1992 г. январь — февраль т. 47, вып. 1 (283)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.248

ХАОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

В. П. Белавкин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. Некоммутативная алгебра Ито

Некоммутативный стохастический анализ и исчисление возникли в 80-е годы как результат математического обоснования понятий квантового белого шума и соответствующих «уравнений Ланжевена», обсуждавшихся физиками, начиная с 60—х годов, в связи со стохастическими моделями квантовой оптики и радиофизики [1—3]. Первые строгие результаты по квантовому стохастическому исчислению принадлежат Хадсону и Партасарати [14], открывшим в 1983 году квантовую форму Ито для операторно-значных интегралов по некоммутирующим каноническим мартингалам $M_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Последние определяются процессами рождения $A^+(t)$, уничтожения $A_-(t)$ и числа квантов $N(t)$ как линейные комбинации

$$iM_1 = A_- - A^+, \; M_2 = A_- + A^+, \; M_3 = N \tag{1}$$

в симметричном фоковском пространстве $\Gamma(\mathscr{K})$ над $\mathscr{K} = L^2(\mathbb{R}_+)$ относительно естественной фильтрации $\Gamma_t = \Gamma(L^2[0, t])$, $t \in \mathbb{R}_+$, и вероятностного вектора $1_\varnothing \in \bigcap_{t>0} \Gamma_t$ вакуумного состояния $E[X] = (1_\varnothing \mid X 1_\varnothing)$, $X \in \mathcal{A}$. Здесь тройка $(\Gamma, \mathcal{A}, E)$ есть «квантовое вероятностное пространство» [5], состоящее в общем случае из гильбертова пространства Γ, представления некоторой операторной алгебры $\mathcal{A}$ с инволюцией — эрмитовым сопряжением $X \mapsto X^* \in \mathcal{A}$ и функционалом математического ожидания $E: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, определяемым скалярным произведением нормированного вектора $1 \in \Gamma$ и вектора X_1. Всякому (классическому) вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ [6] отвечает «квантовое», состоящее из комплексного пространства $\Gamma = L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f \mid h) = \int f(\omega)^* h(\omega) P(d\omega),$$

коммутативной алгебры операторов умножения $(Xf)(\omega) = x(\omega) f(\omega)$ на комплексные $\mathcal{F}$-измеримые случайные величины $x: \Omega \to \mathbb{C}$ и функционала

$$E[X] = \int x(\omega) P(d\omega) = (1 \mid X 1), \tag{2}$$

определяемого вероятностным вектором $1(\omega) = 1$, $\forall \omega \in \Omega$. Обратное справедливо лишь в случае коммутативной B^*-алгебры $\mathcal{A}$ [7], что указывает на значительно большую общность некоммутативной теории вероятностей, охватывающей также чисто квантовый случай, соответствующей простой алгебре $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Gamma)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве Γ.

Используя описанную аналогию, Хадсон и Партасарати ввели понятие адаптивного (согласованного) квантового процесса как семейства $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ операторов в $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, каждый из которых присоединен к подалгебре $\mathcal{A}^t$, порождаемой каноническими операторами $\{M_i(s) \mid s \leqslant t,\ i = 1, 2, 3\}$. При этом инкременты $\Delta M_i(t) = M_i(t + \Delta t) - M_i(t)$ оказываются коммутирующими с согласованными операторами D_t^i, что позволяет ввести квантовые стохастические интегралы $X_t = \int_0^t D_s^i dM_i(s)$ как пределы интегральных сумм Ито $\sum_{t \in \tau} D_t^i \Delta M_i(t)$, где $\tau = \{t_1 < \ldots < t_N\}$, $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \to 0$ при $N \to \infty$ (здесь и далее используется Эйнштейновское правило суммирования $D^i M_i = \sum_{i \geqslant 1} D^i M_i$). Основываясь на этом подходе, в [14] была построена квантовая эволюция как решение линейного стохастического дифференциального уравнения $dU_t = U_t \sum_{j \geqslant 0} L\, d\Lambda_j$, $U_0 = I$ с постоянными ограниченными операторными коэффициентами и некоммутирующими инкрементами $d\Lambda_j = dM_j$, $j = 1, 2, 3$ и $d\Lambda_0 = dt$.

Для изучения условий унитарности $U_t^* = U_t^{-1}$ была использована формула Ито

$$\begin{gathered} d(X_t^* X_t) = dX_t^* X_t + X_t^* dX_t + dX_t^* dX_t, \\ dX_t^* dX_t = D_t^{i*} c_{ik}^0 D_t^k\, dt + D_t^{i*} c_{ik}^j D_t^k\, dM_j = \sum_{i, j, k \geqslant 0} D_t^{i*} c_{ik}^j D_t^k\, d\Lambda_j, \end{gathered} \tag{3}$$

где произведение квантово-стохастических дифференциалов $dX_t = \sum_{j \geqslant 0} D_t^j d\Lambda_j$, $dX_t^* = \sum_{j \geqslant 0} D_t^{j*} d\Lambda_j$ определяется таблицей умножения Хадсона — Партасарати

$$dN dN = dN,\ dN dA^+ = dA^+,\ dA_- dN = dA_-,\ dA_- dA^+ = dt$$

(другие комбинации равны нулю): $c^j_{i0} = 0 = c^j_{0k}$, для всех $i, j, k = 0, 1, 2, 3$, а матрицы $\boldsymbol{c}^j = [c^j_{ik}]$, $i, k = 1, 2, 3$, имеют вид

$$\boldsymbol{c}^0 = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что трехмерное комплексное пространство $\mathfrak{A}$ векторов $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ является ассоциативной и инволютивной алгеброй относительно комплексного сопряжения $\alpha^\# = (\alpha^{1*}, \alpha^{2*}, \alpha^{3*})$ и композиции

$$\boldsymbol{\alpha}^\#\alpha = (\boldsymbol{\alpha}^{i*}c^1_{ik}\boldsymbol{\alpha}^k,\ \boldsymbol{\alpha}^{i*}c^2_{ik}\boldsymbol{\alpha}^k,\ \boldsymbol{\alpha}^{i*}c^3_{ik}\boldsymbol{\alpha}^k) = (\boldsymbol{\alpha}^\#\boldsymbol{\alpha})^\#,$$

причем $(\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\beta\gamma}) = (\boldsymbol{\beta}^\#\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\gamma})$ относительно (полу)скалярного произведения $(\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}^{i*}c^0_{ik}\alpha^k = | i\alpha^1 + \alpha^2 |^2$. Благодаря этим свойствам можно ввести четырехмерную алгебру $\mathcal{B} = \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ с элементами $b = (\boldsymbol{\alpha}, \beta)$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathbb{C}$, инволюцией $b^* = (\boldsymbol{\alpha}^\#, \beta^*)$, умножением

(4) $$b^\star b = (\boldsymbol{\alpha}^\#\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\# \cdot \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha}^\# \cdot \boldsymbol{\alpha} := (\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha})$$

и линейной формой $l(b) = \beta$, определяющей полускалярное произведение на $\mathcal{B}$: $(b \mid b) = l(b^\star b) = \boldsymbol{\alpha}^\# \cdot \boldsymbol{\alpha}$. В результате мы получаем квантовую алгебру Ито $\mathcal{B}$, которая является некоммутативной ассоциативной алгеброй с эрмитовой $l(b^\star) = l(b)^*$ положительной, $l(b^\star b) \geqslant 0$, формой l: $\mathcal{B} \to \mathbb{C}$, имеющей тривиальный нулевой двусторонний идеал

$$\mathcal{I} = \{b \in \mathcal{B} \mid l(b) = l(ab) = l(bc) = l(abc) = 0,\ \forall a, c \in \mathcal{B}\}.$$

Примем это свойство $\mathcal{I} = \{0\}$ за определение (абстрактной) алгебры Ито $(\mathcal{B}, l)$, в качестве которой можно рассматривать любую ассоциативную инволютивную алгебру, факторизованную по нулевому идеалу $\mathcal{I}$ положительной эрмитовой формы l. Выбирая самосопряженный базис $\{e_j = e_j^\star \mid j = 0, 1, \ldots\}$ в $\mathcal{B}$ таким образом, что $l\left(\sum_{j\geqslant 0} \beta^j e_j\right) = \beta^0$, общую конечномерную алгебру Ито можно также описывать эрмитовыми структурными коэффициентами

(5) $$c^j_{ik} = c^{j*}_{ki}, \qquad \sum_{j\geqslant 0} c^i_{nj}c^j_{km} = \sum_{j\geqslant 0} c^j_{nk}c^i_{jm},$$

определяющими таблицу умножения $d\Lambda_i d\Lambda_k = \sum_{j\geqslant 0} c^j_{ik} d\Lambda_j$ базисных дифференциалов и являющимися вещественными лишь в случае коммутированной $\mathcal{B}$. При этом $c^0 = [c^0_{ik}]_{i, k\geqslant 0}$ есть неотрицательно-определенная матрица комплексного (полу)скалярного произведения $l(b^\star b) = \sum_{i, k\geqslant 0} \beta^{i*}c^0_{ik}\beta^k$. Например, стандартное пуассоновское исчисление $dndn = dn$ ассоциировано с простейшей алгеброй Ито

$$\mathcal{B} = \mathbb{C},\ b = \beta \mapsto b^\star = \beta^*,\ b^\star b = |\beta|^2,\ l(b) = \beta,$$

содержащей единицу $1 \in \mathcal{B}$. Стандартное винеровское исчисление $dwdw = dt$, $dwdt = dtdt = dtdw = 0$ ассоциировано с двумерной нильпотентной алгеброй Ито $\mathcal{B} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ (без единицы): $b = (\alpha, \beta) \mapsto b^\star = (\alpha^*, \beta^*)$; $b^\star b = (0, |\alpha|^2)$, $l(b) = \beta$.

Хорошо известно [8], что как пуассоновское исчисление, так и винеровское можно реализовать как подисчисления квантового стохастического исчисления в пространстве Фока относительно вакуумного состояния $1 = 1_{\mathcal{Z}}$, полагая, например,

$$w(t) = A_-(t) + A^+(t),\ n(t) = tI + A_-(t) + A^+(t) + N(t).$$

Естественно возникает вопрос, может ли быть реализовано таким же образом произвольное (некоммутативное) исчисление, соответствующее (абстрактной) алгебре Ито $(\mathcal{B}, l)$? Уточним, что речь идет об некоммутативном исчислении стохастических интегралов по операторным представлениям $\Lambda(t, b) = \sum_{j\geq 0} \beta^j \Lambda_j(t)$ процессов с заданными ожиданиями $E[\Lambda(t, b)] = tl(b) = \beta^0 E[\Lambda_0(t)]$ и независимыми приращениями $d\Lambda(t, b) = \Lambda(t + dt, b) - \Lambda(t, b)$, $b \in \mathcal{B}$, реализующими таблицу умножения $d\Lambda_i d\Lambda_k = \sum_{j\geq 0} c^j_{ik} d\Lambda_j$:

$$d\Lambda(t, b)^* d\Lambda(t, b) = \sum_{i,j,k\geq 0} \beta^{i*} c^j_{ik} \beta^k\, d\Lambda_j(t) = d\Lambda(t, b^\star b). \tag{5}$$

Мы дадим положительный ответ на этот вопрос, сведя его к построению канонических представлений безгранично-делимых производящих функций

$$\varphi^t(b) = E[\pi^t(b)] = \exp\{tl(b)\}, \tag{7}$$

определяемых математическими ожиданиями «экспоненциальных» операторов $\pi^t(b)$, $b \in \mathcal{B}$,— решений стохастических дифференциальных уравнений

$$d\pi^t(b) = \pi^t(b) d\Lambda(t, b),\ \pi^0(b) = I. \tag{8}$$

В главе 1 такие функции определяются решением уравнения $d\varphi^t(b) = \varphi^t(b) l(b) dt$, $\varphi^0(b) = 1$, полученного усреднением E уравнения (8) с учетом независимости приращений $d\Lambda(t, b)$ от $\pi^t(b)$.

Применение формулы Ито

$$d(\pi^t(b)^* \pi^t(b)) = d\pi^t(b)^* d\pi^t(b) + d\pi^t(b)^* \pi^t(b) + \pi^t(b)^* d\pi^t(b) = \\ = \pi^t(b)^* \pi^t(b)\, d\Lambda(t, b^\star + b^\star b + b)$$

дает правило умножения

$$\pi^t(b)^* \pi^t(b) = \pi^t(b^\star + b^\star b + b) = \pi^t(b \bigstar b),$$

где $b \bigstar b = b^\star \cdot b$ определяется новой ассоциативной операцией $a \cdot c = a + ac + c$, превращающей $\bigstar$-алгебру $\mathcal{B}$ в $\bigstar$-моноид — инволютивную полугруппу, в которой единицей $u \in \mathcal{B}$ служит нуль $0 : 0 \cdot b = 0 + b = b$. Отсюда следует положительная определенность $\sum_{a, c} \varphi^t(a \bigstar c) \lambda^*_a \lambda_c \geqslant 0$ и нормировка $\varphi^t(u) = 1$ функции φ^t для каждого t относительно этой новой полугрупповой операции, инволюции $\bigstar$ и единицы $u = 0$ в $\mathcal{B}$ как результат положительности $E[X^* X] \geqslant 0$ и нормировки $E[I] = 1$ математического ожидания (2) для $X = \sum \lambda_b \pi^t(b)$, $I = \pi^t(0)$. Всякая такая функция φ^t, которая включается в непрерывную однопараметрическую полугруппу $\{\varphi^r \mid r \in \mathbb{R}_+\}$, $\varphi^r(b) \varphi^s(b) = \varphi^{r+s}(b)$, $\varphi^0(b) = 1$ производящих функций на $\mathcal{B}$, называется безгранично-делимым законом [9].

В главе 2 мы выполним программу Ито для квантового стохастического исчисления в свободной от размерности форме, доказав непрерывность квантовых стохастических интегралов в фоковских шкалах и построив некоммутативную теорию многократных стохастических интегралов, определяющих решения линейных квантовых дифференциальных уравнений в канонической форме. При этом будет использован подход, основанный на явном определении этих интегралов в фоковском представлении, позволяющем распространить их и на неадаптивные операторные функции. Получена также функциональная квантовая формула Ито, которая записывается в псевдопуассоновской форме [10]

$$df(X_t) = \sum_{j\geqslant 0} [f(\mathbf{X}_t + \mathbf{D}_t) - f(\mathbf{X}_t)]^j \, d\Lambda_j(t), \tag{9}$$

где $[(\mathbf{X}+\mathbf{D})^m - \mathbf{X}^m]^j = D^j_m$ для $f(X) = X^m$, $D^j_0 = 0$, $\forall j \geqslant 0$, $D^j_{m+1} = XD^j_m + D^jX^m + \sum_{i,k\geqslant 0} D^i c^j_{ik} D^k$. При этом $\mathbf{X}$ есть канонический образ $(X, 0)$ в формальных суммах $\mathbf{X} + \mathbf{D} = (X, \boldsymbol{D})$, $\mathbf{D} = (0, \boldsymbol{D})$, снабженных инволюцией $(\mathbf{X} + \mathbf{D})^\star = (X^*, \boldsymbol{D}^\star)$ и произведением

$$(\mathbf{X} + \mathbf{D})^\star (\mathbf{X} + \mathbf{D}) = (X^*X, X^*\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^\star X + \boldsymbol{D}^\star \boldsymbol{D}), \tag{10}$$

где $X^*\boldsymbol{D} = \{X^*D^j \mid j \geqslant 0\}$, $\boldsymbol{D}^\star X = \{D^{j*}X \mid j \geqslant 0\}$, $\boldsymbol{D}^\star\boldsymbol{D} = \{\sum_{i,k\geqslant 0} D^{i*} c^j_{ik} D^k \mid j \geqslant 0\}$, $f(\mathbf{X}) = (f(X), \mathbf{0})$ и $f(\mathbf{X} + \mathbf{D})$ вычисляется как степенной ряд относительно этого произведения.

Эта формула, имеющая смысл для любой аналитической функции f, является новой даже в случае классического операторнозначного процесса X_t, определяемого стохастическим дифференциалом $dX_t = \sum_{j\geqslant 0} D^j_t d\Lambda_j(t)$ с согласованными $\boldsymbol{D}_t = \{D^j_t \mid j \geqslant 0\}$. Заметим, что в такой разностной форме можно записать также и нестохастический дифференциал $df(X_t)$ для дифференцируемой операторной функции X_t, некоммутирующей с $dX_t = D_t dt$. Соответствующая алгебра $\mathfrak{A}$ является нульмерной, а алгебра Ито $\mathscr{B} = \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ — одномерной с вырожденным произведением $b^\star b = 0$, $\forall b \in \mathbb{C}$, реализуемым исчислением $dt dt = 0$ нестохастических бесконечно малых dt. В частности, для $f(X) = X^m$ получим из $c^0_{00} = 0$

$$dX^m_t = [(\mathbf{X}_t + \mathbf{D}_t)^m - \mathbf{X}^m_t]^0 \, d\Lambda_0 = \sum_{n=1}^{m} X^{m-n}_t D_t X^{n-1}_t \, dt,$$

как частный случай формулы (9) при $j \equiv 0$, $d\Lambda_0 = dt$ для $\boldsymbol{D} = D$:

$$df(X_t) = [f(\mathbf{X}_t + \mathbf{D}_t) - f(\mathbf{X}_t)]^0 dt, \quad \mathbf{X} + \mathbf{D} = (X, D),$$

$$[(\mathbf{X} + \mathbf{D})^m - \mathbf{X}^m]^0 = D_m, \; D_0 = 0, \; D_{m+1} = XD_m + DX^m.$$

Здесь $\mathbf{X} = (X, 0)$, $\mathbf{D} = (0, D)$ и учтено, что $\mathbf{X}^m = (X^m, 0)$,

$$(\mathbf{X} + \mathbf{D})^m = \mathbf{X}^m + \sum_{n=1}^{m} \mathbf{X}^{m-n}\mathbf{D}\mathbf{X}^{n-1} = \Big(X^m, \sum_{n=1}^{m} X^{m-n} D X^{n-1}\Big),$$

поскольку $\mathbf{D}\mathbf{X}^n\mathbf{D} = (0, DX^n c^0_{00} D) = 0$ для $d\Lambda_0 d\Lambda_0 = c^0_{00} d\Lambda_0 = 0$.

Автор выражает благодарность профессору Р. Хадсону, профессору Я. Г. Синаю и профессору А. С. Холево за обсуждение статьи и полезные замечания.

ГЛАВА 1

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ БЕЗГРАНИЧНО-ДЕЛИМЫЕ ФУНКЦИИ НА ★-ПОЛУГРУППАХ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Введение

В этой главе изучаются два типа представлений, ассоциированных с положительным безгранично-делимым состоянием на произвольной ★-полугруппе $\mathscr{B}$ [11]. Первый «дифференциальный» тип связан с индефинитным представлением условно-положительных функций $\mathscr{B} \to \mathbb{C}$ в псевдоевклидовом пространстве Минковского, построенном в [12]. Для случая группы $\mathscr{B}$ оно может быть получено простым обобщением [13] конструкции Гельфанда — Наймарка — Сигала (ГНС) с положительно определенных на условно-положительно определенные функции. При этом гильбертово пространство ГНС представления заменяется на псевдогильбертово, разлагающееся в прямую сумму гильбертова и одномерного комплексного пространства в соответствии с единичной коразмерностью $\Sigma \varkappa_b = 0$ условной положительности (1.4). В первом разделе показывается, что такое представление может быть реализовано треугольно-блочными матрицами вида

$$\text{(0.1)}\qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1, & b^-, & \beta \\ 0, & B, & b_+ \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^\flat = \begin{bmatrix} 1, & b_+^*, & \beta^* \\ 0, & B^*, & b^{-*} \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

с псевдоэрмитовым сопряжением $(\mathbf{B}^\flat k \mid k) = (k^* \mid \mathbf{B}k)$ относительно индефинитного скалярного произведения

$$\text{(0.2)}\qquad (k' \mid k) = k_-^* k'_+ + (k_0 \mid k'_0) + k_+^* k'_-,$$

где $k_+ \in \mathbb{C} \ni k_-$, $k_0 \in \mathscr{E}_0$ — вектор гильбертова пространства $\mathscr{K}_0$. При этом алгебра матриц $\mathrm{A} = \mathrm{B} - \mathrm{I}$ реализует таблицу умножения

$$\text{(0.3)}\qquad \begin{pmatrix} \alpha & a^- \\ a_+ & A \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \alpha & a^- \\ a_+ & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+^* a_+ & a_+^* A \\ A^* a_+ & A^* A \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha & a^- \\ a_+ & A \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & a_+^* \\ a^{-*} & A^* \end{pmatrix}$$

в терминах $a^- = b^-$, $a_+ = b_+$, $A = B - I$, $\alpha = \beta$ для стохастических дифференциалов Ито квантового исчисления Хадсона — Партасарати [14, 15] с инволюцией $\mathbf{A}^\flat = \mathbf{B}^\flat - \mathbf{I}$, определяемой в (0.1) эрмитовым сопряжением $A^* = B^* - I$, в $\mathscr{K} = \mathscr{E}_0^*$, где I — единичный оператор в $\mathscr{K}$.

Это наблюдение, положенное в основу новой формулировки [16, 17] квантового стохастического исчисления, позволяет распространить его на произвольные алгебры с безгранично-делимым состоянием φ. Отметим две частные алгебры классических стохастических дифференциалов в случае одномерного $\mathscr{E}_0 = \mathbb{C}$:

1) винеровский случай: $A = 0$, $a^- = a_+^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

2) пуассоновский случай: $A \neq 0$, $a^- = a_+^* = 0 = \alpha$.

Рассматривая A как коэффициент A_0^0 при стандартном пуассоновском дифференциале $dn = d\Lambda_0^0$, $a^- = a_+^*$ как коэффициент $A_0^- = A_+^{0*}$ при винеровском стандартном дифференциале $dw = d\Lambda_-^0 + d\Lambda_0^+$, а α как коэффициент A_+^- при $dt = d\Lambda_-^+$, получим в обоих случаях реализацию классической формулы Ито для стохастического дифференциала $dx = \sum_{\mu, \nu} A_\nu^\mu d\Lambda_\mu^\nu \equiv \equiv \langle \mathbf{A}, d\mathbf{\Lambda} \rangle$ в виде

$$d(x^* x) = x^* dx + dx^* x + dx^* dx = \langle x^* \mathbf{A} + \mathbf{A}^\flat x + \mathbf{A}^\flat \mathbf{A}, d\mathbf{\Lambda} \rangle$$

разностного умножения $\mathbf{Y}^\flat\mathbf{Y} - x^*x\mathbf{I} = x^*\mathbf{A} + \mathbf{A}^\flat x + \mathbf{A}^\flat\mathbf{A}$ треугольных матриц $\mathbf{Y} = x\mathbf{I} + \mathbf{A}$, $\mathbf{Y}^\flat = x^*\mathbf{I} + \mathbf{A}^\flat$, где $\mathbf{I}$ — единичная 3×3 матрица, а $\mathbf{A}^\flat\mathbf{A}$ определяется таблицей умножения (0.3).

Во втором разделе строится второй «интегральной» тип представления безгранично-делимого хаотического состояния на $\mathscr{B}$ с помощью экспоненциального индефинитного ассоциированного представления и устанавливается его связь с исчислением ядер Маассена — Меера [18—20], определяющих хаотические разложения квантовых случайных величин и процессов.

Алгебра этих ядер оказывается изоморфной групповой алгебре экспоненциального представления $\mathscr{B}$ в псевдофоковском пространстве, причем ее фоковская проекция определяет ассоциированное безгранично-делимое представление $\mathscr{B}$, порождающее соответствующее квантовое стохастическое исчисление в подходящей гильбертовой шкале [21]. Отметим, что такой подход естественно приводит к конструкции представления Араки — Вудса [22], ассоциированного с безгранично-делимым состоянием в случае группы $\mathscr{B}$.

Наконец, в третьем разделе изучается структура и рассматриваются примеры псевдопуассоновских хаотических состояний, характеризуемых линейностью условно-положительной функции $l = \ln f$ на $\bigstar$-алгебре $\mathscr{B}$. К такому типу относятся состояния коммутационных соотношений Гейзенберга и квантовые пуассоновские состояния на некоммутативных C^*-алгебрах $\mathscr{B}$, изученные в [29]. Унитарные представления, связанные с безграничной делимостью состояний, а также их приложения в квантовой теории вероятностей исследовались на группах в [23—27] и на биалгебрах в [28].

1.1. Представления условно-положительных функционалов на $\bigstar$-полугруппах

Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — измеримое пространство X с положительной σ-конечной неатомной мерой μ: $\Delta \in \mathscr{A} \mapsto \mu_\Delta$, $\mu_{dx} \equiv dx := d\mu(x)$, $\mathscr{B}$ — полугруппа с инволюцией $b \mapsto b^\bigstar$, $(a\cdot c)^\bigstar = c^\bigstar \cdot a^\bigstar$ и нейтральным элементом $u = u^\bigstar$, $u\cdot b = b = b\cdot u$ для любого $b \in \mathscr{B}$ и $\mathscr{M}$ — множество простых интегрируемых отображений g: $X \to \mathscr{B}$, т. е. $\mathscr{B}$-значных функций $x \mapsto g(x)$ с конечными образами $g(X) = \{g(x) \mid x \in X\} \subseteq \mathscr{B}$ и интегрируемыми элементарными прообразами $\Delta(b) = \{x \in X \mid g(x) = b\} \in \mathscr{A}$, $\mu_{\Delta(b)} < \infty$ для всех $b \in \mathscr{B}$, кроме $b = u$. Определим на $\mathscr{M}$ индуктивную структуру $\bigstar$-полугруппы с единицей $e(x) = u$, $\forall x \in X$ и поточечно-определяемыми операциями $g^\bigstar(x) = g(x)^\bigstar$, $(f\cdot h)(x) = f(x)\cdot h(x)$, рассматривая $\mathscr{M}$ как объединение $\bigcup \mathscr{M}_\Delta$ подполугрупп $\mathscr{M}_\Delta$, $\mu_\Delta < \infty$ простых измеримых функций g: $X \to \mathscr{B}$ с интегрируемыми носителями $\Delta = \operatorname{supp} g = \{x \in X \mid g(x) \neq u\}$.

Удобно описывать $\bigstar$-полугруппу $\mathscr{B}$ с помощью одной эрмитовой операции $a \bigstar c = a^\bigstar \cdot c$, удовлетворяющей соотношениям $u \bigstar b = b$, $(b \bigstar u) \bigstar u = b$, $\forall b \in \mathscr{B}$, $(a \bigstar (b \bigstar c)) \bigstar u = c \bigstar ((b \bigstar u) \bigstar a)$, $\forall a, b, c \in \mathscr{B}$, эквивалентным инволютивности $b^{\bigstar\bigstar} = b$ операции $b^\bigstar$, эрмитовости $(a \bigstar c)^\bigstar = c \bigstar a$ и ассоциативности полугрупповой операции $a\cdot c$, и $u\cdot b = b$. Это дает возможность рассматривать $\mathscr{M}$ как $\bigstar$-моноид с левой единицей $e \in \mathscr{M}$ относительно эрмитовой бинарной операции $f \bigstar h = g$, $g(x) = f(x) \bigstar h(x)$, определяющей инволюцию $g^\bigstar(x)$ и ассоциативную операцию $(f\cdot h)(x)$, $\forall x \in X$ по формулам $g^\bigstar = g \bigstar e$, $f\cdot h = (f \bigstar e) \bigstar h$, $\forall f, h \in \mathscr{M}$.

Следуя [11], назовем производящим функционалом состояния над моноидом $\mathscr{M}$, или просто состоянием, отображение φ: $\mathscr{M} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию $\varphi(e) = 1$ и положительной определенности

$$(1.1) \qquad \sum_{f, h \in \mathcal{M}} \varkappa_f^* \varphi(f \bigstar h) \varkappa_h \geqslant 0, \ \forall \varkappa_g \in \mathbb{C}, \ |\operatorname{supp} \varkappa| < \infty,$$

где $|\cdot|$ означает мощность множества $\operatorname{supp} \varkappa = \{g \in \mathcal{M} \mid \varkappa_g \neq 0\}$.

Введем на $\mathcal{M}$ частичную операцию $f \bigsqcup h = f \cdot h$ для любых функций $f, h \in \mathcal{M}$, имеющих дизъюнктные носители $\operatorname{supp} f \bigcap \operatorname{supp} h = \varnothing$, относительно которой моноид $\mathcal{M}$ превращается в $\bigstar$-полукольцо в смысле [11] с нулем $0 = e$ и $\Sigma g_n = \bigsqcup g_n$ ($\bigsqcup g_n(x) = g_m(x)$, $\forall x \in \operatorname{supp} g_m$, в противном случае $\bigsqcup g_n(x) = u$). Будем называть состояние φ над $\mathcal{M}$ *хаотическим*, если

$$\varphi\Big(\coprod_{n=1}^{\infty} g_n\Big) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi(g_n),$$

где $\prod_{n=1}^{\infty} \varphi(g_n) = \lim_{N \to \infty} \prod_{n=1}^{N} \varphi(g_n)$ для любых функций $g_n \in \mathcal{M}$ с дизъюнктными носителями: $\operatorname{supp} g_n \bigcap \operatorname{supp} g_m = \varnothing$, $\forall n \neq m$.

Это условие выполняется для $\varphi(g) = e^{\langle g \rangle}$ в случае

$$(1.2) \qquad \langle g \rangle = \int l(x, g) dx, \quad l(x, g) = l_x(g(x)),$$

соответствующем абсолютной непрерывности $\forall \Delta \in \mathcal{A}$: $\mu_\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_\Delta(b) = 0$ меры $\lambda_\Delta(b) = \langle b_\Delta \rangle$ для каждого $b \in \mathcal{B}$, где $b_\Delta(x) = b$, $\forall x \in \Delta$, $b_\Delta(x) = u$ при $x \notin \Delta$ есть «элементарная» функция, называемая b-индикатором подмножества $\Delta \subseteq X$ при $b \neq u$. При этом функция φ_Δ: $\mathcal{B} \to \mathbb{C}$, равная

$$(1.3) \qquad \varphi_\Delta(b) = \exp\Big\{\int_\Delta l_x(b)\, dx\Big\} = \varphi(b_\Delta),$$

определяет *безгранично-делимое состояние* над моноидом $\mathcal{B}$ в смысле равенства $\varphi_\Delta(b) = \Pi \varphi_{\Delta_i}(b)$ также и в пределе любого интегрального разбиения $\Delta = \sum \Delta_i$, $\mu_{\Delta_i} \downarrow 0$, при котором $\varphi_{\Delta_i}(b) \to 1$ для любого $b \in \mathcal{B}$ и положительной определенности функций $\varphi_\Delta^t(b) = e^{t\lambda_\Delta(b)}$, образующих непрерывную полугруппу

$$\{\varphi_\Delta^t \mid t \in \mathbb{R}^+\}, \ \varphi_\Delta^0(b) = 1, \ \varphi_\Delta^r(b) \cdot \varphi_\Delta^s(b) = \varphi_\Delta^{r+s}(b).$$

Необходимые и достаточные условия для функционала (1.2), соответствующего безгранично-делимому состоянию (1.3), даются следующей теоремой, в которой предполагается, что X допускает сеть разбиений системы Витали, в которой $\mu_\Delta \downarrow 0$, $x \in \Delta$, при $\Delta \downarrow \{x\}$.

Теорема 1. *В принятых обозначениях следующие условия являются эквивалентными*:

(i) *для любого множества* $\Delta \in \mathcal{A}$ *конечной меры* $\mu_\Delta < \infty$ *функция* φ_Δ: $\mathcal{B} \to \mathbb{C}$ *является производящей для безгранично-делимого состояния над* $\mathcal{B}$, *причем для любого* $b \in \mathcal{B}$ *существует предел* $l_x(b) = \lim_{\Delta \downarrow \{x\}} \frac{1}{\mu_\Delta}(\varphi_\Delta(b) - 1)$ *почти всюду в смысле Лебега — Витали* [30]; *при этом* $\mu_\Delta = 0 \Rightarrow \varphi_\Delta(b) = 1$, $\forall \Delta \in A$, $b \in \mathcal{B}$.

(ii) $\varphi(g) = \exp\{\langle g \rangle\}$, *где* $\langle b_\Delta \rangle = \lambda_\Delta(b)$ *есть абсолютно-непрерывная комплексная мера на* $\mathcal{A}$ *для каждого* $b \in \mathcal{B}$, *определяющего* b-*индикатор* $\Delta \in \mathcal{A}$; *для любого интегрируемого* $\Delta \subseteq X$ *функция* $b \mapsto \lambda_\Delta(b)$ *является* *условно положительно-определенной*

$$(1.4)\qquad \sum_{a,c\in\mathcal{B}} \varkappa_a^*\lambda_\Delta(a \bigstar c)\varkappa_c \geqslant 0,\ \forall\varkappa: |\operatorname{supp}\varkappa| < \infty,\ \sum_{b\in\mathcal{B}} \varkappa_b = 0,$$

причем $\lambda_\Delta(u) = 0$ *и* $\lambda_\Delta(b^\bigstar) = \lambda_\Delta(b)^*$ *для любого* $b \in \mathcal{B}$.

(iii) *существуют*: 1) *интегральный* $\bigstar$*-функционал* $\langle g\rangle = \int l(x, g)dx$ *с комплексной плотностью* l: $\mathcal{M} \to L^1(X)$, $l(g)^* = l(g^\bigstar)$ *со значениями* $l(x, g) = 0$, $\forall g(x) = u$, $l(x, b_\Delta) = l_x(b)$, *не зависящими от* $\Delta \ni x$; 2) *непрерывное отображение* k: $g \mapsto g\rangle \equiv \overset{\oplus}{\int} k(x, g)dx$ *в подпространство* $\mathcal{K} \subseteq \overset{\oplus}{\int} \mathcal{K}_x\, dx$ *квадратично-интегрируемых функций* k: $x \mapsto k(x) \in \mathcal{K}_x$, $k(x, g) = 0$, $\forall x$: $g(x) = u$ *со значениями* $k(x, b_\Delta) = k_x(b)$, $\forall x \in \Delta$ *в предгильбертовых пространствах* $\mathcal{K}_x$; $k_x^* k_x' = (k_x \mid k_x')$, $k^*k = \int \| k(x) \|_x^2 dx < \infty$, $\| k \|_x^2 = k_x^* k_x$, *не зависящими от* Δ *при* $x \in \Delta$, *которое удовлетворяет вместе с сопряженным отображением* k^*: $g \mapsto \langle g \equiv k(g^\bigstar)^*$ *в функционалы* $k^*(g) = \overset{\oplus}{\int} \langle g(x)dx \in \mathcal{K}^*$ *условию*

$$(1.5)\quad k(f)^*k(h) = \langle f \bigstar h\rangle - \langle f^\bigstar\rangle - \langle h\rangle \equiv \langle f^\bigstar h\rangle,\ \forall f, h \in \mathcal{M},$$

3) *невырожденное* $\bigstar$*-представление* j: $g \mapsto G = \overset{\oplus}{\int} j(x, g)dx$, $j(x, f \bigstar h) = j(x, f)^* j(x, h)$, $j(x, g) = I_x$, $\forall x$: $g(x) = u$ $\bigstar$*-полукольца* $\mathcal{M}$ *в* $*$*-алгебре разложимых операторов* G: $k \in \mathcal{K} \mapsto \overset{\oplus}{\int} j(x, g)\, k(x)\, dx$, $j(x, b_\Delta) = j_x(b)$, $\forall x \in \Delta$, *удовлетворяющих условию коциклов*

$$(1.6)\qquad j(g^\bigstar)h\rangle = g \bigstar h\rangle - g^\bigstar\rangle,\ \langle f^\bigstar j(g) = \langle f \bigstar g - \langle g,\ \forall f, g, h \in \mathcal{M}$$

и наделяющих $\mathcal{K}$ *структурой полигильбертова пространства относительно сходимости по всем полунормам*

$$(1.7)\qquad \| k \|^f = \left(\int \| j(x, f)^* k(x)\|_x^2\, dx\right)^{1/2},\ f \in \mathcal{M}.$$

(iv) *Почти для каждого* $x \in X$ *существует псевдоевклидово пространство* $\mathcal{E}(x)$, *невырожденное* $\bigstar$*-представление* $\rho(x, b \bigstar b) = \rho(x, b)^\flat \rho(x, b)$ *в алгебре операторов* $\mathcal{B}(\mathcal{E}) = \{\mathbf{B}: \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid \mathbf{B}^\flat \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}\}$, *где* $\flat$: $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}^\flat$ — *эрмитово сопряжение* $(\mathbf{B}^\flat \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \mathbf{B}\boldsymbol{c})$, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \in \mathcal{E}(x)$ *и вектор* $\boldsymbol{e}(x) \in \mathcal{E}(x)$ *такие, что функция*

$$(1.8)\qquad l_x(b) = (\boldsymbol{e}(x), \rho(x, b)\boldsymbol{e}(x))$$

является интегрируемой для каждого $b \in \mathcal{B}$ *на* $\Delta \subseteq X$: $\mu_\Delta < \infty$ *и* $\int l_x(b)dx = \ln \varphi_\Delta(b)$. *Точнее, каждое* $\mathcal{E}(x)$ *может быть выбрано в виде* $\mathcal{E}_.(x) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{E}_0(x) \oplus \mathbb{C}$ *пространства троек* $\boldsymbol{c} = (c_-, c_0, c_+) \equiv c_.$, $c_\mp \in \mathbb{C}$, $c_0 \in \mathcal{E}_0(x)$ *с псевдоскалярным произведением*

$$(1.9)\qquad (c_.', c_.) = c_-'c_+^* + c_0'c_0^* + c_+'c_-^* \equiv c_\mu' c^\mu,\quad c^\mu = c_{-\mu}^*,$$

определяемым скалярным произведением $c_0'c_0^* = (c_0', c_0)$ *в предгильбертовом* *пространстве* $\mathscr{E}_0(x)$, *представление* $\rho(x)$ — *треугольным*

$$\rho(x,b)=\begin{bmatrix}1 & \rho_0^-(x,b) & \rho_+^-(x,b)\\ 0 & \rho_0^\circ(x,b) & \rho_+^\circ(x,b)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\equiv\rho_\cdot^{\cdot}(x,b),$$

$$\rho(b^\star)=\begin{bmatrix}1 & \rho_+^\circ(b)^* & \rho_+^-(b)^*\\ 0 & \rho_0^\circ(b)^* & \rho_0^-(b)^*\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\equiv\rho_\cdot^{\cdot}(b)^\flat,$$

$$\rho(b)(c_-,c_0,c_+)=(c_-,c_-\rho_0^-(b)+c_0\rho_0^\circ(b),\ c_-\rho_+^-(b)+c_0\rho_+^\circ(b)+c_+)=c_\cdot\rho_\cdot^{\cdot}(b),$$

а вектор $e(x)$ — *в виде* $e_\cdot=(1,e_0,e_+)$, *где* $e_0(x)\in\mathscr{E}_0(x)$, $\|e_0(x)\|_x^2=$ $=2\operatorname{Re}e_+(x)$. *Здесь* $B_{-\nu}^{\flat\,\mu}=B_{-\mu}^{\nu *}$ — *сопряжение* $\mathbf{B}^\star=\mathbf{B}^\flat$ — *относительно индефинитной формы* (1.9) *треугольных операторов* $\mathbf{B}=[B_\nu^\mu]$ *в* $\mathscr{E}_\cdot$, $B_\nu^\mu=0$, $\mu>\nu$, *определяемое инверсией* — $(-,0,+)=(+,0,-)$ *упорядоченного множества* $\{-<0<+\}$ *индексов* $\mu,\nu=-,0,+$.

Доказательство. Сначала установим простые следствия (iv) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), а затем докажем импликацию (i) $\Rightarrow$ (iv), построив аналогично конструкции ГНС конкретное псевдоевклидово представление логарифмической производной производящего функционала φ_Δ безгранично делимого состояния над $\mathscr{B}$ по λ_Δ.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Обозначим $\mathscr{K}_x=\mathscr{E}_0^*(x)$ пополнение предгильбертова пространства «столбцов» $k=k_0^*\in\mathscr{E}_0^*(x)$, определяемых для $k_0\in\mathscr{E}_0(x)$ как функционалы k: $b_0\in\mathscr{E}_0(x)\mapsto b_0k=(b_0,k_0)$, последовательностями Коши $\{k_n^*\}$, $k_n\in\mathscr{E}_0(x)$, относительно полинормы $\|k\|_x^a=\|\rho_0^\circ(x,a)k_0^*\|$, $a\in\mathscr{B}$, $\mathscr{K}\subseteq\int^\oplus\mathscr{K}_x\,dx$ — пространство — пополнение линейной оболочки $\{e^\circ-$ $-\rho_\nu^0(g)e^\nu\mid g\in\mathscr{M}\}$ по всем полунормам $\|k\|^f=(\int\|\rho_0^\circ(x,f(x))k(x)\|_x^2dx)^{1/2}$, $f\in\mathscr{M}$. Для любого $g\in\mathscr{M}$ обозначим $G=\int^\oplus j(x,g)dx$ линейный разложимый оператор в $\mathscr{K}$, определяемый поточечно как $j(x,g)=\rho_0^\circ(x,g(x)^\star)$:

$$(Gk)(x)=\rho_0^\circ(x,g(x^\star))\,k(x)=G(x)k(x),\ k(x)\in\mathscr{E}_0^*(x).$$

Такое определение корректно, поскольку для почти всех $x\in X$ и всех $f,h\in$ $\in\mathscr{M}$ $\rho_0^\circ(f\bigstar h)=\rho_\mu^\circ(h)\rho_0^\mu(f^\star)=\rho_0^\circ(h)\rho_0^\circ(f^\star)$, где $\rho_\nu^\mu(f)(x)=\rho_\nu^\mu(x,f(x))$, и любая фундаментальная относительно всех полунорм $\|\cdot\|^f$ последовательность функций $\{k_n^*\}$, $k_n(x)\in\mathscr{E}_0(x)$ отображается оператором $\rho_0^\circ(g^\star)$ в такую же последовательность $\{k_n^*(g)\}$, $k_n(x,g)=k_n(x)\rho_0^\circ(x,g(x))\in\mathscr{E}_0(x)$:

$$\|k_m^*(g)-k_n^*(g)\|^h=\|\rho_0^\circ(h)\rho_0^\circ(g^\star)(k_m^*-k_n^*)\|=\|k_m^*-k_n^*\|^{g\star h}\to0.$$

Это дает разложимое невырожденное представление $Gk=\int^\oplus G(x)k(x)dx$ $\bigstar$-полукольца $\mathscr{M}$ в полигильбертовом пространстве $\mathscr{K}$:

$$e\mapsto I=\rho_0^\circ(e),\ f\bigstar h\mapsto F^*H,\ F=\rho_0^\circ(f^\star),\ H=\rho_0^\circ(h^\star).$$

Это представление является замкнутым в смысле полноты $\mathscr{K}$ относительно одновременной сходимости по всем полунормам $\|k\|^f=\|F^*k\|$, $f\in\mathscr{M}$, эквивалентной сходимости по гильбертовой норме $\|k\|$ лишь в случае существенной ограниченности операторной функции $G(x) = j(x, g)$ для каждого $g \in \mathcal{M}$. Обозначим $g\rangle$ для $g \in \mathcal{M}$ вектор-функцию $g\rangle = (\mathring{\rho}_0(g^\star) - 1)e^\circ + \mathring{\rho}_+(g^\star)e^+ = -e^\circ + \mathring{\rho}_\mu(g^\star)e^\mu$, $e^\mu = \overset{*}{e}_{-\mu}$ со значениями $k(x, g) \in \mathscr{E}^*(x)$, сопряженными строке $\langle g^\star(x) = e_\mu(x)\rho_0^\mu(x, g(x)) \in \mathscr{E}(x)$. Эта функция является квадратично-интегрируемой, поскольку

$$\langle f^\star h\rangle = \int (e_\mu \rho_0^\mu(f) - e_0)(x)(\rho_\nu^0(h^\star)e^\nu - e^0)(x)\,dx =$$
$$= \int \{\|e^0(x)\|_x^2 + e_\mu(x)(\rho_\lambda^\mu(f)\rho_\nu^\lambda(h^\star) - \rho_-^\mu(f)\rho_\nu^-(h^\star) - \rho_+^\mu(f)\rho_\nu^+(h^\star))(x)e^\nu(x) -$$
$$- e_\mu(x)(\rho_\nu^\mu(f)e^\nu - \rho_-^\mu(f)e^- - \rho_+^\mu(f)e^+)(x) - (e_\mu\rho_\nu^\mu(h^\star) - e_-\rho_\nu^-(h^\star) -$$
$$- e_+\rho_\nu^+(h^\star))(x)e^\nu(x)\}\,dx = \int [e_\mu(x)\rho_\nu^\mu(x, h \star f)e^\nu(x) - e_\mu(x)\rho_\nu^\mu(x, h^\star)e^\nu(x) -$$
$$- e_\mu(x)\rho_\nu^\mu(x, f)e^\nu(x)]\,dx$$

для любых $f, h \in \mathcal{M}$, где $e_\mu(x)\rho_\nu^\mu(x, g)e^\nu(x) = l(x, g^\star)$, $\int l(x, g^\star)\,dx < \infty$, и использовано условие $e_\mu(x)e^\mu(x) = 0$. Построенное отображение $g \in M \mapsto g\rangle$ обладает свойством дифференцирования $g \cdot h\rangle = j(g)h\rangle + g\rangle 1(g)$:

$$g \cdot h\rangle = \mathring{\rho}_\mu(g \cdot h)^* e^\mu - e^\circ = \mathring{\rho}_\mu(g^\star)\rho_\nu^\mu(h^\star)e^\nu - e^\circ =$$
$$= \mathring{\rho}_0(g^\star)\mathring{\rho}_\nu(h^\star)e^\nu + \mathring{\rho}_+(g^\star)e^+ - e^\circ = j(g)h\rangle + g\rangle$$

относительно представления $j(g)h\rangle = \mathring{\rho}_0(g^\star)h\rangle$ моноида в $\mathcal{K}$ и тривиального представления $1(g) = 1\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): очевидно, что абсолютно непрерывная мера $\lambda_\Delta(b) = \int_\Delta l(x, b)dx$, определяемая функционалом $\langle g\rangle = \int (e_\cdot, \boldsymbol{\rho}(g^\star)e_\cdot)\,dx$, удовлетворяет условиям $\lambda_\Delta(b^\star) = \lambda_\Delta(b)^*$ и $\lambda_\Delta(u) = 0$, поскольку этим же условиям удовлетворяет функционал $l(x, b)$ почти всюду на X. Условная положительность (1.4) вытекает из положительной определенности $[\langle g_i^\star g_k\rangle] \geqslant 0$, обеспечивающей условную положительность формы $\langle g\rangle$:

$$\sum_{f, h \in \mathcal{M}} \varkappa_f^* \langle f \star h\rangle \varkappa_h = \sum_{f, h \in \mathcal{M}} \varkappa_f^* (\langle f^\star h\rangle + \langle f^\star\rangle + \langle h\rangle)\varkappa_h =$$
$$= \sum_{f, h} \varkappa_f^* \langle f^\star h\rangle \varkappa_h + \sum_f \varkappa_f^* \sum_h \varkappa_h \langle h\rangle + \sum_f \varkappa_f^* \langle f^\star\rangle \sum_h \varkappa_h = \sum_{f, h} \varkappa_f^* \langle f^\star h\rangle \varkappa_h \geqslant 0$$

для любой функции $\varkappa = \{\varkappa_g\}$ с конечным носителем, удовлетворяющей условию $\sum_{g \in \mathcal{M}} \varkappa_g = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): если функция $\lambda_\Delta(b)$ является (комплексной) абсолютно непрерывной мерой, то $\varphi_\Delta(b) = \exp\{\lambda_\Delta(b)\}$ обладает свойством $\varphi_{\sqcup\Delta_i}(b) = \prod \varphi_{\Delta_i}(b)$ безграничной делимости, причем существует предел (1.5), совпадающий в силу $\varphi_\Delta(b) \to 1$ при $\Delta \downarrow \{x\}$ с производной Радона — Никодима $l_x(b) = d\ln\varphi(b)/dx$ как предела отношения $\lambda_\Delta(b)/\mu_\Delta$ по сети подмножеств $\Delta \ni x$ системы разбиений Витали измеримого пространства X. Функция $b \mapsto \varphi_\Delta(b)$ для любого интегрируемого Δ является положительной в смысле (1.1). В самом деле, для любой комплексной функции $b \mapsto \varkappa_b$ с конечным носителем

$$\sum_{a, c \in \mathscr{B}} \varkappa_a^* (\lambda_\Delta(a \star c) - \lambda_\Delta(a^\star) - \lambda_\Delta(c))\varkappa_c = \sum_{a, c \in \mathscr{B}} \mathring{\varkappa}_a^* \lambda_\Delta(a \star c)\mathring{\varkappa}_c \geqslant 0,$$

где $\mathring{\varkappa}_b = \varkappa_b$, $b \neq u$ и $\mathring{\varkappa}_u = \varkappa_u - \sum_{b \in \mathscr{B}} \varkappa_b$, так что $\sum_{b \in \mathscr{B}} \mathring{\varkappa}_b = 0$, и учтено $\lambda_\Delta(u) = 0$.

Благодаря этому

$$\sum_{a,\,c\in\mathscr{B}} \varkappa_a^* \exp\{\lambda_\Delta(a\bigstar c)\}\,\varkappa_c = \sum_{a,\,c\in\mathscr{B}} \varkappa_\Delta^{c*} \exp\{\langle a^\bigstar c\rangle\}\,\varkappa_\Delta^c \geqslant 0,$$

где $\varkappa_\Delta^b = \varkappa_b \exp\{\lambda_\Delta(b)\}$, и учтено (1.5) и $\lambda_\Delta(b^\bigstar) = \lambda_\Delta(b)^*$.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Поскольку φ_Δ — безгранично-делимое состояние на $\mathscr{B}$ и $\varphi_\Delta(b) \to 1$, $\forall b$ при $\mu_\Delta \to 0$, предел $l_x(b)$ определяется как логарифмическая производная $\mu_{dx}^{-1} \ln \varphi_{dx}(b)$ в смысле Радона — Никодима от меры $\lambda_\Delta(b) = \ln \varphi_\Delta(b)$. Следовательно, функция $x \mapsto l_x(b)$ является интегрируемой и почти всюду удовлетворяет условиям $l_x(a\bigstar c)^* = l_x(c\bigstar a)$, $l_x(u) = 0$, $\sum_{a,\,c\in\mathscr{B}} \varkappa_a^* l_x(a\bigstar c)\varkappa_c \geqslant 0$, $\forall\varkappa$: $|\operatorname{supp}\varkappa| < \infty$, $\sum_{l\in\mathscr{B}} \varkappa_b = 0$, в чем нетрудно убедиться непосредственно для разностной производной $l_\Delta(b) = (\varphi_\Delta(b) - 1)/\mu_\Delta$ и затем перейти к пределу $\Delta \downarrow \{x\}$. При этом $\int_\Delta l_x(b)dx = \ln\varphi_\Delta(b)$ в силу абсолютной непрерывности.

Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ комплексных функций $\alpha = \{\alpha_b\}$ на $\mathscr{B}$ с конечными носителями $\{b \in \mathscr{B} \mid \alpha_b \neq 0\}$ как $\bigstar$-алгебру распределений относительно эрмитовой свертки

$$(\alpha\bigstar\varkappa)_b = \sum_{a\bigstar c=b} \alpha_a^*\varkappa_c,\ \delta_u\bigstar\alpha = \alpha,\ \alpha\bigstar\delta_u = \alpha^\bigstar.$$

Здесь $\delta_a = \{\delta_{a,b}\}$ — символ Кронекера, определяющий $\bigstar$-представление $a \mapsto \delta_a$ моноида $\mathscr{B}$ в $\mathfrak{A}$:

$$\delta_a\bigstar\delta_c = \delta_{a\bigstar c},\quad \delta_u\bigstar\delta_b = \delta_b,\quad \delta_b\bigstar\delta_u = \delta_{b\bigstar},$$

относительно инволюции $\alpha^\bigstar = \{\alpha_{b\bigstar}^* \mid b \in \mathscr{B}\}$ и единицы δ_e. Подпространство $\mathfrak{A}^0$ распределений α, у которых сумма $\alpha^+ = \sum_{b\in\mathscr{B}} \alpha_b = \alpha_-^*$ равна нулю, является $\bigstar$-идеалом:

$$\sum_{b\in\mathscr{B}} (\alpha\bigstar\varkappa)_b = \sum_{b\in\mathscr{B}}\sum_{a\bigstar c=b} \alpha_a^*\varkappa_c = \sum_{a\in\mathscr{B}} \alpha_a^* \sum_{c\in\mathscr{B}} \varkappa_c = 0,$$

ели $\alpha_- = 0$ или $\varkappa^+ = 0$. Снабдим алгебру $\mathfrak{A}$ эрмитовой формой $(\alpha \mid \varkappa)(x) = \sum_{b\in\mathscr{B}} l(x, b)(\alpha\bigstar\varkappa)_b$, имеющей для каждого $x \in X$ вид

$$(\alpha|\varkappa) = \sum_{a,\,c\in\mathscr{B}} \alpha_a^* l(a\bigstar c)\varkappa_c = \sum_{a,\,c\in\mathscr{B}} \alpha_a^* \langle a^\bigstar c\rangle \varkappa_c + \alpha_-\varkappa_+^* + \alpha_+\varkappa_-^*,$$

где $\langle a^\bigstar c\rangle(x) = l_x(a\bigstar c) - l_x(a^\bigstar) - l_x(c)$, $\alpha_+^*(x) = \sum_{b\in\mathscr{B}} l_x(b)\alpha_b = \alpha^-(x)$, являющейся неотрицательной $(\alpha \mid \alpha) \geqslant 0$ на $\alpha \in \mathfrak{A}^0$. Факторизуем $\mathfrak{A}$ по подпространству

$$\mathfrak{A}^\perp(x) = \{\alpha \in \mathfrak{A} \mid (\alpha \mid \varkappa)(x) = 0,\ \forall\varkappa \in \mathfrak{A}\},$$

полагая $\alpha \approx 0$, если $\alpha \in \mathfrak{A}^\perp(x)$. Условие $\alpha \approx 0$ означает, в частности, $\alpha_+(x) = (\alpha \mid \delta_u) = 0$ и

$$(\alpha|\alpha)(x) = \sum_{a,\,c\in\mathscr{B}} \alpha_a^* \langle a^\bigstar c\rangle \alpha_c = (\alpha^\circ|\alpha^\circ) = 0,$$

где $\overset{\circ}{\alpha}_b = \alpha_b$, $b \neq u$, $\overset{\circ}{\alpha}_u = \alpha_u - \sum_{b\in\mathscr{B}} \alpha_b$. Отсюда следует $(\alpha \mid \varkappa) = \alpha_- = 0$ для любого $\varkappa$, удовлетворяющего условию $\varkappa_+(x) = 1$, поскольку при этом $(\alpha \mid \varkappa) = (\alpha^\circ \mid \varkappa^\circ) + \alpha_-\varkappa_+^* + \alpha_+\varkappa_-^*$ равно α_- в силу $\alpha_+ = 0$ и $(\alpha^\circ \mid \varkappa^\circ) = 0$

из-за неравенства Шварца $|(\alpha^\circ \mid \varkappa^\circ)|^2 \leqslant (\alpha^\circ \mid \alpha^\circ)(\varkappa^\circ \mid \varkappa^\circ)$. Это позволяет представить факторизованное пространство $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^\perp(x)$ классов эквивалентности $\langle\varkappa \mid (x) = \{\alpha^* \in \mathfrak{A} \mid \alpha - \varkappa \in \mathfrak{A}^\perp(x)\}$ в псевдоевклидовом пространстве $\mathscr{E}(x)$ троек $c = (c_-, c_0, c_+)$, $c_\pm \in \mathbb{C}$, $c_0 \in \mathscr{E}_0(x) = \mathfrak{A}^\circ/\mathfrak{A}^\perp(x)$ с индефинитным произведением (1.8) с помощью псевдоизометрии $\langle\varkappa \mid (x) \mapsto c(x)$,

$$c(x) = (\varkappa_-, \langle\varkappa^\circ \mid (x), \varkappa_+(x)), \quad \varkappa_- = \sum_{b\in\mathscr{B}} \varkappa_b^*, \varkappa_+ = \sum_{b\in\mathscr{B}} l(b^\star)\varkappa_b^*,$$

$$(\langle\alpha \mid, \langle\varkappa \mid)(x) = \alpha_-\varkappa_+^*(x) + (\alpha^\circ \mid \varkappa^\circ)(x) + \alpha_+(x)\varkappa_-^* = (\alpha \mid \varkappa)(x).$$

Заметив, что представление $\delta_\cdot: b \in \mathscr{B} \mapsto \delta_b$ является эрмитовым:

$$(\delta_b \bigstar \alpha \mid \varkappa) = \sum_{b\in\mathscr{B}} l(b)(\alpha \bigstar \delta_b \cdot \varkappa)_b = (\alpha \mid \delta_b \circ \varkappa),$$

где $\alpha\cdot\varkappa = (\alpha \bigstar \delta_u) \bigstar \varkappa$, получим, что $\delta_b \cdot \alpha \approx 0$, если $\alpha \approx 0$:

$$(\alpha \mid \varkappa) = 0, \ \forall\varkappa \in \mathfrak{A} \Rightarrow (\delta_b\cdot\alpha \mid \varkappa) = (\alpha \mid \delta_b \bigstar \varkappa) = 0, \ \forall\varkappa \in \mathfrak{A}.$$

Это позволяет определить для каждого $b \in \mathscr{B}$ оператор $\rho(b)\langle\varkappa \mid = \langle\delta_b\cdot\varkappa \mid$ и $\rho(b^\star) = \rho(b)^\star$ с покомпонентным действием

$$(\delta_b \bigstar \varkappa)_- = \varkappa_-, (\delta_b \bigstar \varkappa)^\circ = \delta_b \bigstar \varkappa^\circ + \varkappa_-^*(\delta_b - \delta_u)^\star,$$
$$(\delta_b \bigstar \varkappa)_+ = \varkappa_- l(b) + (\varkappa^\circ \mid \delta_b - \delta_u) + \varkappa_+,$$

задаваемым умножением $\rho(b^\star)c = c\mathbf{B}$, $\rho(b)c = c\mathbf{B}^\flat$ треугольной блок-матрицы

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_0^-(b^\star) & \rho_+^-(b^\star) \\ 0 & \rho_0^\circ(b^\star) & \rho_+^\circ(b^\star) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^\flat \begin{bmatrix} c^- \\ c^\circ \\ c^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^- + \rho_0^-(b)c^\circ + \rho_+^-(b)c^+ \\ 0 + \rho_0^\circ(b)c^\circ + \rho_+^\circ(b)c^+ \\ 0 + \quad 0 \quad c^+ + \end{bmatrix}$$

на строку $c = (c_-, c_0, c_+)$. Здесь $\rho_+^-(x, b^\star) = l_x(b)$, $\langle\varkappa^\circ \mid (x)\rho_0^\circ(x, b^\star) = \langle\delta_b \bigstar \varkappa^\circ \mid (x)$, $\rho_+^\circ(x, b^\star) = |\delta_b - \delta_u\rangle(x) = \rho_0^-(x, b)^*$, $\flat: c \mapsto c^\cdot = c^\flat$, $c_\mu^\flat = c_{-\mu}^* = c^\mu$, $B_{-\nu}^{\flat\mu} = B_{-\mu}^{\nu *}$ есть псевдоевклидово сопряжение строки $c = c^{\flat\flat}$ и треугольной матрицы $\mathbf{B} = [B_\nu^\mu]$ псевдометрическим тензором $g^{\mu\nu} = \delta_{-\nu}^\mu = g_{\mu\nu}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_-^- & b_0^- & b_+^- \\ 0 & b_0^\circ & b_+^\circ \\ 0 & 0 & b_+^+ \end{bmatrix}^\dagger \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_+^{+*} & b_+^{\circ *} & b_+^{-*} \\ 0 & b_0^{\circ *} & b_0^{-*} \\ 0 & 0 & b_0^{-*} \end{bmatrix}.$$

Обозначая $j(b) = \rho_0^\circ(b^\star)$, $k(b) = \rho_+^\circ(b^\star)$, $k^*(b) = \rho_0^-(b^\star)$, $l(b) = \rho_+^-(b^\star)$, получим таблицу умножения

$$\begin{bmatrix} 1 & k^*(a) & l(a) \\ 0 & j(a) & k(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\flat \begin{bmatrix} 1 & k^*(c) & l(c) \\ 0 & j(c) & k(c) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & k^*(c) + k(a)^* j(c), & l(c) + k(a)^* k(c) + l(a^\star) \\ 0 & j(a)^* j(c), & j(a)^* k(c) + k(a^\star) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

определяющую матричное $\flat$-представление $\rho(b) = [\rho_\nu^\mu(b)]$ моноида $\mathscr{B}$ в псевдоевклидовом пространстве $\mathscr{E}(x)$. Это реализует условно-положительную функцию $l(b)$ как значение векторной формы (1.10) на строке $e = (1, 0, 0) =$

$= e$ нулевой псевдонормы $(e, e_.) = e_\mu e^\mu = 0$ для каждого x: $(e, \rho(b)\, e) = e_\mu \rho^\mu_\nu (b^\bigstar)\, e^\nu = \rho^-_+ (b^\bigstar) = l(b)$. Доказательство закончено.

Замечание 1. Всякое представление $l(b) = e_\mu \rho^\mu_\nu (b^\bigstar)\, e^\nu$ относительно индефинитного произведения (1.9) и вектора $e = (1, e_0, e_+)$ приводится к виду $l(b) = \rho^-_+ (b^\bigstar)$, соответствующему вектору $e = (1, 0, 0)$, треугольным псевдоунитарным оператором

$$(1.10)\quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1, & e_0 U, & e^*_+ \\ 0, & -U, & e^*_0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^\flat, \quad \mathbf{S}^\flat = \begin{bmatrix} 1, & e_0 & e_+ \\ 0, & -U^*, & U^* e^*_0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

реобразующим матрицы $\rho^{\cdot}_{.}(b)$ и столбец $e^{\cdot} = e^\flat_.$ к каноническому виду

$$\boldsymbol{\rho}(b) = \begin{bmatrix} 1 & k(b)^* & l(b)^* \\ 0 & j(b^\bigstar) & k(b^\bigstar) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^\flat \rho^{\cdot}_{.}(b)\, \mathbf{S}, \quad e^\flat = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^\flat e^{\cdot},$$

где $U^* = U^{-1}$ — произвольный унитарный оператор $\mathscr{E}_0 \to \mathscr{E}_0$, $e^\mu = e^\flat_\mu = e^*_{-\mu}$. В частности, если представление $(\mathscr{E}_., \rho^{\cdot}_{.}, e_.)$ минимально в смысле цикличности $\mathscr{E}_0(x) = \bigvee_{l \in \mathscr{B}} e_. \dot\rho_0 (x, b)$ вектора $e_.$ относительно действия линейной оболочки операторов $\dot\rho_0 (x, \mathscr{B})$, оно эквивалентно минимальному каноническому представлению $(\mathscr{E}, \boldsymbol{\rho}, e)$.

В самом деле, $e_. \mathbf{S} = S^-_. + e_0 S^\circ_. + e_+ S^+_.$, где $S^-_. = (1, e_0 U, e^*_+)$, $S^0_. = (0, -U, e^*_0)$, $S^+_. = (0, 0, 1)$ равно $(1, 0, 0)$, поскольку $e_0 e^*_0 \equiv (e_0 \mid e_0) = e_+ + e^*_+$ в соответствии с условием $(e_., e_.) = 0$, вытекающим из $l(u) = 0$. Если пространство $\mathscr{E}_0$ минимальное, содержащее $\{e_. \dot\rho_0 (b) \mid b \in \mathscr{B}\}$ (или минимальное замкнутое относительно полунорм $\| k_0 \| (b) = \| k_0 \mathring{\rho}_0 (b) \|$, $b \in \mathscr{B}$), то, определив оператор U изометрическим условием

$$e_. \rho^{\cdot}_{.}(b)\, \dot S_0 = (e_0 - e_. \dot\rho_0 (b))\, U = k(b)^*,$$

$$(e_0 - e_. \dot\rho_0 (a),\ e_0 - e_. \dot\rho_0 (c)) = k(a)^* k(c),$$

получим псевдоунитарную эквивалентность (замкнутого) представления $(\mathscr{E}_., \rho^{\cdot}_{.}, e_.)$ и (замкнутого) канонического представления $(\mathscr{E}, \boldsymbol{\rho}, e)$, построенного в доказательстве (i) $\Rightarrow$ (iv) теоремы 1.

1.2. Псевдофоковское представление безгранично-делимых состояний

Теперь мы опишем экспоненциальное индефинитное представление $\bigstar$-моноида $\mathscr{M}$, ассоциированное с условно положительно-определенным функционалом $\langle g \rangle = \int l_x (g(x))\, dx$, и его связь с обобщенной конструкцией Араки — Вудса [22], соответствующей хаотическому безгранично-делимому состоянию $\varphi(g) = e^{\langle g \rangle}$. В отличие от фоковского представления конструкции Араки — Вудса, экспоненциальное представление в псевдофоковском пространстве обладает свойством разложимости по конечным тензорным представлениям, что может быть использовано [21] для построения явных решений квантовых стохастических уравнений даже в случае неадаптивных локально-интегрируемых генераторов.

Напомним, что фоковское пространство $\mathscr{F}$ над предгильбертовым пространством $\mathscr{K} = \int^\oplus \mathscr{K}_x dx$ — это пополнение линейной оболочки $\Gamma(\mathscr{K}) = \{h =$

$= \sum \lambda_i k_i^{\otimes} \mid \lambda_i \in \mathbb{C},\ k_i \in \mathcal{K}\}$ *экспоненциальных* векторов $k^{\otimes} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} k^{\otimes n}$ — прямых сумм конечных тензорных степеней $k^{\otimes 0} = 1$, $k^{\otimes 1} = k, \ldots, k^{\otimes(n+1)} = k \otimes k^{\otimes n}$ вектор-функций $k \in \mathcal{K}$ со скалярным произведением $(h \mid h') = \sum \lambda_{i'}^{*} (k_{i'}^{\otimes} \mid k_i^{\otimes}) \lambda_i'$, продолжающим положительно-определенную экспоненциальную эрмитову форму $(k^{\otimes} \mid k^{\otimes}) = \exp\{(k \mid k)\}$, $(k \mid k) = \int \| k(x) \|_x^2 dx$. Благодаря безатомности меры dx векторы $h \in \Gamma(\mathcal{K})$ можно отождествлять с тензорными функциями h: $\omega \in \Omega \mapsto h(\omega) \in \bigotimes_{x \in \omega} \mathcal{K}_x$, полагая $k^{\otimes}(\omega) = \bigotimes_{x \in \omega} k(x)$ на пространстве Ω всех конечных подмножеств $\omega \subset X$ с мерой $d\omega = \prod_{x \in \omega} dx$, определяемой изометрией $\int \| h(\omega) \|^2 d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int \| h(x_1, \ldots, x_n) \|^2 dx_1 \ldots dx_n = (h \mid h)$, где $\| k^{\otimes}(\omega) \|^2 = \prod_{x \in \omega} \| k(x) \|_x^2$. Определим разложимые операторы $j(g)^{\otimes} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} j(g)^{\otimes n}$ на $\Gamma(\mathcal{K})$ по $*$-представлению j: $\mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ на $\mathcal{K}$, ассоциированному с формой $\langle g \rangle$ путем линейного продолжения $j(g)^{\otimes} h = \sum \lambda_i j(g)^{\otimes} k_i^{\otimes}$ операторов $j(g)^{\otimes} k^{\otimes} = (j(g) k)^{\otimes}$. Соответствие j: $\mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$, получаемое продолжением по непрерывности операторов $j^{\otimes}(\omega, g) = \bigotimes_{x \in \omega} j(x, g)$ на пополнение $\mathcal{G}$ предгильбертова пространства $\Gamma(\mathcal{K})$ фундаментальными последовательностями, сходящимися относительно всех полунорм

$$\| h \|^f = \left(\int \| j^{\otimes}(\omega, f)^* h(\omega) \|^2 d\omega\right)^{1/2}, \qquad f \in \mathcal{M},$$

обладает, как и j, свойствами $\bigstar$-представления

$$j^{\otimes}(g) = I^{\otimes},\ j^{\otimes}(f \bigstar h) = j^{\otimes}(f)^* j^{\otimes}(h),\ \forall f, h \in \mathcal{M}.$$

К сожалению, это представление может быть связанным с безгранично-делимым состоянием φ в смысле существования $h \in \mathcal{G}$ такого, что $\varphi(g) = (h \mid j^{\otimes}(g) h)$ для всех $g \in \mathcal{M}$ лишь при специальном «векторном» выборе $\langle g \rangle = (k \mid (j(g) - I) k)$ логарифмической формы $\langle g \rangle = \ln \varphi(g)$. Если существует такой вектор $k \in \mathcal{K}$, то, очевидно,

$$(h \mid j^{\otimes}(g) h) = \exp\{-(k \mid k)\} (k^{\otimes} \mid j^{\otimes}(g) k^{\otimes}) = \exp\{(k \mid (j(g) - I) k)\}.$$

Эксплуатируя аналогичную конструкцию в псевдоевклидовом расширении $\boldsymbol{\mathcal{K}} \supset \mathcal{K}$ комплексного евклидова пространства $\mathcal{K}$, мы сейчас получим соответствующее фоковское представление и для общего вида условно-положительной формы $\langle g \rangle$.

В самом деле, рассмотрим функциональное пространство $\boldsymbol{\mathcal{K}} = L^1(X) \oplus \mathcal{K} \oplus L^{\infty}(X)$ троек $\boldsymbol{k} = k^- \oplus k^0 \oplus k^+$, где $k^- \in L^1(X)$ — интегрируемые комплексные функции $\| k^- \|_1 = \int | k^-(x) | dx < \infty$, $k^0 \in \mathcal{K}$ — квадратично-интегрируемые вектор-функции $k^0(x) \in \mathcal{K}_x$ из полигильбертова пространства $\mathcal{K} = \{\| k^0 \|^f < \infty \mid f \in \mathcal{M}\}$, $k^+ \in L^{\infty}(X)$ — существенно ограниченные комплексные функции $\| k^+ \|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup} | k^+(x) | < \infty$. Снабдим это комплексное полибанахово пространство псевдоевклидовым скалярным произведением

$$(2.1) \qquad (\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{k}) = (k^- \mid k^+) + (k^{\circ} \mid k^{\circ}) + (k^+ \mid k^-) \equiv k_{\mu} k^{\mu},$$

где $k^*_{-\mu}(x) = k^\mu(x)$, $k'_\mu k^\mu = \int k'_\mu(x) k^\mu(x)\,dx = (k'_., k_.)$ — прямой интеграл индефинитных произведений (1.9) для строк $k_.(x) = [c_-, c_0, c_+]$, $c^*_- = k^+(x)$, $c^*_0 = k^\circ(x)$, $c^*_+ = k^-(x)$, сопряженных относительно (2.1) к столбцам $k^\cdot(x) = k(x)$: $k^\cdot = k_.^\flat$.

Определим в $\mathcal{K}$ замкнутое разложимое $\flat$-представление $(\mathbf{j}(g)\boldsymbol{k})(x) = \mathbf{j}(x, g)\boldsymbol{k}(x)$ $\mathcal{B}$-значных функций $g(x)$ треугольно-операторными функциями $\mathbf{j}(x, g) = [\rho^\mu_\nu(x, g(x)^\star)]$ канонического вида

$$\mathbf{j}(x, g^\star) = \begin{bmatrix} 1 & k(x, g)^*, & l(x, g)^* \\ 0, & j(x, h^\star), & k(x, g^\star) \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{j}(x, g)^\flat, \tag{2.2}$$

где функции $l(g) \in L^1(X)$, $k(g) \in \mathcal{K}$, $j(g)$: $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ описаны в теореме 1.

Операторы $\mathbf{j}(g)$, определенные как непрерывные на всем $\mathcal{K}$ вместе со своими сопряженными $\mathbf{j}(g)^\flat$ относительно эрмитовой формы (2.1) в силу неравенств

$$\|(\mathbf{j}(g)\boldsymbol{k})^-\|_1 \leqslant \|k^-\|_1 + \|k(g)\|\cdot\|k^\circ\| + \|l(g)\|_1\|k^+\|_\infty < \infty,$$
$$\|(\mathbf{j}(g)\boldsymbol{k}^\circ\|^h \leqslant \|k^\circ\|^{g\star h} + \|k(g)\|^h\cdot\|k^+\|_\infty,\ \|(\mathbf{j}(g)\boldsymbol{k})^+\|_\infty = \|k^+\|_\infty,$$

удовлетворяют условиям (1.5), (1.6) в виде

$$\mathbf{j}(f \bigstar h) = \mathbf{j}(f)^\flat \mathbf{j}(h),\ \mathbf{j}(e) = \mathbf{I},\ \forall f, g \in \mathcal{M},$$

где $\mathbf{I} = [\delta^\mu_\nu]$ — единичный оператор в $\mathcal{K}$.

Рассмотрим пространство $\Gamma(\mathcal{K})$, порождаемое «экспоненциальными» $\boldsymbol{k}^\otimes = \bigoplus_{n=0}^\infty \boldsymbol{k}^{\otimes n}$ с невырожденным псевдоевклидовым скалярным произведением, продолжающим на $\Gamma(\mathcal{K})$ эрмитову форму

$$(\boldsymbol{h}' \mid \boldsymbol{h}) = \exp\left\{\int k'_\mu(x) k^\mu(x)\,dx\right\} = \exp\{(\boldsymbol{k}' \mid \boldsymbol{k})\} \tag{2.3}$$

для $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{k}^\otimes$. Благодаря алгебраическому соответствию

$$\Gamma(L^1(X) \oplus \mathcal{K} \oplus L^\infty(X)) = \Gamma(L^1(X)) \otimes \Gamma(\mathcal{K}) \otimes \Gamma(L^\infty(X))$$

и псевдоизометрии $\boldsymbol{h} \mapsto h^*_.(\omega^-, \omega^\circ, \omega^+)$, $\omega^\mu \in \Omega$,

$$\iiint h'_.(\omega^+, \omega^\circ, \omega^-)\, h^*_.(\omega^-, \omega^\circ, \omega^+)\, d\omega^- d\omega^\circ d\omega^+ = (h' \mid h),$$

продолжающей экспоненциальное соответствие $\boldsymbol{k}^\otimes \mapsto k^\otimes_.(\omega^-, \omega^\circ, \omega^+)^*$,

$$k_.^\otimes(\omega_+, \omega_0, \omega_+) = k_-^\otimes(\omega_-)\, k_0^\otimes(\omega_0)\, k_+^\otimes(\omega_+),\ k^\otimes(\omega) = \bigotimes_{x\in\omega} k(x),$$

где $k_\mp(\omega) = \prod_{x\in\omega} k_\mp(x)$, можно отождествлять векторы $\boldsymbol{h} \in \Gamma(\mathcal{K})$ с тензор-функциями h: $\omega^\cdot \in \Omega^3 \mapsto h(\omega^\cdot) \in \bigotimes_{x\in\omega^\circ} \mathcal{K}_x$ от тройки $\omega^\cdot = (\omega^-, \omega^\circ, \omega^+)$ конечных подмножеств $\omega^\mu \subset X$, полагая $h(\omega^\cdot) = h^*_.(\omega^-, \omega^\circ, \omega^+)$. Банахово пространство $\mathcal{F}$ таких функций относительно нормы

$$\|h(\omega^\cdot)\| = \int d\omega^- \left(\int d\omega^\circ \operatorname*{ess\,sup}_{\omega^+} \|h(\omega^-, \omega^\circ, \omega^+)\|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

снабженное индефинитным произведением (2.3), будем называть псевдофоковским пространством. Нетрудно проверить, что это пространство содержит «экспоненту» $h = e^{\otimes}$ от канонического вектора $e(x) = [\delta^{\mu}_{+}]$, $\delta^{\mu}_{+} = 0$, $\mu = -, 0$; $\delta^{+}_{+} = 1$, ассоциированную с безгранично-делимым состоянием $\varphi(g)$ в смысле

$$\varphi(g) = (e^{\otimes} \mid \mathbf{j}^{\otimes}(g) e^{\otimes}) = \exp\{(e \mid \mathbf{j}(g) e) = e^{\langle g \rangle}.$$

При этом экспоненциальные операторы $\mathbf{j}^{\otimes}(g)$: $k^{\otimes} \mapsto (\mathbf{j}(g) k)^{\otimes}$ определяют $\flat$-представление в $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ полукольца $\mathcal{M}$ на инвариантном подпространстве, порождаемом действием $\mathbf{j}^{\otimes}(g) e^{\otimes} = j_{+}(g)^{\otimes}$ на $e^{\otimes}$, поскольку $\bar{j}_{+}(g) = l(g) \in L^1(X)$, $\mathring{j}_{+}(g) = k(g) \in \mathcal{K}$, $\overset{+}{j}_{+}(g) = 1 \in L^{\infty}(X)$. Более того, как показывает следующая теорема, представление $\mathbf{j}^{\otimes}$, спроектированное на фоковское подпространство $\mathcal{F} \subset \boldsymbol{\mathcal{F}}$ с помощью псевдоусловного ожидания

$$\varepsilon[\mathbf{j}^{\otimes}(g)] = E\, \mathbf{j}^{\otimes}(g) E^{\flat} = \pi(g),$$

остается $*$-представлением, ассоциированным относительно вакуум-состояния $h(\omega) = 1_{\varnothing}(\omega)$ с $\varphi(g) = \exp\langle g \rangle$. Здесь $1_{\varnothing}(\omega) = 1$ при $\omega = \varnothing$, $1_{\varnothing}(\omega) = 0$ при $\omega \neq \varnothing$,

$$(2.4) \qquad (E^{\flat} h)(\omega^-, \omega^{\circ}, \omega^+) = 1_{\varnothing}(\omega^-)\, h(\omega^{\circ}), \ h \in \mathcal{F}.$$

— псевдоизометрия $\mathcal{F} \to \boldsymbol{\mathcal{F}}$: $(Eh \mid Eh) = (h \mid h)$, $\forall h \in \mathcal{F}$. Для того чтобы получить этот результат, заметим, что любой разложимый оператор $\mathbf{K} = 1 \oplus \mathbf{G} \oplus \mathbf{G}^{\otimes 2} \oplus \ldots$ в $\Gamma(\mathcal{K})$, полученный экспонированием $\mathbf{G}^{\otimes}$ треугольного оператора $\mathbf{G} = \mathbf{j}(g)$, может быть представлен в виде

$$(2.5) \quad [Kh](\omega^-, \omega^{\circ}, \omega^+) = \sum_{\substack{\coprod\limits_{\nu \geq \mu} \omega^{\mu}_{\nu} = \omega^{\mu}}}^{\mu = -,0,+} K(\boldsymbol{\omega})\, h(\omega^-_-, \omega^-_0 \sqcup \mathring{\omega}_0, \omega^-_+ \sqcup \mathring{\omega}_+ \sqcup \overset{+}{\omega}_+),$$

где $\omega = \bigsqcup \omega_{\nu}$ означает разбиение ω — прямое объединение непересекающихся ω_{ν}. Здесь $K(\boldsymbol{\omega})$ — есть функция от таблицы $\boldsymbol{\omega} = (\omega^{\mu}_{\nu})^{\mu = -,0}_{\nu = 0,+}$, из четырех подмножеств $\omega^{\mu}_{\nu} \in \Omega$ со значениями в линейных непрерывных операторах

$$K\begin{pmatrix} \omega^-_+ & \omega^-_0 \\ \circ & \circ \\ \omega_0 & \omega_0 \end{pmatrix} : \mathcal{K}^{\otimes}(\omega^-_0) \otimes \mathcal{K}^{\otimes}(\mathring{\omega}_0) \to \mathcal{K}^{\otimes}(\mathring{\omega}_0) \otimes \mathcal{K}^{\otimes}(\mathring{\omega}_+), \ \mathcal{K}^{\otimes}(\omega) = \bigotimes_{x \in \omega} \mathcal{K}_x,$$

$$(2.6) \quad K(\boldsymbol{\omega}) = l^{\otimes}(\omega^-_+, g)\, k^{\otimes}(\mathring{\omega}_+, g)\, j^{\otimes}(\mathring{\omega}_0, g)\, k^{*\otimes}(\omega^-_0, g), \quad k^*(g) = k(g^{\star})^*,$$

где $l^{\otimes}(\omega) = \prod\limits_{x \in \omega} l(x)$, $k^{\otimes}(\omega) = \bigotimes\limits_{x \in \omega} k(x)$, $k^{*\otimes}(\omega) = \bigotimes\limits_{x \in \omega} k^*(x)$, $j^{\otimes}(\omega) = \bigotimes\limits_{x \in \omega} j(x)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{K} = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{K}^{(n)}$ — *разложимый оператор* (2.5), *определяемый в псевдофоковском пространстве* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *линейной комбинацией ядер вида* (2.6). *Тогда оператор* $\varepsilon(\mathbf{K}) = E\mathbf{K}E^{\flat}$, *определяемый псевдопроекцией* E: $\boldsymbol{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}$,

$$(2.7) \qquad (Eh)(\omega) = \int h(\omega^-, \omega, \varnothing)\, d\omega^-, \ h \in \boldsymbol{\mathcal{F}},$$

сопряженной к (2.4), *может быть продолжен до непрерывного оператора*

$$(2.8) \qquad [\varepsilon(\mathbf{K}) h](\omega) = \sum_{v \subseteq \omega} \int K(\omega \setminus v, v, \omega_0)\, h(v \sqcup \omega_0)\, d\omega_0,$$

где $K(\omega^0, \upsilon, \omega_0) = \int K\begin{pmatrix}\omega & \omega_0\\ \omega^0 & \upsilon\end{pmatrix} d\omega$, *на пополнение* $\mathcal{H}$ *предгильбертова пространства* $\Gamma(\mathcal{K})$ *относительно семейства полунорм* $\|h\|^f = \|\pi(f)^* h\|$, $f \in \mathcal{M}$. *Отображение* ε: $\mathbf{K} \mapsto \varepsilon(\mathbf{K})$ *определяет фоковское* $*$*-представление* $\varepsilon(\lambda \mathbf{K}^\flat + \lambda^* \mathbf{K}) = \lambda\varepsilon(\mathbf{K})^* + \lambda^*\varepsilon(\mathbf{K})$,

$$\varepsilon(\mathbf{K}^\flat \mathbf{K}) = \varepsilon(\mathbf{K})^* \varepsilon(\mathbf{K}),\ \varepsilon(\mathbf{I}^\otimes) = I^\otimes$$

разложимой $\flat$*-алгебры операторов* $\mathbf{K}$ *относительно инволюции* $K^\flat(\omega) = K(\omega')^*$, *где* $(\omega^\mu_\nu)' = (\omega^{-\nu}_{-\mu})$, *и ассоциативного произведения*

$$(2.9)\quad [K^\flat \cdot K](\omega) = \sum_{\upsilon^\mu_\nu \subseteq \omega^\mu_\nu}^{\mu<\nu} \sum_{\sigma^-_+ \cap \tau^-_+ = \upsilon^-_+}^{\sigma^-_+ \cup \tau^-_+ = \omega^-_+} K^\flat\begin{pmatrix}\omega^-_+ \setminus \sigma^-_+, & \upsilon^-_0 \sqcup \upsilon^-_+\\ \omega^\circ_+ \setminus \upsilon^\circ_+, & \omega^\circ_0 \sqcup \upsilon^\circ_+\end{pmatrix} K\begin{pmatrix}\omega^-_+ \setminus \tau^-_+, & \omega^-_0 \setminus \upsilon^-_0\\ \upsilon^-_+ \sqcup \upsilon^\circ_+, & \omega^\circ_0 \sqcup \upsilon^-_0\end{pmatrix},$$

индуцирующих инволюцию $K^+(\omega^\circ, \nu, \omega_0) = K(\omega_0, \nu, \omega^\circ)^*$ *и произведение*

$$[K^\dagger \cdot K](\omega^\circ, \upsilon, \omega_0) = \sum_{\upsilon_0 \subseteq \omega_0} \sum_{\upsilon^\circ \subseteq \omega^\circ} \int K^\dagger(\omega^\circ \setminus \upsilon^\circ, \upsilon \sqcup \upsilon^\circ, \upsilon_0 \sqcup \omega)\, K(\omega \sqcup \upsilon^\circ, \upsilon \sqcup \upsilon_0, \omega_0 \setminus \upsilon_0)\, d\omega$$

на ядрах $K(\omega^\circ, \upsilon, \omega_0)$, *определяющих фактор-алгебру* $\flat$*-алгебры операторов* $\mathbf{K}$ *относительно нулевого* $\flat$*-идеала* $\{\mathbf{K}: \varepsilon(\mathbf{K}^\flat\mathbf{K}) = 0\}$. *Сужение* $\pi = \varepsilon \circ j^\otimes$ $\flat$*-представления* ε *на операторы* $\mathbf{K}$ *вида* (2.6), *определяемое действием* (2.8):

$$(2.10)\quad [\pi(g)k^\otimes](\omega) = \exp\left\{\int (l(x, g) + k^*(x, g)\,k(x, g))\,dx\right\}(k(g) + j(g)k)^\otimes(\omega),$$

ядер $K(\omega^\circ, \upsilon, \omega_0) = \exp\{\langle g\rangle\} k^\otimes(\omega^\circ, g)\, j^\otimes(\omega, g)\, k^{*\otimes}(\omega_0, g)$ *на* $k^\otimes(\omega) = \bigotimes_{x\in\omega} k(x)$, *дает* $*$*-представление* π: $\mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\pi(f \bigstar h) = \pi(f)^*\pi(h)$, $\pi(e) = I^\otimes$, $\forall f, h \in \mathcal{M}$, *ассоциированное с безгранично-делимым состоянием* φ: $\mathcal{M} \to \mathbb{C}$ *в смысле* $\varphi(g) = (1_\varnothing \mid \pi(g) 1_\varnothing)$, *где* $1_\varnothing = k^\otimes$ *для* $k = 0$.

Доказательство. Оператор (2.4) является псевдоизометрией:

$$(E^\flat h \mid E^\flat h) = \int (E^\flat h)^*(\omega^+, \omega^\circ, \omega^-)(E^\flat h)(\omega^-, \omega^\circ, \omega^+)\, d\omega^- d\omega^\circ d\omega^+ =$$
$$= \int 1_\varnothing(\omega^+)\, h^*(\omega^\circ)\, 1_\varnothing(\omega^-)\, h(\omega^\circ)\, d\omega^- d\omega^\circ d\omega^+ = \int h^*(\omega^\circ)\, h(\omega^\circ)\, d\omega^\circ = (h \mid h),$$

следовательно, эрмитово сопряженный оператор (2.7), определяемый из условия $(E\boldsymbol{h} \mid h) = (\boldsymbol{h} \mid E^\flat h)$, $\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$, $h \in \mathcal{F}$,

$$(E\boldsymbol{h} \mid h) = \int (E\boldsymbol{h})^*(\omega)\, h(\omega)\, d\omega = \int \boldsymbol{h}^*(\omega^+, \omega^\circ, \omega^-)\, 1_\varnothing(\omega^-)\, h(\omega^\circ)\cdot d\omega^+ d\omega^\circ d\omega^-,$$

является псевдопроекцией: $EJh = h$, $\forall h \in \mathcal{F}$, где $(Jh)(\omega_-, \omega_0, \omega_+) = 1_\varnothing(\omega_-)\, h(\omega_0)\, 1_\varnothing(\omega_+)$ есть каноническое вложение $\mathcal{F} \subset \boldsymbol{\mathcal{F}}$. Покажем теперь, что действие в $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ линейной комбинации операторов $\mathrm{G}^\otimes$ с треугольными $\mathrm{G} = [G^\mu_\nu]^{\mu=-,\,0,\,+}_{\nu=-,\,0,\,+}$, $G^\mu_\nu = 0$, $\forall \mu < \nu$, имеющими единичные матричные элементы $G^-_- = 1 = G^+_+$, записывается в виде (2.5).

В самом деле,

$$(\mathbf{G}^{\otimes}\mathbf{k}^{\otimes})(\omega^{\cdot}) = (\mathbf{G}\mathbf{k})^{\otimes}(\omega^{\cdot}) = \prod_{\mu}\Big(\sum_{\nu} G^{\mu}_{\nu}k^{\nu}\Big)^{\otimes}(\omega^{\mu}) =$$

$$= \prod_{\mu} \sum_{\bigsqcup_{\nu}\omega^{\mu}_{\nu}=\omega^{\mu}} \prod_{\nu}(G^{\mu}_{\nu})^{\otimes}(\omega^{\mu}_{\nu}) \prod_{\nu}(k^{\nu})^{\otimes}(\omega^{\mu}_{\nu}),$$

где суммы формально берутся по всем разбиениям $\omega^{\mu} = \omega^{\mu}_{-} \bigsqcup \omega^{\mu}_{0} \bigsqcup \omega^{\mu}_{+}$, а на самом деле по $\omega^{\mu} = \bigsqcup_{\nu\geqslant\mu} \omega^{\mu}_{\nu}$ в силу того, что $G^{\mu}_{\nu} = 0$ при $\nu < \mu$. Если $\omega^{\cdot} = (\omega^{-}, \omega^{\circ}, \omega^{+})$ не пересекаются, то $\omega^{\cdot}_{\nu} = (\omega^{-}_{-}, \omega^{-}_{0}, \omega^{-}_{+})$ также не пересекаются, поскольку $\omega^{\mu}_{\nu} \subseteq \omega^{\mu}$, и, следовательно, $\prod_{\mu} h(\omega^{\mu}_{\cdot}) = h\Big(\bigsqcup_{\mu}\omega^{\mu}_{\cdot}\Big)$ для $h(\omega_{\cdot}) = \prod_{\nu}(k^{\nu})^{\otimes}(\omega_{\nu})$, что дает

$$(\mathbf{G}^{\otimes}\mathbf{k}^{\otimes})(\omega^{\cdot}) = \sum_{\bigsqcup \omega^{\cdot}_{\nu}=\omega^{\cdot}} \prod_{\mu,\,\nu}(G^{\mu}_{\nu})^{\otimes}(\omega^{\mu}_{\nu}) \Big(\prod_{\nu} k^{\nu}\Big)^{\otimes}\Big(\bigsqcup_{\mu}\omega^{\mu}_{\nu}\Big),$$

где $\bigsqcup_{\mu}\omega^{\mu}_{\nu} = \bigsqcup_{\mu\leqslant\nu}\omega^{\mu}_{\nu}$, поскольку $(G^{\mu}_{\nu})^{\otimes}(\omega) = \bigotimes_{x\in\omega} G^{\mu}_{\nu}(x)$ равно нулю при $\omega = \omega^{\mu}_{\nu} \neq \varnothing$ для $\mu > \nu$. Таким образом, мы получим формулу (2.5) на экспоненциальных векторах $\mathbf{h} = \mathbf{k}^{\otimes}$ с ядром $K(\omega) = \prod_{\mu\leqslant\nu}(G^{\mu}_{\nu})^{\otimes}(\omega^{\mu}_{\nu})$ вида (2.6). В силу линейности этой формулы относительно ядра $\mathbf{K}$, она справедлива также и для линейных комбинаций $\mathbf{K} = \Sigma\lambda_i \mathbf{G}^{\otimes}_i$ по крайней мере на $\Gamma(\mathbf{K})$. Определим теперь оператор $E\mathbf{K}E^{\flat}$ в $\mathcal{F}$, воспользовавшись формулой

$$\int \sum_{\bigsqcup \omega_{\mu}=\omega} h(\omega_{-}, \omega_{0}, \omega_{+})\,d\omega = \iiint h(\omega_{-}, \omega_{0}, \omega_{+})\,d\omega_{-}\,d\omega_{0}\,d\omega_{+}.$$

Учитывая вид (2.4), (2.7) операторов $E^{\flat}$, E, получим для $h \in \Gamma(\mathcal{K})$

$$[E\mathbf{K}E^{\flat}k^{\otimes}](\omega) = \int(\mathbf{K}E^{\flat}h)(\omega^{-}, \omega, \varnothing)\,d\omega^{-} =$$

$$= \iiint \sum_{\overset{\circ}{\omega}_{0}\bigsqcup\overset{\circ}{\omega}_{+}=\omega} K(\omega)\,1_{\varnothing}(\omega^{-}_{-})\,h(\omega^{-}_{0}\bigsqcup\overset{\circ}{\omega}_{0})\,d\omega^{-}_{-}\,d\omega^{-}_{0}\,d\omega^{-}_{+} =$$

$$= \sum_{\overset{\circ}{\omega}_{0}\bigsqcup\overset{\circ}{\omega}_{+}=\omega} \int K(\overset{\circ}{\omega}_{+}, \overset{\circ}{\omega}_{0}, \omega^{-}_{0})\,h(\omega^{-}_{0}\bigsqcup\overset{\circ}{\omega}_{0})\,d\omega^{-}_{0},$$

что может быть записано в виде (2.8) в обозначениях $\nu = \overset{\circ}{\omega}_{0}$ и $\overset{\circ}{\omega}_{+} = \omega \setminus \nu = \omega \cap \bar{\nu}$.

Докажем теперь, что псевдоусловное ожидание $\mathbf{K} \to E\mathbf{K}E^{\flat}$ является $\star$-представлением на $\Gamma(\mathcal{K})$. Для этого достаточно показать, что это отображение является гомоморфизмом относительно бинарной операции (2.9), инволюции $\mathbf{K} \mapsto \mathbf{K}^{\flat}$ и единицы $\mathbf{K} = \mathbf{I}^{\otimes}$ на порождающих элементах $\mathbf{G}^{\otimes}$, для которых (2.8) дает (2.10) на $h = k^{\otimes}$:

$$[E\mathbf{G}^{\otimes}E^{\flat}k^{\otimes}](\omega) = \sum_{\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\omega}_+ = \omega} \iint \prod_{\mu<\nu} (G^{\mu}_{\nu})^{\otimes}(\omega^{\mu}_{\nu})\, k^{\otimes}(\omega^-_0 \sqcup \overset{\circ}{\omega}_0)\, d\omega^-_0\, d\omega^-_+ =$$

$$= \sum_{\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\omega}_+ = \omega} (\overset{\circ}{G}_0 k)^{\otimes}(\overset{\circ}{\omega}_0)(\overset{\circ}{G}_+)^{\otimes}(\overset{\circ}{\omega}_+) \int (G^-_0 k)^{\otimes}(\omega^-_0)\, d\omega^-_0 \int (G^-_+)^{\otimes}(\omega^-_+)\, d\omega^-_+ =$$

$$= (\overset{\circ}{G}_0 k + \overset{\circ}{G}_+)^{\otimes}(\omega) \exp\left\{\int (G^-_0 k + G^-_+)(x)\, dx\right\}.$$

Используя эту формулу, получим, что $[E\mathbf{I}^{\otimes}E^{\flat}k^{\otimes}](\omega) = k^{\otimes}(\omega)$, т. е. $E\mathbf{I}^{\otimes}E^{\flat} = I^{\otimes}$,

$$[E\mathbf{G}^{\flat\otimes}E^{\flat}k^{\otimes}](\omega) = (\overset{\circ}{G}_0 k + G^{-*}_0)^{\otimes}(\omega) \exp\left\{\int (\overset{\circ}{G}{}^{*}_+ k + G^{-*}_+)(x)\, dx\right\},$$

т. е. $E\mathbf{K}^{\flat}E^{\flat} = (E\mathbf{K}E^{\flat})^*$ для $\mathbf{K} = \sum \lambda_i \mathbf{G}^{\otimes}_i$, $\mathbf{K}^{\flat} = \sum \lambda_i \mathbf{G}^{\flat\otimes}_i$, и

$$[E(\mathbf{E}\mathbf{G})^{\otimes}E^{\flat}k^{\otimes}](\omega) = (\overset{\circ}{F}_{\varkappa}G^{\varkappa}_0 k + \overset{\circ}{F}_{\varkappa}G^{\varkappa}_+)^{\otimes}(\omega) \exp\left\{\int (F^-_{\varkappa}G^{\varkappa}_0 k + F^-_{\varkappa}G^{\varkappa}_+)(x)\, dx\right\} =$$

$$= (\overset{\circ}{F}_0\overset{\circ}{G}_0 k + \overset{\circ}{F}_0\overset{\circ}{G}_+ + \overset{\circ}{F}_+)^{\otimes}(\omega) \exp\left\{\int (G^-_0 k + F^-_0\overset{\circ}{G}_0 k + G^-_+ + F^-_0\overset{\circ}{G}_+ + F^-_+)(x)\, dx\right\} =$$

$$= (\overset{\circ}{F}_0 k + \overset{\circ}{F}_+)^{\otimes}(\omega) \exp\left\{\int (F^-_0 k + F^-_+)(x)\, dx\right\} (\overset{\circ}{G}_0 k + \overset{\circ}{G}_+)^{\otimes}(\omega) \times$$

$$\times \exp\left\{\int (G^-_0 k + G^-_+)(x)\, dx\right\},$$

где использовано правило умножения

$$(\mathbf{F}\mathbf{G})^{\mu}_{\nu} = \sum_{\varkappa \geqslant \mu}^{\varkappa \leqslant \nu} F^{\mu}_{\varkappa}G^{\varkappa}_{\nu} = \sum_{\varkappa} F^{\mu}_{\varkappa}G^{\varkappa}_{\nu} \equiv F^{\mu}_{\varkappa}G^{\varkappa}_{\nu}$$

треугольных матриц $\mathbf{F} = [F^{\mu}_{\nu}]$, $\mathbf{G} = [G^{\mu}_{\nu}]$, $\mu, \nu \in \{-, 0, +\}$, $F^{\mu}_{\nu} = 0 = G^{\mu}_{\nu}$, $\mu > \nu$, с элементами $F^-_- = 1 = F^+_+$, $G^-_- = 1 = G^+_+$. Таким образом, мы доказали, что $\varepsilon(\mathbf{F}^{\otimes}\mathbf{G}^{\otimes}) = \varepsilon(\mathbf{F}^{\otimes})\,\varepsilon(\mathbf{G}^{\otimes})$, где $\varepsilon(\mathbf{G}^{\otimes})\,h = E\mathbf{G}^{\otimes}E^{\flat}h$ для любого $h = \Sigma\lambda_i k^{\otimes}_i \in \Gamma(\mathscr{K})$. Пополним $\Gamma(\mathscr{K})$ последовательностями $h_n \in \Gamma(\mathscr{K})$, являющимися фундаментальными относительно любой из полунорм $\|h\|^f = \|\varepsilon(\mathbf{j}^{\otimes}(f)^{\flat})h\|$, $f \in M$ (в том числе и относительно $\|h\|^e = \|h\|$). Поскольку $\pi(g) = \varepsilon[\mathbf{j}^{\otimes}(g)]$ является $*$-представлением $\mathscr{M}$ на $\Gamma(\mathscr{K})$:

$$\pi(g \bigstar f) = \varepsilon\{[\mathbf{j}(g)^{\flat}\mathbf{j}(f)]^{\otimes}\} = \varepsilon[\mathbf{j}^{\otimes}(g)^{\flat}]\,\varepsilon[\mathbf{j}^{\otimes}(f)] = \pi(g)^*\pi(f),$$

всякая фундаментальная последовательность остается фундаментальной и после умножения на $\pi(g)$: $\|\pi(g)\,h\|^f = \|h\|^{g\bigstar f}$. Это дает возможность продолжить операторы $\varepsilon[\mathbf{j}^{\otimes}(g)] = E\mathbf{j}^{\otimes}(g)\,E^{\flat}$ до непрерывных операторов $\pi(g)$ на пополнении $\mathscr{H}$ относительно описанной сходимости в $\Gamma(\mathscr{K})$. В силу непрерывности алгебраические соотношения, определяющие свойства $*$-представления $\pi = \varepsilon \circ \mathbf{j}^{\otimes}$ на $\Gamma(\mathscr{K})$, остаются справедливыми и на пополнении $\mathscr{H}$. Очевидно, что линейная оболочка $\Sigma\lambda_i\pi(g_i)$ определяет $*$-подалгебру операторов $\varepsilon(\mathbf{K}) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, являющуюся гомоморфным образом $\flat$-алгебры $\mathbb{C}\mathscr{B}^{\otimes}$ линейных комбинаций $\mathbf{K} = \Sigma\lambda_i\mathbf{j}^{\otimes}(g_i)$ разложимых операторов $\mathbf{G}^{\oplus}_i = 1 \oplus \oplus \mathbf{G}_i \oplus \mathbf{G}^{\otimes 2}_i \oplus \ldots$, где $\mathbf{G}_i = \mathbf{j}(g_i)$. Напомним, что линейные операции в $\mathbb{C}\mathscr{B}^{\otimes}$, где $\mathscr{B} = \mathbf{j} \subset (\mathscr{F})$, определяются над коэффициентами λ_i покомпонентно, а умножение $\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}$ определяется, как и во всякой полугрупповой алгебре, $\bigstar$-операцией в $\mathscr{B}$: $\mathbf{K}^{\flat}\mathbf{K} = \sum \lambda^*_i\lambda_{i'}\mathbf{j}^{\otimes}(g_i \bigstar g_{i'})$. Отсюда нетрудно найти, что $\mathbf{K}^{\flat}$ описываются по формуле (2.5) ядрами $K(\omega')^*$, где таблица $\boldsymbol{\omega}'$ из четырех подмножеств отличается от $\boldsymbol{\omega} = (\omega_\nu^\mu)$, $\omega_\nu^\mu \in \Omega$, перестановкой ω_0^- и ω_+°, поскольку это имеет место для порождающих ядер (2.6), и $\mathbf{K}^\flat \cdot \mathbf{K}$ определяется ядром (2.9), поскольку из $\mathrm{j}^\otimes(f)\cdot \mathrm{j}^\otimes(g) = \mathrm{j}^\otimes(f\cdot h)$ это имеет место для порождающих ядер (2.6):

$$l^\otimes(\omega_+^-, f\cdot g)\, k^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_+, f\cdot g)\, j^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_0, f\cdot g)\, k^{*\otimes}(\omega_0^-, f\cdot g) = [j(f)\, j(g)]^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_0) \otimes$$
$$\otimes [j(f)\, k(g) + k(f)]^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_+)\,[l(f) + k^*(f)\, k(g) + l(g)]^\otimes(\omega_+^-)\,[k^*(g) +$$
$$+ k^*(f)\, j(g)]^\otimes(\omega_0^-) = \sum_{\sigma \sqcup \tau \sqcup \upsilon_+^- = \omega_+^-} l(f)^\otimes(\sigma)\, l(g)^\otimes(\tau)\,[k^*(f)\, k(g)]^\otimes(\upsilon_+^-)\, j(f)^\otimes \times$$
$$\times (\overset{\circ}{\omega}_0)\, j(g)^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_0) \otimes \sum_{\overset{\circ}{\upsilon}_+ \sqcup \overset{\circ}{\sigma}_+ = \overset{\circ}{\omega}_+} [j(f)\, k(g)]^\otimes(\overset{\circ}{\upsilon}_+) \otimes k^\otimes(f)(\sigma_+) \otimes$$
$$\otimes \sum_{\sigma_0^- \sqcup \tau^- = \omega_0^-} k^*(g)^\otimes(\tau^-) \otimes [k^*(f)\, j(g)]^\otimes(\upsilon_0^-) =$$
$$= \sum_{\upsilon_\nu^\mu \subseteq \omega_\nu^\mu}^{\mu<\nu} \sum_{\sigma \sqcup \tau = \omega_+^- \setminus \upsilon_+^-} l^\otimes(\sigma, f)\, k^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_+ \setminus \overset{\circ}{\upsilon}_+, f)\, j^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_+, f)\, k^{*\otimes}(\upsilon_0^- \sqcup \upsilon_+^-, f) \times$$
$$\times\, l^\otimes(\tau, g)\, k^\otimes(\upsilon_+^- \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_+, g)\, j^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \upsilon_0^-, g)\, k^{*\otimes}(\omega_0^- \setminus \upsilon_0^-, g).$$

Интегрируя (2.9) по $\omega_+^- \in \Omega$, получим формулу умножения ядер $K(\overset{\circ}{\omega}_-, \overset{\circ}{\omega}_0, \overset{+}{\omega}_0) = \int K(\boldsymbol{\omega})\, d\omega_+^-$:

$$\int [\mathbf{K}^\flat \mathbf{K}](\boldsymbol{\omega})\, d\omega_+^- =$$
$$= \iiint d\sigma\, d\tau\, d\upsilon_+^- \sum_{\upsilon_\nu^\mu \subseteq \omega_\nu^\mu}^{\mu<\nu} K^\flat \begin{pmatrix} \sigma, & \upsilon_0^- \sqcup \upsilon_+^- \\ \overset{\circ}{\omega}_+ \setminus \overset{\circ}{\upsilon}_+ & \overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_+ \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} \tau, & \omega_0^- \setminus \upsilon_0^- \\ \upsilon_+^- \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_+, & \overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \upsilon_0^- \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{\upsilon_0^- \subseteq \Omega_0^-} \sum_{\overset{\circ}{\upsilon}_+ \subseteq \overset{\circ}{\omega}_+} \int K^\dagger(\overset{\circ}{\omega}_+ \setminus \overset{\circ}{\upsilon}_+, \overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_n, \upsilon_0^- \sqcup \upsilon_+^-)\, K(\upsilon_+^- \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_+, \overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \upsilon_0^-, \omega_0^- \setminus \upsilon_0^-)\, d\upsilon_+^-,$$

где $K^+(\overset{\circ}{\omega}_-, \overset{\circ}{\omega}_0, \overset{+}{\omega}_0) = \int K^\flat(\boldsymbol{\omega})\, d\omega_0^- = K(\overset{+}{\omega}_0, \overset{\circ}{\omega}_0, \overset{\circ}{\omega}_-)^*$. Это определяет $\dagger$-алгебраическую структуру для трехаргументных ядер, связанных с ядрами Маассена — Мейера $M(\omega^\circ, \chi, \omega_0)$ [18, 19] взаимнооднозначным преобразованием

$$K(\omega^\circ, \upsilon, \omega_0) = \sum_{\chi \subseteq \upsilon} M(\omega^\circ, \chi, \omega_0) \otimes I^\otimes(\upsilon \setminus \chi).$$

Рассмотрим, наконец, $\flat$-инвариантное подпространство $\flat$-алгебры ядер $J(\boldsymbol{\omega})$, определяемое условием $\int J(\boldsymbol{\omega})\, d\omega_+^- = 0$. Это есть нулевой идеал гомоморфизма $\{K(\boldsymbol{\omega})\} \mapsto \{K(\overset{\circ}{\omega}_+, \overset{\circ}{\omega}_0, \omega_0^-)\}$, преобразующего сопряжение $\flat$ в $\dagger$. Следовательно, это есть двухсторонний идеал ($\flat$-идеал):

$$\int (\mathbf{KJ})(\boldsymbol{\omega})\, d\omega_+^- = 0 = \int (\mathbf{JK})(\boldsymbol{\omega})\, d\omega_+^-, \ \forall \mathbf{K},$$

содержащийся в нулевом идеале представления ε: $\varepsilon(\mathbf{J}) = 0$, если $J(\overset{\circ}{\omega}_+, \overset{\circ}{\omega}_0, \omega_0^-) = 0$. Можно показать, что благодаря безатомности меры dx на X этим и исчерпывается нулевой идеал представления ε. Это вытекает из единственности стохастического представления (2.8), доказанной в терминах ядер Маассена — Мейера в [18, 19]. Следовательно, интеграл $K(\overset{\circ}{\omega}_+, \overset{\circ}{\omega}_0, \omega_0^-) =$

$= \int K(\omega)\, d\omega_+^-$ является гомоморфизмом факторизации $\flat$-алгебры ядер $K(\omega)$ и по нулевому идеалу представления ε. Доказательство закончено.

Замечание 2. Введем четыре типа G_μ^ν, $\nu \neq -$, $\mu \neq +$ элементарных треугольных разложимых операторов в $\mathscr{K}$, описываемых матрицами вида

$$\mathrm{G}_0^+(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I(x) & \overset{\circ}{g}_x(x) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{G}_-^{\circ}(x) = \begin{bmatrix} 1 & g_0^-(x) & 0 \\ 0 & I(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{G}_-^+(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & g_+^-(x) \\ 0 & I(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{G}_0^{\circ}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и обозначим $G^N = \varepsilon\,[(\mathrm{G}_0^{\circ})^{\otimes}] \equiv G^{\otimes}$, $\mathrm{e}^{\langle g\rangle} = \varepsilon\,[(\mathrm{G}_+^-)^{\otimes}]$, $\mathrm{e}^{\langle g\overset{\circ}{A}_-\rangle} = \varepsilon\,[(\mathrm{G}_-^{\circ})^{\otimes}]$, $\mathrm{e}^{\overset{+}{A}_0 g\rangle} = \varepsilon\,[(\mathrm{G}_0^+)^{\otimes}]$, где ε есть отображение (2.8) для $\mathbf{K}(\omega) = \bigotimes_{x\in\omega} \mathrm{G}_\mu^\nu(x)$.

Тогда представление $g \in \mathscr{M} \mapsto \pi(g)$, ассоциированное с безгранично-делимым состоянием $\varphi(g) = \mathrm{e}^{\langle g\rangle}$ относительно вакуумного вектора $1_{\mathscr{G}} \in \mathscr{H}$, может быть представлено как «нормально-упорядоченное» произведение $\pi(g) = \mathrm{e}^{\langle g\rangle}\mathrm{e}^{\overset{+}{A}_0 g\rangle} G^N \mathrm{e}^{\langle g\overset{\circ}{A}_-}$, $\forall g \in \mathscr{M}$, определяемое функциями $G(x) = j(x, g)$, $g_+^-(x) = l(x, g)$, $g_0^-(x) = k^*(x, g)$, $\overset{\circ}{g}_+(x) = k(x, g)$.

Действительно, произвольный треугольный оператор G в $\mathscr{K}$ с компонентами $G_-^- = 1 = G_+^+$ разлагается на «нормально-упорядоченное» произведение элементарных матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & g_0^- & g_+^- \\ 0 & G & \overset{\circ}{g}_+ \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & g_+^- \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & \overset{\circ}{g}_+ \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_0^- & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Благодаря мультипликативности отображений $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^{\otimes}$ и $\mathbf{K} \mapsto \varepsilon(\mathbf{K})$ для $\mathbf{K} = \mathrm{G}^{\otimes}$ отсюда получим

$$\varepsilon\,[\mathrm{G}^{\otimes}] = \varepsilon\,[(\mathrm{G}_-^+)^{\otimes}]\, \varepsilon\,[(\mathrm{G}_0^+)^{\otimes}]\, \varepsilon\,[(\mathrm{G}_0^{\circ})^{\otimes}]\, \varepsilon\,[(\mathrm{G}_-^{\circ})^{\otimes}],$$

что дает при $\mathrm{G} = \mathbf{j}(g)$ соответствующее представление для $\pi(g) = \varepsilon\,[\mathbf{j}^{\otimes}(g)]$.

1.3. Структура псевдопуассоновских хаотических состояний на ★-алгебрах

В этом разделе предполагается, что на ★-моноиде $\mathscr{M}$ определена также структура аддитивной группы с поточечными операциями

$$(-g)(x) = -g(x),\ (f + h)(x) = f(x) + h(x),\ 0(x) = u = e(x),$$

относительно которых форма (1.2) является гомоморфизмом $\mathscr{M} \to \mathbb{C}$:

$$\langle -g\rangle = -\langle g\rangle,\ \langle f + h\rangle = \langle f\rangle + \langle h\rangle,\ \langle 0\rangle = 0.$$

Условие (1.4) безграничной делимости состояния $\varphi_\Delta(b) = \mathrm{e}^{\lambda_\Delta(b)}$ для любого интегрируемого $\Delta \subseteq X$ при этом записывается в виде положительной определенности

$$(3.1) \qquad \sum_{a,c\in\mathscr{B}} \varkappa_a^* \lambda_\Delta(a^\star c)\,\varkappa_c \geqslant 0, \quad \forall \varkappa_b \in \mathbb{C}: |\operatorname{supp}\varkappa| < \infty$$

функции $\lambda_\Delta(b) = \langle b_\Delta\rangle$, $b_\Delta(x) = b$, $x \in \Delta$, $b_\Delta(x) = 0$, $x \notin \Delta$, относительно нового произведения $ac = a\cdot c - a - c$, определяемого в терминах бинарной $\bigstar$-операции как разность

$$a^\star c = a \bigstar c - a \bigstar u - u \bigstar c,\ \forall a,\ c \in \mathscr{B}.$$

Это следует из аддитивности формы $\langle g\rangle$, в силу которой

$$\sum_{f,\, h \in \mathscr{M}} \varkappa_f^* \langle f \bigstar h\rangle \varkappa_h = \sum_{f,\, h \in \mathscr{M}} \varkappa_f^* (\langle f^\star h\rangle + \langle f^\star\rangle + \langle h\rangle)\varkappa_h = \sum_{f,\, h \in \mathscr{M}} \varkappa_f^* \langle f^\star h\rangle \varkappa_h$$

для любых $\varkappa_g \in \mathbb{C}$: $|\operatorname{supp} \varkappa| < \infty$ таких, что $\sum \varkappa_g = 0$, где в правой части можно произвольным образом изменить значение $\varkappa_u$, поскольку $e^\star b = -e = b^\star e$ и $\langle 0^\star g\rangle = 0 = \langle g^\star 0\rangle$. Состояние $\varphi(g) = e^{\langle g\rangle}$, соответствующее аддитивной и положительной в указанном смысле форме $\langle g\rangle$, является хаотическим:

$$\varphi(f \sqcup h) = e^{\langle f+h\rangle} = \varphi(f)\,\varphi(h),\ \forall f,\ h \in \mathscr{M}\colon fh = 0,$$

поскольку $f\cdot h = f + fh + h$ и $fh = 0$ для любых дизъюнктных f и h. Такое состояние будем называть *псевдо-пуассоновским*, если произведение $(f^\star h)(x) = f(x)^\star h(x)$ обладает свойствами гомоморфизма по каждому из аргументов:

$$f^\star(g - h) = f^\star g - f^\star h,\ (f - g)^\star h = f^\star h - g^\star h.$$

Иначе говоря, псевдопуассоновское состояние описывается экспоненциальным функционалом $\varphi(f + h) = \varphi(f)\,\varphi(h)$, $\forall f,\ h \in \mathscr{M}$, являющимся положительно-определенным в смысле (1.1) относительно операции $f \bigstar h = f^\star + h + f^\star h$, и $e = 0$, поточечно определяемой с помощью операций $a + c$, ac на кольце (или алгебре) $\mathscr{B}$ с инволюцией $b^\star$ и нулем $u = 0$.

Заметим, что ассоциативность недистрибутивной полугрупповой операции $a\cdot c$ вытекает из дистрибутивности (и ассоциативности) умножения ac, что становится особенно очевидным в случае наличия единицы 1: $1b = b = b1$ у кольца $\mathscr{B}$ в силу соотношения

$$1 + a\cdot c = (1 + a)(1 + c),\ \forall a,\ c \in \mathscr{B}.$$

В силу этой дистрибутивности канонические отображения k: $g \in \mathscr{M} \mapsto g\rangle \in \mathscr{K}$, k^*: $g \in \mathscr{M} \mapsto \langle g \in \mathscr{K}^*$, определяющие минимальную декомпозицию (1.5) аддитивной (линейной) положительной формы $\langle g\rangle$, являются аддитивными (линейными), причем $*$-отображение i: $g \in \mathscr{M} \mapsto j(g) - I$, удовлетворяющее в соответствии с (1.6) условиям

$$i(g^\star)\,h\rangle = g \bigstar h\rangle - g^\star\rangle - h\rangle = g^\star h\rangle,\ \forall g,\ h \in \mathscr{M},$$

$$\langle f^\star i(g) = \langle f \bigstar g - \langle g - \langle f^\star = \langle f^\star g,\ \forall g,\ f \in \mathscr{M},$$

также является аддитивным (линейным):

$$i(f + h) = i(f) + i(h),\ i(0) = 0,\ (i(\lambda g) = \lambda i(g)).$$

Более того, отображения $i_x(b) = j_x(b) - I_x$ являются $*$-представлениями кольца (алгебры) $\mathscr{B}$ в операторных $*$-алгебрах $\mathscr{B}(\mathscr{K}_x) = \{B\colon \mathscr{K}_x \to \mathscr{K}_x \mid B^*\mathscr{K}_x \subseteq \mathscr{K}_x\}$ полигильбертовых пространств $\mathscr{K}_x = \{k\colon \| j_x(a)^* k\| < \infty,\ \forall a \in \mathscr{B}\}$:

$$i_x(a^\star c) = i_x(a \bigstar c) - i_x(a)^* - i_x(c) = i_x(a \bigstar c) - 1 - i_x(a^*) - {}$$
$$- i_x(c) = (i_x(a) + 1)^*(i_x(c) + 1) - 1 - i_x(a)^* - i_x(c) = i_x(a)^* i_x(c).$$

Комбинируя эти соотношения и учитывая, что в силу аддитивности (линейности) функций $l_x(b)$ в интеграле (1.2)

$$l_x(a^\star c) = l_x(a \bigstar c) - l_x(a)^* - l_x(c) = k_x(a)^* k_x(c)$$

почти всюду на X, мы получим четырехкомпонентное разложимое $\bigstar$-представление $\boldsymbol{i}(x, g) = \boldsymbol{i}_x(g(x))$

$$(3.2)\qquad \boldsymbol{i}_x(b) = \begin{pmatrix} l_x(b) & k_x^*(b) \\ k_x(b) & i_x(b) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{i}_x(b^\bigstar) = \begin{pmatrix} l_x(b) & k_x^*(b) \\ k_x(b) & i_x(b) \end{pmatrix}^\dagger$$

$\bigstar$-кольца $\mathcal{B}$ с обычным матричным эрмитовым сопряжением $\boldsymbol{i}_x(b)^\dagger$ и необычным умножением, определяемым таблицей Хадсона — Партасарати [14]

$$(3.3)\qquad \boldsymbol{i}_x(a^\bigstar c) = \begin{pmatrix} k_x(a)^* k_x(c), & k_x(a)^* i_x(c) \\ i_x(a^\bigstar) k_x(c), & i_x(a^\bigstar) i_x(c) \end{pmatrix}, \quad \forall a, c \in \mathcal{B}.$$

Оно имеет естественную реализацию $\mathbf{i}(x, g) = \mathbf{j}(x, g) - \mathbf{I}_x$, определяемую в псевдоевклидовом полибанаховом пространстве $\mathcal{K} = L^1(X) \oplus \mathcal{K} \oplus L^\infty(X)$ каноническим треугольным представлением $\mathbf{j}(x, g) = \mathbf{j}_x(g(x))$ $\bigstar$-моноида $\mathcal{M}$ с обычным матричным умножением и необычным — псевдоэрмитовым сопряжением (2.2):

$$(3.3)\qquad \mathbf{i}(x, g^\bigstar) = \begin{bmatrix} 0 & k(x,g)^* & l(x,g)^* \\ 0 & i(x, g^\bigstar) & k(x, g^\bigstar) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{i}(x, g)^\flat.$$

Сказанное означает, что фактор-кольцо $\mathcal{M}/\mathcal{J}$ по нулевому $\bigstar$-идеалу $\mathcal{J} = \{g \in \mathcal{M} \mid \boldsymbol{i}(g) = 0\}$ простых функций со значениями $g(x) \in \mathcal{J}_x = \boldsymbol{i}_x^{-1}(0)$, где $\boldsymbol{i}_x^{-1}(0) = \{b \in \mathcal{B} \mid \boldsymbol{i}_x(b) = 0\}$, можно описывать как $\boldsymbol{i}(\mathcal{M})$ четырехкомпонентными функциями $\boldsymbol{g} = (g_\nu^\mu)_{\nu=0,+}^{\mu=0,-}$, например вида $\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{i}_x(g(x))$, $\overset{\circ}{g}_0 = i(g)$, $\overset{\circ}{g}_+ = k(g)$, $\overset{-}{g}_0 = k^*(g)$, $\overset{-}{g}_+ = l(g)$, образующими $\flat$-кольцо относительно эрмитова сопряжения $g^\flat(x)_\nu^\mu = g_{-\mu}^{-\nu}(x)^*$ и таблицы покомпонентного умножения (3.3). Это позволяет представить аддитивные интегральные эрмитовы формы

$$(3.4)\qquad \mu(g) = \int m(x, g)\, dx,\ m(x, g) = m_x(g(x))$$

на $\flat$-кольце $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ четырехкомпонентными функциями

$$m(x) = \begin{pmatrix} \mu & \overset{+}{m}_0 \\ \overset{\circ}{m}_- & \overset{\circ}{m}_0 \end{pmatrix}(x), \quad \begin{array}{l} \mu(x, g) = \mu(x)\, \overset{-}{g}_+(x), \quad \overset{+}{m}_0(x, g) = \overset{+}{m}_0(x)\, \overset{\circ}{g}_+(x), \\ \overset{\circ}{m}_-(x, g) = \overset{-}{g}_0(x)\, \overset{\circ}{m}_-(x), \overset{\circ}{m}_0(x, g) = \langle \overset{\circ}{g}_0(x), \overset{\circ}{m}_0(x)\rangle, \end{array}$$

$$\overset{\circ}{m}_0(x, g^\bigstar) = \overset{\circ}{m}_0(x, g)^*, \overset{\circ}{m}_-(x, g^\bigstar) = \overset{+}{m}_0(x, g)^*, \mu(x, g^\bigstar) = \mu(x, g)^*$$

в виде

$$(3.5)\qquad m(x, g) = \langle i(x, g), \overset{\circ}{m}_0(x)\rangle + m^*(x)\, k(x, g) + k^*(x, g)\, m(x) + \mu(x)\, l(x, g).$$

Здесь $\mu(x) \in \mathbb{R}$ (для почти каждого x), $\overset{\circ}{m}_-(x)\colon \mathcal{E}_x \to \mathbb{C}$ — векторная линейная форма $\overset{\circ}{m}_- = m$ на предгильбертовом пространстве $\mathcal{E}_x = \{k_x^*(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$, сопряженная к форме $\overset{+}{m}_0(x)\colon k \in \mathcal{K}_x \mapsto m^*(x)\, k \in \mathbb{C}$, $\overset{\circ}{m}_0(x)\colon B \in \mathcal{B}_x \mapsto \langle B, \overset{\circ}{m}_0(x)\rangle \in \mathbb{C}$ — операторная линейная форма на $*$-подалгебре $\mathcal{B}_x = \{i_x(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ операторов B, $B^*\colon \mathcal{K}_x \to \mathcal{K}_x$. Как показывает следующая теорема, этим, по существу, и исчерпываются линейные положительные логарифмические формы $\mu\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ безгранично-делимых состояний $\Psi(g) = e^{\mu(g)}$ на $\bigstar$-алгебрах $\mathcal{M}$, абсолютнонепрерывных относительно псевдопуассоновского состояния $\varphi(g) = e^{\langle g\rangle}$ в смысле $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^\mu$. Здесь $\mathcal{J}^\mu$ — $\bigstar$-идеал ступенчатых функций $g\colon x \in X \mapsto g(x) \in \mathcal{J}_x^\mu$ со значениями в двусторонних идеалах

$$(3.6)\qquad \mathcal{I}_x^{\mu} = \{b \in \mathcal{B} \mid m_x(b) = 0,\ m_x(ab) = 0,\ m_x(bc) = 0,\ m_x(abc) = 0,\ \forall a, c \in \mathcal{B}\}.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{B}$ есть ★-алгебра над полем $\mathbb{C}$ и линейная положительная форма (1.2) на ★-алгебре $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию*

$$(3.7)\qquad \forall g \in \mathcal{M}\, \exists c < \infty:\ \langle h^{\star} g^{\star} g h\rangle \leqslant c \langle h^{\star} h\rangle,\ \forall h \in \mathcal{M},$$

ограниченности $\| i(g) \| \leqslant c$ ассоциированного операторного представления $i(g) = j(g) - I$. Снабдим $\mathcal{M}$ индуктивной сходимостью, полагая $g_n \to 0$, если $\| g_n \|_p^{\Delta} \to 0$ для всех $p = 1, 2, \infty$ и некоторого интегрируемого $\Delta \in \mathcal{A}$, где $g_n \in \mathcal{M}_{\Delta}$, $\forall n$, $\| g \|_{\infty}^{\Delta} = \| i(g) \|$ при $\{x \in X \mid g(x) \neq 0\} \subseteq \Delta$ и

$$\| g \|_2^{\Delta} = \Big(\int_{\Delta} \| k(x, g) \|^2\, dx\Big)^{1/2}, \quad \| g \|_1^{\Delta} = \int_{\Delta} | l(x, g) |\, dx.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) *Непрерывный в индуктивной сходимости на $\mathcal{M}$ функционал $\psi(g) = e^{\mu(g)}$ является псевдопуассоновским состоянием, описываемым абсолютно непрерывной функцией $\mu_{\Delta}(b) = \mu(b_{\Delta})$ в смысле $\mu_{\Delta}(b) = 0$ для всех $b \in \mathcal{B}$, если $\Delta \in \mathcal{A}$ и $\mu_{\Delta} = \int_{\Delta} dx = 0$.*

(ii) *функционал $\mu: \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ имеет интегральный вид (3.4), где $m_x: \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ — линейная функция (3.5), определяемая почти всюду на X положительной числовой функцией $\mu(x) \geqslant 0$, $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Delta} \mu(x) \sim <$, $\forall \Delta \in \mathcal{A}$, $\mu_{\Delta} = \int_{\Delta} dx < \infty$; вектор-функцией m на X со значениями $m(x) \in \mathcal{K}_x$, определяемыми значениями*

$$m^*(x) \in \mathcal{K}_x^*, \quad \int_{\Delta} \| m(x) \|_x^2\, dx < \infty, \quad \forall \Delta \in \mathcal{A}: \mu_{\Delta} = \int_{\Delta} dx < \infty,$$

непрерывных (почти для каждого $x \in X$) форм $m^*(x) k = (m(x) \mid k)$ на гильбертовых пространствах $\mathcal{K}_x = \mathcal{E}_x^*$; и функцией $\overset{\circ}{m}_0$ на X со значениями

$$\overset{\circ}{m}_0(x) \in \mathcal{B}_x^*, \quad \int_{\Delta} \sup_{0 \leqslant B \leqslant I_x} \langle B, \overset{\circ}{m}_0(x)\rangle\, dx < \infty, \quad \forall \Delta \in \mathcal{A}: \mu_{\Delta} = \int_{\Delta} dx < \infty,$$

в положительных формах на C^*-алгебрах $\mathcal{B}_x$, удовлетворяющих почти всюду неравенству

$$(3.8)\qquad \mu(x) \langle B^* B, \overset{\circ}{m}_0(x)\rangle \geqslant \| B m(x) \|^2,\ \forall B \in \mathcal{B}_x.$$

(iii) *существует треугольное представление*

$$g \in \mathcal{M} \mapsto g(x) = [g_{\nu}^{\mu}(x)],\ g_{-}^{\mu} = 0 = g_{\nu}^{+},\ \forall \mu, \nu \in \{-, 0, +\},$$

★-алгебры $\mathcal{M}$ в банаховом пространстве $K = L^1(X) \oplus \mathcal{K} \oplus L^{\infty}(X)$ с индефинитной метрикой (2.1), определяемой скалярным произведением $(k^{\circ} \mid k^{\circ}) = \int \| k^{\circ}(x) \|_x^2 dx$ гильбертова пространства $\mathcal{K} = \int^{\oplus} \mathcal{K}_x dx$, локально псевдоунитарно эквивалентное каноническому представлению (3.3) в смысле $\mathbf{g}(x) = \mathbf{S}^{\flat}(x)\, \mathbf{i}(x, g)\, \mathbf{S}(x)$ для разложимых операторов $\mathbf{S}(x)$ в $\mathbb{C} \oplus \mathcal{K}_x \oplus \mathbb{C}$ вида (1.10) такое, что

$$(3.9)\qquad \mu(g) = \int (\mu(x) g_{+}^{-}(x) + \langle g_0^0(x), M(x)\rangle)\, dx, \quad \forall g \in \mathcal{M},$$

где $\mu \geqslant 0$ — *локально-ограниченная измеримая функция и* $M \geqslant 0$ — *локальноинтегрируемая функция с положительными значениями* $M(x) \in \mathcal{B}_x^*$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если разложимые оператор-функции $i_x(b)$ локально-ограничены, то пространство $\mathcal{K}$ канонического представления $j(g) = I + i(g)$ ★-моноида $\mathcal{M}$ простых функций $g\colon X \to \mathcal{B}$, полное относительно семейства полунорм (1.7), является гильбертовым. Это вытекает из неравенства

$$\| k \|^f = \| j(f)^* k \| < \| k \| + \| i(f)^* k \| \leqslant (1 + \| f \|) \| k \|,$$

где $\| f \| = \max\limits_i \| b_i \|_{\Delta(i)} < \infty$ согласно (3.6) для любой простой интегрируемой функции $f(x) = b_i$, $x \in \Delta(i)$, определяемой конечным разбиением $\Delta = \sum \Delta(i)$ ее носителя $\Delta = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Вначале докажем простые импликации (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), а затем построим представление (3.9) в (iii) по условиям, сформулированным в (i).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\mathbf{S}(x)$ — треугольное преобразование вида (1.10), описываемое существенно-измеримой функцией $U(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_x)$ с унитарными значениями, функцией $e_0\colon x \in X \mapsto e_0(x) \in \mathcal{K}_x^*$, определяемой значениями $e_0^*(x) \in \mathcal{K}_x$ векторной функции e_0^*, $\int\limits_\Delta \| e_0^*(x) \|_x^2\, dx < \infty$, $\forall \Delta$: $\mu_\Delta = \int\limits_\Delta dx < \infty$, и скалярной локально-интегрируемой функцией e_+: $e_+(x) + e_+^*(x) = -\| e_0^*(x) \|_x^2$. Тогда $\overset{\circ}{g_0}(x) = U^*(x)\, i(x, g)\, U(x)$,

$$g_+^-(x) = e_0(x)\, U(x)\, k(x, g) + e_0(x)\, U(x)\, i(x, g)\, U^*(x)\, e_0^*(x) + k^*(x, g)\, U^*(x)\, e_0^*(x),$$

и форма (3.9) принимает вид (3.4), (3.5), где $m^*(x) = e_0(x)\, U(x)$, $m(x) = U^*(x)\, e_0^*(x)$ — локально квадратично-интегрируемая функция: $\int\limits_\Delta \| m(x) \|_x^2\, dx < \infty$, и

$$\langle B, \overset{\circ}{m_0}(x) \rangle = \langle U^*(x)\, BU(x), M(x) \rangle + \mu(x)\, m^*(x)\, Bm(x)$$

— положительная локально-интегрируемая функция: $\int\limits_\Delta \langle B_x, \overset{\circ}{m_0}(x) \rangle dx < \infty$, удовлетворяющая неравенству (3.8) в силу положительности $\langle B^*B, M(x) \rangle \geqslant 0$, $\mu(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Если μ есть интеграл (3.4) линейной формы (3.5) и выполняется условие (3.8), то $\mu(g^\star g) \geqslant 0$, $\forall g \in \mathcal{M}$, поскольку

$$\begin{aligned} m(x, g^\star g) &= \langle i(x, g^\star g), \overset{\circ}{m_0}(x) \rangle + m^*(x)\, k(x, g^\star g) + \\ &+ k^*(x, g^\star g)\, m(x) + \mu(x)\, l(x, g^\star g) = \langle i(x, g)^*\, i(x, g), \overset{\circ}{m_0}(x) \rangle + \\ &+ m^*(x)\, i(x, g)^*\, k(x, g) + k(x, g)^*\, i(x, g)\, m(x) + \mu(x)\, k(x, g)^*\, k(x, g) = \\ &= \langle i(x, g)^*\, i(x, g), \overset{\circ}{m_0}(x) \rangle - \frac{1}{\mu(x)} \| i(x, g)\, m(x) \|^2 + \mu(x) \| k(x, g) + \\ &+ i(x, g)\, m(x)/\mu(x) \|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Благодаря линейности μ это эквивалентно положительной определенности

$$\sum_{a, c} \varkappa_a^* \mu_\Delta(a^\star c)\, \varkappa_c = \mu_\Delta \Big(\sum_{a, c} \varkappa_a^* a^\star c \varkappa_c \Big) = \mu_\Delta(b^\star b) \geqslant 0$$

формы $\mu_\Delta(b) = \mu(b_\Delta)$. Отсюда вытекает, что $\varphi_\mu(g) = e^{\mu(g)}$ есть псевдо-пуассоновское состояние, описываемое абсолютнонепрерывной комплексной мерой $\mu_\Delta(b) = \int_\Delta m_x(b)\,dx$ с плотностью $m_x(b) = m(x, b_\Delta)$. Оно является непрерывным относительно индуктивной сходимости по полунормам $\|g\|_p^\Delta$, $p = 1, 2, \infty$, в силу локальной ограниченности функции μ, локальной L^2-интегрируемости вектор-функции m и локальной L^1-интегрируемости $\overset{\circ}{m}_0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Если функция $\mu_\Delta(b) = \ln \psi_\Delta(b)$ для псевдопуассоновского состояния $\psi_\Delta(b) = \psi(b_\Delta)$ на $\mathscr{B}$ является абсолютно непрерывной по $\Delta \in \mathcal{A}$ для каждого $b \in \mathscr{B}$, то она имеет вид (3.4), где плотность m_x: $\mathscr{B} \to \mathbb{C}$ является почти всюду линейным положительным функционалом. Поскольку ядро $\{g \in \mathcal{M} \mid \|g\|_p = 0,\ p = 1, 2, \infty\}$ индуктивной сходимости в $\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}_\Delta$ совпадает с ядром $\mathcal{J}$ канонического представления $\mathbf{i}(g) = \mathbf{j}(g) = \mathbf{I}$ в $\mathcal{K}$, равным согласно его конструкции простым функциям g: $x \mapsto g(x) \in \mathcal{J}_x$, где

$$\mathcal{J}_x = \{b \in \mathscr{B} \mid l_x(b) = 0,\ l_x(ab) = 0,\ l_x(bc) = 0,\ l_x(abc) = 0,\ \forall a, b, c \in \mathscr{B}\},$$

то $\bigstar$-идеал $\mathcal{J}^\mu$ функций $g \in \mathcal{M}$ со значениями $g(x)$ в (3.6), соответствующий непрерывной в смысле $g_n \to 0 \Rightarrow \mu(g_n) \to 0$ форме (3.4), обязательно содержит $\mathcal{J}$. Это означает, что линейный функционал $m_x(b)$, равный почти для каждого x нулю на $\mathcal{J}_x$, в силу этой непрерывности можно представить в виде (3.5) линейного эрмитового функционала $m_x(b) = m(x, b_\Delta)$, $x \in \Delta$, на фактор-алгебре $\mathscr{B}/\mathcal{J}_x$, изоморфной $\bigstar$-подалгебре $\boldsymbol{i}_x(\mathscr{B})$ четверок (3.2) с таблицей умножения (3.3). При этом в силу теоремы Хана — Банаха и двойственности пространств $L^p(\Delta)$ и $L^q(\Delta)$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ можно считать, что μ есть локально-ограниченная, m — локально L^2-интегрируемая и $\overset{\circ}{m}_0$ — локально L^1-интегрируемая функции на X.

Определим для каждого $x \in X$ треугольное псевдоунитарное преобразование

$$\mathbf{S}(x) \text{ в } \mathcal{K}_x = \mathbb{C} \oplus \mathcal{K}_x \oplus \mathbb{C} \text{ вида } (1.10),$$

где $U = -I_x$, $e_0^*(x) = m(x)$ и $e_+^*(x) = -\|m(x)\|_x^2/2$. Обозначая $g_\nu^\mu(x) = (\mathbf{S}^\flat \mathbf{i}(x, g)\,\mathbf{S}(x))_\nu^\mu$, где $\mathbf{i}(x)$ есть треугольно-матричное представление (3.3) четверки (3.2) для $b = g(x)$, получим

$$m(x, g) = \langle \overset{\circ}{g}_0(x), \overset{\circ}{m}_0(x)\rangle - m^*(x)\,\overset{\circ}{g}_0(x)\,m(x)/\mu(x) + \mu(x)\,g_+^-(x),$$

где учтено, что $\overset{\circ}{g}_0(x) = i_x(g(x))$, и

$$\mu(x)\,g_+^-(x) = \mu(x)\,l_x(g(x)) + k_x^*(g(x))\,m(x) + \\ + m^*(x)\,k_x(g(x)) + m^*(x)\,i_x(g(x))\,m(x)/\mu(x).$$

Условие положительности $m(x, g^\bigstar g) \geqslant 0$ в этом представлении принимает вид

$$\langle \overset{\circ}{g}_0(x)^* \overset{\circ}{g}_0(x), M(x)\rangle + \mu(x)\,\overset{\circ}{g}_+(x)^* \overset{\circ}{g}_+(x) \geqslant 0,\ \forall g \in \mathcal{M},$$

где $\langle B, M(x)\rangle = \langle B, \overset{\circ}{m}_0(x)\rangle - m^*(x)\,Bm(x)/\mu(x)$, $B \in \mathscr{B}_x$ и $\overset{\circ}{g}_+(x) = k_x(g(x)) + i_x(g(x))\,m(x)$. Полученное неравенство доказывает положительность $M(x)$ при $\overset{\circ}{g}_+(x)$ и $\mu(x) \geqslant 0$ при $\overset{\circ}{g}_0(x) = 0$. Это доказывает существование локально-ограниченных измеримых функций $\mu \geqslant 0$ и положительных локально-интегрируемых функций M со значениями $M(x) \in \mathscr{B}_x^*$, определяющих функцию $\mu(g)$ в виде (3.9). Доказательство закончено.

Замечание 3. Рассмотрим аддитивную подгруппу $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{C} \times \boldsymbol{H} \times \mathscr{B}(\mathbf{K})$ троек $b = (\beta, \eta, B)$ с инволюцией $b^\star = (\beta^*, \eta^\#, B^\dagger)$, где $\beta \mapsto \beta^* \in \mathbb{C}$ — комплексное сопряжение, $\eta \mapsto \eta^\# \in \boldsymbol{H}$ — инволюция $\eta^{\#\#} = \eta$ в $\mathbb{C}$ — линейном подпространстве $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{K}$, снабженном эрмитовой формой $(\xi \mid \zeta) = \xi^\# \cdot \zeta = (\xi \mid \zeta)^*$ из псевдоевклидова пространства $\boldsymbol{K}$, и $B \mapsto B^\dagger \in \mathscr{B}(\boldsymbol{K})$ — эрмитово сопряжение $(B^\dagger\xi \mid \zeta) = (\xi \mid B\zeta)$, $\forall \xi, \zeta \in \boldsymbol{K}$ в $\dagger$-подалгебре $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{B}(\boldsymbol{K})$ операторов $B : \eta \mapsto B\eta \in \boldsymbol{K}$, оставляющих инвариантным $\boldsymbol{H} : B\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{H}$, $\forall B \in \mathscr{L}$.

Определим в $\mathscr{B}$ структуру $\bigstar$-алгебры, полагая

$$\lambda b = (\lambda\beta, \lambda\eta, \lambda B), \quad a^\star c = (\xi^\# \cdot \zeta, \ \xi^\# C + A^\dagger \zeta, \ A^\dagger C)$$

для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $b \in \mathscr{B}$, $a = (\alpha, \xi, A)$, $c = (\gamma, \zeta, C)$, где обозначено $\xi^\# C = (C^\dagger \xi)^\#$. Нетрудно проверить, что эта дистрибутивная алгебра является ассоциативной: $(ab)\, c = a\, (bc)$, только в случае

$$(A\eta) \cdot \zeta = \xi \cdot (\eta C), \ (A\eta)\, C = A\, (\eta C), \ \forall A, \ C \in \mathscr{L}, \ \xi, \eta, \zeta \in \mathbf{H},$$

что возможно лишь при условии $(A\eta) \cdot \zeta = 0 = \xi \cdot (\eta C)$, приводящем к $(A\eta)\, C = A\, (\eta C)$, если $\xi \cdot \zeta = (\xi^\# \mid \zeta)$ есть невырожденная билинейная форма на H в смысле $\{\xi \cdot \eta = 0 = \eta \cdot \zeta \mid \forall \xi, \zeta \in \boldsymbol{H}\} \Rightarrow \eta = 0$. Простой анализ положительности

$l\,(b^\star b) = \lambda\,(\eta \mid \eta) + (B\vartheta \mid \eta) + (\eta \mid B\vartheta) + \langle B^\dagger B, \ \Lambda \rangle \geqslant 0$ линейной $\bigstar$-формы $l\,(b) = \lambda\beta + \vartheta_- \cdot \eta + \eta \cdot \vartheta_+ + \langle B, \ \Lambda \rangle$, где $\lambda = \lambda^*$, $\vartheta_+ = \vartheta = \vartheta_-^\#$, $\Lambda = \Lambda^\dagger$, приводит к условиям $\langle B^\dagger B, \ \Lambda \rangle \geqslant 0$, $\forall B \in \mathscr{L}$ при $\lambda = 0$ и

$$\lambda\,(\eta \mid \eta) \geqslant 0, \quad \langle B^\dagger B, \Lambda \rangle \geqslant \frac{1}{\lambda}\,(B\vartheta \mid B\vartheta), \quad \forall \eta \in \mathbf{H}, \ B \in \mathscr{L}$$

при $\lambda \neq 0$. Последнее возможно лишь при условии дефинитности формы $(\eta \mid \eta) = \eta^\# \cdot \eta : \lambda > 0$, при $(\eta \mid \eta) \geqslant 0$, $\forall \eta \in \boldsymbol{H}$ и $\lambda < 0$ при $(\eta \mid \eta) \leqslant 0$, $\forall \eta \in \boldsymbol{H}$, что является необходимым условием существования псевдопуассоновского состояния на $\mathscr{B} = \mathbb{C} \times \boldsymbol{H} \times \mathscr{L}$.

Считая без ограничения общности, что $\eta^\# \eta \geqslant 0$, $\forall\, \eta$ (в противном случае следует переобозначить $b \mapsto (-\beta, \eta, B)$ и $\eta^\# \eta \mapsto -\eta^\# \eta$), рассмотрим следующие два случая, в которых H является гильбертовым пространством относительно нормы $\| \eta \| = \langle \eta^\#, \eta^{1/2} \rangle$, где $\langle \xi, \zeta \rangle = \frac{1}{2}(\xi \cdot \zeta + \zeta \cdot \xi)$.

Пример 1. **Гауссовское состояние.** Пусть $\mathscr{L} = \{0\}$ и $\lambda = 1$, т. е. $b = (\beta, \eta)$ и $l\,(b) = \langle \eta, \theta \rangle + \beta$, где $\langle \eta, \theta \rangle = 2\,\mathrm{Re}\,(\eta \mid \theta)$, $\forall \eta = \eta^\#$. Алгебра $\mathscr{B} = \mathbb{C} \times \mathbf{H}$ при этом нильпотентна: $ac = (\xi, \ \zeta, \ 0)$, $abc = (0, \ 0)$, $\forall a$, b, $c \in \mathscr{B}$ и является коммутативной: $[a, \ c] = ac - ca = 0$, если инволюция $\#$ изометрична на $\boldsymbol{H}$ в $\boldsymbol{K} \supseteq \boldsymbol{H}$:

$$(\xi^\# \mid \zeta) = (\zeta^\# \mid \xi), \ \forall \xi, \ \zeta \in \boldsymbol{H}.$$

Безгранично-делимый функционал $\varphi_\Delta\,(b) = \exp\{(\beta + \langle \eta, \ \theta \rangle)\, \mu_\Delta\}$, отвечающий условно-положительной $\bigstar$-форме $\lambda_\Delta\,(b) = (\beta + \langle \eta, \ \theta \rangle)\, \mu_\Delta$ относительно эрмитовой операции

$$(\alpha, \ \xi) \bigstar (\gamma, \ \zeta) = (\alpha^* + (\xi \mid \zeta) + \gamma, \ \xi^\# + \zeta), \ (0, \ 0) = u,$$

определяет производящий функционал $\varphi_\Delta\,(0, \ \eta) = 1$ факториальных моментов гауссовского хаотического состояния над $\mathbf{H}$ с математическим ожиданием $\langle b_\Delta \rangle = \langle \eta, \ \theta \rangle\, \mu_\Delta$ для $b = (0, \ \eta)$ и конечной ковариацией $\langle b_\Delta^\star b_\Delta \rangle =$

$= (\eta \mid \eta)\,\mu_\Delta \in \mathbb{R}_+$ для каждого $\Delta \in \mathcal{A}$: $\mu_\Delta = \int\limits_\Delta dx < \infty$. Эта ковариация является симметрической лишь в коммутативном (классическом) случае, в противном (квантовом) случае она удовлетворяет соотношению неопределенности

$\langle a_\Delta^2\rangle \langle c_\Delta^2\rangle \geqslant s(\xi, \zeta)^2\mu_\Delta^2$, $\forall a = (\alpha, \xi)$, $c = (\gamma, \zeta)$, $\xi, \zeta \in \operatorname{Re} \boldsymbol{H}$ для коммутационного соотношения Гейзенберга $[a_\Delta, c_\Delta] = (is(\zeta, \xi)\,\mu_\Delta, 0)$, соответствующему симплектической форме $s(\xi, \zeta) = 2\operatorname{Im}(\xi \mid \zeta)$ на $\operatorname{Re}\boldsymbol{H} = \{\eta \in \mathrm{H} \mid \eta^\# = \eta\}$. Каноническое представление (3.3), определяющее индефинитное представление $\mathbf{j}(g) = \mathbf{I} + \mathbf{i}(g)$ $\bigstar$-моноида $\mathcal{M}$ простых функций $g: X \to \mathbb{C} \times \boldsymbol{H}$ и соответствующее представление $\pi(g) = \varepsilon[\mathbf{j}^\otimes(g)]$ в пространстве Фока $\mathcal{H}$, описывается функциями $i_x(b) = 0$, $k_x(b^\bigstar) = \eta^\#$, $k_x(b)^\bigstar = \eta^\dagger$, $l_x(b) = \beta + \langle \eta, \theta\rangle$.

Пример 2. **Пуассоновское состояние.** Пусть $\boldsymbol{H} = \{0\}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{L}$ есть $\dagger$-алгебра операторов в $\boldsymbol{K}$, ограниченных единицей $I \in \mathcal{B}$ в смысле

$$\forall C = B^\dagger B\ \exists c \in \mathbb{R}_+: \langle A^\dagger C A, \Lambda\rangle \leqslant c\,\langle A^\dagger A, \Lambda\rangle, \qquad \forall A \in \mathcal{B},$$

где Λ — линейная положительная форма, определяющая $l(b) = \langle B, \Lambda\rangle$. Имея в виду конструкцию ГНС, эту форму без ограничения общности можно считать векторной: $\langle B, \Lambda\rangle = (e \mid Be)$, представленной в гильбертовом пространстве K элементом $e \in K$, $\|e\|^2 = \langle I, \Lambda\rangle$. В коммутативном случае $\mathcal{B}$ можно отождествить с подалгеброй существенно ограниченных функций $b: \omega \mapsto b(\omega) \in \mathbb{C}$ на измеримом пространстве Ω с конечной положительной мерой $d\lambda$ массы $\lambda = \langle I, \Lambda\rangle$, полагая $(Bk)(\omega) = b(\omega)\,k(\omega)$ на $K = L_\lambda^2(\Omega)$, и $e(\omega) = 1$, $\forall \omega \in \Omega$, так что $l(b) = \int b(\omega)\,d\lambda$. Безгранично-делимый функционал $\varphi_\Delta(b) = e^{\langle B, \Lambda\rangle \mu_\Delta}$, отвечающий условно-положительной $\bigstar$-форме $\lambda_\Delta(b) = \langle B, \Lambda\rangle\,\mu_\Delta$ относительно эрмитовой операции $A \bigstar \bigstar C = A^\bigstar + A^\bigstar C + C$ с нейтральным элементом $U = 0$, определяет производящий функционал факториальных моментов пуассоновского хаотического состояния над $\mathcal{L}$ с математическим ожиданием $\langle b_\Delta\rangle = \langle B, \Lambda\rangle\,\mu_\Delta$ и конечной ковариацией $\langle b_\Delta^\bigstar b_\Delta\rangle = \langle B^\dagger B, \Lambda\rangle\,\mu_\Delta \in \mathbb{R}_+$ для каждого $\Delta \in \mathcal{A}$: $\mu_\Delta = \int\limits_\Delta dx < \infty$. Эта ковариация является симметрической не только в коммутативном (классическом) случае $[A, C] = AC - CA = 0$, но и в случае центрального $\Lambda \in \mathcal{L}^*$. Центральная форма $\langle B, \Lambda\rangle$, описываемая условием $\langle [A, C], \Lambda\rangle = 0$, $\forall A, C \in \mathcal{L}$, определяет σ-конечный след на $\dagger$-алгебре $\mathcal{M}$ простых функций $G: x \in X \mapsto G(x) \in \mathcal{L}$ с интегральной формой $\langle g\rangle = \int \langle G(x), \Lambda\rangle\,dx$, или $\langle g\rangle = \iint g(x, \omega)\,dx\,d\lambda$ в случае $\mathcal{B} = L_\lambda^\infty(\Omega)$. В противном случае форма $\langle B, \Lambda\rangle$ приводит также к соотношению неопределенности

$$\langle a_\Delta^2\rangle \langle c_\Delta^2\rangle \geqslant \langle \tfrac{1}{i}[A, C], \Lambda\rangle^2\,\mu_\Delta^2, \quad \forall A = A^\dagger,\ C = C^\dagger.$$

Каноническое представление (3.3), определяющее индефинитное представление $\mathbf{j}(g) = \mathbf{I} + \mathbf{i}(g)$ $\bigstar$-моноида $\mathcal{M}$ и соответствующее представление $\pi(g) = \varepsilon[\mathbf{j}^\otimes(g)]$ в пространстве Фока $\mathcal{H}$, описывается функциями

$$i_x(b) = B,\quad k_x(b^\bigstar) = B^\dagger e,\quad k_x^*(b) = e^\dagger B,\quad l_x(b) = e^\dagger B e,$$

где $e^\dagger B e = (e \mid Be) = \langle B, \Lambda\rangle$.

ГЛАВА 2

НЕКОММУТАТИВНЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И КВАНТОВАЯ НЕМАРКОВСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

Введение

Некоммутативное обобщение стохастического исчисления Ито, развитое в [31—36], дало адекватный математический инструмент изучения поведения открытых квантовых динамических систем, сингулярно взаимодействующих с бозонным квантово-стохастическим полем. Квантовое стохастическое исчисление позволило также решить старую проблему описания таких систем с непрерывным наблюдением и построить квантовую теорию фильтрации, объясняющую непрерывный спонтанный коллапс под действием такого наблюдения [37—39]. Это дало примеры стохастических неунитарных, нестационарных и даже неадаптивных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве, решение которых требует определить надлежащим образом хронологически упорядоченные квантово-стохастические полугруппы и экспоненты операторов путем распространения понятия многократного стохастического интеграла на некоммутирующие объекты.

Здесь мы наметим решение этой важной проблемы путем развития нового квантово-стохастического исчисления в естественной шкале фоковских пространств, основанного на введенном нами явном определении [40] неадаптивного квантово-стохастического интеграла как некоммутативного обобщения интеграла Скорохода [41], представленного в пространстве Фока. Используя индефинитную $\flat$-алгебраическую структуру ядерного исчисления, найденную в первой главе как общее свойство естественного псевдоевклидова представления, ассоциированного с безгранично-делимыми состояниями, мы установим фундаментальную формулу для стохастического дифференциала функции нескольких некоммутирующих квантовых процессов, дающую некоммутативное и неадаптивное обобщение формулы Ито как основной формулы классического стохастического исчисления. В адаптивном случае эта формула совпадает с известной формулой Хадсона и Партасарати [14] для произведения пары некоммутирующих квантовых процессов. В коммутативном случае она дает неадаптивное обобщение формулы Ито для классических случайных процессов, полученное недавно в слабой форме классическими стохастическими методами Нуалартом [42] для случая винеровских интегралов. Отметим также, что классическое стохастическое исчисление и исчисление операторов в фоковских шкалах разрабатывались группой Хида, Куо, Страйт и Потхоф [43, 44], а также Березанским и Кондратьевым [45].

Используя формулируемое понятие нормального многократного квантово-стохастического интеграла, мы строим явные решения квантово-стохастических эволюционных уравнений как в адаптивном, так и в неадаптивном случае операторно-значных коэффициентов и даем простое алгебраическое доказательство унитарности этой эволюции при условии псевдоунитарности генераторов этих уравнений. В адаптивном стационарном случае квантово-стохастическая эволюция была построена Хадсоном и Партасарати путем аппроксимации итовскими суммами квантово-стохастических генераторов, однако доказать унитарность этим методом даже в этом простом случае оказалось трудной проблемой. В рамках этого же подхода Холево [46] построил решение адаптивного квантово-стохастического дифференциального уравнения и для нестационарных генераторов путем определения хронологической экспоненты как квантово-стохастического мультипликативного интеграла.

Заметим, что наш подход является близким по духу к ядерному исчислению Маассена — Линдсея — Мейера [32, 34], однако он отличается от него тем, что все основные объекты строятся не в терминах ядер, а в терминах операторов, представленных в фоковском пространстве. Кроме того, мы используем значительно более общее понятие многократного стохастического, вообще говоря, неадаптивного интеграла, который сводится к понятию ядерного представления оператора лишь в случае скалярной (неслучайной) подынтегральной операторной функции. Возможность определения неадаптивного однократного интеграла в терминах ядерного исчисления была указана Линдсеем [47], однако понятие многократного квантово-стохастического интеграла не обсуждалось в литературе даже в адаптивном случае.

2.1. Неадаптивные стохастические интегралы и дифференциалы в шкалах

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — существенно упорядоченное пространство, т. е. измеримое множество X с σ-конечной мерой $\mu : \Delta \in \mathcal{A} \mapsto \mu_\Delta \geqslant 0$ и отношением порядка $x \leqslant x'$, обладающим свойством, что всякая n-ка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ является с точностью до перестановки цепью $\chi = \{x_1 < \ldots < x_n\}$ по модулю произведения $\prod_{i=1}^{n} dx_i$ мер $dx := \mu_{dx}$. Иначе говоря, мы предполагаем, что измеримый порядок является почти линейным, т. е. для любого n мера-произведение подмножества n-ок $\mathrm{x} \in X^n$ с не полностью упорядоченными по возрастанию компонентами равна нулю, откуда, в частности, следует безатомность меры μ на X. Можно считать, что существенный порядок на X индуцирован измеримым отображением $t : X \to \mathbb{R}_+$, относительно которого мера μ является абсолютно-непрерывной в смысле ее дезынтегрируемости:

$$\int_\Delta f(t(x))\, dx = \int_0^\infty f(t)\, \mu_\Delta(t)\, dt,$$

для любого интегрируемого подмножества $\Delta \subseteq X$ и существенно-ограниченной функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, где $\mu_\Delta(t)$ есть положительная мера на X для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ и $x_1 < \ldots < x_n$ означает, что $t(x_1) < \ldots < t(x_n)$. Во всяком случае, мы будем считать всегда заданным такое отображение t, что выполняется указанное выше условие и $t(x) \leqslant t(x')$ при $x \leqslant x'$, интерпретируя $t(x)$ как время в точке $x \in X$. Например, $t(x) = t$ для $x = (\mathrm{x}, t)$, если $X = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ есть $(d+1)$-мерное пространство-время с причинным порядком [48] и $dx = d\mathrm{x}dt$, где $d\mathrm{x}$ есть стандартный объем на d-мерном пространстве $\mathbb{R}^d \ni \mathrm{x}$. Мы будем отождествлять конечные цепи χ с индексированными по возрастанию n-ками $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_1 < \ldots < x_n$, обозначая $\mathscr{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ множество всех конечных цепей как объединение множеств $\Gamma_n = \{\mathrm{x} \in X^n \mid x_1 < \ldots < x_n\}$ с одноэлементным $\Gamma_0 = \{\varnothing\}$, содержащим пустую цепь как подмножество $\varnothing \subset X$, и $d\chi = \prod_{x \in \chi} dx$ — «элемент» меры на $\mathscr{X}$, индуцированной прямой суммой $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n_{\Delta_n}$, $\Delta_n \in \mathcal{A}^{\otimes n}$, мер-произведений $d\mathrm{x} = \prod_{i=1}^{n} dx_i$ на X^n с единичной массой $d\chi = 1$ в точке $\chi = \varnothing$.

Пусть $\{\mathcal{K}_x \mid x \in X\}$ — семейство гильбертовых пространств $\mathcal{K}_x$; $\mathcal{P}_0$ — аддитивная полугруппа положительных существенно-измеримых локально-ограниченных функций $p : X \to \mathbb{R}_+$ с нулем $0 \in \mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1 = \{1 + p_0 \mid p_0 \in \mathcal{P}_0\}$. Например, в случае $X = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ в качестве $\mathcal{P}_1$ можно иметь в виду множество полиномов $p(x) = 1 + \sum_{k=0}^{m} c_k \mid x \mid^k$ относительно модуля $\mid x \mid = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$ вектора $x \in \mathbb{R}^d$ с положительными коэффициентами $c_k \geqslant 0$. Обозначим $\mathcal{K}(p)$ гильбертово пространство существенно-измеримых вектор-функций $k : x \mapsto k(x) \in \mathcal{K}_x$, квадратично-интегрируемых с весом $p \in \mathcal{P}_1$:

$$\| k \| (p) = \left(\int \| k(x) \|_x^2 \, p(x) \, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Поскольку $p \geqslant 1$, каждое пространство $\mathcal{K}(p)$ вкладывается в гильбертово пространство $\mathcal{K} = \mathcal{K}(1)$, причем их пересечение $\bigcap \mathcal{K}(p) \subseteq \mathcal{K}$ отождествляется с проективным пределом $\mathcal{K}^+ = \lim\limits_{p \to \infty} \mathcal{K}(p)$. Это следует из возрастания $p \leqslant q \Rightarrow \| k \| (p) \leqslant \| k \| (q)$, в силу которого $\mathcal{K}(q) \subseteq \mathcal{K}(p)$, а также направленности множества $\mathcal{P}_1$ в смысле существования для любых $p = 1 + r$ и $q = 1 + s$, $r, s \in \mathcal{P}_0$ функции в $\mathcal{P}_1$, мажорирующей p и q, в качестве которой можно взять $p + q - 1 = 1 + r + s \in \mathcal{P}_1$. В случае полиномов $p \in \mathcal{P}_1$ на $X = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ убывающее семейство $\{\mathcal{K}(p)\}$ идентично при $\mathcal{K}_x = \mathbb{C}$ целочисленной шкале Соболева векторных полей $h : \mathbb{R}^d \to L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+)$ со значениями $h(x)(t) = k(x, t)$ в гильбертовых пространствах $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+)$ квадратично-интегрируемых функций на $\mathbb{R}_+$; заменив при этом $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{Z}^d$, можно получить пространство Шварца в виде векторных полей $h \in \mathcal{K}^+$, если ограничиться лишь положительной частью целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$.

Двойственное к $\mathcal{K}^+$ пространство $\mathcal{K}_-$ непрерывных функционалов

$$(f \mid k) = \int (f(x) \mid k(x)) \, dx, \quad k \in \mathcal{K}^+,$$

определяется как индуктивный предел $\mathcal{K}_- = \lim\limits_{p \to 0} \mathcal{K}(p)$ в шкале $\{\mathcal{K}(p) \mid p \in \mathcal{P}\}_-$, где $\mathcal{P}_-$ — множество функций $p : X \to (0, 1]$, для которых $1/p \in \mathcal{P}_1$. Пространство $\mathcal{K}_-$ таких обобщенных вектор-функций $k : x \in X \mapsto k(x) \in \mathcal{K}_x$ можно рассматривать как объединение $\bigcup_{p \in \mathcal{P}_-} \mathcal{K}(p)$ индуктивного семейства гильбертовых пространств $\mathcal{K}(p)$, $p \in \mathcal{P}_-$, с нормами $\| k \| (p)$, содержащего в качестве минимального пространство $\mathcal{K} = \mathcal{K}(1)$. В расширенной шкале $\{\mathcal{K}(p) \mid p \in \mathcal{P}\}$, где $\mathcal{P} = \mathcal{P}_- \bigcup \mathcal{P}_1$, получим гельфандовскую цепочку $\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}(p^+) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(p_-) \subseteq \mathcal{K}_-$, где $p^+ \in \mathcal{P}_1$, $p_- \in \mathcal{P}_-$, $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}_-^*$ совпадает с пространством непрерывных относительно индуктивной сходимости функционалов на $\mathcal{K}_-$. Аналогично определяется гельфандовская тройка $(\mathcal{F}^+, \mathcal{F}, \mathcal{F}_-)$ для гильбертовой шкалы $\{\mathcal{F}(p) \mid p \in \mathcal{P}\}$ фоковских пространств $\mathcal{F}(p)$ над $\mathcal{K}(p)$, т. е. пространств квадратично-интегрируемых с весом $p(\chi) = \prod_{x \in \chi} p(x)$ функций $f : \chi \mapsto f(\chi) \in \mathcal{K}^\otimes(\chi)$ со значениями в гильбертовых произведениях $\mathcal{K}^\otimes(\chi) = \bigotimes_{x \in \chi} \mathcal{K}_x$:

$$\| f \| (p) = \left(\int \| f(\chi) \|^2 \, p(\chi) \, d\chi \right)^{1/2} < \infty.$$

Здесь интеграл по всем цепям $\chi \in \mathscr{X}$, определяющий спаривание

$$(f \mid h) = \int (f(\chi) \mid h(\chi))\, d\chi, \quad h \in \mathscr{F}^+,$$

на $\mathscr{F}_-$, подробней можно записывать в виде

$$\int \| f(\chi) \|^2 p(\chi)\, d\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{0 \leq t_1 <} \cdots \int\limits_{< t_n < \infty} \| f(x_1, \ldots, x_n) \|^2 \prod_{i=1}^{n} p(x_i)\, dx_i,$$

где n-кратные интегралы берутся по симплексным областям $\Gamma_n = \{\mathbf{x} \in X^n \mid t(x_1) < \ldots < t(x_n)\}$. Аналогично тому, как это делается в случае $X = \mathbb{R}_+$, $t(x) = x$, нетрудно установить изоморфизм пространства $\mathscr{F}(p)$ с симметричным или антисимметричным фоковскими пространствами над $\mathscr{K}(p)$, определяемый изометрией

$$\| f \| (p) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \cdots \int \| f(x_1, \ldots, x_n) \|^2 \prod_{i=1}^{n} p(x_i)\, dx_i \Big)^{1/2},$$

где функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ соответствующим образом продолжены на все X^n.

Пусть $\boldsymbol{D} = (D^{\mu}_{\nu})^{\mu=-,0}_{\nu=0,+}$ — четверка функций $D^{\mu}_{\nu}(x)$ на X со значениями в непрерывных операторах

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{aligned} &D^-_+(x) : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{F}_-, \quad D^{\circ}_0(x) : \mathscr{F}^+ \otimes \mathscr{K}_x \to \mathscr{F}_- \otimes \mathscr{K}_x, \\ &D^{\circ}_+(x) : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{F}_- \otimes \mathscr{K}_x, \quad D^-_0(x) : \mathscr{F}^+ \otimes \mathscr{K}_x \to \mathscr{F}_-, \end{aligned}$$

так что существует $p \in \mathscr{P}_1$ такое, что эти операторы ограничены из $\mathscr{F}(p) \supseteq \mathscr{F}^+$ в $\mathscr{F}(p)^* \subseteq \mathscr{F}_-$, где $\mathscr{F}(p)^* = \mathscr{F}(1/p)$. Предположим также, что $D^-_+(x)$ локально-интегрируема в смысле

$$\exists p \in \mathscr{P}_1 : \| D^-_+ \|^{(1)}_{p,t} = \int\limits_{X^t} \| D^-_+(x) \|_p\, dx < \infty, \quad \forall t < \infty,$$

где $X^t = \{x \in X \mid t(x) < t\}$, $\| D \|_p = \sup \{\| Dh \| (p^{-1}) / \| h \| (p)\}$ — норма непрерывного оператора $D : \mathscr{F}(p) \to \mathscr{F}(p)^*$, определяющего ограниченную эрмитову форму $(f \mid Dh)$ на $\mathscr{F}(p)$; $D^{\circ}_0(x)$ локально-ограничена относительно некоторой строгоположительной функции s: $1/s \in \mathscr{P}_0$ в смысле

$$\exists p \in \mathscr{P}_1 : \| D^{\circ}_0 \|^{(\infty)}_{p,t}(s) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X^t} \{ s(x) \| D^{\circ}_0(x) \|_p \} < \infty, \quad \forall t < \infty,$$

где $\| D \|_p$ — норма оператора $\mathscr{F}(p) \otimes \mathscr{K}_x \to \mathscr{F}(p)^* \otimes \mathscr{K}_x$ и $D^{\circ}_+(x)$, $D^-_0(x)$ — локально квадратично-интегрируемы со строго положительным весом $r(x) : 1/r \in \mathscr{P}_0$ в смысле

$$\exists p \in \mathscr{P}_1 : \| D^{\circ}_+ \|^{(2)}_{p,t}(r) < \infty, \quad \| D^-_0 \|^{(2)}_{p,t}(r) < \infty, \quad \forall t < \infty,$$

где $\| D \|^{(2)}_{p,t}(r) = \Big(\int\limits_{X^t} \| D(x) \|^2_p\, r(x)\, dx \Big)^{1/2}$, $\| D \|_p$ — нормы соответственно операторов

$$D^{\circ}_+(x) : \mathscr{F}(p) \to \mathscr{F}(p)^* \otimes \mathscr{K}_x, \quad D^-_0(x) : \mathscr{F}(p) \otimes \mathscr{K}_x \to \mathscr{F}(p)^*.$$

Тогда для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ можно определить обобщенный квантовостохастический интеграл [21]

$$\mathrm{i}_0^t(\mathrm{D}) = \int_{X^t} \Lambda(\mathrm{D}, dx), \quad \Lambda(\mathrm{D}, \Delta) = \sum_{\mu,\nu} \Lambda_\mu^\nu(D_\nu^\mu, \Delta) \tag{1.2}$$

как сумму четырех непрерывных операторов $\Lambda_\mu^\nu(D_\nu^\mu, \Delta) : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}_-$ при $\Delta = X^t$, являющихся оператор-мерами на $\mathcal{A} \ni \Delta$ со значениями

$$[\Lambda_-^+(D_+^-, \Delta) h](\chi) = \int_\Delta [D_+^-(x) h](\chi)\, dx \text{ (сохранение)}, \tag{1.3а}$$

$$[\Lambda_0^+(D_+^\circ, \Delta) h](\chi) = \sum_{x \in \Delta \cap \chi} [D_+^\circ(x) h](\chi \setminus x) \text{ (рождение)}, \tag{1.3б}$$

$$[\Lambda_-^\circ(D_0^-, \Delta) h](\chi) = \int_\Delta [D_0^-(x) \dot{h}(x)](\chi)\, dx \text{ (уничтожение)}, \tag{1.3с}$$

$$[\Lambda_0^\circ(D_0^\circ, \Delta) h](\chi) = \sum_{x \in \Delta \cap \chi} [D_0^\circ(x) \dot{h}(x)](\chi \setminus x) \text{ (обмен)}. \tag{1.3д}$$

Здесь $h \in \mathcal{F}^+$, $\chi \setminus x = \{x' \in \chi \mid x' \neq x\}$ означает цепь $\chi \in \mathcal{X}$, в которой уничтожена точка $x \in \chi$. $\dot{h}(x) \in \mathcal{K}_x \otimes \mathcal{F}^+$ есть точечная производная, определяемая для $h \in \mathcal{F}^+$ почти всюду (при $x \notin v \in \mathcal{X}$) на $\mathcal{X}$ как функция $\dot{h}(x, v) = h(x \sqcup v) \equiv [a(x) h](v)$, где операция $\chi \sqcup v$ означает объединение $\omega = \chi \cup v$ непересекающихся цепей $\chi \cap v = \varnothing$ с попарно сравнимыми элементами. Оператор $a(\chi) h(\omega) = \dot{h}(\chi, \omega \setminus \chi)$, уничтожающий точки $\chi = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \omega$ в цепи $\omega \in \mathcal{X}$, определяет почти всюду ($\chi \cap v = \varnothing$) на $\mathcal{X}$ n-точечную производную $\dot{h}(\chi, v) = h(\chi \sqcup v)$ как фоковское представление производной Малливена [49] n-го порядка в этих точках. Свойства непрерывности этого оператора, определяющего изометрическое отображение $a : \mathcal{F}\left(\frac{1}{r} + p\right) \to \mathcal{F}\left(\frac{1}{r}\right) \otimes \mathcal{F}(p)$, описывает следующая

Лемма 1. *Операторы* $[a(\chi) h](v) = h(\chi \sqcup v)$ $\chi \in \mathcal{X}$, *определяют проективно-непрерывное отображение* a *шкалы* $\mathcal{F}(p)$, $p \in \mathcal{P}$, *в* $\mathcal{F}\left(\frac{1}{r}\right) \otimes \mathcal{F}(p)$, $r^{-1} \in \mathcal{P}_0 : \| ah \| \left(\frac{1}{r}, p\right) = \| h \| \left(\frac{1}{r} + p\right)$, *формально сопряженное к оператору рождения*

$$[a^* f](\omega) = \sum_{\chi \subseteq \omega} f(\chi, \omega \setminus \chi), \quad f \in \mathcal{F}(r) \otimes \mathcal{F}\left(\frac{1}{p}\right),$$

являющемуся сжимающим отображением в $\mathcal{F}\left(\frac{1}{q}\right)$ *при* $q \geqslant \frac{1}{r} + p$.

Доказательство. Прежде всего установим основную формулу многократного интегрирования

$$\int \sum_{\chi \subseteq \omega} f(\chi, \omega \setminus \chi)\, d\omega = \iint f(\chi, v)\, d\chi\, dv, \quad \forall f \in L^2(\mathcal{X}^2), \tag{1.4}$$

позволяющую определить сопряженный оператор a^*. Пусть $f(\chi, v) = g(\chi) h(v)$ — произведение интегрируемых на $\mathcal{X}$ комплексных функций вида $g(\chi) = \prod_{x \in \chi} g(x)$, $h(v) = \prod_{x \in v} h(x)$ для любых $\chi, v \in \mathcal{X}$. Учитывая биноминальную формулу

$$\sum_{\chi \subseteq \omega} g(\chi) h(\omega \setminus \chi) = \sum_{\chi \sqcup v = \omega} \prod_{x \in \chi} g(x) \prod_{x \in v} h(x) = \prod_{x \in \omega} (g(x) + h(x)),$$

а также $\int f(\chi)\,d\chi = \exp\{\int f(x)\,dx\}$ для $f(\chi) = \prod_{x\in\chi} f(x)$, получим

$$\int \sum_{\chi\subseteq\omega} g(\chi)\,h(\omega\setminus\chi)\,d\omega = \exp\left\{\int (g(x)+h(x))\,dx\right\} = \iint g(\chi)\,h(\upsilon)\,d\chi\,(d\upsilon),$$

что доказывает (1.4) на плотном в $L^1(\mathscr{X}\times\mathscr{X})$ множестве функций-произведений f.

Применяя эту формулу для скалярного произведения $(f(\chi,\upsilon)\mid h(\chi,\upsilon)\in L^1(\mathscr{X}\times\mathscr{X})$, получим

$$\int \sum_{\chi\subseteq\omega} f(\chi,\omega\setminus\chi)\,\Big|\,h(\omega)\,d\omega = \iint (f(\chi,\upsilon)\,\Big|\,h(\chi\sqcup\upsilon)\,d\chi\,d\upsilon,$$

т. е. $(a^*f\mid h) = (f\mid ah)$, где $[ah](\chi,\upsilon) = h(\chi\sqcup\tau) \equiv \dot h(\chi\sqcup\upsilon)$. Выбирая произвольно $f\in\mathscr{F}(r)\otimes\mathscr{F}\left(\frac{1}{p}\right)$, получим, что оператор уничтожения $a(\chi)\,h = [ah](\chi,\ \cdot)$ определяет изометрию $\mathscr{F}\left(\frac{1}{r}+p\right)\to\mathscr{F}\left(\frac{1}{r}\right)\otimes\mathscr{F}(p)$ как сопряженный оператор к $a^*:\mathscr{F}(r)\otimes\mathscr{F}\left(\frac{1}{p}\right)\to\mathscr{F}\left(\frac{1}{q}\right)$, $q=\frac{1}{r}+p$, относительно стандартного спаривания сопряженных пространств $\mathscr{F}(p)$ и $\mathscr{F}\left(\frac{1}{p}\right)$:

$$\iint \|\dot h(\chi,\upsilon)\|^2 r^{-1}(\chi)\,p(\upsilon)\,d\chi\,d\upsilon = \int \sum_{\chi\subseteq\omega} \|h(\omega)\|^2 r^{-1}(\chi)\,p(\omega\setminus\chi)\,d\omega =$$
$$= \int \|h(\omega)\|^2 \sum_{\chi\sqcup\upsilon=\omega} r^{-1}(\chi)\,p(\upsilon)\,d\omega = \int \|h(\omega)\|^2 (r^{-1}+p)(\omega)\,d\omega.$$

Отсюда следует проективная непрерывность a из $\mathscr{F}^+$ в $\mathscr{F}_0^+\times\mathscr{F}^+$, где $\mathscr{F}_0^+ = \bigcap_{p\in\mathscr{P}_0}\mathscr{F}(p)$, и, в частности, одноточечной производной $\dot f(x,\upsilon) = f(x\sqcup\upsilon)$ из $\mathscr{F}^+$ в $\mathscr{K}^+\times\mathscr{F}^+$ как сжимающего отображения $\mathscr{F}\left(\frac{1}{r}+p\right)\to\mathscr{F}\left(\frac{1}{r}\right)\otimes\mathscr{F}(p)$, $\forall r^{-1}\in\mathscr{P}_0$, $p\in\mathscr{P}$. Лемма доказана.

Теперь мы готовы доказать индуктивную непрерывность интеграла (1.2) по $D=(D^\mu_\nu)$ с помощью неравенства

$$\|\iota_0^t(D)\,h)\|\left(\frac{1}{q}\right)\leqslant\|D\|^s_{p,t}(r)\,\|h\|(q),\quad \forall q\geqslant r^{-1}+p+s^{-1},$$

где $\|D\|^s_{p,t}(r) = \|D^-_+\|^{(1)}_{p,t} + \|\overset{\circ}{D}_+\|^{(2)}_{p,t}(r) + \|D^-_0\|^{(2)}_{p,t}(r) + \|\overset{\circ}{D_0}\|^{(\infty)}_{p,t}(s)$, которое мы установим сразу для многократного обобщенного интеграла [50]

$$(1.5)\qquad [\iota_0^t(B)\,h](\chi) = \sum_{\overset{\circ}{\chi_0}\sqcup\overset{\circ}{\chi_+}\subseteq\chi^t}\int_{\mathscr{X}^t}\int_{\mathscr{X}^t}[B(\chi)\,\dot h(\chi_0^-\sqcup\overset{\circ}{\chi_0})](\overset{\circ}{\chi_-})\,d\chi^-_+\,d\chi^-_0.$$

Здесь $\chi^t = \chi\cap X^t$, $\mathscr{X}^t = \{\chi\in\mathscr{X}\mid\chi\subset X^t\}$, сумма берется по разбиениям $\chi = \overset{\circ}{\chi_-}\sqcup\overset{\circ}{\chi_0}\sqcup\overset{\circ}{\chi_+}$, для которых $\overset{\circ}{\chi_0}\in\mathscr{X}^t$, $\overset{\circ}{\chi_+}\in\mathscr{X}^t$, $B\,\chi()$ — оператор-функция от четверки $\chi = (\chi^\mu_\nu)^{\mu=-,0}_{\nu=0,+}$ цепей $\chi^\mu_\nu\in\mathscr{X}$, определяемая почти всюду значениями

$$B\begin{pmatrix}\chi^-_+, \chi^-_0\\ \overset{\circ}{\chi_+}, \overset{\circ}{\chi_0}\end{pmatrix}:\mathscr{F}^+\otimes\mathscr{K}^{\otimes}(\chi^-_0)\otimes\mathscr{K}^{\otimes}(\overset{\circ}{\chi_0})\to\mathscr{F}_-\otimes\mathscr{K}^{\otimes}(\overset{\circ}{\chi_0})\otimes\mathscr{K}^{\otimes}(\overset{\circ}{\chi_+}),$$

ограниченными из $\mathcal{F}(p)$ в $\mathcal{F}\left(\frac{1}{p}\right)$ для некоторого $p \in \mathcal{P}_1$, так что существуют строго положительные функции $r > 0$, $r^{-1} \in \mathcal{P}_0$ и $s > 0$, $s^{-1} \in \mathcal{P}_0$, для которых

$$(1.6) \qquad \| B \|^s_{p,t}(r) = \int_{\mathcal{X}^t} \| B^-_+(\chi) \|^s_{p,t}\, d\chi < \infty, \quad \forall t < \infty,$$

где $\| B^-_+(\chi^-_+) \|^s_{p,t}(r) = \left(\int_{\mathcal{X}^t} \int_{\mathcal{X}^t} \operatorname*{ess\,sup}_{\overset{\circ}{\chi}_0 \in \mathcal{X}^t} \{ s(\overset{\circ}{\chi}_0) \| B(\chi) \|_p \}^2 r(\overset{\circ}{\chi}_+ \sqcup \chi^-_0)\, d\overset{\circ}{\chi}_+\, d\chi^-_0 \right)^{1/2}$, и $s(\chi) = \prod_{x \in \chi} s(x)$, $r(\chi) = \prod_{x \in \chi} r(x)$. Отметим, что однократный интеграл (1.2) соответствует случаю

$$B(x^\mu_\nu) = D^\mu_\nu(x), \quad B(\chi) = 0, \quad \forall \chi : \sum_{\mu, \nu} | \chi^\mu_\nu | \neq 1,$$

где x^μ_ν обозначает одну из элементарных таблиц

$$(1.7) \qquad \boldsymbol{x}^-_+ = \begin{pmatrix} x, & \varnothing \\ \varnothing, & \varnothing \end{pmatrix}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{x}}_+ = \begin{pmatrix} \varnothing, & \varnothing \\ x, & \varnothing \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^-_0 = \begin{pmatrix} \varnothing, & x \\ \varnothing & \varnothing \end{pmatrix}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{pmatrix} \varnothing, & \varnothing \\ \varnothing, & x \end{pmatrix},$$

определяемых точкой $x \in X$. Как это вытекает из следующей теоремы, функция $B(\chi)$ может быть определена в интеграле (1.5) с точностью до эквивалентности с ядром $B \approx 0 \Leftrightarrow \| B \|^s_{p,t}(r) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и (некоторых) p, r, s. В частности, можно ее почти всюду определить только для таблиц $\boldsymbol{\chi} = (\chi^\mu_\nu)$, дающих разбиения $\chi = \bigsqcup \chi^\mu_\nu$ цепей $\chi \in \mathcal{X}$, т. е. представимых в виде $\boldsymbol{\chi} = \bigsqcup_{x \in \chi} \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ — одна из элементарных таблиц (1.7) с индексами μ, ν для $x \in \chi^\mu_\nu$.

Теорема 1. *Пусть $B(\boldsymbol{\chi})$ — локально интегрируемая функция в смысле* (1.6) *для некоторых p, r, $s > 0$. Тогда ее интеграл* (1.5) *является непрерывным оператором $T_t = \iota^t_0(B)$ из $\mathcal{F}^+$ в $\mathcal{F}_-$, имеющим оценку*

$$(1.8) \qquad \| T_t \|_q = \sup_{h \in \mathcal{F}(q)} \left\{ \| T_t h \| \left(\frac{1}{q} \right) \Big/ \| h \| (q) \right\} \leqslant \| B \|^s_{p,t}(r)$$

для любого $q \geqslant r^{-1} + p + s^{-1}$. Формально сопряженный в $\mathcal{F}$ оператор T^*_t является также непрерывным из $\mathcal{F}^+$ в $\mathcal{F}_-$ интегралом

$$(1.9) \qquad \iota^t_0(B)^* = \iota^t_0(B^\flat), \quad B^\flat \begin{pmatrix} \chi^-_+, & \chi^-_0 \\ \overset{\circ}{\chi}_+, & \overset{\circ}{\chi}_0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \chi^-_+, & \overset{\circ}{\gamma}_+ \\ \gamma^-_0, & \overset{\circ}{\gamma}_0 \end{pmatrix}^*,$$

имеющим оценку $\| B^\flat \|^{s,t}_p(r) = \| B \|^{s,t}_p(r)$. При этом операторно-значная функция $t \mapsto T_t$ имеет квантово-стохастический дифференциал $dT_t = d\iota^t_0(D)$ в смысле

$$(1.10) \qquad \iota^t_0(B) = B(\varnothing) + \iota^t_0(D), \quad D^\mu_\nu(x) = \iota^{t(x)}_0(\dot{B}(\boldsymbol{x}^\mu_\nu)),$$

определяемый квантово-стохастическими производными $D = (D^\mu_\nu)$ с ограниченными почти всюду значениями (1.1) *из $\mathcal{F}(q)$ в $\mathcal{F}\left(\frac{1}{q}\right)$:*

$$\| D^-_+ \|^{(1)}_{q,t} \leqslant \| B \|^s_{p,t}(r), \quad \| D \|^{(2)}_{q,t}(r) \leqslant \| B \|^s_{p,t}(r), \quad \| \overset{\circ}{D}_0 \|^{(\infty)}_{q,t}(s) \leqslant \| B \|^s_{p,t}(r)$$

для $D = D^-_0$ и $D = \overset{\circ}{D}_+$, $q \geqslant r^{-1} + p + s^{-1}$, в виде многократных интегралов

(1.5) по χ от точечных производных $\dot B(x, \chi) = B(x \sqcup \chi)$, где x — одна из четырех элементарных таблиц (1.7) в фиксированной точке $x \in X$.

Доказательство. Используя свойство (1.4) в виде

$$\int \sum_{\sqcup \overset{\circ}{\chi}_\nu = \chi} f(\overset{\circ}{\chi}_-, \overset{\circ}{\chi}_0, \overset{\circ}{\chi}_+)\, d\chi = \iiint f(\overset{\circ}{\chi}_-, \overset{\circ}{\chi}_0, \overset{\circ}{\chi}_+) \prod_\nu d\overset{\circ}{\chi}_\nu,$$

нетрудно получить из определения (1.5) для $f, h \in \mathcal{F}^+$

$$\int (f(\chi) \,|\, [T_t h](\chi))\, d\chi =$$

$$= \int_{\mathcal{X}^t} d\chi_+^- \int_{\mathcal{X}^t} d\overset{\circ}{\chi}_+ \int_{\mathcal{X}^t} d\gamma_0^- \int_{\mathcal{X}^t} d\overset{\circ}{\gamma}_0 (\dot f(\overset{\circ}{\gamma}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+) \,|\, B(\boldsymbol{\chi}) \dot h(\gamma_0^- \sqcup \overset{\circ}{\gamma}_0)) =$$

$$= \int_{\mathcal{X}^t} d\chi_+^- \int_{\mathcal{X}^t} d\overset{\circ}{\chi}_+ \int_{\mathcal{X}^t} d\gamma_0^- \int_{\mathcal{X}^t} d\overset{\circ}{\gamma}_0 (B(\boldsymbol{\chi})^* \dot f(\overset{\circ}{\gamma}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+) \,|\, \dot h(\gamma_0^- \sqcup \overset{\circ}{\gamma}_0)) =$$

$$= \int ([T_t^* f](\chi) \,|\, h(\chi))\, d\chi,$$

т. е. T_t^* действует как $\iota_0^t(B^\flat)$ в (1.5) с $B^\flat(\boldsymbol{\chi}) = B(\boldsymbol{\chi}')^*$, где $(\chi_\nu^\mu)' = (\chi_{-\mu}^{-\nu})$ относительно инверсии $-: (-, 0, +) \mapsto (+, 0, -)$. Более того, это дает $\| \iota_0^t(B) \|_q = \| \iota_0^t(B^\flat) \|_q$, так как $\| T \|_q = \| T^* \|_q$ в силу определения (1.8) q-нормы

$$\sup \{ |(f \mid Th)| / \|f\|(q) \|h\|(q) \} = \sup \{ |(T^* f \mid h)| / \|f\|(q) \|h\|(q) \}.$$

Оценим интеграл $(f \mid T_t h)$, используя неравенство Шварца

$$\int \|\dot f(\chi)\|(p) \|\dot h(\chi)\|(p) s^{-1}(\chi)\, d\chi \leqslant \|\dot f\|(s^{-1}, p) \|\dot h\|(s^{-1}, p)$$

и свойство (1.4) многократного интеграла, согласно которому $\|\dot f\|(s^{-1}, p) = \|f\|(p + s^{-1}), \|\dot h\|(s^{-1}, p) = h(s^{-1} + p) : |(f \mid T_t h)| \leqslant$

$$\leqslant \int_{\mathcal{X}^t} d\overset{\circ}{\gamma}_0 \int_{\mathcal{X}^t} \int_{\mathcal{X}^t} \|\dot f(\overset{\circ}{\gamma}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+)\|(p) \Big(\int_{\mathcal{X}^t} \|B(\boldsymbol{\chi})\|_p d\chi_+^- \Big) \|\dot h(\gamma_0^- \sqcup \overset{\circ}{\gamma}_0)\|(p)\, d\gamma_0^-\, d\overset{\circ}{\chi}_+ \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathcal{X}^t} d\chi \Big(\int_{\mathcal{X}^t} \|\dot f(\chi \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+)\|^2 (p) r^{-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\chi}}_+)\, d\overset{\circ}{\boldsymbol{\chi}}_+ \Big)^{1/2} \|\overset{\circ}{B}_0(\boldsymbol{\chi})\|_{p,t}(r) \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathcal{X}^t} \|\dot h(\chi \sqcup \gamma_0^-)\|^2 (p) r^{-1}(\gamma_0^-)\, d\gamma_0^- \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathcal{X}^t} d\chi \|\dot f(\chi)\|(r^{-1} + p) \|\overset{\circ}{B}_0(\boldsymbol{\chi})\|_{p,t}(r) \|\dot h(\chi)\|(r^{-1} + p) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\chi \in \mathcal{X}^t} \{ s(\chi) \|\overset{\circ}{B}_0(\boldsymbol{\chi})\|_{p,t}(r) \} \|f\|(r^{-1} + p + s^{-1}) \|h\|(r^{-1} + p + s^{-1}),$$

где $\|\overset{\circ}{B}_0(\overset{\circ}{\boldsymbol{\chi}}_0)\|_{p,t}(r) = \Big(\int_{\mathcal{X}^t} \int_{\mathcal{X}^t} \Big(\int_{\mathcal{X}^t} \|B(\boldsymbol{\chi})\|_p d\chi_+^- \Big)^2 r(\gamma_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+)\, d\gamma_0^-\, d\overset{\circ}{\chi}_+ \Big)^{1/2}$. Таким образом, $\|T_t\|_q \leqslant \|B\|_{p,t}(r, s)$, где $q \geqslant r^{-1} + p + s^{-1}$,

$$\|B\|_{p,t}(r, s) = \operatorname*{ess\,sup}_{\chi \in \mathcal{X}^t} \{ s(\chi) \|\overset{\circ}{B}_0(\boldsymbol{\chi})\|_{p,t}(r) \} \leqslant \|B\|_{p,t}^s(r).$$

Используя определение (1.5) и свойство

$$\int_{\mathcal{X}^t} f(\chi)\, d\chi = f(\varnothing) + \int_{X^t} dx \int_{\mathcal{X}^{t(x)}} \dot f(x, \chi)\, d\chi,$$

где $\dot f(x, \chi) = f(x \sqcup \chi)$, нетрудно получить

$$[(T_t - T_0) h](\chi) = [(\iota_0^t(B) - B(\varnothing)) h](\chi) =$$

$$= \int_{X^t} dx \Big(\sum_{\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+ \subseteq \chi}^{t(\overset{\circ}{\chi}_\nu) < t(x)} \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} d\chi_+^- \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} d\chi_0^- [\dot B(x_+^-, \chi) \dot h(\chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0) +$$

$$+ \dot B(x_0^-, \chi) \dot h(x \sqcup \chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0)](\overset{\circ}{\chi}_-) +$$

$$+ \sum_{x \in \chi^t} \Big(\sum_{\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+ \subseteq \chi}^{t(\overset{\circ}{\chi}_\nu) < t(x)} \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} d\chi_+^- \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} d\chi_0^- [\dot B(\overset{\circ}{x}_+, \chi) \dot h(\chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0) +$$

$$+ \dot B(\overset{\circ}{x}_0, \chi) \dot h(x \sqcup \chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0)](\overset{\circ}{\chi}_-) =$$

$$= \int_{X^t} dx [D_+^-(x) h + D_0^-(x) \dot h(x)](\chi) + \sum_{x \in \chi^t} [\overset{\circ}{D}_+(x) h + \overset{\circ}{D}_0(x) \dot h(x)](\chi \setminus x).$$

Следовательно, $T_t - T_0 = \sum \Lambda_\mu^\nu (D_\nu^\mu, X^t)$, где $\Lambda_\nu^\mu(D, \Delta)$ определяются в (1.3) как операторно-значные меры на X от оператор-функций

$$[D_+^\mu(x) f](\chi) = \sum_{\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+ \subseteq \chi}^{t(\overset{\circ}{\chi}_\nu) < t(x)} \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} d\chi_+^- \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} d\chi_0^- [\dot B(x_+^\mu, \chi) \dot f(\chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0)](\overset{\circ}{\chi}_-),$$

$$[D_0^\mu(x) h](\chi) = \sum_{\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+ \subseteq \chi}^{t(\overset{\circ}{\chi}_\nu) < t(x)} \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} d\chi_+^- \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} d\chi_0^- [\dot B(x_0^\mu, \chi) \dot h(\chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0)](\overset{\circ}{\chi}_-),$$

действующих на $f \in \mathscr{F}^+$ и $h \in \mathscr{K}_x \otimes \mathscr{F}^+$. Это может быть записано в терминах (1.5) как $D_\nu^\mu(x) = \iota_0^t(\dot B(x_\nu^\mu))$. Благодаря неравенству $\| T_t \|_q \leqslant \| B \|_{p,t}^s(r)$, $\forall q \geqslant r^{-1} + p + s^{-1}$ получим $\| D_+^- \|_{q,t}^{(1)} \leqslant \| B \|_{p,t}^s(r)$ как следствие оценки $\| D_+^-(x) \|_q \leqslant \| \dot B(x_+^-) \|_{p,t(x)}^s(r)$:

$$\int_{X^t} \| D_+^-(x) \|_q dx \leqslant \int_{X^t} \| \dot B(x_+^-) \|_{p,t(x)}^s(r) dx =$$

$$= \int_{X^t} dx \int_{\mathscr{X}^{t(x)}} \| B_+^-(x \sqcup \chi) \|_{p,t(x)}^s(r) d\chi = \int_{\mathscr{X}^t} \| B_+^-(\chi) \|_{p,t}^s(r) d\chi - \| B_+^-(\varnothing) \|_{p,t}^s(r) =$$

$$= \| B \|_{p,t}^s(r) - \| B_+^- \|_{p,t}^s(r),$$

где $B_+^-(\chi, \chi) = B(\chi \sqcup \chi_+^-) \delta_\varnothing(\chi_+^-)$, $\chi_+^- = \begin{pmatrix} \chi, & \varnothing \\ \varnothing, & \varnothing \end{pmatrix}$, $\delta_\varnothing(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi = \varnothing \\ 0, & \chi \neq \varnothing. \end{cases}$

Аналогичным образом можно получить

$$\| \overset{\circ}{D}_+ \|_{q,t}^{(2)}(r) \leqslant \Big(\int_{X^t} (\| \dot B(\overset{\circ}{x}_+) \|_{p,t(x)}^s(r))^2 r(x) dx \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathscr{X}^t} d\chi^- \Big(\int_{\mathscr{X}^t} (\| B_+(\chi^-, \chi^\circ) \|_{p,t}^s(r))^2 r(\chi^\circ) d\chi^\circ \Big)^{1/2} \leqslant \| B \|_{p,t}^s(r).$$

где

$$B_+(\chi^-, \chi^\circ, \chi) = B(\chi \sqcup \chi_0)\, \delta_\varnothing (\chi_+^- \sqcup \chi_+^\circ), \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} \chi^-, & \varnothing \\ \chi^\circ, & \varnothing \end{pmatrix},$$

$$\| D_0^- \|_{q,t}^{(2)}(r) \leqslant \Big(\int_{X^t} (\| \dot B (x_0^-) \|_{p,t(x)}^s (r))^2 r(x)\, dx \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathscr{X}^t} d\chi_+ \Big(\int_{\mathscr{X}^t} (\| B^-(\chi_+, \chi_0) \|_{p,t}^s (r))^2 r(\chi_0)\, d\chi_0 \Big)^{1/2} \leqslant \| B \|_{p,t}^s (r),$$

где $B^-(\chi_+, \chi_0, \chi) = B(\chi \sqcup \chi^\circ)\, \delta_\varnothing (\chi_+^- \sqcup \chi_0^-)$, $\chi^\circ = \begin{pmatrix} \chi_+, & \chi_0 \\ \varnothing, & \varnothing \end{pmatrix}$.

Наконец, из $\| D_0^\circ (x) \|_q \leqslant \| \dot B (x_0^\circ) \|_{p,t(x)}^s (r)$ тем же путем получим

$$\| D_0^\circ \|_{q,t}^{(\infty)}(s) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X^t} \{ s(x) \| \dot B (x_0^\circ) \|_{p,t(x)}^s (r) \} \leqslant \| B \|_{p,t}^s (r),$$

если $q \geqslant r^{-1} + p + s^{-1}$, что и завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 1. Квантово-стохастический интеграл (1.5), построенный в [50], как и его однократный вариант (1.2), введенный в [40], определены в явном виде, свободном от требования адаптивности подынтегральных функций B и D. В силу доказанной непрерывности они могут быть аппроксимированы в индуктивной сходимости последовательностью интегральных сумм $\iota_0^t(B_n)$, $\mathrm{i}_0^t(D_n)$, соответствующих простым (ступенчатым) измеримым операторным функциям B_n и D_n, если последние индуктивно сходятся к B и D по полинорме (1.6).

В самом деле, если существуют функции $r, s : r^{-1}, s^{-1} \in \mathscr{P}_0$ и $p \in \mathscr{P}_1$ такие, что $\| B_n - B \|_{p,t}^s (r) \to 0$, то существует и функция $q \in \mathscr{P}_1$ такая, что $\| \iota_0^t (B_n - B) \|_q \to 0$, а именно $q \geqslant r^{-1} + p + s^{-1}$ в силу неравенства (1.8), что означает индуктивную сходимость $\iota_0^t(B_n) \to \iota_0^t(B)$ вследствие линейности ι_0^t. В случае адаптивной функции $D(x)$ в смысле $D_\nu^\mu (x) (g^{t(x)} \otimes h_{[t(x)}) = f^{t(x)} \otimes h_{[t(x)}$ или

$$[D_\nu^\mu (x) h] (\chi) = [D_\nu^\mu (x) \dot h (\chi_{[t(x)}] (\chi^{t(x)}), \ \forall x \in X,$$

где $\dot h(\chi_{[t}, \chi^t) = h(\chi^t \sqcup \chi_{[t})$, $\chi^t \sqcup \chi_{[t}$ — разбиение цепи $\chi \in \mathscr{X}$ на $\chi^t = \{x \in \chi \mid t(x) < t\}$ и $\chi_{[t} = \{x \in \chi \mid t(x) \geqslant t\}$, указанная аппроксимация в классе адаптивных простых функций приводит к определению квантово-стохастического интеграла $\mathrm{i}_0^t(D)$ в смысле Ито, данному Хадсоном и Партасарати для случая $X = \mathbb{R}_+$, $t(x) = x$ как слабого предела интегральных сумм

$$\mathrm{i}_0^t(D_n) = \int_0^t \Lambda (D_n, dx) = \sum_{i=1}^n D_\nu^\mu (x_i) \Lambda_\mu^\nu (\Delta_i).$$

Здесь $D_n(x) = D(x_i)$ на $x \in [x_i, x_{i+1})$ — адаптивная аппроксимация для разбиения $\mathbb{R}_+ = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ на интервалы $\Delta_i = [x_i, x_{i+1})$, задаваемого цепью $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \infty$, и $D_\nu^\mu(x) \Lambda_\mu^\nu(\Delta)$ есть сумма операторов (1.3) с постоянными на Δ функциями $D_\nu^\mu(x)$, которые поэтому можно вынести за знак интегралов Λ_μ^ν. В частности, при $D_+^- = 0 = D_0^\circ$ и $D_0^- = \hat 1 \otimes g = D_+^\circ$, где $\hat 1$ — единичный оператор в $\mathscr{F}$ и $g(x)$ — скалярная локально квадратично-интегрируемая функция, соответствующая случаю

$\mathcal{K}_x = \mathbb{C}$, получим определение Ито для винеровского интеграла

$$\mathcal{I}_0^t(g) = \int_0^t g(x)\,w(dx), \quad \int_0^t g(x)\,\hat{w}(dx) = \iota_0^t(D)$$

по стохастической мере $w(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$ на $\mathbb{R}_+$, представленной в $\mathcal{F}$ операторами $\hat{w}(\Delta) = \Lambda_0^+(\Delta) + \Lambda_-^0(\Delta)$. Отметим также, что многократный интеграл (1.5) в скалярном случае $B(\chi) = \hat{1} \otimes b(\chi)$ определяет фоковское представление обобщенных ядер Маассена — Мейера [32, 33] и в случае

$$b(\chi) = f(\chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+)\,\delta_\varnothing(\chi_+^-)\,\delta_\varnothing(\overset{\circ}{\chi}_0), \quad \delta_\varnothing(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi = \varnothing, \\ 0, & \chi \neq \varnothing \end{cases}$$

приводит к многократным стохастическим интегралам $\iota_0^t(B) = I_0^t(f)$,

$$I_0^t(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0 \le t_1 <} \cdots \int_{< t_n < t} f(x_1, \ldots, x_n)\,w(dx_1)\ldots w(dx_n)$$

от обобщенных функций $f \in \bigcup_{r^{-1} \in \mathcal{P}_0} \mathcal{F}(r)$, т. е. к распределениям Хида [43, 44] от винеровской меры $w(\Delta)$, представленной как $\hat{w}(\Delta)$. Таким образом, построен общий некоммутативный аналог распределений Хида, свойства которого описывает следующее

Следствие 1. *Пусть оператор-функция* $B(\chi) = \hat{1} \otimes M(\chi)$ *определяется ядром* $M : \|M\|_t^s(r) < \infty$,

$$M\begin{pmatrix} \chi_+^-, & \gamma_0^- \\ \overset{\circ}{\chi}_+, & \overset{\circ}{\gamma}_0 \end{pmatrix} : \mathcal{K}^\otimes(\chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0) \to \mathcal{K}^\circ(\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+),$$

где

$$\|M\|_t^s(r) = \int_{\mathcal{X}^t} d\chi_+^- \Big(\int_{\mathcal{X}^t} d\overset{\circ}{\chi}_+ \int_{\mathcal{X}^t} d\chi_0^- \operatorname*{ess\,sup}_{\overset{\circ}{\gamma}_0 \in \mathcal{X}^t} \{s(\overset{\circ}{\chi}_0)\,\|M(\chi)\|\}^2\, r(\overset{\circ}{\chi}_+ \sqcup \chi_0^-)\Big)^{1/2}$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+$ *и некоторых* $r(\chi) = \prod_{x \in \chi} r(x)$, $s(\chi) = \prod_{x \in \chi} s(x)$; $r^{-1}, s^{-1} \in \mathcal{P}_0$. *Тогда интеграл* (1.5) *определяет адаптивное семейство* T_t, $t \in \mathbb{R}_+$, *q-ограниченных операторов* $T_t = \iota_0^t(\hat{1} \otimes M)$, $\|T_t\|_q \leqslant \|M\|_t^s(r)$ *для* $q \geqslant r^{-1} + 1 + s^{-1}$, *имеющее адаптивные p-ограниченные квантово-стохастические производные* $D_\nu^\mu(x) = \iota_0^{t(x)}(\hat{1} \otimes \dot{M}(x_\nu^\mu))$.

2.2. Неадаптивная формула ИТО квантового стохастического исчисления

Пусть $\mathcal{H}$ — некоторое гильбертово пространство $\mathcal{G}(p) = \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}(p)$, $p \in \mathcal{P}$ — гильбертова шкала полных тензорных произведений с пространствами Фока над $\mathcal{K}(p)$ и $\mathcal{G}^+ = \bigcap \mathcal{G}(p)$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(1)$, $\mathcal{G}_- = \bigcup \mathcal{G}(p)$ — соответствующая тройка Гельфанда $\mathcal{G}^+ \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_-$. Мы рассмотрим не обязательно ограниченные операторы $T = \varepsilon(K)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{G} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ как $*$-представления ε операторно-значных ядер

$$(2.1) \qquad K\begin{pmatrix} \omega_+^- & \omega_0^- \\ \overset{\circ}{\omega}_+ & \overset{\circ}{\omega}_0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}^\otimes(\omega_0^- \sqcup \overset{\circ}{\omega}_0) \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}^\otimes(\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\omega}_+),$$

удовлетворяющих условию $\| K \|_p (r) \leqslant \infty$ для некоторых $r^{-1} \in \mathcal{I}_0$ и $p \in \mathcal{P}_1$, где

$$\| K \|_p (r) = \int d\omega_+^- \left(\iint \operatorname*{ess\,sup}_{\overset{\circ}{\omega}_0} \{ \| K(\omega) \| / p(\overset{\circ}{\omega}_0) \}^2 r(\overset{\circ}{\omega}_+ \sqcup \omega_0^-) \, d\overset{\circ}{\omega}_+ \, d\omega_0^- \right)^{1/2}.$$

Это представление ε определяется на $h \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ формулой

$$(2.2) \qquad [\varepsilon(K) h](\chi) = \sum_{\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\omega}_+ = \chi} \int K \begin{pmatrix} \omega_+^-, & \omega_0^- \\ \overset{\circ}{\omega}_+, & \overset{\circ}{\omega}_0 \end{pmatrix} h(\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \omega_0^-) \, d\omega_0^- \, d\omega_+^-$$

как неадаптивный операторно-значный многократный интеграл (1.5) для $t = \infty$ от функции $B(\chi) = \hat{\delta}_\varnothing \otimes K(\chi)$, где $[\hat{\delta}_\varnothing f](\chi) = f(\varnothing)\, \delta_\varnothing(\chi)$ — вакуумный проектор на $\mathcal{F}$: $[B(\chi) h(\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \chi_0^-)](\overset{\circ}{\chi}_-) = 0$ при $\overset{\circ}{\chi}_- \neq \varnothing$. Оператор $\varepsilon(K)$ можно представить так же, как (адаптивный) интеграл (1.5) при $t = \infty$ от функции $B(\chi) = \hat{1} \otimes M(\chi)$, где $\hat{1}$ — единичный оператор на $\mathcal{F}$, а $M(\chi)$ — операторно-значное ядро Маассена — Меера, так что $[B(\chi) \dot{h}(\chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0)](\overset{\circ}{\chi}_-) = M(\chi) h(\chi_0^- \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_-)$ и

$$K \begin{pmatrix} \omega_+^-, & \omega_0^- \\ \overset{\circ}{\omega}_+, & \overset{\circ}{\omega}_0 \end{pmatrix} = \sum_{\chi \subseteq \overset{\circ}{\omega}_0} M \begin{pmatrix} \omega_+^-, & \omega_0^- \\ \overset{\circ}{\omega}_+, & \chi \end{pmatrix} \otimes I^{\otimes}(\overset{\circ}{\omega}_0 \setminus \chi),$$

связанное с K взаимно-однозначным соответствием

$$M \begin{pmatrix} \chi_+^-, & \chi_0^- \\ \overset{\circ}{\chi}_+, & \overset{\circ}{\chi}_0 \end{pmatrix} = \sum_{\omega \subseteq \overset{\circ}{\chi}_0} K \begin{pmatrix} \chi_+^-, & \chi_0^- \\ \overset{\circ}{\chi}_+, & \omega \end{pmatrix} \otimes (-I)^{\otimes}(\overset{\circ}{\chi}_0 \setminus \omega),$$

где $I^{\otimes}(\upsilon) = \bigotimes_{x \in \upsilon} I_x$ — единичный оператор в $\mathcal{K}^{\otimes}(\upsilon)$.

Согласно следствию 1 $\| T \|_q \leqslant \| M \|_\infty^s (r)$ для $q \geqslant r^{-1} + 1 + s^{-1}$, однако, используя эквивалентное представление (2.2) в виде неадаптивного интеграла (1.5) от $B(\chi) = \hat{\delta}_\varnothing \otimes K(\chi)$, и учитывая, что $\| \hat{\delta}_\varnothing \|_p = 1$ при сколь угодно малом $p > 0$, получим при $p \to 0$ более точную оценку $\| T \|_q \leqslant \| K \|_{s^{-1}} (r)$ для $q \geqslant r^{-1} + s^{-1} = \lim (r^{-1} + p_0 + s^{-1})$. Из нее вытекает предыдущая, поскольку

$$\Big\| \sum_{\chi \subseteq \overset{\circ}{\omega}_0} M(\chi) \otimes I^{\otimes}(\overset{\circ}{\omega}_0 \setminus \chi) \Big\| \leqslant \sum_{\chi \subseteq \overset{\circ}{\omega}_0} \| M(\chi) \| \leqslant (1 + s^{-1})(\overset{\circ}{\omega}_0) \| M \|_\infty^s,$$

где $\| M \|_\infty^s = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathscr{X}} \{ s(\chi) \| M(\chi) \| \}$, $\quad s(\chi) = \prod_{x \in \chi} s(x)$, $(1 + s^{-1})(\overset{\circ}{\omega}_0) = \sum_{\chi \subseteq \overset{\circ}{\omega}_0} s^{-1}(\chi) = \prod_{x \in \overset{\circ}{\omega}_0} (1 + s^{-1}(x))$ и, следовательно, $\| K \|_p (r) \leqslant \| M \|_\infty^s (r)$ для $p \geqslant 1 + 1/s$. Отсюда, в частности, следует существование сопряженного оператора T^*, ограниченного по норме $\| T^* \|_q \leqslant \| K^\flat \|_p (r) = \| K \|_p (r)$ как представление

$$(2.3) \qquad \varepsilon(K^*) = \varepsilon(K^\flat), \quad K^\flat \begin{pmatrix} \omega_+^-, & \omega_0^- \\ \overset{\circ}{\omega}_+, & \overset{\circ}{\omega}_0 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \omega_+^-, & \overset{\circ}{\omega}_+ \\ \omega_0^-, & \overset{\circ}{\omega}_0 \end{pmatrix}^*$$

$\flat$-сопряженного ядра $K^\flat(\omega) = K(\omega')^*$.

В следующей теореме мы докажем, что ♭-отображение ε: $K \mapsto \varepsilon(K)$, является операторным представлением ♭-алгебры ядер $K(\omega)$, удовлетворяющих условию ограниченности

$$(2.4)\qquad \|K\|_\alpha = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega=(\omega_\nu^\mu)} \left\{\|K(\omega)\| \Big/ \prod_{\mu\leqslant\nu} \alpha_\nu^\mu(\omega_\nu^\mu)\right\} < \infty$$

относительно произведения четверки $\alpha = (\alpha_\nu^\mu)_{\nu=0,+}^{\mu=-,0}$ положительных существенно-измеримых функций-произведений $\alpha_\nu^\mu(\omega) = \prod_{x\in\omega} \alpha_\nu^\mu(x)$, $\omega \in \mathscr{X}$.

Последние определяются интегрируемой функцией $\alpha_+^-: X \to \mathbb{R}_+$, квадратично-интегрируемыми с некоторым весом $r > 0$, $r^{-1} \in \mathscr{P}_0$ функциями $\overset{\circ}{\alpha}_+$, α_0^-: $X \to \mathbb{R}_+$ и существенно ограниченной единицей относительно некоторого $p \in \mathscr{P}$ функции $\overset{\circ}{\alpha}_0 : X \to \mathbb{R}_+$:

$$(2.5)\qquad \begin{gathered} \|\alpha_+^-\|^{(1)} < \infty, \quad \|\overset{\circ}{\alpha}_+\|^{(2)}(r) < \infty, \quad \|\alpha_0^-\|^{(2)}(r) < \infty, \quad \|\overset{\circ}{\alpha}_0\|_p^{(\infty)} \leqslant 1, \\ \|\alpha\|^{(1)} = \int |\alpha(x)|\, dx, \quad \|\alpha\|^{(2)}(r) = \left(\int \alpha(x)^2 r(x)\, dx\right)^{1/2}, \\ \|\alpha\|_p^{(\infty)} = \operatorname*{ess\,sup}_x \frac{|\alpha(x)|}{p(x)}. \end{gathered}$$

Условная ограниченность (2.4) обеспечивает проективную ограниченность $\|K\|_p(r) < \infty$ в силу неравенства

$$\|K\|_p(r) \leqslant \int d\omega_+^- \left(\iint \operatorname*{ess\,sup}_{\overset{\circ}{\omega}_0} \left\{\|K\|_\alpha \prod \alpha_\nu^\mu(\omega_\nu^\mu)/p(\overset{\circ}{\omega}_0)\right\}^2 r(\overset{\circ}{\omega}_+ \sqcup \omega_0^-)\, d\overset{\circ}{\omega}_+\, d\omega_0^-\right)^{1/2},$$

$$(2.6)\qquad \int \alpha_+^-(\omega)\, d\omega \left(\int \overset{\circ}{\alpha}_+(\omega)^2 r(\omega)\, d\omega \int \alpha_0^-(\omega)^2 r(\omega)\, d\omega\right)^{1/2} \operatorname{ess\,sup} \frac{\overset{\circ}{\alpha}_0(\omega)}{p(\omega)} \|K\|_\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \|K\|_\alpha \exp\left\{\int (\alpha_+^-(x) + r(x)(\overset{\circ}{\alpha}_+(x)^2 + \alpha_0^-(x)^2)/2)\, dx,\right.$$

где учтено, что $\int \alpha(\omega)\, d\omega = \exp \int \alpha(x)\, dx$ при $\alpha(\omega) = \prod_{x\in\omega} \alpha(x)$, и

$$\operatorname*{ess\,sup}_\omega \{\overset{\circ}{\alpha}_0(\omega)/p(\omega)\} = \sup_n \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X^n} \prod_{i=1}^n \{\overset{\circ}{\alpha}_0(x_i)/p(x_i)\} = 1 \text{ при } \overset{\circ}{\alpha}_0 \leqslant p.$$

Прежде чем сформулировать теорему, установим, что справедлива

Лемма 2. *Пусть многократный квантово-стохастический интеграл* $T_t = \iota_0^t(B)$ *определен в* (1.5) *ядерной оператор-функцией* $B(\chi) = \varepsilon(M(\chi))$ *со значениями в операторах вида* (2.2), *где*

$$K\begin{pmatrix} \upsilon_+^-, & \upsilon_0^- \\ \overset{\circ}{\upsilon}_+, & \overset{\circ}{\upsilon}_0 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \chi_+^-, & \chi_0^-, & \upsilon_+^-, & \upsilon_0^- \\ \overset{\circ}{\chi}_+, & \overset{\circ}{\chi}_0, & \overset{\circ}{\upsilon}_+, & \overset{\circ}{\upsilon}_0 \end{pmatrix}, \quad \chi_\nu^\mu \in \mathscr{X},$$

$$M(\chi, \upsilon): \mathscr{H} \otimes \mathscr{K}^\otimes(\upsilon_0^- \sqcup \chi_0^-) \otimes \mathscr{K}^\otimes(\overset{\circ}{\upsilon}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0) \to \mathscr{H} \otimes \mathscr{K}^\otimes(\overset{\circ}{\upsilon}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_0) \otimes \mathscr{K}^\otimes(\overset{\circ}{\upsilon}_+ \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+)$$

— *относительно-ограниченное по* $\upsilon_\nu^\mu \in \mathscr{X}$ *ядро в смысле*

$$\|M(\chi)\|_r \leqslant c \prod_{\mu,\nu} \beta_\nu^\mu(\chi_\nu^\mu), \quad \beta_\nu^\mu(\chi) = \prod_{x\in\chi} \beta_\nu^\mu(\chi)$$

для пары четверок $\beta = (\beta_\nu^\mu)$, $\beta_\nu^\mu \geqslant 0$ *и* $\gamma = (\gamma_\nu^\mu)$, $\gamma_\nu^\mu \geqslant 0$, *удовлетворяющих условию* (2.5). *Тогда* $T_t = \varepsilon(K_t)$, $K_t(\omega) = \nu_0^t(\omega, M)$, *т. е.* $\iota_0^t \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \nu_0^t$, *где*

$$(2.7)\qquad \nu_0^t(\omega, M) = \sum_{\chi \subseteq \omega^t} M(\chi, \omega\setminus\chi), \quad \omega^t = (X^t \cap \omega_\nu^\mu)_{\nu=0,+}^{\mu=-,0},$$

(сумма берется по всевозможным $\chi_\nu^\mu \subseteq X^t \cap \omega_\nu^\mu, {}_{\nu=0,+}^{\mu=-,0}$), причем $\| \nu_0^t(M)\|_\alpha \leqslant \leqslant c$, если $\alpha_\nu^\mu(x) \geqslant \beta_\nu^\mu(x) + \gamma_\nu^\mu(x)$ при $t(x) < t$, и $\alpha_\nu^\mu(x) \geqslant \gamma_\nu^\mu(x)$, $\forall \mu, \nu$ при $t(x) \geqslant t$. В частности, обобщенный однократный интеграл $\mathrm{i}_0^t(D)$ от $D_\nu^\mu(x) = \varepsilon(C_\nu^\mu(x))$ с ограниченной относительно γ четверкой $C(x) = = (C_\nu^\mu(x))$ ядер $C_\nu^\mu(x, \upsilon)$, $\upsilon = (\upsilon_\nu^\mu)$ в смысле

$$c = \|C_+^-\|_{\gamma,t}^{(1)} + \|\overset{\circ}{C}_+\|_{\gamma,t}^{(2)}(r) + \|C_0^-\|_{\gamma,t}^{(2)}(r) + \|\overset{\circ}{C}_0\|_{\gamma,t}^{(\infty)}(1/p) < \infty,$$

$$\|C_+^-\|_{\gamma,t}^{(1)} = \int_{X^t} \|C_+^-(x)\|_\gamma\, dx, \quad \|C\|_{\gamma,t}^{(2)} = \Big(\int_{X^t} \|C(x)\|_\gamma^2 r(x)\, dx\Big)^{1/2},$$

$$\|\overset{\circ}{C}_0\|_{\gamma,t}^{(\infty)}\Big(\frac{1}{p}\Big) = \sup_{x\in X^t}\Big\{\frac{\|\overset{\circ}{C}_0(x)\|_\gamma}{p(x)}\Big\},$$

является представлением $\mathrm{i}_0^t \circ \varepsilon = \varepsilon \circ n_0^t$ преобразования

$$n_0^t(\omega, C) = \sum_{x\in\omega^t} C(x, \omega\setminus x), \quad C(x_\nu^\mu, \upsilon) = C_\nu^\mu(x, \upsilon),$$

где сумма берется по всевозможным $x \in \omega_\nu^\mu \cap X^t$, $\mu = -, 0$, $\nu = 0, +$, $x = = x_{\nu(x)}^{\mu(x)}$ — одна из элементарных таблиц (1.7) с индексами $\mu(x) = \mu$, $\nu(x) = = \nu$, определенными почти всюду условием $\mu, \nu : x \subset \omega_\nu^\mu$, причем

$$\|n_0^t(C)\|_p(r) \leqslant c \exp\Big\{\int \Big(\gamma_+^-(x) + \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\gamma}_+(x)^2 + \gamma_0^-(x)^2)\, r(x)\Big)\, dx\Big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $M(\chi, \upsilon)$ — операторно-значное биядро, ограниченное $\|M\|_{\beta,\gamma} \leqslant c$ относительно пары (β, γ), то определен относительно ограниченный оператор $T_t = \varepsilon(K_t)$ для $K_t = \nu_0^t(M)$, поскольку

$$\|K_t(\omega)\| \leqslant c \sum_{\substack{\chi_+^- \subseteq \omega_+^- \\ t(\chi_+^-)<t}} \sum_{\substack{\overset{\circ}{\chi}_+ \subseteq \overset{\circ}{\omega}_+ \\ t(\overset{\circ}{\chi}_+)<t}} \sum_{\substack{\chi_0^- \subseteq \omega_0^- \\ t(\chi_0^-)<t}} \sum_{\substack{\overset{\circ}{\chi}_0 \subseteq \overset{\circ}{\omega}_0 \\ t(\overset{\circ}{\chi}_0)<t}} \|M(\chi, \omega\setminus\chi)\| \leqslant$$

$$\leqslant c \prod_{\nu=0,+}^{\mu=-,0} \sum_{\substack{\chi_\nu^\mu \subseteq \omega_\nu^\mu \\ t(\chi_\nu^\mu)<t}} \beta_\nu^\mu(\chi_\nu^\mu)\, \gamma_\nu^\mu(\omega_\nu^\mu\setminus\chi_\nu^\mu) = c \prod_{\nu=0,+}^{\mu=-,0} \alpha_\nu^\mu(\omega_\nu^\mu),$$

где $\alpha_\nu^\mu(\omega) = \prod_{x\in\omega}^{t(x)<t} [\beta(x) + \gamma(x)] \prod_{x\in\omega}^{t(x)\geqslant t} \gamma(x)$ для $\beta_\nu^\mu(\chi) = \prod_{x\in\chi} \beta_\nu^\mu(x)$ и $\gamma_\nu^\mu(\upsilon) = \prod_{x\in\upsilon} \gamma_\nu^\mu(x)$. Применяя представление (2.2) к $K_t(\omega) = \nu_0^t(\omega, M)$, не трудно получить представление оператора $\varepsilon(K_t)$ в виде обобщенного многократного интеграла (1.5) от $B(\chi) = \varepsilon(M(\chi))$:

$$[T_t h](\chi) = \sum_{\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\omega}_+ = \chi} \iint \sum_{\chi\subseteq\omega^t} M(\chi, \omega\setminus\chi)\, h(\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \omega_0^-)\, d\omega_0^-\, d\omega_+^- =$$

$$= \sum_{\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+ \subseteq \chi^t} \int_{\mathcal{X}^t} d\chi_0^- \int_{\mathcal{X}^t} d\chi_+^- \sum_{\overset{\circ}{\upsilon}_0 \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_+ = \overset{\circ}{\chi}_-} \iint M(\chi, \upsilon)\, \dot{h}(\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \chi_0^-, \overset{\circ}{\upsilon}_0 \sqcup \upsilon_0^-)\, d\upsilon_0^-\, d\upsilon_+^-,$$

где $\overset{\circ}{\chi}_- = \chi \setminus (\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+)$, $\dot{h}(\chi, \upsilon) = h(\chi \sqcup \upsilon)$. Следовательно, $T_t = \iota_0^t(B)$, где

$$[B(\chi)\dot{h}(\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \chi_0^-)](\chi) = \sum_{\overset{\circ}{\upsilon}_0 \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_+ = \chi} \iint M(\chi, \upsilon)\dot{h}(\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \chi_0^-, \overset{\circ}{\upsilon}_0 \sqcup \upsilon_0^-)\, d\upsilon_0^- \, d\upsilon_+^-,$$

т. е. мы доказали, что $\varepsilon \circ \nu_0^t = \iota_0^t \circ \varepsilon$. В частности, если $M(\chi, \upsilon) = 0$ при $\sum |\chi_\nu^\mu| \neq 1$, то, очевидно,

$$\nu_0^t(\omega, M) = n_0^t(\omega, C), \quad \iota_0^t(B) = \mathrm{i}_0^t(D),$$

где $C_\nu^\mu(x, \upsilon) = M(x_\nu^\mu, \upsilon)$, и $B(\chi) = 0$ при $\sum |\chi_\nu^\mu| \neq 1$, $D_\nu^\mu(x) = B(x_\nu^\mu)$. Это дает представление $\varepsilon \circ n_0^t = \mathrm{i}_0^t \circ \varepsilon$ для однократного обобщенного неадаптивного интеграла (1.2) в виде суммы

$$\sum_{\mu, \nu} \Lambda_\nu^\mu(\varepsilon(C_\nu^\mu), \Delta) = \varepsilon\Big(\sum_{\mu, \nu}(N_\mu^\nu(C_\nu^\mu, \Delta)\Big), \quad N_\mu^\nu(\omega, C, \Delta) = \sum_{x \in \omega_\nu^\mu \cap \Delta} C(x, \omega \setminus x_\nu^\mu)$$

представлений четырех ядерных мер $N_\mu^\nu(\omega, C_\nu^\mu, \Delta)$ при $\Delta = X^t$, определяющих ядерные представления $\varepsilon \circ N(\Delta) = \Lambda(\Delta) \circ \varepsilon$ канонических мер (1.3) при $D_\nu^\mu(x) = \varepsilon(C_\nu^\mu(x))$.

Т е о р е м а 2. *Если ядро $K(\omega)$ является относительно ограниченным, то таковым же является и ядро $K^\flat(\omega)$: $\|K^\flat\|_\gamma = \|K\|_{\gamma'}$, где* $\begin{pmatrix} \gamma_+^-, & \gamma_0^- \\ \overset{\circ}{\gamma}_+, & \overset{\circ}{\gamma}_0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma_+^-, & \overset{\circ}{\gamma}_+ \\ \gamma_0^-, & \overset{\circ}{\gamma}_0 \end{pmatrix}$, *и оператор $T^* = \varepsilon(K^\flat)$, так же как и оператор $T = \varepsilon(K)$, является q-ограниченным при $q \geqslant p + 1/r$ оценкой (2.6). Для любых таких ядер $K(\chi)$ и $K^\flat(\chi)$, ограниченных относительно четверок $\alpha = (\alpha_\nu^\mu)$ и $\gamma = (\gamma_\nu^\mu)$ функций $\alpha_\nu^\mu(x)$, $\gamma_\nu^\mu(x)$, удовлетворяющих условию (2.5), определен оператор*

$$\varepsilon(K^\flat)\,\varepsilon(K) = \varepsilon(K^\flat \cdot K), \qquad \varepsilon(I^\otimes) = I$$

как $*$-представление ядерного произведения (1.2.9) с оценкой $\|K^\flat \cdot K\|_\beta \leqslant \|K\|_\alpha \|K^\flat\|_\gamma$, если $\beta_\nu^\mu \geqslant (\gamma \cdot \alpha)_\nu^\mu$, где $(\gamma \cdot \alpha)_\nu^\mu(x) = \sum \gamma_\lambda^\mu(x)\,\alpha_\nu^\lambda(x)$ определяется произведением треугольных матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_0^- & \gamma_+^- \\ 0 & \overset{\circ}{\gamma}_0 & \overset{\circ}{\gamma}_+ \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0^- & \alpha_+^- \\ 0 & \overset{\circ}{\alpha}_0 & \overset{\circ}{\alpha}_+ \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & \gamma_0^-\overset{\circ}{\alpha}_0 + \alpha_0^-, & \alpha_+^- + \gamma_0^-\overset{\circ}{\alpha}_+ + \gamma_+^- \\ 0, & \overset{\circ}{\gamma}_0\overset{\circ}{\alpha}_0, & \overset{\circ}{\gamma}_0\overset{\circ}{\alpha}_+ + \overset{\circ}{\gamma}_+ \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $T_t = \varepsilon(K_t)$, где $K_t = \nu_0^t(M)$ определяет представление (2.6) для многократного интеграла (1.5) $T_t = \iota_0^t(B)$ от $B(\chi) = \varepsilon(M(\chi))$ и $\mathrm{T}(x) = [T_\nu^\mu(x)]$, $G(x) = [G_\nu^\mu(x)]$, где $T_\nu^\mu = G_\nu^\mu$, если $\mu = +$ или $\nu = -$, $T_-^-(x) = T_{t(x)} = T_+^+(x)$, и T_ν^μ, G_ν^μ при $\mu \neq +, \nu \neq -$ описываются представлениями

$$(2.8) \qquad T_\nu^\mu(x) = \varepsilon(\dot{K}_{t(x)}(x_\nu^\mu)), \quad G_\nu^\mu(x) = \varepsilon(\dot{K}_{t(x)]}(x_\nu^\mu))$$

точечных производных $\dot{K}_t(x, \upsilon) = K_t(x \sqcup \upsilon)$ соответственно при $t = t(x)$ и $t > t(x)$, $t \leqslant t(\upsilon_{t(x)}) \equiv t_+(x)$, где $\upsilon_{t(x)} = \{x' \in \sqcup \upsilon_\nu^\mu \mid t(x') > t(x)\}$, так что $K_{t]}(\omega) = K_s(\omega)$, $\forall\, s \in (t, t(\omega_t)]$. Тогда оператор-функции $D_\nu^\mu(x) = G_\nu^\mu(x) - T_\nu^\mu(x)$ *являются квантово-стохастическими производными от* *функции* $t \mapsto T_t$, *определяющими дифференциал* $dT_t = di_0^t(\mathbf{D})$ *в разностном виде, так что* $T_t - T_0 = i_0^t(\mathbf{G} - \mathbf{T})$. *При этом* $T_t^* - T_0^* = i_0^t(\mathbf{G}^\flat - \mathbf{T}^\flat)$, *и имеет место неадаптивная формула Ито*

$$(2.9)\qquad T_t^* T_t - T_0^* T_0 = i_0^t(\mathbf{T}^\flat \mathbf{D} + \mathbf{D}^\flat \mathbf{T} + \mathbf{D}^\flat \mathbf{D}) = i_0^t(\mathbf{G}^\flat \mathbf{G} - \mathbf{T}^\flat \mathbf{T}),$$

где $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{D}^\flat$ — *псевдоевклидово сопряжение* $[D_\nu^\mu(x)]^\flat = [D_{-\mu}^{-\nu}(x)]^*$ *треугольных операторов*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T & T_0^- & T_+^- \\ 0 & T_0^\circ & T_+^\circ \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & D_0^- & D_+^- \\ 0 & D_0^\circ & D_+^\circ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} T & G_0^- & G_+^- \\ 0 & G_0^\circ & G_+^\circ \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}$$

со стандартным блочно-матричным умножением $(\mathbf{TG})_\nu^\mu = \sum T_\lambda^\mu G_\nu^\lambda$.

Доказательство. Сопряженные операторы $\varepsilon(K)$, $\varepsilon(K^\flat)$, определяющие $*$-представление (2.2) относительно ограниченных в смысле (2.4), (2.5) ядер K, являются q-ограниченными при $q \geqslant p + 1/r$ в силу оценки $\| \varepsilon(K) \|_q \leqslant \| K \|_p (r)$ и неравенства (2.6), приводящего к экспоненциальной оценке

$$\| \varepsilon(K) \|_q \leqslant \| K \|_\alpha \exp\left\{ \| \alpha_+^- \|^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\| \alpha_+^\circ \|^{(2)} (r)^2 + \| \alpha_0^- \|^{(2)} (r)^2 \right) \right\}.$$

Формула ядерного произведения $K^\flat \cdot K$, соответствующего операторному произведению $\varepsilon(K^\flat)\,\varepsilon(K)$, уже была нами найдена для скалярного $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ в случае линейных комбинаций экспоненциальных ядер

$$\mathbf{f}^\otimes(\chi) = f_+^-(\chi_+^-) f_+^\circ(\chi_+^\circ) \otimes f_0^\circ(\chi_0^\circ) \otimes f_0^-(\chi_0^-),$$

где $f_\nu^\mu(\chi) = \bigotimes_{x \in \chi} f(x) \qquad \left(f_+^-(\chi) = \prod_{x \in \chi} f_+^-(x) \right)$.

Проверим теперь эту формулу на операторно-значных ядрах $K(\omega)$ и $K^\flat(\omega)$, заметив, что их произведение является β-ограниченным для $\beta = \gamma \cdot \alpha$, т. к.

$$\| K^\flat \cdot K \|(\omega) \leqslant \sum \left\| K^\flat \begin{pmatrix} \omega_+^- \setminus \sigma_+^-, & v_0^- \sqcup v_+^- \\ \omega_+^\circ \setminus v_+^\circ, & \omega_0^\circ \sqcup v_+^\circ \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| K \begin{pmatrix} \omega_+^- \setminus \tau_+^-, & \omega_0^- \setminus v_0^- \\ v_+^- \sqcup v_+^\circ, & \omega_0^\circ \sqcup v_0^- \end{pmatrix} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \| K^\flat \|_\gamma \| K \|_\alpha \sum \gamma^\otimes \begin{pmatrix} \omega_+^- \setminus \sigma_+^-, & v_0^- \sqcup v_+^- \\ \omega_+^\circ \setminus v_+^\circ, & \omega_0^\circ \sqcup v_+^\circ \end{pmatrix} \alpha^\otimes \begin{pmatrix} \omega_+^- \setminus \tau_+^-, & \omega_0^- \setminus v_0^- \\ v_+^- \sqcup v_+^\circ, & \omega_0^\circ \sqcup v_0^- \end{pmatrix} =$$

$$= \| K^\flat \|_\gamma \| K \|_\alpha (\gamma \cdot \alpha)^\otimes(\omega); \ (\gamma \cdot \alpha)_\nu^\mu = \sum_{\mu \leqslant \lambda \leqslant \nu} \gamma_\nu^\mu \alpha_\nu^\lambda,$$

где использована формула умножения $\gamma^\otimes \cdot \alpha^\otimes = (\gamma \cdot \alpha)^\otimes$ для скалярных экспоненциальных ядер

$$\beta^\otimes(\omega) = \prod \beta_\nu^\mu(\omega_\nu^\mu); \quad \beta_\nu^\mu(\omega) = \prod_{x \in \omega} \beta_\nu^\mu(x); \ (\gamma \cdot \alpha)_\nu^\mu(x) = \sum \gamma_\lambda^\mu(x) \alpha_\nu^\lambda(x).$$

Используя основную формулу скалярного интегрирования (1.4), представим скалярный квадрат действия (2.2) в виде

$$\| \varepsilon(K) h \|^2 = \int \left\| \sum_{\omega_0^\circ \sqcup \omega_+^\circ = \chi} \iint K(\omega) h(\omega_0^\circ \sqcup \omega_0^\circ) \, d\omega_+^- \, d\omega_0^- \right\|^2 d\chi =$$

$$= \int \sum_{\overset{\circ}{\sigma}_0 \sqcup \overset{\circ}{\sigma}_+ = \chi} \sum_{\overset{\circ}{\tau}_0 \sqcup \overset{\circ}{\tau}_+ = \chi} (K(\sigma) h(\sigma_0^- \sqcup \overset{\circ}{\sigma}_0) \mid K(\tau) h(\tau_0^- \sqcup \overset{\circ}{\tau}_0))\, d\chi =$$

$$= \iiint \left(K \begin{pmatrix} \sigma_+^-, & \sigma_+^0 \\ v_0^- \sqcup v_+^-, & \overset{\circ}{v}_0 \sqcup v_+^0 \end{pmatrix} h(\overset{\circ}{v}_0 \sqcup \overset{\circ}{v}_+ \sqcup \overset{\circ}{\sigma}_+) \middle| K \begin{pmatrix} \tau_+^-, & \tau_+^- \\ \overset{\circ}{v}_0 \sqcup v_0^-, & v_+^- \sqcup \overset{\circ}{v}_+ \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times h(\overset{\circ}{v}_0 \sqcup v_0^- \sqcup \tau_0^-) \right) d\sigma\, d\tau\, dv = \iiint \left(h(\overset{\circ}{v}_0 \sqcup v_+^0 \sqcup \overset{\circ}{\sigma}_+) \middle| K^\flat \begin{pmatrix} \sigma_+^-, & v_0^- \sqcup v_+^- \\ \overset{\circ}{\sigma}_+, & \overset{\circ}{v}_0 \sqcup \overset{\circ}{v}_+ \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times K \begin{pmatrix} \tau_+^-, & \tau_0^- \\ \overset{\circ}{v}_+ \sqcup v_+^-, & \overset{\circ}{v}_0 \sqcup v_0^- \end{pmatrix} h(\overset{\circ}{v}_0 \sqcup v_0^- \sqcup \tau_0^-) \right) d\sigma\, d\tau\, dv =$$

$$= \int \left(h(\chi) \middle| \sum_{\overset{\circ}{\omega}_0 \sqcup \overset{\circ}{\omega}_+ = \chi} \iint (K^\flat \cdot K)(\omega) h(\omega_0^- \sqcup \overset{\circ}{\omega}_0)\, d\omega_+^-\, d\omega_0^- \right) d\chi,$$

где $\overset{\circ}{v}_0 = \overset{\circ}{\sigma}_0 \cap \overset{\circ}{\tau}_0$, $v_+^- = \overset{\circ}{\sigma}_0 \cap \overset{\circ}{\tau}_+$, $v_0^- = \overset{\circ}{\tau}_0 \cap \overset{\circ}{\sigma}_+$, $v_+^- = \overset{\circ}{\sigma}_+ \cap \overset{\circ}{\tau}_+$. В силу произвольности $h \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}(q)$ это доказывает формулу ядерного произведения для $K^\flat$ и K, которая распространяется на произвольные относительно-ограниченные ядра M и K благодаря формуле поляризации эрмитовой функции $K^\flat \cdot K$.

Рассмотрим теперь стохастический дифференциал dT_t многократного интеграла $T_t = \iota_0^t(B)$ от оператор-функции $B(\chi) = \varepsilon(M(\chi))$, определяемый квантово-стохастическими производными

$$D_\nu^\mu(x) = \iota_0^{t(x)}(\dot{B}(x_\nu^\mu)) = \varepsilon(C_\nu^\mu(x)),$$

представляющими разности ядер

$$C_\nu^\mu(x, v) = v_0^{t(x)}(v, \dot{M}(x_\nu^\mu)) = \dot{K}_{t(x)]}(x_\nu^\mu, v) - \dot{K}_{t(x)}(x_\nu^\mu, v).$$

Здесь $v_0^t(v, \dot{M}(x)) = \sum_{\chi \subseteq v^t} M(\chi \sqcup x, v \setminus \chi)$, x — одна из элементарных таблиц (1.7) и

$$\dot{K}_{t(x)}(x, v) = \sum_{\chi \subseteq v^{t(x)}} M(\chi, (v \sqcup x) \setminus \chi) = K_{t(x)}(v \sqcup x),$$

$$\dot{K}_{t(x)]}(x, v) = \sum_{\chi \subseteq v^{t(x)} \sqcup x} M(\chi, (v \sqcup x) \setminus \chi) =$$

$$= K_{t(x)}(v \sqcup x) + \sum_{\chi \subseteq v^{t(x)}} M(\chi \sqcup x, v \setminus \chi) = \dot{K}_{t(x)}(x, v) + v_0^{t(x)}(v, \dot{M}(x)).$$

Заметим, что $K_{t]}(\omega) = \sum_{\chi \subseteq \omega^{t]}} M(\chi, \omega \setminus \chi) = K_{t_+}(\omega)$, где $\omega^{t]} = \{x \in \omega \mid t(x) \leqslant t\}$, $t_+ = \min\{t(x) > t \mid x \in \omega\}$, так что $\dot{K}_{t(x)]}(x, v) = \dot{K}_t(x, v)$, $t \in (t(x), t_+(x)]$. Таким образом, производные $D_\nu^\mu(x)$, $x \in X^t$, определяющие инкремент $T_t - T_0 = \iota_0^t(\mathbf{D})$, представляются в виде разностей

$$D_\nu^\mu(x) = \varepsilon[\dot{K}_{t(x)]}(x_\nu^\mu)] - \varepsilon[\dot{K}_{t(x)}(x_\nu^\mu)]$$

операторов (2.8) Рассматривая $\dot{K}_t(x)$ как один из четырех элементов $\dot{K}_t(x_\nu^\mu) = K_t(x)$ треугольно-операторного ядра $K_t(x)$, у которого $K_t(x)_-^- = K_{t(x)} = K_t(x)_+^+$, определим треугольно-операторные функции

$$\mathbf{T}(x) = \varepsilon(\mathbf{K}_{t(x)}(x)), \quad \mathbf{G}(x) = \varepsilon(\mathbf{K}_{t(x)]}(x)).$$

Это позволяет получить квантовую неадаптивную формулу Ито в виде

$$T_t^* T_t - T_0^* T_0 = \mathfrak{i}_0^t (\mathbf{T}^\flat \mathbf{D} + \mathbf{D}^\flat \mathbf{T} + \mathbf{D}^\flat \mathbf{D}),$$

где $\mathbf{D}(x) = \mathbf{G}(x) - \mathbf{T}(x)$. Она является следствием $\flat$-гомоморфности отображения (2.2) $T_t^* T_t = \varepsilon(K^\flat \cdot K)$ и формулы (1.2.9) для произведения операторных ядер K_t и $K_t^\flat$, которую можно записать в виде

$$(K_t^\flat \cdot K_t)(\omega \sqcup x_\nu^\mu) = \sum_{\lambda=\mu}^{\nu} [K_t(x)_\lambda^\mu \cdot K_t(x)_\nu^\lambda](\omega) = [\mathbf{K}_t^\flat(x) \cdot \mathbf{K}_t(x)]_\nu^\mu(\omega),$$

где правая часть вычисляется как элемент произведения треугольных матриц $\mathbf{K}(x) = [K_\nu^\mu(x)]$ определяемого умножения их элементов как операторно-значных ядер $K_t(x, \omega)_-^- = K_t(\omega) = K_t(x, \omega)_+^+$, $\mathring{K}(x, \omega) = K(\omega \sqcup x)$. В самом деле, из (1.2.9) получим

$$[K^\flat \cdot K](\omega \sqcup \mathring{x}_0) = [\mathring{K}^\flat(\mathring{x}_0) \cdot \mathring{K}(\mathring{x}_0)](\omega),$$

$$[K^\flat \cdot K](\omega \sqcup \mathring{x}_+) = [K^\flat \cdot \mathring{K}(x_0^-) + \mathring{K}^\flat(x_0^-) \mathring{K}(\mathring{x}_0)](\omega),$$

$$[K^\flat \cdot K](\omega \sqcup x_0^-) = [\mathring{K}^\flat(\mathring{x}_0) \mathring{K}(\mathring{x}_+) + \mathring{K}^\flat(\mathring{x}_+) \cdot K](\omega),$$

$$[K^\flat \cdot K](\omega \sqcup x_+^-) = [K^\flat \cdot \mathring{K}(x_+^-) + \mathring{K}^\flat(x_0^-) \cdot \mathring{K}(\mathring{x}_+) + \mathring{K}^\flat(x_+^-) \cdot K](\omega).$$

Это позволяет записать $\varepsilon[(\mathring{K}_t^\flat \cdot \mathring{K}_t)(x_\nu^\mu)] = \sum_{\lambda=\mu}^{\nu} \varepsilon(\mathring{K}_t^\flat(x)_\lambda^\mu \mathring{K}_t(x)_\nu^\lambda)$ в виде треугольного оператора

$$\varepsilon(K_t^\flat(x) \cdot K_t(x)) = \varepsilon(K_t(x))^* \varepsilon(K_t(x))$$

— произведения треугольных матриц $\mathbf{T}_t^\flat(x)$ и $\mathbf{T}_t(x)$ с операторными произведениями их элементов. Полагая в этой формуле $t = t(x)$ и $t = t_+(x)$, получим

$$\varepsilon[(\mathbf{K}_{t(x)]}^\flat \cdot \mathbf{K}_{t(x)]})(x) - (\mathbf{K}_{t(x)}^\flat \cdot \mathbf{K}_{t(x)})(x)] = \mathbf{G}^\flat(x)\,\mathbf{G}(x) - \mathbf{T}^\flat(x)\,\mathbf{T}(x),$$

что позволяет записать стохастическую производную квантового неадаптивного процесса $T_t^* T_t$ в виде

$$d(T_t^* T_t) = d\mathfrak{i}_0^t(\mathbf{G}^\flat \mathbf{G} - \mathbf{T}^\flat \mathbf{T}),$$

соответствующем (2.9). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. *Используя неадаптивную таблицу стохастического умножения*

$$\mathbf{G}^\flat \mathbf{G} - \mathbf{T}^\flat \mathbf{T} = \mathbf{D}^\flat \mathbf{T} + \mathbf{T}^\flat \mathbf{D} + \mathbf{D}^\flat \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0, & T^* D_0^-, & T^* D_+^- + D_+^{-*} & T \\ 0, & 0, & D_0^{-*} & T \\ 0, & 0, & & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0, & \mathring{D}_+^* \mathring{D}_0, & \mathring{D}_+^* & \mathring{D}_+ \\ 0, & \mathring{D}_0^* \mathring{D}_0, & \mathring{D}_0^* & \mathring{D}_+ \\ 0, & 0, & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0, & \mathring{D}_+^* \mathring{T}_0 + \mathring{T}_0^* & \mathring{D}_0, & \mathring{D}_+^* \mathring{T}_+ + \mathring{T}_+^* & \mathring{D}_+ \\ 0, & \mathring{D}_0^* \mathring{T}_0 + \mathring{T}_0^* & \mathring{D}_0, & \mathring{D}_0^* \mathring{T}_+ + \mathring{T}_0 & \mathring{D}_+ \\ 0, & & 0, & & 0 \end{bmatrix}$$

формулу (2.9) *можно записать в слабом виде*

$$(2.10)\quad \| T_t h\|^2 - \| T_0 h\|^2 = \int_{X^t} 2\,\mathrm{Re}\,(T_{t(x)}h \mid D_+^-(x)\,h + D_0^-(x)\,\dot h(x))\,dx +$$

$$+ \int_{X^t} [\| \overset{\circ}{D}_+(x)h + \overset{\circ}{D}_0(x)\,\dot h(x)\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(a(x)\,T_{t(x)}h \mid \overset{\circ}{D}_+(x)\,h + \overset{\circ}{D}_0(x)\,\dot h(x))]dx,$$

где $a(x)\,T_{t(x)}h = \overset{\circ}{T}_+(x)\,h + \overset{\circ}{T}_0(x)\,\dot h(x)$. *Эта формула справедлива для любых неадаптивных однократных интегралов* $T_t = T_0 + \mathrm{i}_0^t(D)$ *с квадратично-интегрируемыми значениями* $T_t h$, $\forall h \in \mathcal{G}^+$, *если в качестве* $a(x)$ *понимать оператор уничтожения* $[a(x)\,T_{t(x)}h](x) = [T_{t(x)}h](x \sqcup \chi)$ *в точке* $x \in X$.

В самом деле, учитывая, что

$$(f \mid \mathrm{i}_0^t(D)\,h) = \int_{X^t} [(f \mid D_+^-(x)\,h + D_0^-\dot h(x) + (\dot f(x) \mid \overset{\circ}{D}_+(x)\,h + \overset{\circ}{D}_0(x)\,\dot h(x))]\,dx,$$

немедленно получим слабую форму неадаптивной формулы Ито, если подставим сюда $\mathbf{D}^\flat\mathbf{T} + \mathbf{D}^\flat\mathbf{D} + \mathbf{I}^\flat\mathbf{D}$ вместо $\mathbf{D}$. Эту формулу можно получить и непосредственно, вычисляя

$$\| \mathrm{i}_0^t(\mathbf{D})\,h\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{i}_0^t(\mathbf{D})\,h \mid T_0 h) = \| T_t h\|^2 - \| T_0 h\|^2$$

без предположения о том, что семейство T_t определяется ядрами (2.7), представляющими его в виде многократного стохастического интеграла (1.5) от $B = \varepsilon(M)$. Действительно, вычисляя квадрат нормы полного однократного интеграла

$$[\mathrm{i}_0^t(D)\,h](\chi) = \int_{X^t} [D_+^-(x)\,h + D_0^-(x)\,\dot h(x)](\chi)\,dx +$$

$$+ \sum_{x \in \chi^t} [\overset{\circ}{D}_+(x)\,h + \overset{\circ}{D}_0(x)\,\dot h(x)](\chi \setminus x),$$

получим $\| \mathrm{i}_0^t(D)\,h\|^2 = \left\| \int \right\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum \middle| \int\right) + \left\| \sum \right\|^2$, где

$$\left\| \int \right\|^2 = \int_{X^t}\int_{X^t} (D_+^-(z)\,h + D_0^-(z)\,\dot h(z) \mid D_+^-(x)\,h + D_0^-(x)\,\dot h(x))\,dx\,dz =$$

$$= \int_{X^t} 2\,\mathrm{Re}\left(\int_{X^{t(x)}} (D_+^-(z)\,h + D_0^-(z)\,\dot h(z))\,dz \mid D_+^-(x)\,h + D_0^-(x)\,\dot h(x)\right)dx;$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\sum \middle| \int\right) = 2\mathrm{Re}\int\Big(\sum_{z \in \chi^t} [\overset{\circ}{D}_+(z)\,h + \overset{\circ}{D}_0(z)\,\dot h(z)](\chi \setminus z) \Big| \int_{X^t} [D_+^-(x)\,h +$$

$$+ D_0^-(x)\,\dot h(x)](\chi)\,dx\Big)\,d\chi = \int_{X^t} 2\,\mathrm{Re}\int\Big(\sum_{z \in \chi^{t(x)}} [\overset{\circ}{D}_+(z)\,h + \overset{\circ}{D}_0(z)\,\dot h(z)](\chi) \Big| D_0^-(x)\,h +$$

$$+ D_0^-(x)\,\dot h(x)\Big)\,d\chi\,dx + \int_{X^t} 2\,\mathrm{Re}\Big(a(x) \int_{X^{t(x)}} [D_+^-(z)\,h + \overset{\circ}{D}_0(z)\,\dot h(z)]\,dz \mid \overset{\circ}{D}_+(x)\,h +$$

$$+ \overset{\circ}{D}_0(x)\,\dot h(x)\Big)\,dx;$$

$$\Big\|\sum\Big\|^2 - \int \sum_{x\in\chi^t} \|[\overset{\circ}{D}_+(x)h + \overset{\circ}{D}_0(x)\dot h(x)](\chi\setminus x)\|^2 d\chi =$$

$$= \int \sum_{\substack{x\neq z\\ x,\, z\in\chi^t}} \Big([\overset{\circ}{D}_+(z)h + \overset{\circ}{D}_0(z)\dot h(z)](\chi\setminus z)\,|\,[\overset{\circ}{D}_+(x)h + \overset{\circ}{D}_0(x)\dot h(x)](\chi\setminus x)\Big)d\chi =$$

$$= \int_{X^t} 2\,\mathrm{Re}\int\Big(a(x)\sum_{z\in\chi^{t(x)}}[\overset{\circ}{D}_+(z)h + \overset{\circ}{D}_0(z)\dot h(z)](\chi\setminus z)\,|\,\overset{\circ}{D}_+(x)h +$$

$$+ \overset{\circ}{D}_0(x)\dot h(x)](\chi)\Big)d\chi\,dx.$$

Здесь использована формула (1.4) в виде

$$\int\sum_{x\in\chi^t}(f(x,\chi)\,|\,h(x,\chi\setminus x))\,d\chi = \int_{X^t}\int(f(x,\chi\sqcup x)\,|\,h(x,\chi))\,d\chi\,dx,$$

дающая итовский член формулы Хадсона — Партасарати для адаптивных интегралов в виде

$$\int\sum_{x\in\chi^t}\|[D_0^+(x)h + \overset{\circ}{D}_0(x)\dot h(x)](\chi\setminus x)\|^2 d\chi = \int_{X^t}\|D_0^+(x)h + \overset{\circ}{D}_0(x)\dot h(x)\|^2 dx,$$

и $[a(x)f(x)](\chi) = f(x, \chi\sqcup x)$ — оператор уничтожения в точке $x\in X$. Суммируя все три интеграла, получим

$$\|\mathrm{i}_0^t(\mathrm{D})h\|^2 = \int_{X^t} 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{i}_0^{t(x)}(\mathrm{D})h\,|\,D_+^-(x)h + D_0^-(x)\dot h(x))\,dx +$$

$$+ \int_{X^t}[\|\overset{\circ}{D}_+(x)h(x) + \overset{\circ}{D}_0(x)\dot h(x)\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(a(x)\,\mathrm{i}_0^{t(x)}(\mathrm{D})h\,|\,\overset{\circ}{D}_+(x)h(x) +$$

$$+ \overset{\circ}{D}_0(x)\dot h(x))]\,dx,$$

что и приводит к слабой форме (2.10) неадаптивного обобщения квантовой формулы Ито для $T_t = T_0 + \mathrm{i}_0^t(\mathrm{D})$. Если при этом $T_t = \varepsilon(K_t)$ — представление (2.2) ядра (2.6), то очевидно, что

$$[\varepsilon(K_t)h](\chi\sqcup x) = [\varepsilon(\dot K_t(\overset{\circ}{x}_0))h + \varepsilon(\dot K(\overset{\circ}{x}_0))\dot h(x)](\chi),$$

и поэтому $a(x)T_{t(x)}h = \overset{\circ}{T}_+(x)h + \overset{\circ}{T}_0(x)\dot h(x)$. В частности, для скалярного случая $\mathcal{K}_x = \mathbb{C}$ при $D_+^- = 0 = D_0$, $D_0^-(x) = D(x) = \overset{\circ}{D}_+(x)$ и $\overset{\circ}{T}_0(x) = T_{t(x)}$, $T_0^-(x) = T(x) = \overset{\circ}{T}_0(x)$, получим

$$\|T_th\|^2 - \|T_0h\|^2 = \int_{X^t} 2\,\mathrm{Re}\,(T_{t(x)}h\,|\,dT_{t(x)}h) +$$

$$+ \int_{X^t}[\|D(x)h\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(T(x)h\,|\,D(x)h)]\,dx,$$

где $T(x)h = a(x)T_{t(x)}h - T_{t(x)}\dot h(x) = [a(x), T_{t(x)}]h$. Это дает формулу Ито для нормальноупорядоченного неадаптивного интеграла $T_t - T_0 = \sum_{X^t}(\Lambda_0^+(dx)D(x) + D(x)\Lambda_-^\circ(dx)) = \sum_{X^t} dT_{t(x)}$ по винеровской стохастической мере $w(\Delta)$, $\Delta\in\mathcal{A}$, представленной в $\mathcal{F}$ коммутативными операторами $\hat w(\Delta) = \Lambda_0^+(\Delta) + \Lambda_-^\circ(\Delta)$. В частном случае, когда операторы T_0, $D(x)$ и, следовательно, T_t представляют антисипативные функционалы $T_0(w)$, $D(x, w)$ и $T_t(w)$ от w: $T_0 = T_0(\hat w)$, $D(x) = D(x, \hat w)$ и $T_t = T_t(\hat w)$, операторы $T(x) = [a(x), T_{t(x)}] = \varepsilon(\mathring{K}_{t(x)}(x))$ определяются производной Малливена $T(x, w) = \partial(x) T_{t(x)}(w)$ как винеровского представления точечной производной $\mathring{K}_{t(x)}(x, \chi) = K_{t(x)}(x \sqcup \chi)$ операторно-значных ядер у стохастического многократного интеграла $T_t(w) = \int K_t(\chi)\, w(d\chi) = I(K_t)$. В этом частном случае формула (2.10) была недавно получена Нулартом в [32]. Заметим, что в адаптивном случае всегда $T_0^{\circ}(x) = T_{t(x)} \otimes I(x)$ и $T_\nu^\mu(x) = 0$ при $\mu \neq \nu$, кроме, быть может, $T_+^-(x) = \varepsilon(K_+^-(x))$. Отсюда немедленно получим

Следствие 2. *Квантовый случайный процесс $T_t = \varepsilon(K_t)$ является адаптивным, если и только если его ядерный процесс K_t является адаптивным в смысле*

$$K_t(\sigma, \upsilon, \tau) = \int K_t\begin{pmatrix}\omega, & \tau\\ \sigma, & \upsilon\end{pmatrix} d\omega = \delta_\varnothing(\sigma_{[t})\, I^\otimes(\upsilon_{[t})\, \delta_\varnothing(\tau_{[t}) \otimes K_t(\sigma^t, \upsilon^t, \tau^t),$$

где $\delta_\varnothing(\chi) = 1$, $\chi = \varnothing$, $\delta_\varnothing(\chi) = 0$, $\chi \neq \varnothing$, $I^\otimes(\chi) = \bigotimes_{x \in \chi} I(x)$, $\chi^t = \chi \cap X^t$, $\chi_{[t} = \{x \in \chi \mid t(x) \geqslant t\}$. *Квантово-стохастическая формула Ито* (2.9) *для таких процессов записывается в сильном виде как*

$$T_t^* T_t - T_0^* T_0 = \int_{X^t} (T_{t(x)}^* dT(x) + dT^*(x)\, T_{t(x)} + dT^*(x)\, dT(x)) =$$

$$= \mathrm{i}_0^t(\mathbf{G}^\flat \mathbf{G} - T^* T \otimes \mathbf{1}),$$

где

$$dT(x) = \Lambda(\mathbf{D}, dx),\ dT^*(x) = \Lambda(\mathbf{D}^\flat, dx),$$

$$dT^*(x)\, dT(x) = \Lambda(\mathbf{D}^\flat \mathbf{D}, dx), \quad \mathbf{1}(x) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & I(x) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

и в слабом виде как (2.10), *где* $a(x)\, T_{t(x)} h = [T_{t(x)} \otimes I(x)]\, \dot{h}(x)$.

2.3. Неадаптивная квантовая эволюция и хронологические произведения

Доказанное свойство непрерывности $*$-представления ε индуктивной $\flat$-алгебры $\mathfrak{B}$ относительно-ограниченных операторно-значных ядер $K(\omega)$ в операторной $*$-алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{G}^+)$ индуктивного предела $\mathcal{G}^+ = \bigcap \mathcal{G}(p)$ позволяет построить квантово-стохастическое функциональное исчисление. Именно, если $K = f(Q_1, \ldots, Q_m)$ есть аналитическая функция ядер $Q_i \in \mathfrak{B}$, полученная как предел полиномов K_n с фиксированным упорядочением некоммутирующих $Q_1, \ldots, Q_m$ в смысле $\| K_n - K \|_\alpha \to 0$ для (p, r)-допустимой четверки $\alpha = (\alpha_\nu^\mu)$ положительных функций $\alpha_\nu^\mu(x) > 0$, то $T = \varepsilon(K)$ есть упорядоченная функция $f(X_1, \ldots, X_m)$ операторов $X_i = \varepsilon(Q_i)$ как предел $\| T_n - T \|_q \to 0$ при $q \geqslant p + 1/r$ соответствующих полиномов $T_n = \varepsilon(K_n)$. Функция $T^* = f^\star(X_1^*, \ldots, X_m^*)$ с транспонированным порядком действия операторов $X_i^* = \varepsilon(Q_i^\flat)$ также определена как q-ограниченный оператор $T^* = \varepsilon(K^\flat)$ для $K^\flat = f^\star(Q_1^\flat, \ldots, Q_m^\flat)$ в шкале $\{\mathcal{G}(p)\}$.

Дифференциальная форма этого исчисления дается некоммутативным и неадаптивным обобщением функциональной формулы Ито

$$(3.1) \qquad dX_t = d\mathrm{i}_0^t(\mathbf{A}) \Rightarrow df(X_t) = d\mathrm{i}_0^t(f(\mathbf{X} + \mathbf{A}) - f(\mathbf{X})),$$

определенным для любой аналитической функции $T_t = f(X_t)$ от $X = \varepsilon(Q_t)$ как обобщенный дифференциал от $\varepsilon(K_t)$ для $K_t = f(Q_t)$. При этом

$$T_\nu^\mu(x) = f(\mathbf{X})_\nu^\mu(x), \qquad G_\nu^\mu(x) = f(\mathbf{X} + \mathbf{A})_\nu^\mu(x),$$

где $f(\mathbf{Z})(x) = f(\mathbf{Z}(x))$ есть треугольная матрица, которая является аналитической функцией от треугольной матрицы $\mathbf{Z}(x)$, представляющей $\mathbf{Q}_{t(x)}(x)$ и $\mathbf{Q}_{t(x)]}(x)$ соответственно как

$$\mathbf{X}(x) = \varepsilon(\mathbf{Q}_{t(x)}(x)) \text{ и } \mathbf{X}(x) + \mathbf{A}(x), \qquad A_\nu^\mu(x) = \varepsilon(\dot{Q}_{t(x)}(x_\nu^\mu) - \dot{Q}_{t(x)}(x_\nu^\mu)).$$

Для упорядоченной функции $T_t = f(X_{1t}, \ldots, X_{mt})$ это может быть записано в терминах X_{it} с дифференциалом $dX_{it} = d\mathrm{i}_0^t(\mathbf{A}_i)$ и $\mathbf{Z}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{A}_i$ как

$$dT_t = d\mathrm{i}_0^t(f(\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_m) - f(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m)).$$

В частности, если все треугольные оператор-матрицы $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i\}$ коммутируют, то можно получить экспоненциальную функцию $T_t = \exp\{X_t\}$ для $X_t = \sum_{i=1}^m X_{it}$ как решение следующего квантово-стохастического неадаптивного дифференциального уравнения:

$$dT_t = d\mathrm{i}_0^t[\mathbf{T}(\mathbf{S} - \hat{\mathbf{1}})], \quad T_0 = I, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{S}(x) = \exp\left\{\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i(x)\right\}$. Теперь мы займемся изучением проблемы решения общего линейного квантово-стохастического уравнения типа (3.2), которое соответствует интегральному уравнению

$$T_t = T_0^t + \mathrm{i}_0^t(\mathbf{T}\mathbf{A}^t) \tag{3.3}$$

для $T_0^t = I$ и $\mathbf{A}^t(x) = \mathbf{S}(x) - \hat{\mathbf{1}}(x)$, не зависящих от t. Здесь в общем случае T_0^t — заданная функция от $t \in \mathbb{R}_+$ со значениями в непрерывных операторах $\mathscr{G}^+ \to \mathscr{G}_-$, $\mathbf{A}^t(x) = [A^t(x)_\nu^\mu]$ — треугольная матричная функция от $x \in X$, $A^t(x)_\nu^\mu = 0$ при $\mu = +$ или $\nu = -$ и ненулевыми значениями в непрерывных операторах

$$A_+^-(x) : \mathscr{G}^+ \to \mathscr{G}_-, \qquad A_0^\circ(x) : \mathscr{G}^+ \otimes \mathscr{K}_x \to \mathscr{G}_- \otimes \mathscr{K}_x,$$

$$A_+^\circ(x) : \mathscr{G}^+ \to \mathscr{G}_- \otimes \mathscr{K}_x, \qquad A_0^-(x) : \mathscr{G}^+ \otimes \mathscr{K}_x \to \mathscr{G}_-,$$

например, $T_0^t = T_0 U_0^t$, $\mathbf{A}^t(x) = \mathbf{A}(x)(U_{t(x)}^t \otimes \mathbf{I}(x))$, где $\{U_s^t \mid t > s \in \mathbb{R}_+\}$ — заданное двухпараметрическое семейство эволюционных операторов на $\mathscr{G}^+$. Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть оператор-функции*

$$T_0^t = \varepsilon(K_0^t), \qquad A^t(x)_\nu^\mu = \varepsilon(L^t(\mathbf{x}_\nu^\mu))_{\nu=0,+}^{\mu=-,0}$$

являются представлениями (2.2) *ядерных функций* $K_0^t(\omega)$, $L^t(x_\nu^\mu, \mathbf{v})$, *где* $\omega = (\omega_\nu^\mu)$, $\omega_\nu^\mu \in \mathscr{X}$, $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_\nu^\mu)$, $\mathrm{v}_\nu^\mu \in \mathscr{X}$, x_ν^μ — *элементарные таблицы* (1.7). *Тогда интегральное уравнение* (3.3) *является операторным представлением* $T_t = \varepsilon(K_t)$ *треугольной системы рекурсивных уравнений*

$$K_t(\omega) = K_0^t(\omega) + \sum_{x \in \omega^t} [K_{t(x)} \cdot L_x^t](\omega), \tag{3.4}$$

где оператор-ядра $L^t_x(\omega)$ *определяются почти всюду (при попарно-непересекающихся* $\omega^\mu_\nu \in \mathscr{X}$*) как* $L^t_x(\omega) = L^t(x^\mu_\nu, \omega \setminus x^\mu_\nu)$*, если* $x \in \omega^\mu_\nu$*, и* $L^t_x(\omega) = 0$*, если* $x \notin \bigsqcup \omega^\mu_\nu$*, и* $K_{t(x)} \cdot L^t_x$ *— ядерное произведение. Решение уравнения* (3.4) *однозначно определено почти всюду (при* $t(x) \neq t(x')$*,* $\forall x \neq x' \in \bigsqcup \omega^\mu_\nu$*) как сумма*

$$K_t(\omega) = \sum_{\chi \subseteq \omega^t} M_t(\chi, \omega \setminus \chi) = \nu^t_0(\omega, M_t)$$

хронологических ядерных произведений

$$M_t(\chi, \upsilon) = [K^{t(x_1)}_0 \cdot L^{t(x_2)}_{x_1} \ldots L^{t(x_m)}_{x_{m-1}} \cdot L^t_{x_m}](\chi \bigsqcup \upsilon) \tag{3.5}$$

по разбиениям $\chi = x_1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup x_m$ *таблиц* $\chi = (\chi^\mu_\nu)$ *на элементарные таблицы* $\boldsymbol{x}_i$ *вида* (1.7)*, соответствующие* $x_i \in \chi^\mu_\nu \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_i = x^\mu_{i\nu}$*. Оно описывает единственное решение уравнения* (3.3) *в виде обобщенного многократного интеграла*

$$T_t = \iota^t_0(B_t), \; B_t(\chi) = \varepsilon(M_t(\chi)),$$

если представление $B_t(\chi)$ *произведений* (3.5) *удовлетворяет условию* $\| B_t \|^t_p(v) < \infty$ *для некоторых допустимых функций* $p \in \mathscr{P}_1$ *и* $v^{-1}, s^{-1} \in \mathscr{P}_0$.

Доказательство. Подставим в (3.3) $T^t_0 = \varepsilon(K^t_0)$, $\mathrm{A}^t(x) = \varepsilon(L^t(x))$ и $T_t = \varepsilon(K_t)$ и учтем, что $\mathrm{T}(x)\,\mathrm{A}^t(x) = \varepsilon(K_{t(x)}(x) \cdot \mathrm{L}^t(x))$, где $\mathrm{K}_t(x) = [K_t(x)^\mu_\nu]$ — треугольная матрица $K_t(x)^\mu_\nu = 0$, $\forall \mu > \nu$ с ненулевыми элементами-ядрами $K_t(x, \upsilon)^-_- = K_t(\upsilon) = K(x, \upsilon)^+_+$, $K_t(x, \upsilon)^\mu_\nu = K_t(x^\mu_\nu \bigsqcup \upsilon)$, $\mu \neq +$, $\nu \neq -$, и $\mathrm{L}^t(x) = [L^t(x)^\mu_\nu]$, $L^t(x)^\mu_\nu = 0$, $\forall \mu > \nu$, а элементы $L^t(x, \upsilon)^-_- = 0 = L^t(x, \upsilon)^+_+$, $x \notin \bigsqcup \upsilon^\mu_\nu$, $L^t(x)^\mu_\nu = \dot{L}^t_x(x^\mu_\nu)$ определяются точно так же ядрами $L^t_x(\omega) = L^t(x, \omega \setminus x)$, $L^t_x(\omega) = 0$ при $x \notin \omega^\mu_\nu$, $\forall \mu \neq +$, $\nu \neq -$, как и элементы $K_t(x, \upsilon)^\mu_\nu$ по ядрам $K_t(\omega)$. В результате получим, что уравнение (3.3) удовлетворяется, если

$$K_t(\omega) = K^t_0(\omega) + \sum_{x \in \omega^t} [K_{t(x)}(x) \cdot \mathrm{L}^t(x)]^{\mu(x)}_{\nu(x)}(\omega \setminus x) =$$

$$= K^t_0(\omega) + \sum_{\mu < +}^{\nu > -} \sum_{x \in \omega^\mu_\nu}^{t(x) < t} [K_{t(x)} \cdot L^t_x](x^\mu_\nu \bigsqcup \omega \setminus x^\mu_\nu),$$

что соответствует уравнению (3.4). Решение этого уравнения для любой таблицы $\omega = (\omega^\mu_\nu)^{\mu = -, 0}_{\nu = 0, +}$ с хронологически упорядоченными элементами представляется как сумма (2.6) от хронологических произведений (3.5) операторно-значных ядер $M_t(\varnothing, \omega) = K^t_0(\omega)$ и $L^t_x(\omega)$, поскольку

$$K_t(\omega) = \sum_{\chi \subseteq \omega^t} M_t(\chi, \omega \setminus \chi) = M_t(\varnothing, \omega) + \sum_{|\chi| \geqslant 1}^{\chi \subseteq \omega^t} M_t(\chi, \omega \setminus \chi) =$$

$$= M_t(\varnothing, \omega) + \sum_{x \in \omega^t} \sum_{\chi \in \omega^{t(x)}} M_t(\chi \bigsqcup x, \omega \setminus (\chi \bigsqcup x)) =$$

$$= K^t_0(\omega) + \sum_{x \in \omega^t} \sum_{\chi \subseteq \omega^{t(x)}} [M_{t(x)} \cdot L^t_x](\omega) = K^t_0(\omega) + \sum_{x \in \omega^t} [K_{t(x)} \cdot L^t_x](\omega),$$

где использовано представление (3.5) в рекуррентном виде

$$M_t(\chi \bigsqcup x, \upsilon) = [M_{t(x)}(x) \cdot \mathrm{L}^t(x)]^{\mu(x)}_{\nu(x)}(\chi \bigsqcup \upsilon) = [M_{t(x)} \cdot L^t_x](x \bigsqcup \chi \bigsqcup \upsilon).$$

Это определяет представление решения $T_t = \varepsilon(K_t)$ в виде неадаптивного квантово-стохастического интеграла (1.5) от $B_t = \varepsilon(M_t)$, поскольку согласно лемме 2 $\varepsilon \circ \mathrm{v}_0^t = \overset{\circ}{\iota}_t \circ \varepsilon$, если выполняется условие интегрируемости (1.6).

Теорема 3. *Пусть $U_s^t = \varepsilon(V_s^t)$ — представления на $\mathcal{G}$ эволюционного семейства $\{V_s^t \mid t \geqslant s \in \mathbb{R}_+\}$ относительно ограниченных операторнозначных ядер*

$$V_s^t\begin{pmatrix}\omega_+^-, & \omega_0^-\\ \overset{\circ}{\omega}_+, & \overset{\circ}{\omega}_0\end{pmatrix} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}^{\otimes}(\omega_0^-) \otimes \mathcal{K}^{\otimes}(\overset{\circ}{\omega}_0) \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}^{\otimes}(\overset{\circ}{\omega}_0) \otimes \mathcal{K}^{\otimes}(\overset{\circ}{\omega}_+),$$

удовлетворяющий условию $V_r^s \cdot V_s^t = V_r^t$, $\forall r < s < t$ относительно ядерного произведения (1.2.9) с единицей $V_t^t(\omega) = I \otimes \mathrm{I}^{\otimes}(\omega)$ и

$$K_0^t(\omega) = [K_0^s \cdot V_s^t](\omega), \quad L_x^t(\omega) = [L_x^s \cdot V_s^t](\omega), \quad \forall t > s$$

— ядерные произведения, определяющие представление (3.4) уравнения (3.3). Тогда ядерное хронологическое произведение

$$K_t(\omega) = [K_0^{t(x_1)} \cdot F_{x_1}^{t(x_2)} \ldots F_{x_{n-1}}^{t(x_n)} \cdot F_{t(x_n)}^t](\omega) \tag{3.6}$$

для $F_x^t(\omega) = L_x^t(\omega) + V_{t(x)}^t(\omega)$, $\omega^t = x_1 \sqcup \ldots \sqcup x_n$ есть единственное решение системы (3.4) для почти всех $\omega = (\omega_\nu^\mu)$ (при $t(x) \neq t(x')$, $\forall x \neq x' \in \bigsqcup \omega_\nu^\mu$). Это дает представление решения уравнения (3.3) в виде $T_t = \varepsilon(K_t)$, определенном на $\mathcal{G}$ как относительно ограниченный оператор для каждого t, если произведение (3.6) удовлетворяет условию $\| K_t \|_\alpha < \infty$ относительно нормы (2.4) для допустимой в смысле (2.5) четверки (α_ν^μ) функций $\alpha_\nu^\mu(x)$, равных нулю при $t(x) > t$. Операторы T_t при этом являются изометрическими $T_t^* T_t = \hat{I}$ (унитарными $T_t^* = T_t^{-1}$), если и только если изометрическими (унитарными) являются операторы T_0 и U_s^t, $t \geqslant s \geqslant 0$, и, следовательно, $T_0^t = T_0 U_0^t$, $\forall t$, а треугольные оператор-матрицы $\mathbf{S}(x) = [S_\nu^\mu(x)]$, определяющие генераторы уравнения (3.3) в виде $\mathbf{A}^t(x) = (\mathbf{S}(x) - \hat{\mathbf{1}})(U_{t(x)}^t \otimes \otimes \mathbf{1}(x))$, являются псевдоизометрическими $\mathbf{S}^\flat(x)\mathbf{S}(x) = \hat{I} \otimes \mathbf{1}(x)$ (псевдоунитарными: $\mathbf{S}^\flat(x) = \mathbf{S}(x)^{-1}$):

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{S}_0(x)^* \overset{\circ}{S}_0(x) = \hat{I} \otimes I(x), \quad S_+^-(x)^* + \overset{\circ}{S}_+(x)^* \overset{\circ}{S}_+(x) + S_+^-(x) = 0, \\ S_0^-(x)^* + \overset{\circ}{S}_0(x)^* \overset{\circ}{S}_*(x) = 0, \quad \overset{\circ}{S}_+(x)^* \overset{\circ}{S}_0(x) + S_0^-(x) = 0 \end{gathered} \tag{3.7}$$

(и $\overset{\circ}{S}_0(x)$ являются унитарными: $\overset{\circ}{S}_0(x)^* = \overset{\circ}{S}_0(x)^{-1}$) для почти всех $x \in X^t$.

Доказательство. Пусть $\upsilon = \upsilon_0 \sqcup \upsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \upsilon_m$ есть разбиение таблицы $\upsilon = (\upsilon_\nu^\mu) = \omega \setminus \chi$ на подтаблицы $\upsilon_i = x_i^1 \sqcup \ldots \sqcup x_i^{n_i}$, определяемые точками $x_i \in X^t$ элементарных таблиц x_i хронологического разбиения $\chi = x_1 \sqcup \ldots \sqcup x_m$ так, что $t(x_i) < t(x_i^1) < \ldots < t(x_i^{n_i}) < < t(x_{i+1})$, $t(x_0) = 0$. Тогда

$$K_0^{t(x_1)} = K_0^{t(x_0^1)} \cdot V_{t(x_0^1)}^{t(x_0^2)} \ldots V_{t(x_0^{n_0})}^{t(x_1)}, \quad L_{x_i}^{t(x_{i+1})} = L_{x_i}^{t(x_i^1)} \cdot V_{t(x_i^1)}^{t(x_i^2)} \ldots V_{t(x_i^{n_i})}^{t(x_{i+1})},$$

$$K_t(\omega) = \sum_{\chi \subseteq \omega^t} [K_0^{t(x_1)} \cdot L_{x_1}^{t(x_2)} \ldots L_{x_{m-1}}^{t(x_m)} \cdot L_{x_m}^t](\chi \sqcup \upsilon) =$$

$$= [K_0^{t(z_1)} \cdot (V_{t(z_1)}^{t(z_2)} + L_{z_1}^{t(z_2)}) \ldots (V_{t(z_n)}^t + L_{z_n}^t)](\omega),$$

где точки $z_1, \ldots, z_n \in X^t$, $t(z_1) < \ldots < t(z_n)$ определяют разбиение $\omega = \bigsqcup z_i$ на элементарные таблицы (1.7). Таким образом, хронологическое произведение (3.6) ядер $F_z^t = L_z^t + V_{t(z)}^t$ определяет единственное решение системы (3.4), которое является псевдоизометрическим (псевдоунитарным) ядром, если и только если таким является каждый из сомножителей $K_0^{t(z_1)}$, $F_{z_1}^{t(z_2)}, \ldots, F_{z_n}^t$. Если при этом ядро $K_t(\omega)$ оказывается локально ограниченным при каждом t относительно четверки $\alpha = (\alpha_\nu^\mu)$ положительных локально-интегрируемых функций $\alpha_\nu^\mu(x)$ в смысле

$$\int\limits_{X^t} \alpha_+^-(x)\,dx < \infty, \int\limits_{X^t} (\alpha_+^\circ(x)^2 + \alpha_0^-(x)^2)\, r(x)\,dx < \infty, \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X^t} \frac{\alpha_0^\circ(x)}{p(x)} < \infty,$$

то согласно теореме 2 представление (2.2) определяет $\flat$-гомоморфизм ε: $K_t \to T_t$ в $*$-алгебру $(q \geqslant p + 1/r)$ — ограниченных операторов на $\mathcal{G}^+$, обладающих экспоненциальной оценкой (2.6). При этом T_t есть изометрия (унитарный оператор), если ядро K_t является псевдоизометрическим $K_t^\flat \cdot K_t = I \otimes 1^\otimes$ (псевдоунитарным: $K_t^\flat = K_t^{-1}$) относительно ядерного произведения (1.2.9) и псевдоинволюции $K_t \mapsto K_t^\flat$. Последнее в силу представления (3.6) в виде конечного произведения ядер $K_0 = K_0^\circ$, $V_0^{t(x_1)}$ и $F_z = F_z^{t(z)}$, $V_{t(z)}^t$, $z \in \omega$, $t > t(z)$, для каждого хронологически упорядоченного набора $\omega = (\omega_\nu^\mu)$ обеспечивается соответствующими свойствами ядер K_0, V_s^t, $s \leqslant t$, и F_z (для почти всех $z \in X^t$), так что ядерные матрицы $F(x) = [F_\nu^\mu(x)]$ с элементами $F_\nu^\mu(x) = 0$, $\mu > \nu$, $F_-^-(x) = I = F_+^+(x)$, $F_\nu^\mu(x) = F(x_\nu^\mu)$, $\mu \neq +$, $\nu \neq -$ являются псевдоизометрическими (псевдоунитарными). Это приводит к изометричности (унитарности) операторов $T_0 = \varepsilon(K_0)$, $U_s^t = \varepsilon(V_s^t)$ и псевдоизометричности (псевдоунитарности) треугольной оператор-матрицы $\mathbf{S}(x) = [\varepsilon(F_\nu^\mu(x))]$, где $S_\nu^\mu(x) = 0$, $\mu > \nu$, $S_-^-(x) = I = S_+^+(x)$, $S_\nu^\mu(x) = \varepsilon(F(x_\nu^\mu))$, $\mu \neq +$, $\nu \neq -$, определяющей генератор $A(x) \equiv A^{t(x)}(x)$ как $\mathbf{S}(x) - I \otimes \mathbf{1}(x)$.

В силу единственности представлений $T_0 = \varepsilon(K_0)$, $U_s^t = \varepsilon(V_s^t)$ и $\mathbf{S}(x) = \varepsilon(\mathbf{F}(x))$ с точностью до $\flat$-идеала, описанного в секции 2 главы I, полученные условия являются необходимыми и достаточными для изометричности (унитарности) решений $T_t = \varepsilon(K_t)$ неадаптивного квантово-стохастического уравнения (3.3), однозначно (с точностью до этого идеала) определяемого псевдоизометрическими (псевдоунитарными) ядрами (3.6). Записывая условие $\mathbf{S}^\flat\mathbf{S} = I \otimes \mathbf{1}$ в терминах матричных элементов $S_\nu^\mu(x)$, $S_{-\nu}^{\flat\mu} = S_{-\mu}^{\nu *}$, мы получаем систему (3.7):

$$[\mathbf{S}^\flat\mathbf{S}](x) = \begin{bmatrix} 1, & S_+^\circ(x)^*, & S_+^-(x)^* \\ 0, & S_0^\circ(x)^*, & S_0^-(x)^* \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & S_0^-(x), & S_+^-(x) \\ 0, & S_0^\circ(x), & S_+^\circ(x) \\ 0, & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \otimes \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & I(x), & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема 3, таким образом, доказана.

З а м е ч а н и е 3. *Пусть эволюционное семейство $\{U_s^t\}$ является решением нестохастического неадаптивного уравнения*

$$U_s^t = I + \int\limits_{s \leqslant t(x) < t} U_s^{t(x)} S_+^-(x)\,dx, \quad s < t, \tag{3.8}$$

определенным в случае диссипативности $S_+^-(x) + S_+^-(x)^* < 0$ *как согласованное семейство сжимающих операторов* U_s^t: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $\| U_s^t \| \leqslant 1$. *Тогда решение дифференциального уравнения* (3.2) *можно представить в виде чисто стохастического квантового многократного интеграла* $T_t = \mathfrak{i}_0^t(B_t)$, *удовлетворяющего уравнению* (3.3) *с* $T_0^t = U_0^t$ *и генераторами* $\mathbf{A}^t(x) = \mathbf{A}(x)\,(U_{t(x)}^t \otimes \otimes 1(x))$, *где*

$$A_+^-(x) = 0,\ A_+^\circ(x) = S_+^\circ(x),\ A_0^-(x) = S_0^-(x),\ A_0^\circ(x) = S_0^\circ(x) - \hat{I} \otimes I(x).$$

В случае локально абсолютно-интегрируемой операторной функции $S_+^-(x)$ *в смысле* $\int_{X^t} \| S_+^-(x) \| \, dx < \infty$, $\forall t$, *когда*

$$U_s^t = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{s<t(x_1)<\ldots<t(x_n)<t} \!\!\cdots\! \int S_+^-(x_1)\ldots S_+^-(x_n) \prod_{i=1}^{n} dx_i = \int_{\mathcal{X}^t} S_+^-(\chi)\, d\chi,$$

где $\mathcal{X}_s^t = \{\chi \in \mathcal{X} \mid \chi \leqslant [s,\ t)\}$, $S_+^-(x_1, \ldots, x_n) = S_+^-(x_1) \ldots S_+^-(x_n)$, *это представление получается непосредственно интегрированием по* $\omega_+^- \in \mathcal{X}$ *ядра* $K_t(\omega) = [F_{z_1} \cdots F_{z_n}](\omega)$, *определяемого для* $\omega^t = z_1 \sqcup \ldots \sqcup z_n$ *как хронологическое произведение ядер* $F_x(\omega) = F_\nu^\mu(x, \omega \setminus x_\nu^\mu)$, $\forall \omega = (\omega_\nu^\mu)$ *при* $x \in \omega_\nu^\mu$ *и* $F_x(\omega) = I \otimes 1^\otimes(\omega)$ *при* $x \notin \bigsqcup \omega_\nu^\mu$, *соответствующих представлению* $S_\nu^\mu(x) = \varepsilon(F_\nu^\mu(x))$.

Действительно, запишем решение уравнения $T_t = \hat{I} + \mathfrak{i}_0^t(\mathbf{T}(\mathbf{S} - \hat{\mathbf{I}}))$ в виде $T_t = \varepsilon(K_t)$, где K_t —ядро (3.6) при $K_0^t = \mathrm{I}^\otimes$, $F_x^t = F_x$, не зависящих от t. Обозначив $\{z_1, \ldots, z_n\}$ подцепь цепи $\{x_1, \ldots, x_m\}$ разложения $\omega^t = x_1 \sqcup \ldots \sqcup x_m$, соответствующую элементам $z_i \notin \omega_+^-$, и представляя интеграл от $K_t(\omega)$ по $\omega_+^- \in \mathcal{X}$ в виде кратного интеграла по $\chi_i \in \mathcal{X}_{t(z_i)}^{t(z_{i+1})}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где $t(z_0) = 0$, $t(z_{n+1}) = t$ и $\nu_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, \ldots, n$, получим в соответствии с формулой (1.2.9) ядерное хронологическое произведение

$$K_t(\omega^\circ, \mathbf{v}, \omega_0) = [V_0^{t(z_1)} \cdot F_{z_1} \cdot V_{t(z_1)}^{t(z_2)} \ldots F_{z_n} \cdot V_{t(z_n)}^t](\omega^\circ, \mathbf{v}, \omega_0).$$

Здесь в скобках произведение интегральных ядер $F_x(\omega^\circ,\ \upsilon,\ \omega_0) = \int F_x\begin{pmatrix}\omega & \omega_0\\ \omega^\circ & \mathbf{v}\end{pmatrix} d\omega$ и

$$V_s^t(\omega^\circ, \mathbf{v}, \omega_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{s\leqslant t(x_1)<\ldots<t(x_n)<t} \!\!\int [F_+^-(x_1)\ldots F_+^-(x_n)](\omega^\circ, \mathbf{v}, \omega_0) \prod_{i=1}^{n} dx_i,$$

где $[F_+^-(x)](\omega^\circ, \mathbf{v}, \omega_0) = F_+^-\begin{pmatrix}x, & \omega_0\\ \omega^\circ & ,\mathbf{v}\end{pmatrix}$, $x \in X$. С другой стороны, этот же результат получится, если проинтегрировать по $\omega_+^- \in \mathcal{X}$ ядерное произведение

$$K_t(\omega) = [V_0^{t(z_1)} \cdot F_{z_1} \cdot V_{t(z_1)}^{t(z_2)} \ldots F_{z_n} V_{t(z_n)}^t](\omega),$$

где ядра $V_s^+(\omega) = [F_{x_1} \cdots F_{x_n}](\omega)$ при $X_s^t \cap \omega_+^- = x_1 \sqcup \ldots \sqcup x_n$ определяют представление $U_s^t = \varepsilon(V_s^t)$ решения уравнения (3.8) при $S_+^-(x) = \varepsilon(F_+^-(x))$. Полагая $F_x(\omega) = I \otimes 1^\otimes(\omega)$ при $x \in \omega_+^- \cap X^t$ и учитывая согласованность $V_r^s \cdot V_s^t = V_r^t$, получим решение уравнения (3.2), представленное как решение уравнения (3.3) с генераторами $A^t(x)^\mu_\nu = \varepsilon(L^t(x^\mu_\nu))$, где

$$L^t(x^\mu_\nu, \upsilon) = [(F_x - \mathrm{I}^\otimes)\cdot V^t_{t(x)}](\upsilon \sqcup x^\mu_\nu) = 0 \text{ при } (\mu, \nu) = (-, +).$$

Это решение можно записать в виде квантово-стохастического многократного неадаптивного интеграла (1.5) от $B_t(\chi) = \varepsilon(M_t(\chi))$, где $M_t(\chi, \upsilon)$ определяется в (3.5) ядрами $K^t_0 = V^t_0$ и $L^t_x = (F_x - \mathrm{I}^\otimes)\cdot V^t_{t(x)}$. Оператор-функция $B_t(\chi)$ при этом равна нулю, если $\chi^-_+ \neq \varnothing$, поскольку произведение (3.5) обращается в нуль при $x_i \in \chi^-_+$. Отсюда немедленно получим

Следствие 3. *Пусть* $S^\mu_\nu(x) = F^\mu_\nu(x) \otimes \hat{1}$, *где* $F^-_+(x)$ — *замкнутые диссипативные операторы, для которых существует согласованное семейство* $\{V^t_s\}$ *сжимающих операторов в* $\mathcal{H}$, *представляющих решение уравнения* (3.8) *в виде* $U^t_s = V^t_s \oplus \hat{1}$ *(достаточно, например, потребовать локальную абсолютную интегрируемость* $\int_{X^t} \| F^-_+(x) \| dx < \infty$, $\forall t$).

Пусть также оператор-функции

$$\overset{\circ}{F}_+(x) : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_x, \quad F^-_0(x) : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_x \to \mathcal{H}$$

локально квадратично-интегрируемы в смысле

$$\| F \|^{(2)}_t(r) = \Big(\int_{X^t} \| F(x) \|^2 r(x)\, dx\Big)^{1/2} < \infty$$

и $\| \overset{\circ}{F}_0 \|^{(\infty)}_{t,p} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X^t} \{\| \overset{\circ}{F}_0(x) \| / p(x)\} \leqslant 1$ *для некоторых* $v^{-1} \in \mathcal{P}_0$ *и* $p \in \mathcal{P}_1$. *Тогда решение* $T_t = \iota^t_0(B)$, $B(\chi) = M(\chi) \otimes \hat{1}$ *квантово-стохастического уравнения* (3.2) *однозначно определено для каждого* $t \geqslant 0$ *как относительно-ограниченный оператор* $T_t = \varepsilon(K_t)$, *представляющий по формуле* (2.8) *адаптивные хронологические произведения*

$$(3.9)\quad K_t(\omega^\circ, \upsilon, \omega_0) = V^{t(x_1)}_0 \odot F(x_1) \odot V^{t(x_2)}_{t(x_1)} \odot \ldots \odot F(x_n) \odot V^t_{t(x_n)}.$$

Здесь $\{x_1, \ldots, x_n\} = (\omega^\circ \sqcup \upsilon \sqcup \omega_0) \cap X^t$ — *хронологически упорядоченная цепь* $0 \leqslant t(x_1) < \ldots < t(x_n) < t$, $x = \overset{\circ}{x}_+$, *если* $x \in \omega^\circ$, $x = \overset{\circ}{x}_0$, *если* $x \in \upsilon$, $x = x^-_0$, *если* $x \in \omega_0$, — *элементарные таблицы* (1.7) $F(x^\mu_\nu) = F^\mu_\nu(x)$ — *одна из трех функций* $\overset{\circ}{F}_+$, $\overset{\circ}{F}_0$, F^-_0, *и* $\odot$ *означает полутензорное произведение, определяемое рекуррентно по формуле*

$$K(\upsilon) \odot F(\chi) = (K(\upsilon) \otimes I^\otimes(\overset{\circ}{\chi}_0 \sqcup \overset{\circ}{\chi}_+))\,(F(\chi) \otimes I^\otimes(\upsilon^-_0 \sqcup \overset{\circ}{\upsilon}_0)$$

для $\upsilon^-_0 = \omega_0$, $\overset{\circ}{\upsilon}_0 = \upsilon$, $\overset{\circ}{\upsilon}_+ = \omega^\circ$, $\chi = x^-_0, \overset{\circ}{x}_0, \overset{\circ}{x}_+$ *и* $F(x^-_+) = V^t_{t(x)}$.

При этом семейство T_t *является адаптированным, может быть представлено как число квантово-стохастический интеграл* (1.5) *от ядер Маассена — Мейера*

$$M_t(\omega^\circ, \upsilon, \omega_0) = V^{t(x_1)}_0 \odot L(x_1) \odot V^{t(x_2)}_{t(x_1)} \odot \ldots \odot L(x_n) \odot V^t_{t(x_n)},$$

где $\omega^\circ \sqcup \upsilon \sqcup \omega_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $L(x^\mu_\nu) = F(x^\mu_\nu) - I \otimes \delta^\mu_\nu \equiv L^\mu_\nu(x)$ *и справедлива оценка*

$$(3.10)\qquad \| T_t \|_p(r) \leqslant \exp\Big\{\frac{1}{2}\int_{X^t} (\| L^-_0(x) \|^2 + \| \overset{\circ}{L}_+(x) \|^2)\, r(x)\, dx\Big\}.$$

В самом деле, поскольку $\| V_s^t \| \leqslant 1$, ядра (3.9) являются ограниченными:

$$\| K_t (\omega^\circ, v, \omega_0) \| \leqslant \| F_+^\circ (\omega^\circ) \|_t \| F_0^\circ (v) \| \| F_0^- (\omega_0) \|_t,$$

относительно $\| F (\omega) \|_t = \prod_{x \in \omega^t} \| F (x) \|$. Используя неравенство (2.6), где следует положить $\alpha_+^\circ (x) = \| L_+^\circ (x) \|$, $\alpha_0^- (x) = \| L_0^- (x) \|$ при $x \in X^t$, $\alpha_0^\circ (x) = 0 = \alpha_0^- (x)$ при $x \in X^t$, $\alpha_+^\circ (x) = 0 = \alpha_0^- (x)$ при $t (x) \geqslant t$, $\alpha_0^\circ (x) = \| F_0^\circ (x) \|$ при $x \in X^t$, $\alpha_0^\circ (x) = 1$ при $t (x) \geqslant t$, $\alpha_+^- (x) = 0$ при всех $x \in X$, получим оценку (3.10), соответствующую $\| T_t \|_\alpha = 1$.

Пример. Построим решение уравнения (3.2), соответствующее псевдоунитарным генераторам $\mathbf{S} (x) = \mathbf{F} (x) \otimes \hat{1}$ с треугольными операторами $\mathbf{F} (x) = e^{i\mathbf{H}(x)}$, где $\mathbf{H}^\flat (x) = \mathbf{H} (x)$ — псевдосамосопряженные операторы с компонентами $H_\nu^\mu (x) = 0$ при $\mu = +$ или $\nu = -$, $H_0^- (x)^* = H_t^\circ (x)$, $H_0^\circ (x)^* = H_0^\circ (x)$. Предполагая выполненным условие локальной абсолютной интегрируемости $\| F_+^- \|_t^{(1)} = \int_{X^t} \| F_+^- (x) \| \, dx < \infty$, приводящее в силу псевдоунитарности $\mathbf{F}$ к

$$\| F_+^\circ \|_t^{(2)} = \Big(\int_{X^t} \| F_+^\circ (x) \|^2 \, dx \Big)^{1/2} < \infty, \quad \| F_0^- \|_t^{(2)} = \Big(\int_{X^t} \| F_0^- (x) \|^2 \, dx \Big)^{1/2} < \infty$$

и $\| F_0^\circ \|_t^{(\infty)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X^+} \| F_0^\circ (x) \| = 1$, определим операторы $T_t = \varepsilon (K_t)$ как представления хронологически упорядоченных произведений $K_t (\omega) = F (x_1) \odot \ldots \odot F (x_n)$ для $\bigsqcup_{i=1}^n x_i = \omega^t$, где $F (x_\nu^\mu) = F_\nu^\mu (x)$ — матричные элементы экспоненты $\exp \{ i\mathbf{H} (x) \}$. Вычислим эти элементы, находя по индукции степени $\mathbf{H}^\circ = \mathbf{I}$, $\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}$,

$$\mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} 0, & H_0^- H_0^\circ, & H_0^- H_+^\circ \\ 0, & H_0^\circ H_0^\circ, & H_0^\circ H_+^\circ \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^{n+2} = \begin{bmatrix} 0, & H_0^- H_0^{\circ n-1}, & H_0^- H_0^{\circ n} H_+^\circ \\ 0, & H_0^{\circ n+2}, & H_0^{\circ n-1} H_+^\circ \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате получим $\mathbf{F} = \sum_{n=0}^\infty (i\mathbf{H})^n / n!$ как треугольную матрицу

$$F_\nu^\mu = 0, \ \mu > \nu, \ F_-^- = I = F_+^+,$$

$$F_0^\circ = e^{iH_0^\circ}, \ F_+^- = H_0^- [(e^{iH_0^\circ} - I_0^\circ - iH_0^\circ) / H_0^\circ H_0^\circ] H_+^\circ + iH_+^-,$$

$$F_+^\circ = [(e^{iH_0^\circ} - I_0^\circ) / H_0^\circ] H_+^\circ, \ F_-^\bullet = H_0^- [(e^{iH_0^\circ} - I_0^\circ) / H_0^\circ].$$

Подставляя сопряженные операторы H_0^-, H_+° в виде

$$H_0^- = F^* H_0^\circ - iE^*, \ H_+^\circ = H_0^\circ F + iE,$$

где операторы $E (x)$, $x \in X$, однозначно определены условиями $H_0^\circ (x) \, E (x) = 0$, можно получить следующую каноническую декомпозицию для операторов $L_\nu^\mu (x) = F_\nu^\mu (x) - I \otimes \delta_\nu^\mu \, I (x)$ унитарной квантово-стохастической эволюции T_t:

$$\begin{pmatrix} L_+^- & L_0^- \\ L_+^\circ & L_0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^* L_0^\circ F, & F^* L_0^\circ \\ L_0^\circ F, & L_0^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} E^* E, & E^* \\ -E, & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iH, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

где $H = H_+^- - F^* H_0^\circ F$, $L_0^\circ = \exp\{iH_0^\circ\} - I_0^\circ$. Каждая из этих трех таблиц $\mathbf{L}_i$, $i = 1, 2, 3$, соответствует псевдоунитарной треугольной матрице $\mathbf{F}_i = \mathbf{I} + \mathbf{L}_i$, причем эти матрицы коммутируют и $\prod_{i=1}^{3} \mathbf{F}_i = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{3} \mathbf{L}_i = \mathbf{F}$ в силу ортогональности $\mathbf{L}_i$. Первая может быть диагонализирована с помощью псевдоунитарного преобразования $\mathbf{F}_0^\flat \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_0$, так что

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 1, & F^*, & -K \\ 0, & I, & -F \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}_0^\flat \mathbf{L}_1 \mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & L_0^\circ, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix},$$

где $K = F^*F/2$. Это определяет декомпозицию квантовой стохастической эволюции на три типа:

1) пуассоновская квантовая унитарная эволюция, которая дается диагональной матрицей $\mathbf{F}$, соответствующей $H_\nu^\mu = 0$, кроме $\mu, \nu = 0$:

$$T_t = \varepsilon(K_t) = F_{[0,t)}^{\triangleright}, \qquad F_{[0,t)}^{\triangleright} = :\exp\left\{i \int_{X^t} H_0^\circ(x) \Lambda_0^\circ(dx)\right\}:$$

где $[F_{[0,t)}^{\wedge} h](\chi) = F_0^\circ(x_1) \odot \ldots \odot F_0^\circ(x_n) h(\chi)$ для цепи $\chi^t = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $t(x_1) < \ldots < t(x_n)$;

2) броуновская квантовая унитарная эволюция, соответствующая $H_0^\circ = 0 = H_+^-$ и $iH_+^{\circ *} = E = iH_0^-$, и

3) лебеговская квантовая унитарная эволюция, соответствующая $H_\nu^\mu = 0$ для всех $(\mu, \nu) \neq (-, +)$:

$$T_t = \varepsilon(K_t) = \int_{\mathscr{X}^t} (i)^{|\chi|} \prod_{x \in \chi}^{\rightarrow} H_+^-(x)\, d\chi = \overrightarrow{\exp}\left\{i \int_{X^t} H_+^-(x)\, dx\right\} \otimes \hat{1},$$

где $\prod\limits_{x \in \chi}^{\rightarrow} H_+^-(x) = H_+^-(x_1) \ldots H_+^-(x_n)$ для $\chi = \{x_1 < \ldots < x_n\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lax M. Quantum noise. Theory of noise sourses // Phys. Rev.— 1966.— V. 145.— P. 110—129.

[2] Haken H. Laser Theory.— Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1984.

[3] Gardiner C. W., Collett M. J. Input and output in damped quantum systems: quantum statistical differential equations and the mater equation // Phys. Rev.— 1990.— V. 42.— P. 78—89.

[4] Квантовые случайные процессы и открытые системы.— М.: Мир, 1988.— 222 с. (Математика. Новое в зарубежной науке; Вып. 42.)

[5] Accardi L., Erigerio A., Lewis J. I.// Quantum stochastic processes.— 1982.— V. 18.— P. 97—133.

[6] Колмогоров А. С. Основные понятия теории вероятностей.— М.: Наука, 1974.— 120 с.

[7] Диксьмье Дж. C^*-алгебры и их представления.— М.: Наука, 1974.— 400 с.

[8] Холево А. С. Квантовая вероятность и квантовая статистика // Итоги науки

и техники. Фундаментальные направления.— М.: ВИНИТИ,— 1991.— Т. 83.— С. 5—132.

[9] Белавкин В. П. Псевдоевклидово представление условноположительных отображений // Матем. заметки.— 1991.— Т. 49, вып. 6.— С. 135—137.

[10] Belavkin V. P. A unified Ito formula has the psendo — Poisson structure $df(x) = (f(x+c) - f(x))d\Lambda$ // Math. Phys.

[11] Белавкин В. П. Упорядоченные ★-полукольца и производящие функционалы квантовой статистики. ДАН СССР.— 1987.— Т. 293.— С. 18—21.

[12] Belavkin V. P. Kernel Representations of ★-semigroups associated with infinitely devisible states.— Universität Heidelberg, Preprint Nr. 604, 1990.

[13] Zoltan S. Conditionally Positive Definite Functions and Unitary Group Representation in π_1-spaces // Math. Nachr.— 1990.— № 146.— P. 69—75.

[14] Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions // Comm. Math. Phys.— 1984.— № 93.— P. 301—323.

[15] Холево А. С. Квантовое стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.— 1989.— Т. 36.— С. 3—28.

[16] Belavkin V. P. A new form and a ★-algebraic structure of quantum stochastic integrals in Fock space // Rendicontidel Seminario Matematico e Fisico di Milano.— V. LV III.— P. 177—193.

[17] Белавкин В. П. Стохастическое исчисление квантовых входных-выходных процессов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.— М.: ВИНИТИ, 1989.— Т. 39.— С. 29—67.

[18] Maassen M. Quantum Markov processes in Fock space described by integral kernels // Quantum Probability and Applications II // ed. L. Accardi and W. von Walgenfels; Lecture notes in Mathematics.— Berlin: Springer, 1985.

[19] Meyer P. A. Elements de Probabilites Quantiques, Exposes Ia IV.— Strasbourg: Institute de Mathematique; Universite Louis Pasteur, 1985.

[20] Lindsay M., Maassen H. An integral kernel approach to noise, in.Quantum Probability and Applications III/Eds. L. Accardi and W. von Waldenfells.— Berlin: Springer, 1988.— P. 192—208.

[21] Belavkin V. P. A nonadapted stochastic calculus and non Markovian quantum evolution.— Centro matematico V. Volterra; Universita deglistudi di Roma II.— 1990. —№ 31.

[22] Araki H. Fuctorizable representations of current algebra // Res. Inst. Math. Sci.— 1970.— № 5.

[23] Parthasarathy K. R., Schmidt K. Positive Definite Kernels, Continuons tensor products, and central Limit Theorems of Probability. Theory. Lecture Notes in Mathematics.— Springer Verlag, 1972.— V. 272.

[24] Streater R. L. Current commutation relations, continuons tensor products and infinitely devisible group representations // Local Quantum Theory.— Academic Press, 1969.— P. 247—263.

[25] Guichardet A. Symmetric Hilbert spaces and related topics // Lecture Notes in Math.— Berlin: Springer, 1972.— V. 261.

[26] Холево А. С. Безгранично-делимые измерения в квантовой теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применение.— 1986.— Т. 31, № 3.— С. 560—564.

[27] Холево А. С. Представления типа Леви — Хинчина в квантовой теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применение.— 1987.— С. 142—146.

[28] Schürmann M. A class of representations of inviolutive bialgebras // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.— 1990.— V. 37.— P. 149—175.

[29] Belavkin V. P. Multiquantum systems and point processes I. Generated functionals and nonlinear semigroups // Report on Math. Phys. 1989.— V. 28, № 1.— P. 57—90.

[30] Shilov G. E., Gurevich B. L. Integral and derivative: a unified approach.— Prentice — Hall, 1966.

[31] Parthasarathy K. R., Sinha K. B. Stochastic integral represantation of bounded quantum martingales in Fock space // J. Funct. An.— 1986.— T. 67, № 1.— P. 126—151.
[32] Meyer P. A. Elements de Probabilites Quantiques VI a VIII // Sem. Prob. XXI. Lecture Notes in Mathematics, V. 1247.— 1987.— P. 34—80.
[33] Evans M., Hudson R. L. Multidimentional quantum diffusions // Proc. of third Quantum Probability Conference, Oberwolfach, 1987.— Berlin: Springer Verlag, 1988.
[34] Lindsay J. M., Maassen H. The stochastic calculus of Bose noise.— Preprint, 1988.
[35] Accardi L., Quaegebeur J. The Ito Albebra of Quantum Gaussian Fields // J. Funct. An.— 1989. V. 85, № 2. — P. 213—263.
[36] Accardi L., Fagnola F. Quantum Probability and Applications III, chapter «Stochastic integration», pages 6—19. Lecture notes in Mathematics, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1988.
[37] Belavkin V. P. Non-demolition measurements, nonlinear filtering and dynamic programming of quantum stochastic processes // Proc of Bellmann Continuum Workshop Modelling and Control of Systems', Sophia — Antipolis 1988 / Ed. A. Blaguire — Berlin: Springer Verlag, 1988.— P. 245—265.— (Lecture notes in Control and Inform Sciences; V. 121.)
[38] Belavkin V. P. Non-demolition stochastic calculus in Fock space and nonlinear filtering and control in quantum systems // Proc of Fourteenth Winter School in Theor Phys, Karpacz 1988. Stochastic Methods in Mathematics and Physics.— Singapore, World Scientific, 1989.— P. 310—324.
[39] Belavkin V. P. Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering // Technical Report 6, Centro Matimatico V Volterra, Universita'degli studi di Roma II, March 1989.
[40] Belavkin V. P. A quantum stochastic calculus in Fock space of input and output non-demolition processes // Proc Fifth Quantum Ptobability Conference, Ed. L. Accardi and W. von Waldenfels, editors — Berlin.— Springer Verlag, 1990.— (Lecture Notes in Mathematics; V. 1442.)
[41] Скороход А. В. Об обобщении стохастического интеграла // Теория вер. и ее прим. 1975.— Т. 20.— Р. 219—233.
[42] Nualart D., Pardoux E. Stochastic calculus with anticipating integrals // Probab. Th. Rel. Fields.— 1988.— V. 78. — P. 335—381.
[43] Hida T. Brownian motion — Berlin: Springer-Verlag, 1980.
[44] Potthoff J., Streit L. A characterization of Hida distributions. BiBoS, Preprint 406, 1989.
[45] Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе.— Киев; Наукова Думка, 1988.
[46] Holevo A. S. Time-ordered exponentials in quantum stochastic calculus.— Preprint 517, Universität Heidelberg, June 1989.
[47] Lindsay J. M. On set convolutions and integral-sum kernel operators // Proc. of Fifth Juternational Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics.— Vilnus, 1990.
[48] Белавкин В. П. Теорема реконструкции для квантового случайного процесса // Теор. Мат. Физ.— 1985.— Т. 62, № 3.— Р. 275—289.
[49] Malliavin P. Stochastics calculus at variations and hypoelliptic operators.// Proc. of Int. Symp. Stoch. D. Egs. Kyoto 1976 / Ed. K. Ito.— Tokyo: Kinokuniya — Willey, 1978.— P. 195—263.
[50] Belavkin V. P. A quantum nonadapted Ito formula and generalized stochastic integration in Fock space // J. Funst. An., 1991.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступила в редакцию
27 мая 1991 г.

УДК 512

Хаотические состояния и стохастический анализ в квантовых системах. Б е л а в к и н В. П. «Успехи математических наук». — 1992. — Т. 47, вып. 1(283). — С. 47—106.

Дана каноническая конструкция индефинитных представлений условно-положительных функционалов на инволютивных полугруппах $\mathscr{B}$, обобщающая конструкцию ГНС. Построено экспоненциальное представление $\mathscr{B}$ в соответствующем псевдофоковском пространстве $\mathscr{F}$, проекция которого на фоковское подпространство $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}$ определяет квантово-стохастическое представление, ассоциированное с безгранично-делимым состоянием на $\mathscr{B}$. Изучена структура псевдопуассоновских безгранично-делимых функционалов, частными случаями которых являются гауссовские и пуассоновские хаотические состояния в классической и квантовой теории вероятностей.

Библиогр. 50 назв.