назвать циклическим подпространством. Это подпространство можно определить также в виде бесконечного числа нормальных координат  $\xi_s$  с характеристическими корнями, равными нулю. Следовательно, существует бесконечное число кратных нулевых корней. Циклическое подпространство характеризуется бесконечной степенью вырождения. Плотность теплового потока  $\dot{\mathbf{H}}$  в циклическом подпространстве дается значениями  $f'_m$ . Уравнения (4.6.7) показывают, что они однозначно определяют тепловые силы  $F_l$ . Заметим, что значения  $F_l$  могут зависеть от времени, поскольку они определяются адиабатической температурой  $\theta_a$  на границе. Однако в циклическом подпространстве плотность теплового потока  $\dot{\mathbf{H}}$  в любой данный момент времени равна плотности теплового потока в стационарном состоянии, полученной при постоянной адиабатической температуре, равной  $\theta_a$  в данный момент времени. Иными словами, решение в циклическом подпространстве представляется бесконечным рядом стационарных полей.

Наряду с обобщенными координатами можно использовать также континуальный подход. Рассмотрим случай изотропной теплопроводности. Плотность теплового потока в циклическом подпространстве выражается в виде

$$\dot{\mathbf{H}} = -k \operatorname{grad} \theta, \quad (4.6.8)$$

где  $\theta$  удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\operatorname{div} (k \operatorname{grad} \theta) = 0 \quad (4.6.9)$$

и граничному условию

$$K(\theta - \theta_a) + k \operatorname{grad}_n \theta = 0, \quad (4.6.10)$$

где  $K$  — коэффициент теплообмена на границе. Очевидно, что эти уравнения определяют температуру  $\theta$  в стационарных условиях при заданной адиабатической температуре  $\theta_a$  на границе. Аналогичные уравнения можно получить и в случае анизотропной теплопроводности (см. § А.4).

Сопряженные поля для нормальных координат. Теперь рассмотрим случай температурного поля, представленного с помощью нормальных координат. Имеем:

$$\theta = \sum_s \theta_s \xi_s, \quad (4.6.11)$$

где

$$\theta_s = \theta_s(x, y, z) \quad (4.6.12)$$

— нормированные температурные поля, являющиеся характеристическими решениями, аналогичными решениям (2.5.11). Запишем тепловое смещение в виде

$$H = \sum_s \Theta'_s \xi_s, \quad (4.6.13)$$

где  $\Theta'_s(x, y, z)$  — векторное поле, сопряженное с  $\theta_s$ . В случае нормальных координат эти сопряженные поля легко получить следующим образом.

Рассмотрим случай изотропной теплопроводности. Поскольку  $\theta_s$  представляет характеристическое решение, релаксационная мода

$$\theta = \theta_s e^{-\lambda_s t} \quad (4.6.14)$$

является решением уравнения теплопроводности

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) = c \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (4.6.15)$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta_s) = -c \lambda_s \theta_s. \quad (4.6.16)$$

Релаксационная мода удовлетворяет граничному условию

$$K \theta_s + k \operatorname{grad}_n \theta_s = 0. \quad (4.6.17)$$

В § 4.4 показано, что сопряженное поле определяется выражением

$$\Theta'_s = -k \operatorname{grad} \psi, \quad (4.6.18)$$

где  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \psi) = c \theta_s \quad (4.6.19)$$

и граничному условию

$$K \psi + k \operatorname{grad}_n \psi = 0. \quad (4.6.20)$$

Решение этих уравнений легко получить, учитывая тождества (4.6.16) и (4.6.17)

$$\psi = -\frac{1}{\lambda_s} \theta_s. \quad (4.6.21)$$

Отсюда сопряженное поле будет:

$$\Theta'_s = \frac{k}{\lambda_s} \text{grad } \theta_s. \quad (4.6.22)$$

В случае анизотропной теплопроводности аналогичное выражение для сопряженного поля имеет вид:

$$\Theta'_{is} = \frac{1}{\lambda_s} \sum_j^i k_{ij} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_j}, \quad (4.6.23)$$

где  $\Theta'_{is}$  — компоненты  $\Theta'_s$ , а  $x_j$  означает координаты  $x, y, z$ .

*Квазистационарный поток.* В § 2.6 квазистационарное решение было представлено в виде непрерывного ряда мгновенных стационарных состояний с поправкой, выраженной с помощью обобщенных координат. Такое же квазистационарное решение можно получить с помощью нормальных координат [Л. 4-1]. Представим температурное поле в нормальных координатах

$$\theta = \sum_s^s \theta_s q_s. \quad (4.6.24)$$

Соответствующее сопряженное поле будет:

$$\mathbf{H} = \sum_s^s \Theta'_s q_s, \quad (4.6.25)$$

где  $\Theta'_s$  дается выражением (4.6.22). Тепловой потенциал и диссипативная функция имеют вид:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_s^s \lambda_s q_s^2; \quad D = \frac{1}{2} \sum_s^s \dot{q}_s^2. \quad (4.6.26)$$

Тогда уравнения Лагранжа будут

$$\lambda_s q_s + \dot{q}_s = Q_s, \quad (4.6.27)$$

где

$$Q_s = - \iint_A \dot{\theta}_a \Theta'_s n dA. \quad (4.6.28)$$

Это выражение включает в себя поверхностный интеграл по границе от адиабатической температуры  $\theta_a$ .

Представим решение в виде мгновенных стационарных состояний  $q^*_s$  с поправкой  $q^+_s$ . Отсюда

$$q_s = q^+_s + q^*_s. \quad (4.6.29)$$

Мгновенное стационарное состояние  $q^*_s$  является равновесным состоянием, которое имело бы место при постоянной во времени адиабатической температуре  $\theta_a$ . Его можно получить, положив  $\dot{q}_s = 0$  в уравнениях (4.6.27). Запишем:

$$q^*_s = \frac{Q_s}{\lambda_s}. \quad (4.6.30)$$

Подставив выражение (4.6.29) в уравнения (4.6.27), получим:

$$\lambda_s q^+_s + \dot{q}^+_s = -\frac{\dot{Q}_s}{\lambda_s}, \quad (4.6.31)$$

где

$$\dot{Q}_s = - \iint_A \dot{\theta}_a \Theta'_s n dA. \quad (4.6.32)$$

Тогда температурное поле будет:

$$\theta = \theta^* + \theta^+, \quad (4.6.33)$$

где  $\theta^*$  определяет мгновенное стационарное состояние, а поправка  $\theta^+$  выражается в виде

$$\theta^+ = \sum_s^s \theta_s q^+_s. \quad (4.6.34)$$

Обобщенные координаты  $q^+_s$  находятся из решения уравнений (4.6.31). Заметим, что величины в правой части уравнений (4.6.31) играют роль фиктивных тепловых сил, пропорциональных производной по времени от адиабатической температуры  $\theta_a$ . Стационарное поле  $\theta^*$  можно определить непосредственно (без использования обобщенных координат) из решения дифференциального уравнения в частных производных для стационарной температуры при заданном значении  $\theta_a$  на границе. Пример из § 2.7 является иллюстрацией разделения на стационарное решение и поправку, выраженную через нормальные координаты.



## 4.7. ПРИМЕР СОПРЯЖЕННЫХ ПОЛЕЙ

Для иллюстрации применения сопряженных полей в задачах теплопроводности рассмотрим простую структуру, поперечное сечение которой представлено на рис. 4.1 [Л. 4-3]. Она состоит из двух фланцев толщиной  $a$  с переходным соединением толщиной  $2a_1$ . Материал считается однородным, имеющим постоянный коэффициент

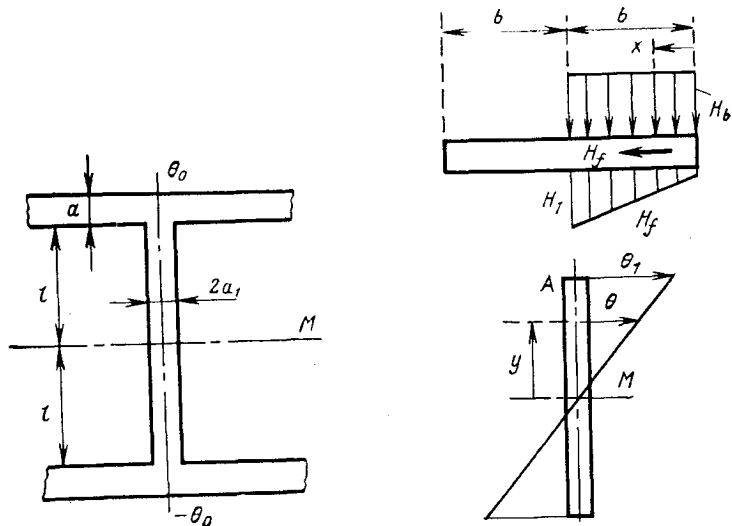


Рис. 4.1. Сопряженное поле для теплового потока в теле сложной конфигурации.

теплопроводности  $k$  и теплоемкость  $c$ . Задача сводится к нахождению распределения температуры в плоскости фигуры. Структура нагревается в результате поверхностного теплообмена с коэффициентом теплообмена  $K$  при адиабатической температуре на внешней поверхности фланцев. Если нагрев поверхности осуществляется в результате контакта с движущейся жидкостью, это допущение о поверхностном теплообмене справедливо при поперечном обтекании фигуры.

Однако при продольном обтекании предпочтительнее другие допущения. Они будут рассмотрены подробнее в гл. 6 и 7.

Рассчитаем стационарную температуру в переходном соединении при постоянной адиабатической температуре вдоль внешних поверхностей фланцев. Температура верхнего фланца равномерна и не равна температуре нижнего. В результате симметрии структуры температурное поле можно всегда представить в виде симметричной и антисимметричной частей относительно центра соединения. Если адиабатические температуры на верхнем и нижнем фланцах равны соответственно  $\theta_0$  и  $-\theta_0$ , то температурное распределение в соединении будет антисимметричным. Решим задачу для антисимметричного стационарного состояния при постоянном значении  $\theta_0$  с помощью метода сопряженных полей.

Распределение температуры вдоль соединения будет линейным

$$\theta = \frac{y}{l} \theta_1. \quad (4.7.1)$$

Неизвестную температуру  $\theta_1$  на стыке  $A$  примем за обобщенную координату. Поле, сопряженное с распределением температуры (4.7.1) в соединении, можно найти из аналоговой модели, описанной в § 4.4. В этой модели стоки тепла мощностью  $c\theta$  в единице объема распределены вдоль соединения. В результате возникает тепловой поток  $H_f$  вдоль фланца и поток  $H_b$ , нормальный фланцу. Будем считать, что поток  $H_b$  равномерно распределен по ширине фланца  $2b$ . Распределение потока вдоль фланца поэтому будет линейным. Длина  $b$  играет роль «эффективной ширины» и определяется из принципа минимальной диссипации. Найдем диссипацию в полуширине  $b$  вследствие поверхностного теплообмена и теплового потока  $H_f$  в самом фланце. В соответствии с выражением (4.4.19) эту диссипацию можно записать в виде

$$D_1 = \frac{a}{2k} \int_0^b H_f^2 dx + \frac{b}{2K} H_b^2, \quad (4.7.2)$$

где

$$H_f = H_1 \frac{x}{b}; \quad H_b = a \frac{H_1}{b}. \quad (4.7.3)$$

Значение  $H_f$  на стыке  $A$  обозначим через  $H_1$ . Для данного значения  $H_1$  выражение (4.7.2) является функцией  $b$ . Величина  $b$ , минимизирующая  $D$ , равна:

$$b = \sqrt{\left(\frac{3ak}{K}\right)}. \quad (4.7.4)$$

При этом значении  $b$  имеем:

$$D_1 = \frac{a^2 H_1^2}{Kb}. \quad (4.7.5)$$

Поток  $H_w$  в соединении определяется потоком  $H_1$  и распределенными стоками. Находим:

$$H_w = \frac{aH_1}{a_1} - c \int_y^l \theta dy, \quad (4.7.6)$$

где  $2l$  — расстояние между фланцами.

Диссипация в полутолщине  $a_1$  соединения между точками  $A$  и  $M$  будет:

$$D_2 = \frac{a_1}{2k} \int_0^l H_w dy. \quad (4.7.7)$$

Полная диссипация запишется в виде

$$D = D_1 + D_2, \quad (4.7.8)$$

где  $D_1$  определяется из (4.7.5). Значение  $H_1$  получается при минимизации  $D$  как функции от  $H_1$ . Оно полностью определяет все компоненты сопряженного поля с помощью нормальной координаты  $\theta_1$ . В частности,

$$H_b = \frac{a_1 c l}{b \{(2a_1 b / a l) + 3\}} \theta_1. \quad (4.7.9)$$

В стационарном состоянии координата  $\theta_1$  определяется уравнением Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = Q, \quad (4.7.10)$$

где  $V$  — тепловой потенциал в полуширине соединения между  $A$  и  $M$ . Отсюда

$$V = \frac{1}{2} c a_1 \int_0^l \theta^2 dy = \frac{1}{6} c a_1 \theta^2 l. \quad (4.7.11)$$

Значение  $Q$  определяется из принципа виртуальной работы в виде

$$Q \delta \theta_1 = b \theta_0 \delta H_b. \quad (4.7.12)$$

Из уравнения (4.7.9) получим с помощью  $\delta H_b$  значение  $\delta \theta_1$ . Следовательно,

$$Q = \frac{a_1 c l}{(2a_1 b / a l) + 3} \theta_0. \quad (4.7.13)$$

Подставив в уравнение (4.7.10) значения  $V$  и  $Q$  из (4.7.11) и (4.7.13), находим:

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{(2a_1 b / 3 a l) + 1}. \quad (4.7.14)$$

Таким образом, мы получили температуру  $\theta_1$  на стыке  $A$ , используя внешнюю адиабатическую температуру  $\theta_0$  на фланце.

Для определения переходной температуры в случае  $\theta_0$ , зависящей от времени, можно использовать понятие эффективной ширины фланца [Л. 4-3]. Этот метод дает точное решение.

## Глава пятая

# НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

## 5.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах мы ограничились анализом физических систем со свойствами, не зависящими от температуры. В данной главе рассмотрим случай, когда теплоемкость и теплопроводность могут зависеть от температуры. Такие системы являются физически нели-

нейными в том смысле, что для них принцип суперпозиции неприменим. Нелинейность может быть обусловлена граничными условиями.

Для обобщения вариационных принципов на нелинейные системы в § 5.2 понятие теплового потенциала применяется к среде, теплоемкость которой зависит от температуры. Как показано в § 5.3, с помощью этого понятия получают вариационный принцип и уравнения Лагранжа для систем, теплоемкость и теплопроводность которых зависят от температуры [Л. 5-1].

Понятие сопряженного поля обобщается на нелинейные системы в § 5.4. Для случая с постоянной теплопроводностью и при отсутствии коэффициента теплообмена обобщение производится непосредственно. Показано также, что наиболее общий случай системы с зависящей от температуры теплопроводностью можно свести к случаю постоянной теплопроводности при помощи хорошо известного преобразования.

Нелинейность, обусловленная граничными условиями, рассматривается в § 5.5. Такими случаями являются оттаивание или промерзание, т. е. случаи подвижных границ.

Дается схема решения задачи абляции, где твердое тело при оплавлении имеет движущуюся границу. Здесь также обсуждается нелинейность, порождаемая излучением с поверхности при больших изменениях температуры.

В § 5.6 в качестве примера нелинейной задачи приводится численный расчет распространения тепла в среде с теплофизическими свойствами, зависящими от температуры. В этом параграфе рассматриваются различия нелинейностей процесса охлаждения и нагрева.

## 5.2. ТЕПЛОВОЙ ПОТЕНЦИАЛ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Понятие теплового потенциала для твердого тела с заданным объемом  $\tau$  обсуждалось и использовалось в предыдущих главах в связи с линейными системами. Здесь мы рассмотрим твердое тело, удельная объемная теплоемкость  $c(x, y, z, \theta)$  которого зависит от температуры  $\theta$  и координат  $x, y, z$ .

Понятие теплового потенциала можно обобщить на этот случай, если ввести величину удельной объемной

энтальпии  $h$ , определяемую выражением

$$\int_0^{\theta} c d\theta = h. \quad (5.2.1)$$

Энтальпия  $h(x, y, z, \theta)$  является функцией координат и температуры и описывает свойство материала. Аналогично определим

$$\int_0^h \theta dh = F. \quad (5.2.2)$$

Эта величина также является функцией  $F(x, y, z, \theta)$  координат и температуры. Она обобщает понятие теплового потенциала в единице объема твердого тела для нелинейных систем. Когда  $c(x, y, z)$  не зависит от температуры, величина  $F$  принимает вид:

$$F = \frac{1}{2} c \theta^2, \quad (5.2.3)$$

что полностью совпадает с подынтегральным выражением (1.2.8). Суммарный тепловой потенциал твердого тела, занимающего объем  $\tau$ , определяется выражением

$$V = \iiint_{\tau} F d\tau. \quad (5.2.4)$$

Необходимо отметить, что здесь тепловое расширение объема не учитывается.

### 5.3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

С помощью определения теплового потенциала (5.2.4) можно сформулировать вариационный принцип так, как это сделано в гл. 1 для линейных систем.

Следует подчеркнуть общие свойства теплопроводности, принятые для данного случая. Она может быть анизотропной и зависеть не только от координат  $x, y, z$ , но также и от времени  $t$  и температуры  $\theta$ . Следовательно, тензор теплопроводности запишется в виде

$$k_{ij} = k_{ij}(x, y, z, t, \theta). \quad (5.3.1)$$

Зависимость теплопроводности от времени можно учесть в частных случаях, когда на физические свойства материала оказывают влияние внешние факторы, например некоторые виды излучения.

Как и ранее, при формулировке вариационного принципа мы используем обратную матрицу теплопроводности  $k_{ij}$ , определяемую уравнением (1.5.7) в виде

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x, y, z, t, \theta). \quad (5.3.2)$$

Соотношения Онзагера считаются справедливыми. Следовательно,

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}. \quad (5.3.3)$$

Вариационную формулировку можно получить, если ввести поле теплового смещения с компонентами в декартовой системе координат  $H_i = H_i(x, y, z, t)$ . Это определение аналогично уравнению (1.5.1). Предположим, что оно удовлетворяет уравнению

$$h = - \sum_i \frac{\partial H_i}{\partial x_i}. \quad (5.3.4)$$

Это уравнение является обобщением уравнения (1.5.2), и его можно рассматривать как голономную связь между теплосодержанием  $h$  и тепловым смещением  $H_i$ . С помощью этих определений мы покажем, что вариационный принцип для нелинейного случая можно записать в виде

$$\delta V + \iiint_{\tau} \left( \sum_{ij} \lambda_{ij} \dot{H}_j \delta H_i \right) d\tau = - \iint_A \sum_i \theta n_i \delta H_i dA, \quad (5.3.5)$$

где  $V$  дается уравнением (5.2.4), а интегралы берутся по объему твердого тела  $\tau$  и его границе  $A$ . По определению (5.2.4) и из уравнения (5.3.4) найдем:

$$\delta V = \iiint_{\tau} \theta \delta h d\tau = - \iiint_{\tau} \theta \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta H_i d\tau. \quad (5.3.6)$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\delta V = \iiint_{\tau} \sum_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \delta H_i d\tau - \iint_A \sum_i \theta n_i \delta H_i dA. \quad (5.3.7)$$

Подставив это выражение в (5.3.5), получим:

$$\iiint_{\tau} \sum_i \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sum_j \lambda_{ij} \dot{H}_j \right) \delta H_i d\tau = 0. \quad (5.3.8)$$

Это уравнение эквивалентно закону теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sum^j \lambda_{ij} \dot{H}_j = 0. \quad (5.3.9)$$

Оно аналогично уравнению (1.5.6) для линейной системы. Единственное различие между этими двумя уравнениями заключается в том, что в последнем случае  $\lambda_{ij}$  может зависеть от температуры.

Таким образом, мы установили справедливость вариационного принципа (5.3.5) для нелинейных систем. Следует отметить, что этот принцип по своему физическому смыслу соответствует утверждению, что скорость теплового потока  $\dot{H}_i$  удовлетворяет закону теплопроводности при данном распределении температуры, в то время как закон сохранения энергии удовлетворяется автоматически самой формулировкой по аналогии с голономными связями в механике. В данном случае голономная связь выражается уравнением (5.3.4).

Неизвестное поле  $\dot{H}_i$  можно определить через обобщенные координаты  $q_k$  как

$$H_i = H_i(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (5.3.10)$$

Вариационный принцип (5.3.5) приводит в этом случае к системе  $n$  уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i. \quad (5.3.11)$$

Поскольку вариационный принцип (5.3.5) формально тождественен формулировке для линейного случая, вывод уравнения (5.3.11) производится с помощью метода, используемого в § 1.5. Диссипативная функция  $D$  и термодинамическая сила  $Q_i$  определяются уравнениями (1.5.18) и (1.5.22).

*Принцип виртуальной работы и минимальная диссипация.* Как уже указывалось в гл. 1, вариационный принцип можно рассматривать как принцип виртуальной работы. Это замечание, очевидно, применимо и к выражению вариационного принципа (5.3.5) для нелинейных систем. В частности, обобщенные тепловые силы можно получить, вычислив вариацию  $\sum^i Q_i \delta q_i$ , с помощью которой понятие виртуальной работы распространяется на термодинамические процессы.

Нелинейные уравнения Лагранжа (5.3.11) также эквивалентны принципу минимальной диссипации, как было показано для линейной системы в § 1.4. Как и ранее, для нелинейной системы можно определить неравновесную силу в виде

$$X_i = Q_i - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (5.3.12)$$

При этом уравнения (5.3.11) выражают условие минимума диссипативной функции  $D$  для всех возможных значений  $\dot{q}_i$ , причем  $\sum_i X_i \dot{q}_i$  должна быть постоянной. Необходимо заметить, что диссипативная функция является положительно определенной квадратичной формой относительно скорости, что вытекает из пропорциональности  $D$  локальному приращению энтропии.

*Метод конечных элементов для нелинейных систем.* Численный анализ нестационарного поля с помощью метода разделения области на конечные элементы можно распространить на нелинейные системы с помощью подхода, описанного в § 3.7. Уравнения Лагранжа (5.3.11) выписываются для каждой подсистемы. Тепловые силы  $Q_i$  на общих границах элементов можно сгруппировать по парам величин с противоположными знаками, но имеющих одинаковую абсолютную величину. Приравняв эти значения после перемены знака, получим систему уравнений для всей системы, из которой исключаются неизвестные  $Q_i$  на общих границах элементов.

## 5.4. СОПРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Понятие циклических координат можно распространить на нелинейные системы. Рассмотрим среду с теплоемкостью, зависящей от температуры, и предположим, что тензор теплопроводности и коэффициент теплообмена не зависят от температуры. Запишем тепловое смещение (4.2.1) в виде

$$H = \sum_i \theta_i q_i + \sum_l F_l f_l. \quad (5.4.1)$$



Диссипативную функцию, которая в этом случае является квадратичной формой с постоянными коэффициентами, можно записать в виде

$$D = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{il} b'_{il} \dot{q}_i \dot{f}_l + \frac{1}{2} \sum_{lm} b''_{lm} \dot{f}_l \dot{f}_m, \quad (5.4.2)$$

что эквивалентно уравнению (4.2.8), причем суммирование по  $i$  и  $j$  проводится от 1 до  $\nu$ , а  $l$  и  $m$  принимают значения от 1 до  $k$ . Как в главе 4, мы будем считать, что  $k$  координат  $f_l$  не входят в тепловой потенциал  $V$ . Уравнения Лагранжа делятся на две группы

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{f}_l} = Q_l. \quad (5.4.3)$$

Уравнения первой группы, содержащие  $V$ , являются нелинейными, поскольку теплоемкость зависит от температуры. Однако координаты  $q_i$  и  $f_l$  можно разделить с помощью преобразования, применяемого для линейной системы. Это преобразование задается уравнением (4.2.11) и включает только диссипативную функцию (5.4.2), одинаковую как для линейного, так и для нелинейного случаев. Следовательно,  $f_l$  также являются циклическими координатами в нелинейной задаче, в которой теплопроводность не зависит от температуры.

Как и в линейном случае, в процессе разделения вводится сопряженное поле как векторное поле, определяемое заданным температурным полем.

Метод получения сопряженного поля из принципа минимальной диссипации может применяться также и для нелинейной системы и описывается в § 4.3.

Наконец, аналоговая модель сопряженных полей, использующая распределенные тепловые стоки, описана в § 4.4 и может применяться для нелинейного случая с тем отличием от линейного, что вместо уравнения (4.4.6) используется уравнение

$$h = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \psi), \quad (5.4.4)$$

где  $h$  — энтальпия, определяемая уравнением (5.2.1). С помощью доказательства, аналогичного проведенному в гл. 4, можно показать, что поле, сопряженное с температурным распределением  $\theta$ , является скоростью

поля теплового потока в стационарном состоянии с распределенными стоками тепла, имеющими величину

$$-w = h = \int_0^{\theta} c(\theta) d\theta. \quad (5.4.5)$$

Граничные условия остаются такими же, как и для линейной системы.

*Теплопроводность, зависящая от температуры.* Метод сопряженных полей можно обобщить на случай теплопроводности, зависящей от температуры, с помощью хорошо известного преобразования уравнения теплопроводности. Сначала рассмотрим случай изотропной теплопроводности. Температура описывается уравнением

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) = c \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (5.4.6)$$

Теплопроводность  $k(\theta)$  и удельная объемная теплоемкость  $c(\theta)$  считаются функциями температуры. Для упрощения запишем вместо  $c(x, y, z, \theta)$   $c(\theta)$  и будем считать, что теплоемкость может также зависеть от координат в явном виде. Введем переменную

$$u(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{k(\theta)}{k_0} d\theta. \quad (5.4.7)$$

Обозначим теплопроводность при заданной исходной температуре, например, когда  $\theta=0$ , через  $k_0$ . Тогда

$$k_0 = k(0). \quad (5.4.8)$$

Поэтому преобразование (5.4.7) дает изменение температурной шкалы. С учетом соотношений

$$k_0 \operatorname{grad} u = k \operatorname{grad} \theta; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{k_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (5.4.9)$$

уравнение (5.4.6) принимает вид:

$$k_0 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = c \frac{k_0}{k} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.4.10)$$

Оно описывает температуру  $u$  в среде с постоянной теплопроводностью  $k_0$  и теплоемкостью  $c'(u)$ , зависящей от  $u$ , по формуле

$$c'(u) = \frac{k_0}{k(\theta)} c(\theta). \quad (5.4.11)$$

Как указывалось в начале данного параграфа, метод сопряженных полей применим в случае постоянной теплопроводности  $k_0$ . Следовательно, его можно использовать, если вместо реальной системы мы будем исследовать фиктивную среду, описываемую уравнением (5.4.10). Температура фиктивной среды  $u$  не совпадает с  $\theta$ , однако тепловое смещение  $\mathbf{H}$  и энтальпия  $h$  остаются прежними. Энтальпия определяется выражением

$$h = \int_0^u c'(u) du = \int_0^\theta c(\theta) d\theta. \quad (5.4.12)$$

Следует отметить, что непосредственное применение метода сопряженных полей для фиктивной среды требует, чтобы тепловая система не содержала коэффициента теплообмена. Это можно показать, если вернуться к определению коэффициента теплообмена  $K$ . В соответствии с уравнением (2.2.1) запишем:

$$\dot{H}_n = K(\theta - \theta_a), \quad (5.4.13)$$

которое можно переписать также в виде

$$\dot{H}_n = K'(u - u_a), \quad (5.4.14)$$

где

$$u = u(\theta), \quad u_a = u(\theta_a), \quad K'(u) = \frac{\theta - \theta_a}{u - u_a}. \quad (5.4.15)$$

Следовательно, использование фиктивной температуры требует применения коэффициента теплообмена, зависящего от температуры, т. е.  $K'(u)$ . Поэтому, когда теплопроводность зависит от температуры, сопряженное поле для твердого тела должно рассчитываться отдельно для системы, в которой отсутствует теплообмен на поверхности. Влияние этого теплообмена учитывается в дальнейшем при расчете обобщенных сил, действующих на твердое тело.

Метод сопряженных полей можно обобщить также на систему, в которой теплопроводность является анизотропной и одновременно зависит от температуры, причем тензор теплопроводности имеет вид:

$$k_{ij}(\theta) = k'_{ij}f(\theta), \quad (5.4.16)$$

где  $k'_{ij}$  — постоянные. Считая  $f(\theta)$  безразмерной функцией температуры, мы получим аналоговую модель

теплопроводности  $k'_{ij}$  и фиктивную температуру

$$u = \int_0^{\theta} f(\theta) d\theta \quad (5.4.17)$$

с помощью метода, описанного при выводе уравнения (5.4.6).

*Приближенный метод сопряженных полей.* В некоторых задачах, в которых теплопроводность зависит от температуры, можно рекомендовать применение приближенного метода разделения циклических координат. Вместо преобразования (5.4.7) будем считать теплопроводность равной некоторой усредненной величине, не зависящей от температуры. Эта усредненная теплопроводность может зависеть от координат. Тогда сопряженное поле рассчитывается с помощью таких усредненных значений. Однако при нахождении диссипативной функции в виде этих сопряженных полей используется действительная теплопроводность, зависящая от температуры. В отличие от метода, основанного на применении преобразования (5.4.7), этот приближенный метод не требует, чтобы теплопроводность не зависела от координат, и учитывает коэффициент теплообмена.

## 5.5. ОПЛАВЛЕНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ

Нелинейность может возникать не только вследствие зависимости свойств материала от температуры, но и из-за граничных условий, как, например, в задачах о промерзании или оплавлении. Движение границы зависит от неизвестного стационарного температурного поля. Поэтому положение границы должно учитываться в уравнениях с помощью дополнительной неизвестной. Излучение на границе представляет еще один пример, когда нелинейность определяется граничными условиями.

*Оплавление (подвижные границы).* Сформулируем кратко задачу с движущимися границами с помощью простого примера.

Как уже указывалось в случае линейной системы, вариационный принцип можно использовать, если считать, что при определении теплового потенциала и функции диссипации интегрирование производится по объему с подвижными границами. Тогда каждая тепловая сила определяется на соответствующей подвижной гра-

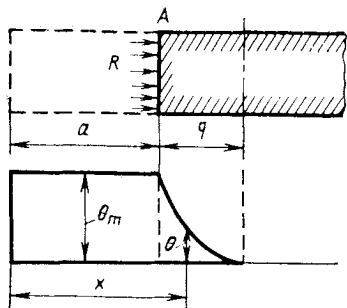


Рис. 5.1. Абляция полупространства при постоянном подводе тепла  $R$  к границе плавления.

уравнения Лагранжа могут использоваться для решения задач такого типа.

В качестве иллюстрации метода рассмотрим более простую задачу абляции, когда свойства среды не зависят от температуры. Предполагается, что расплавленное вещество удаляется с границы сразу же после расплавления. Полупространство, заполненное твердым телом с постоянной теплопроводностью  $k$  и постоянной теплоемкостью  $c$ , плавится на границе  $A$  (рис. 5.1). Удельную скорость подвода тепла к плавящейся поверхности обозначим через  $R$ . В момент  $t$  граница плавления вещества проникает на глубину  $a(t)$ . Для исследования задачи с движущейся границей могут быть использованы уравнения Лагранжа.

Нестационарное распределение температуры в твердом теле аппроксимируется выражением

$$\theta = \theta_m \left\{ 1 - \frac{(x-a)}{q} \right\}^2, \quad (5.5.1)$$

в которое входят две неизвестные — глубина плавления  $a(t)$  и глубина проникновения  $q(t)$  тепла в нерасплавленный материал. Здесь  $x$  — координата по глубине, а температура плавления  $\theta = \theta_m$  при  $x = a$ .

Следует отметить, что при использовании уравнений Лагранжа только  $q$  считается обобщенной координатой, а  $a(t)$  рассматривается как заданная функция времени, неподверженная варьированию. В действительности, глубина плавления  $a(t)$  остается неизвестной, и она должна определяться из вспомогательного уравнения, которое не связано с вариационным принципом.

Тепловое смещение на глубине  $x$  будет:

$$H = \int_x^{a+q} c\theta dx = \frac{1}{4} qc\theta_m \left\{ 1 - \frac{(x-a)}{q} \right\}^4. \quad (5.5.2)$$

При расчете теплового потенциала, диссипативной функции и тепловой силы интегрирование производится по области  $a < x < a+q$ .

нице. Это свойство является следствием того, что уравнения Лагранжа описывают тепловой поток для заданного мгновенного положения границ и температуры независимо от истории развития процесса. По той же причине этот принцип применим также для систем с подвижными границами и свойствами, зависящими от температуры. Приведенные замечания показывают, что вариационный принцип и

Определим:

$$V = \frac{1}{2} \int_a^{a+q} c\theta^2 dx; \quad D = \frac{1}{2} \int_a^{a+q} \frac{1}{k} \dot{H}^2 dx; \quad Q = \theta_m \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right)_{x=a} \quad (5.5.3)$$

и получим соответствующее уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = Q. \quad (5.5.4)$$

Подставив в уравнение (5.5.4) значения  $V$ ,  $D$  и  $Q$  из уравнений (5.5.3), получим:

$$\left( \frac{4}{112} \dot{q} + \frac{11}{112} \dot{a} \right) q = \frac{5}{14} \frac{k}{c}. \quad (5.5.5)$$

Это уравнение содержит две неизвестные —  $a$  и  $q$ . Вспомогательное уравнение получается из условия сохранения энергии в процессе плавления в виде

$$R = (L + c\theta_m) \dot{a} + \frac{1}{4} \theta_m c \dot{q}, \quad (5.5.6)$$

где  $L$  — скрытая теплота плавления в единице объема. Следовательно, мы получили два совместных дифференциальных уравнения (5.5.6) и (5.5.5) для двух неизвестных функций времени  $q(t)$  и  $a(t)$ . Уравнения (5.5.6) и (5.5.5) получены и решены численно в работе [Л. 5-2]. В дальнейшем вариационный принцип использовался для решения аналогичной задачи абляции при больших температурных колебаниях и сильной зависимости теплопроводности от температуры [Л. 5-3].

Задача о распределении температуры при плавлении полубесконечного твердого тела без удаления жидкой фазы была решена с помощью вариационного принципа Ларднером [Л. 5-4].

*Излучение с поверхности.* Физическая нелинейность также имеет место, когда происходит излучение с поверхности при больших колебаниях температуры. В этих случаях характеристики поверхностного теплообмена не могут быть линеаризованы. Скорость теплового потока на единицу площади поверхности можно записать в виде

$$\dot{H}_r = \varepsilon \sigma \{ (T_e + \theta)^4 - T_e^4 \}, \quad (5.5.7)$$

где  $\varepsilon$  — степень черноты;  $\sigma$  — постоянная Стефана;  $T_e$  — абсолютная равновесная температура, при которой не происходит потерь на излучение. При этом нелинейное граничное условие будет

$$\dot{H}_r = \dot{H} \mathbf{n}, \quad (5.5.8)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль на границе, а  $\mathbf{H}$  — тепловое смещение на границе твердого тела.

Для достаточно малых значений избыточной температуры уравнение (5.5.7) можно линеаризовать в виде

$$\dot{H}_r = K\theta, \quad (5.5.9)$$

где

$$K = 4\epsilon\sigma T_e^3, \quad (5.5.10)$$

играет роль коэффициента теплообмена, не зависящего от температуры, как указано в § 2.2.

В некоторых задачах, связанных с нелинейным излучением, иногда целесообразно использовать граничное условие для температурного поля. Например, для изотропной теплопроводности приближенное температурное поле выбирается таким, чтобы оно удовлетворяло граничному условию

$$k \operatorname{grad}_n \theta + \epsilon\sigma\{(T_e + \theta)^4 - T_e^4\} = 0. \quad (5.5.11)$$

Это иллюстрируется в статье П. Рафальского и В. Зысковского [Л. 5-5]. Они предлагают провести усреднение уравнения (5.5.11) на границе, при этом на неизвестные  $q_i$  налагается голономная связь.

## 5.6. НАГРЕВАНИЕ И ОХЛАЖДЕНИЕ СТЕНКИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В качестве иллюстрации рассмотрим очень простую нелинейную задачу. Возьмем полубесконечное тело, занимающее область  $x > 0$ . Поверхность  $x = 0$  мгновенно принимает температуру  $\theta = \theta_0$  в момент  $t = 0$  (рис. 5.2). Будем считать теплоемкость линейной функцией температуры

$$c(\theta) = c_0 \left(1 + \frac{\theta}{\theta_0}\right). \quad (5.6.1)$$

Теплопроводность  $k$  считается постоянной [Л. 5-1]. Однако это допущение не ограничивает общности примера, поскольку, как показано в § 5.4, случай теплопроводности, зависящей от температуры, легко приводится к случаю с постоянной теплопроводностью. Температурное распределение в твердом теле аппроксимируется выражением

$$\theta = \theta_0 \left(1 - \frac{x}{q}\right)^2, \quad (5.6.2)$$

где глубина проникновения  $q$  играет роль обобщенной координаты. Для анализа задачи удобно рассмотреть цилиндрический объем, параллельный оси  $x$ , с единичным основанием. Уравнение теплосодержания (5.2.1) примет вид:

$$h = \int_0^{\theta} c \, d\theta = c_0 \theta + \frac{1}{2} c_0 \frac{\theta^2}{\theta_0}, \quad (5.6.3)$$

а величина  $F$  и тепловой потенциал (5.2.4) будут

$$F = \int_0^{\theta} c \theta \, d\theta = \frac{1}{2} c_0 \theta^2 + \frac{1}{3} c_0 \frac{\theta^3}{\theta_0};$$

$$V = \int_0^q F \, dx = \frac{31}{210} c_0 \theta_0^2 q. \quad (5.6.4)$$

Тогда тепловое смещение находится из соотношения

$$H = \int_x^q h \, dx. \quad (5.6.5)$$

Положив

$$\zeta = 1 - \frac{x}{q}, \quad (5.6.6)$$

получим:

$$H = \left( \frac{1}{3} \zeta^3 + \frac{1}{10} \zeta^5 \right) c_0 \theta_0 q. \quad (5.6.7)$$

Диссипативная функция будет:

$$D = \frac{1}{2k} \int_0^q \dot{H}^2 \, dx = \frac{0,0648}{2k} c_0^2 \theta_0^2 q \dot{q}^2, \quad (5.6.8)$$

а виртуальная работа термодинамической силы

$$Q \delta q = \theta_0 \delta H, \quad (5.6.9)$$

где  $\delta H$  — вариация  $H$  при  $x=0$ , откуда

$$Q = \frac{13}{30} c_0 \theta_0^2. \quad (5.6.10)$$

Уравнение Лагранжа будет:

$$\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = Q. \quad (5.6.11)$$



Подставив значения  $V$ ,  $D$  и  $Q$  из уравнений (5.6.4), (5.6.8) и (5.6.10) в (5.6.11), получим:

$$0,0648q\dot{q} = \frac{2}{7} \frac{k}{c_0}. \quad (5.6.12)$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием  $q=0$  в момент  $t=0$ , находим:

$$q = 2,97 \sqrt{\left(\frac{kt}{c_0}\right)}. \quad (5.6.13)$$

Мы можем сравнить этот результат с величиной

$$q = 3,36 \sqrt{\left(\frac{kt}{c}\right)}, \quad (5.6.14)$$

определенной из уравнения (1.7.10) для линейной системы с постоянными  $k$  и  $c$ , положив

$$c = 1,28 c_0. \quad (5.6.15)$$

Следовательно, при аппроксимации нелинейного случая  $c$  принимается постоянной и равной  $1,28 c_0$ . Следует отметить, что это значение лежит в интервале от  $1,5 c_0$  до  $c_0$ , соответствующей минимальной температуре.

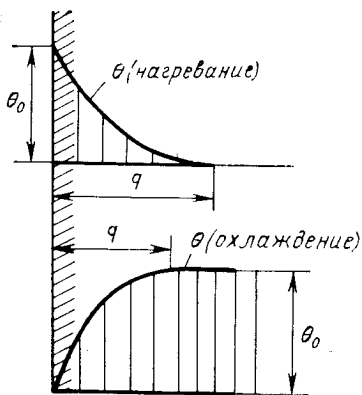


Рис. 5.2. Охлаждение и нагревание стенки с нелинейными теплофизическими свойствами.

Задача об охлаждении полупространства такого же материала (рис. 5.2) от температуры  $\theta = \theta_0$  до  $\theta = 0$  рассматривается в работе [Л. 5-1]. Нелинейные задачи об охлаждении и нагревании неэквивалентны. Установлено, что глубина проникновения совпадает с  $q$  для среды, имеющей  $c = 1,74 c_0$ . Следовательно, в рассмотренном случае постоянное эффективное значение  $c$  находится между средним значением  $1,5 c_0$  и  $2 c_0$ , соответствующим максимальной температуре.

## КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

### 6.1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе вариационные принципы и уравнения Лагранжа обобщаются на случай конвективного теплообмена. Рассмотрим два различных подхода. В первом мы будем решать задачу теплопроводности в твердом теле, границы которого соприкасаются с движущейся жидкостью. Конвективный теплообмен на границе учитывается с помощью «функции влияния». Эта функция учитывает конвективные свойства жидкости, которые можно включить в граничное условие. Благодаря этому конвекция и теплопроводность в твердом теле рассматриваются раздельно. Течение может быть ламинарным и турбулентным. Расчет функции влияния проведен в гл. 7. Такое разделение имеет некоторые преимущества, поскольку физические свойства теплопроводности и конвекции совершенно различны, и обычно эти явления неудобно анализировать одновременно.

Другой подход заключается в выводе унифицированных уравнений, применимых к сложным системам, включающим и твердое тело и движущуюся жидкость. Такой унифицированный подход может применяться в ряде специальных случаев, таких как теплообмен в пористом твердом теле при фильтрации жидкости.

Функция влияния описывается в § 6.2. Она по существу представляет температурное возмущение на границе раздела «твердое тело — жидкость», вызванное поступлением тепла в движущуюся жидкость в данной точке границы раздела. Она может определяться как двумерная и одномерная. В § 6.3 рассматриваются дополнительные члены в уравнениях Лагранжа, учитывающие конвективный теплообмен на границе с помощью функции влияния.

В § 6.4 метод сопряженных полей, рассматриваемый в гл. 4, обобщается на случай конвективного теплообмена. Для него применимо понятие циклических координат, что приводит к значительному снижению числа координат, необходимых для анализа. Для расчета сопряженных полей может также применяться метод, аналогичный принципу минимальной диссипации. Показано,

что возможность такого применения связана со свойством сопряженной системы, получаемой при обращении потока жидкости.

Еще один фундаментальный метод разработан в § 6.5. Соответствующим определением диссипативной функции показано, что уравнения Лагранжа применимы как для конвекции, так и для теплопроводности. Таким образом смешанные системы, состоящие из твердых тел и движущейся жидкости, описываются единой формой уравнений как при ламинарном, так и при турбулентном течении. Поэтому для конвективного теплообмена может применяться принцип минимальной диссипации.

## 6.2. ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ

Рассмотрим границу твердого тела, находящегося в соприкосновении с движущейся жидкостью. Для описания общих свойств теплообмена между твердым телом и движущейся жидкостью введем понятие функции влияния, имеющей самое общее определение [Л. 6-1]. Это понятие естественным образом обобщает уравнения Лагранжа для теплопроводности в твердом теле с учетом конвективного теплообмена на границе, когда понятие коэффициента локального теплообмена теряет смысл. Автором в ранее опубликованной работе [Л. 6-2] показано, что конвективный теплообмен не может быть описан соответствующим образом с помощью локальных коэффициентов теплообмена.

Течение может быть ламинарным или турбулентным. В случае турбулентного течения поля скорости и температуры определяются с помощью усреднения флуктуаций. Скоростное поле считается заданной функцией времени и координат, а температура является неизвестным нестационарным или стационарным полем, определение которого входит в задачу теплообмена.

Для того чтобы сформулировать сопряженную задачу теплообмена между твердым телом и жидкостью, необходимо ввести так называемую адиабатическую температуру  $\theta_a(P, t)$ , о которой говорилось в § 2.2. Она определяется как распределение температуры жидкости на границе твердого тела при отсутствии потока тепла через поверхность раздела. Иными словами, рассматривается температурное поле, образующееся в жидкости, при теплоизолированной границе твердого тела. Это

температурное поле может быть заданной функцией времени и зависеть от определенных внешних и внутренних факторов, вызывающих нагревание или охлаждение жидкости и возникающих в результате излучения, внутреннего трения, химических реакций, нагрева выше по течению и т. д. При таких условиях адиабатическая температура  $\theta_a(P, t)$  является температурой жидкости на границе с твердым телом и зависит от времени и координаты точки  $P$  на поверхности твердого тела.

Для того чтобы сформулировать задачу теплообмена в случае нетеплоизолированной границы, примем вначале стационарные условия, а следовательно, течение и температуру, независимые от времени. В этом случае тепловой поток проходит через поверхность раздела, а температура жидкости на поверхности раздела теперь равна  $\theta$ , а не адиабатической температуре  $\theta_a$ . Основным допущением является допущение о линейной связи теплового потока через поверхность раздела с разностью температур  $\theta - \theta_a$  на поверхности. Эта связь выражается интегральным соотношением

$$\theta - \theta_a = \iint_A \dot{H}_n(P') r(P, P') dA_{P'} \quad (6.2.1)$$

В этом выражении  $\theta$  и  $\theta_a$  являются соответственно действительной и адиабатической температурами в данной точке  $P$  на границе. Поверхностный интеграл вычисляется по всем элементам поверхности  $dA_{P'}$  на границе.  $\dot{H}_n(P')$  — скорость теплового потока в единицу времени на единицу площади поверхности твердого тела в точке  $P'$ . Хотя уравнение (6.2.1) является линейным, оно не означает, что тепловые свойства жидкости подчиняются линейным законам. Необходимо только, чтобы тепловые возмущения, порожденные теплообменом на поверхности, удовлетворяли принципу суперпозиции в определенном диапазоне температур.

Свойства поверхностного теплообмена описываются двухточечной функцией  $r(P, P')$ . В данном случае она вводится автором как функция влияния.

Причина такого обозначения, а также физический смысл этой функции станут ясными при рассмотрении мгновенного точечного источника тепла в точке  $P'$ . Приращение температуры в точке  $P$  на границе будет иметь вид:

$$\theta - \theta_a = r(P, P'). \quad (6.2.2)$$

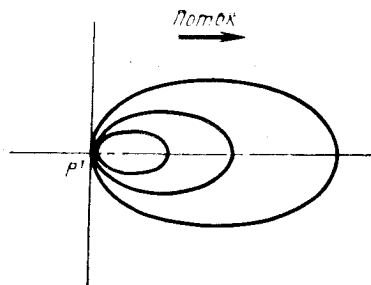


Рис. 6.1. Изотермы для функции влияния  $r(P, P')$  при подводе тепла в точке  $P'$  (схематическое изображение).

Если за начало отсчета взята точка  $P'$ , это выражение представляет двумерное температурное поле. В общем изотермы этого температурного поля будут аналогичны представленным на рис. 6.1, где показан «след» вниз по потоку от источника тепла.

Анализ поверхностного теплообмена проводится в § 2.2 для частного случая, когда применимо понятие локального коэффициента теплообмена  $K$ . Его можно рассматривать как предельный случай более общего понятия функции влияния при использовании функции Дирака  $\delta(P, P')$  со свойствами

$$\left. \begin{aligned} \delta(P, P') &= 0 \text{ при } P \neq P'; \\ \iint_A \delta(P, P') dA_{P'} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3)$$

Коэффициент теплообмена  $K(P)$  соответствует следующей функции влияния:

$$r = \frac{\delta(P, P')}{K(P)}. \quad (6.2.4)$$

Действительно, подставив значение  $r$  в выражение (6.2.1), получим:

$$(\theta - \theta_a) K(P) = \dot{H}_n(P), \quad (6.2.5)$$

совпадающее с уравнением (2.2.1).

Для упрощения мы считали и течение и температуру стационарными. Теперь сохранив условие стационарности течения, температуру будем считать зависимой от времени. Это означает, что плотность теплового потока  $H_n(P', t)$  может изменяться во времени. Строго говоря, функция влияния в таком случае должна включать в себя время запаздывания из-за конечной скорости конвекции вниз по течению. Однако, как показано в ранее опубликованной работе [Л. 6-2], в ряде практических задач временем запаздывания можно пренебречь. В этих

случаях используется функция влияния стационарного состояния и уравнение (6.2.1) принимает вид:

$$\theta - \theta_a = \iint_A \dot{H}_n(P', t) r(P, P') dA_{P'} \quad (6.2.6)$$

Следующим шагом будет допущение о том, что движение жидкости есть заданная функция времени. При этом адиабатическая температура  $\theta_a(P, t)$  также будет заданной функцией времени. Вследствие этого функция влияния  $r(P, P', t)$  зависит от времени, и уравнение (6.2.2) принимает вид:

$$\theta - \theta_a = r(P, P', t) \quad (6.2.7)$$

Это выражение определяет приращение температуры в точке  $P$  в результате единичного притока тепла в точке  $P'$ . Временем запаздывания пренебрегаем. В этом случае функция влияния соответствует квазистационарным условиям и является такой же, как при стационарном движении жидкости, характеризующемся мгновенным полем скоростей в момент  $t$ . Соотношение (6.2.6) принимает вид:

$$\theta - \theta_a = \iint_A \dot{H}_n(P', t) r(P, P', t) dA_{P'} \quad (6.2.8)$$

Допущение о квазистационарных условиях применимо во многих задачах конвективного теплообмена.

В задачах, где время запаздывания необходимо учитывать, функция влияния имеет вид  $r(P, P', t, t')$ . Она выражает приращение температуры в точке  $P$  в момент  $t$  вследствие приложения единичного источника тепла в точке  $P'$  в момент  $t'$ . В последующем анализе будем считать время за счет запаздывания конвекции пренебрежимо малым и определим функцию влияния по уравнению (6.2.7).

*Одномерная функция влияния.* Понятие функции влияния можно упростить, если считать поле течения двумерным. В данном случае границей твердого тела является цилиндрическая поверхность, а поле течения одинаково во всех плоскостях, перпендикулярных этой поверхности. Обозначим через  $s$  длину дуги вдоль линии тока на поверхности, а через  $y$  — расстояние вдоль прямых линий, перпендикулярных потоку. Величины  $s$  и  $y$  можно выбрать в качестве координат точки на поверхности. Тепло поступает в жидкость вдоль прямой, перпен-

дикулярной течению и определяемой координатой  $s'$ . Плотность теплового потока равна единице на единицу длины, измеряемой вдоль  $y$ . Для стационарного течения разность температур  $\theta - \theta_a$  в точке  $s$  вдоль линии тока выражается в виде

$$\theta - \theta_a = r(s, s'). \quad (6.2.9)$$

Это выражение является одномерной функцией влияния. Следует отметить, что физическая размерность этой функции отличается от соответствующей двумерной функции влияния в уравнении (6.2.2), поскольку выражение (6.2.9) представляет изменение температуры в результате притока тепла на единицу длины на линии, а не в точке.

Если течение изменяется во времени, можно представить конвекцию в виде ряда мгновенных стационарных состояний. Тогда одномерная функция влияния будет:

$$\theta - \theta_a = r(s, s', t). \quad (6.2.10)$$

Рассмотрим одномерное распределение теплового потока. Обозначим через  $\dot{H}_n(s', t)$  плотность теплового потока на единицу площади поверхности в точке  $s'$  в момент  $t$ . Будем считать эту величину одинаковой во всех точках вдоль прямых линий, перпендикулярных потоку, и, следовательно, не зависящей от  $y$ . Тогда изменение температуры жидкости на границе вдоль линии тока выразится в виде

$$\theta - \theta_a = \int_0^{s'} \dot{H}_n(s', t) r(s, s', t) ds', \quad (6.2.11)$$

где проводится линейное интегрирование вдоль  $s'$ . Это уравнение является одномерным аналогом уравнения (6.2.8).

Во многих задачах, где течение не является строго одномерным, понятие одномерной функции влияния может применяться в качестве приближения. При этом необходимо допустить, что скорость изменения температуры в направлении, перпендикулярном течению, не слишком велика. Тогда можно использовать выражение (6.2.11), где линейное интегрирование проводится вдоль линии тока.

### 6.3. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ КОНВЕКЦИИ НА ГРАНИЦЕ

Рассмотрим уравнения Лагранжа для теплопроводности в твердом теле

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q'_i, \quad (6.3.1)$$

где  $Q'_i$  — термодинамическая сила, соответствующая температуре  $\theta$  на границе твердого тела

$$Q'_i = - \iint_A \theta \frac{\partial H_n}{\partial q_i} dA. \quad (6.3.2)$$

В этих уравнениях компоненты теплового поля  $H_i$  выражаются в виде

$$H_i = H_i(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t), \quad (6.3.3)$$

а нормальная составляющая на границе этого поля будет:

$$H_n = H_n(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (6.3.4)$$

Если принять обычное допущение равенства температур жидкости и твердого тела на границе, то можно подставить значение  $\theta$  из уравнения (6.2.8) в выражение тепловой силы (6.3.2) и найти

$$Q' = Q_i - C_i, \quad (6.3.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= - \int_A \theta_a \frac{\partial H_n}{\partial q_i} dA; \\ C_i &= \iint_A \frac{\partial H_n}{\partial q_i}(P) \dot{H}_n(P') r(P, P', t) dA_P dA_{P'}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.6)$$

Для упрощения обозначим интеграл по поверхности границы  $A$  однократным интегралом. Поэтому мы записали  $H_n(P)$  или просто  $H_n$  вместо  $H_n(P, t)$ . Уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + C_i = Q_i. \quad (6.3.7)$$



Величина  $Q_i$  играет роль тепловой силы, соответствующей в данном случае адиабатической температуре на границе. Новый член  $C_i$  выражает характеристики поверхностного теплообмена с обтекающей тело жидкостью.

Для выяснения смысла слагаемого  $C_i$  рассмотрим линейную задачу, в которой теплоемкость и теплопроводность не зависят от температуры, а вектор  $\mathbf{H}$  выражается линейным соотношением (2.3.1) в виде

$$\mathbf{H} = \sum^i \mathbf{H}^{(i)}(x, y, z) q_i. \quad (6.3.8)$$

Получим:

$$H_n(P) = \sum^i H_n^{(i)}(P) q_i; \quad \dot{H}_n(P) = \sum^i H_n^{(i)}(P) \dot{q}_i. \quad (6.3.9)$$

При этом выражение (6.3.6) для  $C_i$  принимает вид:

$$C_i = \sum^j c_{ij} \dot{q}_j, \quad (6.3.10)$$

где

$$c_{ij} = \int_A \int_A H_n^{(i)}(P) H_n^{(j)}(P') r(P, P', t) dA_P dA_{P'}. \quad (6.3.11)$$

Тепловой потенциал и диссипативная функция в этом (линейном) случае будут:

$$V = \frac{1}{2} \sum^{ij} a_{ij} q_i q_j; \quad D = \frac{1}{2} \sum^{ij} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (6.3.12)$$

Следовательно, уравнения Лагранжа можно записать как

$$\sum^i a_{ij} q_j + \sum^i (b_{ij} + c_{ij}) \dot{q}_j = Q_i. \quad (6.3.13)$$

Они отличаются от линейных уравнений (2.3.14) наличием коэффициентов  $c_{ij}$ . Эти коэффициенты следует отличать от коэффициентов  $b_{ij}$ , поскольку первые обычно несимметричны:

$$c_{ij} \neq c_{ji}. \quad (6.3.14)$$

Из определения (6.3.11) видно, что это неравенство вытекает из следующего основного свойства функции влияния:

$$r(P, P', t) \neq r(P', P, t) \quad (6.3.15)$$

и обусловлено движением жидкости. Поэтому свойства взаимности не имеют места в задачах теплопроводности при наличии движения жидкости на границе.

В случае неподвижной жидкости неравенство (6.3.15) заменяется равенством и соотношения взаимности удовлетворяются.

Случай, рассмотренный в § 2.2, когда теплообмен задан локальным коэффициентом теплообмена  $K$ , является частным случаем этого общего метода. Он получается, если записать функцию влияния из уравнения (6.2.4) в виде

$$r(P, P', t) = \frac{1}{K(P, t)} \delta(P, P'), \quad (6.3.16)$$

где  $\delta(P, P') = \delta(P', P) = 0$  при  $P \neq P'$ . Следовательно, коэффициенты

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (6.3.17)$$

симметричны и могут быть введены в диссипативную функцию, как показано в гл. 2.

## 6.4. СОПРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ ДЛЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

В работе [Л. 6-1] автором было показано, что метод сопряженных полей, разработанный в гл. 4, можно обобщить на конвективный теплообмен.

Рассмотрим случай изотропной теплопроводности, не зависящей от температуры. Запишем поле теплового смещения, определяемого уравнением (4.4.4), в виде

$$\mathbf{H} = \Theta + \mathbf{F}, \quad (6.4.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= -k \operatorname{grad} \psi; \\ \psi &= \psi(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t); \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}(f_1, f_2, \dots, f_n, x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2)$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \quad (6.4.3)$$

Обобщенными координатами являются  $n$  координат  $q_i$  и  $k$  координат  $f_i$ . Задача сводится к разделению этих

двух групп координат в уравнениях Лагранжа. Запишем диссипативную функцию в виде

$$D = D_q + D_{qf} + D_f, \quad (6.4.4)$$

где

$$D_{qf} = - \iiint_{\tau} \dot{\mathbf{F}} \operatorname{grad} \psi d\tau \quad (6.4.5)$$

содержит перекрестные члены. Интегрирование производится по объему  $\tau$ . Интегрируя по частям выражение (6.4.5) с учетом уравнения (6.4.3), получаем

$$D_{qf} = - \int_A \dot{\psi} \dot{F}_n dA. \quad (6.4.6)$$

Здесь интегрирование производится по поверхности границы  $A$  твердого тела. Для упрощения мы опять будем использовать для обозначения двойного интеграла однократный. Обозначим через  $F_n$  внешнюю нормальную составляющую  $\mathbf{F}$  на границе  $A$ .

Уравнения Лагранжа распадаются на две группы:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + C_i = Q_i; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{f}_l} + C_l = Q_l. \quad (6.4.7)$$

В этих уравнениях  $Q_i$  и  $Q_l$  являются термодинамическими силами, сопряженными соответственно с координатами  $q_i$  и  $f_l$ , возникающими вследствие адиабатической температуры  $\theta_a$  на границе. В соответствии с уравнениями (6.3.6) величины  $C_i$  и  $C_l$  будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \iint_{AA} \frac{\partial \Theta_n}{\partial q_i}(P, t) \dot{H}_n(P', t) r(P, P', t) dA_P dA_{P'}; \\ C_l &= \iint_{AA} \frac{\partial F_n}{\partial f_l}(P, t) \dot{H}_n(P', t) r(P, P', t) dA_P dA_{P'}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.8)$$

В первой группе уравнений (6.4.7) перекрестные члены будут:

$$G_i = \frac{\partial D_{qf}}{\partial \dot{q}_i} + \iint_{AA} \frac{\partial \Theta_n}{\partial q_i}(P, t) \dot{F}_n(P', t) r(P, P', t) dA_P dA_{P'}. \quad (6.4.9)$$

Поменяв местами  $P$  и  $P'$  в выражении (6.4.9), получим:

$$G_i = \frac{\partial D_{qf}}{\partial \dot{q}_i} + \iint_{AA} \frac{\partial \Theta_n}{\partial q_i}(P', t) \dot{F}_n(P, t) r(P', P, t) dA_P dA_{P'}. \quad (6.4.10)$$

С другой стороны,

$$\dot{\psi} = \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (6.4.11)$$

откуда

$$\frac{\partial D_{\text{эф}}}{\partial \dot{q}_i} = - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial q_i} (P, t) \dot{F}_n(P, t) dA_P. \quad (6.4.12)$$

Подставив это значение в уравнение (6.4.10) для  $\mathfrak{E}_i$ , получим:

$$\mathfrak{E}_i = \int_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{F}_n(P, t) dA_P, \quad (6.4.13)$$

где

$$\mathcal{L} = -\psi(P, t) + \int_A \theta_n(P', t) r(P', P, t) dA_{P'}. \quad (6.4.14)$$

Координаты  $q_i$  и  $f_l$  разделяются в выражении (6.4.9), если положить  $\mathcal{L} = 0$ , т. е. если выбрать такое  $\psi$ , чтобы оно удовлетворяло граничному условию

$$\psi(P, t) = \int_A \theta_n(P', t) r(P', P, t) dA_{P'}. \quad (6.4.15)$$

Легко проверить, что при этом условии, а также если функция влияния  $r$  не зависит от  $t$ , координаты  $q_i$  и  $f_l$  разделяются и во второй группе уравнений (6.4.7)

*Сопряженные поля и аналоговая модель.* Рассмотрим температурное поле

$$\theta = \theta(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t), \quad (6.4.16)$$

являющееся функцией  $v$  обобщенных координат. Оно связано с полем теплового смещения (6.4.1) соотношением

$$c\theta = -\text{div } \mathbf{H}. \quad (6.4.17)$$

Определим поле теплового смещения  $\Theta'$ , сопряженное с  $\theta$ , положив:

$$\mathbf{H} = \Theta' + \mathbf{F}, \quad (6.4.18)$$

где

$$\Theta' = -k \text{ grad } \psi; \quad \text{div } \mathbf{F} = 0. \quad (6.4.19)$$

Будем считать, что  $\psi$  удовлетворяет граничному условию (6.4.15). Из этих соотношений получаем:

$$c\theta = \text{div}(\text{grad } \psi). \quad (6.4.20)$$

При заданном температурном поле  $\theta$  это уравнение совместно с граничным условием

$$\psi(P, t) = \int_A \theta'_n(P', t) r(P', P, t) dA_{P'} \quad (6.4.21)$$

полностью определяет  $\psi$ . Следовательно, сопряженное поле  $\Theta'$  определяется температурой  $\theta$ . Используя сопряженное поле, можно отделить  $v$  координат  $q_i$  от циклических координат  $f_i$  в первом из уравнений (6.4.7).

Физический смысл граничного условия (6.4.21) станет ясным, если записать

$$\bar{r}(P, P', t) = r(P', P, t). \quad (6.4.22)$$

Тогда уравнение (6.4.21) примет вид:

$$\psi(P, t) = \int_A \theta'_n(P', t) \bar{r}(P, P', t) dA_{P'}. \quad (6.4.23)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (6.2.8), увидим, что  $\psi(P, t)$  описывает возрастание температуры на границе в случае движущейся жидкости с функцией влияния  $\bar{r}(P, P', t)$ . Кроме того, уравнение (6.4.20) управляет температурой  $\psi$  в объеме тела с распределенными, не зависящими от времени стоками тепла с мощностью  $c\theta$ . Следовательно, мы получили для сопряженных полей аналоговую модель, сходную с моделью, описанной в § 4.4. Различие между ними заключается в граничном условии. Поле  $\Theta'$  является плотностью теплового потока, возникающего при наличии стоков тепла при граничном условии, задаваемом функцией влияния (6.4.22). Следует отметить, что эта аналоговая модель представляет мгновенно замороженное стационарное условие в данный момент  $t$ .

Физический смысл аналоговой модели станет яснее, если заметить, что во многих случаях, как будет показано ниже, функция  $\bar{r}(P, P', t)$ , входящая в граничное условие (6.4.23), является функцией влияния, соответствующей случаю конвективного теплообмена, полученного при обращении поля скоростей жидкости.

*Вариационный принцип и сопряженные поля.* Для теплообмена при отсутствии конвекции сопряженное поле  $\Theta'$  можно получить из температуры, минимизируя диссипацию, как показано в § 4.4. Аналогичный вариационный принцип применим в случае конвективного теп-

лообмена. Он получается, если приравнять нулю вариацию

$$\frac{1}{2} \delta \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \Theta'^2 d\tau + \int_A \int_A r(P', P) \theta'_n(P') \delta \theta'_n(P) dA_P dA_{P'} = 0 \quad (6.4.24)$$

при условии

$$\operatorname{div} \Theta' = -c\theta. \quad (6.4.25)$$

Сюда не входит в явном виде переменная  $t$ , поскольку поля соответствуют мгновенным значениям в данный момент времени. Поле  $\theta$  задается, а вариации  $\delta\Theta'$  должны удовлетворять условию (6.4.25). Это можно показать, используя методику, описанную в § 4.4.

Как будет показано ниже, функция  $r(P', P)$  связана с функцией влияния  $\bar{r}(P, P')$  смежной системы, полученной при обращении поля скорости жидкости.

*Теорема об обратном течении.* Рассмотрим стационарное течение однородной изотропной несжимаемой жидкости. Температурное поле удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} (cA \operatorname{grad} \theta) = cu \operatorname{grad} \theta. \quad (6.4.25a)$$

Течение, имеющее скорость  $u$ , может быть ламинарным или турбулентным, а значение  $A$  запишется в виде

$$A = \frac{k}{c} + \mathcal{E}, \quad (6.4.25b)$$

где  $\mathcal{E}$  — коэффициент изотропной турбулентной диффузии. Он может зависеть от координат, тогда как  $c$  и  $k$  постоянны. Температура  $\theta$  в той же жидкости после обращения поля скорости при том же значении коэффициента турбулентной диффузии  $\mathcal{E}$  описывается уравнением

$$\operatorname{div} (cA \operatorname{grad} \bar{\theta}) = -cu \operatorname{grad} \bar{\theta}. \quad (6.4.25b')$$

Если учесть условие несжимаемости

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (6.4.25g)$$

то из уравнений (6.4.25a) и (6.4.25b') получим соотношение

$$\operatorname{div} (cA\bar{\theta} \operatorname{grad} \theta - cA\theta \operatorname{grad} \bar{\theta} - c\theta \bar{\theta} u) = 0. \quad (6.4.25d)$$

Проинтегрируем это выражение по объему жидкости, ограниченному поверхностью жидкости  $S$  и границей твердого тела  $W$ . Объемный интеграл можно преобразовать в поверхностный с границей  $S+W$ . Если считать, что температурное поле  $\theta$  равно нулю на большом расстоянии, поверхностный интеграл по  $S$  равен нулю. Тогда интегрирование сводится к интегрированию по поверхности твердого

тела. Если принять во внимание условие, что нормальная составляющая скорости жидкости  $u$  на стенке равна нулю, получим:

$$\iint_W (cA \bar{\theta} \text{grad}_n \theta - cA \theta \text{grad}_n \bar{\theta}) dW = 0. \quad (6.4.25e)$$

Теперь будем считать, что температурное поле  $\theta$  образуется в результате поступления потока тепла с единичной скоростью в жидкость в точке  $P'$  на стенке. Запишем:

$$cA \text{grad}_n \theta = -\delta(P, P'), \quad (6.4.25ж)$$

где  $\delta(P, P')$  — функция Дирака. Поверхностная температура в точке  $P$  поверхности представляет соответствующую функцию влияния

$$\theta = r(P, P'). \quad (6.4.25з)$$

Аналогично можно выбрать  $\bar{\theta}$  для представления функции влияния в результате притока тепла в точке  $P''$  при обратном течении жидкости. Следовательно,

$$cA \text{grad}_n \bar{\theta} = -\delta(P, P''); \quad \bar{\theta} = \bar{r}(P, P''). \quad (6.4.25и)$$

Подставив значения (6.4.25ж), (6.4.25з) и (6.4.25и) в уравнение поверхностного интеграла (6.4.25e), получим:

$$\iint_W \{\bar{r}(P, P'') \delta(P, P') - r(P, P') \delta(P, P'')\} dW_P = 0, \quad (6.4.25к)$$

откуда

$$\bar{r}(P', P'') = r(P'', P'). \quad (6.4.25л)$$

Это уравнение показывает, что функция влияния для обращенного течения получается, если поменять местами точки в функции влияния для необращенного течения.

## 6.5. УНИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ «ТВЕРДОЕ ТЕЛО—ЖИДКОСТЬ» ПРИ НАЛИЧИИ КОНВЕКЦИИ

В предыдущих параграфах было показано, как можно сформулировать задачу теплопроводности в твердом теле, соприкасающемся с жидкостью, с помощью уравнений Лагранжа. Здесь попытаемся получить еще более общий метод вывода унифицированных уравнений Лагранжа для теплопроводности и конвекции в сложной системе, состоящей из твердого тела и движущейся жидкости.

Будем считать жидкость несжимаемой. Практически это означает, что сжимаемостью можно пренебречь. Однако жидкости могут иметь в общем случае и иные свойства, включая случаи неоднородности.

Первый этап обобщения уравнений Лагранжа на случай теплопроводности в движущейся жидкости описан в работе Нигама и Агравалья [Л. 6-3], а также в статье [Л. 6-1]. Более общий метод, описываемый здесь, разработан в работе [Л. 6-4].

*Энтальпия и тепловой потенциал частицы жидкости.* Для того чтобы учесть неоднородность жидкости, например наличие в жидкости частиц, отличных по своей природе от жидкости, необходимо применить некоторые рассмотренные ранее понятия для отдельных частиц жидкости. Определим частицы жидкости их начальными координатами  $X_i$  в момент времени  $t_i=0$ . Координаты  $x_i$  этих частиц в момент  $t$  будут:

$$x_i = x_i(X, t), \quad (6.5.1)$$

где  $X$  обозначает три начальные координаты. Поле скоростей жидкости выражается уравнением

$$v_i = \frac{\partial}{\partial t} x_i(X, t). \quad (6.5.2)$$

Считая жидкость несжимаемой, можно определить удельную объемную теплоемкость  $c$  жидкой частицы в виде

$$c = c(X, \theta). \quad (6.5.3)$$

Она является функцией температуры  $\theta$ . Предположение о зависимости  $c$  не только от температуры  $\theta$ , но и от начальных координат  $X$ , которые используются здесь для обозначения отдельных частиц, устанавливает влияние на эту величину физической природы частицы жидкости.

Две другие основные величины можно получить с помощью приведенного  $c$ :

удельная энтальпия частицы

$$h(X, \theta) = \int_0^{\theta} c(X, \theta) d\theta; \quad (6.5.4)$$

удельный тепловой потенциал частицы

$$F(X, \theta) = \int_0^{\theta} \theta dh, \quad (6.5.5)$$

где  $dh = cd\theta$ .

В последующих выводах физические величины будут выражаться как функции времени и фиксированных ко-



ординат  $x_i$ . Разрешая уравнение (6.5.1) относительно  $X_i$ , получаем:

$$X_i = X_i(x, t), \quad (6.5.6)$$

где начальные координаты частицы определяются как функции ее координат в момент времени  $t$ . Подставив в уравнения (6.5.2) — (6.5.5) значения начальных координат из (6.5.6), получим эти выражения в виде

$$\left. \begin{aligned} v_i &= v_i(x, t); & c &= c(x, t, \theta); \\ h &= h(x, t, \theta); & F &= F(x, t, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (6.5.7)$$

*Основные физические законы.* В основе описания физической природы теплопроводности и конвекции лежат уравнения:

$$\dot{h} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (J_i + v_i h) = 0; \quad (6.5.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = - \sum_j \lambda_{ij} J_j, \quad (6.5.9)$$

где несжимаемость выражается как  $\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ . Уравне-

ние (6.5.8), где  $\dot{h} = \partial h / \partial t$ , выражает сохранение энергии; вектор  $J_i$  представляет плотность потока тепловой энергии относительно среды, а  $v_i h$  — скорость конвекции. Уравнения (6.5.9) являются уравнениями теплопроводности, совпадающими с уравнениями (1.5.6), где  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$  — тензор теплового сопротивления, который может зависеть от  $x$ ,  $t$  и  $\theta$ .

В результате использования векторного поля теплового смещения  $H_i(x, t)$  при определении  $h$  и  $J_i$  получаем одну важную особенность, выражающуюся уравнениями:

$$h = - \sum_i \frac{\partial H_i}{\partial x_i}; \quad J_i = \dot{H}_i - v_i h. \quad (6.5.10)$$

Такое представление тождественно удовлетворяет уравнению сохранения энергии (6.5.8). Следовательно, если в качестве неизвестного физического поля используется величина  $H_i$ , необходимо, чтобы она удовлетворяла лишь уравнению теплопроводности (6.5.9). Важно отметить, что в данном анализе уравнение сохранения (6.5.8) играет роль голономной связи по аналогии с клас-

сической механикой. Следует обратить внимание на физический смысл вектора

$$H_i = J_i + v_i h. \quad (6.5.11)$$

Этот вектор представляет плотность суммарного теплового потока за счет теплопроводности и конвекции через поверхность, фиксированную в пространстве.

*Вариационный принцип и уравнения Лагранжа.* Запишем вариационное уравнение

$$\sum \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sum \lambda_{ij} J_j \right) \delta H_i = 0. \quad (6.5.12)$$

Для произвольных вариаций  $\delta H_i$  это уравнение эквивалентно уравнениям теплопроводности (6.5.9). Проинтегрируем уравнение (6.5.12) по объему  $\tau$ , причем первый член проинтегрируем по частям, используя соотношения

$$\delta h = - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \delta H_i; \quad \delta F = \theta \delta h, \quad (6.5.13)$$

полученные из уравнений (6.5.5) и (6.5.10). Получим:

$$\iiint_{\tau} \delta F d\tau + \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} J_j \delta H_i d\tau = - \iint_A \theta \sum^i n_i \delta H_i dA. \quad (6.5.14)$$

Интегрирование по поверхности производится по границе  $A$  объема  $\tau$ , а  $n_i$  обозначает внешнюю единичную нормаль к границе. Введем суммарный тепловой потенциал  $V$  в объеме  $\tau$

$$V = \iiint_{\tau} F d\tau. \quad (6.5.15)$$

При таком определении  $V$  уравнение (6.5.14) примет вид:

$$\delta V + \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} J_j \delta H_i d\tau = - \iint_A \theta \sum^i n_i \delta H_i dA. \quad (6.5.16)$$

Уравнение (6.5.16) является обобщением вариационного принципа и может применяться к системам с конвекцией. По форме он аналогичен вариационному принципу для чистой теплопроводности, выраженному уравнениями (1.5.10).

Как и ранее, этот принцип можно привести к уравнениям Лагранжа, считая векторное поле  $H_i$  функцией  $n$  обобщенных координат  $q_i$ :

$$H_i = H_i(q_1, q_2, \dots, q_n, x_1, x_2, x_3, t). \quad (6.5.17)$$

Вариации  $\delta H_i$  связаны исключительно с вариациями  $q_i$ . Они имеют вид:

$$\delta H_i = \sum_j^i \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (6.5.18)$$

Более того,

$$\dot{H}_i = \sum_j^i \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H_i}{\partial t}. \quad (6.5.19)$$

В результате получаем соотношение

$$\frac{\partial \dot{H}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial H_i}{\partial q_j}. \quad (6.5.20)$$

Следовательно, вариации (6.5.18) можно записать в виде

$$\delta H_i = \sum_j^i \frac{\partial \dot{H}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j. \quad (6.5.21)$$

Подставив в вариационное уравнение (6.5.16) значения  $\delta H_i$  из (6.5.18) и (6.5.21), получим уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i. \quad (6.5.22)$$

При этом диссипативная функция определяется как

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \sum_{ij} \lambda_{ij} J_i J_j d\tau. \quad (6.5.23)$$

Тепловое сопротивление здесь также считается симметричным ( $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ ) в соответствии с принципом Онзагера. Тепловая сила, как и ранее, определяется в виде

$$Q_i = - \iint_A \theta \sum_j^i n_j \frac{\partial H_j}{\partial q_i} dA. \quad (6.5.24)$$

*Турбулентное течение.* Представленные результаты могут применяться для турбулентных течений однород-

ных несжимаемых жидкостей, если ввести тензор

$$K_{ij} = k\delta_{ij} + c \mathcal{E}_{ij}. \quad (6.5.25)$$

В этом выражении:  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $k$  и  $c$  — соответственно теплопроводность и теплоемкость жидкости, а  $\mathcal{E}_{ij}$  — тензор турбулентной диффузии, так же, как и  $\lambda_{ij}$ , удовлетворяющий соотношениям взаимности

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ji}. \quad (6.5.26)$$

Теперь определим матрицу общего сопротивления как

$$[\lambda_{ij}] = [K_{ij}]^{-1}. \quad (6.5.27)$$

При таком определении  $\lambda_{ij}$  диссипативная функция (6.5.23) и уравнения Лагранжа (6.5.22) могут использоваться при изучении турбулентных течений.

*Внутренние источники тепла.* Во многих задачах необходимо учитывать внутреннее тепловыделение в жидкости. Теплота может выделяться, например, в результате внутреннего трения, химических и ядерных реакций или поглощения излучения. Влияние источников тепла можно учесть с помощью метода, описанного в § 1.6. Введем обозначение

$$\omega = \omega(x_1, x_2, x_3, t) \quad (6.5.28)$$

для тепловыделения в единице объема в единицу времени. При этом закон сохранения энергии (6.5.8) запишется в виде

$$\dot{h} + \sum_i^i \frac{\partial}{\partial x_i} (J_i + v_i h) = \omega. \quad (6.5.29)$$

Это уравнение тождественно удовлетворяется, если положить:

$$h = - \sum_i^i \frac{\partial H_i}{\partial x_i}; \quad J_i = \dot{H}_i - v_i h + H^*_{,i}, \quad (6.5.30)$$

где  $H^*_{,i}$  должно удовлетворять соотношению

$$\sum_i^i \frac{\partial H_i^*}{\partial x_i} = \int_0^t \omega dt. \quad (6.5.31)$$

Используя эти определения, можно получить уравнения Лагранжа с помощью метода, описанного в § 1.6 для случая чистой теплопроводности.

*Смешанные системы «твердое тело — жидкость».* Уравнения Лагранжа, полученные в этом параграфе, приводят к формулировке задач теплопроводности и конвекции в смешанных системах, состоящих из твердых частиц и движущейся жидкости. Область интегрирования может содержать как твердые частицы, так и жидкость. В области твердых частиц скорость  $v_i$  принимается равной нулю, а  $\lambda_{ij}$  представляет тепловое сопротивление твердых частиц. Для частиц жидкости, как указывалось выше, учитывается влияние турбулентной диффузии.

Такая унифицированная формулировка может иметь практическое применение для расчета теплообмена в пористых материалах, содержащих движущуюся жидкость.

*Принцип минимальной диссипации в конвективном теплообмене\**. Уравнения (6.5.22) по форме тождественны уравнениям Лагранжа (1.4.6). Принцип минимальной диссипации, рассматриваемый в гл. 1, зависит только от вида этих уравнений и поэтому может применяться в задачах конвективного теплообмена, если диссипативная функция определяется выражением (6.5.23).

## Глава седьмая

# ТЕПЛООБМЕН В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

## 7.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе описывается вариационное исчисление функции влияния и ее применения к ламинарным и турбулентным пограничным слоям. В ней используется материал, первоначально опубликованный в двух статьях [Л. 7-1, 7-2]. Функция влияния является основой расчета конвективного теплообмена. Она также является простой физической моделью для понимания основного механизма, связанного с теплопроводностью и конвекцией в движущейся жидкости.

В § 7.2 показано, что вариационные методы, разработанные для теплопроводности, могут применяться для

---

\* Решение задачи конвективного теплопереноса с помощью метода Био содержится в работе [Л. 6-5]. (Прим. ред.)

исследования теплообмена в пограничном слое при использовании аналогии теплопроводности, что позволяет без труда определить функцию влияния, как показано в § 7.3. Приведенный пример показывает также, что этот метод дает точные результаты даже при использовании грубой аппроксимации температурного распределения в жидкости.

В § 7.4 описан общий вариационный метод расчета функции влияния для пограничного слоя. Основные уравнения и параметры представлены в безразмерной форме. В § 7.5 проведен численный анализ ламинарного пограничного слоя. Получено приближенное кусочно-аналитическое выражение для функции влияния в безразмерном виде. Установлено, что на функции влияния не сказываются изменения профиля скорости и поэтому она применима во многих случаях. Сравнение с точным решением еще раз подтверждает высокую точность вариационного метода.

Аналогичное кусочно-аналитическое выражение для функции влияния получено в § 7.6 для турбулентного пограничного слоя. При правильном выборе параметров полученные численные результаты можно считать типичными для теплообмена в пограничном слое. В частности, очень важным является правильное определение такой характеристики пограничного слоя, как его характерная толщина.

Однако, как показано в § 7.7, понятие функции влияния можно использовать для общей формулировки задач теплообмена в пограничном слое. Рассмотрена задача теплообмена в пограничном слое свободного потока. Показано также, что понятие функции влияния при течении в трубе необходимо слегка модифицировать. Наконец, сформулирована задача теплообмена в противоточных теплообменниках.

Практическое значение функции влияния имеет глубокий физический смысл, включающий в себя основные теплообменные свойства жидкостей в виде квазилокальных эффектов в ограниченной области вниз по течению от данной точки. В результате имеем интуитивный подход, совместимый с вариационным анализом.

Особое внимание обращается на число Пекле, являющееся основным физическим параметром — мерой взаимодействия между теплопроводностью и конвекцией в жидкости.

## 7.2. АНАЛОГИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Во многих задачах теплообмена в жидкости существует возможность преобразовать уравнения к виду, полностью совпадающему с уравнениями чистой теплопроводности, что значительно упрощает использование вариационных принципов.

Рассмотрим стационарное двумерное течение несжимаемой жидкости. Для постоянных теплоемкости и теплопроводности температурное поле удовлетворяет следующему уравнению:

$$cu \frac{\partial \theta}{\partial x} + cv \frac{\partial \theta}{\partial y} = k \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right). \quad (7.2.1)$$

Компонентами поля скорости будут:

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y), \quad (7.2.2)$$

а свойство несжимаемости выражается условием

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7.2.3)$$

Обычно при анализе конвективного теплообмена пренебрегают величиной теплопроводности  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$  в направлении течения [Л. 7-3]. В результате получается упрощенное уравнение

$$cu \frac{\partial \theta}{\partial x} + cv \frac{\partial \theta}{\partial y} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (7.2.4)$$

Аналогичное уравнение получается для турбулентного течения, если ввести понятие «эффективной теплопроводности»

$$k' = k + c \mathcal{E}(x, y), \quad (7.2.5)$$

где  $\mathcal{E}(x, y)$  — коэффициент турбулентной диффузии, обусловленный турбулентностью. Вихревая диффузия принимается изотропной. Поскольку  $\mathcal{E}$  — функция координат,  $k'$  не является постоянной и уравнение (7.2.4) принимает вид:

$$cu \frac{\partial \theta}{\partial x} + cv \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k' \frac{\partial \theta}{\partial y} \right). \quad (7.2.6)$$

Ламинарное течение рассматривается как частный случай при  $\mathcal{E} = 0$ . Уравнение (7.2.6) получено автором в еще более упрощенной форме в недавно опубликован-

ной работе [Л. 7-2] с помощью метода, являющегося обобщением преобразования Мизеса\*.

Перейдем к новым переменным

$$x' = x'(x, y); \quad y' = y'(x, y). \quad (7.2.7)$$

Переменные  $x'$  и  $y'$  рассматриваются как криволинейные координаты. Выбираем функцию  $y'$  таким образом, чтобы значение ее было постоянным вдоль линии тока. По определению

$$u \frac{\partial y'}{\partial x} + v \frac{\partial y'}{\partial y} = 0, \quad (7.2.8)$$

а также

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y}. \quad (7.2.9)$$

Рассмотрим частный случай преобразования (7.2.9), положив

$$x' = x, \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = 0. \quad (7.2.10)$$

Объединив уравнения (7.2.8) — (7.2.10), получим:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = u \frac{\partial \theta}{\partial x'}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y}. \quad (7.2.11)$$

Положим:

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{1}{\alpha(x', y')}. \quad (7.2.12)$$

Теперь можно записать уравнение (7.2.6) в виде

$$cu\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{k'}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial y'} \right). \quad (7.2.13)$$

Вместо  $x'$  можно записать также

$$cu\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{k'}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial y'} \right), \quad (7.2.14)$$

где  $\alpha$ ,  $u$  и  $k'/\alpha$  — функции независимых переменных  $x$  и  $y'$ . Однако из-за условия несжимаемости произведение

$$cu = u_r(y') \quad (7.2.15)$$

\* В преобразовании Мизеса вместо более общей переменной  $y'$  используется функция тока  $\psi$ .



зависит только от  $y'$ ; это можно показать при рассмотрении двух линий тока с координатами  $y'_1$  и  $y'_2$ . Интеграл

$$\int_{y_1}^{y_2} u dy = \int_{y'_1}^{y'_2} u \frac{\partial y}{\partial y'} dy' = \int_{y'_1}^{y'_2} u \alpha dy' \quad (7.2.16)$$

представляет собой объем жидкости, заключенной между двумя линиями тока. Поскольку жидкость несжимаема, интеграл (7.2.16) — постоянная величина. Поэтому  $u\alpha$  не зависит от  $x$  вдоль любой линии тока  $y'$ , и окончательно уравнение (7.2.14) можно записать в виде

$$cu_r(y') \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{k'}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial y'} \right). \quad (7.2.17)$$

Это уравнение описывает нестационарную задачу теплопроводности, где  $x$  — временная переменная, а  $y'$  — переменная по координате.

Отсюда задачу конвективного теплообмена неоднородной жидкости можно решить с помощью аналоговой модели одномерной теплопроводности в неоднородной среде, где теплоемкость в единице объема равна  $cu_r y'$  и зависит только от координаты, тогда как теплопроводность  $k'/\alpha$  зависит как от времени, так и от координаты. Изложенное выше представляет аналогию теплопроводности.

Вследствие этого вариационные методы, разработанные для теплопроводности, применимы для решения задач конвективного теплообмена в ламинарных и турбулентных течениях.

### 7.3. ВАРИАЦИОННАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ

Вариационные методы в сочетании с аналогией теплопроводности дают очень точный и простой метод расчета функции влияния в задачах конвективного теплообмена.

Целью этого параграфа является проиллюстрировать этот метод на очень простом примере.

Рассмотрим однородный ламинарный поток с постоянной скоростью  $U$ . Ось  $x$  расположена в плоскости границы, а скорость направлена вдоль  $x$ . Ось  $y$  перпендикулярна границе. Рассматривается

двумерное поле течения в плоскости  $x, y$ , компоненты скорости которого

$$u = U, v = 0. \quad (7.3.1)$$

Начальная температура жидкости принимается равной  $\theta = 0$ .

Рассмотрим прямую линию на границе, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси  $x$ . На этой линии тепло поступает в жидкость со скоростью, равной единице на единицу длины. Через границу тепловые потоки отсутствуют. В результате имеем распределение температуры вниз по течению вдоль оси  $x$ :

$$\theta = r(x). \quad (7.3.2)$$

Если линия притока тепла расположена на абсциссе  $\xi$ , а не в начале координат, распределение температуры вниз по потоку будет иметь вид:

$$\theta = r(x - \xi). \quad (7.3.3)$$

Положив  $x = s$ , а  $\xi = s'$ , можем записать:

$$\theta = r(s - s') = r(s, s'). \quad (7.3.4)$$

Следовательно,  $r(s - s')$  представляет частный случай одномерной функции влияния, определяемой выражением (6.2.9). При этом принимается, что адиабатическая температура жидкости  $\theta_a = 0$ . Это однако не ограничивает общности результатов, если справедлив принцип суперпозиции. Поскольку поток является ламинарным, положим:

$$k' = k. \quad (7.3.5)$$

Подставив значения  $u$  и  $v$  из уравнения (7.3.1), получим уравнение (7.2.4) в виде

$$cU \frac{\partial \theta}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (7.3.6)$$

При этом принимается, что линия притока тепла расположена в начале координат ( $\xi = 0$ ). Задача состоит в определении функции влияния  $r(x)$ . Поскольку рассматривается двумерная задача, возьмем слой жидкости единичной толщины, параллельный плоскости  $xy$ . Скорость притока тепла в этот слой в начале координат равна единице.

Проинтегрировав уравнение (7.3.6) по  $y$  от  $y = 0$  до  $y = \infty$ , получим:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -k \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (7.3.7)$$

где

$$I(x) = \int_0^{\infty} cU\theta \, dy. \quad (7.3.8)$$

При выводе этого уравнения принималось, что  $\partial \theta / \partial y$  стремится к нулю при  $y = \infty$ . Выражение  $-k \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$  является скоростью притока тепла в жидкость. Поэтому можно записать:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -k \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \delta(x), \quad (7.3.9)$$

где  $\delta(x)$  равна нулю всюду, за исключением произвольно малой области в окрестности  $-\varepsilon < x < \varepsilon$ , причем  $\delta(x)$  обладает следующим свойством:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1. \quad (7.3.10)$$

Такая функция Дирака  $\delta(x)$  означает, что единичная скорость притока тепла сосредоточена в точке  $x=0$ .

Рассмотрим функцию  $I(x)$ . Проинтегрировав уравнение (7.3.9) по  $x$ , получим:

$$I(x) = \int_{\theta}^x \delta(x) dx = 1. \quad (7.3.11)$$

Заметим, что  $I(-\varepsilon) = 0$ , поскольку  $\theta$  стремится к нулю вверх по потоку от точки ввода тепла. Следовательно, в соответствии с соотношениями (7.3.8) и (7.3.11) можно записать:

$$\int_0^{\infty} cU\theta dy = 1 \text{ при } x > 1. \quad (7.3.12)$$

Эти уравнения можно объяснить с помощью аналогии теплопроводности. Уравнение (7.3.6) является одномерным уравнением теплопроводности в твердом теле с теплоемкостью  $cU$  и теплопроводностью  $k$  при переменной времени  $t=x$ . Твердое тело занимает область  $y > 0$  с плоской границей  $y=0$ . На границе при  $y=0$  в момент  $t=0$  поступает единица количества тепла на единицу площади поверхности; после этого граница тотчас же теплоизолируется и происходит диффузия тепла в твердое тело. Общее количество тепла, в соответствии с уравнением (7.3.12) равное единице, не изменяется.

Для того чтобы использовать вариационный метод для решения этой аналоговой задачи, примем следующее температурное распределение:

$$\theta = \frac{3}{2cUq} \left( 1 - \frac{y^2}{q^2} \right) (y < q), \quad (7.3.13)$$

удовлетворяющее условию постоянства интеграла (7.3.12). Тепловой потенциал этой аналоговой задачи будет:

$$V = \frac{1}{2} cU \int_0^q \theta^2 dy = \frac{3}{5cUq}. \quad (7.3.14)$$

Величина  $H$  равна:

$$H = cU \int_y^q \theta dy = 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{q} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{q^3}. \quad (7.3.15)$$

Диссипативная функция запишется:

$$D = \frac{1}{2k} \int_0^q \dot{H}^2 dy = \frac{3}{35k} \frac{\dot{q}^2}{q}, \quad (7.3.16)$$

где  $\dot{q} = \frac{dq}{dx}$ , поскольку  $x$  играет роль переменной времени. Термодинамическая сила  $Q$  равна нулю, так как граница изолирована. Математически это выражается свойством  $\delta H = 0$  при  $y = 0$ . Отсюда имеем уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (7.3.17)$$

Подставив в него значения  $V$  и  $D$  из уравнений (7.3.14) и (7.3.16), получим дифференциальное уравнение

$$2q\dot{q} = 7 \frac{k}{cU}. \quad (7.3.18)$$

Произведя интегрирование с начальным условием  $q = 0$  при  $x = 0$ , получим:

$$q = \sqrt{\frac{7kx}{cU}}. \quad (7.3.19)$$

Температуру на границе найдем, положив в выражении (7.3.13)  $y = 0$ :

$$\theta = \frac{13}{2cUq}. \quad (7.3.20)$$

Подставив в это выражение величину  $q$  из (7.3.19), будем иметь:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{28}{9} cUkx}}. \quad (7.3.21)$$

Эта температура является функцией влияния для притока тепла при  $\xi = 0$ . Запишем ее в виде

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{28}{9} cUkx}}. \quad (7.3.22)$$

Поскольку поле течения не зависит от  $x$ , функция влияния для притока тепла на абсциссе  $\xi$  равна  $r(x - \xi)$ .

Этот результат можно сравнить с точным решением. Следующая функция является решением уравнения (7.3.6):

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi cUkx}} \exp\left(-\frac{cUy^2}{4kx}\right). \quad (7.3.23)$$

Это выражение удовлетворяет также условию постоянства величины интеграла (7.3.12). Точное значение функции влияния, полученное подстановкой  $y = 0$  в (7.3.23), будет:

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi cUkx}}. \quad (7.3.24)$$

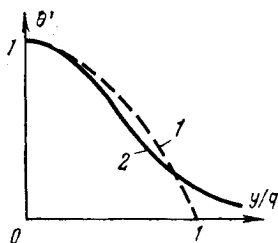


Рис. 7.1. График зависимости  $\theta' = \theta \sqrt{\pi c U k x}$  от  $y/q$ .

1 — параболическая аппроксимация (7.3.13); 2 — точное распределение Гаусса (7.3.23).

Сравнив приближенную величину (7.3.23) с выражением (7.3.24), увидим, что в первом случае постоянная будет  $\sqrt{\frac{28}{9}} = 1,765$ , а во втором  $\sqrt{\pi} = 1,772$ . Следовательно, погрешность приближенной оценки составляет менее 0,5%.

Можно также сравнить приближенное и точное температурное распределение в жидкости по выражениям (7.3.13) и (7.3.23). Они представлены на рис. 7.1 для одномерной задачи в безразмерном виде  $\theta' = \theta \sqrt{\pi c U k x}$ . Интересно отметить, что даже при довольно грубом приближении температурного распределения в жидкости получается высокая точность для функции влияния.

#### 7.4. ОБЩИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Зная функцию влияния, можно рассчитать теплообмен в пограничном слое. Использование этой функции в типичных задачах пограничного слоя будет рассмотрено в § 7.7.

Общие вариационные методы для расчета функции влияния получим с помощью определенной стандартной аппроксимации, используя безразмерные параметры и переменные, соответствующие основным физическим свойствам.

Прежде всего возьмем параллельные линии тока и покажем, каким образом можно обобщить этот метод на случай непараллельных линий тока. В анализе положим  $\theta_a = 0$ . Поскольку принцип суперпозиции применим, это условие не ограничивает общности результатов.

*Параллельные линии тока и ламинарное течение.* Аналогю теплопроводности получим, положив в уравнении (7.2.4)  $v = 0$

$$c u \frac{\partial \theta}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (7.4.1)$$

Профиль скорости в пограничном слое имеет вид:

$$u = u(y). \quad (7.4.2)$$

Положив

$$c'(y) = cu(y), \quad (7.4.3)$$

получим уравнение (7.4.1) в виде

$$c'(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (7.4.4)$$

Функцию влияния можно найти, приняв плотность теплового потока на границе при  $x=0$  равной единице. Используем некоторые приемы, описанные в § 7.3. В данном случае вместо условия (7.3.12) запишем:

$$\int_0^{\infty} c'(y) \theta dy = 1 \quad (7.4.5)$$

при  $x > 0$ .

Уравнения (7.4.4) и (7.4.5) представляют аналогию теплопроводности в среде с неравномерной теплоемкостью  $c'(y)$  и суммарным теплосодержанием, равным единице. Аналогию теплопроводности можно сформулировать в безразмерном виде, положив

$$u(y) = U\varphi(\eta), \quad (7.4.6)$$

где

$$\eta = \frac{y}{\delta}. \quad (7.4.7)$$

Обозначим через  $U$  начальную скорость, а через  $\delta$  характеристическую толщину пограничного слоя и введем безразмерную переменную:

$$\tau = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{\delta}, \quad (7.4.8)$$

где

$$\text{Pe} = \frac{cU\delta}{k} \quad (7.4.9)$$

число Пекле, рассчитанное по  $U$  и  $\delta$ .

Тогда можем записать уравнение (7.4.4) в безразмерном виде

$$\varphi(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}. \quad (7.4.10)$$

Аналогия теплопроводности, описываемая этим уравнением, представлена нестационарной теплопроводностью

стью в среде с теплоемкостью  $c = \varphi(\eta)$ , зависящей от глубины  $\eta$ , и теплопроводностью  $k=1$ . Время представлено переменной  $\tau$ . Условие (7.4.5) принимает вид:

$$\int_0^{\infty} \theta \varphi(\eta) d\eta = H_0, \quad (7.4.11)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{kPe}. \quad (7.4.12)$$

Следовательно, в безразмерной аналогии теплопроводности  $H_0$  — количество тепла, поступающего в момент  $\tau=0$ .

Теперь возьмем вариационный принцип для получения функции влияния, соответствующей поступлению тепла на границе при  $x=0$ , используя аналогию теплопроводности по уравнению (7.4.10). Распределение температуры в полуограниченном твердом теле в области  $\eta > 0$  аппроксимируется кубическим выражением

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_0 \left(1 - \frac{\eta^3}{q^3}\right) && \text{при } \eta < q; \\ \theta &= 0 && \text{при } \eta > q, \end{aligned} \right\} \quad (7.4.13)$$

где  $q$  — глубина проникновения, являющаяся неизвестной функцией времени  $\tau$ . Вместо параболического приближения (7.3.13) принимается кубическое, поскольку оно дает точные решения для обычных профилей скорости, где  $\varphi(\eta)$  пропорционально  $\eta$  вблизи границы  $\eta=0$ . Температура  $\theta_0$  при  $\eta=0$  в выражении (7.4.13) есть функция  $q$ , определяемая интегральным соотношением (7.4.11). Это функциональное соотношение получается после подстановки  $\theta$  из (7.4.13) в интегральное выражение (7.4.11). Запишем его в виде

$$\theta_0 \left(A - \frac{B}{q^3}\right) = H_0 \quad (7.4.14)$$

при следующих функциях  $q$ :

$$A = \int_0^q \varphi(\eta) d\eta; \quad B = \int_0^q \eta^3 \varphi(\eta) d\eta. \quad (7.4.15)$$

Тепловой потенциал, соответствующий уравнению (7.4.10), будет:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^q \varphi(\eta) \theta^2 d\eta. \quad (7.4.16)$$

Аналог теплового смещения в точке  $\eta$  выражается

$$H = \int_{\eta}^q \theta \varphi(\eta) d\eta. \quad (7.4.17)$$

Целесообразно преобразовать это выражение, используя условие (7.4.11), записав его в виде

$$H = H_0 - \int_0^{\eta} \theta \varphi(\eta) d\eta. \quad (7.4.18)$$

Получим:

$$\dot{H} = - \int_0^{\eta} \dot{\theta} \varphi(\eta) d\eta. \quad (7.4.19)$$

При расчете этого выражения необходимо использовать соотношение

$$\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} = -R \frac{\dot{q}}{q}, \quad (7.4.20)$$

где

$$R = \frac{3B}{Aq^3 - B} \quad (7.4.21)$$

— функция  $q$ . Соотношение (7.4.20) получается при дифференцировании уравнения (7.4.14) по  $\tau$ . Поэтому диссипативная функция  $D$  будет иметь вид:

$$D = \frac{1}{2} \int_0^q \dot{H}^2 d\eta = \frac{1}{2} \theta_0^2 M q \dot{q}^2, \quad (7.4.22)$$

где  $M$  — функция  $q$ .

Уравнение Лагранжа для  $q$  будет:

$$\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (7.4.23)$$

Правая часть этого уравнения равна нулю, поскольку граница при  $\eta=0$  теплоизолирована (отсутствует тепловой поток) и соответствующая тепловая сила равна нулю. Из уравнения (7.4.16) получим также

$$\frac{\partial V}{\partial q} = -\theta_0^2 L, \quad (7.4.24)$$

где  $L$  — функция  $q$ .

Подставив в уравнение Лагранжа (7.4.23) выражения (7.4.22) и (7.4.24), получим:

$$g(q) q \dot{q} = 1, \quad (7.4.25)$$



где

$$g(q) = \frac{M}{L}. \quad (7.4.26)$$

С начальным условием  $q=0$  для  $\tau=0$  интеграл дифференциального уравнения (7.4.25) будет иметь вид:

$$\tau = \int_0^q qg(q) dq. \quad (7.4.27)$$

С другой стороны, из уравнения (7.4.14) получим  $\theta_0$  как функцию  $q$ :

$$\theta_0 = \frac{H_0}{A - B/q^3}. \quad (7.4.28)$$

По уравнениям (7.4.27) и (7.4.28) можно построить график зависимости  $\theta_0$  от  $\tau$ , рассчитав ординаты и абсциссы как параметрические функции  $q$ . Этот график можно представить выражением

$$\Phi(\tau) = \frac{\theta_0}{H_0} = \frac{1}{A - B/q^3}, \quad (7.4.29)$$

где  $\Phi(\tau)$  — функция влияния в безразмерном виде, названная автором «приведенной функцией влияния»;  $\theta_0$  — действительная температура на границе. Следовательно, возвращаясь снова к физическим переменным по уравнениям (7.4.8) — (7.4.12), получаем функцию влияния в виде

$$\theta_0 = r(x) = \frac{1}{kPe} \Phi\left(\frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}\right). \quad (7.4.30)$$

*Параллельные линии тока и турбулентное течение.* Покажем, что аналогию теплопроводности в безразмерном виде по уравнению (7.4.10) можно распространить на течение в турбулентном пограничном слое с параллельными линиями тока. Этот случай получается, если положить:

$$y' = y; \quad \alpha = 1; \quad u_r = u(y); \quad k'(y) = k + c \mathcal{E}(y), \quad (7.4.31)$$

где  $\mathcal{E}(y)$  — коэффициент турбулентной диффузии. Подставив эти значения в уравнение (7.2.17), получим его в виде

$$cu(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ k'(y) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\}. \quad (7.4.32)$$

Обозначим через  $U$  начальную скорость, а через  $\delta$  — характерную толщину пограничного слоя. Введем без-

размерные переменные  $\tau$  и  $\eta$  по соотношениям (7.4.7) и (7.4.8). В этих переменных дифференциальное уравнение (7.4.32) примет вид:

$$\varphi(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \sigma(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\}, \quad (7.4.33)$$

где

$$\sigma(\eta) = \frac{k'}{k} = 1 + \frac{c\mathcal{E}}{k}. \quad (7.4.34)$$

Произведя замену переменной

$$\eta' = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sigma}, \quad (7.4.35)$$

упростим уравнение (7.4.33) еще больше

$$\beta(\eta') \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta'^2}, \quad (7.4.36)$$

где

$$\beta(\eta') = \varphi(\eta) \sigma(\eta). \quad (7.4.37)$$

Уравнение (7.4.36) имеет вид уравнения (7.4.10) и также представляет безразмерную аналогию теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, равным единице, и теплоемкостью  $\beta(\eta')$ . Однако поведение функции  $\beta(\eta')$  отличается от поведения функции  $\varphi(\eta)$ . Вариационный метод, разработанный для ламинарного течения и использующий приближенное распределение температуры (7.4.13), может применяться для задач о турбулентных течениях только в частных случаях. Модифицированный соответствующим образом метод описан в § 7.6, посвященном численному анализу функции влияния в турбулентном пограничном слое.

*Непараллельные линии тока.* В этом случае функция влияния зависит от точки подвода тепла. Примем эту точку в качестве начала координат. Следовательно, абсцисса  $x$  есть расстояние вниз по потоку от этой точки. Рассмотрим аналогию теплопроводности по уравнению (7.2.17). Координату  $y'$ , постоянную вдоль линий тока, можно определить таким образом, чтобы  $y = y'$ ,  $\alpha = 1$  на оси  $y$ . Следовательно,  $y$  — расстояние по нормали через точку подвода тепла, а функция  $u_r(y') = \alpha u$  — профиль скорости в этой точке.

Функцию влияния для непараллельных линий тока можно получить, применив вариационный анализ к уравнению (7.2.17). Коэффициент  $k'/\alpha$  в этом уравнении будет зависеть как от  $y'$ , так и от  $x$ , что приводит к анализу, отличающемуся от описанного метода для параллельных линий тока. Однако последний еще может использоваться, если допустить, что основной процесс теплообмена ограничен достаточно узкой областью вниз по течению от точки подвода тепла. В этом случае можно считать, что в этой области  $k'$  и  $\alpha$  почти не зависят от  $x$ , так что мы можем положить  $\alpha=1$

$$k'(x, y') = k'(y'). \quad (7.4.38)$$

Следовательно, уравнение (7.2.17) тождественно уравнению (7.4.32) для параллельных линий тока. В результате этих допущений получаем простое решение, которое можно рассматривать как первое приближение для случая непараллельных линий тока.

Заметим, что в данном случае  $U$  зависит от точки подвода тепла, так что  $Pe$  — локальное число Пекле.

Дальнейшее уточнение такого первого приближения можно получить, применив вариационный принцип к уравнению (7.2.17).

## 7.5. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Используем общий метод, описанный в предыдущем параграфе, для приближенной численной оценки функции влияния в ламинарном пограничном слое. Рассмотрим два предельных профиля скорости. В первом случае примем кусочно-линейный профиль, а во втором — параболический. Линии тока будем считать параллельными.

*Кусочно-линейный профиль скорости.* Распределение скорости в этом случае будет иметь вид (рис. 7.2,а)

$$\left. \begin{aligned} u &= U \frac{y}{\delta} & \text{при } y < \delta; \\ u &= U & \text{при } y > \delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.1)$$

Характеристическая толщина слоя  $\delta$  представлена ординатой, соответствующей точке, в которой скорость

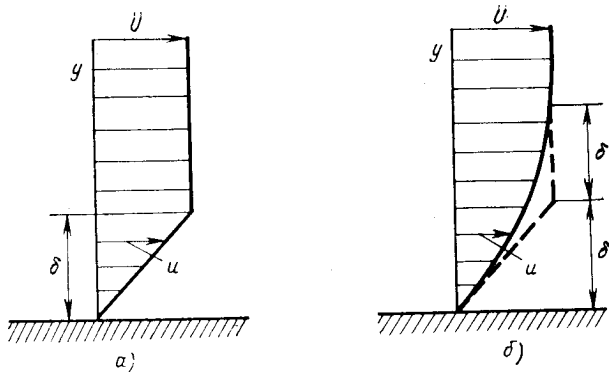


Рис. 7.2. Идеализированные профили скорости для ламинарного пограничного слоя.

*a* — кусочно-линейный профиль; *б* — параболический профиль.

принимает постоянное значение  $U$ . В этом случае функция  $\varphi(\eta)$ , определяемая уравнением (7.4.6), имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta) &= \eta & \text{при } \eta < 1; \\ \varphi(\eta) &= 1 & \text{при } \eta > 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.2)$$

При этом безразмерное уравнение (7.4.10) для аналогии теплопроводности запишется как

$$\eta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} (\eta < 1); \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} (\eta > 1). \quad (7.5.3)$$

Следуя общему методу, используем приближенное кубическое распределение температуры (7.4.13). Поэтому необходимо различать две фазы, когда глубина проникновения  $q$  меньше или больше единицы.

В первой фазе, когда  $q < 1$ , тепло еще не распространилось за пределы толщины пограничного слоя  $\delta$ . В этой фазе мы получим  $\varphi(\eta) = \eta$ . Этот случай легко поддается расчету. Выражение (7.4.26) принимает вид:

$$g(q) = \frac{2}{11} q, \quad (7.5.4)$$

а из уравнений (7.5.27) и (7.5.28) получим:

$$\tau = \frac{2}{33} q^3; \quad \theta_0 = \frac{10}{3} \frac{H_0}{q^2}. \quad (7.5.5)$$

Исключив  $q$  из этих двух уравнений, имеем:

$$\theta_0 = 0,514 H_0 \tau^{-\frac{2}{3}}. \quad (7.5.6)$$

Сравнив полученный результат с общим уравнением (7.4.29), увидим, что приведенная функция влияния в первой фазе будет

$$\Phi(\tau) = 0,514\tau^{-\frac{2}{3}}. \quad (7.5.7)$$

Во второй фазе, где  $q > 1$ , необходимо рассчитать функции  $A(q)$ ,  $B(q)$  и  $g(q)$ , определяемые уравнениями (7.4.15) и (7.4.26) общего вариационного подхода. Расчет следует проводить для всей области  $\eta$  от  $\eta=0$  до  $\eta=q > 1$ , используя два кусочно-линейных выражения (7.5.2). Он может быть выполнен либо численно, либо аналитически. Из анализа графика расчета видно, что функцию  $g(q)$  можно определить приближенно в следующем аналитическом виде [Л. 7-2]:

$$\left. \begin{aligned} g(q) &= \frac{2}{11} q \quad \text{при } q < 1; \\ g(q) &= \frac{28q}{73 + 81q} \quad \text{при } q > 1, \end{aligned} \right\} \quad (7.5.8)$$

откуда просто вычислить интеграл (7.4.27) для  $\tau$ . Тогда  $\tau$  и  $\Phi(\tau)$  по уравнению (7.4.29) получаются в зависимости от  $q$ . Их значения приведены в табл. 7.1 для второй фазы ( $q > 1$ ) (см. рис. 7.2,а) в сравнении с приближенными значениями из (7.5.9).

Таблица 7.1

$q$	$\tau$	$\Phi(\tau)$	$0,514\tau^{-\frac{2}{3}}$	$0,554\tau^{-\frac{1}{2}}$
1,00	0,0606	3,33	3,33	—
1,50	0,186	1,57	1,58	—
2,00	0,386	0,993	0,970	—
2,45	0,640	0,750	0,693	0,693
3,00	1,02	0,571	—	0,548
4,00	1,98	0,400	—	0,400
6,00	4,91	0,250	—	0,250

Из этой таблицы видно, что кусочно-аналитическое приближение можно считать удовлетворительным для большинства практических задач:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\tau) &= 0,514\tau^{-\frac{2}{3}} \quad \text{при } \tau < 0,64; \\ \Phi(\tau) &= 0,554\tau^{-\frac{1}{2}} \quad \text{при } \tau > 0,64. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.9)$$

Значение  $0,514\tau^{-\frac{2}{3}}$  одинаково для обеих фаз. Интересно отметить, что первое из равенств (7.5.9) имеет место во второй фазе вплоть до точки  $q=2,45$ . В первой фазе тепло не распространяется в жидкость за пределы толщины  $\delta$ , соответствующей  $q=1$ , а в точке  $q=2,45$  тепло проникает на глубину  $2,45\delta$ .

Величина  $0,554\tau^{-\frac{1}{2}}$  есть асимптотическое значение для больших  $q$ . Она равна величине, найденной вариационным методом для профиля скорости  $\varphi(\eta)=1$ , постоянной во всей области.

В точке  $\tau=0,64$  значения  $0,514\tau^{-\frac{2}{3}}$  и  $0,554\tau^{-\frac{1}{2}}$  равны.

Из табл. 7.1 видно, что приближение (7.5.9) является точным, за исключением незначительного отклонения в ограниченной области вблизи точки  $\tau=0,64$ .

*Сравнение с точными решениями.* В первой фазе вариационное решение соответствует случаю, когда линейный профиль скорости простирается до бесконечности. Для этого случая имеем:

$$\varphi(\eta) = \eta \text{ при } 0 < \eta < \infty. \quad (7.5.9a)$$

Задача сводится к решению уравнения

$$\eta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}, \quad (7.5.9б)$$

справедливому для всей области положительных  $\eta$ . Легко проверить, что точным решением уравнения (7.5.9б) будет:

$$\theta = C\tau^{-\frac{2}{3}} \exp\left(-\frac{\eta^3}{9\tau}\right), \quad (7.5.9в)$$

где  $C$  — постоянный коэффициент. Это решение удовлетворяет граничному условию  $\partial\theta/\partial\eta=0$  при  $\eta=0$ . Постоянная  $C$  определяется из условия (7.4.11). Найдем:

$$C = \frac{H_0}{V^{\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad (7.5.9г)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. Значение  $\theta_0$  для  $\theta$  при  $\eta=0$  будет:

$$\theta_0 = 0,512H_0\tau^{-2/3}, \quad (7.5.9д)$$

откуда получим приведенную функцию влияния

$$\Phi(\tau) = \frac{\theta_0}{H_0} = 0,512\tau^{-\frac{2}{3}}. \quad (7.5.9е)$$

Тогда приближенное выражение (7.5.7), полученное с помощью вариационного принципа, будет иметь вид:

$$\Phi(\tau) = 0,514\tau^{-\frac{2}{3}}. \quad (7.5.9ж)$$

Сравнив его с точным значением (7.5.9в), увидим, что его погрешность составляет 0,5%.

В качестве другого предельного случая рассмотрим асимптотическое решение уравнений (7.5.3) при больших значениях  $\tau$ , что соответствует постоянному профилю скорости  $u=U$ , откуда  $\Phi(\eta)=1$ . Точное решение для этого случая получено в § 7.3 в виде уравнения (7.3.24), которое можно записать как

$$\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{(\pi c U k x)}} = \frac{H_0}{\sqrt{(\pi c)}}, \quad (7.5.9з)$$

откуда

$$\Phi(\tau) = 0,565\tau^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.5.9и)$$

Сравнив это точное значение с приближенным выражением  $0,554\tau^{-\frac{1}{2}}$  из уравнения (7.4.10), полученного вариационным методом для  $\Phi(\eta)=1$  при использовании преобразования (7.4.13), увидим, что его погрешность составляет примерно 2%. Заметим, что эта погрешность больше погрешности выражения (7.3.13) для температуры, что можно объяснить использованием кубического уравнения (7.4.13) вместо параболического. При решении практических задач предпочтительнее использовать кубические выражения, поскольку они дают более высокую точность в первой фазе, которая играет более важную роль.

*Параболический профиль скорости.* Рассмотрим пограничный слой, профиль скорости которого показан на рис. 7.2,б. На толщине  $2\delta$  профиль скорости является параболическим. За пределами этой толщины скорость постоянна и равна  $U$ . Функция  $\Phi(\eta)$ , соответствующая этому профилю, будет:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta) &= \eta \left( 1 - \frac{1}{4} \eta \right) && \text{при } \eta < 2; \\ \varphi(\eta) &= 1 && \text{при } \eta > 2. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.10)$$

Толщина  $\delta$  в данном случае равна толщине, соответствующей кусочно-линейному профилю скорости, который получается при проведении касательной к параболе в точке  $y=0$ .

Функция влияния для этого параболического профиля получается, если в общие выражения § 7.4 подставить значения  $\Phi(\eta)$  из (7.5.10). Результат получен чис-

ленно в работе [Л. 7-2]. Для большинства практических задач найдено, что приведенную функцию влияния можно аппроксимировать кусочно-аналитическими выражениями (7.5.9). Это приближение дает хорошие результаты в области  $\tau < 0,1$ , имеющей важное значение. Однако вблизи  $\tau = 0,6$  оно дает погрешность около 10%, которая снижается при увеличении  $\tau$ . Приближение улучшается, если ввести дополнительно небольшую величину  $\Phi$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\tau) &= 0,514\tau^{-\frac{2}{3}} + \frac{0,66\tau}{1+9\tau^2} & \text{при } \tau < 0,64; \\ \Phi(\tau) &= 0,554\tau^{-\frac{1}{2}} + \frac{0,66\tau}{1+9\tau^2} & \text{при } \tau > 0,64. \end{aligned} \right\} (7.5.11)$$

В результате погрешность снижается до 2%.

Из этого анализа можно сделать вывод, что функция влияния не зависит от профиля скорости, если характеристическая толщина  $\delta$  получается в результате построения касательной к профилю скорости на стенке (см. рис. 7.2). Величина  $\delta$  есть расстояние от стенки до точки пересечения этой касательной с линией  $u = U$ , соответствующей постоянной скорости вне границы пограничного слоя\*. Для семейства профилей скорости между двумя рассмотренными предельными случаями, где не требуется высокая точность, может использоваться приближенное значение  $\Phi(\tau)$  по уравнению (7.5.9).

## 7.6. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Модифицируем общий метод, описанный в § 7.4, для вывода приближенного выражения функции влияния в турбулентном пограничном слое. Рассмотрим случай параллельных линий тока.

В первоначальном анализе турбулентного пограничного слоя, проведенного Карманом [Л. 7-4, 7-5] и другими авторами, использовалась толщина

$$\delta = 14\nu \sqrt{\left(\frac{\rho}{S}\right)}, \quad (7.6.1)$$

\* Этот результат объясняется тем, что безразмерный коэффициент теплообмена или локальное число Нуссельта равно  $x/\delta (Nu_x = x/\delta)$ . (Прим. ред.)



где  $S$  — напряжение трения на стенке;  $\rho$  — плотность жидкости, а  $\nu$  — кинематическая вязкость. (Коэффициент вязкости —  $\nu\rho$ .)

Профиль скорости для турбулентного пограничного слоя показан на рис. 7.3. Его можно разделить на три отдельные области:

а) ламинарный подслой при  $y < \frac{1}{3} \delta$ ;

б) переходный слой при  $\frac{1}{3} \delta < y < 2\delta$ ;

в) полностью развитая турбулентная область при  $y > 2\delta$ .

В качестве характерной скорости удобно принять выражение

$$U = 14 \sqrt{\left(\frac{S}{\rho}\right)}. \quad (7.6.2)$$

Как показано на рис. 7.3, эта скорость равна скорости, которая могла бы иметь место на расстоянии  $y = \delta$ , при линейном распределении профиля скорости, который совпадает с касательной к действительному профилю скорости на стенке. Это можно увидеть, сравнив уравнения (7.6.1) и (7.6.2) и записав

$$S = \nu\rho \frac{U}{\delta}. \quad (7.6.3)$$

Для  $U$  и  $\delta$  число Рейнольдса будет:

$$\text{Re} = \frac{U\delta}{\nu} = 196. \quad (7.6.4)$$

Во многих задачах конвективного теплообмена используется следующее определение числа Прандтля:

$$\text{Pr} = \frac{k}{\nu c}. \quad (7.6.5)$$

Объединив соотношения (7.6.4) и (7.6.5), можем записать выражение (7.4.9) для числа Пекле в виде

$$\text{Pe} = \frac{196}{\text{Pr}}. \quad (7.6.6)$$

Конечно, такое описание турбулентного пограничного слоя является приближенным. Однако для наших целей можно считать, что оно близко соответствует действию.

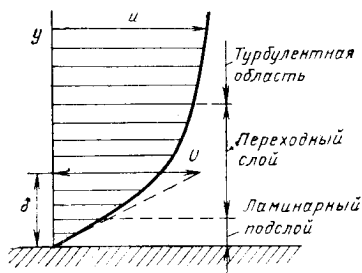


Рис. 7.3. Профиль скорости для турбулентного пограничного слоя с характерной толщиной  $\delta$  и характерной скоростью  $U$ .

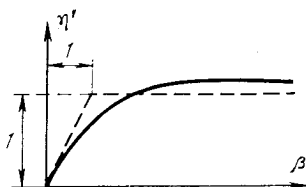


Рис. 7.4. График  $\beta(\eta')$ . Штриховой линией показана линейная аппроксимация (7.6.10).

тельности, если не считать предельных случаев. Профиль скорости для турбулентного пограничного слоя можно выразить в виде

$$u = U\varphi(\eta); \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad (7.6.7)$$

где  $\delta$  и  $U$  определяются уравнениями (7.6.1) и (7.6.2). При использовании общего метода, описанного в § 7.4, необходимо проинтегрировать уравнение (7.4.36). Для этого надо знать функцию  $\sigma(\eta)$ , зависящую от распределения коэффициентов молекулярной и турбулентной диффузии в пограничном слое. С этой целью используем представления Ранни для этой функции [Л. 7-6]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\eta) &= 6,6\eta & \text{при } \eta > 2; \\ \sigma(\eta) &= 1 + \text{sh}^2 \eta & \text{при } \eta < 2, \end{aligned} \right\} \quad (7.6.8)$$

при этом число Прандтля принимается близким к единице. Важно обратить внимание на общее поведение функции  $\sigma(\eta)$ , поскольку на результаты, полученные ниже, не влияют неточности представления этой функции. Заметим, что значение  $\eta$ , для которого оба значения  $\sigma(\eta)$  из (7.6.8) равны, несколько меньше двух. Используя стандартное приближение для турбулентного профиля скорости  $\varphi(\eta)$  и приближенное значение  $\sigma(\eta)$  из (7.6.8), получим переменную  $\eta'$  и функцию  $\beta(\eta')$  по выражениям (7.4.35) и (7.4.37) из общей теории. Типичный график функции  $\beta(\eta')$  предъявлен на рис. 7.4.

Кривую можно в общем виде аппроксимировать двумя прямыми

$$\left. \begin{aligned} \beta(\eta') &= \eta' && \text{при } \eta' < 1; \\ \beta(\eta') &= 1 \text{ до } \infty && \text{при } \eta' = 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.9)$$

Поскольку  $\eta' \approx \eta$  при  $\eta' < 1$ , вместо этой аппроксимации можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \beta(\eta) &= \eta && \text{при } \eta < 1; \\ \beta(\eta) &= 1 \text{ до } \infty && \text{при } \eta = 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.10)$$

Следовательно, при расчете функции влияния мы опять различаем две фазы, в которых  $\eta$  меньше или больше 1.

В первой фазе, где  $\eta < 1$ , дифференциальное уравнение (7.4.36) имеет вид:

$$\eta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}. \quad (7.6.11)$$

Это эквивалентно первому из уравнений (7.5.3). Следовательно, в первой фазе функция влияния равна ее значению по уравнению (7.5.7) для ламинарного пограничного слоя с линейным профилем скорости. Эта приведенная функция влияния имеет вид:

$$\frac{\theta_0}{H_0} = \Phi(\tau) = 0,514\tau^{-\frac{2}{3}}. \quad (7.6.12)$$

В конце первой фазы глубина проникновения равна  $q = \eta = 1$ . Найдем из табл. 7.1 соответствующее значение  $\tau$ :

$$\tau_t = 0,0606. \quad (7.6.13)$$

Начало второй фазы соответствует  $\tau > \tau_t$ . В этой точке влияние турбулентной диффузии начинает сказываться на общей картине течения. Поэтому мы будем называть точку  $\tau = \tau_t$  точкой перехода турбулентности.

Во второй фазе необходимо решить уравнение

$$\beta(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}, \quad (7.6.14)$$

где значения  $\beta(\eta)$  взяты из (7.6.10). Очевидно, что это эквивалентно решению уравнения (7.6.11) с граничным условием

$$\theta = 0 \text{ при } \eta = 1. \quad (7.6.15)$$

Распределение температуры в области  $\eta < 1$  в конце первой фазы и во второй фазе можно получить, поло-

жив в уравнении (7.4.13)  $q=1$ :

$$\theta = \theta_0(1 - \eta^3). \quad (7.6.16)$$

Это выражение удовлетворяет необходимому граничному условию (7.6.15). Значение  $\theta_0$  является функцией  $\tau$ , и мы получим его, применив в уравнении (7.6.14) вариационный метод, используя кубическое приближение (7.6.16). С точки зрения аналогии теплопроводности вторая фаза представляет утечку тепла из области  $\eta < 1$  в соседнюю область с бесконечной удельной теплоемкостью.

Подставив в выражение (7.14) для теплового потенциала значения  $\theta$  и  $\beta(\eta) = \eta$  из (7.6.16), получим:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta \theta^3 d\eta = \frac{9}{80} \theta_0^2. \quad (7.6.17)$$

Для адиабатического условия  $\dot{H} = 0$  при  $\eta = 0$  можно записать:

$$\dot{H} = - \int_0^{\eta} \dot{\theta} \eta d\eta = - \left( \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{5} \eta^5 \right) \dot{\theta}_0, \quad (7.6.18)$$

откуда получим диссипативную функцию

$$D = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{H}^2 d\eta = \frac{63}{4460} \dot{\theta}_0^2. \quad (7.6.19)$$

Точка обозначает производную по  $\tau$ . Переменная  $\theta_0$  является неизвестной обобщенной координатой, удовлетворяющей уравнению Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_0} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_0} = 0. \quad (7.6.20)$$

Используя выражения (7.6.17) и (7.6.19), получаем из (7.6.20) дифференциальное уравнение

$$55\theta_0 + 7\dot{\theta}_0 = 0, \quad (7.6.21)$$

которое необходимо решить с начальным условием равенства  $\theta_0$  его значению в конце первой фазы, которое получается при подстановке  $\tau = \tau_t$  в выражение (7.6.12):

$$\theta_0 = 3,33 H_0. \quad (7.6.22)$$

Соответствующим решением уравнения (7.6.21) будет:

$$\theta_0 = 3,33H_0 \exp \left\{ -\frac{55}{7} (\tau - \tau_t) \right\}. \quad (7.6.23)$$

Из уравнений (7.6.12) и (7.6.23) можно сделать вывод, что приведенную функцию влияния для первой и второй фаз можно представить кусочно-аналитической аппроксимацией

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\tau) &= 0,514\tau^{-\frac{2}{3}} && \text{при } \tau < \tau_t; \\ \Phi(\tau) &= 3,33 \exp \left\{ -\frac{55}{7} (\tau - \tau_t) \right\} && \text{при } \tau > \tau_t, \end{aligned} \right\} \quad (7.6.24)$$

где  $\tau_t = 0,0606$ . Эта приведенная функция влияния графически представлена на рис. 7.5. В отличие от функции влияния (7.5.9) для ламинарного течения, которая также представлена графически для сравнения, она убывает гораздо быстрее, начиная от точки поступления тепла. Действительно, за точкой  $\tau = 0,6$  ее можно считать равной нулю, поэтому можно положить  $\Phi(\tau) = 0$ . Приближенная функция влияния (7.6.24), полученная при модификации общего метода, описанного в § 7.4, основана на стандартном физическом описании турбулентного пограничного слоя. Она должна давать удовлетворительные результаты в первом приближении при расчете конвективного теплообмена в турбулентном пограничном слое во многих практических задачах. Этот метод можно при необходимости усовершенствовать, как показано выше.

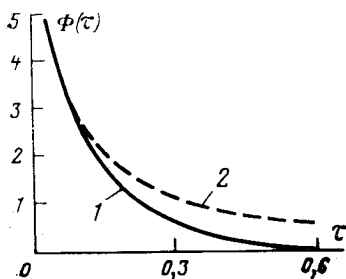


Рис. 7.5. Приведенная функция влияния  $\Phi(\tau)$ .

1 — для турбулентного пограничного слоя по уравнению (7.6.24); 2 — для ламинарного пограничного слоя по уравнению (7.5.9).

## 7.7. ПРИЛОЖЕНИЯ

Проиллюстрируем формулировку типичных задач конвективного теплообмена на примере границы свободного потока. Будет показано, как незначительная модификация функции влияния приводит к общей формулировке задачи теплообмена при течении в каналах и теплообменниках.

*Пограничный слой невозмущенного потока.* В этом случае обычно учитывается непараллельность линий тока. При этом функция влияния будет зависеть от абсциссы  $\xi$  в точке подвода тепла. Как указывалось в конце § 7.4, при определенных условиях в случае непараллельных линий тока в качестве первого приближения можно использовать функцию  $\Phi(\tau)$ , найденную выше для параллельных линий тока. Это справедливо, если пограничный слой изменяется не слишком быстро вдоль линии тока и если теплообмен происходит в основном на относительно небольшом расстоянии вниз по потоку от точки подвода тепла. Тогда функцию влияния можно записать в виде

$$r(x - \xi, \xi) = \frac{1}{k \text{Pe}(\xi)} \Phi(\tau), \quad (7.7.1)$$

где

$$\tau = \frac{x - \xi}{\text{Pe}(\xi) \delta(\xi)}. \quad (7.7.2)$$

Это выражение получено из уравнения (7.4.30), где вместо  $x$  используется  $x - \xi$  вниз по потоку от точки подвода тепла. Необходимо ввести локальную исходную толщину  $\delta(\xi)$  и локальную исходную скорость  $U(\xi)$ . Как  $\delta(\xi)$ , так и  $U(\xi)$  зависят от точки поступления тепла  $\xi$ , а

$$\text{Pe}(\xi) = \frac{c}{k} U(\xi) \delta(\xi) \quad (7.7.3)$$

— локальное число Пекле.

Этот метод применим для ламинарного и турбулентного течений. Следует отметить, что для турбулентного течения значение  $\text{Pe}(\xi)$  дается уравнением (7.6.6), где число Прандтля не зависит от  $\xi$ .

Более точное выражение функции влияния (7.7.1) для непараллельных линий тока можно получить с помощью вариационного метода, используемого в уравнении аналогии теплопроводности (7.2.17).

Как следует из определения одномерной функции влияния, данного в § 6.2, разность температуры  $\theta$  на стенке и адиабатической температуры  $\theta_a$  можно представить в виде

$$\theta - \theta_a = \int_0^{\xi} \dot{H}(\xi, t) r(x - \xi, \xi) d\xi, \quad (7.7.4)$$

где  $\dot{H}$  — плотность теплового потока на стенке в точке  $\xi$  в момент  $t$ . В выражении (7.7.4) принимается стационарное поле скорости. Если течение жидкости зависит от времени, функция влияния  $r$  также будет зависеть от  $t$ .

Из уравнения (7.7.4) температура стенки получается непосредственно при заданном распределении поступающего тепла  $\dot{H}$  в жид-

ность, что соответствует вынужденной конвекции. При заданной температуре стенки  $\theta = \theta_a$  уравнение (7.7.4) является интегральным уравнением для неизвестной скорости теплообмена  $\dot{H}$ . Его можно решить численно стандартным методом программирования. В частности, можно выбрать полиномиальное представление  $\dot{H}$  как функции  $\xi$  с неизвестными коэффициентами, а затем приравнять значения в обеих частях (7.7.4) для данной точки  $x$ .

**Функция влияния для течения в каналах.** Рассмотрим двумерное поле течения между двумя параллельными стенками, расстояние между которыми равно  $D$ , а условия на входе в канал не оказывают влияния на положение вниз по потоку. Следовательно, линии тока можно принять параллельными, а функция влияния выражается в виде  $r(x)$ , где  $x$  — расстояние вниз по потоку от точки поступления тепла. Она отличается от функции влияния, полученной для пограничного слоя свободного потока, тем, что для больших значений  $x$  она стремится к ненулевому асимптотическому значению. Это объясняется тем, что тепло, поступающее на большом расстоянии вниз по потоку, равномерно распределяется в конечном объеме жидкости. Это асимптотическое значение будет:

$$r(\infty) = \frac{1}{cDu_{cp}} \quad (7.7.5)$$

Средняя скорость течения  $u_{cp}$  определяется как отношение объемного расхода жидкости к площади поперечного сечения канала. Асимптотическое значение приведенной функции влияния получается из выражения (7.4.3) в виде

$$\Phi(\infty) = \text{Pe} \, kr(\infty) = \frac{\delta U}{Du_{cp}} \quad (7.7.6)$$

Поэтому при решении задач теплообмена в каналах можно использовать слегка модифицированную функцию влияния с учетом асимптотического значения (7.7.6). Очень простой метод состоит во введении этого асимптотического значения в функцию  $\Phi(\tau)$ , полученную в § 7.5 и 7.6.

Когда необходимо учитывать условия на входе, функция влияния выражается в виде  $r(x - \xi, \xi)$ . Она зависит от точки поступления тепла и асимптотически выражается в виде (7.7.5).

**Теплообменники.** Рассмотрим двумерное противоточное течение двух жидкостей, разделенных тонкой стенкой. Примем стационарное течение и условия, не зависящие от времени. Первая жидкость течет в направлении  $x$ . Функция влияния для нее будет  $r(x - \xi, \xi)$ , а адиабатическая температура  $\theta_a(x)$ . Теплообмен происходит в области между абсциссами  $x_0$  и  $x_1$ . Температура стенки для первой жидкости будет:

$$\theta(x) = \theta_a(x) + \int_{x_0}^{x_1} r(x - \xi, \xi) \dot{H}(\xi) d\xi, \quad (7.7.7)$$

где  $\dot{H}(\xi)$  — локальная плотность теплового потока при теплообмене между второй и первой жидкостями. Поскольку рассматривается течение в канале, функция влияния  $r(x - \xi, \xi)$  имеет асимптотическое значение, указанное в предыдущем параграфе. Условия на входе могут быть приняты во внимание.

Вторая жидкость течет в отрицательном направлении  $x$ . Ее функцией влияния будет  $r'(\xi-x, \xi)$ , а адиабатической температурой  $\theta'_a(x)$ . Температура стенки для второй жидкости будет:

$$\theta'(x) = \theta'_a(x) - \int_{x_0}^{x_1} r'(\xi-x, \xi) \dot{H}(\xi) d\xi. \quad (7.7.8)$$

Распределение температуры в перегородке имеет вид:

$$\theta'(x) - \theta(x) = \frac{a}{k_s} \dot{H}(x). \quad (7.7.9)$$

где  $a$  — толщина перегородки, а  $k_s$  — теплопроводность.

Объединив соотношения (7.7.7) — (7.7.9), получим:

$$\theta'_a(x) - \theta_a(x) = \int_{x_0}^{x_1} R(x, \xi) \dot{H}(\xi) d\xi + \frac{a}{k_s} \dot{H}(x), \quad (7.7.10)$$

где

$$R(x, \xi) = r'(\xi-x, \xi) + r(x-\xi, \xi). \quad (7.7.11)$$

Уравнение (7.7.10) является интегральным уравнением для неизвестного распределения плотности теплового потока  $\dot{H}(x)$ . Его можно решить численно методами стандартного программирования. В большинстве случаев температура  $\theta'_a - \theta_a$  не зависит от  $x$ .

Для полностью развитого течения в канале, не зависящего от условий на входе, можно принять параллельные линии тока; тогда выражение (7.7.11) примет вид:

$$R(x-\xi) = r'(\xi-x) + r(x-\xi), \quad (7.7.12)$$

где  $r'(\xi-x)$  и  $r(x-\xi)$  — функции влияния для двух жидкостей.

## Глава восьмая

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

## 8.1. ВВЕДЕНИЕ

В механике деформирующихся систем вариационные принципы могут быть выражены двумя способами. В одном из них переменные, подвергающиеся варьированию, являются смещениями и выбираются таким образом, чтобы удовлетворялись условия непрерывности. Вариационный принцип, сформулированный с помощью этих смещений, выражает равновесие сил.



В другой форме, известной под названием дополнительной, переменными являются силы, которые варьируются; они выбираются таким образом, чтобы удовлетворять условиям равновесия. Дополнительный вариационный принцип, сформулированный в виде этих сил, выражает непрерывность смещения.

В предыдущих главах рассматривались вариационные принципы в теплообмене, которые мы назвали основными. Они формулируются с помощью варьирования теплового смещения, выбранного таким образом, чтобы не нарушался закон сохранения энергии. Это приводит к автоматическому выполнению уравнения непрерывности и позволяет выразить изменение теплового смещения с температурой в вариационной форме.

По аналогии с механикой можно предположить существование дополнительной формы вариационных принципов и в теплообмене. Поскольку температура играет роль силы, необходимо варьировать температурное поле и выразить в вариационной форме условие непрерывности теплового потока, которое в данном случае является также законом сохранения энергии. В дальнейшем при обсуждении дополнительных принципов будет использован материал, опубликованный автором в его работе [Л. 8-1].

В § 8.2 дополнительные принципы рассматриваются применительно к линейным системам. Показано, что если сформулировать их с помощью обобщенных координат, получим уравнения типа Лагранжа в дополнительной форме. Можно сформулировать также принцип взаимовлияния, использующийся в методике «конечных элементов», который, как указывается, применим в общем случае нелинейной системы и при изучении конвекции. В § 8.3 обсуждается операционная формулировка вариационного принципа в дополнительной форме применительно к результатам гл. 3. Нелинейные системы со свойствами, зависящими от температуры, как стационарные, так и конвективные, обсуждаются в § 8.4 и 8.5.

Следует сказать несколько слов о точности вариационного принципа в дополнительной форме. Поскольку он требует пространственного дифференцирования температурного поля, при использовании одного и того же приближенного выражения температурного поля вариационные принципы в дополнительной форме дают менее точные результаты по сравнению с основными вариаци-

ционными принципами, использующими тепловые смещения.

Также следует отметить, что существование двух форм для выражения вариационных принципов является весьма общим свойством физических систем, описываемых интенсивными и экстенсивными переменными. Поэтому этот метод может широко применяться во многих областях физики.

## 8.2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим теплопроводность в среде, свойства которой не зависят от температуры  $\theta$ . Удельная объемная теплоемкость такой системы является функцией координат

$$c = c(x, y, z). \quad (8.2.1)$$

Будем считать теплопроводность системы изотропной, являющейся функцией координат

$$k = k(x, y, z, t). \quad (8.2.2)$$

Закон теплопроводности имеет вид:

$$\mathbf{J} = -k \operatorname{grad} \theta, \quad (8.2.3)$$

а закон сохранения энергии выражается уравнением

$$c\dot{\theta} = -\operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (8.2.4)$$

Метод, используемый в § 1.2, означает, что уравнение сохранения (8.2.4) тождественно удовлетворяется, если положить:

$$c\dot{\theta} = -\operatorname{div} \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \dot{\mathbf{H}}. \quad (8.2.5)$$

При этом закон теплопроводности (8.2.3) приближенно удовлетворяется вариационным принципом при варьировании  $\delta \mathbf{H}$ .

Это приводит к необходимости использования дополнительного метода, где  $\mathbf{J}$  определяется уравнением (8.2.3) с помощью скалярного поля  $\theta$ . Уравнение сохранения энергии (8.2.4) выполняется приближенно с помощью вариационного принципа, использующего вариации температурного поля  $\delta \theta$ . Поэтому, умножив

уравнение (8.2.4) на  $\delta\theta$  и проинтегрировав результат по объему  $\tau$  тепловой системы, получим:

$$\iiint_{\tau} (c\dot{\theta} + \operatorname{div} \mathbf{J}) \delta\theta \, d\tau = 0. \quad (8.2.6)$$

При произвольных вариациях  $\delta\theta$  уравнение эквивалентно уравнению (8.2.4) в смысле слабых решений. Интегрируя по частям (8.2.6), получаем:

$$\iiint_{\tau} c\delta\dot{\theta} \, d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{J} \operatorname{grad} \delta\theta \, d\tau + \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta\theta \, dA = 0. \quad (8.2.7)$$

Поверхностное интегрирование проводится по границе  $A$  объема  $\tau$ , а  $\mathbf{n}$  обозначает единичную внешнюю нормаль к границе. Поскольку  $\mathbf{J}$  определяется уравнением (8.2.3), мы можем записать:

$$\iiint_{\tau} \mathbf{J} \operatorname{grad} \delta\theta \, d\tau = \delta D, \quad (8.2.8)$$

где

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} k (\operatorname{grad} \theta)^2 \, d\tau. \quad (8.2.9)$$

По своему физическому смыслу это выражение эквивалентно диссипативной функции (1.4.3). С учетом соотношения (8.2.8) получим уравнение (8.2.7) в виде

$$\iiint_{\tau} c\delta\dot{\theta} \, d\tau + \delta D = - \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta\theta \, dA, \quad (8.2.10)$$

которое является дополнительной формой вариационного принципа для теплопроводности.

Важно остановиться здесь на значении вариационного уравнения (8.2.10). Величину  $\mathbf{J}$  в правой части уравнения можно положить равной  $-k \operatorname{grad} \theta$  на границе. Тепловой поток  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$  на границе можно также считать заданной функцией времени и координат. При этом вариационный принцип (8.2.10) может быть приведен к дополнительной форме. Это станет яснее, если проинтегрировать  $\delta D$  по частям:

$$\delta D = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \theta) \delta\theta \, d\tau + \iint_A (k \operatorname{grad} \theta) \cdot \mathbf{n} \delta\theta \, dA. \quad (8.2.11)$$

Подставив это значение, получим уравнение (8.2.10) в виде

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \{c\dot{\theta} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta)\} \delta\theta \, d\tau = \\ & = - \iint_A \{\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} + k(\operatorname{grad} \theta) \mathbf{n}\} \delta\theta \, dA. \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

Поскольку  $\delta\theta$  выбрано произвольно, это уравнение означает, что

$$c\dot{\theta} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) \quad (8.2.13)$$

справедливо в объеме  $\tau$  и что условие

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = -k(\operatorname{grad} \theta) \mathbf{n} \quad (8.2.14)$$

удовлетворяется на границе.

Следовательно, когда задается тепловой поток на границе  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ , дополнительный вариационный принцип (8.2.10) приближенно удовлетворяет граничному условию (8.2.14) и классическому уравнению теплопроводности. Очевидно, что уравнение (8.2.4) является уравнением сохранения энергии, поскольку оно совпадает с соотношением (8.2.4), если в него вместо  $\mathbf{J}$  подставить уравнение (8.2.3).

Вариационный принцип, немного напоминающий вариационный принцип в форме уравнения (8.2.10), предложен также Чемберсом [Л. 8-2]. Он находится из рассмотрения функционала

$$F = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \{cX^2 + k(\operatorname{grad} \theta)(\operatorname{grad} X) - wX\} \, d\tau + \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} X \, dA, \quad (8.2.14a)$$

где  $X = \dot{\theta}$  и  $w$  — количество теплоты, образующееся в единице объема за единицу времени; изменяемой переменной здесь является  $X$ . Вариационный принцип выражается в том, что для всех произвольных изменений  $X$   $\delta F$  полагается равным нулю.

Еще один метод, предложенный Розеном [Л. 8-3], получается из рассмотрения функционала

$$\Phi = \iiint_{\tau} \left\{ c\theta Y + \frac{1}{2} k(\operatorname{grad} \theta)^2 \right\} \, d\tau, \quad (8.2.14b)$$

где переменная  $\theta$  изменяется внутри объема, а  $Y = \dot{\theta}$  не подвержено изменениям. При этих ограничениях вариационный принцип выражается в виде  $\delta\Phi = 0$ .

Модификация этого метода, предложенная Пригожиным и Глансдорфом, применялась для теплообмена Хейсом [Л. 8-4]. Вариационный принцип получается, если положить  $\delta\Psi=0$ , где  $\Psi$  — интеграл по времени от  $\Phi$ :

$$\Psi = \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt. \quad (8.2.14\text{в})$$

Величина  $\theta$  изменяется, если предположить, что она является заданной функцией времени и координат, а также какого-то числа постоянных параметров, рассчитанных с помощью вариационного принципа. Этот метод может применяться к нелинейным задачам, где  $k$  и  $c$  зависят от температуры при условии, что эти величины не подвержены варьированию. Заметим, что если  $\theta$  является линейной функцией параметров, этот метод полностью аналогичен методу Галеркина, на чем мы остановимся позднее в приложении (§ А.4).

В соответствии с методом, описанным в гл. 1, вариационный принцип (8.2.10) также приводит к дифференциальным уравнениям, аналогичным уравнениям Лагранжа с обобщенными координатами. Это легко показать, выразив неизвестное температурное поле в виде

$$\theta = \theta(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t), \quad (8.2.15)$$

где  $q_i$  —  $n$  неизвестных функций времени, представляющих обобщенные координаты.

Как уже указывалось в § 1.3, введение обобщенных координат не ограничивает общности анализа. Поскольку бещество имеет дискретный характер, всегда можно найти конечное, но достаточно большое число обобщенных координат для описания поля  $\theta$  с достаточной точностью (§ А.4).

Вариации  $\delta\theta$  зависят только от вариаций  $\delta q_i$ . Следовательно, из уравнения (8.2.15) получим:

$$\delta\theta = \sum_i \frac{\partial\theta}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (8.2.16)$$

Из того же уравнения (8.2.15) можно получить:

$$\dot{\theta} = \sum_i \frac{\partial\theta}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\theta}{\partial t}, \quad (8.2.17)$$

где  $\dot{\theta}$  — полная производная по времени от  $\theta$  в заданных точках  $x, y, z$ . Из уравнения (8.2.17) получим:

$$\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial q_i} = \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (8.2.18)$$

Следовательно, вариацию (8.2.16) можно записать также в виде

$$\delta\theta = \sum^i \frac{\partial\theta}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (8.2.19)$$

Наконец, вариация  $D$  будет:

$$\delta D = \sum^i \frac{\partial D}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (8.2.20)$$

Подставив уравнения (8.2.16), (8.2.19) и (8.2.20) в вариационное уравнение (8.2.10), получим:

$$\sum^i \delta q_i \left( \iiint_{\tau} c\dot{\theta} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial q_i} d\tau + \frac{\partial D}{\partial q_i} \right) = - \sum^i \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial\theta}{\partial q_i} dA \delta q_i. \quad (8.2.21)$$

Поскольку  $\delta q_i$  выбрана произвольно, получим  $n$  уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} = P_i, \quad (8.2.22)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} c\dot{\theta}^2 d\tau; \quad P_i = - \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial\theta}{\partial q_i} dA. \quad (8.2.23)$$

Систему  $n$  дифференциальных уравнений (8.2.22) для  $n$  неизвестных функций времени  $q_i$  можно рассматривать как дополнительную форму уравнений Лагранжа.

Рассмотрим случай линейного представления температурного поля с помощью обобщенных координат. Запишем\*

$$\theta = \sum^i q_i \theta_i(x, y, z), \quad (8.2.24)$$

---

\* Заметим, что если температура задается на границе, мы можем записать  $\theta = \sum^i q_i \theta_i + \theta_b$ , где  $\theta_b$  — функция координат и времени, если значения заданы на границе, а  $\theta_i$  на границе равна нулю. При этом  $T$  и  $D$  — полиномы второй степени соответственно по  $\dot{q}_i$  и  $q_i$ , а  $P_i = 0$ .

где  $\theta_i$  — заданные скалярные поля, не зависящие от температуры. При этом значения  $T$  и  $D$  по определению (8.2.23) и (8.2.9) являются квадратичными формами

$$T = \frac{1}{2} \sum^{ij} a_{ij} q_i q_j; \quad D = \frac{1}{2} \sum^{ij} b_{ij} q_i q_j, \quad (8.2.25)$$

где

$$a_{ij} = \iiint_V c \theta_i \theta_j d\tau; \quad b_{ij} = \iiint_V k (\text{grad } \theta_i) (\text{grad } \theta_j) d\tau. \quad (8.2.26)$$

Кроме того,

$$P_i = - \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \theta_i dA. \quad (8.2.27)$$

Уравнения Лагранжа (8.2.22) примут вид:

$$\sum^i a_{ij} \dot{q}_j + \sum^j b_{ij} \dot{q}_j = P_i. \quad (8.2.28)$$

Они являются дополнительной формой линейных уравнений (2.3.14). Когда тепловой поток  $\mathbf{J}$  задается на границе, значения  $P_i$  являются известными функциями времени, играющими роль «движущих сил».

Вариационный принцип (8.2.10) легко обобщить на случай анизотропной теплопроводности

$$k_{ij} = k_{ji} = k_{ij}(x, y, z, t), \quad (8.2.29)$$

включая случай тепловыделения внутри тела с удельной объемной скоростью

$$w = w(x, y, z, t). \quad (8.2.30)$$

При этом вместо вариационного уравнения (8.2.10) используется уравнение

$$\iiint_V (c\dot{\theta} - w) \delta\theta d\tau + \delta D = - \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta\theta dA, \quad (8.2.31)$$

где  $D$  определяется в виде

$$D = \frac{1}{2} \iiint_V \sum^{ij} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\tau. \quad (8.2.32)$$

Как и ранее, координаты  $x, y, z$  обозначаются через  $x_i$ . При таком определении  $D$  уравнения Лагранжа

(8.2.22) остаются справедливыми. Кроме того, при наличии источников тепла значение  $P_k$  определяется теперь выражением

$$P_k = - \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \theta}{\partial q_k} dA + \iiint_{\tau} \omega \frac{\partial \theta}{\partial q_k} d\tau. \quad (8.2.33)$$

а не (8.2.27). При заданных источниках тепла и тепловом потоке на границе величина  $P_k$  играет роль движущих сил в уравнениях Лагранжа.

*Принцип взаимовлияния и метод конечных элементов.* В § 3.7 рассмотрен принцип взаимовлияния, согласно которому систему можно разделить на ряд конечных элементов, которые затем рассматриваются как взаимосвязанные подсистемы. Этот же метод можно применить к вариационному принципу в дополнительной форме\*.

Для упрощения без потери общности можно рассмотреть случай анизотропной теплопроводности при отсутствии источников тепла. Разделим систему на ряд взаимосвязанных областей, обозначенных символом  $s$ . В каждой области  $s$  температурное поле аппроксимируется таким образом, что эти температуры совпадают на смежных границах. Вариационный принцип (8.2.10) для системы в целом можно записать в виде суммы уравнений для каждой области

$$\sum_s \iiint_{\tau_s} c \dot{\theta}_s \delta \theta_s d\tau_s + \sum_s \delta D_s = - \sum_s \iint_{A_s} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}_s \delta \theta_s dA_s. \quad (8.2.34)$$

Правая часть этого уравнения выражает основное свойство принципа взаимовлияния. Общие границы входят в сумму 2 раза, а соответственные члены взаимно сокращаются. Это можно заметить из рассмотрения двух соседних подсистем  $s$  и  $(s+1)$ . На общей границе тепловые потоки  $J_s$  и  $J_{s+1}$  равны, так же как и температуры  $\theta_s$  и  $\theta_{s+1}$ . Однако  $\mathbf{n}_s$  и  $\mathbf{n}_{s+1}$  противоположны по направлению ( $\mathbf{n}_s = -\mathbf{n}_{s+1}$ ). Следовательно, члены, соответствую-

---

\* Обратите внимание на различие между этой формулировкой и дополнительным принципом для конечных элементов и линейных систем, сформулированным в § 3.7.



ющие смежным границам, сокращаются, и мы можем написать:

$$\sum_s \iint_{A_s} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_s \delta \theta_s dA_s = \iint_B \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta \theta dV, \quad (8.2.35)$$

где  $B$  — внешняя граница всей системы.

При использовании вариационного принципа (8.2.34) обобщенные координаты можно разделить на две группы: координаты одной группы определяют температуру на границах подсистемы; координаты другой группы определяют температуру каждой подсистемы. В результате получаем уравнения Лагранжа, в которые входит тепловой поток  $\mathbf{J}$  только на границе  $B$  системы в целом. Следует отметить, что при использовании этого метода нет необходимости соблюдать условие неразрывности  $k \operatorname{grad} \theta$  в направлении, нормальном к границам подобластей. Например, в двумерной задаче систему можно разделить на конечные элементы треугольной сетки, и некоторые обобщенные координаты будут температурами в вершинах треугольника.

Метод, который описывается здесь для частного случая, имеет, конечно, общий характер и может применяться для анизотропной теплопроводности при наличии источников тепла, а также для нелинейных и конвективных систем, описанных в § 8.4 и 8.5.

*Диссипация на границе.* Когда задается температура на границе твердого тела, вариация  $\delta \theta$  на границе исчезает. При этом выражение (8.2.33) для  $P_h$  принимает вид:

$$P_h = \iiint_{\tau} w \frac{\partial \theta}{\partial q_h} d\tau, \quad (8.2.35a)$$

где  $P_h$  зависит только от источников тепла. То же самое относится к случаю, когда температура задается на одних участках границы, тогда как другие участки теплоизолированы. Аналогичный по форме случай получается, если теплообмен на границе выражается коэффициентом теплообмена  $K$ . При этом граничное условие выражается уравнением (2.2.1), которое можно записать в виде

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = K(\theta - \theta_a), \quad (8.2.35b)$$

где  $\theta_a$  — адиабатическая температура поверхности. Если подставить это значение  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$  в выражение (8.2.33) для  $P_h$ , последнее примет вид:

$$P'_h = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_h} \iint_A K (\theta - \theta_a)^2 dA + \iiint_{\tau} w \frac{\partial \theta}{\partial q_h} d\tau. \quad (8.2.35b)$$

В результате получаем уравнения Лагранжа, аналогичные уравнениям (8.2.22)

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial q_k} = P_k. \quad (8.2.35г)$$

При этом, однако,  $P_k$  определяется теперь выражением (8.2.35а), а  $D$  — уравнением

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \sum^{ij} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\tau + \frac{1}{2} \iint_A K (\theta - \theta_a)^2 dA. \quad (8.2.35д)$$

Физический смысл этой диссипативной функции совпадает с физическим смыслом выражения (8.2.12), куда входит диссипация на границе.

### 8.3. ОПЕРАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

Как уже рассматривалось в гл. 3, класс задач, включающий операторы по времени, можно легко сформулировать в операционной форме, используя простые операционные правила. Одно из них выражается в виде

$$p f(t) = \frac{df(t)}{dt}, \quad (8.3.1)$$

где  $p$  — оператор, который является символическим выражением производной  $d/dt$ . Будем считать, что функция  $f(t)$  равна нулю при отрицательных значениях  $t$ , а при  $t=0$  она может иметь разрыв. Смысл операционного уравнения (8.3.1) состоит в том, что оно остается справедливым, если  $f(t)$  и  $df/dt$  заменить их преобразованиями Лапласа. Символ  $p$  представляет переменную преобразования Лапласа. Как уже указывалось в гл. 3, для применения этого правила необходимо использование обобщенных функций, допускающих разрывы непрерывности функции  $f(t)$ . Используя такую символику, можно легко применить преобразования Лапласа к уравнениям, в которые входят операторы по времени.

Используя операционные символы и следуя методу, описанному в § 3.6, можно получить операторно-вариационные принципы в дополнительной форме. При этом необходимо допустить, что тепловая система линейна и ее свойства не зависят от времени. С этой точки зрения мы рассмотрим наиболее общий случай, когда анизотропная теплопроводность  $k_{ij}(x, y, z)$  и теплоемкость

$c(x, y, z)$  зависят от координат. Кроме того, имеются зависящие от координат и времени распределенные источники тепла с плотностью  $\omega(x, y, z, t)$ .

Запишем в операционной форме законы теплопроводности и сохранения энергии

$$J_i = - \sum k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}; \quad \rho c \theta = - \sum \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \omega. \quad (8.3.2)$$

При выводе вариационного принципа мы исходили из того, что  $\rho$  — алгебраическая величина. Умножим второе уравнение (8.3.2) на  $\delta\theta$  и проинтегрируем по объему  $\tau$ . Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \left( \rho c \theta \delta\theta - \sum J_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta\theta \right) d\tau = & - \iint_A \sum J_i n_i \delta\theta dA + \\ & + \iiint_{\tau} \omega \delta\theta d\tau. \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Единичную внешнюю нормаль к границе  $A$  объема  $\tau$  обозначим через  $n_i$ . Подставим в интеграл по объему значения

$$J_i = - \sum k_{ij} (\partial\theta/\partial x_j)$$

и получим вариационный принцип в виде

$$\rho \delta V + \delta D = - \iint_A \sum J_i n_i \delta\theta dA + \iiint_{\tau} \omega \delta\theta d\tau, \quad (8.3.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} c \theta^2 d\tau; \\ D &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \sum^{ij} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.5)$$

Уравнение (8.3.4) является дополнительной формой операторно-вариационного принципа (3.6.6). Оно имеет тот же физический смысл, что и уравнение (8.2.10). При его использовании приближенно соблюдается условие сохранения энергии в объеме  $\tau$ .

Математический смысл операционного уравнения (8.3.4) заключается в том, что переменные  $\theta$ ,  $J_i$  и  $\omega$  могут быть заменены их преобразованиями Лапласа. Например, вместо  $\theta$  можно использовать преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}(\theta) = \int_0^t e^{-p't'} \theta(t') dt'. \quad (8.3.6)$$

Нам действительно нет необходимости вводить символ  $\mathcal{L}$  в явном виде для того, чтобы переменные рассматривались либо как функции времени, либо как функции, преобразованные по Лапласу. Как уже указывалось в § 3.6, мы имеем весьма общую и гибкую символику, позволяющую сформулировать операторно-вариационный принцип тремя способами, как это следует из уравнения (8.3.4).

Операционную формулировку получим, представив  $\theta$  в виде\*

$$\theta = \sum_i^i q_i \theta_i(x, y, z). \quad (8.3.7)$$

Используя значения из уравнений (8.3.5) и (8.3.7), получим:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} q_i q_j; \quad D = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_{ij} q_i q_j. \quad (8.3.8)$$

Из вариационного уравнения (8.3.4) получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (pV + D) = P_i, \quad (8.3.9)$$

где

$$P_i = - \iint_A \sum_k^k J_k n_k \theta_i dA + \iiint_V \omega \theta_i d\tau. \quad (8.3.10)$$

Подставив в это уравнение значения из (8.3.8), найдем:

$$\sum_j^j (p a_{ij} + b_{ij}) q_j = P_i. \quad (8.3.11)$$

---

\* См. также сноску на стр. 173 к уравнению (8.2.24). При этом выражения для  $V$  и  $D$  являются полиномами второй степени по  $q_i$ .

Если переменные являются функциями времени, тогда, положив  $p = d/dt$ , получим уравнения (8.2.28), выведенные ранее для частного случая изотропной теплопроводности при отсутствии источников тепла.

Вторая формулировка этого принципа получается, если применить вариационное уравнение (8.3.4) к изображениям по Лапласу. В этом случае варьированию подвергается  $\theta(x, y, z, p)$ , где  $p$  — алгебраический параметр. Величины  $J$  и  $\omega$  также являются функциями  $p$ . При этом вариационный принцип можно применить для целого ряда постоянных значений  $p$ .

Третья формулировка получается в виде свертки. Она основана на том, что операционное произведение двух преобразований Лапласа соответствует свертке. Например, в выражении

$$pV = -\frac{1}{2} \iiint_{\tau} cp\theta^2 d\tau \quad (8.3.12)$$

мы можем записать

$$(p\theta)\theta = \int_0^t \theta(t-t')\theta(t') dt'. \quad (8.3.13)$$

Аналогично другие произведения переменных в уравнениях (8.3.4) можно заменить сверткой. В результате получим формулировку вариационного принципа в виде функций времени.

*Обобщенный вариационный метод.* Операционная формулировка вариационных принципов, представленная здесь и в гл. 3, является частным случаем общего метода, который применим к задачам, описываемым дифференциальными уравнениями типа

$$\sum_i \mathcal{P}_i(p) \mathcal{M}_i(x_k) f = 0, \quad (8.3.13a)$$

где  $f$  — функция переменной  $t$  и  $n$  переменных  $x_k$ . Будем считать  $\mathcal{M}_i(x_k)$  линейными самосопряженными операторами  $x_k$ , а  $\mathcal{P}_i(p)$  — изображение функции по переменной  $t$  и независимой от  $t$ . Считая  $p$  алгебраической величиной, легко получить вариационные принципы как следствие свойств самосопряженности  $\mathcal{M}_i(x_k)$ . Этот метод может также применяться для случая, когда уравнение (8.3.13a) является матричным.

## 8.4. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим систему, параметры которой зависят от температуры  $\theta$ . Запишем закон теплопроводности в виде

$$J_i = - \sum^j k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}; \quad (8.4.1)$$

а уравнение сохранения энергии

$$c\dot{\theta} = - \sum^i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \omega. \quad (8.4.2)$$

Теплоемкость может быть функцией координат и температуры

$$c = c(x, y, z, \theta). \quad (8.4.3)$$

Теплопроводность может быть анизотропной и зависеть от координат, времени и температуры

$$k_{ij} = k_{ji} = k_{ij}(x, y, z, t, \theta). \quad (8.4.4)$$

При наличии источников тепла скорость тепловыделения в единице объема обозначим через  $\omega(x, y, z, t)$ . Умножим уравнение (8.4.2) на  $\delta\theta$  и проинтегрируем результат по объему  $\tau$ . Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \left( c\dot{\theta}\delta\theta - \sum^i J_i \frac{\partial \delta\theta}{\partial x_i} \right) d\tau = & - \iint_A \sum^i J_i n_i \delta\theta dA + \\ & + \iiint_{\tau} \omega \delta\theta d\tau. \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

В объемном интеграле используем значение  $J_i$  из уравнения теплопроводности (8.4.1), откуда

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \left( c\dot{\theta}\delta\theta + \sum^{ij} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \delta\theta}{\partial x_i} \right) d\tau = & - \iint_A \sum^i J_i n_i \delta\theta dA + \\ & + \iiint_{\tau} \omega \delta\theta d\tau. \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

Как и ранее, введем  $n$  обобщенных координат  $q_i$  и выразим  $\theta$  в виде

$$\theta = \theta(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (8.4.7)$$

При этом вариации  $\delta\theta$  выражаются с помощью вариаций  $\delta q_k$ . Для этого случая уравнения (8.2.16) и (8.2.19) остаются справедливыми. Следовательно, вариационное уравнение (8.4.9) можно записать в виде

$$\sum_k \left( \frac{\partial G}{\partial q_k} + K_k \right) \delta q_k = P_k \delta q_k, \quad (8.4.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \int \int \int_{\tau} c \theta^2 d\tau; \\ K_k &= \int \int \int_{\tau} \sum_{ij} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial q_k}; \end{aligned} \right\} \quad (8.4.9)$$

$$P_k = - \int \int_A \sum_i J_i n_i \frac{\partial \theta}{\partial q_k} dA + \int \int \int_{\tau} \omega \frac{\partial \theta}{\partial q_k} d\tau.$$

Поскольку  $\delta q_k$  произвольно, получим  $n$  дифференциальных уравнений для  $q_k$

$$\frac{\partial G}{\partial q_k} + K_k = P_k. \quad (8.4.10)$$

В выражениях (8.4.9)  $c$  и  $k_{ij}$  являются функциями, зависящими от  $\theta$ , а  $G$  — полином второй степени относительно  $\dot{q}_k$  с коэффициентами, зависящими от  $q_k$ .

*Теплопроводность, не зависящая от температуры.* Рассмотрим частный случай, когда теплопроводность  $k_{ij}(x, y, z, t)$  может зависеть от координат и времени, но не зависеть от температуры. Когда теплоемкость  $c(x, y, z, \theta)$  зависит от температуры, система остается нелинейной. Однако в этом случае можно записать:

$$K_k = \frac{\partial D}{\partial q_k}, \quad (8.4.11)$$

где

$$D = \frac{1}{2} \int \int \int_{\tau} \sum_{ij} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\tau \quad (8.4.12)$$

— диссипативная функция. Дифференциальные уравнения (8.4.10) для обобщенных координат имеют вид:

$$\frac{\partial G}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial q_k} = P_k. \quad (8.4.13)$$

Они тождественны по форме уравнениям (8.2.22) для линейной задачи.

*Случай, когда теплопроводность приводится к постоянной величине.* Этот случай имеет место при теплопроводности вида

$$k_{ij}(\theta) = k'_{ij} f(\theta), \quad (8.4.14)$$

где  $k'_{ij}$  постоянны. Теплоемкость остается функцией координат и температуры. В § 5.4 указывалось, что эту задачу можно свести к аналоговой модели с постоянной теплопроводностью, если ввести фиктивный масштаб температур

$$u = \int_0^u f(\theta) d\theta. \quad (8.4.15)$$

При таком переменном  $u$  уравнения (8.4.1) и (8.4.2) принимают вид:

$$J_i = - \sum_j^i k'_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}; \quad c' \dot{u} = - \sum_i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \omega, \quad (8.4.16)$$

где

$$c'(x, y, z, u) = \frac{1}{f(\theta)} c(x, y, z, \theta). \quad (8.4.17)$$

Эти уравнения описывают теплопроводность в системе с температурным полем  $u$ , теплоемкостью  $c'$  и тензором постоянной теплопроводности  $k'_{ij}$ . Следовательно, в аналоговой модели обобщенные координаты удовлетворяют уравнениям вида (8.4.13), где

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} c' \dot{u}^2 d\tau; \\ {}^{\tau}D &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \sum_{ij} k'_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} d\tau; \\ P_k &= - \iint_A \sum_i J_i n_i \frac{\partial u}{\partial q_k} dA + \iiint_{\tau} \omega \frac{\partial u}{\partial q_k} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.18)$$

Тепловой поток  $J_i$  и источники тепла  $\omega$  сохраняют действительные значения.



## 8.5. КОНВЕКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Вариационные принципы для конвекции в несжимаемой жидкости рассматриваются в § 6.5 в основной форме, при описании которой используется понятие теплового смещения. Эти принципы в дополнительной форме могут быть сформулированы также и для конвекции.

Начальные координаты частиц жидкости обозначим через  $X_k$ . В момент  $t$  координатами частиц жидкости будут:

$$x_k = x_k(X_k, t). \quad (8.5.1)$$

Поле скорости имеет вид:

$$v_k = \frac{\partial x_k}{\partial t}. \quad (8.5.2)$$

Его можно выразить как функцию координат  $x_k$  и времени в виде

$$v_k = v_k(x_k, t). \quad (8.5.3)$$

Если использовать это выражение для  $v_k$ , то условие несжимаемости жидкости запишется как

$$\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0. \quad (8.5.4)$$

Теплопроводность жидкости будет:

$$k_{ij} = k_{ji} = k_{ij}(x_k, t, \theta). \quad (8.5.5)$$

Она может зависеть от координат, времени и температуры. Тепловой поток  $J_i$  удовлетворяет закону теплопроводности

$$J_i = - \sum_j k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}. \quad (8.5.6)$$

Удельная объемная теплоемкость частицы жидкости имеет вид:

$$c = c(X_k, \theta), \quad (8.5.7)$$

а энтальпия той же частицы в единице объема

$$h = \int_0^\theta c d\theta = h(X_k, \theta). \quad (8.5.8)$$

Жидкость может быть гетерогенной, частицы которой описываются своими начальными координатами  $X_k$ .

Если  $\theta(x_h, t)$  — неизвестная функция  $x_h$  и  $t$ , энтальпию можно считать функцией  $x_h$  и  $t$  в качестве независимой переменной. При таком подходе сохранение энергии выражается уравнением

$$\frac{Dh}{Dt} + \sum^i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \omega, \quad (8.5.9)$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum^i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8.5.10)$$

— материальная производная, а  $\omega$  представляет скорость тепловыделения в единице объема. Из-за условия несжимаемости (8.5.4) уравнение (8.5.9) совпадает по форме с уравнением (6.5.8). По определению  $h$  из уравнения (8.5.8) имеем также

$$\frac{Dh}{Dt} = c \frac{D\theta}{Dt} = c \frac{\partial \theta}{\partial t} + c \sum^i v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}. \quad (8.5.11)$$

Следует отметить, что, используя значение  $c$  из уравнения (8.5.7), мы можем выразить  $X_h$  как функцию  $x_h$  и  $t$ . Следовательно, можно принять в уравнении (8.5.11), что

$$c = c(x_h, t, \theta). \quad (8.5.12)$$

Однако  $c$  не является произвольной функцией переменных, поскольку для постоянной  $\theta$  она должна удовлетворять условию

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \sum^i v_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = 0. \quad (8.5.13)$$

Вариационный принцип получается, если умножить условие сохранения энергии (8.5.9) на  $\delta\theta$  и проинтегрировать произведение по объему  $\tau$ . Получим:

$$\iiint_V \left( \frac{Dh}{Dt} + \sum^i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} \right) \delta\theta \, d\tau = \iiint_V \omega \delta\theta \, d\tau. \quad (8.5.14)$$

Интегрируя по частям это уравнение и подставляя в него значение  $J_i$  из (8.5.6), получаем:

$$\iiint_V \left( \frac{Dh}{Dt} \delta\theta + \sum^{ij} k_{ij} \frac{\partial\theta}{\partial x_j} \frac{\partial\delta\theta}{\partial x_i} \right) d\tau = - \iint_A \sum^i J_i n_i \delta\theta dA + \iiint_V \omega \delta\theta d\tau. \quad (8.5.15)$$

При произвольных значениях  $\delta\theta$  это уравнение дает вариационный метод с автоматическим выполнением закона сохранения энергии.

Как и ранее,  $\theta$  можно определить с помощью  $n$  обобщенных координат  $q_i$ . Запишем:

$$\theta = \theta(q_1, q_2, \dots, q_n, x_k, t). \quad (8.5.16)$$

Тогда вариации  $\delta\theta$  выражаются через вариации  $\delta q_i$  по уравнениям (8.2.16) и (8.2.19). Подставив эти значения  $\delta\theta$  в уравнение (8.5.15) и значение  $Dh/Dt$  по выражению (8.5.11), получим вариационное уравнение (8.5.15) в виде

$$\sum^k \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} + L_k + K_k \right) \delta q_k = \sum^k P_k \delta q_k, \quad (8.5.17)$$

где  $G$ ,  $K_k$  и  $P_k$  определяются уравнениями (8.4.9), а

$$L_k = \iiint_V c \sum^i v_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial\theta}{\partial q_k} d\tau. \quad (8.5.18)$$

Поскольку  $\delta q_k$  произвольно, обобщенные координаты подчиняются  $n$  дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} + L_k + K_k = P_k. \quad (8.5.19)$$

В частном случае, когда теплопроводность  $k_{ij}(x, y, z, t)$  не зависит от температуры, величина  $K_k$  определяется выражением (8.4.11) и дифференциальные уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial D}{\partial q_k} + L_k = P_k. \quad (8.5.20)$$

Уравнения могут быть приведены к этому же виду в случае, если теплопроводность является функцией тем-

пературы по выражению

$$k_{ij}(\theta) = k'_{ij} f(\theta), \quad (8.5.21)$$

где  $k'_{ij}$  — постоянные. Как показано в предыдущем параграфе, при этом температурная шкала должна меняться.

*Смешанные системы «твердое тело — жидкость» и турбулентное течение.* Случай чистой теплопроводности в неподвижном твердом теле в частном случае уравнений (8.5.19) получается, если положить  $v_i = 0$ . Следовательно, в этом случае  $L_k = 0$  и в результате приходим к уравнению, тождественному (8.4.10). Поэтому уравнения (8.5.19) можно применять для анализа смешанных систем, состоящих из твердого тела в движущейся жидкости. Для твердого тела положим  $v_i = 0$ . В турбулентных потоках  $k_{ij}$  заменим суммарной теплопроводностью

$$K_{ij} = k\delta_{ij} + c \mathcal{E}_{ij}, \quad (8.5.22)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $k$  — молекулярная теплопроводность, а  $\mathcal{E}_{ij}$  — коэффициент турбулентной диффузии.

*Операционная форма.* Для линейной конвективной системы с параметрами, не зависящими от температуры, вариационный принцип в дополнительной форме можно также выразить в операционной форме. При этом необходимо, чтобы  $c$ ,  $k_{ij}$ ,  $v_i$  зависели только от координат. Следовательно, поле скоростей не зависит от времени. В уравнении (8.5.9) вместо  $\partial/\partial t$  подставим оператор  $p$ , и уравнения (8.5.6) и (8.5.9) примут вид:

$$J_i = - \sum_j^i k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}; \quad p c \theta + c \sum_i^i v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sum_i^i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \omega. \quad (8.5.23)$$

Тогда, применив метод, используемый в § 8.3 для анализа чистой теплопроводности, получим:

$$p \delta V + \delta D + \iiint_{\tau} c \sum_i^i v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \delta \theta d\tau = - \iint_A \sum_i^i J_{in_i} \delta \theta dA + \iiint_{\tau} \omega \delta \theta d\tau, \quad (8.5.24)$$

где  $V$  и  $D$  определяются уравнениями (8.3.5). Как показано в § 8.3, операционную форму (8.5.24) вариаци-

онного принципа можно трактовать тремя способами на основе преобразований Лапласа. Они включают алгебраический подход, а также метод свертки. Выразив  $\theta$  в виде

$$\theta = \sum^i q_i \theta_i(x, y, z), \quad (8.5.25)$$

получим из вариационного уравнения (8.5.24):

$$\frac{\partial}{\partial q_k} (pV + D) + L_k = P_k, \quad (8.5.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_k &= \iiint_{\tau} c \sum^i v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \theta_k d\tau; \\ P_k &= - \iint_A \sum^i J_i n_i \theta_k dA + \iiint_{\tau} w \theta_k d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.27)$$

Положив  $p = \frac{d}{dt}$  в уравнении (8.5.26), получим систему линейных дифференциальных уравнений для  $q_k$ .

## А. ФИЗИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

### А.1. ВВЕДЕНИЕ

В восьми главах книги излагается материал, относящийся исключительно к теплообмену. Однако используемые методы и понятия имеют более широкий смысл. Они применимы для большого класса явлений, связанных с диссипацией энергии, тепло- и массообменом, электродинамикой и термодинамикой необратимых процессов. Кроме того, в книге сделана попытка возродить лагранжев подход в физике и показать, что он является частью единой системы и представляет собой эффективное средство анализа, позволяющее выработать единую точку зрения на эти процессы и выявить скрытые общие свойства и аналогии между совершенно различными типами явлений. В приложении и будет рассмотрен материал такого общего характера.

Задачи массообмена обсуждаются в § А.2. В частности, здесь исследуется изотермическая диффузия и конвекция в растворах, рассматриваемых в физической химии, а также задачи фильтрации влаги в пористых средах. Указаны возможные применения при исследовании диффузии нейтронов и динамики ядерных реакторов.

Обеспечивается более широкий физический подход при использовании лагранжева анализа термодинамики необратимых процессов. Действительно, вариационный подход к проблемам теплообмена был предложен автором как вариант методов термодинамики необратимых процессов более общего характера, а не как какой-либо математический формализм. В § А.3 в качестве иллюстрации термодинамики в форме Лагранжа рассматривается явление термоупругости. Кратко описываются случаи вязкоупругости и гидродинамики вязких жидкостей.

Очень важным является выяснение значения метода Лагранжа с чисто математической точки зрения функционального анализа. Этому посвящен § А.4. Физический смысл большей части формализма методов функционального анализа теряется применительно к теории множеств. В этой книге мы попытались восстановить до некоторой степени физический смысл фундаментальных математических понятий в физических задачах. Весьма удобно выразить понятие виртуальной работы и связанные с нею формы на языке функционального пространства. Действительно, такие понятия не являются новыми и используются учеными и инженерами многих поколений, в частности, в области классической механики. Абстрактным и весьма общим понятием, отражающим наиболее существенные свойства, является понятие вариационного скалярного произведения. Оно объединяет в одно целое вариационное исчисление и некоторые другие, имеющие в литературе различные названия.

Также указывается, что непрерывная математическая модель физической системы весьма искусственна и связана с многочислен-

ными трудностями. Понятие порога разрешимости оправдывает использование конечного числа обобщенных координат для описания, являющегося точным и полным с физической точки зрения. Невозможно перейти за пределы этого порога, поскольку непрерывная математическая модель неприменима в микроскопическом масштабе.

## А.2. ПЕРЕНОС МАССЫ

Большинство задач массообмена описываются теми же уравнениями, что и теплообменные задачи. Поэтому вариационные принципы и уравнения Лагранжа, разработанные в данной книге, могут непосредственно применяться для исследования массообмена с небольшими изменениями в обозначениях. В качестве иллюстрации коротко остановимся на трех типах явлений массопереноса, в которых могут применяться эти методы.

*Изотермическая диффузия.* Рассмотрим диффузию молекул или атомов какого-то вида в неподвижной среде, имеющей равномерную температуру. Скорость диффузии зависит от градиента концентрации и описывается законом Фика

$$\dot{\mathbf{M}} = -\mathcal{D} \text{grad } m, \quad (\text{A.2.1})$$

где  $m$  — концентрация, определяемая как масса диффундирующего вещества в единице объема. Вектор  $\mathbf{M}$  — смещение массы, а его производная по времени  $\dot{\mathbf{M}}$  есть скорость диффузии. Коэффициент диффузии, обозначенный через  $\mathcal{D}$ , может быть функцией концентрации  $m$ . Закон сохранения массы выражается уравнением

$$m = -\text{div } \mathbf{M}. \quad (\text{A.2.2})$$

Объединив уравнения (A.2.1) и (A.2.2), получим уравнение диффузии

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \text{div } (\mathcal{D} \text{grad } m). \quad (\text{A.2.3})$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (1.2.2), (1.2.4) и (1.2.10а) для линейной задачи, если положить:

$$c=1, \mathbf{M}=\mathbf{H}; m=\theta, \mathcal{D}=k. \quad (\text{A.2.4})$$

Для нелинейной задачи, когда  $\mathcal{D}$  является функцией  $m$ , задача об изотермической диффузии описывается теми же уравнениями, что и нелинейная теплопроводность, рассматриваемая в гл. 5. В дополнение к соотношению (A.2.4) положим в уравнениях (A.2.1) и (A.2.2)

$$m = \theta = h. \quad (\text{A.2.5})$$

Таким образом вариационные принципы, разработанные в данной книге, применимы для изотермической диффузии. В частности, вектор смещения массы  $\mathbf{M}$ , являющийся аналогом теплового смещения  $\mathbf{H}$ , можно выразить с помощью обобщенных координат  $q_i$  в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \quad (\text{A.2.6})$$

Варьируя это поле при условии (A.2.2), получим уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i. \quad (\text{A.2.7})$$

В этих уравнениях вместо теплового потенциала используется выражение

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} m^2 d\tau, \quad (\text{A.2.8})$$

где  $\tau$  — объем среды. Диссипативная функция будет:

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{i} \mathcal{D} \dot{M}^2 d\tau, \quad (\text{A.2.9})$$

а обобщенная сила

$$Q_i = - \int_A m \frac{\partial M}{\partial q_i} \mathbf{n} dA, \quad (\text{A.2.10})$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль на границе  $A$  объема  $\tau$ .

Случай совместной конвекции и диффузии массы в движущейся несжимаемой жидкости, имеющей равномерную температуру, полностью аналогичен случаю тепловой конвекции, рассматриваемому в гл. 6. Закон Фика принимает вид:

$$\mathbf{J} = - \mathcal{D} \text{grad } m, \quad (\text{A.2.11})$$

тогда диффузионный поток будет:

$$\mathbf{J} = \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{v}m, \quad (\text{A.2.12})$$

где  $\mathbf{v}$  — поле скорости. Смещение массы  $\mathbf{M}$  определяется как сумма конвективного и диффузионного переноса. Уравнение сохранения массы (A.2.2) остается справедливым. Объединяя уравнения (A.2.2), (A.2.11) и (A.2.12) и учитывая условие несжимаемости

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.2.13})$$

получаем уравнение поля концентрации массы

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \text{div} (\mathcal{D} \text{grad } m) - \mathbf{v} \text{grad } m. \quad (\text{A.2.14})$$

Уравнения Лагранжа (A.2.7) применимы в случае конвективного переноса массы, если диссипативная функция определяется в виде

$$D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{\mathcal{D}} \mathbf{J}^2 d\tau. \quad (\text{A.2.15})$$

Это уравнение соответствует диссипативной функции (6.5.23) для теплообмена. Эти уравнения применимы также для изучения переноса массы в турбулентном потоке. Для этого в вышеприведенных уравнениях вместо  $\mathcal{D}$  надо использовать

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{E}, \quad (\text{A.2.16})$$

где  $\mathcal{E}$  — коэффициент турбулентной диффузии.

Для анизотропной диффузии применяется метод, аналогичный используемому для решения задач анизотропной теплопроводности и турбулентности, рассматриваемых в § 6.5.

*Фильтрация в пористых средах.* В целом ряде инженерных задач, связанных с движением грунтовых вод, фильтрацией в дамбах



и добычей нефти, необходимо решать уравнения движений жидкости в частично насыщенной пористой среде. Эти уравнения аналогичны уравнению диффузии (А.2.3). В случае фильтрации воды  $m$  играет роль влагосодержания. Коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  зависит от влагосодержания, и поэтому такие задачи являются существенно нелинейными. В общем случае к уравнению (А.2.3) необходимо добавить еще один член, чтобы учесть действие капиллярных и гравитационных сил. Вариационные принципы и уравнения Лагранжа, разработанные в данной книге, могут успешно применяться для решения таких нелинейных фильтрационных задач.

*Диффузия нейтронов и ядерные реакторы.* Аналогичные методы применимы также и для приближенного анализа динамики ядерных реакторов. Хотя методика их применения остается той же, необходимы соответствующие изменения, поскольку такие задачи связаны не только с диффузией, но и с выделением нейтронов. Это соответствует наличию источников, зависящих от концентрации нейтронов. Кроме того, следует учитывать запаздывание нейтронной эмиссии, связанной с конечным временем релаксации источников. Этот эффект также учитывается вариационным принципом и уравнениями Лагранжа.

### А.3. ТЕРМОДИНАМИКА НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

Общий метод Лагранжа в термодинамике необратимых процессов был разработан автором в 1954 г. [Л. А-1]. Более подробное обсуждение выводов из этой теории проведено в работе [Л. А-2]. Такая формулировка термодинамики необратимых процессов с помощью уравнений Лагранжа и соответствующих вариационных принципов основана на введении нового термодинамического потенциала для систем с неравномерной температурой, а также диссипативной функции, выведенной из соотношений взаимности Онзагера. Этот подход применим для широкого круга явлений механики вязких и вязкоупругих сред, а также в термодинамике, физической химии и электродинамике.

Применению вариационных принципов в теплообмене предшествовала длительная разработка общего метода Лагранжа в указанных областях. Возможность такого применения была создана после использования этого общего метода в фундаментальной термодинамике и, в частности, для исследования термоупругости. Теория термоупругости Лагранжа, основанная на термодинамике необратимых процессов, опубликована автором в 1956 г. в работе [Л. А-3]. Полученные там соотношения взаимности и их применение в структурном анализе обсуждаются в работах [Л. А-4, А-5]. Подробное рассмотрение термоупругости с точки зрения метода Лагранжа приведено в недавно опубликованной работе Рафальского [Л. А-6].

Ниже в качестве иллюстрации более общего термодинамического подхода будет приведена задача термоупругости, а также краткое описание применения методов Лагранжа в динамике вязких сред, вязкоупругих и пористых сред и в электродинамике.

*Термоупругость.* Рассмотрим анизотропную упругую среду, находящуюся в механическом и термодинамическом равновесии при равномерной абсолютной начальной температуре  $T_r$ . Небольшое возмущение этого равновесия определяется полем смещения  $u_i$  твердо-

го тела и температурным полем  $\theta$ , представляющим отклонение от начального значения  $T_r$ . В декартовых координатах  $x_i$  температура  $\theta$ , деформация  $e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  и напряжение  $\sigma_{ij}$  связаны следующими уравнениями:

$$\sigma_{\mu\nu} = \sum^{ij} C_{\mu\nu}^{ij} e_{ij} - \beta_{\mu\nu} \theta, \quad (\text{A.3.1})$$

где  $\beta_{\mu\nu}$  и  $C_{\mu}^{ij}$  — физические константы. Последняя представляет изотермический модуль упругости, состоящий из 21 компоненты. Эти константы удовлетворяют системе уравнений:

$$\beta_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu}; \quad C_{\mu\nu}^{ij} = C_{ij}^{\mu\nu} = C_{\mu\nu}^{ji} = C_{\nu\mu}^{ij}. \quad (\text{A.3.2})$$

Следующее соотношение получается из классической термодинамики

$$s = \frac{c\theta}{T_r} + \sum^{ij} \beta_{ij} e_{ij}, \quad (\text{A.3.3})$$

где  $s$  — приращение энтропии в единице объема, а  $c$  — удельная теплоемкость в единице объема при отсутствии деформации. Разрешив уравнение (A.3.3) относительно  $\theta$  из (A.3.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \sum^{ij} \left( C_{\mu\nu}^{ij} + \frac{T_r}{c} \beta_{\mu\nu} \beta_{ij} \right) e_{ij} - \frac{T_r}{c} \beta_{\mu\nu} s; \\ \theta &= -\frac{T_r}{c} \sum^{ij} \beta_{ij} e_{ij} + \frac{T_r}{c} s. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.4})$$

Эти соотношения дают следующий важный результат.

Рассмотрим квадратичный инвариант

$$v = \frac{1}{2} \sum^{ij} \sigma_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} \theta s. \quad (\text{A.3.5})$$

После подстановки выражений  $\sigma_{ij}$  и  $\theta$  из (A.3.4) будем иметь функцию независимых переменных  $e_{ij}$  и  $s$ . Поскольку матрица коэффициентов в уравнениях (A.3.4) симметрична, можно записать:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial v}{\partial e_{ij}}; \quad \theta = \frac{\partial v}{\partial s}. \quad (\text{A.3.6})$$

В частных производных переменные  $e_{ij}$  рассматриваются как девять независимых переменных. Объемный интеграл

$$V = \iiint_{\tau} v \, d\tau \quad (\text{A.3.7})$$

вводится автором в качестве потенциала термоупругости. Поэтому инвариант  $v$  является удельным объемным потенциалом термоупругости.

Инвариант  $v$  можно выразить также с помощью независимых переменных  $e_{ij}$  и  $\theta$  в виде

$$v = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{\mu\nu} C_{\mu\nu}^{ij} e_{ij} e_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{c}{T_r} \theta^2. \quad (\text{A.3.8})$$

Для области  $\tau$  запишем:

$$V = V_r + \frac{1}{2T_r} \iiint c \theta^2 d\tau, \quad (\text{A.3.9})$$

где

$$V_r = \frac{1}{2} \iiint \sum_{ij} \sum_{\mu\nu} C_{\mu\nu}^{ij} e_{ij} e_{\mu\nu}.$$

Для изотермических деформаций ( $\theta=0$ ) потенциал  $V$  сводится к потенциалу  $V_r$ , представляющему собой классическую свободную энергию системы, эквивалентную хорошо известной энергии деформации в теории упругости.

Как показано автором, потенциал термоупругости  $V$  есть частный случай более общего термодинамического потенциала для систем с неравномерно распределенной температурой, совпадающего со свободной энергией, если температура среды равномерна.

Введем вектор смещения энтропии в виде

$$S_i = \frac{1}{T_r} H_i, \quad (\text{A.3.10})$$

где  $H_i$  — тепловое смещение. Используя  $S_i$ , получаем плотность энтропии  $s$  в виде

$$s = - \sum_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i}. \quad (\text{A.3.11})$$

Следовательно, можно переписать уравнение (A.3.3) как

$$\theta = - \frac{T_r}{c} \sum_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i} - \frac{T_r}{c} \sum_{ij} \beta_{ij} e_{ij}. \quad (\text{A.3.12})$$

Для системы, которая не находится в термодинамическом и механическом равновесии, мы должны ввести уравнение движения

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{A.3.13})$$

и уравнение теплопроводности

$$\dot{H}_i = - \sum_j k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}. \quad (\text{A.3.14})$$

В этих уравнениях  $\rho$  — плотность массы, а  $k_{ij}$  — теплопроводность. Перепишем уравнение (A.3.14) в эквивалентной форме

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = - T_r \sum_j \lambda_{ij} \dot{S}_j, \quad (\text{A.3.15})$$

где тепловое сопротивление  $\lambda_{ij}$  определяется обратной матрицей  $k_{ij}$ . В качестве неизвестных переменных, описывающих физическую систему, возьмем  $u_i$  и  $S_i$ . Тогда выражение (А.3.7) для  $V$  будет также функцией этих переменных, если подставить в него величины  $\sigma_{ij}$ ,  $s$  и  $\theta$  из уравнений (А.3.4), (А.3.11) и (А.3.12). Вариационный принцип имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta V + \iiint_{\tau} \rho \sum^i \ddot{u}_i \delta u_i d\tau + T_r \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{S}_j \delta S_i d\tau = \\ = \iint_A \left( \sum^i F_i \delta u_i - \theta \sum^i n_i \delta S_i \right) dA. \end{aligned} \quad (\text{А.3.16})$$

В этом уравнении  $\delta u_i$  и  $\delta S_i$  — произвольные вариации,  $F_i$  — сила на единицу площади поверхности, приложенная на границе  $A$  объема  $\tau$ , а  $n_i$  — внешняя единичная нормаль к границе.

Вариационный принцип (А.3.16) получаем следующим образом. Вариация потенциала термоупругости (А.3.7) будет иметь вид:

$$\delta V = \iiint_{\tau} \delta v d\tau, \quad (\text{А.3.17})$$

где

$$\delta v = \frac{1}{2} \sum^{ij} \sigma_{ij} \delta e_{ij} + \frac{1}{2} \sum^{ij} e_{ij} \delta \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \theta \delta s + \frac{1}{2} s \delta \theta. \quad (\text{А.3.18})$$

Подставив в это уравнение выражение (А.3.6), получим:

$$\delta v = \sum^{ij} e_{ij} \delta \sigma_{ij} + s \delta \theta. \quad (\text{А.3.19})$$

Тогда уравнение (А.3.18) можно записать в виде

$$\delta v = \sum^{ij} \sigma_{ij} \delta e_{ij} + \theta \delta s \quad (\text{А.3.20})$$

и вариация  $\delta V$  будет:

$$\delta V = \iiint_{\tau} \left( \sum^{ij} \sigma_{ij} \delta e_{ij} + \theta \delta s \right) d\tau. \quad (\text{А.3.21})$$

Деформация определяется в виде

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{А.3.22})$$

а  $s$  дается выражением (А.3.11). Интегрируя по частям (А.3.21) и подставляя результат в вариационный принцип (А.3.16), получаем:

$$\iiint_{\tau} \sum^{ij} \left( \rho \ddot{u}_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta u_i d\tau + \iiint_{\tau} \sum^{ij} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + T_r \lambda_{ij} \dot{S}_j \right) \delta S_i d\tau = 0. \quad (\text{А.3.23})$$

Это соотношение справедливо для всех вариаций  $\delta u_i$  и  $\delta S_i$ , если удовлетворяются уравнения движения (А.3.13) и уравнение тепло-

проводности (А.3.15). Следовательно, вариационный принцип (А.3.16) есть не что иное, как другая форма этих уравнений.

Вывод уравнений Лагранжа из вариационного принципа (А.3.16) проводится следующим образом. Выразим неизвестные переменные  $u_i$  и  $S_i$  с помощью обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$  в виде

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t); \\ S_i &= S_i(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t). \end{aligned} \quad (\text{А.3.24})$$

При этом обобщенные координаты задаются произвольными вариациями  $\delta q_i$ , откуда

$$\delta u_i = \sum^k \frac{\partial u_i}{\partial q_n} \delta q_n; \quad \delta S_i = \sum^k \frac{\partial S_i}{\partial q_n} \delta q_n. \quad (\text{А.3.25})$$

Поверхностный интеграл в уравнении (А.3.16) можно поэтому записать в виде

$$\iint_A \left( \sum^i F_i \delta u_i - \theta \sum^i n_i \delta S_i \right) dA = \sum^k Q_n \delta q_n, \quad (\text{А.3.26})$$

где

$$Q_n = \iint_A \left( \sum^i F_i \frac{\partial u_i}{\partial q_n} - \theta \sum^i n_i \frac{\partial S_i}{\partial q_n} \right) dA. \quad (\text{А.3.27})$$

Также

$$\delta V = \sum^k \frac{\partial V}{\partial q_n} \delta q_n. \quad (\text{А.3.28})$$

Величину

$$\iiint_V \rho \sum^i \ddot{u}_i \delta u_i = \iiint_V \rho \sum^{ik} \ddot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial q_n} \delta q_n \quad (\text{А.3.29})$$

можно выразить с помощью кинетической энергии, используя классический метод Лагранжа в механике. Чтобы показать это, рассмотрим тождество

$$\ddot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial q_n} = \frac{d}{dt} \left( \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial q_n} \right) - \dot{u}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_i}{\partial q_n} \right). \quad (\text{А.3.30})$$

Из уравнений (А.3.24) получим соотношение

$$\dot{u}_i = \sum^k \frac{\partial u_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (\text{А.3.31})$$

откуда

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial u_i}{\partial q_n} \quad (\text{А.3.32})$$

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial q_n} = \sum^i \frac{\partial^2 u_i}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial q_n \partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_i}{\partial q_n} \right). \quad (\text{А.3.33})$$

Подставив эти значения в тождество (А.3.30), получим:

$$\ddot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \left( \dot{u}_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \dot{q}_h} \right) - \dot{u}_i \frac{\partial u}{\partial q_h}, \quad (\text{А.3.34})$$

откуда следует:

$$\iiint_{\tau} \rho \sum^i \ddot{u}_i \delta u_i = \sum^k \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_h} \right\} \delta q_h, \quad (\text{А.3.35})$$

где  $\mathcal{F}$  — кинетическая энергия,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho \sum^i \dot{u}_i^2 d\tau. \quad (\text{А.3.36})$$

Точно таким же методом можно преобразовать оставшийся член в уравнении (А.3.16). Из выражений (А.3.24) получим:

$$\dot{S}_i = \sum^k \frac{\partial S_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial S_i}{\partial t}, \quad (\text{А.3.37})$$

откуда

$$\frac{\partial \dot{S}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial S_i}{\partial q_h}. \quad (\text{А.3.38})$$

Поэтому можно записать:

$$T_r \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{S}_j \delta S_i d\tau = \sum^k T_r \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{S}_j \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial q_h} d\tau \delta q_h \quad (\text{А.3.39})$$

или

$$T_r \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{S}_j \delta S_i d\tau = \sum^k \frac{\partial D}{\partial q_h} \delta q_h, \quad (\text{А.3.40})$$

где

$$D = \frac{1}{2} T_r \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} \dot{S}_i \dot{S}_j d\tau. \quad (\text{А.3.41})$$

В этом выводе учитывались соотношения взаимности Онзагера

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}. \quad (\text{А.3.42})$$

Инвариант  $D$  является диссипативной функцией. В ранее опубликованных работах [Л. А-2 и А-3] показано, что термодинамический смысл диссипативной функции состоит в том, что величина  $2D/T_r$  равна скорости роста энтропии в единице объема.

Подставив выражения (A.3.26), (A.3.28), (A.3.35) и (A.3.40) в вариационный принцип (A.3.16), получим:

$$\sum^k \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} \right\} \delta q_k = \sum^k Q_k \delta q_k. \quad (\text{A.3.43})$$

Поскольку вариации  $\delta q_k$  произвольны, приходим к уравнениям Лагранжа для обобщенных координат:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k. \quad (\text{A.3.44})$$

Используя методику, описанную в § 2.2, можно с помощью этих уравнений учесть граничные условия, включающие коэффициент теплообмена  $K$ . Это можно сделать, дополнив диссипативную функцию величиной диссипации на границе:

$$D = \frac{1}{2} T_r \iiint_{\tau} \sum^{ij} \lambda_{ij} S_i \dot{S}_j d\tau + \frac{1}{2} T_r \iint_A \frac{1}{K} S_n^2 dA, \quad (\text{A.3.45})$$

где  $S_n$  — нормальная компонента смещения энтропии на границе  $A$ . Для термодинамической силы используем выражение

$$Q_k = \iint_A \left( \sum^i F_i \frac{\partial u_i}{\partial q_k} - \theta_a \sum^i n_i \frac{\partial S_i}{\partial q_k} \right) dA, \quad (\text{A.3.46})$$

где  $\theta_a$  — адиабатическая поверхностная температура, введенная в § 2.2.

*Частный случай теплопроводности.* Полученные общие результаты применимы для случая чистой теплопроводности, если положить  $u_i = 0$ . Значение  $v$  из (A.3.5) можно записать в виде

$$v = \frac{1}{2} \theta s = \frac{1}{2} \frac{c \theta^2}{T_r}. \quad (\text{A.3.47})$$

Аналогичное выражение получается, если положить  $\sigma_{ij} = 0$ . В этом случае  $c$  обозначает теплоемкость при отсутствии напряжения. Следовательно, для чистой теплопроводности потенциал термолупругости имеет вид:

$$V = \frac{1}{2T_r} \iiint_{\tau} c \theta^2 d\tau. \quad (\text{A.3.48})$$

В задаче о чистой теплопроводности кинетическая энергия  $\mathcal{F}$  либо равна нулю, либо ею можно пренебречь. Отсюда, положив  $\mathcal{F} = 0$ , получим уравнения Лагранжа (A.3.44) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k. \quad (\text{A.3.49})$$

За исключением множителя  $1/T_r$ , выражения для  $V$ ,  $D$  и  $Q_k$  совпадают соответственно с выражениями для теплового потенциала, диссипативной функции и тепловой силы, приведенными в гл. 1 и 2. Уравнения Лагранжа для чистой теплопроводности, выведенные в этой главе, аналогичны уравнениям (A.3.49), если опустить в них общий множитель  $1/T_r$ .

Аналогично, пренебрегая смещениями и ускорением, увидим, что вариационный принцип в форме (А.3.16) совпадает с вариационным принципом в форме (1.5.10).

*Вязкие жидкости, вязкоупругость, пористые среды.* Уравнения Лагранжа (А.3.44) применимы к динамике несжимаемых вязких жидкостей. Движение жидкости описывается обобщенными координатами, а вязкость учитывается с помощью диссипативной функции Релея. Такой метод дает хорошие результаты при анализе многих задач гидродинамики. Особый интерес представляет его применение для течений в пограничном слое.

Гидродинамика вязких жидкостей и вязкоупругих сред с начальным напряжением на основании уравнений Лагранжа рассматривается в монографии автора [Л. А-7]. Механика пористых сред, содержащих вязкую жидкость, также разработана при использовании уравнений Лагранжа для упругих и вязкоупругих твердых тел [Л. А-8]. Задача о пористой среде с начальным напряжением решалась также с помощью этих же методов [Л. А-9]. Все эти теории имеют одну общую термодинамическую основу, что выявляет принципиальное сходство между термоупругостью и механикой пористых сред.

*Электродинамика.* Возможность представления уравнений электродинамики в лагранжевой форме известна давно. Соответствующий формализм включает диссипативную функцию, учитывающую джоулев эффект. Унифицированный метод Лагранжа для связанных электрических и механических систем дает особенно хорошие результаты в области электроакустики [Л. А-10]. В двух работах Херивеля [Л. А-11] сделана попытка сформулировать общий принцип Лагранжа для электромагнитной теории и гидродинамики.

## А.4. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Понятие обобщенных координат и соответствующие уравнения Лагранжа уже стали существенной составной частью классической механики. Введение Релеем диссипативной функции позволило учесть вязкие силы. Хотя обобщенные координаты использовать почти исключительно в задачах механики, само понятие этих координат и связанные с ними методы имеют гораздо более широкий смысл и являются основой анализа большого класса явлений. С чисто математической точки зрения методы Лагранжа при использовании понятий функционального анализа также приводят к новому подходу. Для пояснения этого более широкого подхода рассмотрим подробнее основы метода Лагранжа.

В классической механике исходным принципом является принцип Даламбера, основанный на понятии виртуальной работы. В системе из массовых точек он выражается в виде

$$\sum_k m_k \ddot{\delta} \mathbf{r}_k - \sum_k \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (\text{А.4.1})$$

Смещение массы  $m_k$  обозначено через  $\mathbf{r}_k$ , а сила, действующая на нее, — через  $\mathbf{F}_k$ . Суммирование производится по  $n$  массам. Уравнение (А.4.1) справедливо для произвольных вариаций  $\delta \mathbf{r}_k$ . Благодаря многим основным свойствам этой формулировки она является



эффективным методом анализа. Например, в случае голономных связей некоторые типы неизвестных сил автоматически исключаются из уравнений, поскольку их виртуальная работа равна нулю. Более того, можно подобрать вариации, удовлетворяющие голономным связям. В результате получаются уравнения, содержащие такое количество неизвестных, которое соответствует степеням свободы и в которые не входят силы связей. Кроме того, обычно имеется возможность выразить некоторые или все члены уравнения (А.4.1) с помощью таких физических инвариантов, как кинетическая и потенциальная энергия. Для большинства задач можно записать:

$$-\sum_k^k \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = \delta \dot{V} - \sum_j^j \mathcal{F}_j \delta \mathbf{r}_j, \quad (\text{А.4.2})$$

где  $V$  — потенциальная функция координат, а  $\mathcal{F}_j$  — заданная приложенная сила. При этом уравнение (А.4.1) можно записать как

$$\sum_k^k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \delta \mathbf{r}_k + \delta V = \sum_j^j \mathcal{F}_j \delta \mathbf{r}_j. \quad (\text{А.4.3})$$

Это уравнение можно распространить на непрерывные системы, если рассматривать физическую картину следующим образом. Можно описать поле теплового смещения в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, t), \quad (\text{А.4.3а})$$

где  $x, y, z$  — начальные координаты;  $t$  — время, а  $q_1, q_2, \dots, q_n$  — обобщенные координаты. Поскольку физическая система является существенно молекулярной или атомарной, ее можно разделить на ряд отдельных ячеек. Каждая ячейка должна содержать достаточное количество молекул или атомов для того, чтобы для нее были справедливы макроскопические законы. В то же время она должна быть достаточно малой по величине, чтобы ее поведение можно было описать с помощью нескольких параметров — дискретных величин по аналогии с описанием частиц.

В термодинамическом смысле подобные понятия обсуждались в § 1.3. Выражение (А.4.3а) для поля  $\mathbf{r}$  с помощью обобщенных координат является полным физическим определением, что становится очевидным, если разделить непрерывную систему на  $N$  ячеек и выбрать несингулярное преобразование  $3N = n$  компонент смещений центральной точки каждой ячейки в  $n$  переменных  $q_i$ . Для непрерывных систем суммирование в уравнении (А.4.3) заменяется интегралом:

$$\iiint_V m \ddot{\mathbf{r}} \delta \mathbf{r} \, d\tau + \delta V = \iint_A \mathcal{F} \delta \mathbf{r} \, dA. \quad (\text{А.4.4})$$

Для упрощения в этом уравнении считается, что силы  $\mathcal{F}$  приложены на границе  $A$  области объемного интегрирования  $\tau$ .

Покажем, что такое описание непрерывного поля смещения  $\mathbf{r}$  с помощью конечного числа координат  $q_i$  ограничивает конфигурацию поля  $\mathbf{r}$  представлениями только с помощью тех  $q_i$ , которые имеют физический смысл.

Пользуясь оптической терминологией, можно сказать, что физическое описание не должно выходить за пределы определенного порога разрешения, где непрерывная модель, представленная дифференциальными уравнениями, теряет физический смысл.

Из вариационного принципа (А.4.4) получим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i. \quad (\text{А.4.5})$$

Этот результат является следствием важного свойства подынтегрального выражения, содержащего ускорение в уравнении (А.4.4) и заключающегося в том, что это выражение может быть представлено с помощью физического инварианта  $\mathcal{J}$  кинетической энергии. Вывод уравнения (А.4.5) связан с функциональным тождеством:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^1}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i}. \quad (\text{А.4.6})$$

Этот метод аналогичен методу, применяемому при выводе уравнений Лагранжа для теплопроводности. Например, в случае изотропных свойств используется вариационный принцип (1.2.9) в виде

$$\iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} \cdot \delta \mathbf{H} \, d\tau + \delta V = - \iint_A \theta \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{H} \, dA, \quad (\text{А.4.7})$$

который аналогичен уравнению (А.4.4). В результате получим уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i. \quad (\text{А.4.8})$$

При этом величина, содержащая  $\dot{\mathbf{H}}$ , выражается с помощью физического инварианта, который в данном случае совпадает с диссипативной функцией  $D$ . Для этого также необходимо учесть функциональное тождество

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (\text{А.4.9})$$

аналогичное соотношению (А.4.6).

Большой класс явлений описывается с помощью уравнений Лагранжа, в которые входит кинетическая энергия и диссипативная функция и которые в общем виде могут быть записаны так:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i. \quad (\text{А.4.10})$$

Это уравнение для диссипации, обусловленной вязким трением, известно со времени введения диссипативной функции Рейля. Автором было показано, что такой универсальный подход возможен также в случае термодинамической диссипации, что показано в предыдущем параграфе на примере термоупругости.

*Приближенные и слабые решения.* До сих пор мы считали, что метод обобщенных координат позволяет полностью представить физическую систему с помощью большого, но конечного числа переменных. Однако необходимо отметить, что в большинстве случаев практическое применение уравнений Лагранжа не требует полного опи-

сания физической системы с помощью обобщенных координат. Во многих случаях можно предположить, что решение принадлежит классу функций с малым числом параметров, которые можно использовать в качестве обобщенных координат, подчиняющихся уравнениям Лагранжа. Как указывалось в § 1.4, этот метод является одним из самых эффективных методов приближенного решения, так как при его применении свойства решений известны уже при формулировке задачи, что позволяет уменьшить число неизвестных.

*Виртуальная работа как вариационное скалярное произведение.*

Понятие виртуальной работы известно в механике очень давно, где оно успешно применяется при анализе сложных задач и формулировке упрощенных приближенных уравнений. Автором было показано, что это понятие может применяться и в термодинамике. Действительно, понятие виртуальной работы есть не что иное, как физическое представление понятия, которое можно выразить на языке функционального анализа.

Рассмотрим, например, неизвестное скалярное поле

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (\text{A.4.11})$$

зависящее от  $(n+1)$  переменных  $x_i$  и  $t$ . Предположим, оно описывается уравнением

$$\mathcal{P}(\Phi, x_i, t) = 0. \quad (\text{A.4.12})$$

Это соотношение является дифференциальным уравнением общего вида. Умножив уравнение (A.4.12) на произвольные вариации  $\delta\Phi$  и проинтегрировав результат по объему  $\tau$  в  $n$ -мерном пространстве переменных  $x_i$ , получим:

$$\int_{\tau} \mathcal{P} \delta\Phi d\tau = 0, \quad (\text{A.4.13})$$

где  $d\tau = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ .

Для произвольных вариаций  $\delta\Phi$  из уравнения (A.4.13) не следует, что уравнение (A.4.12) справедливо всюду. Однако, используя математическую терминологию, можно сказать, что (A.4.12) справедливо почти всюду. Но это означает, что множество точек, в которых оно несправедливо, имеет нулевую меру.

Геометрически это уравнение можно выразить, положив

$$\mathcal{P} = R. \quad (\text{A.4.14})$$

Величину  $R$ , равную  $\mathcal{P}$ , можно рассматривать как вектор в функциональном пространстве. Запишем уравнение (A.4.13) в виде

$$\int_{\tau} R \delta\Phi d\tau = 0. \quad (\text{A.4.15})$$

Интеграл можно рассматривать как определение скалярного произведения двух векторов  $R$  и  $\delta\Phi$  в функциональном пространстве. Величина  $R$  представляет также «погрешность» уравнения (A.4.12). Следовательно, на языке функционального пространства можно сказать, что в уравнении (A.4.14) проекция  $R$  на вектор  $\delta\Phi$  равна нулю для всех ориентаций этого вектора.

Формулировка физических задач с помощью вариационных соотношений типа (A.4.13) открывает более широкие возможности для использования обобщенных координат и вывода соответствующих уравнений типа Лагранжа. Конкретные примеры показывают, что эти уравнения легко преобразовать, например, с помощью интегри-

рования по частям и некоторых других операций, которые используются, чтобы сгруппировать члены, соответствующие инвариантам. Остальные члены играют роль аналогов обобщенных сил.

Рассмотрим некоторые обобщения вышеописанных методов. Например, вместо уравнения (A.4.13) можно записать:

$$\int_{\tau} \mathcal{F} d\mathcal{F} d\tau = 0, \quad (\text{A.4.16})$$

где  $\mathcal{F}$  — функция  $\Phi$ . В более общем случае (A.4.16) может быть даже дифференциальным уравнением, содержащим  $\Phi$ . Еще одно обобщение можно получить, если учесть, что число необходимых независимых переменных не может быть  $(n+1)$ , но может быть  $(n+2)$ ,  $(n+3)$  и т. д. Рассмотрим, например, неизвестное поле

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2), \quad (\text{A.4.17})$$

являющееся функцией  $(n+2)$  переменных. Можно записать также вариационное уравнение типа (A.4.15). Однако в данном случае обобщенные координаты будут функциями двух переменных  $t_1$  и  $t_2$ . Обобщенные уравнения типа Лагранжа будут при этом дифференциальными уравнениями в частных производных.

*Метод наименьших квадратов.* Хорошо известным методом приближенного решения дифференциальных уравнений является минимизация интегрируемого квадрата погрешности  $R$ . Например, в случае дифференциального уравнения (A.4.12) этот интеграл будет иметь вид:

$$I = \int_{\tau} R^2 d\tau = \int_{\tau} \mathcal{F}^2 d\tau. \quad (\text{A.4.18})$$

Решение, минимизирующее это выражение, должно удовлетворять уравнению

$$\delta I = \int_{\tau} \mathcal{F} \delta \mathcal{F} d\tau = 0. \quad (\text{A.4.19})$$

Очевидно, что это уравнение является частным случаем уравнения (A.4.16), при выводе которого полагалось  $\mathcal{F} = \mathcal{P}$ . Следовательно, метод наименьших квадратов соответствует определенному выбору скалярного произведения. Однако поскольку  $\mathcal{F}$  в этом случае не функция, а оператор, то при минимизации величины  $I$  получаются более сложные дифференциальные уравнения, имеющие более высокий порядок, чем исходное уравнение (A.4.12). Кроме того, основные физические инварианты задачи обычно растворяются в формализме, искусственном и далеком от физической сущности задачи.

*Метод Галеркина.* Этот метод можно также считать частным случаем общего метода, основанного на понятии вариационного скалярного произведения. Он представляет собой выбор линейной зависимости от обобщенных координат, которые считаются неизвестными постоянными. Например, в случае дифференциального уравнения (A.4.12) мы можем записать решение в виде

$$\Phi = \sum_k^k q_k \Phi_k(x_i, t), \quad (\text{A.4.20})$$

где  $\Phi(x_i, t)$  — выбранные соответствующим образом функции  $(n+1)$  переменных  $x_i$  и  $t$ . Запишем интеграл

$$\int_{\tau'} \mathcal{F} \delta \Phi d\tau' = 0, \quad (\text{A.4.21})$$

где

$$d\tau' = dx_1 dx_2 \dots dx_n dt. \quad (\text{A.4.22})$$

Следовательно, в этом случае область интегрирования включает все  $(n+1)$  переменных  $x_i$  и  $t$ , а не только  $n$  переменных  $x_i$ , как в уравнении (A.4.13). Подставив значение  $\Phi$  из (A.4.20) в уравнение (A.4.21), получим:

$$\sum_k \int_{\tau'} \mathcal{F} \Phi_k \delta q_k d\tau' = 0. \quad (\text{A.4.23})$$

Поскольку вариации  $\delta q_k$  произвольны, приходим к уравнению

$$\int_{\tau'} \mathcal{F} \Phi_k d\tau' = 0, \quad (\text{A.4.24})$$

выражающему свойство ортогональности погрешности  $\mathcal{F}^0 = R$  и функций  $\Phi_k$ . В этих уравнениях и состоит метод Галеркина.

Этот метод получается из общего уравнения (A.4.16), если, во-первых, положить  $\mathcal{F} = \Phi$ , во-вторых, принять линейную зависимость  $\Phi$  от обобщенных координат, рассматриваемых как постоянные, и, в-третьих, проинтегрировать его по области всех переменных. Последнее соответствует тому, что переменная  $t$  не присутствует в явном виде, тогда как мы имеем  $(n+1)$  переменных  $x_i$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Глава первая

1-1. **Biot M. A.** Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena.—«J. Appl. Phys.», 1954, v. 25, p. 1385—1391.

1-2. **Biot M. A.** Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.—«J. Appl. Phys.», 1956, v. 27, p. 240—253.

1-3. **Biot M. A.** New methods in heat flow analysis with application to flight structures.—«J. Aeronaut. Sci.», 1957, v. 24, p. 857—873.

1-4. **Biot M. A.** Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity.—«Phys. Rev.», 1955, v. 97, p. 1463—1469.

1-5. **Biot M. A.** Linear thermodynamics and the mechanics of solids.— In: Proc. of the Third U. S. National Congress of Applied Mechanics. New York, 1958, p. 1—18.

1-6. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел, М., «Наука», 1964.

1-7. **Levinson M.** Thermal stresses in an idealized wing structure.—«J. Aerospace Sci.», 1961, v. 28, p. 899—901.

1-8. **Lardner T. J.** Biot's variational principle in heat conduction.—«AIAA J.», 1963, v. 1, p. 196—206.

1-9. **Chu H. N.** Application of Biot's variational method to convective heating of a slab.—«J. Spacecraft Rockets», 1964, v. 1, p. 686—688.

1-10. Emery A. F. Use of Biot's variational technique in heat conduction.—«AIAA J.», 1965, v. 3, p. 1525—1526.

1-11. Fung Y. C. Foundations of solid mechanics. New Jersey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965, p. 408—409.

1-12. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965.

1-13. Самойлович Ю. А. Принцип Гаусса в теории теплопроводности.—«Теплофизика высоких температур», 1966, т. 4, с. 832.

1-14. Дярмата И. Об общем принципе неравновесной термодинамики.—«Журн. физич. химии», 1965, т. 39, № 6, с. 1489.

1-15. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М., «Мир», 1966.

1-16. Шехтер Р. Вариационный метод в инженерных расчетах. М., «Мир», 1971.

1-17. Айнола Л. Я. Вариационные принципы для нестационарных задач теплопроводности.—«Инж.-физич. журн.», 1967, т. 12, № 4, с. 465.

1-18. Лыков А. В. Теория теплопроводности М., «Высшая школа», 1967, 600 с.

### *Глава вторая*

2-1. Biot M. A. New methods in heat flow analysis with application to flight structures.—«J. Aeronaut. Sci.», 1957, v. 24, p. 857—873.

2-2. Biot M. A. Further developments of new methods in heat flow analysis.—«J. Aerospace Sci.», 1959, v. 26, p. 367—381.

2-3. Biot M. A. Fundamentals of boundary-layer heat transfer with streamwise temperature variations.—«J. Aerospace Sci.», 1962, v. 29, p. 558—567.

2-4. Moulton F. R. Differential equations. New York, Macmillan, 1930, chapt. 15.

2-5. Bocher M. Introduction to higher algebra. New York, Macmillan, 1924, p. 170.

2-6. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.—«J. Appl. Phys.», 1956, v. 27, p. 240—253.

### *Глава третья*

3-1. Biot M. A. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena.—«J. Appl. Phys.», 1954, v. 25, p. 1385—1391.

3-2. Van der Pol B., Bremmer H. Operational calculus based on the two-sided Laplace transform. Cambridge, Cambridge University Press, 1950.

3-3. Karman T., Biot M. A. Mathematical methods in engineering. New York, McGraw-Hill, 1940.

3-4. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.—«J. Appl. Phys.», 1956, v. 27, p. 240—253.

3-5. Biot M. A. Variational and Lagrangian methods in viscoelasticity.—In: Deformation and flow of solids. Berlin, Springer, 1956, p. 251—263.

3-6. Schapery R. A. On the time dependence of viscoelastic variational solutions.—«Q. Appl. Math.», 1964, v. 22, p. 207—215.

3-7. Gurtin M. E. Variational principles for linear initial value problems.—«Q. Appl. Math.», 1964, v. 22, p. 252—256.

3-8. Biot M. A. Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity.—«Phys. Rev.», 1955, v. 97, p. 1463—1469.

## Глава четвертая

- 4-1. **Biot M. A.** Further development of new methods in heat flow analysis.—«J. Aerospace Sci.», 1959, v. 26, p. 367—381.
- 4-2. **Biot M. A.** Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.—«J. Appl. Phys.», 1956, v. 27, p. 240—253.
- 4-3. **Biot M. A.** Thermodynamics and heat flow analysis by Lagrangian methods.—In: Proceedings of the Seventh Anglo-American Aeronautical Conference. New York, Institute of the Aeronautical Sciences, 1959, p. 418—431.

## Глава пятая

- 5-1. **Biot M. A.** New methods in heat flow analysis with application to flight structures.—«J. Aeronaut. Sci.», 1957, v. 24, p. 857—873.
- 5-2. **Biot M. A., Daughaday H.** Variational analysis of ablation.—«J. Aerospace Sci.», 1962, v. 29, p. 228—229.
- 5-3. **Biot M. A., Agrawal H. C.** Variational analysis of ablation for variable properties.—«J. Heat Transfer», 1964, v. 86, p. 437—442.
- 5-4. **Lardner T. J.** Approximate solutions to phase-change problems.—«AIAA Jr.», 1967, v. 5, p. 2079—2080.
- 5-5. **Rafalski P., Zyskowski W.** Lagrangian approach to the non-linear boundary heat-transfer problem.—«AIAA Jr.», 1968, v. 6, p. 1606—1608.

## Глава шестая

- 6-1. **Biot M. A.** Lagrangian thermodynamics of heat transfer in systems including fluid motion.—«J. Aerospace Sci.», 1962, v. 29, p. 568—577.
- 6-2. **Biot M. A.** Fundamentals of boundary-layer heat transfer with streamwise temperature variations.—«J. Aerospace Sci.», 1962, v. 29, p. 558—567.
- 6-3. **Nigam S. D., Agrawal H. C.** A variational principle for convection of heat.—«J. Math. Mech.», 1960, v. 9, p. 869—884.
- 6-4. **Biot M. A.** Generalized variational principles for convective heat transfer and irreversible thermodynamics.—«J. Math. Mech.», 1966, v. 15, p. 177—186.
- 6-5. **Agrawal H. C.** Variational method for laminal heat transfer in channels.—«ASME Paper 60-WA-98», 1960.

## Глава седьмая

- 7-1. **Biot M. A.** Lagrangian thermodynamics of heat transfer in systems including fluid motion.—«J. Aerospace Sci.», 1962, v. 29, p. 568—577.
- 7-2. **Biot M. A.** Simplified variational and physical analysis of heat transfer in laminar and turbulent flow.—«Physics Fluids», 1967, v. 10, p. 1424—1437.
- 7-3. **Biot M. A.** Fundamentals of boundary-layer heat transfer with streamwise temperature variations.—«J. Aerospace Sci.», 1962, v. 25, p. 558—567.
- 7-4. **Karman T.** Some aspects of the turbulence problem.—In: Proc. Fourth Int. Congr. Appl. Mech. Cambridge University Press, 1935, p. 54—91.

7-5. **Karman T.** The analogy between fluid friction and heat transfer.—«Trans. Am. Soc. Mech. Engrs», 1939, v. 61, p. 705—710.

7-6. **Rannie W. D.** Heat transfer in turbulent shear flow.—«J. Aeronaut. Sci.», 1956, v. 23, p. 485—489.

### Глава восьмая

8-1. **Biot M. A.** Complementary forms of the variational principle for heat conduction and convection.—«J. Franklin Inst.», 1967, v. 283, p. 372—378.

8-2. **Chambers L. G.** A variational principle for the conduction of heat.—«Q. Jr. Mech. Appl. Math.», 1956, v. 9, p. 234—235.

8-3. **Rosen P.** On variational principles for irreversible processes.—«J. Chem. Phys.», 1953, v. 21, p. 1220—1221.

8-4. **Hays D. F., Curd H. N.** Heat conductoin in solids: temperature dependent thermal conductivity.—«Int. J. Heat Mass Transfer», 1968, v. 11, p. 285—295.

### Приложение

A-1. **Biot M. A.** Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena.—«J. Appl. Phys.», 1954, v. 25, p. 1385—1391.

A-2. **Biot M. A.** Linear thermodynamics and the mechanics of solids.— In: Proceedings of the Third U. S. National Congress of Applied Mechanics, New York, American Society of Mechanical Engineers, 1958, p. 1—18.

A-3. **Biot M. A.** Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.—«J. Appl. Phys.», 1956, v. 27, p. 240—253.

A-4. **Biot M. A.** New thermomechanical reciprocity relations with applications to thermal stress analysis.—«J. Aerospace Sci.», 1959, v. 26, p. 401—408.

A-5. **Kowalewski J.** Influence functions for displacements and stresses from temperature and heat loads.—«AIAA Jr.», 1967, vol. 5, p. 1694—1696.

A-6. **Rafalski P.** The Lagrangian formulation of the dynamic thermoelastic problem for mixed boundary conditions.—«Proc. Vibr. Probl.», 1968, vol. 9, p. 17—35.

A-7. **Biot M. A.** Mechanics of incremental deformation. New York, Wiley, 1965, chap. 6.

A-8. **Biot M. A.** Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media.—«J. Acoust. Soc. Am.», 1962, v. 34, p. 1254—1264.

A-9. **Biot M. A.** Theory of stability and consolidation of a porous medium under initial stresses.—«J. Math. Mech.», 1963, v. 12, p. 521—542.

A-10. **Karman T., Biot M. A.** Mathematical methods in engineering. New York, McGraw-Hill, 1940, chapt. 6, p. 256.

A-11. **Herivel J. W.** A general variational principle for dissipative systems.—«Proc. R. Ir. Acad.», 1954, v. 56, Sect. A, p. 37—44, 65—75.

A-12. **Biot M. A., Tolstoy I.** Formulation of wave propagation in infinite media by normal coordinates with an application to diffraction.—«J. Acoust. Soc. Am.», 1957, v. 29, p. 381—391.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского перевода . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	8
<b>Глава первая</b>	
<b>Основной вариационный принцип в теплопроводности</b>	
1.1. Введение . . . . .	13
1.2. Вариационный принцип для изотропной теплопроводности . . . . .	15
1.3. Обобщенные координаты . . . . .	19
1.4. Уравнения Лагранжа и принцип минимальной диссипации . . . . .	21
1.5. Анизотропная теплопроводность . . . . .	25
1.6. Источники тепла . . . . .	28
1.7. Численный пример . . . . .	31
<b>Глава вторая</b>	
<b>Общая теория линейных систем</b>	
2.1. Введение . . . . .	34
2.2. Диссипативная функция граничных условий . . . . .	36
2.3. Линейные уравнения Лагранжа . . . . .	39
2.4. Моды тепловой релаксации . . . . .	42
2.5. Ортогональность и нормальные координаты . . . . .	46
2.6. Квазистационарное течение . . . . .	53
2.7. Пример. Слабые решения . . . . .	55
<b>Глава третья</b>	
<b>Операционный формализм</b>	
3.1. Введение . . . . .	58
3.2. Тепловая восприимчивость . . . . .	59
3.3. Полное тепловое сопротивление . . . . .	64
3.4. Преобразования Фурье и Лапласа . . . . .	67
3.5. Операционные методы . . . . .	70
3.6. Операторно-вариационный принцип . . . . .	73
3.7. Принцип взаимовлияния . . . . .	75
3.8. Непрерывный спектр релаксации . . . . .	79
<b>Глава четвертая</b>	
<b>Сопряженные поля</b>	
4.1. Введение . . . . .	81
4.2. Циклические координаты и сопряженные поля . . . . .	83
4.3. Принцип минимальной диссипации для сопряженных полей . . . . .	87
4.4. Дополнительная формулировка сопряженных полей . . . . .	89
4.5. Связь с функцией Грина . . . . .	94
4.6. Сопряженные поля и нормальные координаты . . . . .	98
4.7. Пример сопряженных полей . . . . .	104

## Глава пятая

### Нелинейные системы

5.1. Введение . . . . .	106
5.2. Тепловой потенциал нелинейных систем . . . . .	107
5.3. Вариационный принцип . . . . .	108
5.4. Сопряженные поля для нелинейных систем . . . . .	111
5.5. Оплавление и излучение . . . . .	115
5.6. Нагревание и охлаждение стенки с нелинейными свойствами . . . . .	118

## Глава шестая

### Конвективный теплообмен

6.1. Введение . . . . .	121
6.2. Функция влияния . . . . .	122
6.3. Уравнения Лагранжа для теплопроводности при наличии конвекции на границе . . . . .	127
6.4. Сопряженные поля для конвективного теплообмена . . . . .	129
6.5. Унифицированные уравнения для системы «твердое тело — жидкость» при наличии конвекции . . . . .	134

## Глава седьмая

### Теплообмен в пограничном слое

7.1. Введение . . . . .	140
7.2. Аналогия теплопроводности . . . . .	142
7.3. Вариационная оценка функции влияния . . . . .	144
7.4. Общие вариационные методы . . . . .	148
7.5. Ламинарный пограничный слой . . . . .	154
7.6. Турбулентный пограничный слой . . . . .	159
7.7. Приложения . . . . .	165

## Глава восьмая

### Дополнительные вариационные принципы

8.1. Введение . . . . .	167
8.2. Теплопроводность линейных систем . . . . .	169
8.3. Операционные принципы . . . . .	177
8.4. Теплопроводность в нелинейных системах . . . . .	181
8.5. Конвективные системы . . . . .	184

## Приложение

### А. Физические аналогии

A.1. Введение . . . . .	189
A.2. Перенос массы . . . . .	190
A.3. Термодинамика необратимых процессов . . . . .	192
A.4. Обобщенные координаты и функциональный анализ . . . . .	199

Список литературы . . . . .	204
-----------------------------	-----