В.П.Белавкин

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ ВХОДНЫХ — ВЫХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И КВАНТОВАЯ НЕРАЗРУШАЮЩАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

(Итоги науки и техн. Соврем, пробл. матем. Новейшие достижения.— ВИНИТИ, 1989.— *36.*— С. 29—68)

Описана индефинитная структура квантового стохастического (КС) исчисления в Пространстве Фока, развитого Хадсоном и Партв.сарати, и дано определение квантового стохастического интеграла как непрерывного оператора на проективном пределе фоковских пространств. Найдены дифференциальные условия КС исчисления входных-выходных КС процессов и неразрушающих измерений, и доказано, что условие неразрушаемости является необходимым и достаточным для существования условных ожиданий относительно подалгебры наблюдаемых и любого вектора состояния. Развито стохастическое исчисление апостериорных (условных) ожиданий квантовых неразрушаемых процессов, н выведено общее стохастическое уравнение квантовой нелинейной фильтрации как в картине Гейзенберга (для апостериорных операторов), так и в картине Шредингера (для апостериорной матрицы плотности и волновой функции). Показано, что апостериорная динамика, в отличие от априорной, не смешивает состояния, если неразрушающее измерение является полным.

УДК 519.245

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ ВХОДНЫХ — ВЫХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И КВАНТОВАЯ НЕРАЗРУШАЮЩАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

В. П. Белавкин

Введение

Проблема динамического описания стохастических частично наблюдаемых квантовых систем, содержащих входные и выходные каналы, впервые была рассмотрена в [1] на основе операционного подхода к квантовой теории, разработанного Дэвисом и Льюисом в [16]. Конструктивное описание линейных бозонных моделей таких систем было развито в [2, 12, 13] на основе обобщения стохастического исчисления квантовых шумов, известного в математической физике начиная с 60-х годов [19]. Так впервые появилось не только общее линейное бозонное уравнение Ланжевена, описывающее открытую квантовую систему X под действием входного квантового процесса, но и квантовое стохастическое уравнение, описывающее согласованный выходной канал. Условие согласованности выходного квантового процесса Y, открытое в [2] на модели квантовой антенны — бозонной струны (линии передачи) с квантовым осциллятором на конце, означало коммутативность прошлых выходных наблюдаемых $Y^t=\{Y(r)\,|\,r\leqslant t\}$ с будущими операторами системы $X_t=\{X(s)\,|\,s\geqslant t\}$. Благодаря этому условию, перенесенному на произвольные квантовые стохастические модели, оказалось возможным построить квантовый аналог нестационарной марковской фильтрации [3], получить квантовый фильтр Калмана-Бьюси [2, 13], и доказать оптимальность линейной фильтрации для квазисвободных (гауссовских) бозонных состояний по среднеквадратичному критерию. В дальнейшем выяснилось (см. теорему 3), что такая односторонняя коммутативность $[X(s),\ Y(r)]=0,\ \forall s\geqslant r$ является не только достаточной, но и необходимой для существования апостериорных средних от X_t относительно Y^t, определяемых условными ожиданиями [21] относительно произвольного вектора квантового состояния. На физическом языке условие существования таких апостериорных ожиданий можно выразить в виде принципа неразрушаемости будущей стохастической эволюции квантовой системы X прошлыми измерениями выходного процесса Y в согласованном квантовом канале. Алгебраическая формулировка $\{Y^t\}\subset\{X_t\}'$ этого принципа неразрушения и соответствующая теорема реконструкции, позволяющая построить статистически-эквивалентный неразрушающий процесс по многовременным операторно-значным мерам любого (в том числе разрушающего) квантового процесса последовательного наблюдения, даны в [4].

Отметим, что условие неразрушения в силу возможной некоммутативности $[X(r), Y(s)]\neq 0$ при $r<s$ не сводит порождаемые операторные алгебры $\mathscr{B}_t$, $\mathscr{C}_t$ к абелевому случаю, как это имеет место для самонеразрушающего процесса прямого наблюдения $Y=X$. Именно в таком контексте самонеразрушения, означающем просто коммутативность процесса Y, термин неразрушающие измерения был введен Брагинским [6] и затем обобщен на случай косвенных измерений Холево [10].

В этой статье будет развито общее КС исчисление бозонных входных-выходных процессов в открытых квантовых системах и неразрушающих измерений, представленных на фоковском пространстве $\mathscr{F}$, тензорно умноженном на некоторое начальное гильбертово пространство $\mathscr{H}^0$. Для того, чтобы избежать громоздких выкладок КС исчисления Хадсона — Партасарати [18], мы введем простые тензорные обозначения выявляющие ★-алгебраическую индефинитную структуру основных квантовых процессов, образующих псевдопуассоновский процесс, описываемый в первом параграфе. Рассматриваемое фоковское представление этой структуры близко связано с КС исчислением ядерных процессов Линдсея—Маассена [20], но дано в терминах не ядер, а матричных элементов операторов для многомерного бозонного шума в фоковском пространстве.

Преимущество вводимого ★-матричного представления предоставляет возможность доказать основную теорему фильтрации для произвольного выходного неразрушающего процесса путем использования индефинитной метрики для ★-алгебраической структуры Ли генераторов КС процессов. Эта статья содержит полные доказательства соответствующих результатов квантовой нелинейной фильтрации, сформулированные в [5], [14], [15]. В коммутативном случае квантовая неразрушающая фильтрация сводится к классической нелинейной фильтрации [9] и ее мартингальному обобщению [7] для соответствующих частично-наблюдаемых случайных процессов. В условно-марковских квантовых системах выведено рекурсивное стохастическое уравнение фон Неймана (для апостериорного оператора плотности) и нелинейное стохастическое уравнение Шредингера (для апостериорной волновой функции), обобщающие нелинейное стохастическое уравнение марковской фильтрации Стратоновича в форме Ито [9] как для диффузионных, так и для скачкообразных процессов наблюдения.

Показано, что эти нелинейные уравнения могут быть сведены к линейным для ненормированного оператора плотности или волновой функции, причем линейное стохастическое уравнение Шредингера, соответствующее простейшему диффузионному наблюдению, совпадает по форме с волновым стохастическим уравнением, изучавшимся Скороходом в [8]. Частные выходные процессы счета числа квантов и измерения амплитуды выходного квантового поля для случая стационарной марковской квантовой системы были получены Гардинером и Коллетом [17] и Баркиелли [11].

§ 1. Исчисление квантовых входных процессов

Обозначим $\mathcal{F}=\Gamma(\mathcal{E})$ пространство векторов чистых квантовых состояний одномерного бозонного шума, которым является пространство Фока над гильбертовым пространством $\mathcal{E}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ квадратично-интегрируемых функций вещественной полуоси $\mathbb{R}_+=\{t\geqslant 0\}$. Можно рассматривать $\mathcal{F}$ как гильбертово пространство $\Gamma(\mathcal{E})=\mathcal{L}^2(\Omega)$ квадратично-интегрируемых функций $\tau\mapsto\xi(\tau)$ цепей $\tau=(t_1,\ldots,t_n)$, $0<t_1<\ldots<t_n<\infty$, $|\tau|=n=0, 1, 2,\ldots$, со скалярным произведением $\langle\xi|\zeta\rangle=\int\xi(\tau)^*\zeta(\tau)d\tau$, где интеграл

$$\int f(\tau)d\tau=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1<\ldots<t_n}\!\!\ldots\!\int f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n$$

берется по пространству Ω всех конечных цепей τ в $\mathbb{R}_+$ относительно естественной меры Лебега $d\tau=dt_1\ldots dt_n$, где $|\tau|=n$. Следуя [8], мы будем отождествлять цепи $\tau=(t_1,\ldots,t_n)$ с соответствующими конечными подмножествами $\{t_1,\ldots,t_n\}\subset\mathbb{R}_+$, в частности, пустую цепь $(n=0)$ будем обозначать как пустое подмножество $\varnothing$, единичную цепь $\tau=t$ $(n=1)$ будем отождествлять с одноточечным подмножеством $\{t\}$, причем теоретико-множественные операции над цепями понимаются как операции над соответствующими подмножествами. Мы также обозначим $\delta_\varnothing$ нормированную вакуум-функцию $\delta_\varnothing(\tau)=0$, если $\tau\neq\varnothing$ и $\delta_\varnothing(\tau)=1$, если $\tau=\varnothing$, играющую роль вектора основного состояния в $\mathcal{F}$, и будем рассматривать фоковские пространства $\mathcal{F}_r^t=\Gamma(\mathcal{E}_r^t)$, $\mathcal{F}_t=\Gamma(\mathcal{E}_t)$ над ортогональными подпространствами

$$\mathcal{E}_r^t=\{\xi(s)=0\,|\,s\notin(r,t]\},\quad \mathcal{E}_t=\{\xi(r)=0\,|\,r\leqslant t\},$$

как функциональные подпространства $\mathcal{L}^2(\Omega_r^t)$, $\mathcal{L}^2(\Omega_t)$ на подмножествах $\Omega_r^t=\{\tau\subset(r,t]\,|\,|\tau|<\infty\}$, $\Omega_t=\{\tau>t\}$ конечных цепей $r<\tau\leqslant t$, $\tau\subset(t,\infty)$ соответственно.

Мы часто будем также использовать тензорное разложение $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}_r^t \otimes \mathcal{F}_t$ для $t > r$, вытекающее из представления $\mathcal{L}^2(\Omega_r^t \times \Omega_t) = \mathcal{L}^2(\Omega_r^t) \otimes \mathcal{L}^2(\Omega_t)$, поскольку множество Ω_t отрезков $\tau_t = \{s \in \tau \mid s \geqslant t\}$ цепей $\tau \in \Omega$ есть декартово произведение Ω_t и $\Omega_r^t = \{\tau_r^t\}$ для $t > r$ в соответствии с разбиением $\tau_r = (\tau_r^t, \tau_t)$ любой цепи τ_r на пару цепей $\tau_r^t = \{s \in \tau \mid t \geqslant s > r\}$ и $\tau_t = \{s \in \tau \mid s > t\}$. В частности, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^t \otimes \mathcal{F}_t$, где $\mathcal{F}^t = \mathcal{L}^2(\Omega^t)$ есть гильбертово пространство на множестве цепей $\Omega^t = \{\tau^t = \tau < t\}$

Пусть $\mathcal{H}^0$ — некоторое гильбертово пространство, называемое начальным для фильтрации $\mathcal{H}^t = \mathcal{H}^0 \otimes \mathcal{F}^t$ гильбертова тензорного произведения $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \otimes \mathcal{F}^t$ относительно вакуумного вектора $\delta_\varnothing$. Основными процессами для квантового стохастического (КС) исчисления в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ являются процессы уничтожения $\Lambda_- = I \otimes \hat{\lambda}_-$, рождения $\Lambda^+ = I \otimes \hat{\lambda}^+$ и числа квантов $\Lambda = I \otimes \hat{\lambda}$, плотно определяемые в $\mathcal{H}$ как операторно-значные функции от $t > 0$

$$\Lambda_-(t)(\psi \otimes \xi)(\tau) = \int_0^t \xi(\tau \cup r)\, dr\, \psi,$$

$$\Lambda^+(t)(\psi \otimes \xi)(\tau) = \sum_{r \in \tau} \chi^t(r)\, \xi(\tau \setminus r)\, \psi, \tag{1.1}$$

$$\Lambda(t)(\psi \otimes \xi)(\tau) = |\tau^t|\, \xi(\tau)\, \psi,$$

где $\psi \in \mathcal{H}^0$, $\xi \in \mathcal{F}$, $\chi^t(r) = 1$, если $r \leqslant t$, $\chi^t(r) = 0$, если $r > t$, $|\tau^t| = \sum_{r \in \tau} \chi^t(r)$, цепь $\tau \cup r$ определена почти всюду (для $r \notin \tau$) как (τ^t, t, τ_t), а $\tau \setminus r = \tau \cap \overline{\{r\}}$.

Заметим, что процессы Λ_-, Λ^+ и Λ являются коммутативными, но не коммутирующими друг с другом мартингалами относительно фильтрации $(\mathcal{H}^t)$ и вакуумного вектора $\varphi = \psi \otimes \delta_\varnothing$, процессы Λ_- и Λ^+ сопряжены: $\Lambda_-(t)^* = \Lambda^+(t)$ на областях $\mathcal{H}^0 \otimes \mathcal{D}^t$,

$$\mathcal{D}^t = \{\xi \in \mathcal{F} \mid \int |\tau^t|\, |\xi(\tau)|^2 d\tau < \infty\},$$

а процесс Λ самосопряжен: $\Lambda^* = \Lambda$, где $\Lambda^*(t) = \Lambda(t)^*$ для всех t.

Введем следующие тензорные обозначения:

$$\Lambda_-^+(t) = t\hat{I}, \quad \Lambda_-^0(t) = \Lambda_-(t), \quad \Lambda_0^+(t) = \Lambda^+(t), \quad \Lambda_0^0(t) = \Lambda(t), \tag{1.2}$$

где $\hat{I} = I \otimes \hat{1}$, I — единичный оператор в $\mathcal{H}^0$, $\hat{1}$ — единица в $\mathcal{F}$, и будем считать, что индексы $\{-, 0, +\}$ упорядочены отношением $- < 0 < +$. В этих обозначениях основные квантовые процессы могут быть алгебраически описаны условиями, которые содержат следующее:

Определение 1. Тензорный квантовый процесс $\Lambda = (\Lambda_\mu^\nu)_{\mu<+}^{\nu>-}$, образующий самосопряженные представления $\Lambda_\mu^\nu(t) =$

$=\Lambda^*(t)^\nu_\mu$ алгебры Ли

$$[\Lambda^\lambda_\varkappa(r),\ \Lambda^\nu_\mu(t)]=\Lambda^\nu_\varkappa(r\wedge t)\,\delta^\lambda_\mu-\Lambda^\lambda_\mu(r\wedge t)\,\delta^\nu_\mu \tag{1.3}$$

относительно инволюции $\Lambda^*(t)^\nu_\mu=g_{\mu\lambda}\Lambda^\lambda_\varkappa(t)^*g^{\varkappa\mu}$, определенной псевдометрическим тензором $g=(g_{\mu\lambda})$, $\mu\in\{-,0\}$, $\lambda\in\{0,+\}$

$$\Lambda^*(t)^+_-=\Lambda^+_-(t)^*,\quad \Lambda^*(t)^0_-=\Lambda^+_0(t)^*,\quad \Lambda^*(t)^+_0=\Lambda^0_-(t)^*,$$

$$\Lambda^*(t)^0_0=\Lambda^0_0(t)^*$$

и совпадающим с ним обратным $g^{-1}=(g^{\varkappa\tau})$ с элементами $g_{\mu\lambda}=0=g^{\varkappa\tau}$, μ, $\varkappa=-$ или λ, $\nu=+$, и $g_{-+}=1=g^{-+}$, $g_{00}=1=g^{00}$, будем называть псевдопуассоновским КС процессом относительно вакуумного вектора состояния $\varphi=\psi\otimes\delta_\varnothing$.

Далее мы не будем ограничиваться случаем одномерного квантового шума, предполагая, что основное пространство $\mathscr{E}$ есть гильбертово пространство $\mathscr{E}=\int^\oplus\mathscr{K}(t)\,dt$-вектор-функций $\xi(t)\in\mathscr{K}(t)$ со скалярным произведением $\langle\xi|\zeta\rangle=\int\langle\xi(t)|\zeta(t)\rangle\,dt$. Полезно иметь ввиду случай $\mathscr{E}=\mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}^n)$ n-мерных столбцов $\xi(t)=(\xi^j)(t)\in\mathbb{C}^n$, $\langle\xi|\zeta\rangle(t)=\xi^*_j(t)\zeta^j(t)$, где $\xi^*(t)=(\xi^*_1,\ldots,\xi^*_n)(t)$ — строка с компонентами $\xi^*_j(t)=\xi^j(t)^*$. При этом процессы Λ^+, Λ_- — заменяются соответственно строкой $\Lambda^+=(\Lambda^+_1,\ldots,\Lambda^+_n)$ и столбцом $\Lambda_-=(\Lambda^j_-)$ процессов $\Lambda^+_j(t)$, $\Lambda^j_-(t)$, $j=1,\ldots,n$, а Λ заменяется $n\times n$ — матричным процессом $\Lambda(t)=(\Lambda^j_i)(t)$.

Матричный процесс $\Lambda=(\Lambda^\nu_\mu)$, $\mu,\nu\in\{-,1,\ldots,n,+\}$ с компонентами $\Lambda^0_-=\Lambda_-$, $\Lambda^+_0=\Lambda^+$, $\Lambda^0_0=\Lambda$, и $\Lambda^\nu_\mu=0$ при $\mu=+$ или $\nu=-$, оказывается при этом самосопряженным $\Lambda^*=\Lambda$ относисительно инволюции $\Lambda^*(t)=\hat g\Lambda^*(t)\hat g$, где, как обычно, $\Lambda^*(t)^\mu_\nu=\Lambda^\nu_\mu(t)^*$, а унитарная эрмитова матрица $\hat g=(\hat g^\mu_\nu)$ определяется нулевыми компонентами $\hat g^-_-=0=\hat g^+_+$, $\hat g^\mu_\nu=0$ при $\mu\neq\nu$, за исключением $\hat g^-_+=\hat I=\hat g^+_-$ и $\hat g^i_j=\delta^i_j\cdot\hat I$, $i,j=1,\ldots,n$.

Всем нижеследующим формулам нетрудно также придать смысл (см. приложение) и в случае бесконечномерного $\mathscr{K}(t)=l^2(J)$, для чего индексы μ, ν можно рассматривать в множестве $\{-,J,+\}$, разбив одноточечный индекс $\{0\}$ на $n=|J|$ точек множества $j\in J$ некоторой кардинальности $|J|$.

Пусть $C=(C^\mu_\nu)$ есть матричный КС процесс с операторными значениями $C^\mu_\nu(t):\mathscr{H}\to\mathscr{H}$, $\mu,\nu\in\{-,J,+\}$, или

$$C^-_+(t):\mathscr{H}\to\mathscr{H},\quad C^0_+(t):\mathscr{H}\to\mathscr{H}\otimes\mathbb{C}^n,\quad C^0_-(t):\mathscr{H}\otimes\mathbb{C}^n\to\mathscr{H},$$

$$C^0_0(t):\mathscr{H}\otimes\mathbb{C}^n\to\mathscr{H}\otimes\mathbb{C}^n,\ \text{где}\ C^0_+=C_+,\quad C^-_0=C^-,\quad C^0_0=C,$$

$$\text{и}\ C^\mu_\nu=0\ \text{при}\ \mu=+$$

или $\nu = -$, удовлетворяющий условию согласованности $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}^t \otimes \hat{1}_t$, $\forall t$, где $\hat{1}_t$ есть единица в $\mathcal{F}_t$, $\mathbf{C}^t$ — матрица операторов в $\mathcal{H}^t$. В основе КС исчисления лежит понятие КС интеграла

$$\Lambda(\mathbf{C}, t) = \int_0^t C^\mu_\nu d\Lambda^\nu_\mu \equiv \int_0^t \sum_{\mu,\nu} C^\mu_\nu(r)\, d\Lambda^\nu_\mu(r) \tag{1.4}$$

относительно инкримента псевдопуассоновской меры $d\Lambda(t) = \Lambda(t+dt) - \Lambda(t)$, в котором суммирование по μ, ν можно ограничить на $\mu \neq +$, $\nu \neq -$. Таким образом, $\Lambda(C, t)$ — это сумма интеграла $\int_0^t C^-_+(r)\, dr$ и трех КС интегралов

$$\int_0^t \Lambda(C^-(r), dr) = \int_0^t C^-_j d\Lambda^j_-, \quad \int_0^t \Lambda(C_+(r), dr) = \int_0^t C^i_+ d\Lambda^+_i,$$

$$\int_0^t \Lambda(C(r), dr) = \int_0^t C^i_j d\Lambda^j_i,$$

существующих (см. приложение) в смысле Ито для слабо измеримых, локально КС интегрируемых операторно-значных функций $t \mapsto \mathbf{C}(t)$.

Рассмотрим согласованный КС процесс $V(t)$, удовлетворяющий КС дифференциальному уравнению

$$dY = \Lambda(\mathbf{F} - Y \otimes 1, dt) = (F^\mu_\nu - Y\delta^\mu_\nu)\, d\Lambda^\nu_\mu, \tag{1.5}$$

в смысле $Y(t) = Y^0 \otimes \hat{1} + \int_0^t \Lambda(\mathbf{C}(r), dr)$ для всех t, где Y^0 — оператор в $\mathcal{H}^0$, $\mathbf{C}(t) = \mathbf{F}(t) - Y(t) \otimes 1$, $1 = (\delta^\mu_\nu)$, $\mathbf{F} = (F^\mu_\nu)$ — тензорный согласованный КС процесс. Таким уравнением можно определить любой КС интеграл $Y(t) = \Lambda(\mathbf{C}, t)$, положив $Y^0 = 0$, $F^\mu_\nu = C^\mu_\nu + Y\delta^\mu_\nu$, причем $F^-_- = Y = F^+_+$; и $F^\mu_\nu = 0$ при $\mu > \nu$ относительно частичного порядка $+ > j > -$ для любого $j \in J$. В следующей теореме устанавливается формула для КС дифференциала $d(Y^* Y)$, из которой, в частности, вытекает $\star$-свойство

$$\Lambda(\mathbf{C}, t)^* = \Lambda(\mathbf{C}^\star, t), \; \mathbf{C}^\star(t) = \mathbf{g}\mathbf{C}^*(t)\mathbf{g} \tag{1.6}$$

для КС интеграла $Y(t)$ и КС формула Ито [1]

$$d(XZ) = X \cdot dZ + dX \cdot Y + dX \cdot dY, \tag{1.7}$$

имеющая для КС интегралов $X(t) = \Lambda(B, t)$ и $Z(t) = \Lambda(D, t)$ вид

$$\Lambda(\mathrm{B}, t)\Lambda(\mathrm{D}, t) = \int_0^t (X\Lambda(\mathrm{D}, dr) + \Lambda(\mathrm{B}, dr)Y + \Lambda(\mathrm{BD}, dr)), \tag{1.8}$$

где $(\mathbf{BD})^{\mu}_{\nu}(t)=B^{\mu}_{\varkappa}(t)\,D^{\varkappa}_{\nu}(t)$ — произведение блочных операторов $B(t)$ и $D(t)$, определяющих $\Lambda(\mathbf{B}, dt)\,\Lambda(\mathbf{D}, dt)=\Lambda(\mathbf{BD}, dt)$.

Теорема 1. Если КС процесс Y удовлетворяет КС уравнению (1.5), то $(Y^{*}Y)(t)=Y(t)^{*}Y(t)$ удовлетворяет КС уравнению

$$d(Y^{*}Y)=(\mathbf{F}^{\star}\mathbf{F}-Y^{*}Y\otimes 1)^{\mu}_{\nu}\,d\Lambda^{\nu}_{\mu}, \tag{1.9}$$

устанавливающему алгебраический изоморфизм $*$-операторной структуры КС дифференцируемых согласованных процессов Y в $\bigstar$-матричную структуру треугольно-блочных согласованных КС процессов $\mathbf{F}$ с компонентами $F^{\mu}_{\nu}=0$ при $\mu>\nu$ и $F_{-}^{-}=Y=F_{+}^{+}$. В частности, Y есть формально нормальный (самосопряженный, унитарный), если и только если $[\mathbf{F}^{\star}\mathbf{F}]=0$ ($\mathbf{F}^{\star}=\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{\star}=\mathbf{F}^{-1}$) относительно $\bigstar$-операции $\mathbf{F}^{\star}=\hat{\mathbf{g}}\mathbf{F}^{*}\hat{\mathbf{g}}$, определяемой индефинитной матрицей $\check{\mathbf{g}}^{*}=\hat{\mathbf{g}}=\hat{\mathbf{g}}^{-1}$ и Y есть частичная изометрия (ортопроектор), если и только если $\mathbf{F}\mathbf{F}^{\star}\mathbf{F}=\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}^{\star}\mathbf{F}=\hat{I}\otimes\mathbf{1}$, $\mathbf{F}^{\star}\mathbf{F}=\mathbf{F}$).

Доказательство. Принимая во внимание, что

$$dY=C^{-}_{+}dt+C^{-}_{0}d\Lambda^{0}_{-}+C^{0}_{+}d\Lambda^{+}_{0}+C^{0}_{0}d\Lambda^{0}_{0},$$

$$dY^{*}=C^{-*}_{+}dt+C^{0*}_{+}d\Lambda^{0}_{-}+C^{-*}_{0}d\Lambda^{+}_{0}+C^{0*}_{0}d\Lambda^{0}_{0},$$

для $C^{\mu}_{\nu}(t)=F^{\mu}_{\nu}(t)-Y(t)\,\delta^{\mu}_{\nu}$, $C^{\mu *}_{\nu}=F^{\mu *}_{\nu}-Y^{*}\delta^{\mu}_{\nu}$, получим

$$dY^{*}=(F^{*\mu}_{\nu}-Y^{*}\delta^{\mu}_{\nu})\,d\Lambda^{\nu}_{\mu},\quad Y^{*}(0)=Y^{0*}\otimes\hat{1}, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{F}^{\star}=\mathbf{C}^{\star}+Y^{*}\otimes\mathbf{1}$, $\mathbf{C}^{\star}=\hat{\mathbf{g}}\mathbf{C}^{*}\hat{\mathbf{g}}$. Используя таблицу умножения Хадсона—Партасарати [1], записываемую в терминах дифференциалов $d\Lambda^{\nu}_{\mu}$ и основных процессов (1.2), определенных в (1.1), в виде

$$d\Lambda^{\lambda}_{\mu}d\Lambda^{\nu}_{\varkappa}=d\Lambda^{\nu}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\varkappa},\quad \lambda,\nu\neq -;\ \varkappa,\mu\neq +, \tag{1.11}$$

получим: $d(Y^{*}Y)=(Y+dY)^{*}(Y+dY)-Y^{*}Y=dY^{*}Y+Y^{*}dY+{}$ $+dY^{*}dY=C^{*\mu}_{\nu}Y+Y^{*}C^{\mu}_{\nu}+C^{*\mu}_{\varkappa}C^{\varkappa}_{\nu})\,d\Lambda^{\nu}_{\mu}=((\mathbf{C}+Y\otimes 1)^{\star}(\mathbf{C}+Y\otimes 1)-{}$ $-Y^{*}Y\otimes 1)^{\mu}_{\nu}\,d\Lambda^{\nu}_{\mu}$, где сумму по ν и μ можно распространить также и на значения $\nu=-$, $\mu=+$, для которых $(\mathbf{F}^{\star}\mathbf{F}-Y^{*}Y\otimes 1)^{\mu}_{\nu}=0$. Таким образом доказано, что отображение $Y\mapsto\mathbf{F}$, определяемое для КС дифференцируемых процессов уравнением (1.5), является гомоморфизмом относительно ассоциативной алгебраической структуры операторных процессов Y и треугольно-блочных процессов $\mathbf{F}=(F^{\mu}_{\nu})$, $F^{+}_{0}=0=F^{0}_{-}$, $F^{+}_{-}=0$, который является инъективным, поскольку если $\mathbf{F}=0$, то $F^{-}_{-}=Y=F^{+}_{+}=0$, т. е. $Y=0$. Обратно, если $Y=0$, то $Y(t)-Y(0)=0$ для всех t, откуда $\mathbf{C}=0$ в силу определения 1 КС интеграла, и, следовательно $\mathbf{F}=Y\otimes 1=0$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Из формулы (1.9) вытекает формула Ито-Хадсона-Партасарати [1], записываемая для КС процессов X

и Z с КС дифференциалами

$$dX = B^{\mu}_{\nu} d\Lambda^{\nu}_{\mu},\ dZ = D^{\mu}_{\nu} d\Lambda^{\nu}_{\mu},\ X(0) = X^0 \otimes \hat{1},\ Y(0) = Y^0 \otimes \hat{1}, \quad (1.12)$$

относительно псевдопуассоновского процесса (1.9) в форме

$$d(XZ) = (B^{\mu}_{\nu} Z + X D^{\mu}_{\nu} + B^{\mu}_{\varkappa} D^{\varkappa}_{\nu}) d\Lambda^{\nu}_{\mu} = (EG - XZ \otimes 1)^{\mu}_{\nu} d\Lambda^{\nu}_{\mu}, \quad (1.13)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{B} + X \otimes 1$, $\mathbf{G} = \mathbf{D} + Z \otimes 1$, которая вместе с $*$-свойством (1.10) эквивалентна (1.9).

Это следует из поляризационных формул

$$XZ = \sum_{i=0}^{3} (X^* + i^n Z)^* (X^* + i^n Z)/4i^n,$$

$$EG = \sum_{i=0}^{3} (E^* + i^n G)^* (E^* + i^n G)/4i^n,$$

согласно которым

$$d(XZ) = \sum_{i=0}^{3} d(Y^*_n Y_n)/4i^n = \sum_{i=0}^{3} (\mathbf{F}^*_n \mathbf{F}_n - Y^*_n Y_n \otimes 1)^{\mu}_{\nu} d\Lambda^{\nu}_{\mu}/Yi^n,$$

где $Y_n = X^* + i^n Z$, $\mathbf{F}_n = \mathbf{E}^* + i^n \mathbf{G}$, $n = 0,1,2,3$.

§ 2. Стохастическое исчисление квантовых выходных процессов

Пусть $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}^{\mu}_{\nu})$ — согласованный матричный процесс с компонентами $\hat{S}^{\mu}_{\nu}(t)$, μ, $\nu \in \{-, 0, +\}$, $\hat{S}^{-}_{-} = \hat{I} = \hat{S}^{+}_{+}$, $\hat{S}^{\mu}_{\nu} = 0$ при $\mu > \nu$, определяющими генератор $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{S}} - \hat{I} \otimes 1$ изометрической КС эволюции $U(t): \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $U^* U = \hat{I}$, описываемой уравнением

$$dU = U \hat{L}^{\mu}_{\nu} d\Lambda^{\nu}_{\mu} = (U \hat{S}^{\mu}_{\nu} - U \delta^{\mu}_{\nu}) d\Lambda^{\nu}_{\mu}. \quad (2.1)$$

Мы будем предполагать, что выполняются условия существования единственного решения этого уравнения, для чего достаточно потребовать локальную ограниченность слабо измеримых процессов $\hat{L}^{\mu}_{\nu}$, $\mu \in \{-, 0\}$, $\nu \in \{0, +\}$. При этом в соответствии с теоремой 7 процесс U будет изометрическим, если и только если процесс $(U \otimes 1)\hat{\mathbf{S}} = (U \hat{S}^{\mu}_{\nu})$ есть $*$-изометрический матричный процесс, т. е. $\hat{\mathbf{S}}(t)^* \hat{\mathbf{S}}(t) = \hat{I} \otimes 1$ для всех t, что может быть записано в виде

$$\begin{aligned} &\hat{S}^* \hat{S} = \hat{I},\ \hat{S}^{-*}_{+} + \hat{S}^*_{+} \hat{S}_{+} + \hat{S}^{-}_{+} = 0, \\ &\hat{S}^* \hat{S}_{+} + \hat{S}^{-*} = 0,\ \hat{S}^*_{+} \hat{S} + \hat{S}^{-} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $S = S^0_0$, $S_+ = S^0_+$, $S^- = S^-_0$.

Рассмотрим согласованный самосопряженный процесс $\hat{Y}$, удовлетворяющий КС уравнению

$$d\hat{Y}=(\hat{S}^*\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{S}}-\hat{Y}\otimes 1)^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu},\ \hat{Y}(0)=Y^0\otimes\hat{1}, \tag{2.3}$$

где $\hat{\mathbf{F}}^*=\hat{\mathbf{F}}$ есть $\star$-самосопряженный согласованный матричный процесс $(\hat{E}^{\mu}_{\nu})$ с компонентами $\hat{F}^{-}_{-}=\hat{Y}=\hat{F}^{+}_{+}$, $\hat{F}^{\mu}_{\nu}=0$ при $\mu>\nu$, $\hat{S}$ — изометрический матричный процесс, определяющий генератор уравнения (2.1). Без ограничения можно считать, что $\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^*=\hat{\mathbf{F}}=\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^*\hat{\mathbf{F}}$, в противном случае $\mathbf{F}$ в (2.3) можно заменить на $\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^*\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^*$.

Определение 2. КС процесс $\hat{Y}$ называется неразрушающим относительно некоторого согласованного КС процесса $\hat{Z}$, если

$$[\hat{Y}(r),\ \hat{Z}(t)]=0, \qquad \forall r\leqslant t, \tag{2.4}$$

называется выходным относительно КС эволюции U, если он является неразрушающим относительно КС генератора этой эволюции:

$$[\hat{S}^{\mu}_{\nu}(t),\ \hat{Y}(r)]=0\ \forall r<t \tag{2.5}$$

и называется самонеразрушающим, если $[\hat{Y}(r),\ \hat{Y}(t)]=0$, $\forall r,\ t$.

Теорема 2. Процесс $\hat{Y}$ определен уравнением (2.3) как самосопряженный согласованный процесс, если и только если

$$U\hat{Y}=YU,\ Y=Y^0\otimes\hat{1}+\int_0^t C^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{C}=\mathbf{C}^*$ есть согласованный КС интегрированный матричный процесс, удовлетворяющий условию $C^{\mu}_{\nu}U=U\hat{C}^{\mu}_{\nu}$, $\hat{C}^{\mu}_{\nu}=\hat{F}^{\mu}_{\nu}-\hat{Y}\delta^{\mu}_{\nu}$. Процесс $\hat{Y}$ есть выходной КС процесс относительно КС эволюции U, если и только если

$$U(t)\hat{Y}(r)=Y(r)U(t),\ \forall r\leqslant t, \tag{2.7}$$

что эквивалентно условиям

$$[S^{\mu}_{\nu}(t),\ Y(r)]\,U(t)=0,\ \forall r\leqslant t \tag{2.8}$$

относительно $S^{\mu}_{\nu}: S^{\mu}_{\nu}U=U\hat{S}^{\mu}_{\nu}$. Выходной КС процесс $\hat{Y}$ является неразрушающим относительно КС процесса $\hat{Z}$, определенного условием

$$U\hat{Z}=ZU,\ Z(t)=Z^0\otimes\hat{1}+\int_0^t D^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu}, \tag{2.9}$$

если и только если $[Y(r),\ Z(t)]U(t)=0$ для всех $t\geqslant r$. Последнее условие эквивалентно условиям коммутативности

$$[Y^0,\ Z^0]=0,\ [\mathbf{C},\ \mathbf{G}](U\otimes 1)=0, \tag{2.10}$$

$$[Y(r),\ G_{\nu}^{\mu}(t)]\,U(t)=0,\ \forall r\leqslant t, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{G}=\mathbf{D}+\mathbf{Z}\otimes 1$, $\mu<+$, $\nu>-$.

Доказательство. Мы получим (2.3) с $\hat{F}_{\nu}^{\mu}=U^{*}F_{\nu}^{\mu}U$ из (2.6) для U, удовлетворяющего уравнению (2.1), просто применением к $\hat{Y}=U^{*}YU$ КС формулы Ито (1.13):

$$d(U^{*}YU)=(\hat{S}^{*}(U^{*}\otimes 1)\,\mathbf{F}\,(U\otimes 1)\,\hat{\mathbf{S}}-U^{*}YU\otimes 1)_{\nu}^{\mu}d\Lambda_{\mu}^{\nu}.$$

Обратно, из (2.3) и (2.1) получим

$$d(U\hat{Y}U^{*})=((U\otimes 1)\,\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^{*}\hat{F}\hat{S}\hat{S}^{*}(U^{*}\otimes 1)-U\hat{Y}U^{*}\otimes 1)_{\nu}^{\mu}d\Lambda_{\mu}^{\nu},$$

следовательно КС процесс $Y=U\hat{Y}U^{*}$, удовлетворяющий, очевидно, условию $YU=U\hat{Y}$, определен как КС интеграл в (2.6) с $F_{\nu}^{\mu}=UF_{\nu}^{\mu}U^{*}$ благодаря предположению $\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^{*}\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^{*}=\hat{F}$ для слабоизмеримого, слабо локально интегрируемого процесса $\hat{G}$.

Если процессы $\hat{S}_{\nu}^{\mu}$ и $\hat{Y}$ удовлетворяет условию коммутативности (2.5), то изометрия

$$U(r,\ s)=\hat{I}+\int_{r}^{s}U(r,\ t)\,\hat{L}_{\nu}^{\mu}(t)\,d\Lambda_{\mu}^{\nu}(t) \tag{2.12}$$

коммутирует с $\hat{Y}(r)$, как это может быть легко доказано индуктивно относительно $n=1,\ 2,\ \ldots$ для соответствующих КС Ито сумм

$$U_{n}(r,\ s)=\hat{I}+\sum_{m=0}^{n}U_{m}(r-t_{m})\,\hat{L}_{\nu}^{\mu}(t_{m})\,(\Lambda_{\mu}^{\nu}(t_{m+1})-\Lambda_{\mu}^{\nu}(t_{m})), \tag{2.13}$$

где $t_{m}=r+m(s-r)/n$, $N_{0}(r,\ r)=\hat{I}$.

Следовательно, принимая во внимание, что $U(t)=U(r)\,U(r,\ t)$, мы получим (2.7):

$$U(t)\,\hat{Y}(r)=U(r)\,\hat{Y}(r)\,U(r,\ t)=Y(r)\,U(t).$$

Обратно, умножая (2.7) слева на $U(t)^{*}$, получим условие коммутативности для $\hat{Y}(r)$ и $U(r,\ t)$, которое эквивалентно (2.5) благодаря аппроксимации (2.12) и согласованности Y. Следовательно, условие (2.5) в терминах $S_{\nu}^{\mu}U=US_{\nu}^{\mu}$ может быть записано в виде (2.8), ибо

$$[Y(r),\ S_{\nu}^{\mu}(t)]\,U(t)=U(t)\,[Y(r),\ \hat{S}_{\nu}^{\mu}(t)]=0.$$

Аналогично условие неразрушаемости (2.4) для выходного КС процесса Y может быть записано в виде $[Y(r),\ Z(t)]U(t)=0$, $r\leqslant t$ в терминах $ZU=U\hat{Z}$. Представляя процесс $\hat{Z}$, определенный в (2.9) подобно $\hat{Y}$ как решение КС уравнения

$$d\hat{Z}=(\hat{\mathbf{S}}^{*}\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{S}}-\hat{Z}\otimes 1)_{\nu}^{\mu}d\Lambda_{\mu}^{\nu},\quad \hat{Z}(0)=Z^{0}\otimes\hat{1}, \tag{2.14}$$

где $\hat{\mathbf{G}}=\hat{\mathbf{D}}+\hat{Z}\otimes\hat{1}$, и принимая во внимание формулу Ито (1.13)

$$d(\hat{Y}\hat{Z})=(\hat{S}^*\hat{F}\hat{G}\hat{S}-\hat{Y}\hat{Z}\otimes 1)^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu}, \qquad (2.15)$$

можно легко получить, что $[\hat{Y}, \hat{Z}]=0$, т. е. $[Y^0, Z^0]=0$ и $[\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}]=0$ благодаря $\hat{\mathbf{F}}=\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^{\bigstar}$. Для того, чтобы удовлетворить условию $[\hat{Y}(r), \hat{Z}(t)]=0$ для всех $r\leqslant t$, необходимо добавить условия $[\hat{Y}(r), \hat{G}^{\mu}_{\nu}(t)]=0$ для $\mu<+$ и $\nu>-$ и всех $r\leqslant t$ вследствии КС интегрального представления

$$\hat{Z}(s)=\hat{Z}(r)+\int_r^s(\hat{\mathbf{S}}^{\bigstar}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{S}-Z\otimes 1)^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu}, \quad s>r,$$

и коммутативности $\hat{Y}(r)$ с $\hat{\mathbf{S}}(t)$ при $r\leqslant t$.

Итак, $[\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{G}}]=[\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}]-[\hat{Y}\otimes\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{G}}]=0$, что дает необходимые и достаточные условия неразрушения (2.4), которые могут быть записаны в терминах Y, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ как (2.10), (2.11) путем умножения справа на U. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Процесс $\hat{Z}$ есть эволюционное преобразование $Z^0=X$, $\hat{Z}=U^*(X\otimes\hat{1})U$ некоторого начального оператора $Z^0=X\in\mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$ относительно КС эволюции U, описываемой КС уравнением (2.1), если и только если он удовлетворяет КС уравнению (2.14) с $\hat{\mathbf{G}}=\hat{\mathbf{Z}}\otimes 1$. Процесс $\hat{Y}$ есть выходной процесс относительно условно-марковской КС эволюции, определенной на алгебре фон Неймана $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$ преобразованием Гейзенберга $\hat{L}^{\mu}_{\nu}=U^*L^{\mu}_{\nu}U$ КС генераторов $L^{\mu}_{\nu}(t)$, присоединенных к алгебре $\mathscr{A}'_t\vee(\mathscr{B}\otimes\hat{1})$, $\mathscr{A}_t=\{Y(r)\,|\,r\leqslant t\}'$, порождаемой $X\otimes\hat{\mathbf{1}}$, $X\in\mathscr{B}$ и $Y'_0=\{Y(r)\,|\,r\in(0, 1]\}$, если и только если он является самонеразрушающим: $[Y(r), Y(t)]=0$ для всех t, $r\in\mathbf{R}_+$, и $[Y(r), L^{\mu}_{\nu}(t)]=0$, $\forall r\leqslant t$. Выходной КС процесс Y является неразрушающим относительно $\hat{Z}=U^*(X\otimes\hat{1})U$ для произвольного $X\in\mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$, если и только если $Y=I\otimes\hat{y}$, где $\hat{y}(t)$ есть согласованный КС процесс в пространстве Фока $\mathscr{F}$.

В самом деле, если $Z(t)=X\otimes\hat{1}$ — постоянный согласованный процесс, то он удовлетворяет уравнению $dZ=D^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu}$, соответствующему $D=0$, т. е. $\mathbf{G}=Z\otimes 1$. Следовательно процесс $\hat{Z}=U^*ZU$ удовлетворяет уравнению (2.14) с $\hat{\mathbf{G}}=U^*ZU\otimes 1=\hat{Z}\otimes 1$.

Условие $[Y(r), S^{\mu}_{\nu}(t)]\,U(t)=0$, $r\leqslant t$ для $S^{\mu}_{\nu}=L^{\mu}_{\nu}+\hat{I}\delta^{\mu}_{\nu}$ при произвольном $L^{\mu}_{\nu}(t)\in\mathscr{A}'_t\vee(\mathscr{B}\otimes\hat{1})$ означает $[Y(r), L^{\mu}_{\nu}(t)]=0$ при всех $r\leqslant t$ для любого t, если $Y(r)=Y(r)\,UU^*(t)$, $UU^*(t)=I\otimes\hat{p}(t)$; более того условие $[Y(t), X\otimes\hat{1}]\,U(t)=0$, для произвольного $X\in\mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$ возможно только если $Y(t)=I\otimes\hat{y}(t)$.

Заметим, что выходной КС процесс $\hat{Y}=U^*YU$ определен как сумма начального $Y(0)=Y^0\hat{\otimes}1$ и некоторого КС интеграла

$$\mathbf{N}(\hat{\mathbf{C}}, t)=\int_0^t U(t)^*\,\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{C}, dr)\,U(t) \tag{2.16}$$

от $\hat{\mathbf{C}}(t)$, имеющего КС дифференциал $\mathbf{N}(\hat{\mathbf{C}}, dt)=(\hat{\mathbf{S}}^*\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{S}})^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu}$. В случае коммутативности матричных элементов

$$\hat{C}^{\varkappa}_{\lambda}=U^*C^{\varkappa}_{\lambda}U,\quad \hat{L}^{\mu}_{\nu}=U^*L^{\mu}_{\nu}U,$$

имеющей место в случае, когда $\hat{C}^{\varkappa}_{\lambda}$ — выходные процессы, например, при $C^{\varkappa}_{\lambda}=I\otimes\hat{c}^{\varkappa}_{\lambda}$ и $L^{\mu}_{\nu}=R^{\mu}_{\nu}\otimes\hat{1}$, этот интеграл может быть определен как КС интеграл Ито — Хадсона — Партасарати от $\hat{\mathbf{C}}$:

$$\mathbf{N}(\hat{\mathbf{C}}, t)=\int \hat{C}^{\mu}_{\nu}dN^{\nu}_{\mu} \tag{2.17}$$

относительно преобразованного квазипуассоновского процесса $\mathbf{N}=(N^{\nu}_{\mu})$,

$$N^{\nu}_{\mu}(t)=\int_0^t S^{*\varkappa}_{\mu}S^{\nu}_{\lambda}d\Lambda^{\lambda}_{\varkappa}=U(t)^*\Lambda^{\nu}_{\mu}(t)\,U(t), \tag{2.18}$$

компоненты которого не обязательно являются выходными в смысле (2.18). Однако в марковском случае $L^{\mu}_{\nu}(t)=R^{\mu}_{\nu}\otimes\hat{1}$ рассмотренные в качестве выходных в [11, 17] преобразованные канонические процессы $N^{+}_{-}=t\hat{I}$, $N^{0}_{-}=N_{-}$, $N^{+}_{0}=N^{+}$, $N^{0}_{0}=N$, где $N_{-}=(N^{j}_{-})$, $N^{+}=(N^{+}_{i})$, $N=(N^{j}_{i})$ определены КС интегралами

$$N^{j}_{-}(t)=\int_0^t\left(R^{j}_{k}\otimes d\hat{\lambda}^{k}_{-}+R^{j}_{-}\otimes\hat{1}dr\right)=N^{j}_{+}(t)^* \tag{2.19}$$

$$N^{j}_{i}(t)=\int_0^t\left(R^{*l}_{i}R^{j}_{k}\otimes d\hat{\lambda}^{k}_{l}+R^{*l}_{i}R^{j}_{+}\otimes d\hat{\lambda}^{+}_{l}+\right.$$

$$\left.+R^{*}_{+i}R^{j}_{k}\otimes d\hat{\lambda}^{k}_{-}+R^{*}_{+i}R^{j}_{+}\otimes dr\right), \tag{2.20}$$

всегда удовлетворяют условию (2.8), поскольку они являются неразрушающими относительно любого эволюционного КС процесса $Z(t)=\hat{U}(t)(X\otimes\hat{I})\,U(t)$, $X\in\mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$.

§ 3. Стохастическая неразрушающая фильтрация квантовых процессов

Пусть $\hat{Y}=(\hat{Y}_i)$ — самосопряженное семейство коммутирующих выходных процессов $\hat{Y}(t, i)^*=\hat{Y}_i(t)=\hat{Y}(t, i^*)$, определенных КС уравнениями

$$\hat{Y}(t, i)=Y^0(i)\otimes\hat{1}+\int_0^t(\hat{\mathbf{S}}^*\hat{\mathbf{C}}(i)\,\hat{\mathbf{S}})^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu}, \tag{3.1}$$

которые являются неразрушающими относительно КС процессов $\hat{S}^{\mu}_{\nu}$ и $\hat{Z}$

$$[\hat{Y}_i(r),\ \hat{S}^{\mu}_{\nu}(t)]=0,\quad [\hat{Y}_i(r),\ \hat{Z}(t)]=0,\quad \forall r\leqslant t. \tag{3.2}$$

Как следует из (2.10), (2.11) для $Z^0=Y^0_k$, $G=C(k^*)+Y_k\otimes 1$, семейство $\hat{Y}$ удовлетворяет условию самонеразрушения

$$[\hat{Y}_i(r),\ \hat{Y}_k(t)]=0,\quad \forall r,\ t,\ i,\ k, \tag{3.3}$$

если и только если

$$[Y^0_i,\ Y^0_k]=0,\quad [C(i),\ C(k)]\,U=0, \tag{3.4}$$

и $[Y(r,i),\ C^{\mu}_{\nu}(t,k)]\,U(t)=0$ для всех $r\leqslant t,\ i=1,\ \ldots,\ n$.

Обозначим $\mathcal{A}_t=\{\hat{Y}^t\}'$ редуцированную алгебру ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, соответствующую измерениям процесса $\hat{Y}^t=\{\hat{Y}(r)\,|\,r\in[0,\ t]\}$ вплоть до момента t, определяемую как коммутант всех $\hat{Y}^t_i=U(t)^*Y^t_iU(t)$ и $\mathcal{B}=\{Y^0_i\}'$ коммутант в $\mathcal{H}^0$, определяющий редуцированную начальную алгебру $\mathcal{A}_0=\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}(\mathcal{F})$. Невозрастающее семейство $(\mathcal{A}_t)$ есть семейство максимальных подалгебр фон Неймана $\mathcal{A}_t\subseteq\mathcal{A}_r\subseteq\mathcal{A}_0$, $t\geqslant r\geqslant 0$, относительно которых $\hat{Y}$ есть неразрушающий векторный процесс в смысле определения $\hat{Y}_i(t)\in\mathcal{A}_t'$ (или $Y_i(t)$ присоединено к $\mathcal{A}_t'$) данного в [4]. Абелева алгебра $\mathbf{C}_t=\mathcal{A}_t'$, порождаемая семейством $\hat{Y}^t$ с $\mathcal{C}_0=\mathcal{B}'\otimes\hat{1}$, порожденным $\hat{Y}^0=\{\hat{Y}_i{}^0\otimes\hat{1}\}$, формирует центр $\mathbf{C}_t=\mathcal{A}_t\cap\mathcal{A}_t'$ алгебры $\mathcal{A}_t$, следовательно, $\mathcal{A}_t$ есть разложимая алгебра, имеющая условное ожидание относительно $\mathcal{A}_t'\subseteq\mathcal{A}_t$ для любого нормального начального состояния на $\mathcal{A}_0\supseteq\mathcal{A}_t$.

Определение 3. Квантовым неразрушающим фильтром относительно неубывающего семейства $(\mathcal{C}_t)$ абелевых $*$-подалгебр $\mathcal{C}_t\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и вектора состояния $\varphi\in\mathcal{H}$ называется семейство (ε_t) линейных положительных проекций $\varepsilon_t:\mathcal{A}_t\to\mathcal{A}_t'$

$$\varepsilon_t(Z^*Z)\geqslant 0,\qquad \varepsilon_t(\varepsilon_t(Z))=\varepsilon_t(Z),$$

определенных на невозрастающем семействе $(\mathcal{A}_t)$ максимальных редуцированных алгебр фон Неймана $\mathcal{A}_t=\mathcal{C}_t'$ на абелевы коммутанты $\mathcal{A}_t'=\mathcal{C}_t''$, для которых выполняется условие согласованности

$$\langle\varphi\,|\,\varepsilon_t(Z)\varphi\rangle=\langle\varphi\,|\,Z\varphi\rangle,\qquad \forall Z\in\mathcal{A}_t$$

и модулярности

$$\varepsilon_t(C^*ZC)=C^*\varepsilon_t(Z)C,\qquad \forall C\in\mathcal{C}_t$$

(последнее условие вытекает [15] из положительности проекции ε_t, в силу которой $\|\varepsilon_t\|=1$, причем $\mathcal{A}_t'=\mathcal{C}_t$, если $\mathcal{C}_t$ — слабозамкнуты, и $\hat{I}\in\mathcal{C}_t$).

Как вытекает из следующей теоремы, принцип неразрушающих измерений не только достаточен, но также необходим для существования определяющих квантовый фильтр условных ожиданий на $\mathscr{A}_t$ относительно $\mathscr{C}_t$. Мы явно построим это условное ожидание не только для ограниченных $A\in\mathscr{A}_t$, но также и для Z, присоединенных к $\mathscr{A}_t=\mathscr{C}_t'$.

Теорема 3. Пусть $\mathscr{C}_t\subseteq\mathscr{B}_t$ есть *-подалгебра алгебры фон Неймана $\mathscr{B}_t$ на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, и $\mathscr{B}_t'\subset\mathscr{A}_t$, где $\mathscr{A}_t=\mathscr{C}_t'$. Тогда условное ожидание ε_t как положительная проекция на $\mathscr{A}_t'=\mathscr{C}_t''$, существует на $\mathscr{B}_t$ относительно произвольного вектора состояния $\varphi\in\mathscr{H}$, если и только если $\mathscr{C}_t$ коммутирует с $\mathscr{B}_t$: $\mathscr{C}_t\subseteq\mathscr{B}_t'$, и, следовательно, является центральной. В этом случае алгебра $\mathscr{B}_t$ может быть расширена до коммутанта $\mathscr{A}_t$ алгебры $\mathscr{C}_t$, так что для любого оператора Z, коммутирующего на области $\mathscr{A}_t\varphi$ с $\mathscr{C}_t$, условное ожидание $\varepsilon_t(Z)$ определено на $\mathscr{A}_t\varphi$ формулой

$$\varepsilon_t(Z)A\varphi=AE_tZ\varphi,\qquad \forall A\in\mathscr{A}_t, \tag{3.5}$$

где $E_t\in\mathscr{A}_t$ есть ортопроектор на $\overline{\mathscr{C}_t\varphi}$. Формула (3.5) однозначно определяет почти всюду $\varepsilon_t(Z)$ как оператор $\varepsilon_t(Z)P_t$, присоединенный к $\mathscr{A}_t'P_t$ также и для неограниченных Z, где $P_t\in\mathscr{A}_t'$ — ортопроектор на $\overline{\mathscr{A}_t\varphi}$.

Доказательство. Пусть $[X, C]\neq 0$ для некоторого $X\in\mathscr{B}_t$ и $C\in\mathscr{C}_t$ и $\varepsilon_t:\mathscr{B}_t\to\mathscr{A}_t'$ есть положительная проекция на коммутант алгебры $\mathscr{A}_t=\mathscr{C}_t'$, совместимая с $\varphi\in\mathscr{H}$, для которых $\langle\varphi|[X, C]\varphi\rangle\neq 0$. Тогда благодаря свойству модулярности $\varepsilon_t(XC)=\varepsilon_t(X)C$, $\varepsilon_t(CX)=C\varepsilon_t(X)$, где $C\in\mathscr{C}_t$, $X\in\mathscr{B}_t$, мы получили бы

$$\langle\varphi|[\varepsilon_t(X), C]\varphi\rangle=\langle\varphi|[X, C]\varphi\rangle\neq 0,$$

что могло бы быть только в случае неабелевой $\mathscr{C}_t$. Но для неабелевой $\mathscr{C}_t$ условное ожидание не существует для всех векторов $\varphi\in\mathscr{H}$ если только $\mathscr{C}_t\neq\mathscr{B}_t$, как это может быть легко показано для фактора $\mathscr{A}_t=\mathscr{C}_t$, $\mathscr{C}_t\neq\mathbf{C}\hat{I}$. В самом деле, в этом случае вектор φ должен иметь ([21]) форму $\varphi_0\otimes\varphi_1$, и $\varepsilon_t(\overline{B\otimes C})=\langle\varphi_0|B\varphi_0\rangle I_0\otimes C$, где $\varphi_0\in\mathscr{H}_0\neq\mathbf{C}$, если $\mathscr{B}_t\neq\mathscr{C}_t''$, $\varphi_1\in\mathscr{H}_1\simeq\overline{\mathscr{C}_t\varphi}$, в соответствии с декомпозицией $\mathscr{H}=\mathscr{H}_0\otimes\mathscr{H}_1$. Таким образом, необходимо, чтобы $\mathscr{C}_t\subseteq\mathscr{B}_t'$

Определим ε_t для такой абелевой алгебры $\mathscr{C}_t$ формулой (3.5), где $\mathscr{A}_t=\mathscr{C}_t'$, и вектор $\varphi\in\mathscr{H}$ — фиксирован. Ортопроектор E_t коммутирует с $\mathscr{A}_t'$ благодаря инвариантности $\mathscr{E}_t=\overline{\mathscr{C}_t\varphi}$ относительно действия алгебры $\mathscr{C}_t$. Следовательно, оператор E_tZE_t коммутирует с $\mathscr{A}_t'E_t$:

$$E_tZE_tCE_t=E_tZCE_t=E_tCZE_t=CE_tZE_t=E_tCE_tZE_t,$$

если оператор Z коммутирует со всеми $C\in\mathscr{C}_t$. Но это означает, что E_tZE_t присоединен к редуцированной алгебре $E_t\mathscr{A}E_t=(\mathscr{C}E_t)'$ на $\mathscr{E}_t$, совпадающей со своим коммутантом $\mathscr{A}_t'E_t$ на

$\mathscr{E}_t$, потому что индуцированная абелева алгебра $\mathscr{A}_t'E_t$ имеет циклический вектор φ в $\mathscr{E}_t$, и следовательно $\mathscr{A}_t'E_t=(\mathscr{C}_tE_t)'$ на $\mathscr{E}_t$. Коммутативность $E_t\mathscr{A}_tE_t=\mathscr{A}_t'E_t$ помогает установить корректность $A\varphi=0\Rightarrow\varepsilon_t(Z)A\varphi=0$ определения (3.5) линейного оператора $\varepsilon_t(Z)$ на $\mathscr{A}_t\varphi$, ибо

$$\|\varepsilon_t(Z)A\varphi\|=\|AE_tZ\varphi\|=\|(E_tA^*AE_t)^{1/2}E_tZE_t\varphi\|=$$
$$=E_tZE_t(E_tA^*AE_t)^{1/2}\varphi\ ,$$

если $E_t\varphi=\varphi$, и $(E_tA^*AE_t)^{1/2}\varphi=0$, если $A\varphi=0$.

Оператор $\varepsilon_t(Z):A\varphi\mapsto AE_tZ\varphi$, имеющий область значений $\mathscr{A}_tE_tZ\varphi\subseteq\mathscr{H}_t=\overline{\mathscr{A}_t\varphi}$, коммутирует с произвольным $A\in\mathscr{A}_t$ благодаря определению (3.5), так что оператор $P_t\varepsilon_t(Z)$ присоединен к алгебре $P_t\mathscr{A}_t'P_t$, совпадающей с $\mathscr{A}_t'P_t$, ибо $P_t'\in\mathscr{A}_t'\cap\mathscr{A}_t=\mathscr{A}_t'$. Отображение $Z\mapsto\varepsilon_t(Z)$ сохраняет единицу:

$$\varepsilon_t(\hat{I})A\varphi=AE_t\varphi=A\varphi,$$

потому что $\varphi\in\mathscr{E}_t$, и обладает модулярным свойством

$$\varepsilon_t(ZC)A\varphi=AE_tCZ\varphi=ACE_tZ\varphi=CAE_tZ\varphi=C\varepsilon_t(Z)A\varphi$$

для всех $A\in\mathscr{A}_t$ и $C\in\mathscr{A}_t'$, и, следовательно, отображает алгебру $\mathscr{A}_t$ на подалгебру $\mathscr{A}_t'\subseteq\mathscr{A}_t$, представленную на $\mathscr{H}_t=P_t\mathscr{H}$.

Докажем единственность представления (3.5) условного ожидания ε_t как отображения на фактор-подалгебру $\mathscr{A}_t'/\mathscr{A}_t'P_t^\perp\simeq\mathscr{A}_t'P_t$, где $P_t^\perp=I-P_t\in\mathscr{A}_t'$ есть носитель φ, являющийся ортопроектором на $\overline{\mathscr{A}_t\varphi}=\mathscr{H}_t$. Благодаря коммутативности $\varepsilon_t(Z)$ с $\mathscr{A}_t$ имеем: $\varepsilon_t(Z)A\varphi=A\varepsilon_t(Z)\varphi$ для всех $A\in\mathscr{A}_t$. Следовательно, необходимо доказать, что $\varepsilon_t(Z)\varphi=E_tZ\varphi$. Но $\varepsilon_t(Z)\varphi\in\in\mathscr{A}_t'\varphi$, потому что $\varepsilon_t(Z)\in\mathscr{A}_t'$ для $Z\in\mathscr{A}_t$; следовательно, надо доказать, что $\langle C\varphi|\varepsilon_t(Z)\varphi\rangle=\langle C\varphi|E_tZ\varphi\rangle$ для всех $C\in\mathscr{A}_t'$, что вытекает из свойств модулярности и совместимости:

$$\langle C\varphi|\varepsilon_t(Z)\varphi\rangle=\langle\varphi|\varepsilon_t(C^*Z)\varphi\rangle=\langle\varphi|C^*Z\varphi\rangle=$$
$$=\langle C\varphi|E_tZ\varphi\rangle.$$

Доказательство закончено.

Замечание 3. Отождествим абелеву алгебру $\mathscr{A}_t'P_t$ на носителе $P_t\in\mathscr{A}_t'$ вектора состояния φ с пространством $\mathscr{L}_\mu^\infty(\Omega^t)$ существенно ограниченных комплексных функций на множестве Ω^t спектральных значений ω^t коммутирующего семейства Y^t относительно вероятностной меры

$$\mu(d\omega^t)=\langle\varphi|I(d\omega^t)\varphi\rangle,\tag{3.6}$$

индуцированной на Ω^t спектральным разложением $Y^t=\int\omega^tI(d\omega^t)$. Тогда условное ожидание $\varepsilon_t:\mathscr{A}_t\to\mathscr{A}_t'$ можно описать как условное состояние $Z\mapsto\langle Z\rangle(\omega^t)$, определенное для каждого $Z\in\mathscr{A}_t$

почти всюду на Ω^t как функция $\langle Z \rangle \in \mathcal{L}^\infty_\mu(\Omega^t)$, $\langle Z \rangle (\omega^t) = \langle \tilde{\varphi}_t | Z\tilde{\varphi}_t \rangle (\omega^t)$.

В самом деле, если $P_t = \int\limits_{\Omega^t}^{\oplus} P(\omega^t)\mu(d\omega^t)$ есть соответствующая декомпозиция носителя $P_t \in \mathcal{A}'_t$, то

$$P_t\varepsilon_t(Z) = \int\limits_{\Omega^t}^{\oplus} \langle Z \rangle (\omega^t) P(\omega^t)\mu(d\omega^t), \tag{3.7}$$

где $\langle Z \rangle (\omega^t) = \langle \tilde{\varphi}_t | Z\tilde{\varphi}_t \rangle (\omega^t)$ и $\tilde{\varphi}_t(\omega^t) = P(\omega^t)\varphi / \| P(\omega^t)\varphi \|$ — векторы, определяющие разложение

$$E_t = \int\limits_{\Omega^t}^{\oplus} | \tilde{\varphi}_t(\omega^t) \rangle \langle \tilde{\varphi}_t(\omega^t) | \mu(d\omega^t). \tag{3.8}$$

Следовательно, $\varepsilon_t(Z)$ можно рассматривать для каждого $Z \in \mathcal{A}_t$ как функцию $\varepsilon_t(Z): \omega \mapsto \langle Z \rangle (\omega^t) P(\omega^t)$, определяемую для почти всех траекторий $\omega^t \in \Omega^t$, наблюдаемых до момента t, условным средним значением.

Начальное условное ожидание ε_0 относительно $\mathcal{B}' \otimes \hat{1}$ и $\varphi = \psi \otimes e$ дается для $Z = X \otimes \hat{1}$, $X \in \mathcal{B}$ произведением $\varepsilon(X) \otimes \hat{1}$, где

$$\varepsilon(X)P = \int\limits_{\Omega}^{\oplus} \langle \tilde{\psi}(\omega) | X\tilde{\psi}(\omega) \rangle \mu(d\omega), \tag{3.9}$$

$\mu(d\omega) = \| I(d\omega)\psi \|^2$. Здесь векторы $\tilde{\psi}(\omega) = P(\omega)\psi / \| P(\omega)\psi \|$, $\omega \in \Omega$ начального условного состояния $\langle Z \rangle^0 \in L^\infty_\mu(\Omega)$ определяют разложение $E_0 = E \otimes \hat{1}$,

$$E = \int\limits_{\Omega}^{\oplus} | \psi(\omega) \rangle \langle \psi(\omega) | \mu(d\omega); \tag{3.10}$$

ортогональное семейство $\{P(\omega)\}$ ортопроекторов $P(\omega) \in \mathcal{B}'$ задает декомпозицию $P = \int\limits_{\Omega}^{\oplus} P(\omega)\mu(d\omega)$ носителя $P_0 = P \otimes \hat{1}$ вектора состояния ψ на $\mathcal{B}'$, соответствующую ортогональному разложению $Y_0 = \int \omega I(d\omega)$ на спектре Ω коммутативного семейства $Y^0 = \{Y^0_t\}$ начальных операторов $Y_t(0) = Y^0_t \otimes \hat{1}$, $Y^0_t \in \mathcal{B}'$.

Если коммутативный наблюдаемый процесс в представлении Шредингера имеет вид $Y(t) = I \otimes \hat{y}(t)$, соответствующий условию неразрушения относительно любого КС процесса $Z(t) = X(t) \otimes \hat{1}$, и $\varphi \in \mathcal{H}$ — произвольный вектор состояния в $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \otimes \mathcal{F}$, то $E_t = I \otimes \hat{e}_t$, $P_t = I \otimes \hat{p}_t$, и $\varepsilon_t(Z) = I \otimes \hat{\varepsilon}_t(Z)$ для любого $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^0) \otimes \mathfrak{a}_t$, где $\mathfrak{a}_t=\{\hat{y}_t^+\}'$ — коммутант на $\mathcal{F}$ семейств $\hat{y}_t^+=\{\hat{y}_l(v)|\,r\in(0,\ t)\}$ с $\mathfrak{a}_0=\mathcal{B}(\mathcal{F})$. Отображение $\hat{\varepsilon}_t:\mathcal{A}_t\to\mathfrak{a}'_t$ редуцированной алгебры $\mathcal{A}_t=$ $=\mathcal{B}(\mathcal{H}^0)\otimes\mathfrak{a}_t$ в центр $\hat{c}_t=\mathfrak{a}_t\cap\mathfrak{a}'_t=\mathfrak{a}'_t$, определенное почти всюду как

$$\varepsilon_t(Z)\hat{P}_t=\int_{\Omega^t}^{\oplus}\langle Z\rangle(\omega^t)\,\hat{p}(\omega^t)\,\mu(d\omega^t), \tag{3.11}$$

в дальнейшем отождествляется с условным состоянием $\langle Z\rangle(\omega^t)$, совпадающим при $t=0$ с априорным состоянием $\langle Z\rangle=\langle\varphi|Z\varphi\rangle$.

§ 4. Стохастическое исчисление апостериорных квантовых процессов

Предположим, что $\varphi=\psi\otimes\delta_\varnothing$, где $\delta_\varnothing$ есть вакуумный вектор, и пусть выходные коммутирующие процессы (3.1) являются неразрушающими относительно

$$\hat{Z}(t)=\hat{Z}(0)+\int_0^t(\hat{S}^*\hat{G}\hat{S}-\hat{Z}\otimes 1)^\mu_\nu\,d\Lambda^\nu_\mu, \tag{4.1}$$

где $Z(0)\in\mathcal{A}_0$, $\hat{\mathrm{G}}(t)\in\mathfrak{A}_t$ — алгебра матричных операторов $\hat{\mathrm{G}}(t)=$ $=(\hat{G}^\mu_\nu)(t)$, $\hat{G}^-_-=\hat{Z}=\hat{G}^+_+$, $\hat{G}^\mu_\nu=0$ при $\mu=+$ или $\nu=-$, коммутирующих с $\hat{Y}(r)$, $r\leqslant t$ и $\hat{\mathrm{C}}(t)$: $\mathfrak{A}_t=\{\hat{G}^\mu_\nu\in\mathcal{A}_t\,\|[\hat{\mathrm{C}}_i,\hat{\mathrm{G}}]=0,\ i=1,\ldots$ $\ldots,m\}$. Далее мы будем требовать для векторного процесса $\hat{Y}=(\hat{Y}_i)_{i=1,\ldots,m}$ непрерывность справа в смысле $\mathcal{A}'_t=\bigcap_{s>t}\mathcal{A}'_s$, что эквивалентно $\hat{C}^\mu_\nu(t,\ i)\in\mathcal{A}'_t$ для всех i и t (или присоединено к $\mathcal{A}'_t$).

Обозначим через $\mathcal{C}$ линейную оболочку начальных операторов $\{Y^0_t\}$ и операторов $Y_0\in\mathfrak{J}$ из идеала $\mathfrak{J}=\{c\in\mathcal{B}'\,|\langle C|C\rangle=0\}$, $\langle C|C\rangle=$ $=\|C\varphi\|^2$. Мы также обозначим $\mathfrak{C}_t\,\mathcal{A}'_t$-оболочку операторных матриц $\{\hat{C}(i)\}(t)$ и идеала $\mathfrak{I}_t=\{\hat{\mathrm{C}}\in\mathfrak{A}'_t\,|\,\hat{\mathrm{C}}^-_-=0=\hat{\mathrm{C}}^+_+,\ (\hat{\mathrm{C}}|\hat{\mathrm{C}})=0\}$ коммутативной $*$-алгебры

$$\mathfrak{A}'_t=\{\hat{C}^\mu_\nu\in\mathcal{A}'_t\,\|[\hat{\mathrm{C}},\ \hat{\mathrm{G}}]=0,\ \hat{\mathrm{G}}\in\mathfrak{A}_t\},$$

соответствующей ядру полускалярного произведения

$$(\hat{\mathrm{C}}|\hat{\mathrm{C}})=\langle\varphi|(\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{C}}^*\hat{\mathrm{C}}\hat{\mathrm{S}})^-_+\varphi\rangle=(\hat{\mathrm{C}}\hat{\mathrm{S}}_+\varphi|\hat{\mathrm{C}}\hat{\mathrm{S}}_+\varphi)=\|\hat{\mathrm{C}}^0\hat{\mathrm{S}}_+\varphi\|^2,$$

где $\hat{\mathbf{R}}^{*-}=(0,\ \hat{R}^{0*}_+,\ \hat{R}^{-*}_+)=\hat{R}^*_+$ — строка, сопряженная столбцу R_+ матрицы $\mathbf{R}=(\mathbf{R}^\mu_\nu)=\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{S}}$. Сейчас мы готовы сформулировать основную теорему, при доказательстве которой мы будем опускать крышки над операторами, указывающие, что исчисление ведется в картине Гейзенберга.

Теорема 4. Пусть выходной процесс (3.1) является неразрушающим относительно КС процесса (4.1) и оболочки $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}_t$

являются $*$- и $\bigstar$-алгебрами соответственно. Тогда апостериорное среднее значение $\varepsilon_t(Z(t))$ для начального вектора состояния $\varphi=\psi\otimes\delta_\varnothing$, $\psi\in\mathcal{H}^0$, определено согласованными коммутативными матричными процессами $\hat{K}(i)=(\hat{K}_\nu^\mu)(i)$, $\hat{K}(t, i)\in\mathfrak{B}_t$, $i=1, \ldots, m$ почти всюду как $\mathcal{A}_t'$-линейное неупреждающее преобразование выходного процесса $\hat{Y}$ стохастическим уравнением Ито

$$d\varepsilon_t(\hat{Z})=\varepsilon_t(\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{G}}\hat{\mathrm{S}})_+^-dt+\sum_{i=1}^m\varepsilon_t(\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{K}}(i)\tilde{\mathrm{G}}\hat{\mathrm{S}})_+^-d\tilde{Y}_i. \tag{4.2}$$

Здесь $\varepsilon_t(\mathrm{G})_+^-=\varepsilon_t(\mathrm{G}_+^-)$, $\tilde{\mathrm{G}}(t)=\hat{\mathrm{G}}(t)-\varepsilon_t(\hat{Z}(t)\otimes 1$, и $\tilde{Y}_i=\tilde{Y}(i^*)$,

$$\tilde{Y}(t, i)=\hat{Y}(t, i)-\varepsilon_t(\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{C}}(i)\hat{\mathrm{S}})_+^-(t)\,dt, \quad \tilde{Y}(0, i)=\tilde{Y}_{i*}^0\otimes\hat{1} \tag{4.3}$$

— наблюдаемый мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{E}_t)$ и вектора состояния $\varphi\in\mathcal{H}$, называемый обновляющим процессом для $(\mathcal{A}_t')$.

Процесс $\hat{\mathrm{K}}$ определен однозначно с точностью до ядра корреляционной матрицы-процесса $\sigma=(\sigma_j^i)$,

$$\sigma_j^i(t)=\varepsilon_t(\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{C}}(i)\hat{\mathrm{C}}(j)^*\hat{\mathrm{S}})_+^-(t) \tag{4.4}$$

$\mathcal{A}_t'$-линейным уравнением

$$\sum_{j=1}^m\sigma_j^i(t)\hat{\mathrm{K}}(t, j)=\hat{\mathrm{C}}(t, i), \quad i=1, \ldots, m, \tag{4.5}$$

дающим в случае $\hat{\mathrm{G}}(t)=\hat{Z}(t)\otimes 1$ уравнению (4.2) линейную относительно $\hat{Z}$ форму

$$d\varepsilon_t(\hat{Z})=\varepsilon_t(\hat{S}^*{}_\nu^-\hat{Z}\hat{S}_+^\nu)\,dt+\sum_{i=1}^m\varepsilon_t(\hat{S}^*{}_\mu^-\tilde{Z}\hat{S}_+^\nu)\hat{K}_\nu^\mu(i)\,d\tilde{Y}_i, \tag{4.6}$$

где $\tilde{Z}(t)=\hat{Z}(t)-\varepsilon_t(\hat{Z}(t))$. Начальное апостериорное среднее $\varepsilon_0(\hat{Z})=\varepsilon(X)\otimes\hat{1}$ от $Z(0)=X\otimes\hat{1}$ есть линейная комбинация

$$\varepsilon(X)=\langle\psi|X\psi\rangle+\sum_{i=1}^m\langle\psi|K^i\tilde{X}\psi\rangle\tilde{Y}_i^0, \quad \tilde{X}=X-\langle\psi|X\psi\rangle I$$

операторов $\tilde{Y}_i^0=Y_i^0-\langle\psi|Y_i^0\psi\rangle I$, где $K=(K^i)$ определено уравнением

$$\sum_{j=1}^m\sigma_{ij}^0K^j=Y_i^0, \quad i=1, \ldots, m; \quad \sigma_{ij}^0=\langle\psi|\tilde{Y}_i^0\tilde{Y}_j^0\psi\rangle \tag{4.7}$$

с точностью до ядра начальчой корреляционной матрицы $\sigma^0=(\sigma_{ij}^0)$.

Для того, чтобы доказать эту фундаментальную теорему фильтрации, мы нуждаемся в следующих леммах.

Лемма 4.1. Если процесс $\hat{Z}$ удовлетворяет уравнению (4.1), то существует такой мартингал $\hat{M}=(\hat{M}_t)$ относительно $(\mathcal{E}_t, \varphi)$, присоединенный к $\mathcal{A}_t'$ на $\mathcal{A}_t\varphi$, что почти всюду

$$\varepsilon_t(\hat{Z}(t))=\varepsilon_0(\hat{Z}(0))+\int_0^t \varepsilon_r(\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{G}}\hat{\mathrm{S}})_+^-(r)\,dr+\hat{M}_t. \tag{4.8}$$

Доказательство. Определим M_t сначала на φ:

$$M_t\varphi=(E_t-E_0)\,Z(0)\,\varphi+\int_0^t (E_t-E_r)(\mathrm{S}^*\mathrm{G}\mathrm{S})_\nu^\mu(r)\,d\Lambda_\mu^\nu(r)\,\varphi.$$

Очевидно, что $M_t\varphi$ удовлетворяет $(\mathcal{E}_t, \varphi)$-мартингальному условию $E_rM_t\varphi=M_r\varphi$ для всех $r\leqslant t$ и

$$E_tZ(t)\,\varphi=E_0Z(0)\,\varphi+\int_0^t E_r(\mathrm{S}^*\mathrm{G}\mathrm{S})_+^-(r)\,\varphi dr+M_t\varphi$$

благодаря $E_r(\mathrm{S}^*\mathrm{G}\mathrm{S})_\nu^\mu(r)\,d\Lambda_\mu^\nu(r)\,\varphi=E_r(\mathrm{S}^*\mathrm{G}\mathrm{S})_+^-(r)\,\varphi dr$ для $\varphi=\psi\otimes\delta_\varnothing$. Оператор M_t, присоединенный к $\mathcal{A}_t'$, может быть корректно определен почти всюду как $\varepsilon_t(M_t)=M_t$ в случае (3.5) для $Z=M$: $M_tA\varphi=AE_tM_t\varphi=AM_t\varphi$, $\forall A\in\mathcal{A}_t$. Итак, для любого $A\in\mathcal{A}_t$ мы имеем

$$\varepsilon_t(Z(t))\,A\varphi=A\Bigl(E_0Z(0)\,\varphi+\int_0^t E_r(\mathrm{S}^*\mathrm{G}\mathrm{S})_+^-(r)\,\varphi dr+M_t\varphi\Bigr)=$$

$$=\varepsilon_0(Z(0))\,A\varphi+\int_0^t \varepsilon_r(\mathrm{S}^*\mathrm{G}\mathrm{S})_+^-(r)\,A\varphi dr+M_tA\varphi$$

и, следовательно, (4.8) имеет место на плотном линейном многообразии $\mathcal{A}_t\varphi$ носителя $\mathcal{H}_t$ состояния φ на $\mathcal{A}_t'$.

Лемма 4.2. Процесс $\hat{\mathrm{M}}_t=\int_0^t(\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{C}}\hat{\mathrm{S}})_\nu^\mu d\Lambda_\mu^\nu$ с $\hat{\mathrm{C}}(t)\in\mathfrak{C}_t$ есть мартингал относительно $(\mathcal{E}_t, \varphi)$, если и только если $\varepsilon_t(\hat{\mathrm{S}}^*\hat{\mathrm{C}}\hat{\mathrm{S}})_+^-(t)=0$ для всех t, т. е. почти всюду

$$\hat{C}_+^-(t)+\hat{C}_0^-(t)\,\varepsilon_t(\hat{S}_+^0)+\varepsilon_t(\hat{S}_+^0)^*\hat{C}_+^0(t)+\varepsilon_t(\hat{S}_+^{0*}\hat{C}_0^0\hat{S}_+^0)(t)=0; \tag{4.9}$$

$\hat{M}$ есть нулевой мартингал (почти всюду), если и только если $\hat{\mathrm{C}}(t)\in\mathfrak{T}_t$, что эквивалентно $\varepsilon_t(\hat{S}^*\hat{C}^*\hat{C}\hat{S})_+^-(t)=0$ для всех t почти всюду, т. е.

$$\varepsilon_t\bigl((\hat{C}_+^0+\hat{C}_0^0\hat{S}_+^0)^*(\hat{C}_+^0+\hat{C}_0^0\hat{S}_+^0)\bigr)(t)=0 \tag{4.10}$$

и, следовательно $\tilde{C}_+^-(t)=\varepsilon_t(\tilde{S}_+^{0*}\hat{C}_0^0\hat{S}_+^0)(t)$.

Доказательство. Благодаря коммутативности M_t с $\mathscr{A}_t$, мы должны доказать только, что $E_t M_s \varphi = M_t \varphi$ для всех $s > t$ если и только если $E_t (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- (t) = 0$ для всех t. В самом деле,

$$E_t (M_s - M_t)\varphi = \int_t^s E_t (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- (r) \varphi dr = 0 \text{ для всех } s > t, \text{ если и}$$

только если $E_t (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- (r)\varphi = 0$ для всех $t \leqslant r$, что эквивалентно $E_t (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- (t)\varphi = 0$ для всех t в силу $E_t E_r = E_t$ при $t \leqslant r$. Последнее можно записать в форме (4.10), если учесть, что

$$(\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- = C_+^- + C_0^- S_+^0 + S_+^{0*} C_+^0 + S_+^{0*} C_0^0 S_+^0.$$

Если M_t — мартингал, то

$$\varepsilon_t [(M_s - M_t)^* (M_s - M_t)] = \varepsilon_t (M_s^* M_s) - M_t^* M_t =$$

$$= \int_t^t \varepsilon_t (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- (v)\, dr \geqslant 0$$

и M_t есть нулевой мартингал $|M_s - M_t|^2 = 0$ только если $\varepsilon_t (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- (r) = 0$ для всех $t \leqslant r$, что эквивалентно $\varepsilon_t (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- (t) = 0$ для всех t. Последнее можно записать в форме (4.10) в терминах $(\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- = (C_+^0 + C_+^0 S_+^0)^* (C_+^0 + C_+^0 S_+^0)$. Но это означает, что $(C_+^0 + C_0^0 S_+^0)\varphi \doteq 0$, т. е. $\mathbf{C}(t) \in \mathfrak{T}_t$. Обратно, если $\mathbf{C}(t) \in \mathfrak{T}_t$, т. е. $\langle \varphi | (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- \varphi \rangle = 0$, то $E_t (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- (t)\varphi = 0$, потому что $\langle Y\varphi | (\mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}^\bigstar \mathbf{C}\mathbf{S})_+^- \varphi \rangle = \langle \varphi | \mathbf{S}^\bigstar \mathbf{C}^\bigstar (Y \otimes 1) \mathbf{C}\mathbf{S}\varphi \rangle_+^-$ для всех $Y \leqslant \mathscr{A}_t'$.

Лемма 4.3. Пусть линейная комплексная оболочка семейства $\{Y_i^0\}$ и $\mathscr{A}_t'$ — оболочки семейств $\{\mathbf{C}(i)\}(t)$ являются коммутативными $\ast$- и $\bigstar$-алгебрами $\mathscr{C}$ и $\mathfrak{C}_t$ с точностью до идеалов $\mathscr{I}$ и $\mathfrak{T}_t$ соответственно. Тогда локально ограниченные процессы вида

$$\hat{Y}(t) = (Y_0 + \lambda^i \tilde{Y}_i^0) \otimes \hat{1} + \int_0^t (\hat{\mathbf{S}}^\bigstar (\hat{\mathbf{C}}_0 + \lambda^i \tilde{\mathbf{C}}_i)_\nu^\mu (r)\, d\Lambda_\mu^\nu (r) \qquad (4.11)$$

где $Y_0 \in \mathscr{I}$, $\tilde{Y}_i^0 = Y_i^0 - \langle \psi | Y_i^0 \psi \rangle I$, $\hat{\mathbf{C}}_0(t) \in \mathfrak{T}_t$, $\tilde{\mathbf{C}}_i(t)_\nu^\mu = \hat{C}_\nu^\mu (t, i^*)$, если $(\mu, \nu) \neq (-, +)$ и $\tilde{\mathbf{C}}_i(t)_+^- = \tilde{C}_+^- (t, i^*) - \varepsilon_t (\hat{\mathbf{S}}^* \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{S}})_+^- (t, i^*)$, определенные слабо измеримыми локально ограниченными функциями $t \mapsto \lambda_t^i \in \mathscr{A}_t'$, $\lambda_0^i \in \mathbf{C}$, составляют слабо плотную $*$-подалгебру $\mathscr{C}_t \subseteq \mathscr{A}_t'$, порождающую на векторе $\varphi = \psi \otimes \delta_\varnothing$ то же подпространство $\mathscr{E}_t$, что и $\mathscr{A}_t'$.

Доказательство. Используя КС формулу Ито (1.9) для $Y^* Y$, $dY = (\mathbf{S}^* \mathbf{C}\mathbf{S})_\nu^\mu d\Lambda_\mu^\nu$, где $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}_0(t) + \lambda_t^i \tilde{\mathbf{C}}_i(t) \in \mathfrak{C}_t$, получим с учетом коммутативности $Y(t)$ с $S^{\mu}_{\nu}(t)$:

$$d(Y^*Y) = (\mathbf{S}^*(\mathbf{C}^*(Y\otimes 1) + (Y\otimes 1)^*\mathbf{C} + \mathbf{C}^*\mathbf{C})\,\mathbf{S})^{\mu}_{\nu}\,d\Lambda^{\nu}_{\mu}.$$

Но $\mathbf{C}(t)^*\mathbf{C}(t)\in\mathfrak{C}_t$ и, следовательно, $(\mathbf{C}^*(Y\otimes 1)+(Y\otimes 1)^*\mathbf{C}+\mathbf{C}^*\mathbf{C})(t)\in\mathfrak{C}$ есть $\mathcal{A}'_t$-линейная комбинация $\{\mathbf{C}(i)\}(t)$ и некоторого $\mathbf{C}_0(t)\in\mathfrak{T}_t$, так же, как $Y^*Y\in\mathscr{C}$ для $Y = Y_0 + \lambda^i\widetilde{Y}^0_i\in\mathscr{C}$ есть линейная комбинация $\widetilde{Y}^0_i$ и $Y_0\in\mathcal{J}$. Следовательно, Y^*Y есть процесс той же формы, что и Y, и $\mathcal{A}'_t$—оболочка унитарных операторов $Y(t)$ вида (4.11) составляет абелеву $*$-алгебру $\mathscr{C}_t\subseteq\mathcal{A}'_t$. Эта алгебра порождает $\mathcal{A}'_t$ т. к. она имеет тот же коммутант $\mathcal{A}_t$, что и семейство $\{Y(r,i), r\leqslant t, i=i,\ldots,m\}$, порождающее $\mathscr{C}_t$, и, следовательно, $\overline{\mathscr{C}_t\varphi} = \mathscr{E}_t = \overline{\mathcal{A}'_t\varphi}$.

Доказательство Основной теоремы. Найдем мартингал M, определяющий разложение (4.8) в Лемме 1. Предположим, что он есть стохастическое интегральное неупреждающее преобразование

$$M_t = \int_0^t (\mathbf{S}^*\widetilde{\mathbf{C}}_i\mathbf{S})^{\mu}_{\nu}(r)\,\varkappa^i_r\,d\Lambda^{\nu}_{\mu}(r),\quad \varkappa^i_t\in\mathcal{A}'_t,$$

наблюдаемых мартингалов

$$\widetilde{Y}_i(t) = \hat{Y}_i(t) - \int_0^t \varepsilon_r(\mathbf{S}^*\mathbf{C}(i^*)\mathbf{S})^-_+(r)\,dr = \int_0^t (\mathbf{S}^*\widetilde{\mathbf{C}}_i\mathbf{S})^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu},$$

где процесс $\widetilde{Y}_0$, соответствующий $\mathbf{C}_0(t)\in\mathfrak{T}_t$, не следует принимать во внимание, так как, в соответствии с Леммой 2, $\widetilde{Y}_0$ есть почти всюду нулевой мартингал. Благодаря плотности $\mathscr{C}_t\varphi$ в $\mathscr{E}_t$, доказанной в Лемме 3, могут быть найдены коэффициенты $\varkappa$ из условия

$$\langle\varphi|Y(t)^*Z(t)\varphi\rangle = \langle\varphi|Y(t)^*\varepsilon_t(Z(t))\varphi\rangle,$$

определяющего ε_t для всех $Y(t)$ в форме (4.11). В самом деле, используя формулу Ито (1.13) для $dY = (\mathbf{S}^*\mathbf{C}\mathbf{S})^{\mu}_{\nu}d\Lambda^{\nu}_{\mu}$, где $\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \widetilde{\mathbf{C}}_i\lambda^i$, можно получить

$$d\langle\varphi|Y^*Z\varphi\rangle = \langle\varphi|S^*(Y\otimes 1 + \mathbf{C})^*\mathbf{G}\mathbf{S}\varphi\rangle^-_+dt = $$
$$= \langle\varphi|(Y^*\varepsilon_t(S^*GS)^-_+ + (S^*C^*GS)^-_+)\varphi\rangle\,dt.$$

С другой стороны, принимая во внимание, что

$$d\varepsilon_t = \varepsilon_t(\mathbf{S}^*\mathbf{G}\mathbf{S})^-_+\,dt + dM_t,\quad dM = (\mathbf{S}^*\widetilde{\mathbf{C}}_i\mathbf{S})^{\mu}_{\nu}\varkappa^i d\Lambda^{\nu}_{\mu},$$

можно получить

$$d\langle\varphi|Y^*\varepsilon_t(Z)\varphi\rangle = \langle\varphi|Y^*\varepsilon_t(\mathbf{S}^*\mathbf{G}\mathbf{S})^-_+\varphi\rangle\,dt +$$
$$+ \langle\varphi|((\mathbf{S}^*\mathbf{C}^*\mathbf{S})^-_+\,\varepsilon_t(Z) + (\mathbf{S}^*\mathbf{C}^*\mathbf{C}_i\mathbf{S})^-_+\,\varkappa^i_t)\varphi\rangle\,dt.$$

Следовательно,

$$\langle \varphi | S^*C^*\tilde{C}_l S\varkappa_l^l \varphi \rangle_{\mp}^{-} = \langle \varphi | ((S^*C^*GS)_{\mp}^{-} - (S^*C^*S)_{\mp}^{-} \varepsilon_l(Z))\varphi \rangle,$$

что эквивалентно (4.5) для $C = C_0 + \tilde{C}_l \lambda^l$ и

$$\langle \varphi | S^*C_0^*C(l^*) S\varkappa_l^l \varphi \rangle = \langle \varphi | ((S^*C_0^*GS)_{\mp}^{-} - (S^*C_0^*S)_{\mp}^{-} \varepsilon_l(Z))\varphi \rangle,$$

благодаря $C^*\tilde{C}_l = C^*C_l$ и произвольности $\lambda_l^l \in \mathscr{A}'_l$. Но левая часть последнего уравнения равна нулю

$$\langle \varphi | (S^*C_0^*C_l S)_{\mp}^{-} \varphi \rangle = \langle (C_0^0 S_+^0 + C_+^0)_0 \varphi | (C_0^0 S_+^0 + C_+^0)_l \varphi \rangle = 0,$$

т. к. $\langle \varphi | (S^*C_0^*C_0 S)_{\mp}^{-} \varphi \rangle = \| (C_0^0 S_+^0 + C_+^0)_0 \varphi \|^2 = 0$ для $C_0 \in \mathfrak{T}_l$.
С другой стороны, принимая во внимание, что

$$\langle \varphi | (S^*C_0^*GS)_{\mp}^{-} \varphi \rangle = \langle \varphi | (S^*C_0^*(Z \otimes 1) S)_{\mp}^{-} \varphi \rangle,$$

для $G = Z \otimes 1 + D$, и вследствии $\star$-нормальности

$$C_0^0 C_0^{0*} = C_0^{0*} C_0^0,\ C_0^0 C_0^{-*} = C_0^{0*} C_+^0,\ C_0^- C_0^{-*} = C_+^{0*} C_+^0,$$

для $C_0 \in \mathfrak{T}_l$ как для операторной матрицы коммутативной $\star$-алгебры $\mathfrak{A}'_l$, можно получить

$$\langle \varphi | (S^*C_0^*GS)_{\mp}^{-} \varphi \rangle = \langle \varphi | (C_+^- + C_0^- S_+^0)_0^* Z\varphi \rangle +$$
$$+ \langle (C_0^0 S_+^0 + C_+^0)_0 \varphi | Z S_+^0 \varphi \rangle = \langle \varphi | (C_+^{-*} Z + S_+^{0*} C_0^{0*} Z S_+^0)_0 \varphi \rangle =$$
$$= \langle \varphi | (C_+^{-*} + C_+^{0*} C_0^{0+*} C_+^0)_0 Z\varphi \rangle =$$
$$= \langle \varphi | (C_+^- + C_+^{0*} C_0^{0+} C_+^0)_0^* \varepsilon_l(Z)\varphi \rangle.$$

Здесь C_0^{0+} — квазиобратная сопряженная матрица для нормального $C_0^0 = C_0^{0*} C_0^{0+} C_0^0$ и использовано $(C_0^0 S_+^0 + C_+^0)_0 \varphi = 0$, $(C_0^{0*} S_+^0 + C_0^{-*})_0 \varphi = 0$ для $\star$-нормального $C_0 \in \mathfrak{T}_l$. Следовательно, правая часть уравнения (4.12) также нулевая:

$$\langle \varphi | (S^*C_0^*GS)_{\mp}^{-} \varphi \rangle = \langle \varphi | (S^*C_0^*S)_{\mp}^{-} \varepsilon_l(Z) \varphi \rangle,$$

ибо таким же образом можно получить

$$\langle \varphi | (S^*C_0^*S)_{\mp}^{-} \varepsilon_l(Z) \varphi \rangle = \langle \varphi | (C_+^- + C_0^- S_+^0)_0^* \varepsilon_l(Z) \varphi \rangle +$$
$$+ \langle (C_0^0 S_+^0 + C_+^0)_+ \varphi | S_+^0 \varepsilon_l(Z) \varphi \rangle =$$
$$= \langle \varphi | (C_+^- + C_+^{0*} C_0^{0+} C_+^0)_0^* \varepsilon_l(Z) \varphi \rangle.$$

Это доказывает также единственность решения уравнения (4.5) с точностью до ядра корреляционной матрицы $\sigma(t) = (\sigma_j^l)(t)$, потому что если $(\sigma_j^l \lambda_0^j)(t) = 0$ для некоторого $\mathscr{A}'_l$-согласованного векторного процесса $\lambda_0=(\lambda_0^i)$, то $C_0=\lambda_0^i C_i \in \mathfrak{T}_t$ и, следовательно,

$$\langle \lambda^i\varphi \,|\, \varepsilon(\mathbf{S}^*\mathbf{C}_i^*G\mathbf{S})_+^- - \varepsilon(\mathbf{S}^*\mathbf{C}_i^*\mathbf{S})_+^-\varepsilon(Z))\varphi\rangle =$$
$$= \langle \varphi \,|\, ((\mathbf{S}^*\mathbf{C}_0^*G\mathbf{S})_+^- - (\mathbf{S}^*\mathbf{C}_0^*\mathbf{S})_+^-\varepsilon(Z))\varphi\rangle = 0.$$

В случае $G_\nu^\mu = Z\delta_\nu^\mu$, можно легко получить уравнение (4.6) из (4.5), если принять во внимание, что

$$\varepsilon(\mathbf{S}^*\mathbf{C}(Z\otimes 1)\mathbf{S})_+^- = C_+^-\varepsilon(Z) + C_0^-\varepsilon(ZS_+^0) + \varepsilon(S_+^{0*}Z)C_+^0 +$$
$$+\varepsilon(S_+^{0*}C_0^0ZS_+^0),$$

и

$$\varepsilon(S^*CS)_+^-\varepsilon(Z) = C_+^-\varepsilon(Z) + C_0^-\varepsilon(Z)\varepsilon(S_+^0) + \varepsilon(S_+^0)^*\varepsilon(Z)C_+^0 +$$
$$+\varepsilon(S_+^{0*}C_0^0S_+^0)\varepsilon(Z).$$

Начальное условие $\varepsilon_0(X\otimes\hat{1}) = \varepsilon(X)\otimes\hat{1}$ для уравнения (4.2) следует также искать в линейном виде $\varepsilon(X) = \langle\psi\,|\,X\psi\rangle + \tilde{Y}_i^0k^i$, где k^i находится из $\langle Y\psi\,|\,X\psi\rangle = \langle Y\psi\,|\,\varepsilon(X)\psi\rangle$, $\forall Y = Y_0 + \tilde{Y}_i^0\lambda^i$, где $Y_0 \in \mathcal{J}$ и $\lambda^i \in \mathbf{C}$. Это дает начальное уравнение (4.7). Теорема 4 доказана.

Следствие 4. Если $\{Y_i^0\}$ — семейство попарно-ортогональных проекторов в $\mathcal{H}^0$, тогда как $\{\mathbf{C}(i)\}$ — ортогональные $\bigstar$-проективные матрицы $\mathbf{C}_i^* = \mathbf{C}(i) = \mathbf{C}_i^2$, то условия теоремы 4 выполнены, и они выполнены также в случае $C_0^0 = 0$ для всех i. В частности, для случая $C_0^0 = \hat{1}$, $C_+^- = 0 = C_+^0$, $C_+^- = 0$, соответствующего выходному считающему процессу $\hat{Y} = N_0^0$, уравнение (4.5) дает

$$\hat{K}_0^0(t) = \hat{I}/\varepsilon_t(S_+^{0*}S_+^0)(t),\ \hat{K}_+^- = 0 = \hat{K}_+^0,\ \hat{K}_+^- = 0, \tag{4.12}$$

где предполагается, что $\varepsilon_t(S_+^{0*}S_+^0)(t) \neq 0$. В другом случае $C_0^- = \hat{I} = C_+^0$, $C_0^0 = 0$, $C_+^- = 0$, соответствующему выходному координатному процессу $\hat{Y} = N_-^0 + N_0^+ = \hat{Q}$, можно получить $\sigma(t) = \hat{I}$, и

$$\hat{K}_0^- = \hat{I} = \hat{K}_+^0,\ \hat{K}_0^0 = 0,\ \hat{K}_+^- = 0. \tag{4.13}$$

В самом деле, линейная оболочка коммутативного семейства ортопроекторов $\{Y_i^0\}$, так же как и $\mathcal{A}_i'$-оболочка $\bigstar$-проекторов $\{\mathbf{C}_i\}$, является $*$- и $\bigstar$-алгеброй $\mathscr{C}$ и $\mathfrak{C}_t$ соответственно. В случае $C_0^0(i) = 0$ для всех i произведение $C_i^*C_j$ лежит в $\mathfrak{T}_t$ как матрица с $(C_i^*C_j)_0^0 = 0$, $(C_i^*C_j)_+^0 = 0$, $(C_i^*C_j)_-^0 = 0$; такие коммутативные матрицы также формируют коммутативную $\bigstar$-алгебру $\mathfrak{C}_t$ с точностью до идеала $\mathfrak{T}_t$, ибо $\mathbf{C} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{C}^*\mathbf{C} = 0$ для любой матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{C}_i^*\mathbf{C}_j$, у которой $C_\nu^\mu = 0$ при $(\mu, \nu) \neq (-, +)$.

§ 5. Стохастические уравнения квантовой условно-марковской фильтрации

Пусть наблюдаемые выходные процессы (3.1) самосопряженного семейства $\{\hat{Y}_i^* = \hat{Y}(i) = \hat{Y}^i,\ i=1,\ldots,m\}$, $\hat{Y}(i)^* = \hat{Y}(i^*)$, являются неразрушающими относительно любого КС процесса (4.1), определяемого диагональными $\hat{G}^\mu_\nu = \hat{Z}\delta^\mu_\nu$ с произвольными начальными $Z(0) = X \otimes \hat{1}$, $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$. В соответствии со следствием теоремы 2 это означает, что

$$\hat{Y}(t, i) = U(t)^* (I \otimes \hat{y}(t, i)) U(t),$$
$$\hat{Z}(t) = U(t)^* (X \otimes \hat{1}) U(t), \tag{5.1}$$

где $\hat{y}(t, i) = y^0(i)\hat{1} + \int_0^t \hat{\lambda}(\hat{\mathbf{c}}(r, i), dr)$, $y^0(i) \in \mathbf{C}$. Более того, коэффициенты $c^\mu_\nu(t, i)$, $\mu \in \{-, J\}$, $\nu \in \{J, +\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$, присоединены к коммутантам $\mathfrak{a}_t'$ редуцированных алгебр $\mathfrak{a}_t = \{\hat{y}^t\}'$ относительно самосопряженного семейства $\hat{y}^t = \{\hat{y}(r) \mid r \in [0, t]\}$ коммутирующих согласованных КС процессов $\hat{y}_i^* = \hat{y}(i) = \hat{y}^i$, $i = 1, \ldots, m$, $\mathbf{c}(t, i)^* = \mathbf{c}(t, i^*)$ в пространстве фока $\mathscr{F}$.

Предположим в соответствии с условием теоремы 4, что матрицы $\hat{\mathbf{c}}(t, i)$, $i = 1, \ldots, m$ образуют коммутативную $\star$-алгебру над $\mathfrak{a}_t'$ с точностью до $\star$-идеала $\mathfrak{i}_t = \{\mathbf{c} \in \mathfrak{a}_t' \mid c^-_- = 0 = c^+_+,\ (\mathbf{c} \mid \mathbf{c}) = 0\}$, где $\mathfrak{a}_t = \{\hat{g}^\mu_\nu \in \mathfrak{a}_t \mid [\hat{\mathbf{c}}(t, i), \hat{g}] = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ относительно частичного порядка $\mu > \nu \mid \hat{g}^\mu_\nu = 0$ (индексы $\mu = j = \nu \in J$ не сравнимы), и

$$(\hat{\mathbf{c}} \mid \hat{\mathbf{c}})_t = \| ((\hat{\mathbf{c}} \otimes I) S_+ + \hat{\mathbf{c}}^+ \otimes I) \varphi_t \|^2, \quad \varphi_t = U(t)(\psi \otimes \delta_\varnothing). \tag{5.2}$$

При этом основное уравнение фильтрации (4.2) для

$$\varepsilon_t(U(t)^* Z U(t)) = U(t)^* (\hat{\varepsilon}_t(Z) \otimes I) U(t) \tag{5.3}$$

в картине Шредингера можно записать в терминах условного состояния $\langle Z \rangle (t)$, $Z = X \otimes \hat{1}$, определяющего в соответствии с замечанием 3 почти всюду $\hat{\varepsilon}_t(Z) \simeq \langle Z \rangle (t)$:

$$d \langle Z \rangle = \langle S^{\star}{}^-_\nu Z S^\nu_+ \rangle dt + \sum_{i=1}^m \langle S^{\star}{}^-_\mu \tilde{Z} S^\nu_+ \rangle \hat{k}^\mu_\nu(i)\, d\tilde{y}_i \tag{5.4}$$

Здесь $\tilde{Z}(t) = Z - I \otimes \langle Z \rangle (t)$, $d\tilde{y}_i(t) = \hat{\lambda}(\tilde{\mathbf{c}}_i(t), dt) = \tilde{c}^\mu_\nu(t, i^*) \times d\hat{\lambda}^\nu_\mu(t)$ $\tilde{c}^\mu_\nu = \hat{c}^\mu_\nu$ при $(\mu, \nu) \neq (-, +)$, и $\tilde{c}^-_+(t, i) = \hat{c}^-_+(t, i) - \langle S^{\star}{}^-_\mu S^\nu_+ \rangle (t) \hat{c}^\mu_\nu(t, i)$, а $\hat{k}^\mu_\nu(t, i)$ определяются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^m \langle S^{\star}{}^-_\mu S^\nu_+ \rangle (t) \hat{c}^\mu(t, i) \check{c}_\nu(t, j) \hat{\mathbf{k}}(t, j) = \hat{\mathbf{c}}(t, i),\ i = 1, \ldots, m, \tag{5.5}$$

соответствующей системе (4.3) в картине Шредингера.

Рассмотрим условно-марковский случай КС-эволюции (2.1) открытой квантовой системы над алгеброй операторов $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$, соответствующий предположению, что

$$\hat{S}^{\mu}_{\nu}(t)=U(t)^* S^{\mu}_{\nu}(t) U(t), \quad S^{\mu}_{\nu}(t)\in\mathscr{B}\otimes\mathfrak{a}_t', \tag{5.6}$$

или $S^{\mu}_{\nu}(t)$, $\mu\in\{-, J\}$, $\nu\in\{J, +\}$ хотя бы присоединены почти всюду к $\mathscr{B}\otimes\mathfrak{a}_t'$. Последнее означает, что операторы $S^{\mu}_{\nu}(t)$ описываются в представлении $\mathscr{L}^{\infty}_{\mu}(\Omega^t)$ (см. замечание 3) абелевой фактор-алгебры $\mathfrak{a}_t'\hat{p}_t$ по нулевому идеалу $i_t=\{y\in\mathfrak{a}_t' \| (I\otimes\hat{y})\varphi_t\|=0\}$ слабо измеримыми почти всюду ограниченными операторными функциями $S^{\mu}_{\nu}(t)(\omega)=S^{\mu}_{\nu}(\omega^t): \mathscr{H}^0\to\mathscr{H}^0$ на спектре $\Omega^t\ni\omega^t$, отождествляемом с пространством траекторией ω^t наблюдаемого процесса $\hat{y}^t$ на отрезке $[0, t]$ с мерой $\mu(d\omega^t)=\langle \varphi_t | I\otimes\hat{1}(d\omega^t)\varphi_t\rangle$, индуцируемой вектором $\varphi_t=U(t)\varphi$, $\varphi=\psi\otimes\delta_{\varnothing}$. В этом случае оказывается полезным понятие апостериорного квантового состояния [3], для которого (5.4) дает при всех $Z=X\otimes\hat{1}$, $X\in\mathscr{B}$ рекурсивное стохастическое уравнение, обобщающее уравнение нелинейной нестационарной фильтрации Стратоновича в форме Ито классических условно-марковских процессов [9].

Определение 5. Апостериорным квантовым состоянием на алгебре $\mathscr{B}$ называется ограничение $\mathscr{B}\otimes\mathfrak{a}_t'$ условного состояния $Z\mapsto\langle Z\rangle(t, \omega)=\langle Z\rangle\langle\omega^t\rangle$, отображающего алгебру фон Неймана $\mathscr{B}\otimes\mathfrak{a}_t'$, $\mathfrak{a}_t=\{\hat{y}^t\}'$ в соответствии с формулой $\langle\varphi_t | I\otimes\hat{\varepsilon}_t(z)\varphi_t\rangle = =\int\langle Z\rangle(\omega^t)\mu(d\omega^t)$, $Z\in\mathscr{B}\otimes\mathfrak{a}_t$ на абелеву фактор-алгебру $\mathfrak{a}_t'\hat{p}_t\simeq \simeq\mathscr{L}^{\infty}_{\mu}(\Omega^t)$, порождаемую наблюдаемым семейством $\hat{y}^t$. Апостериорным оператором плотности $\tilde{\rho}(t)\in\mathscr{B}_*\otimes\mathfrak{a}_t'$ называется измеримое отображение $\tilde{\rho}(t):\Omega^t\to\mathscr{B}_*$, определяющее почти всюду положительный оператор $\tilde{\rho}(t, \omega)=\tilde{\rho}(\omega^t)$ в $\mathscr{H}^0$ с единичным следом $\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}^0}\tilde{\rho}(\omega^t)=1$, соответствующий апостериорному состоянию $\langle Z\rangle(\omega^t)=\langle\tilde{\rho}(\omega^t), Z\rangle$:

$$\langle Z\rangle(t)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}^0}\{\tilde{\rho}(t)Z\}\equiv\langle\tilde{\rho}(t), Z\rangle. \tag{5.7}$$

Апостериорное состояние называется векторным (чистым на $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$), если

$$\tilde{\rho}(t)=\tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(t)^*, \text{ т. е. } \langle Z\rangle(t)=\tilde{\varphi}(t)^* Z\tilde{\varphi}(t), \tag{5.8}$$

где оператор $\tilde{\varphi}(t):\mathscr{F}\to\mathscr{H}^0\otimes\mathscr{F}$, $\tilde{\varphi}(t)\hat{z}=I\otimes\hat{z}\tilde{\varphi}(t)$, $\forall z\in\mathfrak{a}_t$, разлагается почти всюду на нормированные векторы $\tilde{\varphi}(t, \omega)=\tilde{\varphi}(\omega^t)\in\mathscr{H}^0$ в представлении $\mathfrak{a}_t'\simeq\mathscr{L}^{\infty}_{\mu}(\Omega^t)$.

Следующая теорема показывает, что в квантовом случае наряду с нелинейным стохастическим уравнением для $\tilde{\rho}(t)$, заменяющим уравнение фон Неймана при условии непрерывного неразрушающего наблюдения, можно вывести также и рекурсивное волновое апостериорное уравнение, добавляющее в уравнение Шредингера диссипативные и стохастические члены, ответственные за непрерывную редукцию (коллапс) апостериорного волнового пакета $\hat{\varphi}(t)$.

Для этого будем считать, что процесс $\hat{y}$ является парой $(\hat{n}, \hat{q})$ коммутирующих процессов $\hat{n}(x)=\hat{\lambda}(\hat{e}(i), t)$, $\hat{q}(x)=\hat{\lambda}(\hat{f}(i), t)$, где $x=(t, i)$, $i=1, \ldots, m$, описываемых КС уравнениями в пространстве $\mathscr{F}$

$$d\hat{n}(t, i)=\hat{e}^{\mu}_{\nu}(t, i)\, d\hat{\lambda}^{\nu}_{\mu}(t), \quad d\hat{q}(t, i)=\hat{f}^{\mu}_{\nu}(t, i)\, d\hat{\lambda}^{\nu}_{\mu}(t), \tag{5.9}$$

$\hat{e}(i)=(\hat{e}^{\mu}_{\nu})(i)$, $\hat{f}(i)=(\hat{f}^{\mu}_{\nu})(i)$, $i=1, \ldots, m$ — ортогональные матрицы $\hat{e}(i)\hat{e}(j)=0$, $\hat{f}(i)\hat{f}(j)=0$, $i\neq j$, и $\hat{e}(i)\hat{f}(j)=0$ при всех $i, j=1, \ldots, m$ вида

$$\hat{e}(i)=\begin{pmatrix} 0 & \hat{f}^{*}_{i} & \hat{e}^{-}_{+}(i) \\ 0 & \hat{e}(i) & \hat{f}_{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{f}(i)=\begin{pmatrix} 0 & \hat{e}^{*}_{i} & \hat{f}^{-}_{+}(i) \\ 0 & 0 & \hat{e}_{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Здесь $\hat{e}(i)^{*}=\hat{e}(i)=\hat{e}(i)^{2}$ — ортогональные проекторы в $\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}$, $\hat{e}(i)\hat{f}_{i}=\hat{f}_{i}$, $\hat{e}^{-}_{+}(i)=\hat{f}^{*}_{i}\hat{f}_{i}$, благодаря чему $\hat{e}(i)$ — $\star$-самосопряженные идемпотенты, $\hat{e}_{i}$, $i=1, \ldots, m$ — ортогональные изометрии $\mathscr{F}\to\mathscr{F}\otimes\mathscr{K}$, $\hat{e}^{*}_{i}\hat{e}_{i}=\hat{1}$ либо нулевые $\hat{e}^{*}_{i}\hat{e}_{i}=0$; $\hat{e}(0)\hat{e}_{i}=\hat{e}_{i}$, $\forall i$, где $\hat{e}(0)=\hat{1}\otimes 1-\sum_{i=1}^{m}\hat{e}(i)$, и $\hat{f}^{-}_{+}(i)^{*}=\hat{f}^{-}_{+}(i)$, благодаря чему $\hat{f}(i)^{*}=\hat{f}(i)$.

Это не является ограничением общности, поскольку существует $\mathfrak{a}'_{t}$ — линейное преобразование стохастических дифференциалов $d\hat{y}(t)$ самосопряженного семейства $\hat{y}(t)=\{y(t, i)\}$ к каноническому виду (5.9), разделяющему скачкообразные $\hat{n}(t)$ и непрерывные $\hat{q}(t)$ составляющие процессов $\hat{y}(t)$. Более того, в соответствии с предположением $\hat{c}^{\mu}_{\nu}(t)\in\mathfrak{a}'_{t}$ (или $\hat{c}^{\mu}_{\nu}(t)$ присоединены к $\mathfrak{a}'_{t}$), благодаря которому коммутирующие операторы $\hat{c}^{\mu}_{\nu}(t)$ отождествляются с измеримыми функциями $c^{\mu}_{\nu}(\omega^{t})$ на Ω^{t}, матричные элементы в (5.10) определяются ортогональными разложениями $1=\sum_{i=1}^{m}e(\omega^{t}, i)$, $e(\omega^{t}, i)=\hat{e}(t, i)(\omega)$, единичного оператора в $\mathscr{K}$ и ортогональными семействами векторов $\{e_{i}(\omega^{t}), f_{i}(\omega^{t}), i=1, \ldots, m\}$, где $e_{i}(\omega^{t})=\hat{e}_{i}(t)(\omega)$ — либо нормированы на единицу, либо нулевые векторы, а $|f_{i}(\omega^{t})|^{2}=e^{-}_{+}(\omega^{t}, i)$, причем условию локальной КС-интегрируемости $e(t)$ и $f(t)$ отвечает локальная $\mathscr{L}^{1}$-интегрируемость $\hat{f}^{-}_{+}(t)(\omega)=f^{-}_{+}(\omega^{t})$ и локальная $\mathscr{L}^{2}$-интегрируемость $\hat{f}(t)(\omega)=f(\omega^{t})$ по t (для почти всех $\omega\in\Omega^{t}$).

Введем следующие операторы, используемые в теореме 5:

$$K = iH + R^*R/2,\quad H = \operatorname{Im}(\hat f^* S_+ - S_+^-),\quad R = S_+ + I\otimes\hat f,$$

$$\hat f = \sum_{i=0}^{m} \hat f_i,\quad R(i) = \hat e(i) R,\quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{5.11}$$

$$L(i) = \hat e_i^* R,\quad i = 1, \ldots, m,$$

где $f_0 = \sum_{i=1}^{m} \hat e_i \hat f_+^-(i)/2$, $\hat e(0) = 1 - \hat e$, $\hat e = \sum_{i=1}^{m} \hat e(i)$. Выберем в пространстве $\mathcal{K}$ ортонормированные базисы $\{e_j(\omega^t)\} \subset \mathcal{K}$, $j \in J$, совместимые при каждом $\omega \in \Omega^t$ с разложением единицы $1 = \sum_{i=0}^{m} e(\omega^t, i)$ в смысле $e(\omega^t, i) e_j(\omega^t) = e_j(\omega^t)$, если $j \in J_i(\omega^t)$ и равняется нулю, если $j \notin J_i(\omega^t)$ для некоторого разбиения $J = \sum_{i=0}^{m} J_i(\omega^t)$, причем в случае, когда $\dim e(\omega^t, i) \leqslant 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, выберем нумерацию $j \in J$ этого базиса таким образом, что $J_i(\omega^t) = \{i\}$. Напомним, что R^j, $R_j^* : \mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^0$ означают компоненты сопряженных операторов $R : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, $R^* : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ в ортонормированном базисе $\mathcal{K}$ и $R^j R_j^* = \sum_{j \in J} R^j R_j^*$ есть тензорное обозначение свертки.

Теорема 5. Оператор плотности $\hat\rho(t)$ апостериорного состояния квантовой условно-марковской системы над $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H}^0)$ удовлетворяет относительно неразрушающего наблюдения процессов (5.9) почти всюду диссипативному стохастическому рекурсивному уравнению

$$\tilde\rho(t) + \int_0^t (K\tilde\rho + \tilde\rho K^* - R^j \tilde\rho R_j^*)(r)\, dr = \rho \otimes \hat 1 +$$

$$+ \int_0^t \sum_{i=1}^{m} ((\tilde F^j(i) \tilde\rho \tilde F_j^*(i) - \tilde\rho)(r)\, \tilde m(dr, i) +$$

$$+ (\tilde L(i) \tilde\rho + \tilde\rho \tilde L^*(i))(r)\, \tilde w(dr, i)), \tag{5.12}$$

где

$$\tilde F(i) = R(i)/\tilde r(i),\quad \tilde L(i) = L(i) - \tilde l(i),$$

$$|\tilde r(x)|^2 = \langle \tilde\rho(t), R(x)^* R(x) \rangle,\quad 2\operatorname{Re}\tilde l(x) = \langle \tilde\rho(t), L^*(x) + L(x) \rangle,$$

$$\tilde m(dt) = d\hat n(t) - |\tilde r(t)|^2 dt,\quad \tilde w(dt) = d\hat q(t) - 2\operatorname{Re}\tilde l(t)\, dt. \tag{5.13}$$

Интегро-дифференциальное нелинейное уравнение (5.12) сводится перенормировкой $\hat\rho(t) = p(t)\tilde\rho(t)$ к линейному операторному урав нению Ито такого же самого вида, что и (5.12) для $\hat{\rho}$, где вместо $\widetilde{F}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{m}$, $\widetilde{w}$ следует подставить $\hat{F}$, $\hat{L}$, $\hat{m}$, $\hat{w}$, определяемые по формулам (5.13) произвольными $\hat{r}(x)$, $\hat{l}(x) \in \mathfrak{a}'_t$ ($\hat{r}(k) \neq 0$ почти всюду) вместо определенных с точностью до фазы $\operatorname{Arg} \hat{r}(x)$ и мнимой части $\operatorname{Im} \hat{l}(x)$ функций $\widetilde{r}(x)$, $\widetilde{l}(x)$ от $\widetilde{\rho}$. Если $\dim e(\omega^t, i) \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, m$, и $\dim e(\omega^t, 0) = \dim \{e_t(\omega^t)\}$ почти всюду на Ω^t, то уравнение (5.12) допускает векторное решение $\widetilde{\rho}(t) = \widetilde{\varphi}(t)\widetilde{\varphi}(t)^*$, соответствующее чистому начальному состоянию $\rho = \psi\psi^*$, где $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяет диссипативному стохастическому рекурсивному уравнению

$$\widetilde{\varphi}(t) + \int_0^t \widetilde{K}(r)\widetilde{\varphi}(r)\,dr = \psi \otimes \hat{1} +$$

$$+ \int_0^t \sum_{i=1}^m (\widetilde{S}(x)\widetilde{m}(dx) + \widetilde{L}(x)\widetilde{w}(dx))\widetilde{\varphi}(r), \tag{5.14}$$

$$\widetilde{K} = i\widetilde{H} + \sum_{i=1}^m (\widetilde{R}^*\widetilde{R} + \widetilde{L}^*\widetilde{L})(i)/2,$$

$$\widetilde{H} = H - \sum_{i=1}^m \operatorname{Im}(\widetilde{r}^* R + \widetilde{l}^* L)(i), \tag{5.15}$$

$$\widetilde{R}(i) = R^i - I \otimes \widetilde{r}(i), \quad \widetilde{S}(i) = \widetilde{R}(i)/(I \otimes \widetilde{r}(i)).$$

Интегро-дифференциальное нелинейное уравнение (5.15) сводится перенормировкой $\hat{\varphi}(t) = c(t)\widetilde{\varphi}(t)$, $c(t) \in \mathfrak{A}'_t$ к линейному волновому уравнению Ито такого же вида для $\hat{\varphi}$, где вместо $\widetilde{m}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{L}$, следует подставить, как и ранее $\hat{m}$, $\hat{w}$, $\hat{L}$, а вместо $\widetilde{K}$, $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$ подставить операторы $\hat{K}$, $\hat{R}$, $\hat{S}$, определяемые по таким же формулам (5.15) произвольными не зависящими от $\hat{\varphi}$ стохастическими функциями $\hat{r}(x) \neq 0$, $\hat{l}(x)$. Вместо $\widetilde{r}(x)$, $\widetilde{l}(x)$,

$$|\widetilde{r}(x)|^2 = \widetilde{\varphi}(t)^* R(x)^* R(x)\widetilde{\varphi}(t),$$

$$\widetilde{l}(x) + \widetilde{l}(x)^* = \widetilde{\varphi}(t)^*(L(x) + L^*(x))\widetilde{\varphi}(t). \tag{5.16}$$

Доказательство. Подставляя в (5.5) вместо $\hat{c}(i)$ матрицы $\hat{e}(i)$, $\hat{f}(i)$ вида (5.10), получим с учетом условий их ортогональности, идемпотентности $\hat{e}$ и нормированности $\hat{f}$:

$$\langle S^{*-}_{\mu} S^{\nu}_{+} \rangle \hat{e}^{\mu}(i)\hat{e}_{\nu}(i)\hat{k}(i) = \langle R^*(i)R(i) \rangle \hat{k}(i) = \hat{e}(i),$$

$$\langle S^{*-}_{\mu} S^{\nu}_{+} \rangle \hat{f}^{\mu}(i) f_{\nu}(i)\hat{k}(i) = \hat{k}(i) = \hat{f}(i),$$

где $R(i) = e_{\nu}(i) S^{\nu}_{+} = \hat{e}(i) S_{+} + I \otimes \hat{f}_i = \hat{e}(i)(S_{+} + I \otimes \hat{f}) = \hat{e}(i) R$, R и $\hat{f}$ определены в (5.11). Обозначая $\langle R^*(i) R(i) \rangle = |\widetilde{r}(i)|^2$, и учитывая, что почти всюду $|\tilde{r}(i)|\neq 0$ как квадрат некоторого $\tilde{r}(i)\in\mathfrak{a}'_i$, получим решения системы (5.5)

$$\hat{\mathbf{k}}(i)=\mathbf{e}(i)/\tilde{r}(i),\quad \hat{\mathbf{k}}(i)=\mathbf{f}(i),$$

приводящее уравнение фильтрации (5.4) к виду

$$d\langle Z\rangle(t)+\langle K^*Z+ZK-R^*ZR\rangle(t)\,dt=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\langle R^*(i)\tilde{Z}R(i)\rangle(t)\,\tilde{m}(dt,i)/\tilde{r}(i)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\langle L^*(i)\tilde{Z}+\tilde{Z}L(i)\rangle(t)\,\tilde{w}(dt,i),\tag{5.17}$$

где $K=iH+R^*R/2$ определяется в (5.11) по $R=S_+ + I\otimes\hat{f}$ из условия

$$S^{*}{}^{-}_{\nu}ZS^{\nu}_{+}=S^{-*}_{+}Z+ZS^{-}_{+}+S^{*}_{+}ZS_{+}=R^*ZR-K^*Z-ZK,$$

а

$$L(i)=\hat{f}^{-}(i)S_{+}+I\otimes\hat{f}^{-}_{+}(i)/2=\hat{e}^{*}_{i}(S_{+}+I\otimes\hat{f})=e^{*}_{i}R.$$

В (5.17) $\tilde{m}$, $\tilde{w}$ — мартингалы $\tilde{y}$ относительно порождаемой процессами $\hat{n}$ и $\hat{q}$ фильтрации $(\mathscr{E}_t,\varphi)$ с векторами состояния $\varphi_t=$ $=U(t)\psi\otimes\delta_{\varnothing}$ в картине Шредингера:

$$\tilde{m}(dt,i)=d\tilde{n}(t,i)=\hat{\lambda}(\tilde{\mathbf{e}}(t,i),dt)=d\hat{n}(t,i)-\langle R^*\hat{e}(i)R\rangle(t)\,dt,$$
$$\tilde{w}(dt,i)=d\tilde{q}(t,i)=\hat{\lambda}(\mathbf{f}(t,i),dt)=$$
$$=d\hat{q}(t,i)-\langle L^*(i)+L(i)\rangle(t)\,dt,$$

где учтено, что в соответствии с (5.10)

$$S^{*}{}^{-}_{\mu}S^{\nu}_{+}\hat{e}^{\mu}_{\nu}=S^{*}_{+}\hat{e}S_{+}+S^{*}_{+}\hat{e}_{+}+\hat{e}^{-}S_{+}+\hat{e}^{-}_{+}=R\hat{e}R$$
$$S^{*}{}^{-}_{\mu}S^{\nu}_{+}\hat{f}^{\mu}_{\nu}=S^{*}_{+}\hat{f}_{+}+\hat{f}^{-}S_{+}+\hat{f}^{-}_{+}=L+L^{*}$$

при

$$\hat{e}\hat{e}_{+}=\hat{e}_{+}=\hat{f},\quad \hat{e}^{-}\hat{e}=\hat{e}^{-}=\hat{f}^{*},\quad \hat{e}^{-}\hat{e}_{+}=\hat{e}^{-}_{+}=\hat{f}^{*}\hat{f},\quad R=S_{+}+I\otimes\hat{f},$$
$$\hat{f}_{+}=\hat{e},\quad \hat{f}^{-}=\hat{e}^{*},\quad \hat{f}^{-}_{+}=\hat{f}^{-*}_{+},\quad L=e^{*}S_{+}+I\otimes\hat{f}^{-}_{+}/2.$$

Уравнение для апостериорной матрицы плотности $\tilde{\rho}$ находится с помощью двойственности (5.7) и линейности уравнения (5.17) по $Z\in\mathscr{B}\otimes\mathfrak{a}_t{}'$:

$$\langle\tilde{\rho},K^*Z+ZK-R^*ZR\rangle=\langle\tilde{\rho}K^*+K\tilde{\rho}-R^{j}\tilde{\rho}R^{*}_{j}\rangle,$$
$$\langle\tilde{\rho},R^*\tilde{Z}R\rangle=\langle R^*ZR\rangle-\langle R^*R\rangle\langle Z\rangle=$$
$$=\langle R^{j}\tilde{\rho}R^{*}_{j}-\tilde{\rho}|\tilde{r}|^2,Z\rangle,$$

$$\langle \tilde{\rho}, L^*\tilde{Z}+\tilde{Z}L \rangle = \langle L^*Z+ZL \rangle - \langle L^*+L \rangle \langle Z \rangle =$$
$$= \langle \tilde{\rho}L^*+L\tilde{\rho}-2\,\mathrm{Re}\,\tilde{l}, Z \rangle,$$

где $|\tilde{r}|^2 = \langle \tilde{\rho}, R^*R \rangle$, $2\,\mathrm{Re}\,\tilde{l} = \langle \tilde{\rho}, L+L^* \rangle$ в соответствии с $\langle Z \rangle = \langle \tilde{\rho}, Z \rangle$, $\tilde{Z} = Z - I \otimes \langle \tilde{\rho}, Z \rangle$. Это дает искомое уравнение для $\tilde{\rho}$ в интегральном виде (5.12) в обозначениях (5.11) и (5.13).

Найдем соответствующее линейное уравнение для ненормированной апостериорной матрицы плотности $\hat{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t)$, предполагая, что $p(t) \in \mathfrak{a}_t'$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dp = \sum_{i=1}^{m} (s(i)-1)\,\hat{m}(dt, i) + \sum_{i=1}^{m} b(i)\,\hat{w}(dt, i), \tag{5.18}$$

где $s(x) \in \mathfrak{a}_t'$, $b(x) \in \mathfrak{a}_t'$, $\hat{r}(x) \in \mathfrak{a}_t'$, $\hat{l}(x) \in \mathfrak{a}_t'$, $x = (t, i)$,

$$\hat{m}(dt) = d\hat{n}(t) - |\hat{r}(t)|^2\,dt, \quad \hat{w}(dt) = d\hat{q}(t) - 2\,\mathrm{Re}\,\hat{l}(t). \tag{5.19}$$

Используя формулу Ито $d\hat{\rho} = p\,d\tilde{\rho} + \tilde{\rho}\,dp + dp\,d\tilde{\rho}$, ортогональность стохастических дифференциалов, правило умножения

$$\hat{m}(dt)\,\tilde{m}(dt) = d\hat{n}(t), \quad \hat{w}(dt)\,\tilde{w}(dt) = dt\,\hat{1},$$

и коммутативность $p(t) \equiv I \otimes p(t)$ с $\tilde{\rho}(t) \in \mathscr{B}_* \otimes \mathfrak{a}_t'$, получим, опуская суммирование по i

$$d\hat{\rho} = (s\tilde{F}^j\hat{\rho}\tilde{F}_j^* - \hat{\rho})\,\hat{m}(dt) + (\tilde{L}\hat{\rho} + \hat{\rho}\tilde{L}^* + b\hat{\rho})\,\hat{w}(dt) +$$
$$+ (R^j\hat{\rho}R_j^* + (\tilde{F}^j\hat{\rho}F_j^* - \hat{\rho})(s|\hat{r}|^2 - |\tilde{r}|^2) +$$
$$+ (\tilde{L}\hat{\rho} + \hat{\rho}\tilde{L}^*)(b - 2\,\mathrm{Re}(\tilde{l} - \hat{l}) - K\hat{\rho} - \hat{\rho}K^*)\,dt.$$

Полагая $s(x) = |\tilde{r}(x)/\hat{r}(x)|^2$, $b(x) = 2\,\mathrm{Re}(\tilde{l}(x) - \hat{l}(x))$, получаем линейное стохастическое уравнение:

$$d\hat{\rho} + (K\hat{\rho} + \hat{\rho}K^* - R^j\hat{\rho}R_j^*)\,dt = \sum_{i=1}^{m} ((\hat{F}^j(i)\,\hat{\rho}\hat{F}_j^*(i) - \hat{\rho})\,\hat{m}(dt, i) +$$
$$+ (\hat{L}(i)\,\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{L}^*(i))\,\hat{w}(dt, i)), \tag{5.20}$$

где $\hat{F}(i) = R(i)/\hat{r}(i)$, $\hat{L}(i) = L(i) - I \otimes \hat{l}(i)$, имеющее с начальным $\hat{\rho}(0) = \rho \otimes \hat{1}$ интегральный вид (5.12) с соответствующей заменой $\sim \to \wedge$, определяемой не зависящими от $\hat{\rho}$, в общем случае стохастическими, коэффициентами $\hat{r}(i)$ и $\hat{l}(i)$.

Предположим теперь, что размерность ортопроекторов $e(\omega^t, i)$, определяющих $\hat{e}(t, i)(\omega) = \hat{p}(\omega^t) \otimes e(\omega^t, i)$ не превышает единицы при $i \neq 0$, а при $i = 0$ равна почти всюду размерности ортонормированного семейства $\{e_l(\omega^t)\}$, определяющего $\hat{e}_l(t)(\omega) =$

$=\hat{p}(\omega^t)\otimes e_i(\omega^t)$. В этом случае в ортонормированном базисе $\{e_j(\omega^t)\}$ пространства $e(\omega^t)\mathcal{H}$, $e=\sum_{i=1}^{m} e(i)$, определяемом условием $e(\omega^t, i)e_j(\omega^t)=\delta^i_j e_j(\omega^t)$ для всех $j\in J_+(\omega^t)=\{i\,|\,e(\omega^t, i)\neq 0\}$ имеем: $R^j(i)=e(i)R^j=\delta^j_i R^j$. Это позволяет не вести суммирование первого слагаемого в правой части уравнения (5.19) по j, полагая $j=i$ в соответствии с $\hat{F}^j_i=\delta^j_i F^j$, $F^j=R^j/\hat{r}(j)$.

Будем искать решение этого уравнения в виде $\hat{\rho}=\hat{\varphi}\hat{\varphi}^*$, где $\hat{\varphi}$ удовлетворяет некоторому стохастическому уравнению

$$d\hat{\varphi}+\hat{K}\hat{\varphi}dt=\sum_{i=1}^{m}(\hat{S}(i)\hat{m}(dt, i)+\hat{L}(i)\hat{w}(dt, i))\hat{\varphi} \qquad (5.21)$$

с начальным $\varphi(0)=\psi\otimes\hat{1}$, соответствующим $\rho=\psi\psi^*$. Используя формулу Ито $d(\hat{\varphi}\hat{\varphi}^*)=d\hat{\varphi}\hat{\varphi}^*+\hat{\varphi}d\hat{\varphi}^*+d\hat{\varphi}d\hat{\varphi}^*$, а также ортогональность стохастических дифференциалов (5.19), имеющих квадраты

$$\hat{m}(dt)\,\hat{m}(dt)=\hat{m}(dt)+|\hat{r}(t)|^2dt, \quad \hat{w}(dt)\,\hat{w}(dt)=dt\,\hat{1},$$

получим, обозначив $\hat{R}=\hat{r}\hat{S}$ и опуская индексы суммирования

$$d\hat{\rho}+(\hat{K}\hat{\rho}+\hat{\rho}\hat{K}^*-\hat{R}\hat{\rho}\hat{R}^*-\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^*)\,dt=$$
$$=(\hat{S}\hat{\rho}\hat{S}^*+\hat{S}\hat{\rho}+\hat{\rho}\hat{S}^*)\,\hat{m}(dt)+(\hat{L}\hat{\rho}+\hat{\rho}\hat{L}^*)\,\hat{w}(dt).$$

Это уравнение для $\hat{\rho}=\hat{\varphi}\hat{\varphi}^*$ можно привести к виду (5.19), если положить

$$\hat{S}=\hat{F}-I, \quad \hat{K}=K-\hat{r}^*R-\hat{l}^*L+(|r|^2+|l|^2)\otimes I/2,$$

и учесть, что в соответствии с условием полноты ортонормированной системы $\{e_i(\omega^t)\}$ в $e(0,\omega^t)\mathcal{H}$, выбираемой в качестве базиса $\{e_j(\omega^t)\,\|\,j\notin J_+(\omega^t)\}$ этого подпространства, $L(i)=R^i(0)$, в результате чего

$$\sum_{i\in J_+}R^i\hat{\rho}R^*_i+\sum_{i=1}^{m}L(i)\,\hat{\rho}L(i)=\sum_{i\in J_+}R^i\hat{\rho}R^*_i+\sum_{i\notin J_+}R^i\hat{\rho}R^*_i=\sum_{i\in J}R^i\rho R^*_i.$$

Наконец, получим из линейного уравнения (5.21), не сохраняющего, вообщего говоря, нормировку $\tilde{\varphi}$, нелинейное стохастическое волновое уравнение для нормированного $\hat{\varphi}(t)=\hat{\varphi}(t)/c(t)$, где $c(t)\in\mathfrak{a}_t'$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dc+kc\,dt=\sum_{i=1}^{m}((r(i)-1)\,\hat{m}(dt, i)+l(i)\,\hat{w}(dt, i))\,c, \qquad (5.22)$$

коэффициенты которого находятся из условия $|c(t)|^2=|\hat{\varphi}(t)|^2\equiv\hat{\varphi}(t)^*\hat{\varphi}(t)$. Используя формулу Ито, получим для $|c|^2=p$

уравнение

$$dp = (|r|^2 - 1)\, p\hat{m}(dt) + 2\operatorname{Re} l p \hat{w}(dt) + (|r|^2 + |l|^2 - k)\, dt,$$

сравнение которого с (5.18) дает

$$|r(x)|^2 = s(x), \quad 2\operatorname{Re} l(x) = b(x), \quad k(x) = |r(x)|^2 + |l(x)|^2.$$

Отсюда, с учетом найденного вида функций s и b, отвечающих за нормировку $\tilde{\rho} = \hat{\rho}/p$, получим $r(x) = \tilde{r}(x)/\hat{r}(x)$, $l(x) = \tilde{l}(x) - \hat{l}(x)$ с точностью до несущественных $\operatorname{Arg} r$ и $\operatorname{Im} l$, которые можно положить нулю в силу произвола $\hat{r} \neq 0$ и $\hat{l}$. Это дает искомое уравнение для $\tilde{\varphi}$ в виде (5.21) с соответствующей заменой $\wedge \mapsto \sim$, где коэффициенты $\tilde{K}$, $\tilde{S}$, $\tilde{L}$ определяются по функциям $\tilde{r}$, $\tilde{l}$ определенным в (5.16) с точностью до фазового произвола $\tilde{\varphi}$. Теорема 5 доказана.

Замечание 5. Пусть $\hat{e}^{-}_{+}(x) \neq 0$ почти всюду, и

$$|\hat{r}(x)|^2 = \hat{e}^{-}_{+}(x), \quad 2\operatorname{Re} \hat{l}(x) = \hat{f}^{-}_{+}(x). \tag{5.23}$$

Тогда линейные уравнения (5.19), (5.20) с нормированными на единицу начальными данными определяют апостериорные оператор плотности $\hat{\rho}(t)(\omega) = \hat{\rho}(\omega^t)$ и вектор состояния $\hat{\varphi}(t)(\omega) = \hat{\varphi}(\omega^t)$, нормированные на плотность вероятности $p(t)(\omega) = p(\omega^t)$ наблюдаемых траекторий $\omega^t \in \Omega^t$ винеровского $\hat{w}$ и пуассоновского $\hat{m}$ мартингалов в пространстве Фока $\mathcal{F}$ на отрезке $[0, t]$ относительно вакуумного вектора состояния $\delta_\varnothing$.

В самом деле, процессы (5.19) при условии (5.23) определяются как $\hat{\lambda}(\tilde{C}, t)$ с матрицами $\tilde{C}$, имеющими нулевые элементы $\tilde{C}^{-}_{+}(x) = 0$, и, следовательно, являются мартингалами в $\mathcal{F}$ относительно вакуум-вектора $\delta_\varnothing$. Это означает, что априорное среднее значение от $Z(t) = X \otimes \hat{z}(t)$, где $\hat{z}(t) \in \mathfrak{A}_t'$, можно вычислять с помощью вакуумного состояния $\delta_\varnothing \in \mathcal{F}$ по формуле

$$\langle \varphi_t | Z(t) \varphi_t \rangle = \langle \delta_\varnothing | \hat{\varphi}(t)^* Z(t) \hat{\varphi}(t) \delta_\varnothing \rangle =$$
$$= \langle \hat{\varphi}(t) \delta_\varnothing | Z(t) \hat{\varphi}(t) \delta_\varnothing \rangle,$$

в чем нетрудно убедиться, сравнивая уравнение (2.1) для $\varphi_t = U(t) \psi \otimes \delta_\varnothing$ и совпадающее с ним в случае (5.23) уравнение (5.21) для $\hat{\Phi}(t)\delta_\varnothing$, представляющее φ_t в виде $\hat{\varphi}(t)\delta_\varnothing$. В силу совпадающих начальных условий $\varphi_0 = \hat{\varphi}(0)\delta_\varnothing = \psi \otimes \delta_\varnothing$ и произвольности $\hat{Z}(t)$ это означает, что $p(t) = |c(t)|^2$, определяемое нормировочной функцией $c(t)$, $\varphi_t = c(t)\tilde{\varphi}(t)\delta_\varnothing$, есть плотность $p(t) \in \mathcal{L}^1_{\mu_0}(\Omega^t)$ вероятностной меры, индуцируемой в $I \otimes \mathfrak{a}_t'$ состоянием φ_t относительно произведения пуассоновской и винеровской мер, индуцируемых вакуумным состоянием δ на $\mathfrak{a}_t'$.

Приложение. Квантовый стохастический интеграл

Пусть $\mathscr{H}=\mathscr{H}^0\otimes\mathscr{F}$ — гильбертово тензорное произведение начального $\mathscr{H}^0$ и фоковского $\mathscr{F}=\int^{\oplus}\mathscr{K}(\tau)d\tau$ гильбертовых пространств, где $\mathscr{K}(\tau)=\underset{t\in\tau}{\otimes}\mathscr{K}(t)$, $\tau=(t_1,\ldots,t_n)$ — произвольная финитная цепь $t_1<\ldots<t_n$ из $\mathbf{R}_+$, и $\mathscr{K}(t)$ — произвольное гильбертово пространство, обычно отождествляемое с некоторым $\mathscr{K}$ для всех $t\in\mathbf{R}_+$. Предполагая, что в $\mathscr{K}$ задан некоторый базис, индексируемый множеством J, рассмотрим определение квантового стохастического интеграла $\int_0^t\Lambda(\mathbf{C}(r),dr)$ относительно основного процесса $\Lambda=(\Lambda_\mu^\nu)$ для матричного слабоизмеримого по t квантового процесса $\mathbf{C}(t)=(C_\nu^\mu)(t)$, $\mu,\nu\in\in\{-,J,+\}$ в $\mathscr{H}$. В случае одноточечного $J=\{0\}$ этот интеграл определен Хадсоном и Партасарати [14] как сумма

$$\int_0^t\Lambda(\mathbf{C}(r),dr)=\int_0^t(C_+^-dr+C_0^-d\Lambda_-+C_+^0d\Lambda^++C_0^0d\Lambda)=\int_0^t C_\nu^\mu d\Lambda_\mu^\nu$$

лебегова интеграла $\int_0^{+}C_+^-(r)dr$ и интегралов Ито $\int_0^t C_0^-d\Lambda_-$, $\int_0^t C_+^0d\Lambda^+$, $\int_0^t C_0^0d\Lambda$ в слабом смысле.

Мы докажем, чтот этот интеграл в общем случае может быть описан как непрерывный оператор $\mathscr{H}(\infty)\to\mathscr{H}(1)=\mathscr{H}$ на проективном пределе $\mathscr{H}(\infty)=\bigcap_{\alpha>0}\mathscr{H}(\alpha)$, $\mathscr{H}(\alpha)=\mathscr{H}^0\otimes\mathscr{F}(\alpha)$ фоковских пространств $\mathscr{F}(\alpha)=\int^{\oplus}\mathscr{K}(\tau)|\alpha|^{|\tau|}d\tau$, определяемых скалярными произведениями

$$\langle\varphi|\chi\rangle(\alpha)=\int|\alpha|^{|\tau|}\langle\varphi(\tau)|\chi(\tau)\rangle d\tau,\quad \varphi,\chi\in\mathscr{K}(\tau).\qquad(\text{П}.1)$$

Мы будем говорить, что слабоизмеримая матричная функция $t\mapsto\mathbf{C}(t)$ локально КС-интегрируема, если ее компоненты C_ν^μ локально $\mathscr{L}^p$-интегрируемы для соответствующего $p=1,2,\infty$ как операторнозначные функции

$$C_+^-(t):\mathscr{H}(\infty)\to\mathscr{H}\quad \|C_+^-(\cdot)\|_{\alpha t}^{(1)}<\infty\quad(p=1)$$

$$C_+^0(t):\mathscr{H}(\infty)\to\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}(t)\quad \|C_+^0(\cdot)\|_{\alpha t}^{(2)}<\infty\quad(p=2)$$

$$C_0^-(t):\mathscr{H}(\infty)\otimes\mathscr{K}(t)\to\mathscr{H},\quad \|C_0^-(\cdot)\|_{\alpha t}^{(2)}<\infty\quad(p=2)$$

$$C_0^0(t):\mathscr{H}(\infty)\otimes\mathscr{K}(t)\to\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}(t),\quad \|C_0^0(\cdot)\|_{\alpha t}^{(\infty)}<\infty\quad(p=\infty)$$

с определяемыми ниже нормами:

$$\|C_+^-\|_{\alpha t}^{(1)}=\int_0^t\|C_+^-(r)\|_\alpha dr,\quad \|C_0^0\|_{\alpha t}^{(\infty)}=\operatorname*{ess\,sup}_{r<t}\|C_0^0(r)\|,$$

$$\|C_{+}^{-}\|_{\alpha}=\sup_{\varphi}\{\|C_{+}^{-}\varphi\|/\|\varphi\|(\alpha)\},\quad \|C_{0}^{0}\|_{\alpha}=\sup_{\varphi_{t}^{0}}\{\|C_{0}^{0}\varphi_{t}^{0}\|/\|\varphi_{t}^{0}\|(\alpha)\}.$$

Здесь $\varphi\in\mathscr{H}(\alpha)$, $\|\varphi\|^{2}(\alpha)=\langle\varphi|\varphi\rangle(\alpha)$, $\varphi_{t}^{0}\in\mathscr{H}(\alpha)\otimes\mathscr{K}(t)$, $\|\varphi_{t}^{0}\|^{2}(\alpha)=\langle\varphi_{t}^{0}|\varphi_{t}^{0}\rangle(\alpha)$, а $\|C_{+}^{0}\|_{\alpha t}^{(2)}=\|C_{+}^{0}\|_{\alpha}^{t}$, $\|C_{0}^{-}\|_{\alpha t}^{(2)}=\|C_{0}^{-}\|_{\alpha}^{t}$ — это нормы операторов

$$C_{+}^{0}:\mathscr{H}(\alpha)\to\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}^{t},\quad (C_{+}^{0}\varphi)(r)=C_{+}^{0}(r)\varphi,\quad r\in[0,t],$$

$$C_{0}^{-}:\mathscr{H}(\alpha)\otimes\mathscr{K}^{t}\to\mathscr{H},\quad C_{0}^{-}\varphi^{0}=\int_{0}^{t}C_{0}^{-}(r)\varphi^{0}(r)\,dr,$$

вычисляемые с помощью $\mathscr{L}^{2}$-интегралов

$$\|C_{+}^{0}\|_{\alpha t}^{(2)}=\left(\int_{0}^{t}\|C_{+}^{0}(r)\|_{\alpha}^{2}dr\right)^{1/2}=\|C_{+}^{0*}\|_{\alpha t}^{(2)},$$

$$\|C_{0}^{-}\|_{\alpha t}^{(2)}=\left(\int_{0}^{t}\|C_{0\alpha}^{-*}(r)\|_{\alpha}^{2}dr\right)^{1/2}=\|C_{0}^{-*}\|_{\alpha t}^{(2)},$$

где $C_{\alpha}^{*}:\mathscr{H}(\infty)\to\mathscr{H}$ определяется для всех $\varphi\in\mathscr{H}(\infty)$, $\chi\in\mathscr{H}$ как

$$\langle C_{\alpha}^{*}\varphi|\chi\rangle=\langle\varphi|C\chi_{\alpha}\rangle(\alpha^{1/2}),\quad \chi_{\alpha}(\tau)=\chi(\tau)/\alpha^{|\tau|/2}.$$

Следующая теорема доказывает равномерную непрерывность КС интеграла для интегрируемой C как оператора $\mathscr{H}(\infty)\to\mathscr{H}$, действующего по формуле

$$\left(\int_{0}^{t}\Lambda(\mathbf{C}(r),dr)\varphi\right)(\tau)=\int_{0}^{t}\left(C_{+}^{-}(r)\varphi+C_{0}^{-}\varphi^{0}(r)\right)(\tau)\,dr+$$

$$+\sum_{r\in\tau}^{r<t}\left(C_{+}^{0}(r)\varphi+C_{0}^{0}(r)\varphi^{0}(r)\right)(\tau\setminus r),\qquad (\text{п}.2)$$

где $\varphi^{0}(t)\in\mathscr{H}(\infty)\otimes\mathscr{K}(t)$ определяется почти всюду (при $t\notin\tau$) как тензорная функция $\varphi^{0}(\tau,t)=\varphi(\tau\cup t)$.

Теорема. Пусть $\mathbf{C}(t)$ есть локально QS-интегрируемая функция, т. е. для любого $t>0$ существует $\alpha>0$ такое, что

$$\|C_{+}^{-}\|_{\alpha t}^{(1)}<\infty,\quad \|C_{+}^{0}\|_{\alpha t}^{(2)}<\infty,\quad \|C_{0}^{-}\|_{\alpha t}^{(2)}<\infty,\quad \|C_{0}^{0}\|_{\alpha t}^{(\infty)}<\infty.$$

Тогда КС интеграл (П.2) определен на $\mathscr{H}(\infty)$ как непрерывный оператор в $\mathscr{H}$, причем

$$\left\|\int_{0}^{t}\Lambda(\mathbf{C}(r),dr)\right\|_{\beta}\leqslant\|C_{+}^{-}\|_{\alpha t}^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\|C_{0}^{-}\|_{\alpha t}^{(2)}+\|C_{+}^{0}\|_{\alpha t}^{(2)}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\|C_{0}^{0}\|_{\alpha t}^{(\infty)}\qquad (\text{П}.3)$$

для $\beta > \alpha + 2\varepsilon$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leqslant 1$). Более того, сопряженный интеграл

$$\left\langle \left(\int_0^t \Lambda(\mathbf{C}(r), dr)^* \varphi \mid \chi \right) \right\rangle = \left\langle \varphi \,\middle|\, \int_0^t \Lambda(\mathbf{C}(r), dr) \chi \right\rangle, \qquad (\text{П}.4)$$

$$\varphi, \ \chi \in \mathscr{H}(\infty),$$

также определен на $\mathscr{H}(\infty) \subset \mathscr{H}$ как КС-интеграл $\int_0^t \Lambda(\mathbf{C}^*(r), dr)$, если функция $\mathbf{C}^*(t) = \mathbf{g}\mathbf{C}(t)^*\mathbf{g}$,

$$\mathbf{C}^*(t)^-_+ = C^-_+(t)^*, \quad \mathbf{C}^*(t)^0_+ = C^-_0(t)^*, \quad C^*(t)^-_0 = C^0_+(t)^*,$$
$$\mathbf{C}^*(t)^0_0 = C^0_0(t)^*$$

является локально КС-интегрируемой.

Доказательство. Для того, чтобы показать непрерывность интеграла (П.2) в проективной топологии $\bigcap\limits_{\alpha>0} \mathscr{H}(\alpha)$, следует доказать, что

$$\int_0^t \Lambda(\mathbf{C}(r), dr) \leqslant c \,\|\varphi\|(\beta), \quad \|\varphi\|(\beta) = \langle \varphi \mid \varphi \rangle (\beta)^{1/2}$$

для любого $\varphi \in \mathscr{H}(\beta)$ и некоторого $\beta > 0$, $c > 0$. Вследствие определения (П.2)

$$\left\| \int_0^t \Lambda(\mathbf{C}, dr) \right\| \leqslant \left\| \int_0^t C^-_+ dr \varphi \right\| + \left\| \int_0^t C^-_0 d\Lambda_- \varphi \right\| + \left\| \int_0^t C^0_+ d\Lambda^+ \varphi \right\| +$$
$$+ \left\| \int_0^t C^0_0 d\Lambda \right\|,$$

где

$$\int_0^t C^-_0 d\Lambda_- \varphi = \int_0^t C^-_0(r) \varphi^0(r)\, dr,$$

$$\left(\int_0^t C^0_+ d\Lambda^+ \varphi \right)(\tau) = \sum_{r \in \tau}^{r<t} (C^0_+(r)\varphi)(\tau \setminus r),$$

и $\left(\int_0^t C^0_0 d\Lambda \varphi \right)(\tau) = \sum\limits_{r \in \tau}^{r<t} C^0_0(r) \varphi^0(r) \ (\tau \setminus r)$.

Первые два интеграла в (П.2) могут быть легко оценены как

$$\left\| \int_0^t C^-_+ \varphi dr \right\| \leqslant \int_0^t \| C^-_+(r) \varphi \|\, dr \leqslant \int_0^t \| C^-_+(r) \|_\alpha dr \, \|\varphi\|(r) =$$
$$= \| C^-_+ \|^{(1)}_{\alpha t} \|\varphi\|(\alpha),$$

$$\left\| \int_0^t C_0^- d\Lambda_- \varphi \right\| \quad \| C_0^- \varphi^0 \|^t \leqslant \| C_0^- \|_\alpha^t \| \varphi^0 \| (\alpha) = \| C_0^- \|_{\alpha t}^{(2)} \left(\frac{d}{d\alpha} \| \varphi \|^2 (\alpha) \right)^{1/2},$$

где мы приняли во внимание, что

$$\| \varphi^0 \|^2 (\alpha) = \int\int \alpha^{|\tau|} \| \varphi (\tau \sqcup t) \|^2 d\tau dt = \int | \tau | \alpha^{|\tau|-1} \| \varphi (\tau) \|^2 d\tau =$$
$$= \frac{d}{d\alpha} \| \varphi \|^2 (\alpha).$$

Для того, чтобы оценить интегралы от C_+^0 и C_0^0, найдем

$$\left\| \int_0^t C_+^0 d\Lambda^+ \varphi \right\|^2 = \int_\Omega \left\| \sum_{r \in \tau}^{r < t} (C_+^0 (r) \varphi) (\tau \setminus r) \right\|^2 d\tau =$$
$$= \int_\Omega \sum_{r \in \tau}^{r < t} \| C_+^0 (r) \varphi \|^2 (\tau \setminus r) d\tau +$$
$$+ \int_\Omega \sum_{\rho = r_1 \sqcup r_2 \subseteq \tau}^{r_1, r_2 < t} \langle C_+^0 (r_1) \varphi^0 (r_1) | C_+^0 (r_2) \varphi^0 (r_1) \rangle (\tau \setminus \rho) d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_\Omega \| C_+^0 (r) \varphi (\tau) \|^2 dr d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^t \int_\Omega \langle C_+^0 (r_1) \varphi^0 (\tau, r_2) | C_+^0 (r_2) \varphi^0 (\tau, r_2) \rangle d\tau dr_1 dr_2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\| C_+^0 \|_\alpha^t \| \varphi \| (\alpha) \right)^2 + \left(\| C_+^0 \|_\alpha^t \| \varphi^0 \| (\alpha) \right)^2 =$$
$$= \left(\| C_+^0 \|_{\alpha t}^{(2)} \right)^2 \left(1 + \frac{d}{d\alpha} \right) \| \varphi \|^2 (\alpha),$$

где использовано неравенство Шварца. Таким же путем мы получим

$$\left\| \int_0^t C_0^0 d\Lambda \varphi \right\|^2 = \int_\Omega \left\| \sum_{r \in \tau}^{r < t} \left(C_0^0 (r) \varphi^0 (r) \right) (\tau \setminus r) \right\|^2 d\tau =$$
$$= \int_\Omega \sum_{r \in \tau}^{r < t} \| C_0^0 (r) \varphi^0 (r) \|^2 (\tau \setminus r) d\tau +$$
$$+ \int \sum_{\rho = r_1 \sqcup r_2 \subseteq \tau}^{r_1, r_2 < t} \langle C_0^0 (r_1) \varphi^{00} (r_1, r_2) | C_0^0 (r_2) \varphi^{00} (r_1, r_2) \rangle (\tau \setminus \rho) d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_\Omega \| C_0^0 (r) \varphi^0 (\tau, r) \|^2 d\tau dr +$$

$$+\int_0^t\int_0^t\int_\Omega \langle C_0^0(r_1)\varphi^{00}(\tau, r_1, r_2) \mid C_0^0(r_2)\varphi^{00}(\tau, r_1, r_2)\rangle\, d\tau dr_1 dr_2 \leqslant$$

$$\leqslant (\|C_0^0\|_\alpha^t \|\varphi^0\|(\alpha))^2 + (\|C_0^0\|_\alpha^t \|\varphi^{00}\|(\alpha))^2 =$$

$$= (\|C_0^0\|_{\alpha t}^{(\infty)})^2\left(1+\frac{d}{d\alpha}\right)\frac{d}{d\alpha}\|\varphi\|^2(\alpha),$$

где $\varphi^{00}(\tau, r_1, r_2) = \varphi(\tau \sqcup r_1 \sqcup r_2)$ и $\|\varphi^{00}\|^2(\alpha) = \frac{d^2}{d\alpha^2}\|\varphi\|^2(\alpha)$. Принимая во внимание, что

$$\frac{d}{d\alpha}\|\varphi\|^2(\alpha) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(\|\varphi\|^2(\alpha+\varepsilon) - \|\varphi\|^2(\alpha)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|^2(\alpha+\varepsilon)$$

для $\varepsilon > 0$, можно найти, что

$$\left(1+\frac{d}{d\alpha}\right)\|\varphi\|^2(\alpha) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|^2(\alpha+\varepsilon) - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\|\varphi\|^2(\alpha) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|^2(\alpha+\varepsilon),$$

$$\left(1+\frac{d}{d\alpha}\right)\frac{d}{d\alpha}\|\varphi\|^2(\alpha) = \left(1+\frac{d}{d\alpha}\right)\|\varphi^0\|^2(\alpha) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\alpha}\|\varphi\|^2(\alpha+\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\|\varphi\|^2(\alpha+2\varepsilon),$$

если $\varepsilon \leqslant 1$. Следовательно, благодаря неравенствам

$$\|\varphi\|(\beta) \geqslant \|\varphi\|(\alpha+2\varepsilon) \geqslant \|\varphi\|(\alpha+\varepsilon) \geqslant \|\varphi\|(\alpha) \text{ для } \beta \geqslant \alpha + 2\varepsilon,$$

можно получить

$$\left\|\int_0^t \Lambda(\mathbf{C}(r), dr)\varphi\right\| \leqslant \|C_+^-\|_{\alpha t}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\|C_0^-\|_{\alpha t}^{(2)} + \|C_+^0\|_{\alpha t}^{(2)}) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\|C_0^0\|_{\alpha t}^{(\infty)},$$

если $\|\varphi\|(\beta) \leqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, что эквивалентно (П.3).

Если матричный КС-процесс $\mathbf{C}^*(t)$ есть также локально КС-интегрируемый, то существует сопряженный интеграл $\int_0^t \Lambda(\mathbf{C}(r), dr)$, определенный как в (П.2) с помощью $\mathbf{C}^*$:

$$\langle \varphi \mid \int_0^t \Lambda(\mathbf{C}(r), dr)\chi\rangle = \int_0^t \langle \varphi \mid C_+^-(r)\chi + C_0^-(r)\chi^0(r)\rangle\, dr +$$

$$+\int_0^t \langle \varphi^0(r) \mid C_+^0(r)\chi + C_0^0(r)\chi^0(r)\rangle\, dr =$$

$$= \int_0^t \langle C_+^-(r)^*\varphi + C_+^0(r)^*\varphi^0(r) \mid \chi\rangle\, dr +$$

$$+\int_0^t \langle C_0^-(r)^*\varphi + C_0^0(r)^*\varphi^0(r) \mid \chi^0(r)\rangle\, dr = \langle \int_0^t \Lambda(\mathbf{C}^*(r), dr)\varphi \mid \chi\rangle.$$

Заметим, что если $C^{\mu}_{\nu}(t)$ ограничены на $\mathscr{H}=\mathscr{H}(1)$ для всех t, то сопряженный процесс $\mathbf{C}^*(t)$ также ограничен:

$$\| C^{*-}_{+} \|^{(1)}_t = \| C^{-}_{+} \|^{(1)}_t, \quad \| C^{*0}_{+} \|^{(2)}_t = \| C^{-}_{0} \|^{(2)}_t, \quad \| C^{*-}_{0} \|^{(2)}_t = \| C^{+}_{0} \|^{(2)}_t$$

и $\| C^{*0}_{0} \|^{(\infty)}_t = \| C^{0}_{0} \|^{(\infty)}_t$ $(\alpha=1)$. Следовательно, сопряженный интеграл для такой локально интегрируемой $\mathbf{C}$ существует как непрерывный оператор $\mathscr{H}(\beta)\to\mathscr{H}$, $\beta\geqslant 1+2\varepsilon$, имеющий ту же оценку (П.3) для $\alpha=1$.

Следствие. Если $\mathbf{C}(t)$ есть простая интегрируемая функция, то КС-интеграл (П.2) совпадает с интегральной суммой Ито относительно основных процессов (1.1). Более этого, КС-интеграл (П.2) есть предел таких интегральных сумм в индуктивной операторной топологии, определяемой нормами (П.3), если локально КС-интегрируемый матричный процесс $\mathbf{C}$ может быть однородно аппроксимирован последовательностью простых операторнозначных процессов относительно соответствующих $\mathscr{L}^p$-норм на $[0, t]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белавкин В. П.* Операционный подход в теории квантовых случайных процессов измерения и управления // Тр. VIII Всес. конф. теории кодирования и передачи информации. 1978.— Ч. I.— М.— Вильнюс, 1978.— С. 23—28.
2. — Квантовая фильтрация марковских сигналов на фоне белых квантовых шумов // Радиотехника и электроника.— 1980, *25*, № 7.— С. 1445—1453.
3. — К теории управления квантовыми наблюдаемыми процессами // Автомат. и телемех.— 1983.— № 2.— С. 50—63. (РЖМат, 1983, 7В344)
4. — Теорема реконструкции для квантового случайного процесса // Теор. и мат. физ.— 1985,— *62*, № 3.— С. 409—431. (РЖМат, 1985, 7В391)
5. — Нелинейная фильтрация квантовых непрерывных сигналов // Тр. IX Всес. конф. по теории кодирования и передачи информации.— 1988.— Ч. II.— Одесса, 1983.— С. 342—345.
6. *Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. И.* Квантовые свойства пондеромоторного измерения электромагнитной энергии // ЖТЭФ— 1977. — *73*.— С. 1340—1343.
7. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов.— М.: Наука, 1974.
8. *Скороход А. В.* Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы // Успехи мат. наук.— 1982.— *37*, № 6. — С. 157—183. (РЖМат, 1983, 7В108)
9. *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их приложения к оптимальному управлению.—М.: МГУ, 1966. (РЖМат, 1967, 8В167К)
10. *Холево А. С.* О принципе квантовых неразрушающих измерений // Теор. и мат. физика.— 1985.— *65*, № 3.— С. 415—422.
11. *Barchielli A.* Input and output channels in quantum systems and quantum stochastic differential equations. / In: Proceedings, Obelwolf 1987 «Quantum Probab. and Appl. III», ed. L. Accardi, W. von Waldenfels, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York—Paris—Tokyo.— С. 37—51
12. *Belavkin V. P.* Optimal measurement and control in quantum dynamical systems. / Preprint № 411, 1979, Inst. phz., Uniwersytet Mikolaja Kopernica, Toruń.

13. — Nondemolition measurement and control in quantum dynamical systems. In: Proceedings of CISM, Udine 1985 «Information complexity and control in quantum physics» / Ed. A. Blaquiere, S. iDner, G. Loshak, Springer—Verlag, Wien—New York.— 1987.— C. 311—336.
14. — Nondemolition stochastic calculus, nonlinear filtering and optimal control in open quantum systems. In: Stochastic methods in mathematics and physics. Proc. of XXIV Karpacz winter school, 1988, World Scientific, Singapore—New Jersey—London—Hong Kong.
15. — Nondemolition measurements, nonlinear filtering and dynamic programming of quantum stochastic processes. Proceedings INRIA, Sophia—Antipolis 1988 «Bellman continuum», Springer—Verlag 1988
16. *Davies E. B., Lewis I. T.* An operational approach to quantum probability // Commun. Math. Phys.— 1970.— *17*, № 3.— C. 239—260. РЖМат, 1971, 2Б856.
17. *Gardiner C. W., Collett M. I.* Input and output in damped quantum systems: quantum statistical differential equations and the master equation // Phys. Rev.— *1985*.— *A31*.— C. *3761*—*3774*.
18. *Hudson R. S., Parthasarathy K. R.* Quantum Ito's formula and stochastic evolution // Comm. Math. Phys.— 1984.— *93*, № 3.— C. 301—323. (РЖМат, 1984, 12В444)
19. *Lax M.* Quantum noise IV. Quantum theory of noise sources // Phys. Rev. — 1965.— *145*.— C. 110—129
20. *Lindsay M., Maassen H.* An integral kerner approach to noise. In: Proceedings, Oberwolf 1987 «Quantum Probability and Applications III» / Ed. L. Accardi, W. von Waldenfels, Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988.— C. 192—208.
21. *Takesaki M.* Conditional expectations on operator algebras // J. Funct. Anal.— 1972.— *9*, № 3.— C. 306—326. (РЖМат, 1972, 7Б701)