

И. Н. Топтыгин

# СОВРЕМЕННАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

---

## ЧАСТЬ 1 МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ



Москва-Ижевск

2002

Интернет-магазин

**MATHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
  - математика
  - биология
  - техника
- 

**Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.**

Современная электродинамика, часть 1. Микроскопическая теория: Учебное пособие. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 736 стр.

Учебное пособие нового типа, сочетающее в себе стиль краткого учебника и сборника задач с ответами и частично с решениями. Всего в первой части книги собрано свыше 850 задач и примеров. Книга удовлетворяет требованиям фундаментализации высшего образования и его многоуровневости, для чего в нее включен материал разной степени сложности, рассчитанный на подготовку бакалавров 3–4 годов обучения, магистров и аспирантов. Основной материал требует использования высшей и вычислительной математики и классической механики в объеме стандартного университетского курса, а для некоторых разделов требуется знакомство с основами квантовой механики, математической физики, термодинамики, статистической физики и кинетики.

Книга рассчитана на подготовку специалистов по физическим и техническим специальностям. Она может быть полезна также научным работникам, инженерам-исследователям и преподавателям различных физических дисциплин.

**ISBN 5-93972-164-8**

© И. Н. Топтыгин, 2002

© Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

---

---

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	7
<b>ГЛАВА 1. Математические методы электродинамики</b> . . . . .	11
1.1. Векторная и тензорная алгебра Определение тензора и действия над тензорами. Главные значения и инварианты симметричного тензора II ранга. Ковариантные и контравариантные компоненты. Тензоры в криволинейных неортогональных системах координат. Задачи и примеры . . . . .	11
1.2. Векторный и тензорный анализ Градиент и производная по направлению. Векторные линии. Дивергенция и ротор. Интегральные теоремы. Соленоидальные и потенциальные (безвихревые) векторы. Дифференциальные операции второго порядка. Дифференцирование в криволинейных координатах. Ортогональные криволинейные координаты. Задачи и примеры . . . . .	29
1.3. Специальные функции математической физики Цилиндрические функции. Сферические функции и полиномы Лежандра. Дельта-функция Дирака. Определение и общие свойства. Некоторые представления дельта-функции. Представление дельта-функции через контурные интегралы в комплексной плоскости. Разложение по полным системам ортонормированных функций. Общее рассмотрение. Ряд Фурье. Интеграл Фурье. Задачи и примеры . . . . .	53
1.4. Ответы и решения . . . . .	85
<b>ГЛАВА 2. Основные понятия электродинамики. Уравнения Максвелла</b> . . . . .	104
2.1. Электростатика Закон Кулона. Электрическое поле. Электростатический потенциал. Уравнения электростатики. Граничные условия. Разложение по мультиполям. Энергия и силы в электростатическом поле. Задачи и примеры . . . . .	104

2.2.	Магнитоэлектродинамика Плотность тока и магнитное поле. Закон Био–Савара. Сила Лоренца и формула Ампера. Сохранение электрического заряда и уравнение непрерывности. Уравнения магнитоэлектродинамики. Векторный потенциал. Граничные условия. Магнитный момент. Энергия и силы в магнитном поле. Коэффициенты индуктивности. Задачи и примеры . . . . .	127
2.3.	Уравнения Максвелла. Свободное электромагнитное поле Закон электромагнитной индукции. Уравнения Максвелла. Граничные условия. Системы единиц измерения электрических и магнитных величин. Анализ системы уравнений Максвелла. Энергия и поток энергии электромагнитного поля. Электромагнитные потенциалы. Свободное электромагнитное поле. Электромагнитные волны. Гамильтонова форма уравнений поля. Осцилляторы поля. Задачи и примеры . . . .	147
2.4.	Ответы и решения . . . . .	172
<b>ГЛАВА 3. Специальная теория относительности и релятивистская кинематика . . . . .</b>		<b>212</b>
3.1.	Принцип относительности и преобразования Лоренца Свойства пространства-времени и интервал. Преобразования Лоренца. Псевдоевклидова геометрия. Задачи и примеры . . .	212
3.2.	Кинематика релятивистских частиц Энергия и импульс. Кинематические задачи. Задачи и примеры	235
3.3.	Ответы и решения . . . . .	255
<b>ГЛАВА 4. Вариационный принцип в релятивистской механике и теории поля . . . . .</b>		<b>301</b>
4.1.	Четырехмерные векторы и тензоры Преобразование тензоров. Дуальные тензоры. Задачи и примеры . . . . .	301
4.2.	Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Преобразование электромагнитного поля Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем. Уравнения движения релятивистской частицы. Преобразования напряженностей электромагнитного поля. Динамика орбитальных и спиновых магнитных моментов. Приближенные методы. Усреднение по быстрым осцилляциям. Фазовые траектории и фазовый портрет. Адиабатические инварианты. Задачи и примеры . . . . .	311

4.3.	Четырехмерная формулировка электродинамики. Введение в теорию поля Методы Лагранжа и Гамильтона в теории поля. Действие для электромагнитного поля. Теорема Нетер и интегралы движения. Задачи и примеры . . . . .	347
4.4.	Ответы и решения . . . . .	368
<b>ГЛАВА 5.</b>	<b>Излучение и рассеяние электромагнитных волн . . . . .</b>	<b>437</b>
5.1.	Функция Грина и запаздывающие потенциалы Функции Грина волнового уравнения. Запаздывающие потенциалы. Спектральный состав излучения. Задачи и примеры	437
5.2.	Излучение нерелятивистских систем зарядов и токов Электромагнитное поле движущейся заряженной частицы. Потеря энергии и импульса заряженной частицей. Спектральное распределение излучения релятивистских частиц. Излучение при столкновениях частиц. Излучение при распадах и превращениях частиц. . . . .	447
5.3.	Излучение релятивистских частиц Электромагнитное поле движущейся заряженной частицы. Потеря энергии и импульса заряженной частицей. Спектральное распределение излучения релятивистских частиц. Излучение при столкновениях частиц. Излучение при распадах и превращениях частиц. . . . .	461
5.4.	Взаимодействие заряженных частиц с излучением Взаимодействие заряженной частицы с собственным электромагнитным полем. Перенормировка массы. Сила радиационного торможения в релятивистском случае. Рассеяние электромагнитных волн частицами. Примеры и задачи. . . . .	482
5.5.	Ответы и решения . . . . .	498
<b>ГЛАВА 6.</b>	<b>Квантовая теория излучения и рассеяния фотонов . . . . .</b>	<b>570</b>
6.1.	Квантовые состояния электромагнитного поля Осцилляторы поля. Фотоны. Представление чисел заполнения и операторы электромагнитного поля. Состояния статистического равновесия. Когерентные состояния. Разложение векторов состояния и операторов по когерентным состояниям. Сжатые состояния. Перепутанные состояния . . . . .	570

6.2.	Квантовая теория излучения, поглощения и рассеяния фотонов атомными системами Взаимодействие квантованного электромагнитного поля с нерелятивистской системой. Спонтанное и индуцированное излучение. Коэффициенты Эйнштейна. Электрическое дипольное излучение. Электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучение. Теория возмущений для матрицы плотности. Другая формулировка дипольного приближения. Приближение двухуровневого атома и кооперативные эффекты. Примеры и задачи. . . . .	594
6.3.	Взаимодействие релятивистских частиц с фотонами Релятивистское уравнение Дирака для фермионов. Оператор взаимодействия релятивистской частицы с фотонами. Рассеяние фотона свободным электроном. Метод эквивалентных фотонов. Примеры и задачи . . . . .	618
6.4.	Ответы и решения . . . . .	638
<b>Дополнение 1.</b> Перевод электрических и магнитных величин из системы СИ в гауссову и обратно . . . . .		689
<b>Дополнение 2.</b> Вариационный принцип для непрерывных систем Колебания упругой среды как предел колебаний дискретных точечных масс. Лагранжева форма уравнений движения непрерывной среды . . . . .		692
<b>Дополнение 3.</b> Общая схема квантовой теории Спектр физической величины и волновая функция. Вектор состояния. Неразличимость тождественных частиц. Операторы и их свойства. Эволюция состояний во времени. Смешанные состояния. Линейный гармонический осциллятор. Алгебра операторов . . . . .		700
<b>Литература</b> . . . . .		718
<b>Предметный указатель</b> . . . . .		730

---

---

# Предисловие

Целесообразность издания предлагаемого учебного пособия вызвана интенсивным развитием физики и смежных дисциплин в последние десятилетия, необходимостью приведения используемых учебных книг в соответствие с современными достижениями науки и техники, а также длительным перерывом в издании научно-технической литературы в последнее десятилетие в Российской Федерации и физическим износом изданных ранее книг. В частности, имеющиеся в настоящее время пособия по электродинамике за немногими исключениями были написаны свыше 15 лет назад и не содержат достаточно современного материала, касающегося приложения общих принципов к актуальным научным и техническим задачам.

Между тем, интенсивное внедрение достижений современной физики в технику и технологию, а также смежные науки (экологию, геофизику, астрофизику, биологию и многие другие, включая медицину) требует от широких кругов специалистов активного владения методами решения самых разнообразных электродинамических задач. В то же время сама электродинамика и ее многочисленные приложения так разрослись, что никакой традиционный курс не в состоянии охватить большинство важнейших электродинамических проблем с необходимой полнотой и глубиной.

В этих условиях, по нашему мнению, назрела необходимость написания достаточно компактной книги нового стиля, в которой были бы изложены как основы электродинамики, так и ее основные приложения в смежных областях науки, а также наиболее интересные технические приложения. Авторы попытались это реализовать за счет нетрадиционной композиции, сочетающей стиль краткого учебника и сборника задач. Многие вопросы освещаются в виде примеров и задач, для части которых даны подробные решения в тексте книги, часть же снабжена краткими решениями либо только ответами. В связи с этим материал каждого раздела по стилю изложения разделен на две основные части:

1. Теоретический курс (основные физические принципы и уравнения; примеры с подробными решениями, в которые вынесены основные математические преобразования, а также узловые приложения теории; сведения справочного характера по математическим методам электромагнетизма; библиографические указания для более подробного ознакомления с отдельными вопросами).

2. Задачи (формулировка условий; указания к решению (если это необходимо); ответы или решения с необходимыми комментариями и обсуждением результатов).

Предлагаемое учебное пособие будет состоять из двух книг: Часть 1. Электромагнитные явления в вакууме (микроскопическая электродинамика). Часть 2. Электромагнитные явления в веществе (макроскопическая электродинамика).

Книга снабжена довольно длинным списком рекомендуемой для дальнейшего чтения литературы (преимущественно учебники, монографии и обзоры; в редких случаях оригинальные статьи) и предметным указателем. Большинство источников, вошедших в список рекомендуемой литературы, было использовано в предлагаемой книге.

По мнению авторов, такое издание имеет следующие преимущества:

- возможность вместить значительную информацию в книге умеренного объема;
- возможность для читателя освоить на практике методы решения электродинамических задач;
- объединение сильно разросшихся ответвлений электродинамики и озонакпление специалистов с достижениями и методами, применяемыми в смежных областях.

При составлении предлагаемого учебного пособия авторы использовали опыт преподавания теоретической физики на четырех физических факультетах Санкт-Петербургского государственного технического университета (Политехнического института), а также свой предыдущий опыт работы над учебными пособиями, изданными ранее с грифом Минвуза СССР: «Сборник задач по электродинамике» В. В. Батыгина и И. Н. Топтыгина (Физматгиз, 1962 г.; Наука ФМ, 1970 г.) и «Классическая электродинамика» М. М. Бредова, В. В. Румянцева и И. Н. Топтыгина (Наука ФМ, 1985 г.). Обе книги были переведены и изданы на нескольких иностранных языках. Но предлагаемая книга существенно отличается от двух указанных выше как общим стилем, так и более широким охватом материала, подчас выходящего за рамки классической электродинамики. Например, число задач и примеров только в первой части новой книги примерно такое же, как общее число их в «Сборнике задач по электродинамике».

Есть и еще один повод в пользу книги предлагаемого стиля. В последние годы руководители высшей школы Российской Федерации в целях экономии средств продолжают сокращать объем учебных часов обязательных занятий с преподавателем. В этих условиях, чтобы избежать катастрофического падения уровня подготовки специалистов, необходимо всячески



стимулировать самостоятельную работу студентов. Мы надеемся, что предлагаемое учебное пособие будет способствовать этому и поможет в первую очередь тем студентам, которые заинтересованы не только в получении документа о высшем образовании, но и стремятся глубоко овладеть избранной специальностью.

Авторы надеются, что книгу можно будет использовать для многоуровневой подготовки учащихся (бакалавры, магистры, инженеры-исследователи, отчасти аспиранты и научные работники). Для этой цели в книгу включены примеры и задачи, отличающиеся по содержанию, степени сложности и способу подачи материала. Чтобы дать пользователю книги представление о степени сложности той или иной задачи, авторы использовали пометки в виде звездочек. Задачи повышенной трудности отмечены одной звездочкой, а наиболее сложные задачи — двумя звездочками. Последние, по нашему мнению, могут использоваться как основа для курсовых работ. Кроме звездочек, используется еще одна пометка — жирная точка. Такой пометкой снабжены задачи, которые рекомендуется решить в первую очередь, так как они знакомят с достаточно общими и важными понятиями и явлениями либо содержат результаты, которые используются в других задачах. Что касается примеров, то в них включен как правило обязательный материал, и авторы настоятельно рекомендуют пользователям подробно разобрать все примеры в ходе проработки теоретического материала к соответствующему разделу.

В разработке общего замысла книги и ее плана участвовали оба автора. Но после безвременной кончины В. В. Батыгина в 1998 г. большую часть конкретной работы по написанию первой части книги выполнил оставшийся автор. Значительную помощь в работе над книгой оказали наши коллеги — сотрудники кафедры теоретической физики физико-механического факультета СПбГТУ. А. И. Цыган предложил задачи 5.134–5.137. Д. В. Куприянов и И. М. Соколов написали значительную часть теоретического материала и составили многие задачи главы 6. Сотрудники кафедры космических исследований А. В. Блинов, А. Н. Константинов, В. Ю. Бахарев, а также В. В. Масленникова оказали большую помощь в оформлении материалов книги. Авторы признательны А. Г. Чиркову за обсуждение многих вопросов, затронутых в книге.

При написании и подготовке книги к печати авторы не пользовались поддержкой каких-либо научных и благотворительных фондов, за исключением моральной поддержки издательства «Регулярная и хаотическая динамика» и наших коллег по кафедре. Наоборот, с учетом того нищенского состояния, в которое низвергнута российская высшая школа и ее преподаватели уже свыше 10 лет, написание этой книги следует рассматривать как акт благотворительности авторов, направленный на поддержку будущего России, ее науки и высшего образования. Впрочем, благоприятное буду-

щее науки и образования наступит лишь в том случае, если нынешний по преимуществу криминальный и паразитический российский капитализм — результат десятилетнего господства в стране российских «талибов» — удастся преодолеть и вернуть интеллектуальным ценностям то почетное место, которое они занимали в дореволюционной России и в Советском Союзе.

*И. Н. Топтыгин*

---

---

# ГЛАВА 1

## Математические методы электродинамики

### 1.1. Векторная и тензорная алгебра

**Определение тензора и действия над тензорами.** Выберем в трехмерном пространстве прямоугольную и прямолинейную (декартову) систему координат  $x_1, x_2, x_3$ . Пространство будем считать **евклидовым**. Это означает, что в нем выполняются аксиомы геометрии Евклида, известные из школьного курса математики, и их следствия. В частности, квадрат расстояния  $dl^2$  между двумя близкими точками задается выражением

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Рассмотрим наряду с исходной другие такие же системы координат, имеющие общее начало, но повернутые относительно исходной (рис. 1.1).

**Скаляром (инвариантом)** называется величина, которая не изменяет своего значения при поворотах координатной системы, т. е. имеет одно и то же значение в исходной и повернутой системах координат.

$$S' = S = \text{inv}. \quad (1.1)$$

Таким свойством, в частности, обладает  $dl^2 = dl'^2 = \text{inv}$ .

**Вектором** в трехмерном пространстве называется совокупность трех величин  $V_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), которые определены во всех системах координат и преобразуются при поворотах по правилу

$$V'_\alpha = a_{\alpha\beta} V_\beta. \quad (1.2)$$

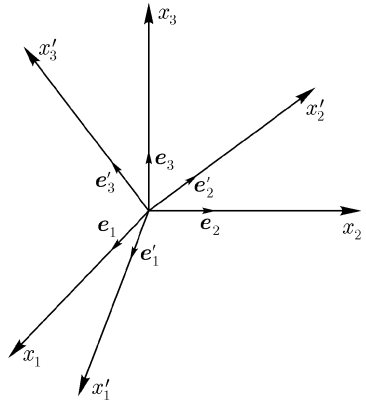


Рис. 1.1

(сумма по повторяющемуся значку  $\alpha$  от 1 до 3!). Здесь  $V_\beta$  — проекции вектора на оси исходной, а  $V'_\beta$  — на оси повернутой системы координат;  $a_{\alpha\beta}$  — коэффициенты преобразования, представляющие собой косинусы углов между  $\beta$ -й осью исходной и  $\alpha$ -й осью повернутой системы. Их можно записать через единичные векторы (орты) координатных осей:

$$a_{\alpha\beta} = e'_\alpha \cdot e_\beta. \quad (1.3)$$

**Тензором II ранга** в трехмерном пространстве называется девятикомпонентная величина  $T_{\alpha\beta}$  (каждый из индексов принимает независимо по три значения 1, 2, 3), определенная во всех системах координат и преобразующаяся при поворотах координатной системы как произведение компонент двух вектора  $A_\alpha V_\beta$ , т. е. следующим образом:

$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} T_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Тензором  $s$ -го ранга в пространстве трех измерений называется  $3^s$ -компонентная величина  $T_{\alpha\beta\dots\chi}$  преобразующаяся как произведение  $s$  компонент векторов:

$$T'_{\beta\dots\chi} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} \dots T_{\mu\nu\dots\sigma}. \quad (1.5)$$

Скаляр и вектор можно рассматривать как тензоры нулевого и первого рангов соответственно.

**Матрица поворота**  $\hat{a}$  обладает следующими свойствами:

а) ортогональность;

$$a_{\alpha\mu} a_{\beta\mu} = \delta_{\alpha\beta}, \quad a_{\alpha\mu} a_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

где

$$\delta_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{при} \quad \alpha = \beta \quad \text{и} \quad \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \quad (1.7)$$

— **символ Кронекера**;

б) определитель матрицы поворота равен единице,

$$\det \hat{a} \equiv |\hat{a}| = 1; \quad (1.8)$$

в) произведение двух матриц поворота,

$$\hat{c} = \hat{a}\hat{g}, \quad c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} g_{\mu\beta} \quad (1.9)$$

описывает такое вращение координатной системы, которое представляет собой результат двух последовательных поворотов<sup>1</sup> сначала с матрицей  $\hat{g}$ ,

<sup>1</sup>Совокупность всех операций поворота образует группу (группу трехмерных вращений). см. Гельфанд и др. (1958).

а затем с матрицей  $\widehat{a}$ . В общем случае матрицы поворота некоммутативны, т. е.

$$\widehat{a}\widehat{g} \neq \widehat{g}\widehat{a}. \quad (1.10)$$

Из свойства а) следует, что обратная матрица  $\widehat{a}^{-1}$ , определяемая соотношениям

$$\widehat{a}^{-1}\widehat{a} = \widehat{a}\widehat{a}^{-1} = \widehat{1}, \quad \text{или} \quad a_{\alpha\mu}^{-1}a_{\mu\beta} = a_{\alpha\mu}a_{\mu\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.11)$$

получается из исходной транспонированием, т. е. заменой строк на столбцы и наоборот:

$$\widehat{a}^{-1} = \widehat{\widehat{a}}, \quad a_{\alpha\beta}^{-1} = \widetilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \quad (1.12)$$

Преобразование, обратное (1.2), выглядит так:

$$V_{\beta} = a_{\beta\alpha}^{-1}V'_{\alpha}. \quad (1.13)$$

Векторы, преобразующиеся по правилу (1.2) при поворотах, могут двояко вести себя при инверсии системы координат, т. е. при преобразовании вида

$$x'_{\alpha} = -x_{\alpha}, \quad (1.14)$$

где матрица преобразования  $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ . Те векторы, компоненты которых, как и координаты  $x_{\alpha}$ , меняют знак при инверсии, называются **истинными**, или **полярными**. Векторы, компоненты которых при инверсии координат не изменяют знака, называются **псевдовекторами**, или **оксиальными** векторами (угловая скорость вращения, векторное произведение двух полярных векторов  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  и др.). Это определение распространяется и на тензоры произвольного ранга  $s$ : компоненты **полярных** (истинных) тензоров при инверсии координат приобретают множитель  $(-1)^s$ , а компоненты **псевдотензоров** множитель  $(-1)^{s+1}$ .

**Сумма** двух тензоров одинакового ранга образует третий тензор того же ранга, компоненты которого

$$Q_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}. \quad (1.15)$$

Из **прямых произведений** компонент двух тензоров (без суммирования) составляется тензор, ранг которого равен сумме рангов тензоров-сомножителей, например:

$$Q_{\alpha\beta\lambda} = T_{\alpha\beta}V_{\lambda}, \quad (1.16)$$

где  $Q_{\alpha\beta\lambda}$  — тензор III ранга.

**Свертывание тензора** — это образование нового тензора, компоненты которого получаются путем отбора компонент с двумя одинаковыми

значками и последующего суммирования, например  $Q_{\alpha\beta\beta} = A_\alpha$  — вектор,  $Q_{\alpha\beta\alpha} = B_\beta$  — другой вектор. В результате свертывания ранг тензора уменьшается на две единицы, в частности,

$$S = T_{\alpha\alpha} = \text{inv} \quad (1.17)$$

— скаляр.

При записи равенств между тензорами должно быть выполнено правило одинаковой тензорной размерности: приравнивать можно только тензоры одинаковых рангов. Это означает, что число свободных значков (по которым не ведется суммирование) в правой и левой частях равенства должно быть одно и то же. Число пар «немых» значков (по которым производится суммирование) справа и слева может быть произвольным.

Тензор называется **симметричным (антисимметричным)** по паре индексов  $\alpha$  и  $\beta$ , если его компоненты удовлетворяют условиям

$$Q_{\alpha\beta\mu} = Q_{\beta\alpha\mu} \quad (Q_{\alpha\beta\mu} = -Q_{\beta\alpha\mu}). \quad (1.18)$$

Компоненты тензоров могут быть не только действительными, но и комплексными величинами. Во втором случае важную роль играют понятия эрмитова и антиэрмитова тензоров. Определение эрмитова тензора:

$$T_{\alpha\beta}^h = T_{\beta\alpha}^{*h}, \quad (1.19)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Определение антиэрмитова тензора:

$$T_{\alpha\beta}^{ah} = -T_{\beta\alpha}^{*ah}. \quad (1.20)$$

В приложениях очень важны инвариантные единичные тензоры  $\delta_{\alpha\beta}$  и  $e_{\alpha\beta\lambda}$ . Первый из них является симметричным истинным тензором, и его компоненты совпадают с символом Кронекера (1.7), а второй антисимметричный по любой паре индексов псевдотензор, компоненты которого определяются условиями

$$\begin{aligned} \text{а) } e_{123} &= +1, \\ \text{б) } e_{\alpha\beta\lambda} &= -e_{\beta\alpha\lambda} = -e_{\alpha\lambda\beta} = e_{\lambda\alpha\beta} = e_{\beta\lambda\alpha} = -e_{\lambda\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Оба тензора, преобразуясь при поворотах по правилу (1.5), обладают тем свойством, что во всех координатных системах их компоненты имеют одинаковые значения:

$$\delta'_{\alpha\beta}, \quad e'_{\alpha\beta\lambda} = e_{\alpha\beta\lambda}. \quad (1.22)$$

## Задачи

**1.1.** Доказать равенство (1.8). Чему будет равен определитель матрицы преобразования, если поворот сопровождается инверсией координатных осей?

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться соотношениями (1.11) и (1.12).

**1.2.** Доказать равенства (1.22) при преобразованиях поворота координатной системы.

**1.3.** Выше (после формулы (1.13)) дано определение псевдотензора  $s$ -го ранга. Записать правило преобразования его компонент, аналогичное (1.5), которое годилось бы не только при поворотах, но и при отражениях координатных осей.

**1.4.** Представить произвольный тензор  $\Pi$  ранга  $T_{\alpha\beta}$  в виде суммы симметричного ( $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ ) и антисимметричного  $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$  тензоров. Убедиться в единственности такого представления.

**1.5.** Представить произвольный комплексный тензор  $\Pi$  ранга в виде суммы эрмитова и антиэрмитова тензоров. Убедиться в единственности такого представления.

**1.6.** Показать, что

а) свертка симметричного и антисимметричного тензоров равна нулю:  $S_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} = 0$ ;

б) свертка двух эрмитовых  $T_{\alpha\beta}^h P_{\alpha\beta}^h$  или двух антиэрмитовых  $T_{\alpha\beta}^{ah} P_{\alpha\beta}^{ah}$  тензоров  $\Pi$  ранга представляет собой действительное число;

в) свертка эрмитова и антиэрмитова тензоров  $\Pi$  ранга  $T_{\alpha\beta}^h P_{\alpha\beta}^{ah}$  представляет собой чисто мнимое число.

**1.7.** Показать, что симметрия тензора есть свойство, инвариантное относительно вращения, т. е. тензор, симметричный (антисимметричный) по паре индексов в некоторой системе отсчета, остается симметричным (антисимметричным) по этим индексам и во всех системах, повернутых относительно исходной.

**1.8.** Показать, пользуясь правилами (1.1)–(1.5) преобразования тензоров, что

а)  $A_\alpha$  — вектор (псевдовектор), если  $A_\alpha B_\alpha = \text{inv}$  и  $B_\alpha$  — вектор (псевдовектор);

б)  $A_\alpha$  — вектор, если  $A_\alpha = T_{\alpha\beta} B_\beta$  в каждой координатной системе и  $T_{\alpha\beta}$  — тензор  $\Pi$  ранга, а  $B_\beta$  — вектор;

в)  $T_{\alpha\alpha} = \text{inv}$ , где  $T_{\alpha\beta}$  — тензор  $\Pi$  ранга;

г)  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — тензор II ранга, если  $A_\alpha$  и  $B_\beta$  — векторы и во всех координатных системах  $A_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} B_\beta$ . Что будет представлять собой  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , если  $A_\alpha$  — вектор, а  $B_\beta$  — псевдовектор?  $A_\alpha$  и  $B_\beta$  — оба псевдовекторы?

д)  $A_{\alpha\beta\lambda} B_{\alpha\beta}$  — вектор, если  $A_{\alpha\beta\lambda}$  и  $B_{\alpha\beta}$  — тензоры III и II рангов соответственно;

е)  $T_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}$  — псевдоскаляр, если  $T_{\alpha\beta}$  и  $P_{\alpha\beta}$  — соответственно тензор и псевдотензор II ранга.

**1.9.** Указать правило преобразования совокупности объемных интегралов  $T_{\alpha\beta} = \int x_\alpha x_\beta dV$  при поворотах и отражениях ( $x_\alpha, x_\beta$  — декартовы координаты).

**1.10.** Показать, что компоненты антисимметричного тензора II ранга  $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$  можно отождествить с компонентами некоторого вектора  $C_\alpha$ , так как они преобразуются одинаково при вращениях.  $C_\alpha$  в этом случае называем вектором, дуальным тензору  $A_{\alpha\beta}$ .

УКАЗАНИЕ. Использовать единичный антисимметричный тензор (1.21).

**1.11.** Доказать равенства:

$$\text{а) } [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} A_\beta B_\lambda$$

$$\text{б) } [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C} = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} A_\alpha B_\beta C_\lambda = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \quad (1.23)$$

Как преобразуются векторное, двойное векторное и смешанное произведения при поворотах и отражениях, если все три вектора — полярные?

**1.12.** Показать, что если в некоторой системе координат соответствующие компоненты двух векторов пропорциональны, то они пропорциональны и в любой другой системе координат. Такие векторы называются параллельными.

**1.13.** Пусть площадь элементарного параллелограмма, построенного на малых векторах  $dr$  и  $dr'$ ; изображается вектором  $dS$ , направленным по нормали к плоскости параллелограмма и по абсолютной величине равным этой площади. Записать  $dS_\alpha$  в тензорных обозначениях.

**1.14.** Записать в тензорных обозначениях объем  $dV$  элементарного параллелепипеда, построенного на малых векторах  $dr, dr', dr''$ . Как он преобразуется при вращениях и отражениях?



1.15. Доказать тождества:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= 0, \\
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) &= 0, \\
 \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= 0, \\
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) - \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}]) + \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}]) &= 0, \\
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{D}]) + \mathbf{D}(\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

1.16. Два направления  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  определяются в сферической системе координат углами  $\nu, \alpha$  и  $\nu', \alpha'$ . Найти косинус угла  $\epsilon$  между ними.

1.17. В некоторых случаях бывает удобно вместо декартовых компонент вектора использовать его циклические (комплексные) компоненты, определяемые формулами

$$\begin{aligned}
 A_{\pm 1} &= \mp 2^{-1/2}(A_1 \pm iA_2), \\
 A_0 &= A_3.
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

Выразить скалярное и векторное произведения двух векторов через их циклические компоненты. Выразить также циклические компоненты радиуса-вектора  $r_\mu$  через шаровые функции<sup>2</sup> Лежандра.

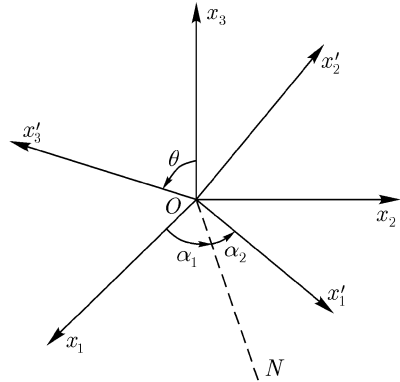


Рис. 1.2

1.18. Составить матрицы преобразования базисных ортов: при переходе от декартовых координат к сферическим и обратно; при переходе от декартовых координат к цилиндрическим и обратно.

1.19. Записать матрицу  $\hat{g}$  преобразования компонент вектора при повороте декартовой системы координат вокруг оси  $x_3$  на угол  $\alpha$ .

1.20. Найти матрицу  $\hat{g}$  преобразования компонент вектора при повороте координатных осей, определяемом углами Эйлера  $\alpha_1, \theta, \alpha_2$  (рис. 1.2), путем перемножения матриц, соответствующих поворотам вокруг оси  $x_3$  на угол  $\alpha_1$ , вокруг линии узлов  $ON$  на угол  $\theta$  и вокруг оси  $x'_3$  на угол  $\alpha_2$ .

<sup>2</sup>Определение шаровых функций приведено в разделе 1.3 (см. ответ к задаче 1.118).

**1.21.** Найти матрицу  $\widehat{D}(\alpha_1\theta\alpha_2)$ , с помощью которой преобразуются циклические компоненты вектора (1.25) при повороте координатной системы, которой задан углами Эйлера  $\alpha_1, \Theta, \alpha_2$  (рис. 1.2).

**1.22.** Показать, что матрица бесконечно малого поворота координат  $\widehat{a}$  может быть записана в виде  $\widehat{a} = \widehat{1} + \widehat{\varepsilon}$ , где  $\widehat{\varepsilon}$  — антисимметричная матрица ( $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ ). Выяснить геометрический смысл  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ .

**1.23.** Показать, что представление малого поворота вектором  $\delta\varphi$ , использованное в решении предыдущей задачи, возможно только с точностью до величин I порядка малости. В следующем порядке вектор результирующего поворота не равен сумме векторов отдельных поворотов, а соответствующие матрицы не коммутируют.

**Главные значения в инварианты симметричного тензора II ранга.** Большое практическое значение имеет вопрос о выборе такой системы координат, в которой некоторый тензор имеет наиболее простую структуру. Рассмотрим выбор такой системы для тензора II ранга.

Если вектор  $n$  удовлетворяет условию

$$T_{\alpha\beta}n_\beta = \lambda n_\alpha, \quad (1.26)$$

где  $\lambda$  — некоторый скаляр, то направление, определяемое вектором  $n$ , называется **главным направлением** тензора, а  $\lambda$  — его **главным значением**.

**Пример 1.1.** Показать, что действительный симметричный тензор II ранга имеет не менее трех взаимно перпендикулярных главных направлений и не более трех вещественных главных значений. Указать способ вычисления тех и других.

**Решение.** Пусть  $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$  и  $T^*_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ . Докажем действительность главных значений этого тензора. Не предполагая заранее, что вектор  $n_\alpha$  — действителен, запишем на основе (1.26) два равенства:

$$n^*_\alpha T_{\alpha\beta}n_\beta = \lambda n^*_\alpha n_\alpha, \quad n_\alpha T^*_{\alpha\beta}n^*_\beta = \lambda^* n_\alpha n^*_\alpha.$$

Ввиду равенства их левых частей равны и правые части, т. е.  $\lambda = \lambda^*$ .

Для вычисления возможных значений  $\lambda$  рассматриваем (1.26) как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных  $n_1, n_2, n_3$ . Для совместимости уравнений следует приравнять нулю определитель системы:

$$|T_{\alpha\beta} - \lambda\sigma_{\alpha\beta}| = 0. \quad (1.27)$$

Это — алгебраическое уравнение 3-й степени относительно  $\lambda$ , имеющее решением три вещественных корня  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ . В общем случае они

различны,  $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$ , хотя возможны и кратные корни  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$  либо  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$ .<sup>3</sup>

В случае различных корней, подставляя по очереди в систему (1.26) найденные значения  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $\lambda^{(3)}$  выражаем две проекции каждого из векторов  $n_\alpha^{(1)} \neq n_\alpha^{(2)} \neq n_\alpha^{(3)}$  через третью, которую можно определить, задав нормировку. Удобно считать векторы единичными:  $n_\alpha^{(1)} n_\alpha^{(1)} = 1$  и т. д. Все три проекции действительны вследствие действительности коэффициентов уравнения (1.26).

Для доказательства взаимной перпендикулярности  $\mathbf{n}^{(1)}$  и  $\mathbf{n}^{(2)}$  пишем на основе (1.26) два равенства

$$n_\alpha^{(2)} T_{\alpha\beta} n_\beta^{(1)} = \lambda^{(1)} (\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)}), \quad n_\alpha^{(1)} T_{\alpha\beta} n_\beta^{(2)} = \lambda^{(2)} (\mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)})$$

и, вычитая их почленно, находим

$$(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) (\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)}) = 0,$$

откуда для неравных главных значений,  $\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} \neq 0$ , получаем условие перпендикулярности  $\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} = 0$ .

В случае двух кратных корней ( $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$ ) из трех уравнений системы (1.26) только одно независимое, а два других — его следствия. Поэтому  $\mathbf{n}^{(1)}$  и  $\mathbf{n}^{(2)}$  определяются неоднозначно — в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{n}^{(3)}$ , можно выбрать любую пару взаимно перпендикулярных направлений. Наконец, при равенстве всех трех главных значений любое направление в пространстве является главным, поэтому любые три взаимно перпендикулярные оси можно принять за главные направления.

Важным свойством главных направлений является то, что тензор принимает диагональную форму,

$$\widehat{T}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

если оси координат совместить с главными направлениями. Это видно из записи уравнений (1.26) в главных осях, в которых  $\mathbf{n}^{(1)} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{n}^{(2)} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{n}^{(3)} = (0, 0, 1)$ . В этом случае имеем из (1.26)  $T'_{11} = \lambda^{(1)}$ ,  $T'_{21} = T'_{31} = 0$  и т. д.

<sup>3</sup>Индексы, написанные сверху в скобках, не являются тензорными значками! Из тензорной размерности правой и левой частей уравнения (1.27) следует, что величины  $\lambda$  — инварианты при вращениях системы координат.

## Задачи

**1.24.** Можно ли путем поворота системы координат в физическом трехмерном пространстве привести к диагональному виду произвольный действительный тензор II ранга ( $T_{\alpha\beta} \neq T_{\beta\alpha}$ )? Эрмитов тензор II ранга ( $T_{\alpha\beta}^h = T_{\beta\alpha}^{*h}$ )?

**1.25.** Записать действительный симметричный тензор II ранга  $S_{\alpha\beta}$  в произвольной системе координат через его главные значения  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $\lambda^{(3)}$  и орты главных направлений.

**1.26.** С помощью характеристического уравнения (1.27) составить инварианты относительно вращений из компонент произвольного тензора II ранга  $T_{\alpha\beta}$ .

**1.27.** Используя теорему о разложении определителя по элементам некоторой строки или столбца, найти компоненты обратного тензора  $T_{\alpha\beta}^{-1}$ , определение которого совпадает с определением обратной матрицы (1.11). Указать условие существования обратного тензора.

**1.28.** Доказать тождества:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\sigma} &= \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu} - \\
 &\quad - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\gamma\mu} \\ \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\gamma\nu} \\ \delta_{\alpha\sigma} & \delta_{\beta\sigma} & \delta_{\gamma\sigma} \end{vmatrix}; \\
 \text{б) } e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\nu\sigma} &= \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\beta\nu} & \delta_{\gamma\nu} \\ \delta_{\beta\sigma} & \delta_{\gamma\sigma} \end{vmatrix}; \\
 \text{в) } e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\sigma} &= 2\delta_{\gamma\sigma}; \\
 \text{г) } e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} &= 6.
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

С помощью соотношения б) доказать формулу векторной алгебры «бац минус цаб»:

$$A \times [B \times C] = B(A \cdot C) - C(A \cdot B).$$

**1.29.** Записать в инвариантной векторной форме;

- а)  $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\sigma\kappa}e_{\gamma\nu\epsilon}e_{\kappa\omega\epsilon}A_{\beta}A_{\sigma}B_{\nu}C_{\omega}$ ;  
 б)  $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\rho\sigma\kappa}e_{\gamma\nu\epsilon}e_{\kappa\omega\epsilon}A_{\sigma}A_{\beta}B_{\rho}B_{\alpha}C_{\omega}C_{\nu}$ .

**1.30.** Показать, что

$$T_{\alpha\beta}A_{\alpha}B_{\beta} - T_{\alpha\beta}A_{\beta}B_{\alpha} = 2C \cdot (A \times B),$$

где  $T_{\alpha\beta}$  — произвольный тензор II ранга,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы,  $\mathbf{C}$  — вектор, дуальный антисимметричной части  $T_{\alpha\beta}$ .

**1.31.** Представить произведение  $(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))(\mathbf{A}' \cdot (\mathbf{B}' \times \mathbf{C}'))$ . В виде суммы членов, содержащих только скалярные произведения вектора.

УКАЗАНИЕ. Применить теорему об умножении определителей или воспользоваться псевдотензором  $e_{\alpha\beta\gamma}$ .

**1.32.** Показать, что единственным вектором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, является нулевой вектор; что всякий тензор II ранга, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален  $\delta_{\alpha\beta}$ ; тензор III ранга —  $e_{\alpha\beta\gamma}$ ; тензор четвертого ранга —  $(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})$ .

**1.33.** Пусть  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, все направления которого в пространстве равновероятны. Найти средние значения его компонент и их произведений:  $n_\alpha$ ,  $n_\alpha n_\beta$ ,  $n_\alpha n_\beta n_\gamma$ ,  $n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\nu$ , пользуясь трансформационными свойствами искомых величин, а не прямым вычислением соответствующих интегралов.

**1.34.** Найти усредненные по всем направлениям значения следующих выражений:  $(\mathbf{an})^2$ ,  $(\mathbf{an})(\mathbf{bn})$ ,  $(\mathbf{an})\mathbf{n}$ ,  $(\mathbf{a} \times \mathbf{n})^2$ ,  $(\mathbf{a} \times \mathbf{n})(\mathbf{b} \times \mathbf{n})$ ,  $(\mathbf{an})(\mathbf{bn})(\mathbf{cn})(\mathbf{dn})$ , если  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, все направления которого равновероятны,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  — постоянные векторы.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.

**1.35.** Составить все возможные независимые инварианты из полярных векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}'$  и псевдовектора  $\mathbf{l}$ .

**1.36.** Какие независимые псевдоскаляры можно составить из двух полярных векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}'$  и одного псевдовектора  $\mathbf{l}$ ? Из трех полярных векторов  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{n}_3$ ?

**Ковариантные и контравариантные компоненты.** Во многих проблемах физики необходимо использовать неортогональные и криволинейные системы координат, когда зависимость между старыми и новыми координатами отличается от линейной связи (1.2), а переход к новым координатам не сводится к такой простой и наглядной операции, как поворот осей. Одна из главных областей применения такого математического аппарата — теория относительности, специальная и особенно общая.

В заключение настоящего параграфа мы дадим определение тензоров относительно общих преобразований координат и рассмотрим их основные свойства в трехмерном евклидовом пространстве. Это целесообразно

потому, что смысл многих понятий и соотношений в трехмерном пространстве оказывается более наглядным и прозрачным, чем в четырехмерном пространстве — времени теории относительности. Мы начнем рассмотрение этого круга вопросов со случая, промежуточного между декартовыми прямоугольными и общими координатами, когда координатные оси системы отсчета остаются прямолинейными, но становятся неортогональными (косоугольная декартова, или **аффинная**, система координат).

**Пример 1.2.** Пусть в качестве базисных ортов в трехмерном евклидовом пространстве выбрана тройка  $e_1, e_2, e_3$  некопланарных и неортогональных единичных векторов. Координатными линиями являются три системы прямых линий, проходящих через каждую точку пространства и параллельных базисным ортам. Построить **взаимный базис**  $e^1, e^2, e^3$ , который по определению связан с исходным базисом соотношениями

$$e^\alpha = (e_\beta \times e_\gamma) / \underline{V}, \quad (1.30)$$

Будут ли векторы взаимного базиса единичными?

Разложить произвольный вектор  $A$  (в том числе и радиус-вектор  $r$ ) по векторам  $e_\alpha$  и  $e^\beta$  исходного и взаимного базисов. Указать геометрический смысл его компонент в том и другом случаях (в первом случае они называются **контравариантными** и обозначаются верхними индексами  $A^1, A^2, A^3$ ; во втором случае — **ковариантными** и обозначаются нижними индексами  $A_1, A_2, A_3$ ).

**Решение.** Согласно (1.30),  $e^1$  должен быть перпендикулярен  $e_2$  и  $e_3$ . Ищем его в виде  $e^1 = k e_2 \times e_3$  и из условия нормировки  $e^1 e_1 = 1$  находим

$$k = \frac{1}{\underline{V}} = \frac{1}{e_1(e_2 \times e_3)},$$

где  $k^{-1} = \underline{V}$  — объем параллелепипеда, построенного на векторах исходного базиса.  $\underline{V} > 0$ , если выбрана правая система координат. Таким образом,

$$e^\alpha = (e_\beta \times e_\gamma) / \underline{V}, \quad (1.31)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  образуют циклическую перестановку. Радиус-вектор  $r$  и любой другой вектор разлагаются по базисным векторам обычным образом:

$$r = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3 = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3. \quad (1.32)$$

Умножая первое равенство скалярно на  $e_\alpha$ , найдем

$$x_\alpha = e \cdot_\alpha r \quad (1.33)$$

таким образом, геометрически ковариантные компоненты вектора суть результат обычного проектирования с помощью *перпендикуляров*, опущенных из конца вектора на координатные оси. При этом контравариантные базисные векторы, на которые умножаются ковариантные компоненты вектора, отнюдь не совпадают по направлению с координатными осями (рис. 1.3) и не имеют единичной длины. Например, если вектор  $e_3$  ортогонален  $e_1$  и  $e_2$ , а угол между последними равен  $\phi$ , то  $|e^1| = |e^2| = 1/\sin \phi$ , а длина гипотенузы  $OB = |x_1 e^1| = x_1/\sin \phi > x_1$ , но длина катета  $OC = x_1$ . Контравариантные компоненты, как следует из (1.33) и рис. 1.3, получаются путем проектирования вектора на координатные оси отрезками, *параллельными осям*. Для них справедливо представление, аналогичное (1.33):

$$x^\alpha = e^\alpha \cdot r. \quad (1.33')$$

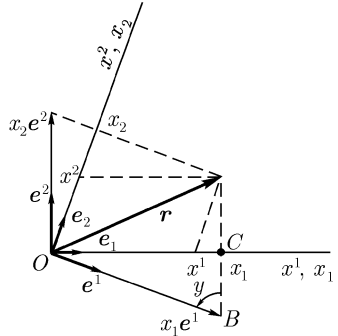


Рис. 1.3

**Пример 1.3.** Определим девятикомпонентные величины

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta, \quad g^{\alpha\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta, \quad (1.34)$$

где  $e_\alpha$ ,  $e^\alpha$  — базисные векторы исходного и взаимного неортогональных базисов, введенные в примере 1.2.  $g_{\alpha\beta}$  и  $g^{\alpha\beta}$  называются ковариантными и контравариантными компонентами **метрического тензора**.

Доказать следующие соотношения, связывающие ковариантные и контравариантные компоненты произвольного вектора (правила подъема и опускания индекса):

$$\text{а) } A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta; \quad \text{б) } A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta; \quad \text{в) } g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = g^\gamma_\alpha \equiv \delta^\gamma_\alpha. \quad (1.35)$$

Здесь  $\delta^\gamma_\alpha$  — символ Кронекера.

Вычислить определители ковариантного и контравариантного метрического тензора и выразить их через объемы  $\underline{V}$  и  $\overline{V}$  параллелепипедов, построенных на векторах исходного и взаимного базисов.

**Решение.** Исходим из разложения (1.32):

$$A = A_\beta e^\beta = A^\beta e_\beta.$$

Умножив его скалярно на  $e_\alpha$  и пользуясь определениями взаимного базиса (1.31) и метрического тензора (1.34), получим (1.35а); умножив это

разложение скалярно на  $e^\alpha$ , получим (1.35б); подставив (1.35б) в (1.35а), находим (1.35в).

Обозначив  $g = |g_{\alpha\beta}|$  и пользуясь определением (1.34), а также формулой (1.29а), находим

$$\begin{aligned} g &= \begin{vmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2e_2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3e_3 \end{vmatrix} = (e_1e_1)(e_2e_2)(e_3e_3) + (e_2e_1)(e_3e_2)(e_1e_3) + \\ &+ (e_3e_1)(e_1e_2)(e_2e_3) - (e_1e_2)(e_2e_2)(e_3e_1) - \\ &- (e_2e_3)(e_3e_1)(e_1e_1) - (e_3e_3)(e_1e_2)(e_2e_1) = \\ &= e_{\alpha\beta\gamma}(e_1)_\alpha(e_2)_\beta(e_3)_\gamma e_{\mu\nu\sigma}(e_1)_\mu(e_2)_\nu(e_3)_\sigma = [e_1(e_2 \times e_3)]^2 = \underline{V}^2 > 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем  $|g^{\alpha\beta}| = \overline{V}^2$ . Из (1.35в) следует  $|g^{\alpha\beta}|g = 1$ , поэтому  $|g^{\alpha\beta}| = g^{-1} = \underline{V}^{-2} > 0$  и  $\overline{V} = \underline{V}^{-1}$ .

## Задачи

**1.37.** Пусть при переходе к другой косоугольной прямолинейной системе координат базисные векторы  $e_\alpha$  задающие направления координатных осей, преобразуются по закону

$$e'_\alpha = a_\alpha{}^\beta e_\beta, \quad (1.36)$$

где  $a_\alpha{}^\beta$  — матрица преобразования.<sup>4</sup>

- а) Выразить ее элемента через скалярные произведения базисных векторов исходной и преобразованной систем;
- б) построить матрицу обратного преобразования;
- в) показать, что эти же матрицы осуществляют преобразования векторов взаимного базиса;
- г) найти правила преобразования ковариантных и контравариантных компонент произвольного вектора;
- д) найти правила преобразования ковариантных и контравариантных компонент метрического тензора.

**1.38.** Указать закон преобразования векторов исходного и взаимного базисов при отражении системы координат.

**1.39.** Выразить скалярное произведение двух векторов  $A \cdot B$  в трех различных формах: через ковариантные и контравариантные компоненты, а также через те и другие. Доказать его инвариантность относительно преобразования (1.36) системы координат.

<sup>4</sup>Рассматриваемое преобразование не обязательно сводится к повороту косоугольной системы как целого. Оно может изменить углы между осями и масштабы координат.



Выразить в разных формах квадрат расстояния  $dl^2$  между двумя близкими точками.

**1.40.** Записать векторное произведение двух векторов  $C = A \times B$  через ковариантные и контравариантные компоненты векторов-сомножителей.

**1.41.** Записать косинус угла между векторами  $A$  и  $B$  через их ковариантные и контравариантные компоненты.

**Тензоры в криволинейных неортогональных системах координат.** Перейдем к рассмотрению произвольных преобразований, когда переход совершается от декартовой к некоторой криволинейной и, вообще говоря, неортогональной системе координат [Борисенко и Тарапов (1966), раздел 2.8] или между криволинейными неортогональными системами. Связь между координатами  $x^\alpha$  и  $x'^\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) двух координатных систем задается некоторыми соотношениями общего вида

$$x^\alpha = f^\alpha(x'^1, x'^2, x'^3) \quad (1.37)$$

(номера координат теперь указываем верхними индексами). Аффинному преобразованию (1.36) соответствует линейная однородная функция  $f^\alpha(x'^1, x'^2, x'^3)$  с постоянными коэффициентами. Повороту ортогональной прямолинейной системы координат отвечает ортогональная матрица коэффициентов с единичным определителем.

Чтобы можно было разрешить (1.37) относительно  $x'^\beta$  и найти обратное преобразование

$$x'^\beta = \varphi^\beta(x^1, x^2, x^3),$$

требуется отличие от нуля функционального определителя

$$J = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \right| \neq 0, \quad (1.38)$$

что в дальнейшем и будет предполагаться. Дифференциалы координат преобразуются по правилу

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} dx'^\beta, \quad (1.39)$$

где коэффициенты преобразования  $\partial x^\alpha / \partial x'^\beta$  в общем случае становятся функциями координат. Связь между дифференциалами осталась, как и в случае аффинных преобразований, линейной, тогда как связь между самими координатами таковой, вообще говоря, не является.

Если (1.37) описывает переход от ортогональной декартовой системы координат  $x^\alpha$  к произвольной системе  $q^\beta$  (мы для ясности в дальнейшем будем обозначать криволинейные координаты через  $q$ ), то квадрат расстояния между близкими точками с помощью (1.0) и (1.39) запишется в виде

$$dl^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu, \quad (1.40)$$

где величины

$$g_{\mu\nu}(q) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu} \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.41)$$

$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , называются **ковариантными компонентами метрического тензора**. Его **контравариантные компоненты**  $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$  определяются условиями

$$g^{\alpha\nu} g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha, \quad (1.42)$$

означающими, что тензоры  $g^{\mu\nu}$  и  $g_{\mu\nu}$  взаимно обратны. Поскольку коэффициенты преобразования (1.39) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\alpha, \quad (1.43)$$

то контравариантные компоненты метрического тензора можно записать в виде<sup>5</sup>

$$g^{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^\kappa} \delta^{\sigma\kappa}. \quad (1.44)$$

Последнее соотношение, как и (1.41), можно рассматривать как правило преобразования метрического тензора для декартовых координат ( $\delta^{\sigma\kappa}$ ) к произвольным криволинейным координатам  $q^\alpha$ . Нетрудно установить, что те же правила действуют при преобразовании метрического тензора из одной криволинейной системы  $q^\alpha$  в другую  $q'^\beta$ :

$$g'^{\kappa\sigma} = \frac{\partial q'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial q'^\sigma}{\partial x^\nu} \delta^{\mu\nu} = \frac{\partial q'^\kappa}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q'^\sigma}{\partial q^\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (1.45)$$

где  $g^{\alpha\beta}$  определен согласно (1.44).

Нетрудно убедиться, что записанные выше соотношения во многом повторяют формулы, которые были получены при рассмотрении косоугольной

<sup>5</sup>Тензоры  $\delta_{\mu\nu}$ ,  $\delta^{\mu\nu}$ ,  $\delta_\nu^\mu$  относятся к прямоугольной декартовой системе координат, и для них контравариантные и ковариантные компоненты совпадают, а расположение значков безразлично.

(аффинной) системы координат, представляя собой их некоторые обобщения. Например, домножая обе части (1.39) на декартовы орты  $e_\alpha^{(D)}$  и переобозначая  $x'^\beta$  через  $q^\beta$ , получим приращение радиуса-вектора

$$dr = e_\alpha^{(D)} dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} e_\alpha^{(D)} dq^\beta = e_\beta dq^\beta,$$

откуда следует, что базисные векторы  $e_\beta$  (в общем случае не единичные) криволинейной системы можно записать в виде

$$e_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} e_\alpha^{(D)}. \quad (1.46)$$

В правую часть последнего равенства входят ортогональные единичные декартовы орты. Связь между базисными векторами криволинейных систем координат  $q'^\mu$  и  $q^\beta$ , как следует из (1.46), имеет тот же вид, что и (1.46):

$$e'_\beta = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^\beta} e_\alpha. \quad (1.47)$$

Определим, далее, векторы взаимного базиса  $e^\beta$  криволинейной системы. Из (1.46) и условий (1.30) имеем

$$e^\alpha \cdot e_\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^\beta} e^\alpha \cdot e_\mu^{(D)} = \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (1.48)$$

откуда следует

$$e^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\nu} e_\nu^{(D)} \quad (1.49)$$

(мы пользуемся равноправием нижних и верхних значков для декартовых ортов). Наконец, пользуясь (1.41) и (1.44), убеждаемся, что для криволинейных координат остаются в силе соотношения (1.34):

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta, \quad g^{\alpha\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta, \quad g^\beta_\alpha = e_\alpha \cdot e^\beta = \delta^\beta_\alpha \quad (1.50)$$

и правила подъема и опускания индексов (1.35).

Теперь дадим определение тензора относительно общих преобразований координат.

**Тензор II ранга** в трехмерном пространстве — это девятикомпонентная величина, контравариантные компоненты которого преобразуются как произведение дифференциалов координат, т. е. по правилу

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^\mu} \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\nu} T'^{\mu\nu} \quad \text{либо} \quad T'^{\mu\nu} = \frac{\partial q'^\mu}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (1.51)$$

Это определение непосредственно обобщается на тензор любого ранга. Так, скаляр  $S$  не преобразуется, а ковариантные компоненты тензора  $I$  ранга (вектора) преобразуются по правилу

$$A_\alpha = \frac{\partial q'^\beta}{\partial q^\alpha} A_\beta. \quad (1.52)$$

Принципиальное отличие данного выше определения тензора от предыдущих (для случаев поворота и аффинного преобразования) состоит в том, что теперь коэффициенты преобразования зависят от точки. Это означает, что определение тензора носит локальный характер. В частности, произведения компонент векторов, взятых в разных точках  $q^\alpha \neq p^\alpha$ , т. е.  $A^\alpha(q)B^\beta(p)$ , не образуют тензора. Совокупность произвольных криволинейных координат  $q^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , в отличие от декартовых не образует вектора, так как координаты не подчиняются правилу преобразования (1.51). Эти особенности наиболее существенно проявляются в операциях дифференцирования и интегрирования тензоров, которые рассматриваются в разделе 1.2.

Ковариантные компоненты тензора любого ранга получаются из контравариантных с помощью метрического тензора согласно (1.35). Смешанный тензор  $T_\alpha^\beta$  в общем случае зависит от того, какое место — первое или второе — занимают верхний и нижний значки, т. е.  $T_\alpha^\beta \neq T^\beta_\alpha$ . Операция свертки, уменьшающая ранг тензора на два, определяется как суммирование по одному верхнему и одному нижнему значку, например

$$A_\alpha B^\alpha = A'_\beta B'^\beta = \text{inv}, \quad T_{\alpha\beta}^\beta = C_\alpha \quad (1.53)$$

— ковариантный вектор, и т. д.

## Задачи

**1.42.** Выразить компоненты метрического тензора через компоненты ортогональных декартовых ортов  $e_\alpha^{(D)} = e_{(D)\alpha}^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , которые заданы в некоторой криволинейной системе координат.

**1.43.** Показать, что функциональный определитель (1.38) выражается через определитель метрического тензора  $g = |g_{\mu\nu}|$ :  $J = \sqrt{|g|}$ .

УКАЗАНИЕ. Исходя из равенства (1.42), выразить определитель  $g$  через определители матриц, стоящих в правой части равенства.

**1.44.** Записать квадрат длины вектора  $A^2$  и косинус угла между двумя векторами в произвольной криволинейной системе координат.

**1.45.** Преобразовать единичный антисимметричный тензор  $e^{\alpha\beta\gamma}$  в криволинейную систему координат.

**1.46.** Известен метрический тензор  $g_{\alpha\beta}$ , определяющий квадрат малого элемента длины в криволинейных неортогональных координатах согласно формулам (1.40). Через каждую точку пространства можно провести три криволинейные координатные линии, вдоль каждой из которых изменяется только одна координата  $q^1$ ,  $q^2$  или  $q^3$ , а остальные две остаются постоянными.

а) Найти связь между элементом длины координатной линии и дифференциалом соответствующей координаты.

б) Указать три базисных вектора, касательных к координатным кривым в заданной точке.

в) Найти косинусы углов между координатными кривыми в данной точке.

г) Указать, какими свойствами должен обладать метрический тензор, чтобы криволинейная система была ортогональной.

**1.47.** Записать ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора для сферической и цилиндрической систем координат (см. рисунок в ответе к задаче 1.18). Записать также векторы ковариантного и контравариантного базисов, выразив их через базисные орты, рассмотренные в задаче 1.18.

**1.48.** Показать, что элемент объема в криволинейных координатах имеет вид

$$dV = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3, \quad (1.54)$$

где  $g$  — определитель метрического тензора. Вычислить элемент объема в сферических и цилиндрических координатах.

УКАЗАНИЕ. Искомый элемент объема представляет собой объем косоугольного параллелепипеда, построенного на элементарных длинах  $dl^1$ ,  $dl^2$ ,  $dl^3$  криволинейных осей координат. Для его вычисления можно использовать результаты задач 1.40, 1.46.

Рекомендуемая литература: Борисенко и Тарапов (1966), [Курбатова и Филиппов (1998)], [Арфкен (1970)], [Кочин (1951)], [Рашевский (1953)], [Ли (1965)], [Мэттьюз и Уокер (1972)].

См. также [Угаров (1977), приложение I].

## 1.2. Векторный и тензорный анализ

Скалярные или векторные функции, изображающие распределение различных физических величин в трехмерном пространстве, подчас называют

полями соответствующих величин. Так, можно говорить о поле температур  $T(x, y, z)$  или давлений  $p(x, y, z)$  в атмосфере, поле скоростей движущейся жидкости или газа  $\mathbf{u}(x, y, z)$ , электромагнитном векторном поле и т. д. Производные и интегралы от таких скалярных и векторных функций обладают некоторыми общими математическими свойствами, очень важными для физических приложений. С этими свойствами нужно познакомиться и усвоить их заранее. Только в этом случае можно будет успешно изучить и понять до конца такие разделы физики, как теория электромагнитных явлений, механика жидкостей, газов и твердых тел, квантовая физика и квантовая теория поля.

**Градиент и производная по направлению. Векторные линии.** С понятием градиента скалярной функции мы знакомимся при изучении свойств потенциальных сил в классической механике. Пусть существует дифференцируемая функция  $U(x, y, z)$ , такая, что ее частные производные равны компонентам вектора  $\mathbf{F}(x, y, z)$ , который в этом случае называется **потенциальным**:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = -\nabla U(x, y, z), \quad (1.55)$$

где

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (1.56)$$

— векторный оператор Гамильтона (набла). Вектор

$$\text{grad } U(x, y, z) \equiv \nabla U(x, y, z) = \mathbf{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1.57)$$

называется **градиентом** скалярной функции  $U(x, y, z)$ . Необходимые и достаточные условия представления вектора в виде градиента скалярной функции имеют вид равенств

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \quad (1.58)$$

Они следуют из равенства перекрестных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \text{и т. д.}$$

Мы используем пока только декартовы координаты. Обобщение на криволинейные неортогональные координаты будет сделано в последней части этого раздела (см. также задачи 1.50 и следующие).

Важно понять, что градиент направлен всегда в сторону возрастания  $U$  по нормали к поверхности постоянного значения скалярного поля  $U(x, y, z) = \text{const}$ . Это следует из того, что при дифференцировании последнего равенства получим  $dr \cdot \nabla U = 0$ . Поскольку здесь  $dr$  направлен по касательной к поверхности  $U = \text{const}$ , градиент перпендикулярен этой поверхности.

**Пример 1.4.** Показать, что производная от скалярной функции по направлению, определяемому единичным вектором  $l$ , равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad}_l U \equiv (l \cdot \nabla)U. \quad (1.59)$$

**Решение.** Обозначим производную вдоль заданного направления  $l$  через  $\partial U / \partial l$ . При смещении из точки с радиусом-вектором  $r$  на расстояние  $s$  вдоль направления  $l$  функция примет значение  $U(x + l_x s, y + l_y s, z + l_z s)$ . Производная в заданном направлении — это производная по  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial l} &= \frac{\partial}{\partial s} U(x + l_x s, y + l_y s, z + l_z s) \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} l_x + \frac{\partial U}{\partial y} l_y + \frac{\partial U}{\partial z} l_z = (l \cdot \nabla)U(r). \end{aligned}$$

■

Выражение (1.59) имеет смысл и в применении к произвольному вектору  $A(x, y, z)$ : величина  $(l \cdot \nabla)A(x, y, z)$  представляет собой **производную от вектора  $A$  в направлении  $l$** . Это следует из того, что оператор  $(l \cdot \nabla)$  должен быть применен к каждой проекции  $A$  и даст соответствующую производную, а их совокупность будет иметь смысл производной от всего вектора в заданном направлении.

Наглядное представление о структуре векторного поля  $A$  дают **векторные линии** — это такие линии, касательные к которым в каждой точке показывают направление вектора  $A$  в этой точке. Нетрудно записать систему уравнений, из которой можно найти векторные линии заданного поля  $A(x, y, z)$ . Условие параллельности малого элемента  $dl = (dx, dy, dz)$  векторной линии и вектора  $A$  можно записать в виде  $A \times dl = 0$ . Записав это векторное равенство в проекциях на соответствующие оси, получим дифференциальные уравнения для двух семейств поверхностей, линии пересечения которых и представляют собой искомые векторные линии. Например, в декартовых координатах будем иметь

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}. \quad (1.60)$$

Векторные линии любого потенциального вектора перпендикулярны поверхностям равного потенциала  $U(x, y, z) = \text{const}$ . Это следует из свойств градиента скалярной функции.

Важным свойством обладает контурный интеграл от скалярного произведения потенциального вектора на векторный элемент длины контура:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \quad (1.61)$$

где вектор  $d\mathbf{s}$  имеет составляющие  $dx, dy, dz$ , т. е. дифференциалы координат не независимы, а представляют собой приращения **вдоль контура**. Такими интегралами выражается работа силы  $\mathbf{F}$  над материальной точкой, которая движется по заданной траектории от  $A$  до  $B$ , и многие другие физические величины. Если вектор — потенциальный, то

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz = -dU \quad (1.62)$$

— полный дифференциал функции  $U(x, y, z)$ . Вычисляя интеграл, получаем

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B dU = U_A - U_B, \quad (1.63)$$

где  $dU$  — приращение функции на малом отрезке  $d\mathbf{s}$ ,  $\int_A^B dU$  — полное приращение на пути  $AB$ . В этом случае интеграл вдоль контура не зависит от пути, а только от начальной и конечной точек интегрирования (рис. 1.4).

Интегрируя вдоль замкнутого контура (рис. 1.5), будем иметь:

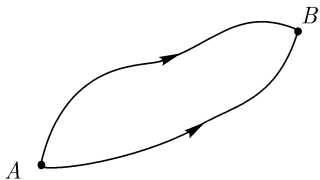


Рис. 1.4

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U_A - U_B, \quad \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U_B - U_A,$$

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (1.64)$$

Интеграл по замкнутому контуру от  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  называется **циркуляцией вектора  $\mathbf{F}$**  вдоль контура. Циркуляция **потенциального вектора** вдоль любого



замкнутого контура равна нулю (но произвольный вектор таким свойством не обладает!).

Важно отметить, однако, что условие представления вектора в форме (1.55) является необходимым, но недостаточным для справедливости равенств (1.63), (1.64). Требуется еще, чтобы потенциальная функция  $U(\mathbf{r})$  была однозначной функцией точки. В противном случае, например, после обхода замкнутого контура и возвращения в точку  $A$  потенциал  $U$  может принять другое значение, и равенство (1.64) нарушится.

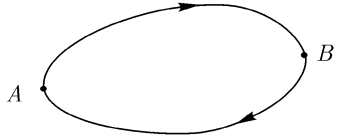


Рис. 1.5

## Задачи

**1.49.** Показать, что оператор Гамильтона (1.56) при повороте декартовой системы координат преобразуется по правилу (1.2) преобразования вектора.

**1.50.** Найти потенциальную энергию, отвечающую силе  $F_x(x, y) = x + y$ ,  $F_y(x, y) = x - y^2$ . Вычислить работу  $R$  этой силы между точками  $(0, 0)$  и  $(a, b)$ .

**1.51.** Показать, что оператор Гамильтона  $\nabla$  в цилиндрической и сферической системах координат выражается соответственно в виде

$$\text{а) } \nabla = e_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + e_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + e_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad (1.65)$$

$$\text{б) } \nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.66)$$

Для этого рассмотреть элементарные длины в направлении соответствующих координатных ортов и воспользоваться формулой (1.59), связывающей градиент с производной по направлению.

**1.52.** Воспользовавшись декартовыми, сферическими и цилиндрическими координатами (см. (1.56), (1.65), (1.66)), вычислить  $\text{grad}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})$ ,  $(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\mathbf{l}$  — постоянный вектор.

**1.53.** Показать, что  $\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

**1.54.** Записать систему уравнений, определяющих векторные линии, соответственно в цилиндрических и сферических координатах.

1.55. Вычислить

$$\text{grad} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad \mathbf{p} = \text{const.}$$

1.56. Пользуясь сферическими координатами, построить семейство линий, касательных к вектору

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}, \quad \mathbf{p} = \text{const.}$$

1.57. Записать циклические компоненты градиента в сферических координатах. Определение циклических компонент дано в условии задачи 1.17.

**Дивергенция и ротор. Интегральные теоремы.** Рассмотрим теперь действие векторного оператора  $\nabla$  на произвольный вектор  $\mathbf{A}$ . Как мы знаем, из двух векторов можно составить произведения двух типов: скалярное

$$\text{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (1.67)$$

и векторное

$$\text{rot} \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = e_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + e_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + e_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (1.68)$$

Обе эти величины играют важнейшую роль в векторном анализе и носят название **дивергенции** (скаляр!) и **ротора** (вектор!). В левых частях равенств приведены их буквенные обозначения. В правых частях указаны их явные выражения, которые имеют приведенный вид **только в декартовых координатах**. Чтобы лучше осознать их математический и физический смысл, рассмотрим прежде всего другие определения этих важных величин, менее формальные и более наглядные, хотя и несколько более сложные. Но последний недостаток искупается тем, что определения, о которых пойдет речь, в отличие от (1.67), (1.68), не зависят от выбора системы координат. Начнем с дивергенции.

Выберем точку  $M$ , в которой мы хотим определить дивергенцию векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Окружим эту точку замкнутой гладкой поверхностью  $S$ , внутри которой заключен некоторый объем  $\Delta V$ , и определим в каждой

точке поверхности внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$ . Векторным элементом поверхности  $dS$  будем называть произведение  $\mathbf{n} dS$ . Интеграл по замкнутой поверхности  $\oint_S \mathbf{A} \cdot dS$  дает поток вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность  $S$ . Дадим теперь определение дивергенции (по-русски — расходимости), отличное от (1.67):

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot dS. \quad (1.69)$$

Здесь предполагается, что объем  $\Delta V$  стягивается в точку  $M$ ; кружок на знаке интеграла означает замкнутую поверхность.

**Пример 1.5.** Убедиться в том, что определения (1.67) и (1.69) при использовании декартовых координат эквивалентны. Для этого выбрать объем  $\Delta V = dV = dx dy dz$  в виде малого прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и вычислить предел (1.69).

**Решение.** Воспользовавшись малостью граней параллелепипеда, запишем приближенное выражение для поверхностного интеграла:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot dS &\approx [A_x(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) - A_x(x, \bar{y}, \bar{z})] dy dz + \\ &+ [A_y(\bar{x}, y + dy, \bar{z}) - A_y(\bar{x}, y, \bar{z})] dx dz + \\ &+ [A_z(\bar{x}, \bar{y}, z + dz) - A_z(\bar{x}, \bar{y}, z)] dx dy \approx \\ &\approx \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

При оценке интегралов по шести отдельным граням использована теорема о среднем, величины  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  — это значения координат в некоторой точке соответствующей грани. Учтено также, что нормаль имеет противоположные направления на противоположных гранях, а при стягивании объема в точку  $M$  все координаты принимают значения, соответствующие этой точке. Используя последний результат, убеждаемся, что определение дивергенции (1.69) при использовании декартовых координат приводит к формуле (1.67). ■

Таким образом, дивергенция в некоторой точке отлична от нуля, если существует ненулевой поток вектора через малую замкнутую поверхность, окружающую данную точку. Внутри поверхности должен существовать источник векторного поля, создающий поток. Поэтому дивергенция характеризует плотность источников поля.

Примененный выше прием вычисления интеграла по малой поверхности можно использовать для получения явных выражений дивергенции в наиболее употребительных сферических и цилиндрических, а также и в других координатах. Следует выбирать форму объема каждый раз таким образом, чтобы на каждой из его боковых поверхностей оставалась постоянной одна из координат.

**Пример 1.6.** Основываясь на определении дивергенции (1.67), вывести соотношение, связывающее интеграл от  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  по некоторому объему с потоком вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем.

**Решение.** Выберем произвольный конечный объем  $V$ , ограниченный гладкой замкнутой поверхностью  $S$ . Разобьем его на малые ячейки  $\Delta V_i$ , каждая из которых ограничена соответствующей поверхностью  $\Delta S_i$ . У ячеек, примыкающих к внешней поверхности  $S$ , часть ограничивающих их поверхностей будет совпадать с  $S$ . Все остальные участки поверхностей  $S_i$  будут общими для двух соседних ячеек. Пользуясь малостью каждой из ячеек, воспользуемся соотношением (1.69), придав ему приближенную форму

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_i \Delta V_i \approx \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_i. \quad (1.70)$$

Просуммируем теперь левую и правую части последнего приближенного равенства по  $i$  и перейдем к пределу, устремляя объем каждой ячейки к нулю, а их число — к бесконечности. Левая часть равенства перейдет при этом в интеграл по полному объему  $V$  от дивергенции  $\mathbf{A}$ :  $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$ . В правой части равенства интегралы по внутренним участкам поверхностей  $S_i$  взаимно сократятся, так как внешние нормали для двух соседних ячеек имеют прямо противоположные направления. Останется лишь интеграл по внешней поверхности  $S$ , которая ограничивает полный объем  $V$ . В итоге мы получим точное интегральное соотношение

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.71)$$

которое называется в русскоязычной литературе **теоремой Остроградско-го–Гаусса** (в западных изданиях фамилия Остроградского опускается). ■

Теорема Остроградского–Гаусса применима к любому тензору ранга  $s \geq 1$ , например:

$$\int_V \frac{\partial T_{\alpha\beta\mu}}{\partial x_\mu} dV = \oint_S T_{\alpha\beta\mu} dS_\mu \quad (1.72)$$

(доказательство см. в задаче 1.70).

Ротор (вихрь) векторного поля допускает определение, аналогичное определению (1.69) дивергенции. Задаем в точке  $M$  некоторое направление единичным вектором  $\mathbf{n}$ . Построим маленькую плоскую площадку  $\Delta S$ , содержащую точку  $M$  и перпендикулярную  $\mathbf{n}$ , и определим направление обхода по ограничивающему эту площадку контуру  $l$ , согласованное с направлением  $\mathbf{n}$  правилом правого винта. Проекция ротора на направление  $\mathbf{n}$  в точке  $M$  определяется следующим образом:

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.73)$$

где интеграл представляет собой циркуляцию вектора  $\mathbf{A}$  вдоль замкнутого контура  $l$ .

**Пример 1.7.** Убедитесь в том, что определения ротора (1.68) и (1.73) в случае декартовых координат эквивалентны. Для этого вычислить проекции ротора на декартовы оси, воспользовавшись (1.73) и выбирая площадку в виде прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям.

**Решение.** Направим  $\mathbf{n}$  вдоль оси  $Oz$  и выберем прямоугольную площадку  $\Delta S = dS = dx dy$ . Используя, как и при вычислении выше интеграла по поверхности, теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &\approx [A_y(x + dx, \bar{y}, z) - A_y(x, \bar{y}, z)] dy + \\ &+ [A_x(\bar{x}, y, z) - A_x(\bar{x}, y + dy, z)] dx \approx \\ &\approx \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS. \end{aligned}$$

Подставив этот результат в (1.73) и перейдя к пределу, получим точное выражение для  $\text{rot}_z \mathbf{A}$  в декартовых координатах, совпадающее с (1.68). Аналогичным образом можно найти другие проекции вихря. Вихрь будет отличен от нуля, если линии вектора  $\mathbf{A}$  закручиваются — имеют замкнутую или спиралеобразную форму. ■

**Пример 1.8.** С помощью определения вихря (1.73) вывести интегральное соотношение, связывающее циркуляцию произвольного вектора вдоль замкнутого контура с потоком вихря этого вектора через незамкнутую поверхность, опирающуюся на контур.

**Решение.** Определим произвольную трехмерную незамкнутую поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $l$ , и в каждой точке поверхности нормаль  $n$ . Разделим поверхность на малые части  $\Delta S_i$ , каждая из которых ограничена контуром  $l_i$ . Для каждой такой площадки можно записать на основе (1.73) приближенное соотношение

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} \Delta S_i \approx \oint_{l_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i. \quad (1.74)$$

Суммируя обе части приближенного равенства по  $i$  и переходя к пределу бесконечно малых площадок, получаем точное равенство (теорему Стокса):

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.75)$$

В правой части остается интеграл по внешнему контуру, ограничивающему поверхность  $S$ . Все интегралы по внутренним контурам сокращаются. Теорема Стокса связывает интеграл от потока ротора через поверхность с циркуляцией вектора вдоль контура, ограничивающего эту поверхность.

**Соленоидальные и потенциальные (безвихревые) векторы.** Пусть векторное поле  $\mathbf{H}(r)$  во всем пространстве удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.76)$$

(вектор  $\mathbf{H}$  в этом случае называется **соленоидальным**). Таким свойством обладает, например, магнитное поле. Можно доказать (мы этого делать не будем), что условие (1.76) необходимо и достаточно для того, чтобы вектор  $\mathbf{H}$  можно было представить в виде вихря другого вектора  $\mathbf{A}(r)$ :

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.77)$$

Легко убедиться с использованием правил векторного дифференцирования, что условие (1.76) выполняется при любом  $\mathbf{A}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] = [\nabla \times \nabla] \cdot \mathbf{A} = 0.$$

**Потенциальным вектором**, как уже отмечалось выше, называется вектор, представимый в форме градиента некоторой скалярной функции:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r}) \equiv -\nabla U(\mathbf{r}). \quad (1.78)$$

Необходимыми и достаточными условиями потенциальности вектора являются равенства вида (1.58), которые в векторной форме дают

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (1.79)$$

Используя определение потенциального вектора (1.78) и выражая операцию  $\operatorname{rot}$  через оператор  $\nabla$ , убеждаемся, что равенство (1.79) выполняется тождественно для любой функции  $U(\mathbf{r})$ , имеющей вторые производные.

**Дифференциальные операции второго порядка.** Они возникают, если оператор  $\nabla$  применяется к выражениям  $\nabla U$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,  $\nabla \times \mathbf{A}$ , уже содержащим этот оператор. Пользуясь правилами векторной алгебры, находим

$$\nabla \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = (\nabla \cdot \nabla)U(\mathbf{r}) = \nabla^2 U(\mathbf{r}) = \Delta U(\mathbf{r}), \quad (1.80)$$

где **оператор Лапласа**  $\Delta = \nabla^2$  имеет в декартовых координатах вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.81)$$

Это — очень важный оператор, возникающий почти во всех задачах, когда требуется описать на математическом языке достаточно сложное физическое явление.

Далее,

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (1.82)$$

Хотя такая комбинация производных возникает нередко, для нее не придумано более компактного буквенного обозначения.

Последняя операция такого рода носит название двойного вихря. Она преобразуется с помощью формулы векторной алгебры «бац минус цаб» (не забывая ставить дифференцируемую векторную функцию правее всех действующих на нее операторов):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \quad (1.83)$$

Мы видим, таким образом, что все дифференциальные операции со скалярными и векторными функциями выражаются через оператор Гамильтона «набла».

## Задачи

**1.58.** Показать, что  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  (1.67) и оператор Лапласа (1.81) инвариантны относительно поворотов декартовой системы координат, а  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  (1.68) преобразуется как антисимметричный тензор II ранга либо как дуальный ему вектор.

**1.59.** Вычислить  $\operatorname{div} \mathbf{r}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{r}$ ,  $\operatorname{div}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ ,  $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  — постоянный вектор.

**1.60.** Вычислить

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^3}, \quad \mathbf{m} = \text{const.}$$

Построить векторные линии для вектора  $\mathbf{H}$  (дать рисунок).

**1.61.** Пользуясь правилами векторной алгебры и анализа и не переходя к проекциям на оси координат, доказать важные тождества, которыми приходится часто пользоваться в практических расчетах:

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi; \quad (1.84)$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi; \quad (1.85)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \operatorname{grad} \varphi; \quad (1.86)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad (1.87)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}; \quad (1.88)$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (1.89)$$

Здесь  $\varphi$ ,  $\psi$  — скалярные, а  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  — векторные функции координат.

**1.62.** Доказать тождества:

$$\mathbf{C} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{A}; \quad (1.90)$$

$$(\mathbf{C} \cdot \nabla)(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{A}; \quad (1.91)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}; \quad (1.92)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{C}; \quad (1.93)$$

$$(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B}; \quad (1.94)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.95)$$

**1.63.** Вычислить  $\operatorname{grad} \varphi(r)$ ;  $\operatorname{div} \varphi(r) \mathbf{r}$ ;  $\operatorname{rot} \varphi(r) \mathbf{r}$ ;  $(\mathbf{l} \cdot \nabla) \varphi(r) \mathbf{r}$ .

**1.64.** Найти функцию  $\varphi(r)$ , удовлетворяющую условию  $\operatorname{div} \varphi(r) \mathbf{r} = 0$ .

**1.65.** Найти дивергенции и вихри следующих векторов:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}, \quad \varphi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — постоянные векторы.



**1.66.** Вычислить  $\text{grad } \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(r)$ ,  $\text{grad } \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)$ ,  $\text{div } \varphi(r)\mathbf{A}(r)$ ,  $\text{rot } \varphi(r)\mathbf{A}(r)$ ,  $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\varphi(r)\mathbf{A}(r)$ .

**1.67.** Доказать, что

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{при} \quad \mathbf{A}^2 = \text{const.}$$

**1.68.** Интеграл по объему  $\int_V (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dV$  преобразовать в интеграл по поверхности.

**1.69.** Выразить интегралы по замкнутой поверхности  $\oint_S \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S})$ ,  $\oint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{S}$ , где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор, через объем, заключенный внутри поверхности.

УКАЗАНИЕ. Умножить каждый из интегралов на произвольный постоянный вектор  $\mathbf{b}$  и применить теорему Остроградского–Гаусса.

**1.70\*** Интегралы по замкнутой поверхности

$$\oint n\varphi dS, \quad \oint (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS, \quad \oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{A} dS, \quad \oint T_{\alpha\beta}(\mathbf{r})n_\beta dS$$

( $\mathbf{b}$  — постоянный вектор,  $\mathbf{n}$  — орт нормали) преобразовать в интегралы по объему, заключенному внутри поверхности.

**1.71.** Воспользовавшись одним из тождеств, доказанных в предыдущей задаче, вывести закон Архимеда путем суммирования сил давления, приложенных к элементам поверхности погруженного в жидкость тела.

**1.72\*** Доказать тождество

$$\int_V (\mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A}) dV = \oint_S (\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.96)$$

**1.73.** Внутри объема  $V$  вектор  $\mathbf{A}$  удовлетворяет условию  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , а на границе объема (поверхность  $S$ ) — условию  $A_n = 0$ . Доказать, что  $\int_V \mathbf{A} dV = 0$ .

**1.74\*** Доказать, что

$$\text{div}_{\mathbf{r}} \int_V \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0,$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — вектор, определенный в предыдущей задаче.

**1.75.** Доказать тождества Грина:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.97)$$

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.98)$$

где  $\varphi, \psi$  — скалярные дифференцируемые функции.

**1.76.** Интеграл по замкнутому контуру  $\oint_l u df$  преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур.

**1.77\***. Доказать интегральные тождества:

$$\oint_l \varphi dl = \int_S (\mathbf{n} \times \text{grad } \varphi) dS; \quad (1.99)$$

$$\oint_l (dl \times \mathbf{A}) = \int_S ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A}) dS; \quad (1.100)$$

$$\oint_l dl \cdot \mathbf{A} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} dS. \quad (1.101)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — орт нормали к поверхности,  $\varphi, \mathbf{A}$  — функции координат,  $l$  — замкнутый контур,  $S$  — незамкнутая поверхность, ограниченная этим контуром. Приведенные тождества можно рассматривать как частные случаи обобщенной теоремы Стокса

$$\oint_l (\dots) dl = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla)(\dots) dS, \quad (1.102)$$

где символом  $(\dots)$  обозначен тензор произвольного ранга.

**1.78.** Показать, что если скалярная функция  $\psi$  является решением уравнения Гельмгольца  $\Delta \psi + k^2 \psi = 0$  и  $\mathbf{a}$  — некоторый постоянный вектор, то векторные функции  $\mathbf{L} = \text{grad } \psi$ ,  $\mathbf{M} = \text{rot}(\mathbf{a}\psi)$ ,  $\mathbf{N} = \text{rot } \mathbf{M}$  удовлетворяют векторному уравнению Гельмгольца  $\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ .

**Дифференцирование в криволинейных координатах.** При использовании криволинейных неортогональных координат  $q^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), в отличие от декартовых прямоугольных координат  $x^\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3$ ), производная по координате от тензора ранга  $s \geq 1$  не образует какого-либо тензора, в чем мы убедимся ниже. Это обстоятельство связано с локальным характером определения тензора (1.51), относящимся к конкретной точке. Производная же определяется через разность значений двух векторов в близких, но различных точках. Чтобы определить **ковариантную производную** от тензора любого ранга, т. е. такую дифференциальную операцию, которая увеличивает ранг тензора на единицу, рассмотрим для простоты тензор I ранга (вектор) и разложим его по базисным векторам рассматриваемой криволинейной системы координат:

$$\mathbf{A} = A^\mu e_\mu = A_\mu e^\mu. \quad (1.103)$$

Продифференцируем равенства (1.103) и выделим из них ковариантные производные:

$$A_{\mu;\alpha} \equiv e_\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\alpha} + A_\nu e_\mu \cdot \frac{\partial e^\nu}{\partial q^\alpha}, \quad (1.104)$$

$$A^\mu_{;\alpha} \equiv e^\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial A^\mu}{\partial q^\alpha} + A^\nu e^\mu \cdot \frac{\partial e_\nu}{\partial q^\alpha}. \quad (1.105)$$

В левых частях равенств использованы общепринятые обозначения для ковариантной производной от ковариантных и контравариантных компонент вектора соответственно. После знака тождества следуют их определения, а в правые части входят производные компонент вектора и базисных векторов. Производные от базисных векторов в криволинейной системе координат, в отличие от декартовой, отличны от нуля.

Дифференцируя равенство (1.48) по координате, находим

$$e_\mu \cdot \frac{\partial e^\nu}{\partial q^\alpha} = -e^\nu \cdot \frac{\partial e_\mu}{\partial q^\alpha}. \quad (1.106)$$

Введем в рассмотрение **символы Кристоффеля II рода**:

$$\Gamma^\nu_{\mu\alpha} = e^\nu \cdot \frac{\partial e_\mu}{\partial q^\alpha}. \quad (1.107)$$

С их помощью ковариантные производные записываются в более компактном виде

$$A_{\mu;\alpha} = \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\alpha} - A_\nu \Gamma^\nu_{\mu\alpha}, \quad A^\mu_{;\alpha} = \frac{\partial A^\mu}{\partial q^\alpha} + A^\nu \Gamma^\mu_{\nu\alpha}. \quad (1.108)$$

Заметим, что символы Кристоффеля не являются тензорами, так как не удовлетворяют соответствующим правилам преобразования. Они симметричны по двум нижним значкам:  $\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}$ . Последнее свойство вытекает из представления базисных векторов (1.46):

$$\frac{\partial e_{\mu}}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial q^{\mu}}. \quad (1.109)$$

Правила (1.108) вычисления ковариантной производной от тензора первого ранга очевидным образом обобщаются на тензор произвольного ранга  $T$ : кроме производной от рассматриваемого тензора по координате, нужно добавить со знаком «плюс» столько слагаемых типа  $\Gamma T$ , сколько у тензора верхних значков, и со знаком «минус» столько слагаемых, сколько нижних значков.

**Пример 1.9.** Выразить символы Кристоффеля (1.107) через компоненты метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ .

**Решение.** Определение символов Кристоффеля (1.107) позволяет записать соотношение

$$e_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = \frac{\partial e_{\mu}}{\partial q^{\alpha}}. \quad (1.110)$$

Оно получается из равенства  $(e_{\nu})_{\lambda}(e^{\nu})^{\sigma} = \delta_{\lambda}^{\sigma}$ , которое вытекает из представлений базисных векторов (1.46), (1.49).

Введем также в рассмотрение символы Кристоффеля I рода  $\Gamma_{\nu, \mu\alpha}$  с помощью соотношения

$$e^{\nu}\Gamma_{\nu, \mu\alpha} = \frac{\partial e_{\mu}}{\partial q^{\alpha}}. \quad (1.111)$$

Из (1.110) и (1.111) следует, что символы Кристоффеля I и II рода можно рассматривать как коэффициенты разложения одной и той же величины  $\partial e_{\mu}/\partial q^{\alpha}$  по векторам ковариантного и контравариантного базисов.

Из (1.111) с помощью (1.48) находим

$$\Gamma_{\nu, \mu\alpha} = e_{\nu} \cdot \frac{\partial e_{\mu}}{\partial q^{\alpha}}. \quad (1.112)$$

Умножая скалярно (1.110) на  $e_{\lambda}$ , (1.111) на  $e^{\lambda}$  и используя (1.50), получаем связь между символами Кристоффеля I и II рода:

$$\Gamma_{\nu, \mu\alpha} = g_{\nu\lambda}\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}, \quad \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = g^{\nu\lambda}\Gamma_{\nu, \mu\alpha}. \quad (1.113)$$

Далее получаем последовательно, пользуясь симметрией по двум значкам, отделенным запятой, и соотношениями (1.109), (1.112), (1.113):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu, \mu\alpha} &= \frac{1}{2} \left( e_\nu \cdot \frac{\partial e_\mu}{\partial q^\alpha} + e_\nu \cdot \frac{\partial e_\alpha}{\partial q^\mu} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} - e_\mu \cdot \frac{\partial e_\nu}{\partial q^\alpha} - e_\alpha \cdot \frac{\partial e_\nu}{\partial q^\mu} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\nu} \right),\end{aligned}\quad (1.114)$$

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\nu} \right).\quad (1.115)$$

■

**Пример 1.10.** Найти правила преобразования символов Кристоффеля I и II рода при переходе в другую криволинейную систему координат.

**Решение.** Проводим последовательные вычисления:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu'} &= e^{\nu'} \cdot \frac{\partial e'_\mu}{\partial q'^\alpha} = \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta} e^\beta \cdot \frac{\partial}{\partial q'^\alpha} \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu} e_\sigma = \\ &= \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta} \frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha} \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu} e^\beta \cdot \frac{\partial e_\sigma}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta} \frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha} \frac{\partial q'^\kappa}{\partial q^\lambda} \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial q'^\kappa \partial q'^\mu} e^\beta \cdot e_\sigma = \\ &= \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta} \frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha} \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\beta + \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta} \frac{\partial^2 q^\beta}{\partial q'^\alpha \partial q'^\mu};\end{aligned}\quad (1.116)$$

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\nu, \mu\alpha} &= e'_{\nu'} \cdot \frac{\partial e'_{\mu'}}{\partial q'^\alpha} = \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^{\nu'}} e_{\beta'} \cdot \frac{\partial}{\partial q'^\alpha} \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu} e_\sigma = \\ &= \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^{\nu'}} \frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha} \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu} e_{\beta'} \cdot \frac{\partial e_\sigma}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^{\nu'}} \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial q'^\alpha \partial q'^\mu} e_{\beta'} \cdot e_\sigma = \\ &= \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^{\nu'}} \frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha} \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu} \Gamma_{\beta, \lambda\sigma} + \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^{\nu'}} \frac{\partial^2 q^\beta}{\partial q'^\alpha \partial q'^\mu} g_{\beta\sigma}.\end{aligned}\quad (1.117)$$

Правилам преобразования тензоров соответствуют только первые слагаемые в правых частях окончательных выражений; вторые слагаемые нарушают указанные правила, поэтому **символы Кристоффеля тензорами не являются.** ■

**Пример 1.11.** Доказать, что ковариантные производные вектора  $A_{\nu; \alpha}$  и  $A^{\nu}_{; \alpha}$  преобразуются как ковариантный и смешанный тензоры II ранга соответственно.

**Решение.** Пользуясь определением ковариантной производной (1.104) и правилом преобразования (1.116), находим последовательно

$$\begin{aligned} A'_{\mu; \alpha} &= \frac{\partial A'_{\mu}}{\partial q'^{\alpha}} - \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} A'_{\nu} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^{\lambda}} \left( \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial q'^{\mu}} A_{\sigma} \right) \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q'^{\alpha}} - \left( \frac{\partial q^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q'^{\alpha}} \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial q'^{\mu}} \Gamma^{\beta}_{\lambda\sigma} + \frac{\partial q^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial^2 q^{\beta}}{\partial q'^{\alpha} \partial q'^{\mu}} \right) \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial q'^{\nu}} A_{\kappa} = \\ &= \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial q'^{\mu}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q'^{\alpha}} \left( \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial q^{\lambda}} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\sigma} A_{\beta} \right) = \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial q'^{\mu}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q'^{\alpha}} A_{\sigma; \lambda}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Мы доказали, что рассматриваемая величина преобразуется как ковариантный тензор II ранга. При рассмотрении второго тензора необходимо использовать равенство

$$\frac{\partial q^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial^2 q^{\beta}}{\partial q'^{\alpha} \partial q'^{\mu}} = \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q'^{\alpha}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q'^{\mu}} \frac{\partial^2 q^{\nu}}{\partial q^{\beta} \partial q^{\lambda}}. \quad (1.119)$$

Оно получается путем дифференцирования по координате равенства типа (1.43). ■

## Задачи

**1.79.** Показать, что производная по координате от скаляра (градиент)  $\partial S / \partial q^{\mu} = S_{; \mu}$  является ковариантным вектором.

**1.80.** Показать, что ковариантный ротор совпадает с обычным ротором:

$$A_{\mu; \nu} - A_{\nu; \mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial q^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial q^{\mu}}.$$

**1.81\*.** Показать, что ковариантную дивергенцию от контравариантного вектора (скаляра) можно записать в виде

$$A^{\mu}_{; \mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} (\sqrt{g} A^{\mu}). \quad (1.120)$$

**1.82.** Записать в криволинейных координатах оператор Лапласа, действующий на скалярную функцию.

**1.83.** Для произвольного тензора II ранга записать ковариантную дивергенцию  $T^{\mu\nu};_{\mu}$ .

**1.84.** Сделать то же самое для антисимметричного тензора  $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ .

**1.85.** Для ковариантных компонент антисимметричного тензора  $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$  доказать соотношение

$$A_{\mu\nu};_{\lambda} + A_{\lambda\mu};_{\nu} + A_{\nu\lambda};_{\mu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial q^{\lambda}} + \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial q^{\nu}} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial q^{\mu}}.$$

**1.86.** Вычислить ковариантные производные от метрического тензора  $g_{\mu\nu};_{\lambda}$  и  $g^{\nu\mu};_{\lambda}$ .

**1.87.** Доказать тождество  $\partial g_{\mu\nu}/\partial q^{\lambda} = \Gamma_{\mu, \nu\lambda} + \Gamma_{\nu, \mu\lambda}$ .

**Ортогональные криволинейные координаты**, для которых  $g_{\mu\nu} = 0$  при  $\mu \neq \nu$  (см. задачу 1.46), используются на практике наиболее часто. При этом вводят обозначения  $g_{\mu\mu} = h_{\mu}^2(q)\delta_{\mu\nu}$  (суммировать по  $\mu$  не нужно). Элемент длины запишется в виде

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dq^{\mu} dq^{\nu} = h_1^2(dq^1)^2 + h_2^2(dq^2)^2 + h_3^2(dq^3)^2, \quad (1.121)$$

где величины  $h_{\mu}$  (**коэффициенты Ламэ**) согласно (1.46) имеют следующий вид:

$$h_{\mu} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^{\mu}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^{\mu}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^{\mu}}\right)^2}. \quad (1.122)$$

Поскольку  $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$ , инвариантный элемент объема (1.54) принимает вид

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3. \quad (1.123)$$

Характерная особенность ортогонального базиса состоит в том, что векторы исходного и взаимного базисов имеют одинаковые направления, но различаются величиной и физической размерностью (поскольку координаты  $x^{\alpha}$  и  $q^{\beta}$  могут иметь разную размерность). Вследствие этого и размерность разных компонент одного и того же вектора, разложенного по векторам этих базисов, может быть различной, что весьма неудобно при решении физических задач. Поэтому полезно ввести ортогональный базис единичных ортов  $e_{\alpha*}$ ,  $e_{\alpha*} \cdot e_{\beta*} = \delta_{\alpha\beta}$  (мы их будем обозначать нижними

индексами и звездочкой), через которые ковариантный и контравариантный базисы выразятся согласно (1.50) следующим образом:

$$e_\beta = h_\beta e_{\beta*}, \quad e^\beta = \frac{1}{h_\beta} e_{\beta*}. \quad (1.124)$$

Разложение произвольного вектора  $\mathbf{A}$  по ортам  $e_{\beta*}$  приобретает вид

$$\mathbf{A} = A_{1*} e_{1*} + A_{2*} e_{2*} + A_{3*} e_{3*}, \quad (1.125)$$

где «физические» компоненты вектора  $A_{\mu*}$  теперь имеют одинаковую размерность, совпадающую с размерностью рассматриваемой векторной величины  $\mathbf{A}$ , и связаны с ее ко- и контравариантными компонентами соотношениями

$$A_{\beta*} = \frac{A_\mu}{h_\mu} = A^\mu h_\mu. \quad (1.126)$$

Ввиду удобства использования базиса  $e_{\beta*}$  мы далее всюду в этой книге за исключением главы 7 будем пользоваться этим базисом, опуская звездочку.

С помощью соотношений (1.120)–(1.126), а также (1.25) записываем основные дифференциальные операции в ортогональных криволинейных координатах:

$$\text{grad } S = \frac{1}{h_1} \frac{\partial S}{\partial q^1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial S}{\partial q^2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial S}{\partial q^3} \mathbf{e}_3; \quad (1.127)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q^2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q^3} (h_1 h_2 A_3) \right]; \quad (1.128)$$

$$\Delta S = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial S}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial S}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial S}{\partial q^3} \right) \right]; \quad (1.129)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q^3} (h_2 A_2) \right] \mathbf{e}_1 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q^1} (h_3 A_3) \right] \mathbf{e}_2 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q^2} (h_1 A_1) \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.130)$$



### Задачи

**1.88.** Из общих выражений (1.27)–(1.30) получить приведенные ниже основные дифференциальные операции в цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$ , в которой  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ,  $z = z$ .

$$\operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{e}_z; \quad (1.131)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.132)$$

$$\Delta S = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}; \quad (1.133)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\alpha + \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.134)$$

**1.89.** Сделать то же самое для сферической системы координат  $(r, \vartheta, \alpha)$ , в которой  $x = r \sin \vartheta \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \vartheta \sin \alpha$ ,  $z = r \cos \vartheta$ .

$$\operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial S}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha; \quad (1.135)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}; \quad (1.136)$$

$$\Delta S = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2}; \quad (1.137)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) \right] \mathbf{e}_\vartheta + \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \quad (1.138)$$

**1.90\*.** Воспользовавшись тождеством (1.83), записать проекции вектора  $\Delta \mathbf{A}$  на оси цилиндрической системы координат.

**1.91\***. Сделать то же самое для сферической системы координат.

**1.92.** Найти общий вид решения уравнения Лапласа для скалярной функции, зависящей только: а) от  $r$ ; б) от  $\alpha$ ; в) от  $z$  (цилиндрические координаты).

**1.93.** Найти общий вид решения уравнения Лапласа для скалярной функции, зависящей только: а) от  $r$ ; б) от  $\vartheta$ ; в) от  $\alpha$  (сферические координаты).

ЗАМЕЧАНИЕ. В задачах 1.94–1.98 разобраны примеры криволинейных ортогональных систем координат, более сложных, чем цилиндрические и сферические. Более полные сведения по этому вопросу содержатся в руководствах [Арфкен (1970)], [Стрэттон (1948)].

**1.94\***. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c)$$

изображает эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Уравнения

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} &= 1, & \xi &\geq -c^2, \\ \frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} &= 1, & -c^2 &\geq \eta \geq -b^2, \\ \frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} &= 1, & -b^2 &\geq \zeta \geq -a^2 \end{aligned}$$

изображают соответственно эллипсоид, однополостной и двухполостной гиперboloиды, софокусные с первым эллипсоидом. Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности, характеризующей значениями  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Числа  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  называются эллипсоидальными координатами точки  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Найти формулы преобразования от эллипсоидальных к декартовым координатам. Убедиться в ортогональности эллипсоидальной системы координат. Найти коэффициента Ламэ и оператор Лапласа в эллипсоидальных координатах.

**1.95\***. При  $a = b > c$  эллипсоидальная система координат (см. предыдущую задачу) вырождается в так называемую сплюснутую сфероидальную систему координат. Координата  $\zeta$  при этом переходит в постоянную,

равную  $-a^2$ , и должна быть заменена другой координатой. В качестве последней выбирают азимутальный угол  $\alpha$  в плоскости  $xy$ . Координаты  $\xi$ ,  $\eta$  определяются из уравнений

$$\frac{r^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1, \quad \xi \geq -c^2,$$

$$\frac{r^2}{a^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} = 1, \quad -c^2 \geq \eta \geq -a^2,$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Поверхности  $\xi = \text{const}$  представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения вокруг оси  $Oz$ , поверхности  $\eta = \text{const}$  — софокусные с ними однополостные гиперболоиды вращения (рис. 1.6).

Найти выражения  $r$ ,  $z$  в сплюснутых сфероидальных координатах, коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в этих координатах.

**1.96\*.** Вытянутая сфероидальная система координат получается из эллипсоидальной (задача 1.94) при  $a > b = c$ . Координата  $\eta$  при этом вырождается в постоянную и должна быть заменена азимутальным углом  $\alpha$ , отсчитываемым в плоскости  $yz$  от оси  $Oy$ . Координаты  $\xi$ ,  $\zeta$  определяются из уравнений

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{r^2}{b^2 + \xi} = 1, \quad \xi \geq -b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{r^2}{b^2 + \zeta} = 1, \quad -b^2 \geq \zeta \geq -a^2,$$

где  $r^2 = y^2 + z^2$ .

Поверхности постоянных  $\xi$  и  $\eta$  представляют собой вытянутые эллипсоиды и двухполостные гиперболоиды вращения (рис. 1.7). Выразить величины  $x$ ,  $r$  через  $\xi$ ,  $\zeta$ ; найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в переменных  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\alpha$ .

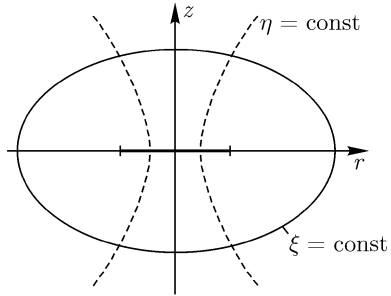


Рис. 1.6

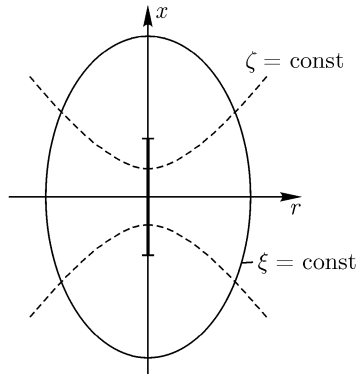


Рис. 1.7

**1.97\***. Бисферические координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$  связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \frac{a \sin \eta \cos \alpha}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \sin \eta \sin \alpha}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

где  $a$  — постоянный параметр,  $-\infty < \xi < \infty$ ,  $0 < \eta < \pi$ ,  $0 < \alpha < 2\pi$ .

Показать, что координатные поверхности  $\xi = \operatorname{const}$  представляют собой сферы

$$x^2 + y^2 + (z - a \operatorname{coth} \xi)^2 = \left( \frac{a}{\operatorname{sh} \xi} \right)^2,$$

поверхности  $\eta = \operatorname{const}$  — веретенообразные поверхности вращения вокруг оси  $Oz$ , уравнение которых

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a \cot \eta)^2 + z^2 = \left( \frac{a}{\sin \eta} \right)^2,$$

поверхности  $\alpha = \operatorname{const}$  — полуплоскости, расходящиеся от оси  $Oz$  (рис. 1.8).

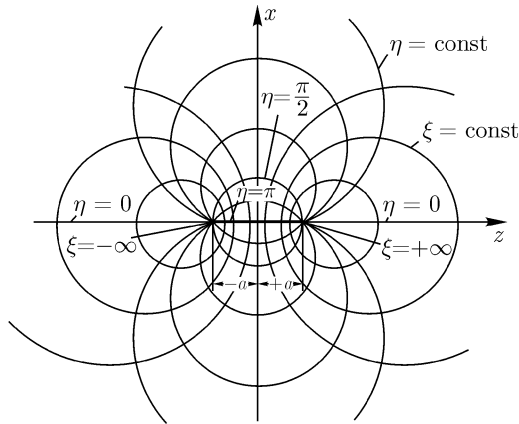


Рис. 1.8

Убедиться в том, что эти координатные поверхности ортогональны между собой. Найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа.

**1.98\***. Тороидальные координаты  $\rho$ ,  $\xi$ ,  $\alpha$  образуют ортогональную систему и связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \rho \cos \alpha}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \rho \sin \alpha}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}, \quad z = \frac{a \sin \xi}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi},$$

где  $a$  — постоянный параметр,  $-\infty < \rho < \infty$ ,  $-\pi < \xi < \pi$ ,  $0 < \alpha < \pi$ .

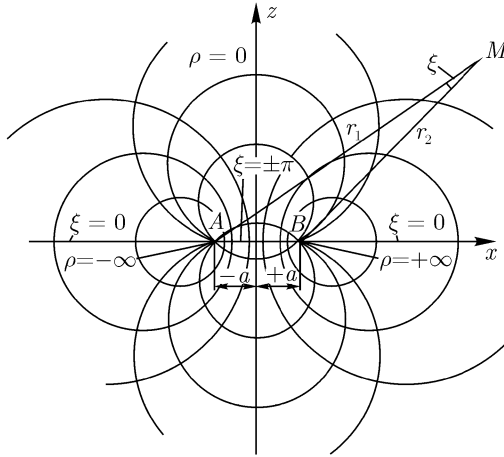


Рис. 1.9

Показать, что  $\rho = \ln(r_1/r_2)$  (см. рис. 1.9, на котором изображены плоскости  $\alpha = \text{const}$ ,  $\alpha + \pi = \text{const}$ ), а величина  $\xi$  представляет собой угол между  $r_1$  и  $r_2$  ( $\xi > 0$  при  $z > 0$  и  $\xi < 0$  при  $z < 0$ ). Какой вид имеют координатные поверхности  $\rho$  и  $\xi$ ? Найти коэффициенты Ламэ.

Рекомендуемая литература: [Борисенко и Тарапов (1966)], [Ли (1965)], [Арфкен (1970)], [Морс и Фешбах (1958)], [Курбатова и Филиппов (1998)], [Мэтьюз и Уокер (1972)], [Рашевский (1953)], [Вейнберг (1977)], [Стрэттон (1948)].

### 1.3. Специальные функции математической физики

**Цилиндрические функции** используются при решении многих конкретных задач. Наиболее употребительная из них — **функция Бесселя** —

может быть получена путем разложения специально выбранной экспоненты (**производящей функции**) в степенной ряд по  $u$ :

$$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n. \quad (1.139)$$

Коэффициенты этого разложения называются функциями Бесселя I рода порядка  $n$ . Представление функции Бесселя в виде степенного ряда можно получить из степенных рядов для экспонент:

$$\exp\left(\frac{xu}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2u}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{u^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{u^{-s}}{s!}. \quad (1.140)$$

Напомним, что эти разложения справедливы при любых, в том числе комплексных, значениях  $x$  и  $u$  ввиду неограниченности радиуса сходимости ряда для экспоненты. Перейдя к суммированию по  $n = r - s$  ( $-\infty < n < \infty$ ), получим из (1.140)

$$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} u^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n, \quad (1.141)$$

откуда следует

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}. \quad (1.142)$$

Это представление для  $J_n(x)$  целесообразно использовать при  $n \geq 0$ . При  $n < 0$  вместо (1.142) можно записать

$$J_n(x) = \sum_{s=|n|}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+|n|}}{s!(|n|+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{|n|+2s}, \quad (1.143)$$

поскольку при  $s+n < 0$ ,  $(s+n)! \rightarrow \infty$ . В итоге получаем простую зависимость между функциями Бесселя целого положительного и отрицательного порядков:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (1.144)$$

**Пример 1.12.** Получить рекуррентные соотношения между функциями Бесселя разных порядков путем дифференцирования равенства (1.139) по  $u$  и по  $x$  и сравнения правой и левой частей равенства.

**Решение.** Дифференцируя (1.139) по  $u$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{1}{u^2} \right) \exp \left[ \frac{x}{2} \left( u - \frac{1}{u} \right) \right] = \\ = \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{1}{u^2} \right) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) u^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) u^{n-1}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при  $u^{n-1}$  в правой и левой частях последнего равенства, находим

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \quad (1.145)$$

Дифференцируя (1.139) по  $x$ , получим аналогичным образом

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (1.146)$$

Эти рекуррентные соотношения можно переписать в других формах:

$$J_{n\pm 1} = \frac{n}{x} J_n(x) \mp J'_n(x); \quad J_{n\mp 1} = \pm x^{\mp n} \frac{d}{dx} [x^{\pm n} J_n(x)]. \quad (1.147)$$

В частности,

$$J_1(x) = -J_0(x). \quad (1.148)$$

■

**Пример 1.13.** Получить представления функции Бесселя в виде интегралов от экспоненциальных и тригонометрических функций. Для этого использовать подстановку  $u = \exp(i\varphi)$  в разложении (1.139).

**Решение.** Указанная подстановка приводит к разложению

$$\exp(ix \sin \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \exp(in\varphi). \quad (1.149)$$

Воспользуемся периодичностью функций  $\sin \varphi$  и  $\exp(in\varphi)$ , а также легко проверяемым равенством

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp(i(n-m)\varphi) d\varphi = 2\pi \delta_{mn},$$

где  $m$  — целое число,  $\alpha$  — любое действительное число. Умножив обе части (1.149) на  $\exp(-im\varphi)$  и проинтегрировав по  $\varphi$ , получим интегральное представление для функции Бесселя:

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp(ix \sin \varphi - im\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp(ix \cos \varphi - im\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (1.150)$$

■

**Пример 1.14.** Предположим, что некоторые функции  $Z_\nu(x)$ , отличные вообще говоря от функций Бесселя (1.142), удовлетворяют рекуррентным соотношениям (1.145)–(1.148) при произвольном комплексном значении  $n = \nu$ . Вывести дифференциальное уравнение II порядка, решением которого является  $Z_\nu(x)$ .

**Решение.** Продифференцируем второе равенство (1.147) по  $x$  и добавим к нему слагаемое, равное нулю (заменив  $n \rightarrow \nu$ ,  $J_n \rightarrow Z_\nu$ ):

$$\begin{aligned} Z'_{\nu-1} &= [x^{-\nu}(x^\nu Z_\nu)']' + \frac{1}{x} \left( Z'_\nu + \frac{\nu}{x} Z_\nu - Z_{\nu-1} \right) = \\ &= Z''_\nu + \frac{\nu+1}{x} Z'_\nu - \frac{1}{x} Z_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Снова добавляем в правую часть слагаемое, равное нулю:

$$\begin{aligned} Z'_{\nu-1} &= Z''_\nu + \frac{\nu+1}{x} Z'_\nu - \frac{1}{x} Z_{\nu-1} + \frac{\nu}{x} \left[ Z_{\nu-1} - \frac{\nu}{x} Z_\nu - Z'_\nu \right] = \\ &= Z''_\nu + \frac{1}{x} Z'_\nu - \frac{\nu^2}{x^2} Z_\nu + \frac{\nu-1}{x} Z_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Наконец, из второго равенства (1.147) находим, делая замену  $n+1 \rightarrow \nu$ ,  $J_n \rightarrow Z_\nu$ :

$$Z_\nu = \frac{\nu-1}{x} Z_{\nu-1} - Z'_{\nu-1}.$$

Исключая  $Z'_{\nu-1}$  из последних двух равенств, получаем **уравнение Бесселя**, которому удовлетворяет функция  $Z_\nu(x)$ :

$$Z''_\nu + \frac{1}{x} Z'_\nu + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) Z_\nu = 0. \quad (1.151)$$

■



Такое или сходное уравнение возникает во многих физических задачах. Мы ниже дадим краткую сводку основных сведений о решениях этого уравнения. Вывод соответствующих формул можно найти в специальных математических руководствах: [Виленкин (1965)], [Лебедев (1963)], [Никифоров и Уваров (1984)], [Мэтьюз и Уокер (1972)], [Арфкен (1970)], [Градштейн и Рыжик (1971)], [Абрамовиц и Стиган (1979)], [Ли (1965)].

Решение уравнения (1.151), которое при  $\operatorname{Re} \nu \geq 0$  ограничено при  $x \rightarrow 0$ , называется функцией Бесселя I рода. Ее можно представить в виде степенного ряда, который является обобщением (1.142):

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(\nu + s + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s}. \quad (1.152)$$

Независимая переменная обозначена через  $z$ , поскольку ряд сходится при всех  $\nu$  и во всей комплексной плоскости  $z$  с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси.

Вторым линейно независимым решением при  $\nu \neq n = 0, \pm 1 \dots$  может служить  $J_{-\nu}(x)$ . При  $n$  целом между двумя указанными решениями существует линейная связь (1.144), поэтому в качестве второго решения выбирают функцию Бесселя II рода (она же функция Неймана и функция Вебера)

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}, \quad (1.153)$$

для которой существует конечный предел при  $\nu \rightarrow n$ .

В качестве двух линейно независимых решений можно выбрать также функции Бесселя III рода (их называют еще функциями Ханкеля)

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z). \quad (1.154)$$

Все перечисленные функции являются решениями уравнения Бесселя. Функции  $Y_\nu$ ,  $H_\nu^{(1,2)}$  имеют особенности при  $z \rightarrow 0$ . Все решения удовлетворяют рекуррентным соотношениям (1.145)–(1.147) (с заменой  $n \rightarrow \nu$ ,  $J_n \rightarrow Z_\nu$ ).

Асимптотические значения: при  $z \rightarrow 0$

$$J_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad \nu \neq -1, -2 \dots; \quad (1.155)$$

$$Y_0(z) \approx -iH_0^{(1)}(z) \approx iH_0^{(2)}(z) \approx \frac{2}{\pi} \ln z; \quad (1.156)$$

$$Y_\nu(z) \approx -iH_\nu^{(1)}(z) \approx iH_\nu^{(2)}(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0; \quad (1.157)$$

при  $|z| \rightarrow \infty$  и произвольных  $\nu$

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi; \quad (1.158)$$

$$Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi; \quad (1.159)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad -\pi < \arg z < 2\pi; \quad (1.160)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad -2\pi < \arg z < \pi. \quad (1.161)$$

Цилиндрические функции от чисто мнимого аргумента называются **модифицированными функциями Бесселя** (а вторая из них — также функцией Макдональда). Они определяются соотношениями

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(iz), \quad (1.162)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{i\pi(\nu+1)/2} H_\nu^{(1)}(iz) \quad (1.163)$$

либо

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2s}}{s! \Gamma(\nu + s + 1)}, \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}. \quad (1.164)$$

Эти функции принимают действительные значения при действительных  $\nu$  и  $z > 0$ . Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования получаются из (1.145)–(1.147) и (1.162), (1.163). В частности,

$$I_0'(z) = I_1(z), \quad K_0'(z) = -K_1(z). \quad (1.165)$$

Модифицированные функции Бесселя удовлетворяют уравнению

$$W_\nu'' + \frac{1}{z} W_\nu' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) W_\nu = 0. \quad (1.166)$$

Асимптотика: при  $z \rightarrow 0$

$$I_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad \nu \neq -1, -2, \dots; \quad (1.167)$$

$$K_0(z) \approx -\ln z, \quad K_\nu(z) \approx \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0; \quad (1.168)$$

при  $|z| \rightarrow \infty$

$$I_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad |\arg z| < \pi/2; \quad (1.169)$$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad |\arg z| < 3\pi/2. \quad (1.170)$$

Сферические функции Бесселя и Ханкеля нередко возникают при решении физических задач в сферических координатах. Они имеют полуцелый порядок и определяются равенствами

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad h_l^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(x). \quad (1.171)$$

При малых  $x$

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{1 \cdot 3 \dots (2l+1)}, \quad h_l^{(1,2)} \approx \mp \frac{x^{-l-1}}{1 \cdot 3 \dots (2l-1)}. \quad (1.172)$$

При больших  $x$

$$j_l(x) \approx \frac{1}{x} \cos \left[ x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right], \quad (1.173)$$

$$h_l^{(1,2)}(x) \approx \frac{1}{x} \exp \left\{ \pm i \left[ x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right] \right\}.$$

## Задачи

**1.99.** Вычислить неопределенные интегралы

$$\int x^\nu Z_{\nu-1}(x) dx, \quad \int x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x) dx.$$

**1.100.** Вычислить определенные интегралы

$$\int_0^\infty J_1(x) dx, \quad \int_0^\infty J_2(x) x^{-1} dx, \quad \int_0^\infty J_n(x) x^{-n} dx.$$

**1.101.** Доказать равенство интегралов

$$\int_0^{\infty} J_n(x) dx = \int_0^{\infty} J_{n+2}(x) dx, \quad \text{где } n = 0, 1, \dots$$

**1.102.** Получить интегральное представление

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos ux}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

УКАЗАНИЕ. Сделать подстановку  $u = \sin \varphi$ .

**1.103\*.** Вычислить интегралы

$$\int_0^{\pi/2} J_0(x \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{\sin x}{x}, \quad \int_0^{\pi/2} J_1(x \cos \varphi) d\varphi = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

УКАЗАНИЕ. Можно воспользоваться разложением в степенные ряды.

**1.104.** Вывести формулы

$$J_n(x) = (-1)^k x^n \left( \frac{d}{x dx} \right)^k (x^{k-n} J_{n-k}(x)) = (-1)^n x^n \left( \frac{d}{x dx} \right)^n J_0(x).$$

**1.105.** Вывести рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_{\nu}(z), \tag{1.174}$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_{\nu}(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_{\nu}(z), \tag{1.175}$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_{\nu}(z).$$

**1.106\*.** Показать, что

$$J_0(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_1) J_n(r_2) \exp(in\vartheta),$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ .

**1.107\***. 1. Записать уравнение, которому удовлетворяет функция  $u(x) = J_n(ax)$ .

2. Вычислить интеграл ( $b \neq a$ ):

$$\int_0^1 x J_n(ax) J_n(bx) dx = \frac{a J_n'(a) J_n(b) - b J_n'(b) J_n(a)}{b^2 - a^2}. \quad (1.176)$$

3. Пусть  $a \neq b$  — корни уравнения  $J_n(x) = 0$ , т. е.  $J_n(a) = J_n(b) = 0$ . Показать, что

$$\int_0^1 x J_n(ax) J_n(bx) dx = 0, \quad \int_0^1 x J_n^2(ax) dx = \frac{1}{2} [J_n'(a)]^2. \quad (1.177)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Первое равенство (1.177) выражает свойство, которое называется **ортогональностью функций Бесселя с весом  $x$** .

**1.108\***. Вывести «теоремы сложения» для бesselевых функций:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y) = J_n(x+y), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.178)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{n-k}(x) J_k(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.179)$$

$$J_0(x) J_0(y) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(x) J_k(y) = J_0(x+y), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.180)$$

$$J_0^2(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k^2(x) = J_0(2x). \quad (1.181)$$

**Сферические функции и полиномы Лежандра** широко используются во многих разделах физики, особенно в электродинамике и квантовой механике. Производящей функцией для полиномов Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$  служит обратное расстояние между двумя точками с радиусами-векторами  $a$  и  $r$ , угол между которыми равен  $\vartheta$ :

$$\frac{1}{|r - a|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \vartheta}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos \vartheta), \quad a/r < 1. \quad (1.182)$$

Обозначив  $x = \cos \vartheta$ ,  $u = a/r$  и используя биномиальное разложение, которое для отрицательного показателя удобно записать в форме

$$(1 - \alpha)^{-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+q)}{n! \Gamma(q)} \alpha^n, \quad |\alpha| < 1,$$

а также биномиальное разложение для  $\alpha^n = (2ux - u^2)^n$ , получим двойную сумму:

$$(1 - 2ux + u^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)k!(n-k)!} (-1)^k (2x)^{n-k} u^{n+k}.$$

Перейдем к суммированию по  $k$  и  $n+k = l \geq 0$ , что приведет к перестановке членов ряда. Такая перестановка в данном случае законна, так как бесконечный ряд сходится абсолютно, что будет видно из дальнейшего. В итоге будем иметь

$$\begin{aligned} (1 - 2ux + u^2)^{-1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{\Gamma(l-k+1/2)}{\Gamma(1/2)k!(l-2k)!} (-1)^k (2x)^{l-2k} u^l = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) u^l, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \sum_{k=0}^l \frac{\Gamma(l-k+1/2)}{\Gamma(1/2)k!(l-2k)!} (-1)^k (2x)^{l-2k} = \\ &= \sum_{k=0}^l (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}. \quad (1.183) \end{aligned}$$

В двух последних равенствах сумма по  $k$  фактически ограничена значением целой части числа  $l/2$ , так как бесконечный факториал отрицательного целого числа в знаменателе устраняет все слагаемые с  $l-2k < 0$ .

**Пример 1.15.** Найти значения полиномов  $P_l(1)$ ,  $P_l(-1)$ ,  $P_l(0)$ , придавая углу  $\vartheta$  в (1.182) частные значения и пользуясь биномиальным разложением.

**Решение.** Полагая  $\cos \vartheta = 1$ , находим из (1.182)

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{l=0}^{\infty} u^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(1)u^l,$$

и следовательно,  $P_l(1) = 1$  при всех  $l$ , а  $P_0 = 1$  при  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ . Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} P_l(-1) &= (-1)^l, \\ P_{2l}(0) &= (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!}, \quad l \geq 1; \\ P_{2l+1}(0) &= 0, \quad l \geq 0. \end{aligned} \tag{1.184}$$

■

**Пример 1.16.** Получить ограничения на величину полиномов Лежандра  $|P_l(\cos \vartheta)| \leq 1$  путем анализа разложения производящей функции (1.182) в ряд по  $\cos m\vartheta$ .

**Решение.** Получаем последовательно из производящей функции

$$\begin{aligned} (1 - 2u \cos \vartheta + u^2)^{-1/2} &= (1 - ue^{i\vartheta})^{-1/2} (1 - ue^{-i\vartheta})^{-1/2} = \\ &= \left\{ 1 + \frac{1}{2}ue^{i\vartheta} + \frac{3}{8}u^2e^{2i\vartheta} + \dots \right\} \times \left\{ 1 + \frac{1}{2}ue^{-i\vartheta} + \frac{3}{8}u^2e^{-2i\vartheta} + \dots \right\} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \vartheta)u^l, \end{aligned}$$

где  $P_l(\cos \vartheta) = \sum_{k=0}^l a_k \cos k\vartheta$ . Коэффициенты  $a_k$  подбираются из величин, стоящих в фигурных скобках, и важно, что все они неотрицательны:  $a_k \geq 0$ . В этом случае сумма  $\sum a_k \cos k\vartheta$  максимальна при  $\vartheta = 0$ , что соответствует  $P_l(1) = 1$ . Следовательно,  $|P_l(\cos \vartheta)| \leq 1$ . ■

Произведенная оценка позволяет установить, что ряд (1.182) при  $a/r < 1$  сходится абсолютно, т. е. сходится ряд  $\sum_{l=0}^{\infty} |P_l(\cos \vartheta)|(a/r)^l$ . Это следует из установленного неравенства и того факта, что мажорирующий ряд  $\sum_{l=0}^{\infty} (a/r)^l$  заведомо сходится при  $a/r < 1$  — он представляет собой сумму членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Из разложения (1.183) можно получить более компактное представление для полиномов Лежандра, выполнив последовательно следующие преобразования:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \sum_{k=0}^l (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k} = \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{2^l k!(l-k)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l x^{2l-2k} = \\ &= \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!} x^{2l-2k} = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l. \end{aligned} \quad (1.185)$$

Последнее выражение для полиномов Лежандра называется **формулой Родригеса**.

**Пример 1.17.** С помощью формулы Родригеса вывести рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра:

$$P_l'(x) = xP_{l-1}'(x) + lP_{l-1}(x); \quad (1.186)$$

$$\begin{aligned} (1-x^2)P_l''(x) &= 2(l+1)P_{l+1}'(x) - 2(l+2)xP_l'(x) - \\ &\quad - (l+1)(l+2)P_l(x). \end{aligned} \quad (1.187)$$

Пользуясь указанными соотношениями, получить дифференциальное уравнение II порядка, которому удовлетворяет  $P_l(x)$ .

**Решение.** Пользуемся формулой Лейбница для вычисления производной  $n$ -го порядка от произведения функций:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Вычисляем

$$\begin{aligned} P_l'(x) &= \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1} (x^2 - 1)^l = \frac{2l}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l [x(x^2 - 1)^{l-1}] = \\ &= \frac{2l}{2^l l!} \left[ x \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^{l-1} + l \left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1} (x^2 - 1)^{l-1} \right]. \end{aligned}$$

Из этого равенства и формулы Родригеса следует (1.186). Для получения (1.187) пользуемся аналогичным соотношением:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+2} (x^2 - 1)^{l+1} &= (x^2 - 1) \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+2} (x^2 - 1)^l + \\ &\quad + 2(l+2)x \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1} (x^2 - 1)^l + (l+1)(l+2) \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l. \end{aligned}$$



Из двух полученных рекуррентных соотношений очевидным образом получается дифференциальное уравнение Лежандра, которое имеет вид

$$(1 - x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l + 1)P_l(x) = 0. \quad (1.188)$$

Второе линейно независимое решение уравнения Лежандра имеет особенности при  $x = \pm 1$ . ■

**Пример 1.18.** *Присоединенные полиномы Лежандра определяются выражением*

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (1 - x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_l(x) = \\ &= \frac{(1 - x^2)^{m/2}}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^{l+m} (x^2 - 1)^l, \quad -l \leq m \leq l. \end{aligned} \quad (1.189)$$

*Получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют присоединенные полиномы Лежандра.*

**Решение.** При  $m > 0$  дифференцируем обе части уравнения Лежандра (1.188)  $m$  раз и получаем уравнение вида

$$(1 - x^2)F'' - 2(m + 1)xF' + (l - m)(l + m + 1)F = 0$$

для функции

$$F(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_l(x) = (1 - x^2)^{-m/2} P_l^m(x).$$

Подставив в полученное уравнение производные

$$\begin{aligned} F'(x) &= (1 - x^2)^{-m/2} \left[ \frac{dP_l^m}{dx} + \frac{mxP_l^m}{1 - x^2} \right], \\ F''(x) &= (1 - x^2)^{-m/2} \left[ \frac{d^2 P_l^m}{dx^2} + \frac{2mx}{1 - x^2} \frac{dP_l^m}{dx} + \frac{mP_l^m}{1 - x^2} + \frac{m(m + 2)x^2 P_l^m}{(1 - x^2)^2} \right], \end{aligned}$$

находим искомое уравнение

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_l^m}{dx^2} - 2x \frac{dP_l^m}{dx} + \left[ l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P_l^m = 0. \quad (1.190)$$

Поскольку уравнение нечувствительно к знаку  $m$ , то  $P_l^{-m}(x)$  и  $P_l^m(x)$  могут различаться только множителем, не зависящим от  $x$  (см. задачу 1.116). ■

**Пример 1.19.** Пользуясь уравнением (1.190), доказать ортогональность присоединенных полиномов Лежандра с одинаковыми значками  $m$  и разными  $l$ .

**Решение.** Записываем уравнение (1.190) в форме

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m = 0$$

и второе такое же уравнение для  $P_{l'}^m$ . Далее умножаем первое уравнение на  $P_{l'}^m$ , второе на  $P_l^m$ , вычитаем почленно и интегрируем по  $x$ . Получаем

$$[l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^1 P_{l'}^m(x)P_l^m(x) dx = 0,$$

откуда следует ортогональность

$$\int_{-1}^1 P_{l'}^m(x)P_l^m(x) dx = 0, \quad l' \neq l. \quad (1.191)$$

■

**Пример 1.20.** Сферическая функция Лежандра  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  определяется следующим образом:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = C_{lm}P_l^m(\vartheta)e^{im\varphi}, \quad (1.192)$$

где  $P_l^m(\vartheta)$  — присоединенный полином Лежандра, выраженный через тригонометрические функции,  $C_{lm}$  — нормировочный множитель. Найти закон преобразования этой функции при инверсии системы координат. Убедиться в том, что сферические функции Лежандра ортогональны по обоим индексам при интегрировании по всему телесному углу, и записать в явном виде условие их нормировки на единицу.

**Решение.** При инверсии системы координат (см. раздел 1.1) полярные углы преобразуются по правилу  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ ,  $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$ ,  $\cos \vartheta \rightarrow -\cos \vartheta$ ,  $e^{im\varphi} \rightarrow (-1)^m e^{im\varphi}$ . На основе определения  $P_l^m(x)$  (1.189) и (1.191) находим

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \rightarrow Y_{lm}(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.193)$$

Интегрированию по всему телесному углу соответствуют пределы изменения углов  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Интегрирование по  $\varphi$  обеспечивает ортогональность сферических функций по индексу  $m$ :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{mm'}.$$

Ортогональность по индексу  $l$  обеспечивается присоединенными полиномами Лежандра (см. пример 1.19). Условие ортогональности и нормировки на единицу имеет вид

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (1.194)$$

Нормировочный множитель определяется из условия

$$2\pi |C_{lm}|^2 \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = 1.$$

Вычисление последнего интеграла см. в задаче 1.118. ■

Приведем без вывода весьма полезное соотношение, называемое **теоремой сложения сферических функций**. Если  $\theta$  — угол между двумя векторами  $(r, \vartheta, \varphi)$  и  $(r', \vartheta', \varphi')$ , т. е.

$$\cos \theta = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

то

$$P_l(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta', \varphi'). \quad (1.195)$$

Вывод этого разложения можно найти в [Арфкен (1970)] и более полное изложение в [Никифоров и Уваров (1984)]. Метод теории представлений групп подробно описан в [Виленкин (1965)], [Гельфанд и др. (1958)]. См. также [Абрамовиц и Стиган (1979)], [Градштейн и Рыжик (1971)], [Лебедев (1963)], [Колоколов и др. (2000)].

## Задачи

**1.109.** Показать, что при  $x = \cos \vartheta$  уравнение Лежандра принимает вид

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{dP_l}{d\vartheta} + l(l+1)P_l = 0. \quad (1.196)$$

**1.110.** Получить рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} (2l+1)xP_l(x) &= (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x), \\ (2l+1)P_l(x) &= P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x), \end{aligned}$$

где  $l = 1, 2, \dots$ . Для этого можно применить формулу Родригеса и прием, использованный в примере 1.12 при рассмотрении функций Бесселя.

**1.111.** С помощью рекуррентных соотношений найти пять первых полиномов Лежандра.

**1.112\*.** С помощью формулы Родригеса доказать ортогональность полиномов Лежандра с разными  $l$  и вычислить нормировочный интеграл

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (1.197)$$

УКАЗАНИЕ. Выразить нормировочный интеграл через бета-функцию Эйлера.

**1.113.** С помощью производящей функции для полиномов Лежандра получить разложение

$$\frac{1-u^2}{(1-2ux+u^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(x)u^l.$$

**1.114.** Пользуясь результатами примера 1.17, получить второй полином Лежандра в форме  $P_2 = \sum_{k=0}^2 a_k \cos k\vartheta$ .

**1.115.** Записать уравнение (1.190) для присоединенных полиномов Лежандра в сферических координатах.

**1.116\*.** Пользуясь формулой (1.189), показать, что

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (1.198)$$

УКАЗАНИЕ. Применить к произведению  $(x - 1)^l(x + 1)^l$  формулу Лейбница (см. пример 1.17).

**1.117.** Записать в явном виде присоединенные полиномы Лежандра  $P_l^m$  для  $l = 0, 1, 2, 3$ .

**1.118\*.** Вычислить нормировочный коэффициент  $C_{lm}$ , введенный в примере 1.20. Записать в явном виде сферическую функцию Лежандра.

**1.119.** Записать уравнение, которому удовлетворяет сферическая функция Лежандра  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ .

**Дельта-функция Дирака. Определение и общие свойства.** К понятию дельта-функции мы приходим, например, при попытке описать плотность заряда  $\rho(\mathbf{r})$  точечной частицы. Пусть частица находится в начале координат и имеет заряд  $e$ . Тогда, очевидно, функция  $\rho(\mathbf{r})$  должна обладать следующими свойствами:

$$\rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0. \quad (1.199)$$

Но при  $r \rightarrow 0$  плотность  $\rho(\mathbf{r})$  должна возрастать столь быстро, чтобы

$$\int_{\Delta V} \rho(\mathbf{r}) dV = e, \quad (1.200)$$

т. е. чтобы интеграл, взятый по любому объему  $\Delta V$ , включающему точку, где находится частица, имел конечное значение, равное заряду  $e$ .

Записав  $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$ , мы получим из (1.199)–(1.200) условия, определяющие трехмерную дельта-функцию:

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \quad r \neq 0; \quad \delta(\mathbf{r}) \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0. \quad (1.201)$$

$$\int_{\Delta V} \delta(\mathbf{r}) dV = 1. \quad (1.202)$$

Аналогичными соотношениями определяется одномерная дельта-функция:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \quad \delta(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0; \quad \int_{\Delta} \delta(x) dx = 1, \quad (1.203)$$

где  $\Delta$  — отрезок оси  $x$ , включающий точку  $x = 0$ .

Дельта-функция относится к классу сингулярных обобщенных функций. Она приобретает точный смысл под интегралом. Рассмотрим интеграл

от произведения дельта-функции на произвольную непрерывную и ограниченную функцию  $f(x)$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x) f(x) dx,$$

где  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$ . Поскольку  $\delta(x) = 0$  при  $x \neq 0$ , то вклад в интеграл дает только малая окрестность  $\epsilon$  точки  $x = 0$ , в которой  $f(x)$  постоянна и равна  $f(0)$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (1.204)$$

Далее, путем замены переменной  $x$  на  $x - a$  в аргументе дельта-функции, повторяя предыдущие рассуждения, находим:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - a) f(x) dx = f(a), \quad (1.205)$$

если промежуток  $(x_1, x_2)$  включает точку  $x = a$ .

Равенства (1.203) и (1.204) показывают, что  $\delta(x)$  — четная функция своего аргумента:

$$\delta(x) = \delta(-x). \quad (1.206)$$

С помощью последнего свойства, вводя переменную  $|\alpha|x = y$ , убеждаемся в справедливости соотношения

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(\alpha x) f(x) dx = \frac{1}{|\alpha|} f(0). \quad (1.207)$$

Наконец, рассмотрим интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x)) f(x) dx,$$

в котором в аргументе дельта-функции стоит некоторая гладкая функция  $g(x)$ . Вклад в интеграл дают только точки, в которых  $g(x) = 0$ , т. е.

действительные корни функции  $g(x)$ . Обозначив их через  $a_i$ , можем написать

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x))f(x) dx = \sum_i \int_{a_i-\epsilon}^{a_i+\epsilon} \delta(g(x))f(x) dx,$$

где  $\epsilon$  — малое число. Если  $f(x)$  — непрерывна, то на отрезке  $[a_i - \epsilon, a_i + \epsilon]$  можно заменить  $f(x)$  на  $f(a_i)$ , а  $g(x)$  аппроксимировать первым членом разложения:  $g(x) = g'(a_i)(x - a_i)$ . В итоге, используя (1.207), получим

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x))f(x) dx = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} f(a_i). \quad (1.208)$$

Это свойство дельта-функции можно записать в виде символического равенства

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} \delta(x - a_i). \quad (1.209)$$

Если  $g'(a_i) = 0$ , т. е.  $a_i$  — кратный корень, то соотношения (1.208) и (1.209) теряют смысл. Точно так же не имеет смысла произведение  $\delta(x)f(x)$ , если функция  $f(x)$  обладает особенностью при  $x = 0$ .

Можно определить также производную от дельта-функции. Точный ее смысл содержится в формуле

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \frac{\partial \delta(x - a)}{\partial x} dx = -\frac{\partial f(a)}{\partial a}, \quad (1.210)$$

которая получается интегрированием по частям. Аналогично определяются производные высших порядков:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta^{(n)}(x - a) dx = (-1)^n f^{(n)}(a). \quad (1.211)$$

Функция  $\delta(x)$  может рассматриваться как производная от ступенчатой функции Хевисайда  $\Theta(x)$ . Это следует из очевидного соотношения

$$\int_{x_1}^x \delta(x) dx = \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (1.212)$$

где нижний предел интегрирования  $x_1$  — любое отрицательное число. Дифференцируя это равенство по  $x$ , получаем

$$\Theta'(x) = \delta(x). \quad (1.213)$$

В равенстве (1.212) при совпадении предела интегрирования с точкой, в которой аргумент дельта-функции обращается в нуль, мы взяли **половину** значения гладкой функции  $f(x) = 1$ , т. е. воспользовались правилом интегрирования

$$\int_{x_1}^a f(x)\delta(x-a) dx = \frac{1}{2}f(a). \quad (1.213')$$

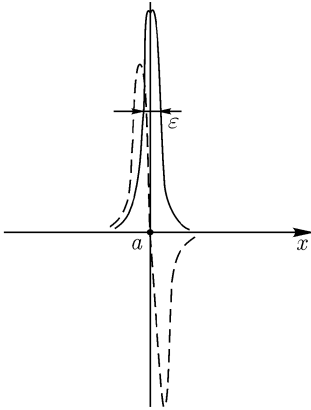


Рис. 1.10

Это правило находится в согласии со свойством (1.206) — четностью дельта-функции.

Трехмерную дельта-функцию можно рассматривать как произведение трех одномерных дельта-функций:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \delta(x-a_x)\delta(y-a_y)\delta(z-a_z). \quad (1.214)$$

Поэтому все рассмотренные выше свойства одномерных дельта-функций легко обобщаются на трехмерный случай.

**Некоторые представления дельта-функции.** Наглядное представление о дельта-функции и ее производных можно получить, рассматривая график некоторой непрерывной функции  $\delta_\epsilon(x-a)$ , такой, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x-a) dx = 1$ .

Параметр  $\epsilon$  характеризует ширину интервала, в котором рассматриваемая функция отлична от нуля (рис. 1.10).

Дельта-функция и ее производные определяются как пределы

$$\begin{aligned} \delta(x-a) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x-a), \\ \frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \delta_\epsilon(x-a)}{\partial x} \end{aligned}$$

и т. д.

Свойства дельта-функции приобретают многие несингулярные функции, зависящие от параметра, при определенных предельных значениях это-



го параметра. Наиболее употребительны такие представления дельта-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right). \quad (1.215)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{x}. \quad (1.216)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Kx}{Kx^2}. \quad (1.217)$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-x^2/\epsilon}. \quad (1.218)$$

Из (1.216) получаются следующие представления:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \cos kx dk. \quad (1.219)$$

Их можно рассматривать как разложение дельта-функции в интеграл Фурье<sup>6</sup>. Иногда формулы (1.219) записывают, опуская знак предельного перехода и интегрируя в бесконечных пределах.

Легко убедиться в том, что любое из представлений (1.215)–(1.219) согласуется со всеми свойствами (1.203)–(1.207), а также с определением (1.210) производной от дельта-функции. **При вычислении интегралов с дельта-функциями с помощью представлений типа (1.215)–(1.219) нужно производить предельный переход после интегрирования.** Например, при использовании (1.216) имеем

$$\int_{-a}^b \delta(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-aK}^{bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\sin y}{y} dy = f(0), \quad (1.220)$$

тогда как предел (1.216) сам по себе не существует.

**Представление дельта-функции через контурные интегралы в комплексной плоскости.** Воспользуемся формулой Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a), \quad (1.221)$$

<sup>6</sup>Об интегралах Фурье см. следующий раздел.

где  $f(z)$  — функция, не имеющая особенностей внутри области, ограниченной замкнутым контуром  $C$ , и на самом контуре в плоскости комплексного переменного  $z$ , интегрирование по которому производится против часовой стрелки. Из сравнения (1.221) с (1.205) следует, что величину

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - a}$$

можно рассматривать как представление  $\delta(z - a)$ , если условиться производить интегрирование по замкнутому контуру, окружающему точку  $z = a$ , такому, внутри которого и на самом контуре другие особенности подынтегрального выражения отсутствуют. В частности, контур  $C$  может представлять собой окружность малого радиуса.

В приложениях нередко возникает интеграл по действительной оси вида

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x - a} dx,$$

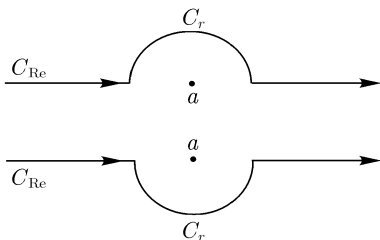


Рис. 1.11

где  $f(x)$  не имеет особенностей на отрезке  $[x_1, x_2]$ , а пределы  $x_1, x_2$  могут быть бесконечными. Такой интеграл при  $a$  действительном не имеет определенного значения, так как подынтегральное выражение имеет полюс на контуре интегрирования. При вычислении интеграла необходима дополнительная информация, которая должна состоять в указании правила обхода особой точки. Правило обхода устанавливается обычно на основе физических аргументов:

$$\int_{C_{\text{Re}} + C_r} \frac{f(x)}{x - a} dx = \int_{C_r} \frac{f(x)}{x - a} dx + \int_{C_{\text{Re}}} \frac{f(x)}{x - a} dx.$$

Это означает, что стоящий в левой части приведенного выше соотношения интеграл, в котором интегрирование проводится по всему контуру, может быть представлен (см. рис. 1.11) в виде суммы двух интегралов. В первом из них интегрирование ведется либо по верхней, либо по нижней полуокружности малого радиуса  $C_r$ , во втором — по всему остальному, идущему вдоль действительной оси участку контура (эта часть контура обозначена символом  $C_{\text{Re}}$ ).

Интеграл по полуокружности радиуса  $\epsilon \rightarrow 0$  дает половину вычета (со знаком минус для верхнего контура на рис. 1.11, поскольку обход полюса —

по часовой стрелке):

$$\int_{C_r} \frac{f(x)}{x-a} dx = -i\pi f(a);$$

интеграл по действительной оси с исключенной особой точкой вычисляется в смысле главного значения:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{x_1}^{a-\epsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{a+\epsilon}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx \right\} \equiv \mathcal{P} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx.$$

При обходе полюса по нижней полуокружности меняется знак полувычета. В итоге мы получаем следующие правила вычисления интеграла (формулы Сохоцкого):

$$\frac{1}{x-a} = \mp i\pi \delta(x-a) + \mathcal{P} \frac{1}{x-a}. \quad (1.222)$$

Символ  $\mathcal{P}$  обозначает главное значение (верхний знак — для верхнего контура, нижний — для нижнего на рис. 1.11).

Вместо деформации контура интегрирования можно сместить положение полюса на малое расстояние от действительной оси. Это достигается путем добавления к числу  $a$  малой мнимой части:  $a \rightarrow a \mp i\epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ . При такой замене тождество (1.222) примет следующую форму:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-a \pm i\epsilon} = \mp i\pi \delta(x-a) + \frac{\mathcal{P}}{x-a}. \quad (1.223)$$

Оба тождества, (1.222) и (1.223), носят символический (операторный) характер и должны пониматься в том смысле, что интегрирование правой и левой частей с любой непрерывной функцией дает один и тот же результат.

Отделив в левой части равенства (1.223) действительную и мнимую части комплексного выражения, получим для  $\delta(x-a)$  представление (1.215) (с заменой  $x \rightarrow x-a$ ), а для главного значения

$$\frac{\mathcal{P}}{x-a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x-a}{(x-a)^2 + \epsilon^2}. \quad (1.224)$$

Другое представление главного значения, аналогичное представлению (1.216) для дельта-функции, имеет вид

$$\frac{\mathcal{P}}{x-a} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos Kx}{x}. \quad (1.224a)$$

Строгая математическая теория обобщенных функций содержится в [Владимиров (1976)], а прикладные аспекты описаны в [Зельдович и Мышкис (1972)]. См. также [Колоколов и др. (2000)].

## Задачи

**1.120.** Вычислить интегралы

$$\int_{-2}^3 (x^2 - x - 5)\delta(-3x)dx, \quad \int_{-10}^{-3} (x + 3)\delta(x + 5) dx,$$

$$\int_0^5 (x + 5)\delta(x + 5) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha x)\delta(x^2 + x - 2) dx, \quad \alpha = \text{const.}$$

**1.121.** Упростить выражения  $(x - a)\delta(x - a)$ ,  $f(x)\delta(x - a)$ ,  $(3x^3 - 7x)\delta(2x^2 - 6x - 4)$ .

**1.122.** Доказать, что представления (1.215), (1.217), (1.218) изображают дельта-функцию. Для этого вычислить интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx$  от непрерывной функции  $f(x)$ , подставляя вместо  $\delta(x)$  правую часть соответствующего представления, и убедиться в том, что после перехода к пределу указанные интегралы дают  $f(0)$ .

**1.123.** Записать трехмерные дельта-функции  $\delta(\mathbf{r})$ ,  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  в цилиндрических координатах, где  $\mathbf{a} = (a_{\perp}, \alpha_0, a_z)$  — постоянный вектор, заданный своими цилиндрическими координатами.

**1.124.** Сделать то же самое в сферических координатах,  $\mathbf{a} = (a, \vartheta_0, \alpha_0)$ .

**1.125.** Записать с помощью дельта-функции первую производную от разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x < 1, \\ 2, & \text{если } x = 1, \\ x^2 + 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

**1.126.** Пусть функция  $f(x)$  имеет разрывы первого рода (конечные скачки) в точках  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Записать ее первую производную через дельта-функцию.

**1.127.** Найти правило вычисления интеграла от произведения  $f(x)x^n\delta^{(m)}(x)$ , где  $f(x)$  — функция, дифференцируемая (в классическом смысле) при  $x = 0$ ,  $\delta^{(m)}(x)$  —  $m$ -я производная от дельта-функции,  $n$  — целое положительное число.

**1.128.** Показать, что функция  $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  удовлетворяет уравнению Пуассона с дельтаобразной правой частью:

$$\Delta G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.225)$$

**Разложение по полным системам ортонормированных функций.**  
**Общее рассмотрение.** Пусть имеется некоторая система линейно независимых функций,  $\varphi(x, \lambda_n) \equiv \varphi_n(x)$ , в общем случае комплекснозначных, которые определены на некотором интервале  $[a, b]$  действительной переменной  $x$  и зависят от действительного параметра  $\lambda$ , принимающего дискретный ряд значений:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Такие системы функций часто возникают при решении обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями, и число функций в них обычно бесконечно велико:  $n = 0, 1, \dots$ . Пусть функции обладают следующими свойствами: а) они нормированы на единицу, т. е.

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = 1; \quad (1.226)$$

б) они взаимно ортогональны, т. е.

$$\int \varphi_m^*(x)\varphi_n(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \quad (1.227)$$

Здесь звездочкой сверху  $\varphi^*$  обозначена комплексно сопряженная величина. Такие системы функций называются **ортонормированными**, а равенства (1.226) и (1.227) можно записать единым образом с помощью символа Кронекера:

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad (1.228)$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию  $f(x)$  с интегрируемым квадратом, т. е. такую, для которой интеграл  $\int_a^b |f(x)|^2 dx$  конечен. В случае конечного интервала  $[a, b]$  этому условию будут удовлетворять любая кусочно-непрерывная функция, имеющая ограниченное число конечных скачков на этом интервале. Выясним возможность разложения такой функции в ряд по функциям  $\varphi_n(x)$ . Для этого сначала аппроксимируем рассматриваемую функцию линейной суперпозицией, включающей  $n$

базисных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_n \varphi_k(x) + R_n(x), \quad (1.229)$$

где через  $R_n(x)$  обозначен остаток ряда. Коэффициенты  $c_n$  суперпозиции выберем таким образом, чтобы погрешность аппроксимации была наименьшей. За меру погрешности примем величину

$$G_n = \int_a^b |R_n(x)|^2 dx = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_n \varphi_k(x) \right|^2 dx. \quad (1.230)$$

Раскрывая квадрат модуля и используя условие ортонормированности (1.228), будем иметь

$$\begin{aligned} G_n = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n c_k \int_a^b f^*(x) \varphi_k(x) dx - \\ - \sum_{k=0}^n c_k^* \int_a^b f(x) \varphi_k^*(x) dx + \sum_{k=0}^n c_k^* c_k. \end{aligned} \quad (1.231)$$

Необходимое условие минимума величины  $G_n$ , рассматриваемой как функция коэффициентов  $c_k$ , дает

$$c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k^*(x) dx, \quad (1.232)$$

а погрешность разложения принимает вид

$$G_n = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n |c_k|^2. \quad (1.233)$$

Поскольку  $G_n \geq 0$  по определению, то при любом  $n$  имеет место неравенство:

$$\sum_{k=0}^n |c_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (1.234)$$

Если для всякой функции с интегрируемым квадратом в пределе имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 0, \quad (1.235)$$

или, в другой форме,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \quad (1.236)$$

**(равенство Парсеваля)**, то система функций  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  называется **полной** или **замкнутой**. Эти термины означают, что других функций, которые были бы линейно независимы от  $\varphi_n(x)$  и ортогональны к ним, кроме нулевой функции, не существует: любая функция рассматриваемого класса разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1.237)$$

где коэффициенты разложения даются формулами (1.232). Отметим, что приведенные выше условия обеспечивают сходимость ряда (1.237) «в среднем», т. е. обращение в нуль интеграла (1.230). Это означает, что сходимость ряда к рассматриваемой функции  $f(x)$  может нарушаться в отдельных точках, число которых конечно. Если система функций  $\varphi_n(x)$  ортонормированная, но не полная, то вместо равенства Парсеваля (1.236) выполняется **неравенство Бесселя**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (1.238)$$

**Пример 1.21.** Показать, что полная ортонормированная система функций удовлетворяет соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x') \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x') \varphi_k^*(x) = \delta(x - x'), \quad (1.239)$$

которое можно рассматривать как другую, отличную от (1.236), форму условия полноты (замкнутости).

**Решение.** Подставив в (1.237) коэффициенты разложения (1.232) и поменяв порядок операций суммирования и интегрирования, будем иметь

$$f(x) = \int_a^b dx' f(x') \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x') \varphi_k(x) = \int_a^b K(x, x') f(x') dx', \quad (1.240)$$

где

$$K(x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x') \varphi_k(x). \quad (1.241)$$

Поскольку равенство (1.240) должно выполняться для любой функции  $f(x)$  из широкого класса, то ядро  $K(x, x')$  интегрального преобразования (1.240) должно обладать свойством дельта-функции. В этом можно убедиться, вычислив коэффициенты разложения  $\delta(x - x')$  по системе функций  $\varphi_k(x)$  согласно (1.232)<sup>7</sup>:

$$c_n = \int \delta(x - x') \varphi_n^*(x) dx = \varphi_n^*(x').$$

Следовательно, равенство (1.239) имеет место и представляет собой разложение дельта-функции по функциям  $\varphi_k(x)$ . ■

В некоторых физических задачах, особенно в квантовой механике, в полную систему входит не только дискретный ряд функций  $\varphi_n(x)$ , но также функции  $\varphi(x, \lambda)$ , которые зависят от параметра  $\lambda$ , принимающего непрерывные значения из некоторого интервала, либо только функции с непрерывным параметром. В этих случаях в разложение произвольной функции будут входить и сумма, и интеграл по непрерывным значениям  $\lambda$  либо только интеграл, а условие замкнутости примет вид

$$\delta(x - x') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x') \varphi_k(x) + \int \varphi^*(x', \lambda) \varphi(x, \lambda) d\lambda. \quad (1.242)$$

**Ряд Фурье.** Доказательство полноты конкретных систем функций представляет собой нетривиальную математическую задачу, решение которой можно найти в специальных руководствах (см., например, [Ильин и Позняк (1973)], [Арфкен (1970)], [Ли (1965)]). К числу полных ортонормированных систем относится рассмотренная выше система сферических функций Лежандра  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ ,  $l = 0, 1, \dots, m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$ .

<sup>7</sup>Здесь мы выходим за пределы класса обычных функций с интегрируемым квадратом и используем обобщенные функции.



По таким функциям можно разложить любую ограниченную функцию «на поверхности сферы», т. е. зависящую от углов  $\vartheta, \varphi$ . В отсутствие зависимости от  $\varphi$  полную систему на сфере образуют полиномы Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$ .

Одной из наиболее употребительных ортонормированных на интервале  $[-\pi, +\pi]$  и полных систем функций является тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos n\tau}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin n\tau}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.243)$$

Ортонормированность этой системы функций нетрудно проверить непосредственно. Разложение некоторой функции в ряд по тригонометрическим функциям образует ее **ряд Фурье**. Впрочем, иногда рядом Фурье (в широком смысле) называют и общее разложение (1.237) по любой полной ортонормированной системе функций.

Поскольку тригонометрические функции (1.243) периодичны, то разлагаемая функция будет представлена рядом Фурье при всех  $\tau$  лишь в том случае, если она периодична с тем же периодом  $2\pi$ , т. е.  $f(\tau) = f(\tau + 2n\pi)$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , либо задана на конечном промежутке  $b - a = 2L > 0$ . В последнем случае в (1.243) нужно заменить переменную  $\tau$  на  $\pi x/L$  и сдвинуть начало отсчета координаты  $x$  на середину интервала  $[a, b]$ , т. е. ввести  $x' = x - a - L$ ,  $-L \leq x' \leq +L$ . Рассматриваемая функция, если для нее построить ряд Фурье, будет продолжена в этом случае периодически на всю действительную ось  $Ox$ . Непериодическая функция, заданная на бесконечном интервале, правильно представляется рядом Фурье лишь на конечном отрезке  $2L$ . Для ее представления на всей оси  $Ox$  нужно использовать интеграл Фурье (см. ниже).

Если ряд Фурье представляет функцию, имеющую разрывы первого рода (конечные скачки), то в точке скачка  $x = x_0$  он сходится к полусумме значений функции, взятых по обе стороны скачка:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]. \quad (1.244)$$

**Пример 1.22.** Записать разложение Фурье на интервале  $[-L, +L]$ , выбрав в качестве полной системы функций<sup>8</sup> экспоненты с мнимым показателем  $\exp(in\pi x/L)$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$

<sup>8</sup>Полнота системы следует из того, что использовавшиеся ранее  $\sin n\tau, \cos n\tau$  линейно выражаются через  $\exp(in\tau)$ . Поэтому запись через экспоненты означает другую форму тригонометрического ряда.

**Решение.** Убеждаемся в том, что рассматриваемые экспоненты взаимно ортогональны на интервале  $[-L, +L]$ :

$$\int_{-L}^L \exp\left\{\frac{i(m-n)\pi x}{L}\right\} dx = 2L\delta_{mn}.$$

Записываем искомое разложение в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp\left\{\frac{in\pi x}{L}\right\}. \quad (1.245)$$

Для определения коэффициентов разложения  $F_n$  умножаем обе части (1.245) на  $\exp(im\pi x/L)$  и интегрируем по рассматриваемому интервалу. В силу ортогональности экспонент после интегрирования в сумме по  $n$  останется только один член с  $n = m$ , что позволяет найти коэффициенты ряда Фурье:

$$F_m = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp\left\{\frac{im\pi x}{L}\right\} dx. \quad (1.246)$$

Как следует из (1.246), если  $f(x)$  — действительная функция, то коэффициенты Фурье (1.246), будучи в общем случае комплексными величинами, удовлетворяют условию  $F_{-n} = F_n^*$ . Это условие обеспечивает действительность суммы ряда (1.245). ■

Разложение Фурье очевидным образом обобщается на случай функций, зависящих от нескольких переменных.

## Задачи

**1.129.** Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале  $[-\pi, +\pi]$  условиями  $f(x) = x$  для  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $f(-x) = f(x)$ .

**1.130.** Сделать то же самое для функции  $f(x) = a$  при  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .

**1.131.** Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале  $[-L, +L]$  условиями  $f(x) = a$  при  $0 \leq x < L/2$ ,  $f(x) = 0$  при  $L/2 < x \leq L$ ,  $f(-x) = f(x)$ .

**Интеграл Фурье.** Рассмотрим систему функций, зависящих от действительного параметра  $\lambda$ , который принимает непрерывный ряд значений:

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x}, \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (1.247)$$

Эти функции определены и ограничены при любых действительных значениях координаты  $x$ , т. е. на бесконечном интервале  $-\infty < x < \infty$ . Пользуясь представлением дельта-функции (1.219), вычисляем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) \varphi^*(x', \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(x-x')} = \delta(x-x').$$

Полученное соотношение совпадает с (1.242) (в отсутствие дискретных значений  $\lambda$ ) и свидетельствует о полноте системы функций  $\varphi(x, \lambda)$ . Поэтому любую функцию из весьма широкого класса, определенную на всей действительной оси  $Ox$ , можно разложить по функциям  $\varphi(x, \lambda)$ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (1.248)$$

Функция  $F(\lambda)$  называется **фурье-образом** исходной функции  $f(x)$  или ее **амплитудой Фурье**. Ее можно найти тем же способом, каким были найдены коэффициенты ряда Фурье в примере 1.22: умножаем обе части равенства (1.248) на  $\varphi^*(x, \mu)$  и интегрируем по координате  $x$ . Имеем, меняя порядок интегрирования

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi^*(x, \mu) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(\lambda-\mu)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F(\lambda) \delta(\lambda - \mu) = F(\mu). \end{aligned} \quad (1.249)$$

Это равенство и позволяет вычислить амплитуду Фурье заданной функции  $f(x)$ .

Прямое и обратное преобразования Фурье часто удобнее записывать в несимметричной форме:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{2\pi}, \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (1.250)$$

Действительность интеграла Фурье обеспечивается соотношением

$$F(-\lambda) = F^*(\lambda) \quad (1.251)$$

при действительных  $\lambda$  и  $f(x)$ .

Разложение в интеграл Фурье легко обобщается на случай нескольких измерений. Например, в трехмерном пространстве фурье-преобразование можно записать в виде

$$f(\mathbf{r}) = \int F(\boldsymbol{\varkappa}) e^{i\boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3 \boldsymbol{\varkappa}}{(2\pi)^3}, \quad F(\boldsymbol{\varkappa}) = \int f(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}. \quad (1.252)$$

В обоих интегралах интегрирование производится по всему пространству.

**Пример 1.23.** Получить разложение в интеграл Фурье для бесконечного интервала  $-\infty < x < \infty$  путем предельного перехода  $L \rightarrow \infty$  в формулах (1.245), (1.246).

**Решение.** При  $L \rightarrow \infty$  соседние члены в сумме (1.245) почти одинаковы, поэтому суммирование можно заменить интегрированием по  $dn = (L/\pi) d\lambda$  в пределах  $-\infty, +\infty$ . Обозначив  $\lim_{L \rightarrow \infty} 2LF_n$  через  $F(\lambda)$ , получим из (1.245), (1.246) соотношения (1.250). ■

Полезные сведения о разложениях по системам функций, рядах и интегралах Фурье, кроме уже упомянутых источников, содержатся в книгах [Ильин и Позняк (1973)], [Толстов (1951)], [Бейтмен и Эрдейи (1969, 1970)]

## Задачи

**1.132.** Выразить фурье-образ производной  $f'(x)$  через фурье-образ  $F(\lambda)$  функции  $f(x)$ . Предполагается, что интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  сходится.

**1.133.** Сделать то же самое для функции  $f(ax) \exp(ibx)$ .

**1.134.** Вычислить фурье-образ функции  $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ .

УКАЗАНИЕ. Рассматривая  $x$  как комплексную переменную, замкнуть контур интегрирования дугой бесконечного радиуса и применить теорему о вычетах.

**1.135.** Вычислить фурье-образ функции  $\exp(-\alpha^2 x^2)$ .

**1.136.** Вычислить трехмерный фурье-образ функции  $f(r) = e^{-\alpha^2 r^2}$ .

**1.137\*.** Вычислить трехмерный фурье-образ функции  $G(r) = r^{-1}$ .

**1.138\*.** Произвести разложение плоской волны  $\exp(ikr \cos \theta)$  в ряд по полиномам Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$ . Вычислить коэффициенты разложения, воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра.

**1.139.** Пусть направления векторов  $\boldsymbol{x}$  и  $\boldsymbol{r}$  задаются в сферической системе координат углами  $(\theta, \phi)$  и  $\vartheta, \varphi$  соответственно. Разложить плоскую волну  $\exp(i\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{r})$  в ряд по сферическим функциям Лежандра.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться теоремой сложения для сферических функций.

**1.140\*.** Доказать тождество

$$\frac{1}{\sqrt{r_{\perp}^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(kr_{\perp}) dk,$$

где  $r_{\perp}$  и  $z$  — цилиндрические координаты.

## 1.4. Ответы и решения

**1.1.** Из равенства (1.6), которое является следствием определения (1.3), вытекает  $|\hat{a}|^2 = 1$ , т. е.  $|\hat{a}| = \pm 1$ . При повороте на нулевой угол  $\hat{a} = \hat{1}$  и  $|\hat{a}| = |\hat{1}| = +1$ ; но поскольку элементы матрицы поворота являются непрерывными функциями трех параметров, задающих поворот (например, трех углов Эйлера, см. задачу 1.20), то и при повороте на произвольный угол  $|\hat{a}| = 1$ . При отражении трех координатных осей матрица преобразования в  $g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$  и  $|\hat{g}| = -1$ . Повороту, сопровождаемому отражением осей, соответствует произведение матриц  $\hat{a}\hat{g} = \hat{g}\hat{a}$ , для которого  $|\hat{a}\hat{g}| = |\hat{a}||\hat{g}| = -1$ . Преобразования с  $|\hat{a}| = +1$  называются собственными, а с  $|\hat{a}| = -1$  — несобственными.

**1.3.**

$$P'_{\alpha\beta\dots\kappa} = |\hat{a}| a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} \dots a_{\kappa\rho} P_{\mu\nu\dots\sigma}. \quad (1.253)$$

Здесь  $|\hat{a}|$  — определитель матрицы преобразования. При инверсии трех координатных осей матрица преобразования  $a_{\alpha\mu} = -\delta_{\alpha\mu}$ , поэтому  $|\hat{a}| = -1$  и  $P'_{\alpha\beta\dots\gamma} = (-1)^{\varepsilon+1} P_{\alpha\beta\dots\gamma}$  в соответствии с определением псевдотензора  $s$ -го ранга. Формула же (1.5) правильно описывает преобразование истинного (полярного) тензора при поворотах и отражениях, но не описывает

отражения псевдотензора. Преобразование (1.253) при поворотах совпадает с (1.5), так как в этом случае  $|\hat{a}| = +1$ .

Правило преобразования антисимметричного тензора III ранга  $e_{\alpha\beta\gamma}$ , описывающее поворота и отражения, также должно содержать определитель  $|\hat{a}|$ . В отсутствие определителя компоненты тензора изменяли бы знак при отражениях.

**1.4.**

$$T_{\alpha\beta} = (1/2)(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) + (1/2)(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}). \quad (1.254)$$

**1.5.**

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta}^h + T_{\alpha\beta}^{ah}, \quad \text{где} \quad T_{\alpha\beta}^h = (1/2)(T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^*), \\ T_{\alpha\beta}^{ah} &= (1/2)(T_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}^*). \end{aligned} \quad (1.255)$$

**1.9.**  $T_{\alpha\beta}$  образуют истинный тензор II ранга.

**1.10.**

$$C_{\alpha} = (1/2)e_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\gamma}, \quad (1.256)$$

т. е.  $C_1 = A_{23} = -A_{32}$ ,  $C_2 = A_{31} = -A_{13}$ ,  $C_3 = A_{12} = -A_{21}$ .

**1.11.**  $A \times B$  — псевдовектор или дуальный ему истинный антисимметричный тензор II ранга  $A_{\beta}B_{\gamma} - A_{\gamma}B_{\beta}$ ;  $[A \times B] \times C$  — полярный вектор,  $[A \times B] \cdot C$  — псевдоскаляр.

**1.13.**

$$dS_{\alpha} = e_{\alpha\beta\gamma} dx_{\beta} dx'_{\gamma} = (1/2)e_{\alpha\beta\gamma} dS_{\beta\gamma}, \quad (1.257)$$

где  $dS_{\beta\gamma} = dx_{\beta} dx'_{\gamma} - dx_{\gamma} dx'_{\beta}$  — проекция площади параллелограмма на координатную плоскость  $x_{\beta}x_{\gamma}$ .

**1.14.**

$$dV = [d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}'] d\mathbf{r}'' = e_{\alpha\beta\gamma} dx_{\alpha} dx'_{\beta} dx''_{\gamma}. \quad (1.258)$$

Элемент объема  $dV$  представляет собой псевдоскаляр. При  $d\mathbf{r} = e_1 dx_1$ ,  $d\mathbf{r}' = e_2 dx_2$ ,  $d\mathbf{r}'' = e_3 dx_3$  получаем обычное выражение для элемента объема в декартовых координатах  $dV = dx_1 dx_2 dx_3 = dx dy dz$ .

**1.16.**

$$\cos \theta \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\alpha - \alpha'). \quad (1.259)$$

1.17.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_0 = i(A_{-1}B_{+1} - A_{+1}B_{-1}),$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\pm 1} = \pm(A_0B_{\pm 1} - A_{\pm 1}B_0),$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \sum_{\mu=-1}^{+1} (-1)^\mu A_{-\mu}B_\mu,$$

$$r_\mu = r(4\pi/3)^{1/2}(-1)^\mu Y_{1\mu}(\vartheta, \alpha).$$

1.18. При переходе от декартовых ортов к сферическим (рис. 1.12 а) имеем  $e'_\alpha = a_{\alpha\beta}e_\beta$ , где  $e_\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3$ ) – декартовы орты,  $e'_\alpha$  ( $\alpha = r, \vartheta, \alpha$ ) – сферические орты,

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \alpha & \sin \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \alpha & \cos \vartheta \sin \alpha & -\sin \vartheta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \alpha & \cos \vartheta \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

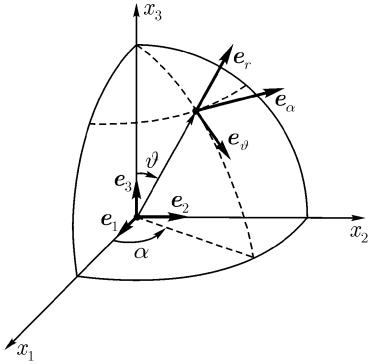


Рис. 1.12 а

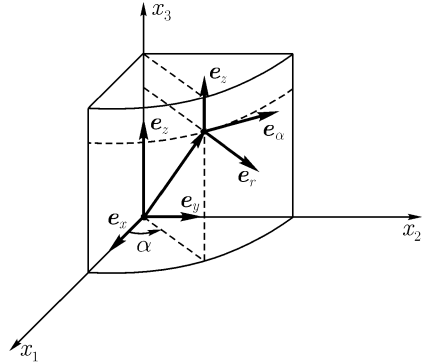


Рис. 1.12 б

При переходе от декартовых ортов к цилиндрическим ортам  $e_r, e_\alpha, e_z$  имеем (рис. 1.12 б)

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.19.

$$\widehat{g} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.260)$$

1.20. Перемножая матрицы типа (1.8), получим

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\alpha_1 \theta \alpha_2) &= \widehat{g}(\alpha_2) \widehat{g}(\theta) \widehat{g}(\alpha_1) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \theta \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \theta \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & \sin \theta \sin \alpha_2 \\ -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \theta \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \theta \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & \sin \theta \cos \alpha_2 \\ \sin \theta \sin \alpha_1 & -\sin \theta \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.261)$$

1.21.

$$\widehat{d}(\alpha \theta \alpha_2) = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}(1 + \cos \theta)/2 & -ie^{i\alpha_2} \sin \theta/\sqrt{2} & -e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)}(1 - \cos \theta)/2 \\ -ie^{i\alpha_1} \sin \theta/\sqrt{2} & \cos \theta & -ie^{-i\alpha_1} \sin \theta/\sqrt{2} \\ -e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}(1 - \cos \theta)/2 & -ie^{-i\alpha_2} \sin \theta/\sqrt{2} & e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)}(1 + \cos \theta)/2 \end{pmatrix}.$$

1.22. Матрица поворота на нулевой угол равна единице (тождественное преобразование), а при повороте на малый угол  $|\varepsilon_{\alpha\beta}| \ll 1$ . Для доказательства антисимметрии  $\widehat{\varepsilon}$  воспользуемся инвариантностью  $r^2 = \delta_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$  относительно вращения. Поскольку  $x'_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta} x_\beta$ , то с точностью до малых величин первого порядка имеем  $r'^2 = r^2 + 2\varepsilon_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ . Из инвариантности  $r^2$  следует, что  $\varepsilon_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$  при произвольных  $x_\alpha$ , а это возможно только при  $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ .

Введем вектор  $\delta\varphi$  с компонентами  $\delta\varphi_\alpha = (1/2)e_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\beta\gamma}$ . Тогда  $r' = r + \delta\varphi \times r$ , откуда видно, что  $\delta\varphi$  представляет собой вектор малого угла поворота, направление которого указывает ось вращения, а величина — угол поворота.

1.23. Если повороты задаются малыми векторами  $\delta\varphi_1$  и  $\delta\varphi_2$ , то после второго поворота

$$r'' = r' + \delta\varphi_2 \times r' = r + (\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2) \times r + \delta\varphi_2 \times (\delta\varphi_1 \times r)$$

Вектор результирующего поворота  $\delta\varphi = \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2$  можно ввести только в пренебрежении последним членом II порядка.

Некоммутативность матриц поворота в общем случае можно увидеть из выражения (1.261): выполнение поворотов в последовательности  $\alpha_2, \theta, \alpha_1$ , обратной той, для которой записана матрица (1.261), соответствует замене  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ . При этом вид матрицы изменится, если  $\theta \neq 0$ . Случай  $\theta = 0$  отвечает поворотам на углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  вокруг одной и той же оси  $Ox_3$ , и такие повороты коммутативны.



**1.24.** Произвольный действительный тензор  $\Pi$  ранга можно записать в виде  $T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}$ , а произвольный эрмитов тензор — в виде  $T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + iA_{\alpha\beta}$ , где  $S_{\alpha\beta}$  и  $A_{\alpha\beta}$  — симметричный и антисимметричный действительные тензоры. Антисимметричный тензор  $A_{\alpha\beta}$  эквивалентен вектору (см. зад. 1.10), который нельзя обратить в нуль никаким поворотом. Поэтому диагонализуются только действительная симметричная часть произвольного тензора  $\Pi$  ранга.

**1.25.**

$$S_{\alpha\beta} = \lambda^{(1)} n_{\alpha}^{(1)} n_{\beta}^{(1)} + \lambda^{(2)} n_{\alpha}^{(2)} n_{\beta}^{(2)} + \lambda^{(3)} n_{\alpha}^{(3)} n_{\beta}^{(3)}. \quad (1.262)$$

**1.26.** Раскрыв определитель (1.27) и учитывая, что главные значения тензора  $\lambda$  будут инвариантами только в случае, если таковыми являются коэффициенты алгебраического уравнения 3-й степени, находим три инварианта:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)}, \quad (1.263)$$

$$I_2 = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + \lambda^{(1)}\lambda^{(3)} + \lambda^{(2)}\lambda^{(3)}, \quad (1.264)$$

$$I = D = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}, \quad (1.265)$$

где  $D = |\hat{T}|$  — определитель тензора, а  $D_{\alpha\beta}$  — алгебраические дополнения этого определителя. Выражения в правых частях равенств следуют из теоремы Виета о связи коэффициентов кубического уравнения с его корнями. Полученные результаты относятся к произвольному тензору  $\Pi$  ранга.

**1.27.** Разложения определителя  $D = |\hat{T}|$  по элементам  $\alpha$ -й строки или  $\beta$ -го столбца записываются соответственно в виде

$$T_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma} = D \delta_{\alpha\beta}, \quad D_{\gamma\alpha} T_{\gamma\beta} = D \delta_{\alpha\beta},$$

где  $D_{\gamma\alpha} = (-1)^{\alpha+\gamma} \Delta_{\gamma\alpha}$  — алгебраическое дополнение,  $\Delta_{\gamma\alpha}$  — минор определителя  $D$ , т. е. определитель, получающийся вычеркиванием в последнем  $\gamma$ -й строки и  $\beta$ -го столбца. Согласно (1.265) определитель тензора  $D$  — инвариант, а поскольку  $\delta_{\alpha\beta}$  — тензор, то алгебраические дополнения  $D_{\alpha\beta}$  также образуют тензор. Отношения

$$T_{\alpha\beta}^{-1} = D_{\alpha\beta}/D \quad (1.266)$$

образуют тензор, обратный  $T$ . Для существования обратного тензора необходимо и достаточно, чтобы  $D = |T| \neq 0$ .

$$1.29. \text{ а) } A^2(B \cdot C) + (A \cdot B)(A \cdot C); [(A \times B) \times C] \cdot [A' \times B'] \times C';$$

1.31.

$$(A \cdot A')(B \cdot B')(C \cdot C') + (A \cdot B')(B \cdot C')(C \cdot A') + \\ + (B \cdot A')(C \cdot B')(A \cdot C') - (A \cdot C')(C \cdot A')(B \cdot B') - \\ - (A \cdot B')(B \cdot A')(C \cdot C') - (B \cdot C')(C \cdot B')(A \cdot A').$$

1.32. Проведем доказательства для вектора и тензора II ранга.

а) Так как компоненты вектора по условию должны быть одинаковы во всех системах отсчета, то при любом повороте  $A'_i = A_i$ , т.е.  $A'_x = A_x$ ,  $A'_y = A_y$ ,  $A'_z = A_z$ . Повернув систему координат вокруг оси  $oz$  на угол  $\pi$ , из формул преобразования компонент вектора при вращениях, получим  $A'_x = -A_x$ ,  $A'_y = -A_y$ ,  $A'_z = A_z$ . Эти равенства совместимы с предыдущими только в том случае, если  $A_x = A_y = 0$ . Произведя поворот вокруг оси  $oz$  на угол  $\pi$ , точно так же докажем, что  $A_z = 0$ , т.е. вектор  $A = 0$ .

б) Любой тензор II ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:  $T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$ . Антисимметричный тензор эквивалентен некоторому псевдовектору и, в силу доказанного выше свойства вектора, его компоненты не зависят от системы отсчета только тогда, когда они равны нулю. Поэтому рассмотрим симметричный тензор  $S_{ik}$ .

Выберем систему координат, в которой  $S_{ik}$  имеет диагональный вид  $\lambda^{(i)}\delta_{ik}$ . Если  $\lambda^{(i)}$  не равны друг другу, то компоненты тензора будут зависеть от выбора осей, т.е. от того, какой цифрой (1, 2 или 3) обозначена данная ось. Только при  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda$  компоненты тензора не будут зависеть от выбора осей. При этом тензор будет иметь вид  $\lambda\delta_{ik}$ , что и требовалось доказать.

1.33. Искомые средние значения равны интегралам:

$$\bar{n}_\alpha = \frac{1}{4\pi} \int n_\alpha d\Omega, \quad \overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{4\pi} \int n_\alpha n_\beta d\Omega \dots$$

Величины  $\bar{n}_\alpha$ ,  $\overline{n_\alpha n_\beta}$  и т.д. являются тензорами соответственно I, II и т.д. рангов. С другой стороны, из их определения следует, что эти величины должны быть инвариантны относительно поворотов. Поэтому они будут выражаться через такие тензоры, компоненты которых не зависят от системы отсчета. На основе предыдущей задачи получим:

$$\bar{n}_\alpha = 0, \quad \overline{n_\alpha n_\beta} = (1/3)\delta_{\alpha\beta}, \quad \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} = 0, \\ \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu} = (1/15)(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}).$$

$$1.34. \quad a^2/3, \quad a \cdot b/3, \quad a/3, \quad 2a^2/3, \quad 2a \cdot b/3.$$

$$[(a \cdot b)(c \cdot d) + (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]/15.$$

$$1.35. \quad n^2, \quad n'^2, \quad l^2, \quad n \cdot n', \quad (n \times n') \cdot l, \quad (n \cdot l)^2, \quad (n' \cdot l)^2, \quad (n \cdot l)(n' \cdot l).$$

$$1.36. \quad n \cdot l, \quad n' \cdot l, \quad n_1 \cdot (n_2 \times n_3).$$

1.37.

$$а) \quad a_\alpha^\beta = e'_\alpha \cdot e^\beta;$$

б) если  $e_\beta = (\hat{a}^{-1})_{\beta\alpha} e'_\alpha$ , то  $(\hat{a}^{-1})_{\beta\alpha} = e'^\alpha \cdot e_\beta = a^\alpha_\beta \neq a_\alpha^\beta$ ; по определению обратной матрицы  $a_\alpha^\beta a^\gamma_\beta = \delta^\gamma_\alpha$ ,  $a_\beta^\alpha a^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma = \delta^\gamma_\alpha$ ;

$$в) \quad e'^\alpha = a^\alpha_\beta e^\beta, \quad e^\alpha = a_\beta^\alpha e'^\beta;$$

$$г) \quad A'_\beta = a_\beta^\alpha A_\alpha, \quad A'^\beta = a^\beta_\alpha A^\alpha; \quad A_\alpha = a^\beta_\alpha A'_\beta, \quad A^\alpha = a_\beta^\alpha A'^\beta;$$

$$д) \quad g'_{\alpha\beta} = a_\alpha^\gamma a_\beta^\epsilon g_{\gamma\epsilon}, \quad g'^{\alpha\beta} = a^\alpha_\gamma a^\beta_\epsilon g^{\gamma\epsilon}, \quad g_{\alpha\beta} = a'^\gamma_\alpha a'^\epsilon_\beta g'_{\gamma\epsilon}, \quad g^{\alpha\beta} = a_\gamma^\alpha a_\epsilon^\beta g'^{\gamma\epsilon}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы г) непосредственно обобщаются на случай преобразования ковариантных, контравариантных и смешанных компонент тензора любого ранга.

1.38. Компоненты векторов обоих базисов при отражении системы координат меняют знаки.

$$e'_\alpha = -e_\alpha, \quad e'^\alpha = -e^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

1.39.

$$A \cdot B = g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B^\alpha = \text{inv}, \quad (1.267)$$

$$dl^2 = dr \cdot dr = g^{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^\alpha dx_\alpha = \text{inv}. \quad (1.268)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Во всех случаях, когда ковариантные и контравариантные компоненты не совпадают, операция свертывания должна производиться как суммирование по одному верхнему и одному нижнему значку. Сумма любого тензора по двум верхним или двум нижним значкам не является тензором какого-либо ранга.

1.40.

$$C_\alpha = \sqrt{g}(A^\beta B^\gamma - A^\gamma B^\beta), \quad C^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}(A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta), \quad (1.269)$$

где  $g = |\hat{g}|$ , числа  $\alpha, \beta, \gamma$  образуют круговую перестановку 1, 2, 3.

Приведенные формулы можно рассматривать как обобщение выражения (1.23а) на случай косоугольного базиса. Записав (1.269) в форме

$$C_\alpha E_{\alpha\beta\gamma} A^\beta B_\gamma, \quad C^\alpha = E^{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma, \quad (1.270)$$

находим представление для антисимметричного тензора III ранга в косоугольном базисе:

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g}e_{\alpha\beta\gamma}, \quad E^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}e^{\alpha\beta\gamma}, \quad (1.271)$$

где  $e_{\alpha\beta\gamma}$  и  $e^{\alpha\beta\gamma}$  относящиеся к ортогональному базису, одинаковы и определяются условиями (1.21). Нетрудно проверить, что  $E^{\alpha\beta\gamma}$  получается из  $E_{\alpha\beta\gamma}$  (и наоборот) по правилу подъема и опускания значков согласно (1.35).

$$1.41. \quad \cos \theta = \frac{A_\alpha B^\alpha}{(A_\beta A^\beta B_\gamma B^\gamma)^{1/2}}.$$

$$1.42. \quad g_{\mu\nu} = (e_{(D)}^\alpha)_\mu (e_\alpha^{(D)})_\nu, \quad g^{\mu\nu} = (e_{(D)}^\alpha)^\mu (e_\alpha^{(D)})^\nu, \\ g_\nu^\mu = (e_{(D)}^\alpha)^\mu (e_\alpha^{(D)})_\nu = \delta_\nu^\mu.$$

1.44.  $A^2 = g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = A^\alpha B_\alpha$ ;  $\cos \theta = \frac{A_\alpha B^\alpha}{(A^2 B^2)^{1/2}}$ , в полной аналогии с результатом 1.41 для аффинной системы.

1.45. По общим правилам (1.271) имеем

$$E^{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial q^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial q^\lambda}{\partial x^\gamma} e^{\alpha\beta\gamma},$$

откуда следует антисимметрия  $E^{\mu\nu\lambda}$  по любой паре значков. Это позволяет записать  $E^{\alpha\beta\gamma} = S e^{\alpha\beta\gamma}$ , где  $S$  — некоторый скаляр. Для его определения рассмотрим частный случай и получим

$$E^{123} = \frac{\partial q^1}{\partial x^\alpha} \frac{\partial q^2}{\partial x^\beta} \frac{\partial q^3}{\partial x^\gamma} e^{\alpha\beta\gamma} = \left| \frac{\partial q^\lambda}{\partial x^\alpha} \right| = J^{-1} = g^{-1/2},$$

где использованы (1.39) и (1.53). Таким образом,  $S = g^{-1/2}$ , и мы получили другим способом вторую формулу (1.271).

1.46. а)  $dl_{(1)} = \sqrt{g_{11}}dq^1$ ,  $dl_{(2)} = \sqrt{g_{22}}dq^2$ ,  $dl_{(3)} = \sqrt{g_{33}}dq^3$ ;  
б) такими тремя векторами является ковариантный базис (1.46);  
в) с помощью результатов задачи (1.44) находим

$$\cos \vartheta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \cos \vartheta_{13} = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}, \quad \cos \vartheta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}};$$

г) для ортогональности системы криволинейных координат необходимо и достаточно выполнения равенств  $g_{12} = g_{23} = g_{13} = 0$  в каждой точке пространства.

**1.47.** Для сферической системы

$$\begin{aligned} g_{rr} &= 1, & g_{\vartheta\vartheta} &= r^2, & g_{\alpha\alpha} &= r^2 \sin^2 \vartheta, & g_{r\vartheta} &= g_{r\alpha} = g_{\vartheta\alpha} = 0; \\ g^{rr} &= 1, & g^{\vartheta\vartheta} &= r^{-2}, & g^{\alpha\alpha} &= r^{-2} \sin^{-2} \vartheta, & g^{r\vartheta} &= g^{r\alpha} = g^{\vartheta\alpha} = 0; \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}^r = \mathbf{e}_{r*}, & \mathbf{e}_\vartheta &= r^2 \mathbf{e}^\vartheta = r \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_\alpha &= r^2 \sin^2 \vartheta \mathbf{e}^\alpha = r \sin \vartheta \mathbf{e}_{\alpha*}. \end{aligned}$$

Для цилиндрической системы

$$\begin{aligned} g_{rr} &= g_{zz} = 1, & g_{\alpha\alpha} &= r^2, & g_{r\alpha} &= g_{rz} = g_{\alpha z} = 0; \\ g^{rr} &= g^{zz} = 1, & g^{\alpha\alpha} &= r^{-2}, & g^{r\alpha} &= g^{rz} = g^{\alpha z} = 0; \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}^r = \mathbf{e}_{r*}, & \mathbf{e}_\alpha &= r^2 \mathbf{e}^\alpha = r \mathbf{e}_{\alpha*}, & \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}^z = \mathbf{e}_{z*}. \end{aligned}$$

Здесь звездочкой обозначены единичные базисные орты, введенные в задаче 1.18. Ковариантные и контравариантные базисные векторы имеют неодинаковую размерность и неодинаковую длину, отличную вообще говоря от единичной.

**1.50.**  $R = a^2/2 + ab - b^3/3.$

**1.52.**  $l, l.$

**1.54.**

$$\frac{dr}{A_r} = \frac{r d\alpha}{A_\alpha} = \frac{dz}{A_z}, \quad \frac{dr}{A_r} = \frac{r d\vartheta}{A_\vartheta} = \frac{r \sin \vartheta d\alpha}{A_\alpha}.$$

**1.55.** Поскольку градиент содержит первые производные по координатам, можно записать

$$\text{grad} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{\text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \text{grad} \frac{1}{r^3}.$$

Используя результаты задач (1.52), (1.53), получим окончательно

$$\text{grad} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = -\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} + \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

**1.56.** Направляем полярную ось вдоль вектора  $\mathbf{p}$  и проецируем вектор  $\mathbf{E}$  на орты сферических координат:

$$E_r = \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{r^3}, \quad E_\alpha = 0.$$

Векторные линии в сферических координатах определяются из системы уравнений

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta} = \frac{r \sin \vartheta d\alpha}{E_\alpha}.$$

Обращение в нуль компонента  $E_\alpha$  означает, что должен обратиться в нуль и дифференциал  $d\alpha = 0$ , т. е.  $\alpha = \text{const}$  и, таким образом, все векторные линии лежат в плоскостях, проходящих через вектор  $\mathbf{p}$ . Подставляя ненулевые проекции  $\mathbf{E}$  в оставшееся единственное уравнение и сокращая общие множители, получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:  $dr/r = 2 \cot \vartheta d\vartheta$ . Почленное интегрирование правой и левой частей дает  $\ln r - \ln r_0 = 2 \ln \sin \vartheta$  или  $r(\vartheta) = r_0 \sin^2 \vartheta$ , где  $r_0$  — постоянная интегрирования, имеющая смысл расстояния от векторной линии до начала координат в плоскости  $\vartheta = \pi/2$ .

**1.57.**

$$\nabla_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\alpha} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm \frac{i}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right),$$

$$\nabla_0 = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

**1.59.**  $3, 0, 0, 2\omega$ .

**1.60.**  $\mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$

**1.63.**  $\varphi' \mathbf{r}/r, 3\varphi + r\varphi', 0, \mathbf{l}\varphi + \mathbf{r}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})\varphi'/r.$

**1.64.**  $\varphi(r) = \text{const}/r^3.$

**1.65.**  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \mathbf{a} \times \mathbf{b}; 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}), \mathbf{a} \times \mathbf{r}; 0, (2\varphi + r\varphi')\mathbf{a} - \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\varphi'/r; -2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}), 3(\mathbf{r} \times \mathbf{a}).$

**1.66.**

$$\mathbf{A} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}') \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}') \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \frac{\varphi'}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}'),$$

$$\frac{\varphi'}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{A}'), \quad \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}}{r} (\varphi' \mathbf{A} + \varphi \mathbf{A}').$$

**1.68.**

$$\int_V (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dV = \oint_S (\mathbf{A} \times \text{grad } \varphi) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \varphi \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

1.69.  $aV, aV$ .

1.70. Используя метод скалярного умножения постоянного вектора на каждый из рассматриваемых интегралов, находим следующие соотношения:

$$\oint_S \mathbf{n} \varphi dS = \int_V \text{grad } \varphi dV, \quad (1.272)$$

$$\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS = \int_V \text{rot } \mathbf{A} dV + \int_V \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{b}) dV, \quad (1.273)$$

$$\oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{A} dS = \int_V (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{A} dV, \quad (1.274)$$

$$\oint_S T_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta dS = \int_V \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV. \quad (1.275)$$

Все эти соотношения можно рассматривать как обобщенную теорему Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{n}(\dots) dS = \int_V \nabla(\dots) dV, \quad (1.276)$$

где символом  $(\dots)$  обозначен тензор любого ранга.

1.76.  $\int_S (\nabla u \times \nabla f) \cdot d\mathbf{S}$ .

1.81. По общему правилу (1.105) ковариантная дивергенция выразится через

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\lambda} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial q^\alpha},$$

т. е.

$$A_{;\mu}^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial q^{\mu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial q^{\alpha}} A^{\alpha}. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь определитель  $g = |g_{\mu\nu}|$ . Его дифференциал равен сумме дифференциалов всех его элементов, умноженных на соответствующие алгебраические дополнения:  $dg = D^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$ , где  $D^{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} \Delta^{\mu\nu}$ ,  $\Delta^{\mu\nu} -$

минор. С другой стороны, алгебраические дополнения выражаются через компоненты обратного тензора, т. е.  $g^{\mu\nu} : D^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}$  (см. задачу 1.27). В итоге имеем

$$dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial q^\lambda}.$$

Подставив последнюю величину в (1), находим выражение, приведенное в условии задачи.

**1.82.**

$$\Delta S = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left( \sqrt{g} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial q^\nu} \right). \quad (1.277)$$

$$1.83. \quad T^{\mu\nu} ;_\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}.$$

$$1.84. \quad A^{\mu\nu} ;_\nu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^\nu} (\sqrt{g} A^{\mu\nu}).$$

$$1.86. \quad g_{\mu\nu} ;_\lambda = g^{\mu\nu} ;_\lambda = 0.$$

**1.90.**

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{A})_r &= \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \\ (\Delta \mathbf{A})_\alpha &= \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha}, \\ (\Delta \mathbf{A})_z &= \Delta A_z. \end{aligned} \quad (1.278)$$

**1.91.**

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{A})_r &= \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \\ (\Delta \mathbf{A})_\vartheta &= \Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \\ (\Delta \mathbf{A})_\alpha &= \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (1.279)$$



1.92. а)  $A + B \ln r$ ; б)  $A + B\alpha$ ; в)  $A + Bz$ .

1.93. а)  $A + B/r$ ; б)  $A + B \ln \operatorname{tg}(\vartheta/2)$ ; в)  $A + B\alpha$ .

1.94.

$$x = \pm \left[ \frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{1/2},$$

$$y = \pm \left[ \frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \right]^{1/2},$$

$$z = \pm \left[ \frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2};$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}}{2R_\eta}, \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2R_\zeta},$$

$$\Delta = \frac{4}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(\eta - \zeta)} \times \left[ (\eta - \zeta)R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + (\zeta - \xi)R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta)R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right],$$

где  $R_u = \sqrt{(u + a^2)(u + b^2)(u + c^2)}$ . Из формул для  $x, y, z$  видно, что каждой тройке значений  $\xi, \eta, \zeta$  соответствуют восемь троек  $x, y, z$ . Убедиться в ортогональности эллипсоидальной системы координат можно, найдя градиенты  $\nabla \xi, \nabla \eta, \nabla \zeta$  и составив скалярные произведения  $\nabla \xi \cdot \nabla \eta$  и т. д., которые оказываются равными нулю. Градиенты можно найти непосредственно из уравнений, определяющих эллипсоидальные координаты (см. условие задачи), беря градиент от обеих частей каждого из этих уравнений.

1.95.

$$z = \pm \left[ \frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2} \right]^{1/2}, \quad r = \left[ \frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2} \right]^{1/2};$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{\xi - \eta}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{\xi - \eta}}{2R_\eta}, \quad h_3 = r,$$

где

$$R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + c^2)}, \quad R_\eta = \sqrt{(\eta + a^2)(-\eta - c^2)}; \\ \Delta = \frac{4}{\xi - \eta} \left[ R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

**1.96.**

$$x = \pm \left[ \frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2} \right]^{1/2}, \quad r = \left[ \frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2} \right]^{1/2};$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{\xi - \zeta}}{2R_\xi}, \quad h_2 = r, \quad h_3 = \frac{\sqrt{\xi - \zeta}}{2R_\zeta},$$

где

$$R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)}, \quad R_\zeta = \sqrt{(\zeta + a^2)(-\zeta - b^2)};$$

$$\Delta = \frac{4}{\xi - \zeta} \left[ R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

**1.97.**  $h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad h_\alpha = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta};$

$$\Delta = \frac{(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^3}{a^2} \times \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right].$$

**1.98.** Поверхности  $\rho = \operatorname{const}$  – тороиды:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a \operatorname{coth} \rho)^2 + z^2 = \left( \frac{a}{\operatorname{sh} \rho} \right)^2;$$

поверхности  $\xi = \operatorname{const}$  – сферические сегменты:

$$(z - \operatorname{arctg} \xi)^2 + x^2 + y^2 = \left( \frac{a}{\sin \xi} \right)^2;$$

$$h_\rho = h_\xi = \frac{a}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}, \quad h_\alpha = \frac{a \operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}.$$

**1.99.**  $x^\nu Z_\nu(x) + C, \quad -x^{-\nu} Z_\nu(x) + C.$

**1.100.**  $1, 1/2, 1/(2^n n!).$

**1.107.**  $1. xu'' + u' + x(a^2 - n^2/x^2)u = 0.$

2. Интеграл вычисляется с помощью уравнений для функций  $u(x)$  и  $v(x) = J_n(bx).$

3. Первое равенство (1.177) следует из (1.176) непосредственно, второе получается путем предельного перехода.

$$1.111. P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

1.112. Интеграл, который следует вычислить, содержит произведение производных  $\int_{-1}^1 [(x^2-1)^l]^{(l)} [(x^2-1)^{l'}]^{(l')} dx$ . Пусть для определенности  $l' \leq l$ .

Интегрируя по частям  $l$  раз, находим  $(-1)^l \int_{-1}^1 (x^2-1)^l [(x^2-1)^{l'}]^{(l+l')} dx$ .

Второй сомножитель под интегралом отличен от нуля только при  $l' = l$ . В этом случае, переходя к интегрированию по углу  $\vartheta$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l [(x^2-1)^l]^{(2l)} dx &= \\ &= (-1)^l (2l)! 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \vartheta)^{2l+1} d\vartheta = (-1)^l (2l)! B(l+1, 1/2). \end{aligned}$$

Последний интеграл здесь выражен через бета-функцию (см. определение в [Абрамовиц и Стиган (1979)]) формула 6.2.1:

$$B(z, w) \equiv \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \vartheta)^{2z-1} (\cos \vartheta)^{2w-1} d\vartheta.$$

Аккуратно сокращая факториалы и гамма-функции, получаем результат, приведенный в условии задачи.

$$1.114. P_2 = (1 + 3 \cos 2\vartheta)/4.$$

$$1.115. \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{dP_l^m}{d\vartheta} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P_l^m = 0.$$

1.116. Применяя формулу Лейбница, находим

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{m/2} [(x+1)^l (x-1)^l]^{(l+m)} &= \\ = (-1)^{m/2} \sum_{k=0}^{l+m} \frac{(l+m)! l! l!}{k!(l+m-k)!(k-m)!(l-k)!} (x+1)^{k-m/2} (x-1)^{l-k+m/2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& (1-x^2)^{-m/2}[(x+1)^l(x-1)^l]^{(l-m)} = \\
& = (-1)^{-m/2} \sum_{s=0}^{l-m} \frac{(l-m)!!l!!}{s!(l-m-s)!(s+m)!(l-s)!} (x+1)^{s+m/2}(x-1)^{l-s-m/2}.
\end{aligned}$$

В обеих суммах пределы суммирования фактически определяются наличием факториалов отрицательных целых чисел в знаменателях. Во второй сумме выполняем замену индекса суммирования  $s \rightarrow k - m$ . В результате множители, зависящие от  $k$ , в обеих суммах становятся одинаковыми. Сравнивая их между собой, находим формулу, приведенную в условии задачи.

**1.117.**

$$\begin{aligned}
P_l^0 &= P_l, \\
P_1^1 &= -2P_1^{-1} = (1-x^2)^{1/2} = \sin \vartheta, \\
P_2^1 &= -6P_2^{-1} = 3x(1-x^2)^{1/2} = 3 \cos \vartheta \sin \vartheta, \\
P_2^2 &= 24P_2^{-2} = 3(1-x^2) = 3 \sin^2 \vartheta, \\
P_3^1 &= -12P_3^{-1} = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta, \\
P_3^2 &= 120P_3^{-2} = 15x(1-x^2) = 15 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta, \\
P_3^3 &= -720P_3^{-3} = 15(1-x^2)^{3/2} = 15 \sin^3 \vartheta.
\end{aligned}$$

Заметим, что присоединенные полиномы Лежандра в общем случае содержат радикалы  $(1-x^2)^{1/2}$  и полиномами, строго говоря, не являются.

**1.118.** При вычислении нормировочного интеграла используем формулу (1.198) и метод решения задачи 1.112:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^{-m}(x) dx = \\
&= \frac{(2l)! (l+m)!}{2^{2l} l! (l-m)!} B(l+1, 1/2).
\end{aligned}$$

Выразив бета-функцию через гамма-функции и произведя сокращения дробей, найдем нормировочный множитель (с точностью до фазового множителя, по модулю равного единице, который остается произвольным). В итоге

получаем нормированную сферическую функцию Лежандра:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \frac{(1 - \cos^2 \vartheta)^{m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{d \cos \vartheta}\right)^{l+m} (\cos^2 \vartheta - 1)^l e^{im\varphi}.$$

$$1.119. \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0.$$

$$1.120. -5/3, -2, 0, \exp(\alpha) + \exp(-2\alpha).$$

$$1.121. 0, f(a)\delta(x-a), 82\delta(x-4) + 2\delta(x+1).$$

$$1.123. \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi r_{\perp}} \delta(r_{\perp})\delta(z), \delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \frac{1}{a_{\perp}} \delta(r_{\perp}-a_{\perp})\delta(\alpha-\alpha_0)\delta(z-a_z).$$

Чтобы осуществить предельный переход  $\mathbf{a} \rightarrow 0$ , нужно не только устремить к нулю величины  $a_{\perp}, a_z$ , но и усреднить правую часть по азимутальному углу  $\alpha_0$ , так как нулевой вектор не имеет направления.

$$1.124. \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r), \delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \frac{1}{a^2} \delta(r-a)\delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)\delta(\alpha - \alpha_0).$$

$$1.125. f'(x) = g(x) + 2\delta(x-1), \text{ где } g(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x < 1, \\ 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$1.126. f'(x) = \frac{df}{dx} + \sum_{k=1}^n \Delta f_k \delta(x-a_k), \text{ где } \Delta f_k = f(a_k+0) - f(a_k-0),$$

$df/dx$  — обычная («классическая») производная на участках плавного изменения функции.

$$1.127. \frac{(-1)^m m!}{(n-m)!} f^{(m-n)}(0) \text{ при } m \geq n, \quad 0 \text{ при } m < n.$$

1.128. При  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ,  $G$  — ограниченная дифференцируемая функция, и уравнение удовлетворяется, так как  $\Delta G = 0$ . При  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  функция  $G$  имеет особенность. Чтобы выявить характер особенности  $\Delta G$  при  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ , проинтегрируем (1.225) по объему малого шара радиуса  $R \rightarrow 0$  с центром в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Применяя теорему Остроградского–Гаусса, получим

$$\int_V \Delta G dV = \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r}\right) dV = \oint_S \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{1}{R^2} R^2 d\Omega = -4\pi.$$

Такое же значение дает интеграл по объему от правой части уравнения, которое, таким образом, удовлетворяется.

$$1.129. f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

$$1.130. f(x) = \frac{4a}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

$$1.131. f(x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos((2k+1)\pi x/L)}{2k+1}.$$

Ряд Фурье четной на интервале  $[-L, +L]$  функции,  $f(-x) = f(x)$ , содержит только косинусы. Нечетная функция,  $f(-x) = -f(x)$ , разлагается по синусам. Функция, не имеющая определенной четности, содержит в своем разложении Фурье и синусы, и косинусы.

$$1.132. i\lambda F(\lambda).$$

$$1.133. \frac{1}{a} F\left(\frac{\lambda-b}{a}\right).$$

$$1.134. \pi \exp(-|\lambda|).$$

$$1.135. \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\alpha^2}\right).$$

1.136.  $\frac{\pi^{3/2}}{\alpha^3} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha^2}\right)$ , где  $\varkappa$  — радиус-вектор трехмерного пространства переменных Фурье (см. (1.252)).

1.137. Для вычисления интеграла Фурье (1.252) используем сферические координаты и выберем ось  $Oz$  вдоль вектора  $\varkappa$ . Выполняя сначала интегрирование по углам, а затем по  $r$ , находим

$$F(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{k^2} [1 - \cos(kR)].$$

Формально функция, стоящая в правой части, не имеет предела. Но легко понять, что предел косинуса можно считать эффективно равным нулю, так как при выполнении обратного преобразования Фурье член с бесконечно осциллирующим косинусом даст нулевой вклад. В итоге имеем  $F(k) = 4\pi/k^2$ .

1.138. Записываем разложение в форме

$$\exp(ikr \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

и, пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра (см. задачу 1.112), находим интегральное представление для искомым функций  $u_l$ :

$$u_l(kr) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx.$$

Использование формулы Родригеса и интегрирование  $l$  раз по частям дает

$$u_l(kr) = \frac{(2l+1)(-ikr)^l}{2^{l+1}l!} \int_{-1}^1 e^{ikrx} (x^2-1)^l dx.$$

Далее разлагаем экспоненту в степенной ряд и интегрируем этот абсолютно сходящийся ряд почленно. Остаются только слагаемые с четными степенями  $x$ :

$$u_l(kr) = \frac{(2l+1)(-ikr)^l}{2^{l+1}l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ikr)^{2m}}{(2m)!} \int_0^1 x^{2m} (x^2-1)^l dx.$$

Наконец, переход к новой переменной интегрирования  $t = x^2$ ,  $dx = dt/2\sqrt{t}$  позволяет выразить интеграл в последнем равенстве через бета-функцию:

$$\int_0^1 t^{k-1/2} (1-t)^l dt = B(k+1/2, l+1) = \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+k+3/2)}.$$

В итоге, собирая все сомножители, получаем следующий ряд:

$$\begin{aligned} u_l(kr) &= \\ &= i^l (2l+1) \frac{(kr)^l}{1 \cdot 3 \dots (2l+1)} \left\{ 1 - \frac{k^2 r^2 / 2}{1!(2l+3)} + \frac{(k^2 r^2 / 2)^2}{2!(2l+3)(2l+5)} - \dots \right\} = \\ &= i^l (2l+1) j_l(kr), \end{aligned}$$

где  $j_l(kr)$  — сферическая функция Бесселя (см. [Абрамовиц и Стиган (1979)], формула 10.1.2).

$$\mathbf{1.139.} \quad \exp(i\boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta\phi) Y_{lm}(\vartheta\varphi).$$

---

---

## ГЛАВА 2

# Основные понятия электродинамики. Уравнения Максвелла

### 2.1. Электростатика

**Закон Кулона.** Электродинамика занимается изучением взаимодействий разнообразных микроскопических и макроскопических объектов, вызванных наличием у них фундаментального свойства, количественной мерой которого выступает **электрический заряд**. Заряд может быть двух знаков — положительным и отрицательным, причем тела, имеющие заряды одинаковых знаков, отталкиваются, а тела с зарядами противоположных знаков — притягиваются. Закон взаимодействия в вакууме неподвижных тел малых размеров установил опытным путем французский физик Ш. Кулон еще в 18-м веке:

$$\mathcal{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.1)$$

Здесь  $q_1$  и  $q_2$  — заряды двух тел, расстояние между которыми определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}_{12}$  (рис. 2.1),  $\mathcal{F}_{12}$  — сила, действующая на тело 2 со стороны тела 1. Имеем  $\mathcal{F}_{12} = -\mathcal{F}_{21}$ , т. е. кулоновская сила подчиняется третьему закону Ньютона. Коэффициент  $k$  определяется выбором единиц измерения электрического заряда и других физических величин.

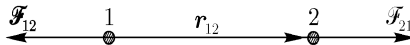


Рис. 2.1

Если сила  $\mathcal{F}_{12} = 1$  дина и  $r_{12} = 1$  см (система CGS), то  $k = 1$ , а заряд  $q = |q_1| = |q_2|$  имеет величину, равную одной единице CGSE, размерность которой  $\text{см}^{3/2}\text{Г}^{1/2}\text{с}$ .

В Международной системе единиц (СИ) единица заряда определена вне связи с механическими величинами через единицу силы тока — ампер — как количество электричества, протекающего через сечение проводника за



одну секунду при силе тока 1 А. Эта единица называется кулон (К) в честь первооткрывателя закона электростатического взаимодействия. В качестве единиц длины и силы используются метр и ньютон,  $1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$ . Поэтому коэффициент  $k = 1/4\pi\epsilon_0$  оказывается размерной величиной. Электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2},$$

где  $c$  — скорость света в вакууме в м/с, также размерна. Эта величина («диэлектрическая проницаемость вакуума») не имеет разумного физического смысла и введена лишь для согласования электромагнитных величин (ампер, кулон), используемых из практических соображений, с механическими величинами. Единицы заряда в двух системах связаны между собой соотношением  $1 \text{ К} \approx 3 \times 10^9 \text{ CGSE}$ . При этом два одинаковых заряда по 1 К, находящиеся на расстоянии 1 м, взаимодействуют с огромной силой

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ Н} \approx 9 \times 10^9 \text{ Н}.$$

Мы в этой книге будем преимущественно пользоваться физической, или CGS-системой (ее еще называют абсолютной гауссовой системой единиц), которая наиболее удобна при изучении фундаментальных законов физики. С общими принципами построения систем единиц и их размерностями, а также эталонами различных единиц можно познакомиться по книгам [Сена (1988)], [Камке и Кремер (1980)].

Впоследствии, уже в 20-м веке, закон Кулона был подтвержден с очень высокой точностью путем измерения уровней энергии атомов. Было также выяснено, что электрический заряд, как и многие другие физические величины, квантуется — его величина всегда кратна некоторой минимальной порции  $e_0 \approx 4,8 \times 10^{-10} \text{ CGSE}$  единиц, называемой **элементарным зарядом**. Элементарным зарядом обладают электроны и позитроны, протоны, антипротоны и многие другие элементарные и составные частицы. Еще более «элементарные» частицы — кварки — имеют дробные заряды  $e_0/3$  и  $2e_0/3$  обоих знаков. Но кварки, по-видимому, существуют только в составе более сложных частиц и не могут находиться в свободном состоянии.

Элементарный заряд — очень маленькая порция, и часто заряды макроскопических тел содержат огромное число элементарных зарядов, например, порядка  $10^{22}$  — таково число «свободных» электронов в  $1 \text{ см}^3$  металлического тела. В таком случае распределение электрического заряда в пространстве можно характеризовать объемной плотностью

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (2.2)$$

где  $\Delta q$  — заряд, находящийся в макроскопически малом объеме  $\Delta V$ , т. е. в таком объеме, в котором находится большое число  $N \gg 1$  элементарных

зарядов. Линейные размеры этого объема должны быть малы по сравнению с другими масштабами задачи. Такой объем приближенно можно считать точечным и рассматривать объемную плотность заряда как функцию точки.

Как мы видели в разделе 1.3, объемную плотность можно приписать и точечным зарядам, если использовать дельта-функцию Дирака: распределение зарядов  $e_1, e_2, \dots$  в точках  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$  описывается функцией

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^N e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (2.3)$$

Фундаментальным свойством электрического заряда является его **точное сохранение** во всех процессах, происходящих в природе: химических и ядерных реакциях, взаимопревращениях элементарных частиц и т. д. Во всех таких процессах суммарный электрический заряд всех частиц до и после процесса одинаков.

**Электрическое поле.** С физической точки зрения существование силы (2.1) допускает две различные трактовки. Можно считать, что одно заряженное тело воздействует на другое непосредственно, без участия какой-либо промежуточной среды (дальнодействие). Но возможен и другой подход — заряженное тело изменяет свойства окружающего пространства, создавая в нем **электрическое поле**. Второе тело через посредство своего электрического заряда воспринимает воздействие этого поля, которое и приводит к силовому взаимодействию. Обе точки зрения совершенно равноправны при рассмотрении неподвижных зарядов, т. е. в электростатике. Вся плодотворность и неизбежность понятия поля проявляется при изучении многочисленных и разнообразных явлений, связанных с движением заряженных тел и изменением во времени их электрических и магнитных взаимодействий. Поэтому мы с самого начала примем полевую точку зрения и введем количественную векторную характеристику электрического поля — его **напряженность**  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  определяет силу  $\mathcal{F}$ , действующую на **неподвижное** тело малых размеров с зарядом  $q$ , находящееся в точке  $\mathbf{r}$ :

$$\mathcal{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Это определение напряженности электрического поля справедливо и для переменных электрических полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Поле, создаваемое точечным зарядом, согласно закону Кулона (2.1) и определению электрического поля (2.4) выразится в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.5)$$

(физическая система единиц,  $e$  — электрический заряд).

Сформулируем еще один опытный закон — **принцип суперпозиции полей в вакууме**: поле, создаваемое несколькими источниками, равно геометрической сумме полей  $\mathbf{E}_i$ , создаваемых каждым из объектов в отдельности независимо от наличия других источников поля:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots \quad (2.6)$$

Это — очень общий закон, которому подчиняется и электрическое, и магнитное поле неподвижных и произвольным образом движущихся тел.

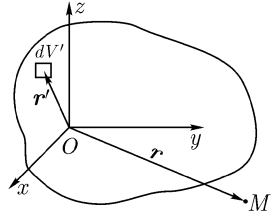


Рис. 2.2

**Уравнения электростатики.** Вычислим электрическое поле  $\mathbf{E}$ , создаваемое ограниченной в пространстве системой зарядов, которая описывается объемной плотностью  $\rho$ . Используем принцип суперпозиции полей. Выделим малый элемент объема  $dV'$  (рис. 2.2) и запишем на основании закона Кулона в форме (2.5) поле, создаваемое зарядами этого элемента в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ :

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Интегрируя затем по всему распределению, находим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.7)$$

Это выражение описывает электрическое поле любой ограниченной системы зарядов в произвольной точке, причем объемная плотность  $\rho(\mathbf{r}')$  может иметь дельтаобразные особенности. Объемный интеграл при этом сходится во всех точках  $\mathbf{r}$ , в которых отсутствуют точечные заряды, и точка  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  не является для него особой.

Выражение (2.7) можно упростить, воспользовавшись тождеством

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'),$$

где  $\nabla$  — оператор Гамильтона набла. Вынося его за знак интеграла, поскольку дифференцирование и интегрирование производятся по разным переменным,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ , будем иметь

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad (2.8)$$

где скалярная функция точки

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \quad (2.9)$$

называется **электростатическим потенциалом**. Эта величина определяется с точностью до постоянной. Таким образом, в электростатике напряженность поля  $\mathbf{E}$  — потенциальный (безвихревой) вектор (см. раздел 1.2):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.10)$$

Значение  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  и одновременно уравнение, которому удовлетворяет электростатический потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$ , можно получить, применив операцию  $\operatorname{div}$  к обеим частям равенства (2.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\nabla^2 \varphi = -\Delta \varphi. \quad (2.11)$$

Внесем оператор Лапласа  $\Delta$  под знак интеграла (2.9) и воспользуемся тождеством (1.225)

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Это дает

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \rho(\mathbf{r}) \quad (2.12)$$

и

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

Последнее уравнение называется **уравнением Пуассона**. Оно позволяет находить электростатический потенциал методом интегрирования дифференциального уравнения в частных производных, отличным от прямого вычисления интеграла (2.9). Уравнения (2.10) и (2.12) являются дифференциальными уравнениями для определения вектора  $\mathbf{E}$  в электростатике. Их **интегральная форма** получается применением к (2.10) и (2.12) соответственно теорем Стокса и Остроградского–Гаусса:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2.14)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi q. \quad (2.15)$$

Уравнения (2.10), (2.12)–(2.15) являются следствиями закона Кулона. Но они более общи, чем конкретные выражения (2.7), (2.9) для напряженности поля и электростатического потенциала.

Из соотношения (2.14) следует, что работа электростатического поля над зарядом  $e$  вдоль любого замкнутого контура равна нулю:  $R = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

Соответственно, работа по перемещению заряда из точки  $A$  в точку  $B$  не зависит от пути:

$$R_{AB} = \int_l e\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -e \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = e(\varphi_A - \varphi_B). \quad (2.16)$$

Из (2.15) следует, что поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен умноженному на  $4\pi$  электрическому заряду, находящемуся внутри поверхности (**электростатическая теорема Гаусса**).

**Граничные условия.** Рассмотрим поверхности, на которых величина  $\rho$  имеет особенности (т.е. испытывает скачок или обращается в бесконечность). Такие поверхности могут быть созданы материальными средами (диэлектриками, проводниками и др.). На особых поверхностях дифференциальные уравнения (2.10), (2.12) неприменимы, и их надо заменить некоторыми условиями «сшивания» компонент напряженности поля, которые выводятся из интегральной формы указанных уравнений.

**Пример 2.1.** С помощью уравнения (2.14) показать, что касательные к любой поверхности компоненты напряженности электрического поля непрерывны.

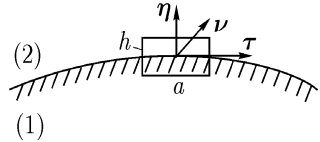


Рис. 2.3

**Решение.** Строим контур (рис. 2.3) в виде малого прямоугольника размером  $a \times h$ , плоскость которого перпендикулярна рассматриваемой поверхности  $S$ . Векторы  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\mathbf{n}$  образуют тройку взаимно перпендикулярных ортов. Вычисляя циркуляцию вектора  $\mathbf{E}$  вдоль контура и пользуясь (2.14), находим

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \approx (E_{2\tau} - E_{1\tau})a + C_h = 0,$$

где  $C_h$  — интеграл по боковым участкам контура. При  $h \rightarrow 0$ , имеем  $C_h \rightarrow 0$ , если поле ограничено на рассматриваемой поверхности (что мы будем пред-

полагать). Устремляя затем  $a \rightarrow 0$ , приходим к точному соотношению

$$\mathbf{E}_{2\tau} = \mathbf{E}_{1\tau}. \quad (2.17)$$

■

Это соотношение относится к двумерным векторам — проекциям поля  $\mathbf{E}$  на поверхность в некоторой точке.

**Пример 2.2.** С помощью уравнения (2.15) показать, что нормальная к любой поверхности компонента  $E_n$  удовлетворяет условию

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (2.18)$$

Здесь величина  $\sigma$  — **поверхностная плотность заряда** — отлична от нуля, только если объемная плотность заряда  $\rho$  имеет на рассматриваемой поверхности дельтаобразную особенность:

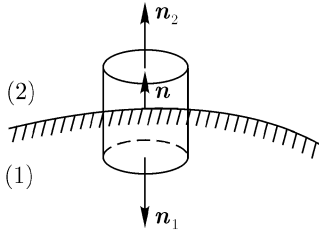


Рис. 2.4

$$\rho(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}(\mathbf{r}) + \sigma(u, v)\delta(z),$$

где  $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$  — ограниченная составляющая объемной плотности, координата  $z$  отсчитывается по нормали к поверхности,  $u, v$  — координаты, характеризующие положение точки на поверхности. Такая особенность возникает, если конечный заряд распределен в предельно тонком поверхностном слое, т. е. на математическом языке  $\sigma = \lim_{h \rightarrow 0} (h\rho)$ .

**Решение.** Строим вспомогательный объем в виде малого цилиндра с основанием  $\Delta S$  и высотой  $h$  (рис. 2.4). Нормаль  $\mathbf{n}$  направлена из области 1 в область 2. Применив к выбранному объему равенство (2.15), получаем последовательно

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &\approx E_{n2} \Delta S + E_{n1} \Delta S + \Phi_h = \\ &= (E_{2n} - E_{1n}) \Delta S + \Phi_h \approx 4\pi(\tilde{\rho}h \Delta S + \sigma \Delta S). \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi_h$  — поток через боковую поверхность. Устремляя  $h \rightarrow 0$  так, чтобы основания цилиндра совместились с рассматриваемой поверхностью, получаем точное граничное условие (2.18). ■

В применении к электростатическому потенциалу, пользуясь уравнением (2.8), получаем следующие граничные условия:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (2.19)$$

Ввиду того, что потенциал  $\varphi$  определен с точностью до постоянной, первое условие (2.18) можно заменить условием непрерывности потенциала на поверхности<sup>1</sup>  $S$ :

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (2.20)$$

## Задачи

**2.1.** Плоская плита больших поперечных размеров и толщиной  $a$  равномерно заряжена по объему с плотностью  $\rho = \text{const}$ . Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля. Рассмотреть предельный случай бесконечной плоскости, выразить потенциал и напряженность поля через поверхностную плотность заряда, проверить выполнимость граничных условий.

**2.2.** Заряд распределен в пространстве по периодическому закону  $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$ , образуя бесконечную пространственную периодическую решетку. Вычислить потенциал  $\varphi$  электрического поля.

**2.3\*** Распределение заряда предыдущей задачи ограничено в направлении оси  $Oz$  плоскостями  $z = \pm z_0$ ,  $z_0 = \pi/2\gamma$  и образует плоскую плиту толщиной  $2z_0$ . Вычислить электростатический потенциал во всем пространстве. Произвести предельный переход  $z_0 \rightarrow 0$  при условии постоянства заряда, приходящегося на единицу поверхности плиты ( $z_0\rho_0 = \text{const}$ ) и ввести поверхностную плотность заряда  $\sigma(x, y)$ .

**2.4.** Бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса  $R$  равномерно заряжен по объему или по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд  $\kappa$ . Вычислить потенциал  $\varphi$  и напряженность электрического поля  $E$ .

**2.5.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нити. Ее заряд  $\kappa$  на единицу длины.

**2.6\*** В предыдущей задаче нить заряжена неравномерно:  $\kappa(z) = \kappa_0 \cos \gamma z$ . Вычислить электростатический потенциал. В какой области

<sup>1</sup>См., однако, случай двойного слоя (пример 2.6), когда условие (2.20) не выполняется.

пространства потенциал будет приближенно совпадать с потенциалом равномерно заряженной нити? Проанализировать предельные случаи.

**2.7.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля равномерно заряженного прямолинейного отрезка длиной  $2a$ , занимающего часть оси  $Oz$  от  $-a$  до  $a$ ; заряд отрезка  $q$ .

**2.8.** Найти форму эквипотенциальных поверхностей равномерно заряженного отрезка, рассмотренного в предыдущей задаче.

**2.9.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля шара, равномерно заряженного по объему. Радиус шара  $R$ , полный заряд  $q$ .

**2.10.** Сделать то же самое для случая, когда заряд распределен равномерно по поверхности шара.

**2.11.** Внутри шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного по объему с плотностью  $\rho$ , имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой  $R_1$ , а центр отстоит от центра шара на расстояние  $a$  ( $R > R_1 + a$ ). Найти электрическое поле  $E$  в полости.

**2.12.** Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), заряжено с объемной плотностью  $\rho = \alpha/r^2$ . Найти полный заряд  $q$ , потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля. Рассмотреть предельный случай  $R_2 \rightarrow R_1$ , считая при этом  $q = \text{const}$ .

**2.13.** Заряд распределен сферически симметричным образом:  $\rho = \rho(r)$ . Записать  $\varphi$  и  $E$  в виде однократных интегралов по  $r$ , разбив распределение заряда на сферические слои.

**2.14.** На основе результата предыдущей задачи получить решения задач 2.9 и 2.12.

**2.15.** В атоме водорода, находящемся в невозбужденном состоянии, заряд электрона распределен с плотностью

$$\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^2} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где  $a = 0,529 \times 10^{-8}$  см — боровский радиус атома,  $e_0$  — элементарный заряд. Найти потенциал  $\varphi_e$  и напряженность электрического поля  $E_{er}$  электронного заряда, а также полные потенциал  $\varphi$  и напряженность поля  $E$  в атоме, считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат. Построить на компьютере графики величин  $\varphi$ ,  $E$ .

УКАЗАНИЕ. Полезно произвести интегрирование по сферическим слоям.



**2.16.** Рассматривая атомное ядро как равномерно заряженный шар, найти максимальное значение напряженности его электрического поля  $E_{\max}$ . Радиус ядра  $R = 1,5 \times 10^{-13} A^{1/3}$  см, заряд  $Ze_0$  ( $A$  — атомный номер,  $Z$  — зарядовое число,  $e_0$  — элементарный заряд). Сравнить  $E_{\max}$  со значением поля ядра  $E_B$  на расстоянии боровского радиуса (последний для атома с зарядовым числом  $Z$  равен  $a/Z$ ).

**2.17.** В задаче 2.10 записать выражение для объемной плотности заряда через дельта-функцию и вычислить потенциал и электрическое поле путем интегрирования по сферическим слоям.

**2.18.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля на оси равномерно заряженного круглого тонкого диска радиуса  $R$ ; заряд диска  $q$ . Убедиться в том, что на поверхности диска нормальная составляющая  $E$  испытывает скачок  $4\pi\sigma$ . Рассмотреть поле на больших расстояниях от диска.

**2.19.** Выразить потенциал  $\varphi$  равномерно заряженного круглого тонкого кольца с зарядом  $q$  и радиусом  $R$  через полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}.$$

УКАЗАНИЕ. При интегрировании по азимуту сделать замену  $\alpha' = \pi - 2\beta$ .

**2.20.** Получить из общей формулы предыдущей задачи потенциал  $\varphi$  электрического поля: а) на оси кольца; б) на больших расстояниях от кольца; в) вблизи нити кольца (асимптотические значения эллиптического интеграла взять из справочников).

**Пример 2.3.** *С помощью тождества Грина (1.97) доказать от противного теорему единственности: решение электростатической задачи внутри заданного ограниченного объема  $V$  единственно, если в объеме  $V$  задано распределение заряда  $\rho(\mathbf{r})$ , а на его поверхности  $S$  — либо потенциал  $\varphi$ , либо его нормальная производная  $\partial\varphi/\partial n$ .*

**Решение.** Предположим, что существуют два различных решения электростатической задачи,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , удовлетворяющие уравнению Пуассона

$$(1) \quad \Delta\varphi_{1,2} = -4\pi\rho \quad \text{внутри объема } V$$

и граничным условиям на  $S$

$$(2) \quad \varphi_{1,2} = f \quad (\text{условия Дирихле}) \quad \text{либо} \quad \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial n} = F \quad (\text{условия Неймана}),$$

где  $f$  и  $F$  — заданные функции координат. Положим в (1.97)  $\varphi = \psi = \varphi_1 - \varphi_2$ :

$$(3) \quad \int_V (\varphi \Delta \varphi + |\nabla \varphi|^2) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Из (1) следует, что  $\Delta \varphi = 0$ . Интеграл в правой части (3) также обращается в нуль как следствие (2). В итоге получаем

$$(4) \quad \int_V |\nabla \varphi|^2 dV = 0,$$

что возможно только при условии  $\nabla \varphi = 0$ , т. е.  $\varphi = \text{const}$ . В случае условий Дирихле  $\text{const} = 0$ , т. е.  $\varphi_1 = \varphi_2$ . В случае условий Неймана  $\text{const} \neq 0$ , но два электростатических потенциала, отличающиеся на постоянную, физически эквивалентны. Решение единственно. ■

**Пример 2.4.** С помощью тождества Грина (1.98) выразить электростатический потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  внутри объема  $V$  через известную плотность  $\rho(\mathbf{r})$  в этом объеме, а также значения  $\varphi$  и  $\partial \varphi / \partial n$  на поверхности  $S$ , ограничивающей объем.

**Решение.** В тождестве (1.98) полагаем функцию  $\varphi$  равной искомому потенциалу, а  $\psi = 1/R$  — обратному расстоянию  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  от рассматриваемой точки до элемента интегрирования  $dV'$ . Используем уравнение Пуассона  $\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r})$  и уравнение  $\Delta' \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , которому удовлетворяет функция  $\psi$  (см. формулу (1.225)). Получаем из (1.225)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} \right] dS'.$$

**Пример 2.5.** Система зарядов занимает ограниченную область пространства размером  $l$ . Пользуясь представлением электростатического потенциала в виде объемного интеграла (2.9), вычислить приближенное значение потенциала на расстояниях  $r \gg l$  от системы с точностью до членов порядка  $(l/r)^2$ . Какие величины, характеризующие систему зарядов, нужны для этого?

**Решение.** Разлагая подынтегральное выражение в (2.9) в ряд по малому отношению  $r'/r \leq l/r$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left( 1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} \approx \\ &\approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} x_\alpha x_\beta (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Здесь последнее слагаемое записано в тензорной форме с суммированием по повторяющимся индексам. Подставляя результат в интеграл (2.9), находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5}, \quad (2.21)$$

где использованы следующие обозначения:

$$q = \int \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (2.22)$$

— полный заряд системы;

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' \quad (2.23)$$

— дипольный момент системы зарядов;

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) dV' \quad (Q_{\alpha\alpha} = 0) \quad (2.24)$$

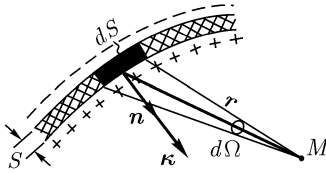
— тензор квадрупольного момента системы зарядов. Разложение потенциала (2.21) может быть продолжено. Оно называется **разложением по мультипольным моментам** (мультиполям). ■

**Пример 2.6.** Двойной электрический слой представляет собой две поверхности, находящиеся на малом расстоянии  $s$  друг от друга, одна из которых имеет положительный поверхностный заряд с плотностью  $\sigma$ , а другая — отрицательный заряд с плотностью  $-\sigma$ , так что в целом слой электронейтрален. Записать выражение для электростатического потенциала, создаваемого двойным слоем. Показать, что значения потенциала по обе стороны двойного слоя связаны соотношением

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\kappa, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}, \quad (2.25)$$

где  $\kappa = \sigma s$  — дипольный момент на единицу поверхности.

**Решение.** Введем вектор плотности дипольного момента  $\boldsymbol{\kappa} = \kappa s \mathbf{n}$ , где орт нормали  $\mathbf{n}$  должен быть направлен от отрицательной поверхности к положительной (см. рис. 2.5). Будем рассматривать двойной слой как одну поверхность и используем выражение для потенциала диполя, приходящегося на элемент  $dS$  поверхности, согласно (2.21):  $d\varphi_M = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} dS/r^3$ , где  $\mathbf{r}$  соединяет элемент  $dS$  с точкой наблюдения  $M$ . Легко убедиться, что величина  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS/r^3 = \pm d\Omega$  представляет собой элемент телесного угла, под которым из точки наблюдения  $M$  видна площадка  $dS$  (знак плюс — если видна положительная, а минус — отрицательная сторона поверхности). На основе принципа суперпозиции получаем



$$\varphi_M = \int_{\Omega} (\pm \kappa) d\Omega. \quad (2.26)$$

Рис. 2.5

Если поверхность ориентирована так, что знак всех ее элементов один и тот же, то  $\varphi_M = \pm \kappa \Omega$ . Если точка наблюдения находится на одной из сторон поверхности двойного слоя, то, очевидно,  $\varphi_M = \pm 2\pi \kappa$ . Это приводит к скачку потенциала (2.25) при переходе через двойной слой. Непрерывность  $E_n = -\partial\varphi/\partial n$  следует из равенства нулю полной поверхностной плотности заряда двойного слоя. ■

**2.21.** Записать в сферических координатах выражения для потенциалов электрического диполя с моментом  $\mathbf{p}$  и электрического квадрупольного для случая аксиально-симметричного распределения зарядов. Вычислить также напряженности поля  $\mathbf{E}_d, \mathbf{E}_q$  для этих систем.

**2.22\*.** Произвести разложение электростатического потенциала вне ограниченной системы зарядов по мультиполям и найти выражения для мультипольных моментов в сферических координатах. Использовать производящую функцию (1.182) для полиномов Лежандра и теорему сложения (1.195) для сферических функций.

**2.23\*.** Обобщить результат предыдущей задачи таким образом, чтобы разложение электростатического потенциала по сферическим функциям Лежандра годилось для точек наблюдения, находящихся внутри системы зарядов.

**2.24.** Тонкое круглое кольцо радиуса  $R$  состоит из двух равномерно и противоположно заряженных полуколец с зарядами  $q$  и  $-q$ . Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля на оси кольца и вблизи нее. Каков характер поля на больших расстояниях от кольца?

**2.25.** Сфера радиуса  $R$  заряжена по поверхности по закону  $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$ . Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля, используя разложение по мультиполям в сферических координатах.

**2.26\***. Источники электрического поля расположены аксиально симметричным образом. Вблизи оси симметрии системы источники поля отсутствуют. Выразить потенциал  $\varphi$  и напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля вблизи оси симметрии через значения потенциала и его производных на этой оси.

**2.27.** Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля равномерно заряженного круглого тонкого кольца, используя разложение по мультиполям в сферических координатах. Заряд кольца  $q$ , радиус  $R$ .

**2.28.** Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) заряды  $q, -2q, q$  расположены по оси  $Oz$  на расстоянии  $a$  друг от друга (линейный квадруполь); б) заряды  $\pm q$  расположены в вершинах квадрата со стороной  $a$  так, что соседние заряды имеют разные знаки, причем в начале координат находится заряд  $+q$ , а стороны квадрата параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$  (плоский квадруполь).

**2.29\***. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) линейный октуполь (рис. 2.6 а); б) пространственный октуполь (рис. 2.6 б).

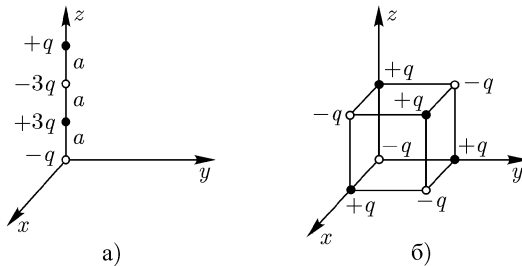


Рис. 2.6

**2.30.** Точечный заряд  $q$  находится в точке со сферическими координатами  $r_0, \vartheta_0, \alpha_0$ . Разложить по мультиполям потенциал  $\varphi$  этого заряда.

**2.31.** Эллипсоид с полуосями  $a, b, c$  равномерно заряжен по объему; полный заряд эллипсоида  $q$ . Найти потенциал  $\varphi$  на больших расстояниях

от эллипсоида с точностью до квадрупольного члена. Рассмотреть частные случаи эллипсоида вращения с полуосями<sup>2</sup>  $a = b$ ,  $c$  и шара ( $a = b = c$ ).

УКАЗАНИЕ. При интегрировании по объему эллипсоида воспользоваться обобщенными сферическими координатами  $x = ar \sin \vartheta \cos \alpha$ ,  $y = br \sin \vartheta \sin \alpha$ ,  $z = cr \cos \vartheta$ .

**2.32.** Два коаксиальных равномерно заряженных тонких круглых кольца с радиусами  $a$ ,  $b$  ( $a > b$ ) и зарядами  $q$ ,  $-q$  соответственно, расположены в одной плоскости. Найти потенциал  $\varphi$  на больших расстояниях от этой системы зарядов. Сравнить его с потенциалом линейного квадрупольного момента (см. задачу 2.28).

**2.33\***. Показать, что распределение заряда  $\rho = -(\mathbf{p}' \cdot \nabla)\delta(\mathbf{r})$  описывает элементарный диполь с моментом  $\mathbf{p}'$ , помещенный в начало координат. Пояснить результат, воспользовавшись наглядным представлением дельта-функции.

УКАЗАНИЕ. Исходить из разложения по мультиполям в декартовых координатах.

**2.34.** Доказать, что распределение зарядов

$$\rho = q \prod_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r})$$

создает потенциал

$$\varphi(\mathbf{r}) = q \prod_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \frac{1}{r}.$$

**2.35.** Используя результаты задачи 2.28 и учитывая, что квадрупольный момент является тензором II ранга, найти потенциал  $\varphi$  электрического поля на больших расстояниях от линейного квадрупольного момента, направление оси которого определяется полярными углами  $\gamma$ ,  $\beta$ . Каким еще способом можно решить задачу?

**2.36\***. Пространственный октуполь (рис. 2.6б) повернут вокруг оси  $Oz$  на угол  $\beta$ . Найти поле  $\varphi$  на больших от него расстояниях путем преобразования компонент октупольного момента. Сравнить с другими методами решения.

**2.37.** Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля на больших расстояниях от плоского квадрупольного момента, расположенного в плоскости, проходящей через

<sup>2</sup>Атомные ядра, обладающие квадрупольным моментом, можно в некотором приближении рассматривать как эллипсоиды вращения.

ось  $Oz$  (рис. 2.7). Компоненты квадрупольного момента получить непосредственно, а также путем поворота плоского квадруполь, рассмотренного в задаче 2.28б.

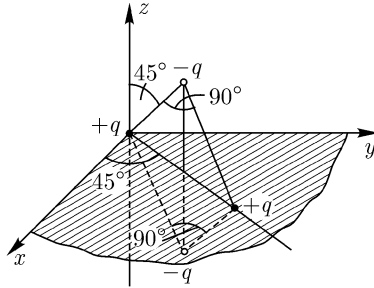


Рис. 2.7

**2.38.** Шар радиуса  $R$  равномерно поляризован, дипольный момент единицы объема  $P$ . Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля.

**2.39.** Двумерное распределение заряда характеризуется плотностью  $\rho(r)$ , не зависящей от координаты  $z$ . Если  $\rho \neq 0$  только в ограниченной области  $S$  плоскости  $xy$ , то можно разложить потенциал  $\varphi$  вне распределения зарядов по мультиполям (двумерные мультиполи). Найти это разложение.

УКАЗАНИЕ. Разбить систему зарядов на заряженные нити и использовать принцип суперпозиции, а также разложение

$$\ln(1 + u^2 - 2u \cos \alpha) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\alpha}{k} u^k, \quad |u| < 1.$$

**2.40.** Разложить по двумерным мультиполям потенциал  $\varphi$  линии с зарядом  $\kappa$  на единицу длины. Заряженная линия параллельна оси  $Oz$  и проходит через точку  $(r_0, \alpha_0)$  плоскости  $xy$ .

**2.41.** Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля на большом расстоянии от двух близких параллельных линейных зарядов  $\kappa$  и  $-\kappa$ , расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга (линейный диполь).

**2.42.** На диске радиуса  $R$  имеется двойной электрический слой мощностью  $\tau = \text{const}$ . Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля на оси симметрии, перпендикулярной плоскости диска.

**2.43.** Найти напряженность  $E$  электрического поля двойного электрического слоя мощностью  $\tau = \text{const}$ , занимающего полуплоскость  $y = 0$ ,  $x > 0$ . Сравнить с магнитным полем бесконечного прямолинейного тока, текущего вдоль оси  $Oz$ . Решить задачу двумя способами: а) прямым суммированием напряженностей, создаваемых малыми элементами двойного слоя; б) определив сначала электростатический потенциал  $\varphi$ .

**2.44.** Найти уравнения силовых линий системы двух точечных зарядов:  $+q$  в точке  $z = a$ , и  $\pm q$ , находящегося в точке  $z = -a$ ; начертить силовые линии. Имеются ли в поле точки равновесия?

УКАЗАНИЕ. Вследствие симметрии силовые линии располагаются в плоскостях  $\alpha = \text{const}$ , а  $E_z$  и  $E_R$  не зависят от  $\alpha$  (цилиндрические координаты). Переменные в дифференциальном уравнении силовых линий разделяются после замены

$$u = \frac{z+a}{r}, \quad v = \frac{z-a}{r}.$$

**2.45.** Используя результат предыдущей задачи, найти уравнение силовых линий точечного диполя, находящегося в начале координат.

**2.46.** Найти уравнение силовых линий линейного квадрупольного, рассмотренного в задаче 2.28,а и нарисовать их на компьютере.

**2.47.** Доказать, что поток напряженности электрического поля точечного заряда  $q$  через некоторую незамкнутую поверхность  $S$  равен  $q\Omega$ . Здесь  $\Omega$  — телесный угол, под которым виден контур, ограничивающий поверхность  $S$ , из точки, где находится заряд  $q$  ( $\Omega > 0$ , если из этой точки видна отрицательная сторона поверхности).

**2.48.** Заряд  $q_1$  находится на оси симметрии круглого диска радиуса  $a$  на расстоянии  $a$  от плоскости диска. Какой величины  $q_2$  заряд нужно поместить в симметричную относительно диска точку, чтобы поток электрического поля через диск в сторону заряда  $q_1$  был равен  $\Phi$ ?

**2.49\*** Найти уравнение силовых линий системы  $n$  коллинеарных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , расположенных в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  оси  $z$ , не интегрируя дифференциальных уравнений силовых линий. Применить теорему, доказанную в задаче 2.47, к силовой трубке, образованной вращением силовой линии вокруг оси симметрии.

**2.50.** Используя результат предыдущей задачи, найти уравнение силовых линий системы двух точечных зарядов (ср. с задачей 2.44) и линейного квадрупольного (ср. с задачей 2.46).



**2.51.** Равномерно заряженные нити, несущие заряды  $\kappa_1$  и  $-\kappa_2$  на единицу длины, параллельны между собой и отстоят друг от друга на расстоянии  $h$ . Найти, при каком соотношении между  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в числе поверхностей равного потенциала этой системы будут круговые цилиндры конечного радиуса. Определить радиусы и положение осей цилиндров.

**2.52.** Точечные заряды  $q_1$  и  $-q_2$  находятся на расстоянии  $h$  друг от друга. Показать, что в числе поверхностей равного потенциала этой системы имеется сфера конечного радиуса. Определить координаты ее центра и радиус. Найти значение потенциала  $\varphi$  на поверхности этой сферы, если  $\varphi(\infty) = 0$ .

**2.53.** Каким распределением зарядов создается потенциал, имеющий в сферических координатах вид:  $\varphi(\mathbf{r}) = (q/r) \exp(-\alpha r)$ , где  $\alpha, q$  — постоянные?

**2.54.** Каким должно быть распределение зарядов, чтобы созданный ими потенциал имел в сферических координатах вид

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{a} \left( \frac{a}{r} + 1 \right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где  $e_0, a$  — постоянные?

**Энергия и силы в электростатическом поле.** Вычислим энергию взаимодействия системы точечных электрических зарядов. Один заряд  $e_1$ , находящийся в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_1$ , создает в пространстве потенциал  $\varphi(\mathbf{r}) = e_1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ . При перемещении второго заряда  $e_2$  из бесконечности в точку с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_2$  нужно затратить работу  $R = -e_2\varphi_{12} = -e_1\varphi_{21} = -(1/2)(e_1\varphi_{21} + e_2\varphi_{12})$ , где  $\varphi_{ab} = e_b/|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$  потенциал, создаваемый зарядом  $e_b$  в точке  $\mathbf{r}_a$  (для зарядов одного знака работа внешнего источника отрицательна). Эта работа превращается в потенциальную энергию взаимодействия зарядов:  $W = -A$ . Обобщая это рассмотрение на случай  $N$  зарядов, получим их энергию взаимодействия (**потенциальную энергию** в терминах классической механики):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b=1}^N \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N e_a \varphi(\mathbf{r}_a), \quad (2.27)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}_a)$  — потенциал, создаваемый в точке нахождения заряда  $e_a$  всеми остальными зарядами. Слагаемые с  $a = b$  должны быть исключены.

Обобщим теперь полученные выражения на случай непрерывного распределения зарядов в пространстве, описываемого объемной плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ . Поскольку в элементе объема  $dV$  находится заряд  $de = \rho(\mathbf{r}) dV$ ,

последняя сумма в (2.27) должна быть заменена интегралом:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) dV, \quad (2.28)$$

где интегрирование проводится по всему объему, занимаемому системой зарядов.

**Пример 2.7.** Две системы зарядов с объемными плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  создают в заданной точке пространства потенциалы  $\varphi_1(\mathbf{r})$  и  $\varphi_2(\mathbf{r})$ . С помощью (2.28) получить выражения для собственных энергий систем  $W_{11}$ ,  $W_{22}$  и их взаимной энергии  $W_{12}$ . Как вычислить силы взаимодействия между системами?

**Решение.** Подставляя в (2.28)  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  и используя (2.9), находим  $W = W_{11} + W_{22} + W_{12}$ , где отдельные слагаемые можно записать в разных формах:

$$W_{ii} = \frac{1}{2} \int \rho_i \varphi_i dV = \frac{1}{2} \int \frac{\rho_i(\mathbf{r})\rho_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV', \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} W_{ik} &= \frac{1}{2} \int (\rho_i \varphi_k + \rho_k \varphi_i) dV = \int \rho_i \varphi_k dV = \\ &= \int \rho_k \varphi_i dV = \int \frac{\rho_i(\mathbf{r})\rho_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Энергия взаимодействия зависит от обобщенных координат  $q_\alpha^{(i)}$ ,  $q_\beta^{(k)}$  обеих систем, определяющих положение и ориентацию заряженных тел. По общим правилам механики, производная от потенциальной энергии взаимодействия по координате, взятая с противоположным знаком, определяет силу, стремящуюся увеличить эту координату:

$$\mathcal{F}_\alpha^{(i)} = -\frac{\partial W_{ik}}{\partial q_\alpha^{(i)}}, \quad \mathcal{F}_\beta^{(k)} = -\frac{\partial W_{ik}}{\partial q_\beta^{(k)}}. \quad (2.31)$$

Выразим энергию системы зарядов через напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ . Для этого распространим интегрирование в (2.28) на все бесконечное пространство, поскольку области с  $\rho = 0$  дают нулевой вклад, и преобразуем подынтегральное выражение:

$$\rho\varphi = \frac{1}{4\pi}(\operatorname{div}(\varphi\mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla\varphi) = \frac{1}{4\pi}(\operatorname{div}(\varphi\mathbf{E}) + E^2). \quad (2.32)$$

Интеграл от  $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{E})$  преобразуем по теореме Остроградского–Гаусса:

$$\int \operatorname{div}(\varphi \mathbf{E}) dV = \oint_{S \rightarrow S_\infty} \varphi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0.$$

На бесконечно удаленной поверхности, согласно (2.21), потенциал убывает не медленнее, чем  $1/r$ , а поле  $\mathbf{E}$  — не медленнее  $1/r^2$ . Поэтому поверхностный интеграл обращается в нуль. После подстановки (2.32) в (2.28) будем иметь

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad (2.33)$$

где интегрирование производится по всему пространству.

Обратим внимание на возможность различной трактовки выражений (2.28) и (2.33). В первый интеграл вклад дают только те области, в которых есть заряды ( $\rho \neq 0$ ) и, таким образом, следует считать, что энергия присуща электрическим зарядам. Вторая формула позволяет интерпретировать энергию как свойство электрического поля. Энергия присутствует всюду в пространстве, где  $E \neq 0$ , с объемной плотностью

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2. \quad (2.34)$$

Только вторая трактовка правильно объясняет, как будет ясно из последующих глав книги, нестационарные электромагнитные явления.

Необходимо также отметить, что выражения (2.27) и (2.28), (2.33) неэквивалентны. Это становится очевидным — при подстановке в (2.28) и (2.9) плотности

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^N e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),$$

описывающей систему точечных зарядов. Используя две указанные формулы, получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b=1}^N \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \frac{e_a^2}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_a|}.$$

Здесь только первая сумма, в которой  $a \neq b$ , соответствует выражению (2.27), описывающему энергию взаимодействия системы зарядов. Вторая сумма содержит собственные энергии точечных зарядов. Каждый член в ней расходится ввиду расходимости кулоновского потенциала при  $r \rightarrow 0$ . Очевидная бессмысленность этого результата означает, что классическая

электродинамика становится неприменимой на малых расстояниях. Трудность с расходимостью собственной энергии точечного объекта является фундаментальной и проявляется не только в классической электродинамике, но и в современной теории элементарных частиц, основу которой составляют квантовая механика и теория относительности. На современном этапе развития науки мы можем находить собственные энергии элементарных частиц лишь путем измерений. Энергия же их электрического взаимодействия дается формулой (2.27). При распределении зарядов по объему или поверхности с конечной плотностью никаких трудностей с определением энергий не возникает и их можно вычислить согласно (2.28) и (2.33).

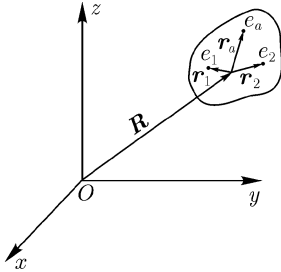


Рис. 2.8

**Пример 2.8.** Система, состоящая из  $N$  точечных зарядов, находится во внешнем поле, источники которого расположены далеко от рассматриваемой системы (рис. 2.8). Поэтому потенциал внешнего поля в пределах ограниченной

системы протяженностью  $l$  изменяется медленно. Вычислить энергию взаимодействия системы с внешним полем с точностью до квадрупольного члена.

**Решение.** Записываем энергию взаимодействия через потенциал внешнего поля в виде (см. (2.30))

$$W = \sum_{a=1}^N e_a \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_a).$$

Пользуясь условием гладкости потенциала, разлагаем его в степенной ряд:

$$\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_a) \approx \varphi(\mathbf{R}) + x_\alpha^a \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} x_\alpha^a x_\beta^a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots$$

Если в пределах рассматриваемой системы нет источников внешнего поля, то потенциал  $\varphi$  в этой области удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = 0.$$

Это позволяет записать последний член разложения потенциала в виде

$$\left( x_\alpha^a x_\beta^a - \frac{1}{3} r_a^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Подставляя эти разложения в исходное выражение для энергии, находим

$$W = q\varphi - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots \quad (2.35)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\mathbf{E}$  берутся при аргументе  $\mathbf{R}$ , а  $q$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $Q_{\alpha\beta}$  представляют собой мультипольные моменты системы точечных зарядов:

$$q = \sum_{a=1}^N e_a, \quad \mathbf{p} = \sum_{a=1}^N e_a \mathbf{r}_a, \quad Q_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^N e_a (3x_\alpha^a x_\beta^a - r_a^2 \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.36)$$

Разложение здесь производится по отношению  $l/L$  размера системы к масштабу  $L$  неоднородности внешнего поля. ■

## Задачи

**2.55.** Вычислить силу  $\mathcal{F}$  и крутящий момент  $N$ , приложенные к диполю с моментом  $\mathbf{p}$  во внешнем поле  $\mathbf{E}$ .

**2.56.** Вычислить электростатическую энергию шара с радиусом  $R$  и с зарядом  $q$ , распределенным равномерно а) по объему; б) по поверхности; в) по закону, указанному в задаче 2.12.

**2.57.** Плоскости двух тонких коаксиальных равномерно заряженных колец одинакового радиуса  $R$  находятся на расстоянии  $a$  друг от друга. Работа, которую надо совершить, чтобы перенести точечный заряд  $q$  из бесконечности в центр каждого из колец, равна соответственно  $A_1$  и  $A_2$ . Найти заряды  $q_1$ ,  $q_2$  на кольцах.

**2.58.** Вычислить энергию взаимодействия  $U$  электронного облака с ядром в атоме водорода. Распределение заряда в атоме приведено в задаче 2.15.

**2.59.** В некотором приближении можно считать, что электронные облака обоих электронов в атоме гелия имеют одинаковый вид и характеризуются объемной плотностью

$$\rho = -\frac{8e_0}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{4r}{a}\right),$$

где  $a$  — боровский радиус атома,  $e_0$  — элементарный заряд. Найти энергию  $U$  взаимодействия электронов в атоме гелия в этом приближении (нулевое приближение теории возмущений).

**2.60\***. Доказать, что равновесие системы неподвижных точечных зарядов, взаимодействующих только посредством электрических сил в отсутствие каких-либо связей, неустойчиво (теорема Ирншоу).

УКАЗАНИЕ. Использовать для доказательства первую теорему Ляпунова [Айзерман (1974), с. 222]: Если потенциальная энергия  $U(q_\alpha)$  консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и если это обстоятельство устанавливается из рассмотрения членов второй степени в разложении  $U(q_\alpha)$  в ряд по степеням  $q_\alpha$ , то данное положение равновесия неустойчиво.

**2.61.** Центры двух шаров с зарядами  $q_1$  и  $q_2$  находятся на расстоянии  $a$  друг от друга ( $a > R_1 + R_2$ , где  $R_1, R_2$  — радиусы шаров). Заряды распределены сферически симметричным образом. Найти энергию взаимодействия  $U$  шаров и действующую между ними силу  $\mathcal{F}$ .

**2.62.** Мыльный пузырь, висящий на открытой трубке, стягивается под действием поверхностного натяжения (коэффициент поверхностного натяжения  $\alpha$ ). Считая, что диэлектрическая прочность воздуха (напряженность поля, при которой происходит пробой) равна  $E_0$ , выяснить, можно ли, сильно заряжая пузырь, предотвратить его сжатие. Каков минимальный равновесный радиус  $R$  пузыря?

**2.63\***. Два параллельных коаксиальных тонких кольца с радиусами  $a, b$  несут на себе равномерно распределенные заряды  $q_1, q_2$ . Расстояние между плоскостями колец  $c$ . Найти энергию взаимодействия  $U$  колец и действующую между ними силу  $\mathcal{F}$ .

**2.64.** Найти силу  $\mathcal{F}$  и вращательный момент  $N$ , приложенные к электрическому диполю с моментом  $p$  в поле точечного заряда  $q$ .

**2.65.** Диполь с моментом  $p_1$  находится в начале координат, а другой диполь с моментом  $p_2$  — в точке с радиусом-вектором  $r$ . Найти энергию  $U$  взаимодействия этих диполей и действующую между ними силу  $\mathcal{F}$ . При какой ориентации диполей эта сила максимальна?

**2.66.** Система зарядов характеризуется объемной плотностью  $\rho(r)$  и занимает ограниченную область в окрестности некоторой точки  $O$ . Система помещена во внешнее электрическое поле, которое в окрестности этой точки может быть представлено в виде

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha).$$

Найти энергию  $U$  взаимодействия системы с внешним полем  $\varphi_1$ , выразив ее через  $a_{lm}$  и мультипольные моменты  $Q_{lm}$  системы (ср. с примером 2.8).

Рекомендуемая литература: [Смайт (1954)], [Камке и Кремер (1980)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Алексеев (1977)], [Стрэттон (1948)], [Пановский и Филипс (1963)], [Зоммерфельд (1958)], [Медведев (1977)], [Френкель (1956)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Бредов и др. (1985)], [Сена (1988)], [Тамм (1976)], а также [Фейнман и др., в. 5 и задачи].

## 2.2. Магнитостатика

**Плотность тока и магнитное поле. Закон Био–Савара.** Как следует из опыта, при движении заряженных частиц кроме электрического между ними возникает дополнительное взаимодействие, которое называется магнитным. Первые опыты по изучению магнитных взаимодействий производились с макроскопическими телами (постоянные магниты, проводники с током). Но впоследствии (уже в 20-м веке) были изучены магнитные взаимодействия отдельных микроскопических частиц (электронов, ионов и др.). Мы ниже сформулируем законы магнитных взаимодействий сначала для частиц, а затем получим из них соответствующие законы, относящиеся к макроскопическим объектам. Все формулы будут написаны в абсолютной гауссовой системе единиц.

При изучении магнитных явлений фундаментальную роль играет понятие магнитного поля. Частица малых размеров, движущаяся с постоянной скоростью  $v \ll c$ , где  $c \approx 3 \times 10^{10}$  см/с — скорость света в вакууме, создает **напряженность магнитного поля**

$$\mathbf{h} = \frac{e \mathbf{v} \times \mathbf{R}}{c R^3}, \quad (2.37)$$

где  $e$  — заряд частицы,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  — радиус-вектор, проведенный из точки местонахождения частицы в точку наблюдения. Если движется множество частиц с одинаковой скоростью, то по принципу суперпозиции частицы, находящиеся в макроскопически малом объеме  $dV$ , создадут поле

$$d\mathbf{H} = \sum_{(dV)} \frac{e \mathbf{v} \times \mathbf{R}}{c R^3} = \frac{\rho dV \mathbf{v} \times \mathbf{R}}{c R^3} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{c R^3} dV. \quad (2.38)$$

Здесь  $\rho$  — плотность электрического заряда,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}$  — **плотность электрического тока**, т. е. заряд, переносимый движущимися частицами в единицу времени через площадку единичной площади, ориентированную перпендикулярно скорости зарядов  $\mathbf{v}$ . Если же частицы движутся с неодинаковыми скоростями, например, участвуют в хаотическом тепловом движении, то под  $\mathbf{v}$  нужно понимать усредненную по тепловому движению (дрей-

фовую) скорость. Объемная плотность электрического тока может создаваться и отдельными точечными частицами. Используя выражение (2.3) для плотности заряда точечных частиц, получим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (2.39)$$

Если ток течет по квазилинейному проводнику сечением  $S$ , поперечный размер которого мал по сравнению с его длиной, то можно ввести силу тока  $J = jS$  и сделать замену

$$j dV \rightarrow J dl, \quad (2.40)$$

где  $dl$  — направленный элемент средней линии проводника. Напряженность магнитного поля, создаваемого элементом проводника с током, примет вид

$$d\mathbf{H} = \frac{J}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (2.41)$$

Именно это выражение рассматривают обычно как опытный закон Био–Савара<sup>3</sup>, хотя прямой опыт с отрезком проводника в случае постоянного тока провести невозможно — проводник должен быть замкнутым. Производя интегрирование по всему распределению токов, получим

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV', \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (2.42)$$

Первое из этих выражений применимо для объемного тока, второе — для замкнутого квазилинейного проводника. Заметим, что напряженность магнитного поля выражается через векторное произведение истинных (полярных — см. раздел 1.1) векторов и представляет собой **аксиальный вектор** (псевдовектор).

Единица силы тока в системе СИ — ампер (А). При токе силой в 1 А через поперечное сечение проводника переносится за секунду электрический заряд величиной в 1 Кл (кулон). В абсолютной гауссовой системе единиц сила тока имеет размерность  $\text{см}^{3/2}\text{Г}^{1/2}/\text{с}^2$ .  $1 \text{ А} = 3 \times 10^9 \text{ см}^{3/2}\text{Г}^{1/2}/\text{с}^2$ . Плотность тока имеет размерность силы тока, деленной на квадрат длины в соответствующей системе единиц.

<sup>3</sup>Био Ж. Б., Савар Ф. — французские физики. Закон, названный их именами, они открыли экспериментальным путем в 1820 г.



**Сила Лоренца и формула Ампера.** Мы пока не указали способ измерения напряженности магнитного поля. Используем для этой цели фундаментальный опытный факт — выражение для силы, действующей на движущуюся заряженную частицу при наличии электрического и магнитного полей (**силы Лоренца**)<sup>4</sup>:

$$\mathcal{F}_L = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (2.43)$$

Здесь первое слагаемое в правой части — уже известная сила Кулона, действующая на неподвижную частицу в электрическом поле. Второе слагаемое — дополнительная сила, действующая на движущуюся частицу при наличии магнитного поля. Выражение (2.43) для силы Лоренца — это одна из самых красивых формул классической физики. Она производит глубокое впечатление своей простотой и общностью: любая заряженная частица, движущаяся с произвольной скоростью, будет испытывать в электромагнитном поле действие силы (2.43). Она позволяет свести измерение напряженностей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  к измерению механических величин  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbf{v}$ . Напряженность  $\mathbf{E}$  определяется силой, действующей на неподвижную ( $\mathbf{v} = 0$ ) пробную частицу; напряженность  $\mathbf{H}$  — добавочной силой, которая действует на движущуюся частицу.

Просуммировав (2.43) по всем частицам в объеме  $dV$  при  $\mathbf{E} = 0$ , как это было сделано выше, получим магнитную силу, которая действует на элемент объема любой среды, в которой течет ток с плотностью  $\mathbf{j}$ :

$$d\mathcal{F} = \sum_{(dV)} \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H} dV. \quad (2.44)$$

Сила, действующая на элемент квазилинейного тока, получается путем замены (2.40) и имеет вид

$$d\mathcal{F} = \frac{J}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{H} \quad (2.45)$$

**(формула Ампера)**<sup>5</sup>. Полная сила в обоих случаях получается в результате интегрирования по всей области, в которой текут токи.

**Сохранение электрического заряда и уравнение непрерывности.** Из предыдущего рассмотрения следует, что магнитные явления — создание магнитного поля и его воздействие на частицы и токи — являются в своей основе электрокинетическими, т. е. проявляются при движении заряженных

<sup>4</sup>Лоренц Г. А. — выдающийся нидерландский физик, создатель классической электронной теории.

<sup>5</sup>Ампер А. М. — французский физик, один из основоположников электродинамики.

частиц. В то же время в разделе 2.1 уже было отмечено, что электрический заряд сохраняется во всех многообразных изученных до сих пор явлениях природы. В связи с этим нам необходимо выяснить, какие следствия, касающиеся взаимосвязи двух величин, плотности электрического заряда и плотности электрического тока, вытекают из закона сохранения заряда. Рассмотрим этот вопрос для общего случая, когда обе плотности зависят и от координат, и от времени.

Выделив произвольный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ , можем записать как следствие сохранения заряда

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt},$$

где  $q(t)$  — электрический заряд в объеме  $V$ . Его изменение может происходить только вследствие выхода частиц из объема. Интеграл в левой части равенства как раз и представляет заряд, покидающий объем в единицу времени. Выразив заряд  $q$  через плотность, получим интегральную форму закона сохранения заряда:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.46)$$

Применение теоремы Остроградского–Гаусса приводит к соотношению

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV = 0,$$

справедливному при произвольном выборе объема интегрирования. Это означает, что в любой точке пространства<sup>6</sup> выполняется **уравнение непрерывности**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.47)$$

Уравнения такого типа имеют огромное значение в физике, так как они выражают в дифференциальной форме закон сохранения любой субстанции.

В статической (неподвижной) системе зарядов  $\rho = \text{const}$ ,  $\mathbf{j} = 0$ , магнитное поле отсутствует. Постоянному (во времени) магнитному полю соответствует стационарный случай, когда распределение зарядов в пространстве не изменяется ( $\rho = \text{const}$ ), но течет постоянный ток  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \neq 0$ . При этом

<sup>6</sup>за исключением, быть может, конечного числа точек.

должно выполняться условие стационарности, вытекающее из (2.47):

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.48)$$

Стационарные (постоянные) токи либо текут по замкнутым контурам, либо уходят на бесконечность.

**Уравнения магнитостатики. Векторный потенциал.** Получим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет напряженность магнитного поля. Для этого используем закон Био–Савара в форме (2.42) и уравнение непрерывности для стационарного случая (2.48). Прежде всего замечаем, что из (2.42) следует:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (2.49)$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (2.50)$$

— **векторный потенциал магнитного поля.** Если ток течет по квазилинейному проводнику, векторный потенциал должен вычисляться по формуле

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \oint \frac{d\mathbf{l}'}{R}. \quad (2.50')$$

Применив к равенству (2.49) операцию  $\operatorname{div} = \nabla \cdot$ , получим

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.51)$$

при любом распределении токов в пространстве. Вектор  $\mathbf{H}$  является, таким образом, соленоидальным. Физический смысл этого условия — отсутствие в природе магнитных зарядов, аналогичных электрическим<sup>7</sup>.

Применим теперь операцию  $\operatorname{rot} = \nabla \times$  к обеим частям равенства (2.49). В правой части равенства появятся  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  и  $\Delta \mathbf{A}$ , поскольку  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$ .

**Пример 2.9.** Доказать, что для ограниченного в пространстве распределения токов

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.52)$$

<sup>7</sup>Некоторые теории элементарных частиц предполагают существование магнитных монополей, т. е. частиц, имеющих магнитные заряды. Но все попытки обнаружить их на опыте пока не увенчались успехом.

**Решение.** Вносим оператор  $\nabla$  под знак интеграла, меняя порядок дифференцирования по  $\mathbf{r}$  и интегрирования по  $dV'$ , и пользуемся тождеством  $\nabla R = -\nabla' R$ , где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Получаем с помощью (2.48)

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} = -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R}.$$

В результате имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV = -\frac{1}{c} \oint_{S_\infty} \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}}{R} \rightarrow 0.$$

Обращение в нуль интеграла по бесконечно удаленной поверхности требует, чтобы плотность тока на больших расстояниях убывала быстрее, чем  $r^{-1}$ . ■

**Пример 2.10.** Получить неоднородное дифференциальное уравнение для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  путем непосредственного применения оператора Лапласа к интегралу (2.50).

**Решение.** Вносим оператор Лапласа, действующий на координаты  $\mathbf{r}$ , под знак интеграла и пользуемся тождеством (1.225). Получаем уравнение Пуассона

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (2.53)$$

Используя (2.53), а также (2.52), находим из (2.49)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (2.54)$$

Уравнения магнитостатики для напряженности поля (2.51), (2.54) и для векторного потенциала (2.53) являются более общими, чем конкретные интегральные выражения (2.42) и (2.50), из которых они получены. На основе дифференциальных уравнений можно решить более широкий круг задач и представить решения в формах, отличных от (2.42), (2.50). В некоторых случаях более удобной является интегральная форма уравнений для поля  $\mathbf{H}$ :

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J. \quad (2.55)$$

Эти уравнения выводятся точно так же, как соответствующие уравнения для электростатического поля. В первом уравнении  $S$  — произвольная замкнутая поверхность, во втором  $l$  — произвольный замкнутый контур. Ток  $J$  —

это полный ток, который протекает через произвольную поверхность, опирающуюся на замкнутый контур  $l$ . Поэтому второе уравнение (2.55) иногда называют теоремой о полном токе. Первое уравнение означает, что магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  является вспомогательной величиной, через которую выражается согласно (2.49) наблюдаемая физическая величина — напряженность магнитного поля. Поэтому векторный потенциал определяется неоднозначно — заданному полю  $\mathbf{H}$  соответствует целое семейство векторных потенциалов, отличающихся на градиент произвольной дифференцируемой скалярной функции:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}). \quad (2.56)$$

Поскольку  $\nabla \times \nabla\chi = 0$ , то векторные потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$  представляют одну и ту же напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

**Граничные условия.** На поверхности, где плотность тока испытывает скачок или обращается в бесконечность, на нормальные и тангенциальные компоненты поля должны быть наложены некоторые граничные условия. Они выводятся точно так же, как граничные условия для электростатического поля. Но поскольку уравнения магнитостатики отличаются от уравнений электростатики, то отличаются и граничные условия:

$$H_{2n} - H_{1n} = 0, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_\nu. \quad (2.57)$$

Направления ортов  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  указаны на рис. 2.3. Величина  $i_\nu = \lim_{h \rightarrow 0} j_\nu h$  — плотность поверхностного тока. Она отлична от нуля, если в тонком слое течет ток конечной силы. Такой слой можно рассматривать как бесконечно тонкую поверхность, на которой должны быть выполнены условия (2.57). Оба условия можно записать и в векторной форме:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (2.58)$$

## Задачи

**2.67.** Может ли электрический ток с объемной плотностью  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{j}_0$ ,  $\mathbf{k}$  — постоянные векторы, обеспечить стационарное (не зависящее от времени) распределение зарядов в пространстве?

**2.68.** Найти распределение в пространстве электрического тока, создающего магнитное поле

$$H_r = H_0 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \cos \vartheta, \quad H_\vartheta = H_0 \left( \frac{2r^2}{5a^2} - \frac{1}{3} \right) \sin \vartheta,$$

$$H_\alpha = 0 \quad \text{при } r \leq a;$$

$$H_r = \frac{2H_0 a^3}{15r^3} \cos \vartheta, \quad H_\vartheta = \frac{H_0 a^3}{15r^3} \sin \vartheta,$$

$$H_\alpha = 0 \quad \text{при } r \geq a.$$

**2.69.** Показать, что однородному и постоянному магнитному полю  $\mathbf{H}$  можно сопоставить векторный потенциал  $\mathbf{A} = \mathbf{H} \times \mathbf{r}/2$ . Удовлетворяет ли он условию  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ?

**2.70.** Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса  $b$  находится коаксиальный с ней провод радиуса  $a$ . По этим проводникам текут постоянные токи одинаковой величины  $J$  в противоположных направлениях. Определить магнитное поле  $\mathbf{H}$ , создаваемое такой системой во всех точках пространства. Решить задачу двумя способами: интегрированием дифференциальных уравнений магнитостатики и с помощью интегральной формы этих уравнений.

**2.71.** Определить напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ , создаваемую постоянным током  $J$ , текущим по бесконечному цилиндрическому проводнику кругового сечения радиуса  $a$ . Решить задачу наиболее простым способом — с помощью уравнения магнитостатики в интегральной форме (2.55), а также путем введения векторного потенциала  $\mathbf{A}$ .

**2.72.** Решить предыдущую задачу для полого цилиндрического проводника (внутренний радиус  $a$ , наружный  $b$ ).

**2.73.** Прямолинейная бесконечно длинная полоса имеет ширину  $a$ . Вдоль полосы течет ток  $J$ , равномерно распределенный по ее ширине. Найти магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Проверить результат, рассмотрев предельный случай поля на больших расстояниях.

**2.74.** Противоположно направленные токи равной величины  $J$  текут по двум тонким бесконечно длинным пластинам, совпадающим с двумя гранями бесконечной призмы прямоугольного сечения. Ширина пластин  $a$ , расстояние между ними  $b$ . Найти силу взаимодействия на единицу длины  $f$ .

**2.75.** Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$ , создаваемые двумя прямолинейными параллельными токами  $J$ , текущими в противоположных направлениях. Расстояние между токами  $2a$ .

**2.76.** Определить магнитное поле  $\mathbf{H}$ , создаваемое двумя параллельными плоскостями, по которым текут токи с одинаковыми поверхностными плоскостями  $i = \text{const}$ . Рассмотреть два случая: а) токи текут в противоположных направлениях; б) токи направлены одинаково.

**2.77.** Определить магнитное поле  $\mathbf{H}$  в цилиндрической полости, вырезанной в бесконечно длинном цилиндрическом проводнике. Радиусы полости и проводника соответственно  $a$  и  $b$ , расстояние между их параллельными осями  $d$  ( $b > a + d$ ). Ток  $J$  распределен равномерно по сечению.

**2.78\***. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$ , создаваемые в произвольной точке тонким кольцом радиуса  $a$  с током  $J$ . Результаты выразить через эллиптические интегралы.

УКАЗАНИЕ. Использовать метод решения задачи 2.19.

**2.79\***. Показать, что если магнитное поле обладает аксиальной симметрией и описывается в цилиндрических координатах векторным потенциалом с компонентами  $A_\alpha(r, z)$ ,  $A_r = A_z = 0$ , то уравнение магнитных силовых линий имеет вид  $rA_\alpha(r, z) = \text{const}$ .

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть поток магнитного поля внутри трубки, образованной вращением одной из силовых линий вокруг оси симметрии (ср. с решением задачи 2.49).

**2.80.** Выразить напряженность  $\mathbf{H}$  и векторный потенциал  $\mathbf{A}$  аксиально симметричного магнитного поля вне его источников через напряженность магнитного поля  $H(z)$  на оси симметрии.

**2.81.** Исходя из закона Био–Савара (2.41), показать, что для замкнутого контура с током  $J$  напряженность магнитного поля в некоторой точке выражается формулой  $\mathbf{H} = -(J/c) \text{grad } \Omega$ , где  $\Omega$  — телесный угол, под которым контур виден из этой точки (ср. с задачей 2.47).

**2.82\***. Доказать теорему единственности решения магнитостатической задачи: уравнения магнитостатики (2.51), (2.54) и граничные условия (2.57) определяют напряженность магнитного поля ограниченной в пространстве системы постоянных токов единственным образом.

**2.83.** Показать, что магнитное поле бесконечно длинного цилиндрического соленоида с густой намоткой ( $n$  витков на единицу длины, ток  $J$ ) дается формулами

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} n J e_z \quad \text{внутри соленоида,} \quad \mathbf{H} = 0 \quad \text{снаружи,}$$

где ось  $Oz$  направлена вдоль соленоида.

УКАЗАНИЕ. Использовать теорему единственности решения магнитостатической задачи.

**2.84.** Определить магнитное поле  $\mathbf{H}$  на оси конечного соленоида с густой намоткой, имеющего форму цилиндра. Высота цилиндра  $h$ , радиус  $a$ , число витков на единицу длины  $n$ , сила тока  $J$ .

**2.85\***. Сфера радиуса  $a$  заряжена зарядом  $e$  равномерно по поверхности и вращается вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью  $\omega$ . Найти магнитное поле внутри и вне сферы.

**Пример 2.11.** Исходя из интегрального представления векторного потенциала (2.50), найти его приближенное значение на больших расстояниях от ограниченной в пространстве системы постоянных токов, занимающих область размером  $l$ . Показать, что с точностью до членов порядка  $l/r$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{где} \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV. \quad (2.59)$$

Вектор  $\mathbf{m}$  называется **магнитным дипольным моментом** системы токов.

**Решение.** Подставив разложение

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3}$$

в (2.50), получим

$$(1) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'.$$

Первый интеграл в левой части обращается в нуль, что следует из тождества

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \operatorname{div}'[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}')],$$

где  $\mathbf{a}$  — произвольный постоянный вектор, а  $\operatorname{div}'$  берется по координатам  $\mathbf{r}'$  и использовано условие стационарности токов (2.48). Интегрируя обе части равенства по объему и перейдя к интегрированию по бесконечно удаленной поверхности, получим  $\int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = 0$ . Это означает, что члена, аналогичного кулоновскому потенциалу, в магнитостатике не существует.

Для преобразования второго интеграла в (1) используем тождество

$$[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] \times \mathbf{r} = \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}' \operatorname{div}'[\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')].$$



Умножим обе части этого равенства скалярно на произвольный вектор  $\mathbf{a}$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$(2) \quad \begin{aligned} & \mathbf{a} \cdot \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV' \times \mathbf{r} = \\ & = \mathbf{a} \cdot \int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') dV' - \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}') \operatorname{div}' [\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] dV'. \end{aligned}$$

Последний интеграл преобразуем с помощью тождества

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}') \operatorname{div}' [\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] - \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}').$$

После интегрирования по всему пространству и применения теоремы Остроградского–Гаусса слагаемое в правой части, содержащее  $\operatorname{div}'$ , обращается в нуль. В итоге из равенства (2) ввиду произвольности вектора  $\mathbf{a}$  следует

$$(3) \quad \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV' \times \mathbf{r} = 2 \int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') dV'.$$

Используя это тождество в (1), получим представление для векторного потенциала, приведенное в условии примера.  $\blacksquare$

**2.86.** Вычислить магнитный момент  $\mathbf{m}$  вращающейся сферы, рассмотренной в задаче 2.82. Сделать то же самое для случая, когда заряд распределен равномерно по объему. Вычислить магнитное поле на большом расстоянии от сферы и сравнить с результатом точного решения указанной задачи.

**2.87.** Показать, что магнитный момент плоского контура с током можно вычислить по формуле

$$\mathbf{m} = \frac{J}{c} S \mathbf{n}, \quad (2.60)$$

где  $J$  — ток в контуре,  $S$  — площадь, ограниченная контуром с током,  $\mathbf{n}$  — орт нормали к плоскости контура.

**2.88.** Пусть система заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе  $e/m$  совершает финитное (ограниченное в пространстве) движение в некотором внешнем поле. Показать, что магнитный момент такой системы частиц пропорционален ее моменту импульса:

$$\mathbf{m} = \eta \mathbf{L}, \quad (2.61)$$

где  $\eta = e/2mc$  — гиромагнитное отношение,  $\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$  — момент импульса системы частиц.

**2.89.** Система состоит из двух частиц с разными отношениями  $e/m$ . Выразить ее магнитный момент через полный механический момент  $\mathbf{L}$  в системе центра масс. Рассмотреть случай частица-античастица ( $e_2 = -e_1$ ,  $m_2 = m_1$ ).

**2.90.** В возбужденном состоянии атома водорода электрон создает орбитальный ток

$$j_r = j_\vartheta = 0, \quad j_\alpha = \frac{e\hbar r^3}{3^8 \pi m_e a^7} \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) \sin \vartheta \cos^2 \vartheta,$$

где использованы уже применявшиеся в задаче 2.54 обозначения. Вычислить магнитный момент орбитального тока.

**2.91\*** Плотность тока, создаваемая в основном состоянии атома водорода спиновым<sup>8</sup> магнитным моментом электрона, описывается функцией  $\mathbf{j} = (c/e) \operatorname{rot}[\rho(r)\boldsymbol{\mu}_s]$ , где  $\boldsymbol{\mu}_s$  — постоянный вектор,  $\rho(r)$  — объемная плотность распределения заряда в атоме, не зависящая от углов и экспоненциально убывающая при больших  $r$ . Показать, что магнитное поле в начале координат равно  $-(8/3e)\pi\rho(0)\boldsymbol{\mu}_s$ . Какой магнитный момент создает указанный ток?

**2.92.** Вычислить магнитное поле в начале координат и магнитный момент, создаваемые током

$$j_r = j_\vartheta = 0, \quad j_\alpha = \frac{e\hbar r^3}{2 \cdot 3^8 \pi m_e a^7} \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) \sin^3 \vartheta$$

в одном из возбужденных состояний атома водорода (сферические координаты).

**2.93.** Однородно заряженный эллипсоид вращения (полный заряд  $e$ ) с полуосями  $a$ ,  $a$ ,  $b$  вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ . Вычислить его магнитный момент и магнитное поле на больших расстояниях.

**2.94.** Тонкий диск радиуса  $a$  с равномерно распределенным зарядом  $e$  вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Вычислить магнитный момент и напряженность поля всюду на оси диска.

<sup>8</sup>О спиновых моментах см. ответ к задаче 2.88.

**Пример 2.12.** Исследовать возможность введения псевдоскалярного потенциала магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla\psi(\mathbf{r})$ . На примере квазилинейного замкнутого проводника с током исследовать роль неодносвязности области определения  $\psi$ , получить уравнение и граничные условия для потенциала.

**Решение.** Представление  $\mathbf{H} = -\nabla\psi$  приводит к соотношению  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  и, следовательно, согласно (2.54) возможно только в областях, где плотность тока  $\mathbf{j} = 0$ . В этих областях из уравнения (2.51) следует уравнение Лапласа для потенциала:

$$\Delta\psi = 0. \quad (2.62)$$

Но наличие областей, в которых  $\mathbf{j} \neq 0$  и потенциал не существует, делает пространство неодносвязным и приводит к неоднозначности  $\psi$ .

Пусть поле создается квазилинейным проводником с током. Выберем произвольный замкнутый контур, охватывающий проводник с током (рис. 2.9), и вычислим значение потенциала в точке  $A$  после обхода по этому контуру:

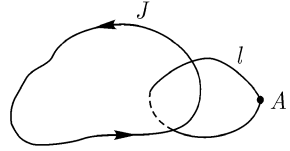


Рис. 2.9

$$\tilde{\psi}_A = \psi_A + \oint_l d\psi.$$

Если бы  $\psi(\mathbf{r})$  был однозначной непрерывной функцией координат, то  $\oint d\psi = 0$ . Но фактически

$$\oint_l d\psi = \oint \nabla\psi \cdot d\mathbf{l} = - \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{4\pi}{c}J,$$

и, таким образом,

$$\psi_A - \tilde{\psi}_A = \frac{4\pi}{c}J. \quad (2.63)$$

Последнее соотношение показывает, что  $\psi(\mathbf{r})$  — неоднозначная функция координат и после обхода по любому замкнутому контуру, охватывающему контур с током, приобретает приращение  $4\pi J/c$ , где  $J$  — полный ток, протекающий через произвольную поверхность, которая опирается на контур интегрирования.

Условие (2.63) сходно с граничным условием (2.25) на поверхности двойного электрического слоя мощностью  $\kappa_m = J/c$ . Поэтому на контур с током можно натянуть произвольную поверхность и считать, что на ней

должно выполняться условие (2.63). Второе граничное условие — непрерывность потенциала на двойном слое — также выполняется, поскольку нормальная компонента магнитного поля непрерывна на любой поверхности:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \frac{\partial\psi_1}{\partial n}. \quad (2.64)$$

■

**2.95.** Найти псевдоскалярный потенциал  $\psi$  магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводом с током  $J$ . Вычислить компоненты магнитного поля.

**2.96\***. Найти псевдоскалярный потенциал  $\psi$  магнитного поля замкнутого линейного контура с током. Решить задачу: а) путем интегрирования уравнения Лапласа для потенциала; б) используя известное выражение (2.50') для векторного потенциала.

УКАЗАНИЕ. При решении задачи первым способом воспользоваться представлением решения уравнения Лапласа в виде интеграла по замкнутой поверхности, см. пример 2.4.

**Энергия и силы в постоянном магнитном поле.** Вычислим работу по перемещению контура  $l$  с током  $J$  во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Пусть каждый элемент контура  $d\mathbf{l}$  сместится на малый вектор  $d\mathbf{s}$ . На элемент тока действует сила Ампера (2.45), поэтому работа  $\delta A$  по перемещению всего контура запишется в виде

$$\delta A = \frac{J}{c} \oint_l \delta \mathbf{s} \cdot [d\mathbf{l} \times \mathbf{H}] = \frac{J}{c} \int_{\delta S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{J}{c} \delta \Phi,$$

где  $d\mathbf{S} = \delta \mathbf{s} \times d\mathbf{l}$ ,  $\delta S$  — полная поверхность, которую опишет весь контур с током при его малом смещении (и, возможно, деформации). Интеграл в предыдущей цепочке равенств представляет собой приращение магнитного потока

$$\Phi = \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.65)$$

через контур с током при его перемещении. Это изменение,  $\delta\Phi$ , равно как раз потоку через дополнительную поверхность, прочерченную контуром (рис. 2.10). Вычисленная работа представляет собой, очевидно, приращение энергии контура во внешнем поле:

$$\delta A = \delta W. \quad (2.66)$$

Элементарная работа позволяет вычислить обобщенные силы  $\mathcal{F}_\alpha$ , действующие на контур с током, так как она связана с приращением обобщенных координат  $\delta q_\alpha$  известным из механики соотношением:

$$\delta A = \sum_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha \delta q_\alpha.$$

Но аналогию с механикой можно углубить, если ввести в рассмотрение **потенциальную функцию** контура с током во внешнем поле

$$U = -\frac{J}{c} \Phi. \quad (2.67)$$

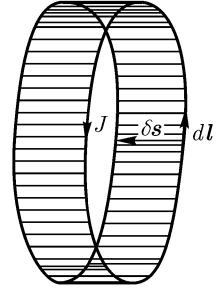


Рис. 2.10

Работа магнитных сил совершается за счет убыли потенциальной функции:  $\delta A = -\delta U$ , а обобщенные силы вычисляются по обычным формулам механики:

$$\mathcal{F}_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (2.68)$$

Следует иметь в виду, что потенциальная функция играет роль потенциальной энергии только при бесконечно медленных перемещениях контура. При конечных скоростях возникает явление электромагнитной индукции (см. следующий раздел), которое изменяет силу тока в контуре и приводит к появлению наряду с механическими электродвижущих сил.

Рассмотрим теперь взаимодействие двух контуров,  $a$ -го и  $b$ -го, в отсутствие прочих контуров. Роль внешнего поля играет поле другого контура, и потенциальная функция их взаимодействия примет вид

$$U_{ab} = U_{ba} = -\frac{J_a}{c} \Phi_{ab} = -\frac{J_b}{c} \Phi_{ba} = -\frac{J_a J_b}{c^2} \oint_{l_a} \oint_{l_b} \frac{dl_a \cdot dl_b}{R}.$$

Здесь

$$\Phi_{ba} = \oint_{l_b} \mathbf{A}_a \cdot d\mathbf{l}_b$$

— магнитный поток поля  $a$ -го контура через  $b$ -й контур и использована формула (2.50') для векторного потенциала;  $R$  — расстояние между  $dl_a$  и  $dl_b$ . Удобно записывать потенциальную функцию в симметричной форме:

$$U_{int} = \frac{1}{2}(U_{ab} + U_{ba}) = -\frac{1}{2c^2} \sum_{a \neq b=1}^2 L_{ab} J_a J_b, \quad (2.69)$$

где

$$L_{ab} = \oint_{l_a} \oint_{l_b} \frac{dl_a \cdot dl_b}{R} \quad (L_{ba} = L_{ab}) \quad (2.70)$$

— **коэффициент взаимной индукции** двух контуров. Он определяется (в отсутствие намагничивающихся материальных сред) только формой и расположением контуров с током, а также направлениями их обхода (направлениями токов). Силы взаимодействия контуров вычисляются через  $U_{int}$  согласно (2.68). Магнитный поток, создаваемый контуром  $a$  через контур  $b$ , также выражается через коэффициент взаимной индукции:

$$\Phi_{ba} = \frac{1}{c} L_{ba} J_a. \quad (2.65')$$

Если толщины проводников не малы по сравнению с их длинами, то в полученных выше формулах нужно сделать замену  $J dl \rightarrow \mathbf{j} dV$  и интегрировать по объему каждого из проводников. Это приведет к выражениям

$$U_{int} = -\frac{1}{2c^2} \sum_{a \neq b=1}^2 \int_{V_a} \int_{V_b} \frac{\mathbf{j}_a(\mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{j}_b(\mathbf{r}_b)}{R} dV_a dV_b = -\frac{1}{2c^2} \sum_{a \neq b=1}^2 L_{ab} J_a J_b, \quad (2.71)$$

где коэффициент взаимной индукции

$$L_{ab} = \frac{1}{J_a J_b} \int_{V_a} \int_{V_b} \frac{\mathbf{j}_a(\mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{j}_b(\mathbf{r}_b)}{R} dV_a dV_b, \quad (2.72)$$

и т. д. Все эти выражения пригодны и для произвольного числа токов, если провести суммирование по всем токам.

Формулы (2.71), (2.72) позволяют построить потенциальную функцию взаимодействия отдельных элементов одного и того же тока:

$$U = -\frac{1}{2c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = -\frac{1}{2c^2} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV dV' = -\frac{1}{2c^2} L J^2. \quad (2.73)$$

Эти выражения можно рассматривать как результат взаимодействия отдельных токовых нитей, на которые можно разделить любой ток конечной толщины. Величина

$$L = \frac{1}{J^2} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV dV' \quad (2.74)$$

называется **коэффициентом самоиндукции**. При его вычислении необходимо учитывать конечность сечения проводника, иначе соответствующий интеграл разойдется.

Потенциальная функция только знаком отличается от энергии, которую нужно затратить, чтобы создать в пространстве соответствующие токовые распределения. Поэтому полную магнитную энергию  $W$  постоянных токов можно записать в виде

$$W = -U = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2c^2} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV dV'. \quad (2.75)$$

Эти выражения пригодны для постоянных токов в самом общем случае, они включают в себя как собственные энергии любого числа проводников с током, так и их энергии взаимодействия.

Магнитная энергия допускает полевую интерпретацию после преобразования выражений (2.75) аналогично тому, как это делалось в электростатике. Положив  $\mathbf{j} = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{H}$  согласно (2.54) и воспользовавшись тождеством

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div}[\mathbf{H} \times \mathbf{A}] + \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

будем иметь

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} dV + \frac{1}{8\pi} \oint_S [\mathbf{H} \times \mathbf{A}] \cdot d\mathbf{S},$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая объем интегрирования  $V$ . В случае системы токов конечных размеров можно интегрировать по всему безграничному пространству. Интеграл по бесконечно удаленной поверхности обратится в нуль, и магнитная энергия будет выражена только через напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ :

$$W = \int w dV, \quad \text{где} \quad w = \frac{1}{8\pi} H^2 \quad (2.76)$$

— объемная плотность магнитной энергии. Согласно последнему выражению, магнитная энергия, в отличие от (2.75), сосредоточена не только в областях, где текут токи, но разлита по всему пространству с объемной плотностью  $w$ . Аналогия с формулой (2.33) электростатики очевидна.

**Пример 2.13.** Пусть в пределах ограниченной в пространстве системы постоянных токов с плотностью  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  внешнее магнитное поле слабо неоднородно. Выразить потенциальную функцию системы через ее магнитный момент.

**Решение.** Используя формулы (2.65), (2.67), запишем искомую потенциальную функцию:

$$(1) \quad U = -\frac{J}{c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow -\frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) dV,$$

где  $\mathbf{r}$  отсчитывается от некоторой точки внутри системы токов (см. рис. 2.8). Представим векторный потенциал внешнего поля в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \approx \mathbf{A}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{R}),$$

где оператор  $\nabla$  действует на  $\mathbf{R}$ . После подстановки этого выражения в (1) первый интеграл обращается в нуль, что было получено при решении примера 2.11. Второй интеграл преобразуем с помощью тождества (3) из решения того же примера, заменив в указанном тождестве вектор  $\mathbf{r}$  вектором  $\nabla$ . Это дает:

$$\frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \nabla) dV = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] dV \times \nabla = \mathbf{m} \times \nabla.$$

Подставляя этот результат в (1), находим потенциальную функцию:

$$U = -[\mathbf{m} \times \nabla] \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}, \quad (2.77)$$

где  $\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{R})$  — напряженность внешнего магнитного поля. ■

## Задачи

**2.97.** Найти силу  $\mathbf{F}$  и вращательный момент  $\mathbf{N}$ , действующие на замкнутый тонкий проводник с током в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Форма контура, образованного проводником, произвольна. Решить задачу двумя способами: прямым суммированием сил и моментов сил, приложенных к элементам тока, и с помощью потенциальной функции. Результат выразить через магнитный момент  $\mathbf{m}$ .

**2.98.** Найти потенциальную функцию  $U$  двух малых токов, магнитные моменты которых  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ . Определить силу взаимодействия  $\mathbf{F}$  этих токов и приложенные к ним вращательные моменты  $\mathbf{N}$ . Рассмотреть частный случай  $\mathbf{m}_1 \parallel \mathbf{m}_2$ .

**2.99.** Показать, что силы, действующие между малыми токами, стремятся установить магнитные моменты этих токов параллельно друг другу и линии, соединяющей центры.



**2.100.** Найти потенциальную функцию  $u_{21}$  (на единицу длины) двух параллельных бесконечно длинных прямых токов  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$  и силу  $f$  их взаимодействия на единицу длины.

**2.101.** Квадратная рамка с током  $\mathcal{I}_2$  расположена так, что две ее стороны параллельны длинному прямому проводу с током  $\mathcal{I}_1$  (рис. 2.11). Сторона квадрата  $a$ . Определить действующую на рамку силу  $\mathbf{F}$  и вращательный момент  $\mathbf{N}$  относительно оси  $OO'$ .

**2.102.** Рамка с током  $\mathcal{I}_2$  состоит из дуги окружности с углом  $2(\pi - \varphi)$  и соединяющей ее концы хорды (рис. 2.12). Радиус дуги  $a$ . Нормально к плоскости рамки через центр окружности проходит длинный прямой провод с током  $\mathcal{I}_1$ . Найти момент сил  $N$ , приложенный к рамке.

**2.103.** Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса  $b$  находится коаксиальный провод радиуса  $a$ . Найти самоиндукцию  $\mathcal{L}$  на единицу длины.

**2.104.** Линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Найти самоиндукцию  $\mathcal{L}$  на единицу длины.

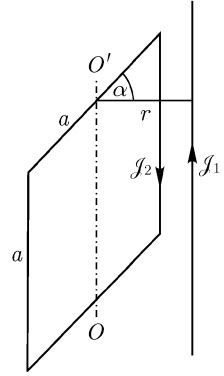


Рис. 2.11

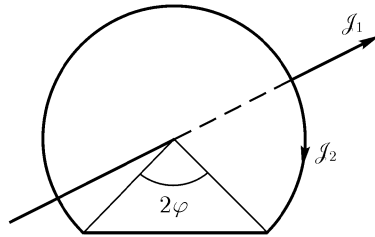


Рис. 2.12

**2.105.** Длинный прямой провод и кольцо радиуса  $a$  лежат в одной плоскости. Расстояние от центра кольца до провода  $b$ . Найти коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$  и силу взаимодействия  $F$ , если сила тока в проводе  $\mathcal{I}_1$ , в кольце  $\mathcal{I}_2$ .

**2.106\***. Два тонких кольца с радиусами  $a$  и  $b$  расположены так, что их плоскости перпендикулярны отрезку прямой длиной  $l$ , соединяющему центры колец. Найти коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$ . Результат выразить через эллиптические интегралы. Рассмотреть, в частности, предельный случай  $l \gg a, b$ .

**2.107.** Найти силу взаимодействия  $F$  между двумя кольцевыми токами, рассмотренными в предыдущей задаче.

**2.108.** Найти самоиндукцию  $\mathcal{L}$  единицы длины бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой и с произвольной (не обязательной круговой) формой сечения. Площадь сечения  $S$ , число витков на единицу длины  $n$ .

**2.109.** Найти самоиндукцию  $L$  соленоида конечной длины  $h$  и радиуса  $a$  ( $h \gg a$ ), с точностью до членов  $a/h$ . Ток, текущий в обмотке, заменить эквивалентным поверхностным током.

**2.110.** Найти самоиндукцию  $L$  тороидального соленоида. Радиус тора  $b$ , число витков  $N$ , сечение тора — круг радиуса  $a$ . Определить самоиндукцию единицы длины соленоида в предельном случае  $b \rightarrow \infty$  ( $\frac{N}{b} = \text{const}$ ). Решить ту же задачу для тороидального соленоида, сечение которого — прямоугольник со сторонами  $a$  и  $h$ .

**2.111.** Определить самоиндукцию  $\mathcal{L}$  единицы длины двухпроводной линии. Линия состоит из двух параллельных прямых проводов, радиусы которых  $a$  и  $b$ , расстояние между осевыми линиями  $h$ . По проводам текут равные по величине, но противоположно направленные токи  $\mathcal{I}$ .

**2.112\***. Показать, что самоиндукцию тонкого замкнутого проводника с круговой формой сечения можно приближенно вычислить по формуле<sup>9</sup>

$$L = \frac{l}{2} + L',$$

где  $l$  — длина проводника,  $L'$  — коэффициент взаимной индукции двух линейных контуров. Один из контуров совпадает с осевой линией рассматриваемого квазилинейного проводника, другой — с линией, по которой пересекается с поверхностью проводника произвольная незамкнутая поверхность  $S$ , опирающаяся на его осевую линию (рис. 2.13).

<sup>9</sup>Первый и второй члены в выражении  $L$  могут быть названы соответственно внутренней и внешней самоиндукцией, так как они определяют магнитную энергию, запасенную внутри проводника и вне его.

**2.113.** Определить самоиндукцию  $L$  тонкого проволочного кольца радиуса  $b$ . Радиус провода  $a \ll b$ .

УКАЗАНИЕ. Использовать формулу, приведенную в условии предыдущей задачи.

**2.114.** Определить коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$  двух параллельных отрезков длиной  $a$ , расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга и совпадающих с двумя сторонами прямоугольника.<sup>10</sup>

**2.115.** Определить коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$  двух одинаковых квадратов со стороной  $a$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга и совпадающих с двумя противоположными гранями прямоугольного параллелепипеда. Найти силу взаимодействия  $F$  между ними.

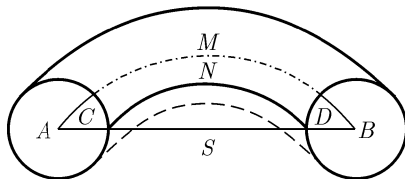


Рис. 2.13

**2.116.** Вычислить самоиндукцию  $L$  проволочного квадрата со стороной  $b$ . Радиус провода  $a \ll b$ .

УКАЗАНИЕ. Можно использовать результаты задач 2.112, 2.114.

Рекомендуемая литература: [Медведев (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Смайт (1954)], [Зоммерфельд (1958)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Френкель (1956)], [Джексон (1965)], [Джексон (1975)], [Алексеев (1977)], [Пановский и Филипс (1963)], [Сена (1988)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Тамм (1976)], [Камке и Кремер (1980)], [Стрэттон (1948)], а также [Фейнман и др., в. 5 и задачи].

### 2.3. Уравнения Максвелла. Свободное электромагнитное поле

**Закон электромагнитной индукции.** В предыдущих разделах рассматривались закономерности, свойственные неподвижным электрическим зарядам и постоянным токам (за исключением закона сохранения электрического заряда, который был сформулирован для общего случая). Здесь будет рассмотрена общая картина нестационарных электромагнитных явлений и уравнения, описывающие эти явления. Их основная особенность

<sup>10</sup>Искомый коэффициент взаимной индукции здесь не имеет непосредственного физического смысла, так как токи в этих отрезках не могут быть замкнутыми. Однако через него легко выразить индуктивность замкнутых контуров, имеющих параллельные прямолинейные участки (см. следующие две задачи).

состоит в том, что переменные во времени электрическое и магнитное поля, в отличие от полей статических, не могут существовать независимо. Между ними возникает связь, приводящая к формированию единого электромагнитного поля, которое описывается двумя напряженностями,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . В наиболее наглядной форме эта связь была обнаружена в опытах английского физика М. Фарадея (1831 г.). Если замкнутый проводник поместить в переменное магнитное поле, то в проводнике возникает электрический ток, пропорциональный изменению магнитного потока через контур проводника. Ток возникает и при движении проводника в постоянном, но неоднородном магнитном поле, а также при вращении замкнутого проводника в таком поле. Во всех случаях необходимо, чтобы изменялся магнитный поток  $\Phi$  через контур.

Возникновение тока означает, что в проводнике индуцируется электрическое поле, которое вызывает и поддерживает ток. Мерой эффекта может служить циркуляция напряженности электрического поля в замкнутом проводнике, которая называется **электродвижущей силой (ЭДС) индукции**:

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.78)$$

Основываясь на объективном характере законов природы, мы должны предположить, что при изменении магнитного поля в данной области пространства в ней возникает индуцированное электрическое поле независимо от наличия проводника, в котором это поле может вызвать ток. Количественная связь между магнитным и электрическим полями, найденная Фарадеем, имеет вид

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.79)$$

и называется **законом электромагнитной индукции**.

Получим из этого соотношения интегральную связь между напряженностями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Предполагая, что произвольный контур  $l$  неподвижен и на него надета поверхность  $S$ , ограниченная этим контуром, будем иметь из (2.78), (2.79)

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.80)$$

Если интеграл в левой части преобразовать по теореме Стокса в интеграл по поверхности, то получим

$$\int_S \left( \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Наконец, учитывая произвольный выбор поверхности  $S$ , получаем дифференциальное уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (2.81)$$

Соотношения (2.80) и (2.81) представляют собой интегральную и дифференциальную формы закона электромагнитной индукции Фарадея.

**Уравнения Максвелла.** Дифференциальную форму закона электромагнитной индукции (2.81) можно рассматривать как обобщение электростатического уравнения (2.10),  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , позволяющее описывать нестационарные явления. Нетрудно убедиться в том, что и уравнение магнитостатики (2.54) для  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  неприменимо для описания явлений, изменяющихся со временем. Применяя операцию  $\operatorname{div}$  к обеим частям этого уравнения, получим  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , что не согласуется с уравнением непрерывности (2.47) в общем случае.

Обобщение уравнений электромагнитного поля, позволяющее на их основе описывать весьма широкий круг нестационарных электромагнитных явлений, произвел выдающийся английский физик Д. К. Максвелл в 1860-х годах:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.82)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (2.83)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.84)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.85)$$

Уравнения для дивергенций (2.12) и (2.51) сохранили свой вид и при описании нестационарных явлений. В уравнение (2.54) Максвеллом был добавлен член с производной от напряженности электрического поля

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.86)$$

который называется **током смещения**. Он входит в правую часть уравнения (2.83) в сумме с током  $\mathbf{j}$ , создаваемым заряженными частицами (**током проводимости**), и вместе с ним участвует в создании магнитного поля. Именно наличие тока смещения позволяет обеспечить сохранение электрического заряда: применив  $\operatorname{div}$  к обеим частям (2.83), и используя (2.84), получим уравнение непрерывности (2.47). При заданных источниках поля  $\rho$

и  $\mathbf{j}$  уравнения Максвелла линейны, что приводит к **принципу суперпозиции полей** в вакууме. Электрическое и магнитное поля по отдельности могут существовать только если они постоянны. Эти случаи были рассмотрены в разделах 2.1 и 2.2.

**Пример 2.14.** Показать, что уравнения Максвелла (2.84) и (2.85) можно рассматривать как универсальные (одинаковые для всех задач) начальные условия для уравнений соответственно (2.83) и (2.82).

**Решение.** Применив к обеим частям (2.83) операцию  $\operatorname{div}$  и используя уравнение непрерывности (2.47), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0.$$

Отсюда следует, что разность  $\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - 4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$  не зависит от времени. Если она равна нулю при  $t = t_0$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$  во все моменты времени. Аналогичный вывод получается для  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . ■

На поверхностях, на которых  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  имеют особенности, напряженности поля должны удовлетворять граничным условиям, вытекающим из интегральной формы уравнений Максвелла. Поскольку производные  $\partial \mathbf{E}/\partial t$  и  $\partial \mathbf{H}/\partial t$  ограничены (скорость изменения во времени любой величины конечна), то граничные условия в общем случае ничем не отличаются от полученных ранее условий (2.17), (2.18), (2.58) и имеют вид

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 4\pi\sigma, \quad (2.88)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0. \quad (2.90)$$

Величины  $\sigma$  и  $\mathbf{i}$  представляют собой поверхностные плотности электрического заряда и тока соответственно.

Возможны разные постановки электродинамических задач. Наиболее простым является случай, когда источники поля  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  можно считать заданными, т. е. распределения зарядов и токов в пространстве и во времени известны заранее. В этом случае задача сводится к интегрированию системы линейных уравнений (2.82)–(2.85) с граничными условиями (2.87)–(2.90). Но такая постановка задачи не всегда возможна, так как очень часто движение заряженных частиц заранее неизвестно.

В этом случае уравнения Максвелла нужно дополнить уравнениями движения частиц и решать их совместно. Поскольку координаты и скорости частиц будут в общем случае сложным образом зависеть от напряженностей

поля, система уравнений станет нелинейной. Принцип суперпозиции полей не будет выполняться. Такая постановка задачи, являясь более точной, оказывается и значительно более сложной.

### Системы единиц измерения электрических и магнитных величин.

До сих пор мы пользовались абсолютной гауссовой системой единиц. Она наилучшим образом подходит для изложения фундаментальных законов, так как в уравнения Максвелла явным образом входит одна из мировых констант — скорость света  $c$  в вакууме, она же — предельная скорость движения любых материальных тел, распространения сигналов и взаимодействий (см. главы 3, 4). Это облегчает установление связи между электродинамикой и теорией относительности, специальной и общей.

Наряду с гауссовой системой, в прикладной электродинамике часто используется так называемая международная система единиц (SI, или СИ). В указанной системе электромагнитное поле в вакууме описывается четырьмя векторами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Уравнения Максвелла в этой системе единиц приобретают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.91)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (2.92)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.93)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.94)$$

Векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  попарно связаны следующими соотношениями:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.95)$$

где

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ фарада/метр} \quad \text{и} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ генри/метр} \quad (2.96)$$

— электрическая и магнитная постоянные (подробнее см. в [Сивухин (1977)]). Эти возникающие в СИ величины по отдельности лишены какого-либо разумного физического смысла; лишь их комбинация  $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = c$  представляет собой скорость света в вакууме.

Простота записи уравнений Максвелла в СИ обманчива. Кроме уже указанных недостатков (четыре вектора вместо двух, использование «электрической и магнитной проницаемостей вакуума» — реликта эпохи «светоносного эфира») имеются и другие: разные размерности всех четырех

векторов, описывающих один и тот же объект — электромагнитное поле; введение кроме трех основных величин (длина, время, масса), имеющихся в гауссовой системе, еще четвертой величины с независимой размерностью (сила тока, измеряемая в амперах). Последняя единица выбрана из чисто практических соображений.

На основе приведенных выше соображений мы будем пользоваться и в дальнейшем гауссовой системой единиц. Запись основных формул электродинамики и перевод единиц измерения из одной системы в другую можно без затруднений произвести с помощью таблиц, приведенных в Дополнении 1 и частично заимствованных из книги [Сивухин (1977), & 85].

**Анализ системы уравнений Максвелла.** В следующих ниже примерах и задачах мы рассмотрим основные свойства системы уравнений Максвелла и вытекающие из них выводы об особенностях электромагнитных явлений.

**Пример 2.15.** *С помощью уравнений Максвелла (2.82)–(2.85) обобщить полученные ранее выражения (2.34), (2.76) для плотностей энергии электрического и магнитного полей на случай переменного электромагнитного поля. Для этого использовать принцип сохранения полной энергии любой изолированной физической системы и учесть, что величина  $\rho v \cdot \mathcal{F}_L = \mathbf{j} \cdot \mathcal{F}_L = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ , где  $\mathcal{F}_L$  — сила Лоренца (2.43), представляет собой работу электромагнитного поля над заряженными частицами, движущимися со скоростью  $v$  (в единице объема за единицу времени). Найти выражение для плотности потока энергии электромагнитного поля и записать баланс энергии поля в форме уравнения непрерывности с источником.*

**Решение.** С помощью уравнений (2.82), (2.83) составим билинейное выражение

$$\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.$$

Пользуясь тождеством (1.87) и поделив обе части последнего равенства на  $4\pi/c$ , запишем его в виде уравнения непрерывности с источником:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \gamma = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.97)$$

где

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2), \quad \gamma = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2.98)$$

Для физической интерпретации этого соотношения придадим ему интегральную форму, проинтегрировав обе части по объему  $V$ , ограниченному



поверхностью  $S$ :

$$-\frac{d}{dt} \int_V w dV = \oint_S \boldsymbol{\gamma} \cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (2.99)$$

Последний интеграл в правой части представляет собой работу, производимую электромагнитным полем над частицами (магнитный вектор работы не производит). По закону сохранения энергии, эта работа производится за счет убыли энергии поля

$$W = \int_V \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) dV \quad (2.100)$$

в рассматриваемом объеме. Таким образом, величина  $w$ , определяемая выражением (2.98), представляет **плотность энергии электромагнитного поля** в самом общем случае. При  $\mathbf{j} = 0$  внутри объема убыль энергии поля может происходить только в результате ее вытекания из объема через его поверхность. Поэтому вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  (**вектор Пойнтинга**)<sup>11</sup> следует отождествить<sup>12</sup> с **плотностью потока электромагнитной энергии**. ■

**Пример 2.16.** Доказать теорему единственности решения уравнений Максвелла: пусть источники поля (функции  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ) заданы. Пусть также заданы начальные условия, т. е. значения  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0)$  внутри некоторого объема  $V$ , а на его поверхности  $S$  заданы граничные условия — компоненты одного из векторов ( $\mathbf{E}_\tau$  или  $\mathbf{H}_\tau$ ) во все моменты времени. В этих условиях решение уравнений Максвелла внутри указанного объема единственно.

**Решение.** Доказательство проводим от противного, предполагая наличие двух разных решений  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ . Составляем разности  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ . Они удовлетворяют уравнениям Максвелла (2.82)–(2.85), в которых  $\rho = \mathbf{j} = 0$ , а также начальным условиям  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$  при  $t = 0$  внутри объема  $V$  и граничным условиям  $\mathbf{E}_\tau = 0$  или  $\mathbf{H}_\tau = 0$  на поверхности  $S$ . Используем уравнение (2.99), в котором следует положить  $\mathbf{j} = 0$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) dV = -\frac{c}{4\pi} \oint_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_n dS.$$

<sup>11</sup>Пойнтинг Д. Г. — английский физик, ввел понятие о потоке электромагнитной энергии в 1884 г. Впервые идеи о движении энергии и о потоке энергии развил в физике сплошных сред русский физик Н. А. Умов в 1874 г. Поэтому вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  в русскоязычной литературе иногда называют вектором Умова–Пойнтинга.

<sup>12</sup>Вопрос об однозначности определения плотности потока энергии обсуждается в разделе 4.3. См. также задачу 2.117.

Нормальная составляющая векторного произведения  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  выражается через касательные компоненты  $\mathbf{E}_\tau$ ,  $\mathbf{H}_\tau$  на поверхности  $S$  и обращается в нуль в силу граничных условий. Поэтому из предыдущего равенства получаем

$$\int_V (E^2 + H^2) dV = \text{const.}$$

Но поскольку  $E = H = 0$  при  $t = 0$ , то постоянная в правой части равенства тоже равна нулю. Это возможно лишь если  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$  тождественно во всем объеме. Теорема доказана. ■

**Пример 2.17.** *Обобщить формулы (2.8), (2.49), связывающие напряженности поля со скалярным и векторным потенциалами  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ , на общий случай электромагнитного поля, зависящего от времени. Указать семейство потенциалов, описывающих заданное электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .*

**Решение.** Из уравнения Максвелла (2.85) следует, что вектор  $\mathbf{H}$  является соленоидальным в самом общем случае и, следовательно, его представление (2.49) через векторный потенциал сохраняется и для нестационарного поля:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.101)$$

Но формула (2.8) для переменного поля теряет силу, поскольку  $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$  в общем случае. Обобщение (2.8) мы получим, используя в (2.82) равенство (2.101). Меняя последовательность дифференциальных операций, будем иметь  $\text{rot}(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/c \partial t) = 0$ , откуда следует, что безвихревой вектор, стоящий в скобках последнего выражения, можно выразить в виде градиента скалярного потенциала  $-\nabla \varphi(\mathbf{r}, t)$ . Это дает

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.102)$$

Заданным напряженностям поля соответствует обширное семейство возможных потенциалов. Обозначив

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}, t), \quad (2.103)$$

где  $\chi(\mathbf{r}, t)$  — любая дифференцируемая скалярная функция, получим  $\mathbf{H}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}$ . Это означает, что преобразование векторного потенциала (2.103) не изменяет магнитного вектора. Чтобы электрический вектор также не изменился, необходимо и достаточно одновременно преобразовать скалярный потенциал:

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.104)$$

Преобразование потенциалов (2.103), (2.104) называется **калибровочным (градиентным)**. Таким образом, заданному электромагнитному полю  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  отвечает множество электромагнитных потенциалов  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ , связанных калибровочным преобразованием, которые можно получить со всевозможными функциями  $\chi(\mathbf{r}, t)$ . ■

**Пример 2.18.** Вследствие неоднозначности выбора электромагнитных потенциалов  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$  на них могут быть наложены дополнительные условия. Наиболее распространены следующие условия калибровки потенциалов:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{лоренцевская калибровка}); \quad (2.105)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (\text{кулоновская калибровка}). \quad (2.106)$$

Получить из уравнений Максвелла уравнения для электромагнитных потенциалов для случаев калибровок Лоренца и Кулона. В какой мере условия (2.105), (2.106) ограничивают возможность калибровочного преобразования потенциалов?

**Решение.** Подставив в уравнения (2.83), (2.84) напряженности поля (2.101), (2.102), выраженные через потенциалы, получим систему уравнений

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right),$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}.$$

Используя лоренцевскую калибровку (2.105), найдем

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.107)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (2.108)$$

Оба потенциала удовлетворяют **неоднородным уравнениям Даламбера**. При использовании кулоновской калибровки

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi, \quad (2.109)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho. \quad (2.110)$$

Потенциалы  $A'$ ,  $\varphi'$  будут удовлетворять условию Лоренца (2.105) наряду с  $A$ ,  $\varphi$ , если функция  $\chi$  является решением однородного уравнения Даламбера:

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.111)$$

При кулоновской калибровке функция  $\chi$  должна удовлетворять уравнению Лапласа. Таким образом, условия калибровки лишь ограничивают класс функций, участвующих в калибровочном преобразовании. В статических полях условия Лоренца и Кулона совпадают. ■

## Задачи

**2.117.** Единственным ли образом определяется плотность потока энергии электромагнитного поля из уравнения (2.97)? Указать другие выражения, отличные от (2.98), но совместимые с (2.97), (2.99).

**2.118.** Шар радиуса  $a$  с зарядом  $e$ , равномерно распределенным по объему, вращается с переменной угловой скоростью  $\Omega(t)$  вокруг одного из своих диаметров. Записать плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ , проверить, удовлетворяется ли уравнение непрерывности (2.47).

**2.119.** Сделать то же самое для шара, заряженного равномерно по поверхности.

**2.120.** Пусть электромагнитное поле разложено на гармонические составляющие (т. е. в интеграл Фурье (1.250) по времени): и аналогично вектор  $\mathbf{H}$ . Записать уравнения Максвелла для гармоник Фурье. Указать связь между гармониками Фурье  $\mathbf{E}_\omega$  и  $\mathbf{E}_{-\omega}$ , а также между гармониками напряженностей поля и электромагнитных потенциалов.

**2.121.** Пусть через единичную площадку проходит электромагнитное возмущение конечной длительности. Выразить спектральную плотность потока энергии электромагнитного поля  $\Gamma_\omega$  через гармоники Фурье  $\mathbf{E}_\omega$  и  $\mathbf{H}_\omega$ . Величина  $\Gamma_\omega$  нормирована условием

$$\int_0^\infty \Gamma_\omega d\omega = \Gamma = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) dt,$$

где  $\Gamma$  представляет собой полную плотность потока энергии через единичную площадку за все время прохождения возмущения.

УКАЗАНИЕ. При интегрировании по времени использовать представление (1.219) дельта-функции.

**2.122.** Электромагнитное поле разложено на плоские волны, т. е. в интеграл Фурье (1.252) по трем координатам:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r. \quad (2.112)$$

Здесь интегрирование производится по всему безграничному пространству координат и по всему пространству волновых векторов  $\mathbf{k}$ . Записать уравнения Максвелла для пространственных гармоник Фурье.

**2.123.** Показать, что компоненты Фурье разложения безвихревого вектора на плоские волны параллельны  $\mathbf{k}$  (продольны), а компоненты Фурье соленоидального вектора — перпендикулярны  $\mathbf{k}$  (поперечны).

**2.124.** Разложить по плоским волнам потенциал  $\varphi(r)$  и напряженность поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  неподвижного точечного заряда  $e$ .

**2.125.** Электромагнитное поле разложено на плоские монохроматические волны, т. е. в интеграл Фурье по трем координатам и по времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3k d\omega, \\ \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} &= \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3r dt. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Записать уравнения Максвелла для гармоник Фурье.

**2.126.** Записать уравнения Даламбера и условие Лоренца для компонент Фурье потенциалов  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Рассмотреть все три варианта разложений Фурье (2.112), (2.113) и (2.114).

**Свободное электромагнитное поле.** Важнейшим свойством уравнений Максвелла является возможность существования электромагнитного поля в отсутствие источников, т. е. при  $\rho = \mathbf{j} = 0$ . Система уравнений в этом случае приобретает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.114)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.115)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.116)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.117)$$

Она имеет разнообразные ненулевые решения волнового типа, некоторые из которых мы рассмотрим ниже. Именно это свойство уравнений позволило Максвеллу предсказать новый важный физический эффект: возможность существования и распространения со скоростью света электромагнитных волн в свободном пространстве. Это привело к окончательному установлению электромагнитной природы света, позволило раскрыть в дальнейшем связь между электромагнитными и оптическими явлениями. Теоретические открытия Максвелла и его последователей стимулировали экспериментальное изучение электромагнитных волн. Наибольшее значение в этом плане имели исследования немецкого физика Г. Герца, который в 1888 г. экспериментально доказал существование электромагнитных волн, предсказанных теорией Максвелла, измерил их скорость и изучил разнообразные волновые явления (интерференцию, дифракцию, поляризацию). Основываясь на работах Герца, русский физик А. С. Попов и итальянский физик, инженер и предприниматель Г. Маркони в 1890-х годах осуществили первые передачи радиосигналов, положившие начало современным радио, телевидению и мобильной телефонии. За свои открытия Маркони получил Нобелевскую премию в 1909 г.

**Пример 2.19.** Из системы (2.115)–(2.118) вывести уравнения II порядка, которым удовлетворяют векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  по отдельности.

**Решение.** Применяем к (2.115) операцию rot и используем уравнение (2.116), а также тождество (1.83) и уравнение (2.117). Получаем **волновое уравнение**, или **однородное уравнение Даламбера**:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.118)$$

Аналогичным путем получаем такое же уравнение для магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.119)$$

■

## Задачи

**2.127.** Путем перехода к переменным  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$  показать, что волновое уравнение (2.119) имеет одномерное решение вида

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_1 F(x - ct) + \mathbf{E}_2 \Phi(x + ct),$$

где  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  — постоянные векторы,  $F, \Phi$  — произвольные дважды дифференцируемые функции одного аргумента. Каков физический смысл этого решения? Как его записать в такой форме, чтобы поверхность постоянной фазы (плоскость, на которой  $\mathbf{E}$  сохраняет постоянное значение) была перпендикулярна заданному единичному вектору  $\mathbf{n}$ ?

**2.128.** Пользуясь уравнениями Максвелла (2.115)–(2.118), показать, что плоские волны, рассмотренные в предыдущей задаче, удовлетворяют **условиям поперечности**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2.120)$$

Показать также, что в плоских волнах, распространяющихся **в одну сторону**, электрический и магнитный векторы взаимно перпендикулярны и связаны соотношениями

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}, \quad E = H. \quad (2.121)$$

Найти связь между плотностью электромагнитной энергии и плотностью потока энергии (вектором Пойнтинга) в таких волнах.

**2.129\*.** Плоскую монохроматическую<sup>13</sup> волну удобно описывать комплексными функциями

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.122)$$

понимая под физическими значениями полей действительные части этих функций. Здесь  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  — постоянные векторы (**комплексные амплитуды**), величины  $\omega$  (**круговая частота**) и  $\mathbf{k}$  (**волновой вектор**) — действительные постоянные (при распространении волн в вакууме).

а) Показать, что частота и волновой вектор плоской монохроматической волны в вакууме связаны дисперсионной зависимостью<sup>14</sup>  $\omega^2 = c^2 k^2$ , а амплитуды удовлетворяют условиям  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  — единичный вектор, определяющий направление перемещения плоскости постоянной **фазы**  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const}$ .

б) Показать, что расстояние между соседними максимумами электрического или магнитного полей в направлении  $\mathbf{n}$  равно длине волны  $\lambda = 2\pi/k$ .

в) Показать, что среднее по периоду  $T = 2\pi/\omega$  колебаний значение энергетических величин, квадратичных по монохроматическим компонентам полей вида  $A = A_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, B = B_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  можно вычислять, пользуясь формулами

$$\overline{A^2} = \overline{[\text{Re}(A)]^2} = \frac{1}{2}|A|^2, \quad \overline{AB} = \overline{\text{Re}(A)\text{Re}(B)} = \frac{1}{2}\text{Re}(AB^*). \quad (2.123)$$

<sup>13</sup>«Одноцветную» волну, колеблющуюся с одной единственной частотой.

<sup>14</sup>В общем случае такой связи между частотами и волновыми векторами гармоник Фурье (2.114) не существует.

г) Показать, что усредненные по периоду плотность энергии в плоской монохроматической волне и вектор Пойнтинга связаны соотношением  $\gamma = cw\mathbf{n}$ ,  $w = |E_0|^2/8\pi$ .

**2.130\***. В общем случае из комплексной амплитуды  $E_0 = E_{01} + iE_{02}$ , где  $E_{01}$ ,  $E_{02}$  — действительные векторы, можно выделить два взаимно перпендикулярных действительных вектора  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ , таких, что

$$E_0 = (\mathcal{E}_1 + i\mathcal{E}_2)e^{i\alpha}, \quad \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2 = 0, \quad (2.124)$$

а  $\alpha$  ( $-\pi < \alpha \leq \pi$ ) — некоторая начальная фаза.

а) Выразить начальную фазу через первоначально заданные векторы  $E_{01}$ ,  $E_{02}$ .

б) Показать, что наблюдаемое поле (действительная часть комплексного вектора  $E$ ) записывается в виде

$$E = \mathcal{E}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha) - \mathcal{E}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha). \quad (2.125)$$

в) Показать, что конец вектора  $E$  описывает в данной точке пространства либо эллипс (**эллиптическая поляризация**), либо окружность (**круговая, или циркулярная, поляризация**), либо колеблется вдоль некоторой прямой (**линейная поляризация**). В случае эллиптической или круговой поляризации возможны два противоположных направления вращения, а при линейной поляризации — колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Поэтому при заданном направлении распространения волны имеется два различных независимых типа поляризации.

г) Как определить направление вращения вектора  $E$  относительно направления распространения волны?

**2.131.** Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частицы распространяются вдоль оси  $Oz$ . Первая волна поляризована вдоль  $Ox$  и имеет амплитуду  $a$ , вторая поляризована вдоль  $Oy$ , имеет амплитуду  $b$  и опережает первую по фазе на  $\chi$ . Исследовать поляризацию результирующей волны в зависимости от  $a/b$ .

**2.132.** Исследовать в предыдущей задаче зависимость поляризации от сдвига фаз  $\chi$  для случая  $a = b$ .

**2.133.** Циркулярно поляризованные волны распространяются вдоль оси  $Oz$ . Записать комплексные орты  $e^{(\sigma)}$ ,  $\sigma = 1, 2$ , соответствующие волнам с правой и левой спиральностями и нормированные условием  $e^{(\sigma)} \cdot e^{(\sigma')*} = \delta_{\sigma\sigma'}$ .

**2.134.** Две циркулярно поляризованные волны  $E_{1,2} = E_0 e^{(1,2)} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \pm \alpha)]$  имеют разные Начальные фазы. Орты поляризации  $e^{(1,2)}$



определены в предыдущей задаче. Найти амплитуду результирующей волны и определить ее поляризацию.

**Частичная поляризация волн.** Если волны, распространяющиеся в заданном направлении  $\mathbf{n}$ , генерируются многими независимыми источниками, то их начальные фазы как правило случайны, и даже при высокой степени монохроматичности (малый разброс частот  $\Delta\omega$ ) результирующее поле  $\mathbf{E}(t)$  будет случайной функцией времени. Такое поле будет лишь частично поляризованным. Его принято характеризовать **тензором поляризации**

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{\alpha}(t)E_{\beta}^*(t)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.126)$$

где значения компонент поля берутся в одной точке, а усреднение производится по времени наблюдения достаточной длительности. При стационарных источниках усредненные таким образом произведения компонент поля не будут зависеть от времени. Будем называть сумму диагональных компонент поляризаационного тензора

$$J_{\alpha\alpha} = I \quad (2.127)$$

интенсивностью поля, поскольку эта величина характеризует плотность его энергии. Заметим, что по определению (2.127)  $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}^*$ , т. е. поляризаационный тензор эрмитов (см. раздел 1.1).

**Пример 2.20.** Пользуясь соображениями симметрии, записать тензор поляризации полностью неполяризованных волн. Записать также все возможные тензоры поляризации для полностью поляризованных монохроматических волн.

**Решение.** В отсутствие поляризации все направления электрического и магнитного векторов в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, равновероятны. Этому случаю соответствует изотропный тензор

$$J_{\alpha\beta} = \frac{I}{2} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.128)$$

Полностью поляризованной монохроматической волне с амплитудой (2.125) в осях, направленных вдоль действительных векторов  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ , отвечает тензор

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^2 & \pm i\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \\ \mp i\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.129)$$

Такой тензор при произвольных  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  и двух знаках недиагональных компонент описывает волны с эллиптической поляризацией и двумя возмож-

ными направлениями вращения. Циркулярно поляризованным волнам отвечают тензоры

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.130)$$

описывающие волны разной спиральности. Наконец, двум направлениям линейной поляризации соответствуют тензоры

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.131)$$

Обратим внимание на характерную особенность этих тензоров: их определители  $|J_{\alpha\beta}| = J_{11}J_{22} - |J_{12}|^2$  обращаются в нуль для поляризованных волн. При частичной же поляризации  $|J_{\alpha\beta}| > 0$  и достигает наибольшего значения  $I^2/4$  для полностью неполяризованных волн. ■

**Пример 2.21.** Представить тензор  $J_{\alpha\beta}$  частично поляризованных волн в виде суммы двух тензоров,

$$(1) \quad J_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^{(n)} + J_{\alpha\beta}^{(p)},$$

из которых

$$(2) \quad J_{\alpha\beta}^{(n)} = \frac{I_n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

описывает полностью неполяризованную, а

$$(3) \quad J_{\alpha\beta}^{(p)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix}$$

— полностью поляризованную волну. Из условий

$$(4) \quad B \geq 0, \quad C \geq 0, \quad BC - |D|^2 = 0$$

найти интенсивности  $I_n, I_p$  полностью неполяризованной и полностью поляризованной волн, а также степень поляризации волны

$$P = \frac{I_p}{I_p + I_n} \quad (2.132)$$

и степень ее деполаризации

$$\rho = 1 - P. \quad (2.133)$$

**Решение.** Из (1), (2), (3) находим

$$B = 2J_{11} - I_n, \quad C = 2J_{22} - I_n, \quad D = 2J_{12}, \quad D^* = 2J_{21}.$$

Из равенства нулю определителя тензора (3) получаем

$$I_n = J_{11} + J_{22} \pm \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4|J_{12}|^2}. \quad (2.134)$$

Решение со знаком минус перед корнем дает

$$\begin{aligned} B &= J_{11} - J_{22} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4|J_{12}|^2} \geq 0, \\ C &= J_{22} - J_{11} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4|J_{12}|^2} \geq 0, \end{aligned}$$

тогда как решение со знаком плюс дает  $B \leq 0$ ,  $C \leq 0$  и должно быть отброшено. Интенсивность полностью поляризованной волны

$$I_p = \frac{1}{2}(B + C) = \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4|J_{12}|^2} = \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4|J_{\alpha\beta}|}. \quad (2.135)$$

Степень поляризации

$$P = \frac{I_p}{I_p + I_n} = \sqrt{1 - \frac{4|J_{\alpha\beta}|}{(J_{11} + J_{22})^2}}. \quad (2.136)$$

Свертка  $J_{\alpha\alpha} = J_{11} + J_{22}$  и определитель  $|J_{\alpha\beta}|$  — величины, инвариантные относительно поворотов (см. (1.263) и (1.265)), поэтому разделение полной интенсивности на  $I_n$  и  $I_p$  не зависит от выбора осей в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн. ■

## Задачи

**2.135\*.** Представить тензор поляризации в виде разложения по его собственным векторам (см. пример 1.1). Как связано такое разложение с представлением этого тензора, рассмотренным в примере 2.21?

**2.136.** Плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $I$  распространяется вдоль оси  $Oz$  и поляризована по эллипсу с полуосями  $a$ ,  $b$ . Большая полуось  $a$  составляет угол  $\vartheta$  с осью  $Ox$ . Составить тензор поляризации и рассмотреть возможные частные случаи.

**2.137.** Электромагнитная волна является суперпозицией двух некогерентных «почти монохроматических» волн равной интенсивности  $I$

с приблизительно одинаковыми частотами и волновыми векторами. Обе волны поляризованы линейно, направления поляризации задаются в плоскости, перпендикулярной их волновому вектору, ортами  $e^{(1)}(1, 0)$  и  $e^{(2)}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ . Построить тензор поляризации  $I_{ik}$  результирующей частично поляризованной волны и определить степень ее поляризации. Выяснить характер поляризации этой волны (см. задачу 2.136).

**2.138.** Решить предыдущую задачу для случая, когда интенсивности волн различны ( $I_1 \neq I_2$ ), а направления поляризаций составляют угол  $\pi/4$ .

**2.139.** Тензор поляризации электромагнитной волны, который является эрмитовым, может быть представлен в виде

$$I_{ik} = \frac{1}{2}I \left( \delta_{ik} + \sum_{l=1}^3 \xi_l \hat{\tau}_{ik}^{(l)} \right) = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix},$$

где  $I$  — полная интенсивность волны,  $\xi_i$  — вещественные параметры, удовлетворяющие условию  $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1$  (параметры Стокса),  $\hat{\tau}^{(l)}$  — матрицы:

$$\hat{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить физический смысл параметров  $\xi_i$ . Для этого выразить степень деполаризации  $\rho$  волны через  $\xi_i$  и определить поляризации двух основных волн, на которые распадается частично поляризованная волна, в следующих трех случаях:

а)  $\xi_1 \neq 0$ ,  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ ; б)  $\xi_2 \neq 0$ ,  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ ; в)  $\xi_3 \neq 0$ ,  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ .

**2.140.** Назовем волновым пакетом суперпозицию плоских монохроматических волн в свободном пространстве

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \psi(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] d^3k,$$

где  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  — любая декартова компонента векторов  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ . а) Найти условие, при котором  $\Psi$  является решением однородного волнового уравнения Даламбера независимо от вида амплитудной функции  $\psi(\mathbf{k})$ . б) Построить одномерный волновой пакет для момента времени  $t = 0$ . В качестве амплитудной функции взять распределение Гаусса  $\psi(k) = a_0 \exp[-(k - k_0)^2 / \Delta k^2]$ ,  $k = k_x$ , где  $a_0$ ,  $k_0$ ,  $\Delta k$  — постоянные. Найти связь между шириной  $\Delta x$  волнового пакета и его же шириной  $\Delta k$  в пространстве волновых чисел.

**2.141.** Одномерный волновой пакет (см. предыдущую задачу)  $\Psi(x)$  имеет в момент  $t = 0$  форму

$$1. \quad \Psi(x) = A_0 e^{-\alpha|x|/2}; \quad 2. \quad \Psi(x) = \begin{cases} A_0 & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases}$$

где  $A_0$ ,  $a$  — постоянные. Вычислить произведение  $\overline{\Delta x^2} \cdot \overline{\Delta k^2}$ , где  $\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$  и аналогично для  $k$ . Усреднения следует производить по распределению интенсивности волны в  $x$ - и  $k$ - пространствах, т. е. по формулам

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx}^{-1},$$

$$\bar{k} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} k |\psi(k)|^2 dk}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(k)|^2 dk}^{-1}$$

и т. д.

**2.142.** Волновой пакет  $\Psi$  образован суперпозицией плоских монохроматических волн с разными частотами в свободном пространстве. Амплитудная функция имеет вид распределения Гаусса  $\psi(\omega) = a_0 \exp[-(\omega - \omega_0)^2 / \Delta\omega^2]$ , где  $a_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\Delta\omega$  — постоянные. Найти зависимость амплитуды пакета от времени в точке  $x = 0$ . Получить связь между длительностью волнового импульса  $\Delta t$  и интервалом частот  $\Delta\omega$ .

**2.143.** Волновой пакет  $\Psi(x, t)$  образован суперпозицией плоских монохроматических волн с разными частотами в свободном пространстве. Форма пакета при  $x = 0$ ,  $\Psi(0, t) = u(t)$ , известна. Найти амплитудную функцию  $\psi(k)$ .

**2.144.** Некоторый объект, освещаемый светом с длиной волны  $\lambda$ , рассматривается в микроскоп. Найти минимальный возможный размер объекта  $\Delta x_{\min}$ , допускаемый условием  $\Delta x \Delta k \geq 1$ .

**2.145.** Положение некоторого объекта определяется с помощью радиолокации. С какой предельной точностью можно провести это измерение, если расстояние до объекта  $l$ , длина волны  $\lambda$ ?

**Аналитический сигнал.** Разложение Фурье типа (2.112) действительной функции  $U'(t)$  можно записать в виде интеграла только по **положительным** частотам:

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos[\varphi(\omega) - \omega t] d\omega, \quad (2.137)$$

где  $u(\omega) = a(\omega) \exp[i\varphi(\omega)]$ , причем в силу условия  $u(-\omega) = u^*(\omega)$ ,  $a(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  — действительные четные функции частоты. Обобщим последний интеграл в (2.138) и будем рассматривать комплексную функцию

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \exp[i(\varphi(\omega) - \omega t)] d\omega = U'(t) + iU''(t). \quad (2.138)$$

Мнимая часть

$$U''(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \sin[i(\varphi(\omega) - i\omega t)] d\omega \quad (2.139)$$

однозначно определяется действительной частью  $U'(t)$ , так как она получается из последней путем замены фазы  $\varphi(\omega)$  каждой фурье-гармоники на  $\varphi(\omega) - \pi/2$ .

Величина  $U(t)$  называется **аналитическим сигналом**. Она часто используется в теории волновых полей, теории колебаний, радиотехнике и т. д. Характерной особенностью функции  $U(t)$  является то, что она содержит гармоники Фурье только с положительными частотами. Поэтому, если  $U(t)$  ограничена при всех действительных  $t$  (т. е. интеграл по  $\omega$  в (2.139) сходится), то она останется ограниченной и при комплексных значениях  $t = t' + it''$ , лежащих в нижней полуплоскости ( $t'' < 0$ ). Это объясняется тем, что при замене в (2.139)  $t$  на  $t' + it''$  под интегралом возникает дополнительный множитель  $\exp(\omega t'')$ , который при  $t'' < 0$  только усилит сходимость интеграла по  $\omega$ . Следовательно, функция  $U(t)$ , рассматриваемая при комплексных  $t$ , **аналитична (не имеет особых точек)** в нижней полуплоскости.

## Задачи

**2.146\***. Пользуясь аналитичностью функции  $U(t)$  в нижней полуплоскости комплексного  $t$ , найти интегральную связь<sup>15</sup> между ее действительной и мнимой частями:

$$U'(t) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U''(t')}{t' - t} dt', \quad U''(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U'(t')}{t' - t} dt'. \quad (2.140)$$

<sup>15</sup>Формулы (2.141) называются в математике преобразованиями Гильберта. Они играют важную роль в физике и называются в физической литературе дисперсионными соотношениями (см. вторую часть этой книги).

Здесь символ  $\mathcal{P}$  обозначает главное значение интеграла (без этого указания вычислить интегралы невозможно ввиду наличия полюсов в точке  $t' = t$ ).

**2.147.** Выразить энергию  $\Gamma$  плоской некогерентной волны, прошедшей через единичную площадку за ограниченное время существования волны, через аналитический сигнал, отождествив  $E(t)$  с  $U'(t)$ . Записать спектральную плотность энергии  $\Gamma_\omega$  ( $\Gamma = \int_0^\infty \Gamma_\omega d\omega$ ).

**2.148.** Квазимонохроматический сигнал  $U'(t) = A(t) \cos[\Phi(t) - \omega_0 t]$  представляет собой косинусоиду с медленно меняющимися амплитудой  $A(t)$  и добавочной фазой  $\Phi(t)$ . Выразить  $A$  и  $\Phi$  через аналитический сигнал  $U(t)$ , действительной частью которого служит  $U'(t)$ .

**2.149.** Затухающий источник излучения создает сигнал  $U'(t) = A_0 \Theta(t) e^{-\gamma t/2} \sin \omega_0 t$ , где  $\Theta(t)$  — ступенчатая функция,  $\gamma$  — постоянная затухания,  $A_0 = \text{const}$ . При каких условиях сигнал будет квазимонохроматическим? Найти распределение энергии по частотам, пользуясь понятием аналитического сигнала. Оценить полосу частот этого сигнала и произведение  $\Delta\omega \Delta t$ .

**2.150.** Показать, что электромагнитное поле в свободном пространстве можно описать одним лишь векторным потенциалом  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , положив  $\varphi = 0$ .

**Гамильтонова форма уравнений свободного электромагнитного поля.** Свободное электромагнитное поле представляет собой линейную колебательную систему с бесконечным числом степеней свободы. Колебания происходят в каждой точке пространства, причем колебания в соседних точках взаимно связаны через посредство волнового уравнения, в которое входят производные по координатам. Линейную колебательную систему в механике можно описывать при помощи нормальных (или главных) координат, в которых она становится эквивалентной набору независимых гармонических осцилляторов. Такое представление, возможное и для электромагнитного поля, весьма удобно при решении некоторых задач классической электродинамики (см. [Гинзбург (1987)]) и совершенно необходимо при рассмотрении поля как квантовой системы.

Положим  $\varphi = 0$  (см. задачу 2.150) и будем описывать поле векторным потенциалом  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , удовлетворяющим уравнениям

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (2.142)$$

Наложим на  $\mathbf{A}$  в качестве граничных условий условия периодичности:

$$\mathbf{A}(x, y, x, t) = \mathbf{A}(x + L, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y + L, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z + L, t). \quad (2.143)$$

Все пространство оказалось разделено на области размером  $V = L^3$ , в которых поле ведет себя подобным образом. Из физических соображений понятно, что физические процессы внутри объема мало зависят от условий на его границах, если объем велик.

Положим векторный потенциал на плоские волны с определенными волновым вектором  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\sigma = 1, 2$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} q_{\mathbf{k}\sigma}(t) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}), \quad \text{где} \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) = e_{\mathbf{k}\sigma} A^0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.144)$$

где  $A^0$  — нормировочный множитель, который будет выбран в дальнейшем,  $e_{\mathbf{k}\sigma}$  — единичные векторы поляризации плоских волн, удовлетворяющие условиям поперечности  $\mathbf{k} \cdot e_{\mathbf{k}\sigma} = 0$  и условиям взаимной ортогональности  $e_{\mathbf{k}\sigma'}^* \cdot e_{\mathbf{k}\sigma} = \delta_{\sigma\sigma'}$ . Из условий периодичности (2.143) получаем  $\exp(ik_x L) = \exp(ik_y L) = \exp(ik_z L) = 1$ , т. е.

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_1, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_2, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_3, \quad (2.145)$$

где  $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  независимы и принимают только целочисленные значения. Таким образом, сумма в (2.144) должна быть распространена на все возможные значения  $n_1, n_2, n_3$ , которые составляют бесконечное, но счетное множество. Базисные функции  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r})$  образуют полную ортогональную систему функций, удовлетворяющих условию нормировки

$$\int_V \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma'}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) dV = (A^0)^2 V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (2.146)$$

Последнее равенство легко проверяется с помощью явного вида (2.144) базисных функций.

Из ортогональности функций (2.146) и волнового уравнения (2.142) получаем систему уравнений для амплитуд Фурье:

$$\ddot{q}_{\mathbf{k}\sigma} + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}\sigma} = 0, \quad \text{где} \quad \omega_{\mathbf{k}} = ck \geq 0. \quad (2.147)$$

Они удовлетворяют уравнениям **независимых** гармонических осцилляторов и представляют собой **главные** (но комплексные) координаты электромагнитного поля. Общее решение уравнения (2.147) имеет вид

$$q_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + c_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (2.148)$$



где  $b$ ,  $c$  — комплексные постоянные. Из вещественности  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , т. е. из равенства  $\mathbf{A}^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  путем приравнивания коэффициентов при экспонентах с одинаковыми показателями вытекают следующие соотношения между коэффициентами:

$$e_{\mathbf{k}\sigma} b_{\mathbf{k}\sigma} = e_{-\mathbf{k}\sigma}^* c_{-\mathbf{k}\sigma}^*.$$

Если выбрать орты поляризации так, чтобы удовлетворялись условия

$$e_{\mathbf{k}\sigma} = e_{-\mathbf{k}\sigma}^*, \quad (2.149)$$

то получим  $b_{\mathbf{k}\sigma} = c_{-\mathbf{k}\sigma}^*$ ,  $c_{\mathbf{k}\sigma} = b_{-\mathbf{k}\sigma}^*$  и для комплексной амплитуды Фурье

$$q_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + b_{-\mathbf{k}\sigma}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (2.150)$$

Эти соотношения позволяют записать (2.144) в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} [b_{\mathbf{k}\sigma}(t) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) + b_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}^*(\mathbf{r})], \quad \text{где } b_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \quad (2.151)$$

удовлетворяет уравнению движения осциллятора (2.147). Отметим, что разложение по плоским волнам здесь отличается по форме от аналогичного разложения в задаче 2.122 и обладает некоторыми методическими преимуществами.

**Пример 2.22.** Построить функцию Гамильтона свободного электромагнитного поля в главных координатах и записать уравнения поля в гамильтоновой форме.

**Решение.** Вычислим энергию поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 + H^2) dV \quad (2.152)$$

в основной области  $V$ . Для этого вычислим напряженности поля с помощью (2.144):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \dot{q}_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \dot{q}_{\mathbf{k}\sigma}^* \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}^*, \quad (2.153)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = i \sum_{\mathbf{k}\sigma} q_{\mathbf{k}\sigma} [\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}] = -i \sum_{\mathbf{k}\sigma} q_{\mathbf{k}\sigma}^* [\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}^*], \quad (2.154)$$

Пользуясь условием ортогональности (2.146), получим из (2.152)

$$W = \frac{(A^0)^2 V}{8\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\dot{q}_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \dot{q}_{\mathbf{k}\sigma}(t) + c^2 k^2 q_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) q_{\mathbf{k}\sigma}(t)), \quad (2.155)$$

или, подставляя сюда на основе (2.150)  $q_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma}(t) + b_{-\mathbf{k}\sigma}^*(t)$ , будем иметь

$$W = \frac{(A^0)^2 V}{2\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \omega_k^2 b_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) b_{\mathbf{k}\sigma}(t). \quad (2.156)$$

Полная энергия поля в объеме  $V$  выразилась в виде суммы энергий отдельных собственных колебаний, выраженных через комплексные главные координаты. Введем действительные переменные  $Q_{\mathbf{k}\sigma}$ ,  $P_{\mathbf{k}\sigma}$ :

$$b_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{1}{2} \left( Q_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{i P_{\mathbf{k}\sigma}}{\omega_k} \right). \quad (2.157)$$

Из их определения (2.157) следует, что эти переменные тоже удовлетворяют уравнению движения гармонического осциллятора (2.147). Энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и импульсы, называется функцией Гамильтона системы. Обозначив функцию Гамильтона через  $\mathcal{H}$  и подставляя в (2.156) комплексные координаты, выраженные через действительные переменные (2.157), находим

$$\mathcal{H} = \frac{(A^0)^2 V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}\sigma} (P_{\mathbf{k}\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\sigma}^2). \quad (2.158)$$

На этом этапе удобно выбрать постоянную нормировки  $A^0$  так, чтобы эффективные массы осцилляторов поля стали единичными:

$$A^0 = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}. \quad (2.159)$$

В итоге гамильтонова функция поля принимает канонический вид

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \mathcal{H}_{\mathbf{k}\sigma}, \quad \text{где} \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\sigma}^2). \quad (2.160)$$

Канонические уравнения, или уравнения Гамильтона, получаются из функции Гамильтона (2.160) обычным путем:

$$\dot{Q}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{\mathbf{k}\sigma}} = P_{\mathbf{k}\sigma}, \quad \dot{P}_{\mathbf{k}\sigma} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_{\mathbf{k}\sigma}} = -\omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\sigma} \quad (2.161)$$

и приводят к правильному уравнению движения

$$\ddot{Q}_{k\sigma} + \omega_k^2 Q_{k\sigma} = 0. \quad (2.162)$$

Это доказывает, что  $Q$ ,  $P$  являются каноническими переменными для осцилляторов поля. ■

С учетом выбранной нормировки координатные базисные функции принимают вид

$$\mathbf{A}_{k\sigma}(\mathbf{r}) = e_{k\sigma} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.163)$$

## Задачи

**2.151•.** Если размер  $L$  основной области поля велик по сравнению с длинами волн рассматриваемых колебаний, то волновой вектор и частота меняются квазинепрерывным образом и на малый ( $\Delta\omega \ll \omega$ ) интервал частот приходится много осцилляторов поля. Показать, что число собственных колебаний поля, приходящихся на малый интервал частот  $d\omega$  или волновых векторов  $dk$ , с учетом двух независимых поляризации при каждом значении  $\mathbf{k}$  записывается в виде

$$dN = \frac{2V}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} = \frac{2V}{(2\pi c)^3} \omega^2 d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}, \quad (2.164)$$

где  $d\Omega_{\mathbf{k}}$  — телесный угол, внутри которого ориентирован волновой вектор.

**2.152•.** Два единичных вектора поляризации, в общем случае комплексных, удовлетворяют условиям ортогональности  $e^{(s')*} \cdot e^{(s)} = \delta_{ss'}$  и поперечности  $\mathbf{n} \cdot e^{(s)} = 0$ , где  $s, s' = 1, 2$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении распространения волны. Доказать соотношения

$$e_{\alpha}^{(s)} e_{\beta}^{(s)*} = \delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha} n_{\beta}, \quad (\mathbf{a} \cdot e^{(s)})(\mathbf{b} \cdot e^{(s)*}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{n}], \quad (2.165)$$

где производится суммирование по повторяющемуся индексу  $s$ .

Рекомендуемая литература: [Медведев (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Зоммерфельд (1958)], [Пановский и Филипс (1963)], [Френкель (1956)], [Новожилов и Яппа (1978)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Тамм (1976)], [Гинзбург (1975)], [Джексон (1965)], [Сивухин (1980)], [Алексеев (1977)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля].

## 2.4. Ответы и решения

### 2.1.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -2\pi\rho z^2, & \mathbf{E}_1 &= 4\pi\rho z\mathbf{e}_z & (|z| < a/2), \\ \varphi_2 &= -\pi\rho a(2|z| - a/2), & \mathbf{E}_2 &= 2\pi\rho a z\mathbf{e}_z/|z| & (|z| > a/2).\end{aligned}$$

Ось  $Oz$  направлена по нормали к поверхности плиты. При переходе к заряженной плоскости  $a \rightarrow 0$ , но произведение  $\rho a = \sigma$  остается фиксированным. Внутренняя область исчезает, на плоскости  $z = 0$  выполняется граничное условие (2.18).

$$2.2. \quad \varphi(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z.$$

### 2.3.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{4\pi\rho_0}{k^2} \left[ \cos \gamma z + \frac{\gamma \operatorname{ch} \lambda z}{\lambda(\operatorname{ch}(\pi\lambda/2\gamma) + \operatorname{sh}(\pi\lambda/2\gamma))} \right] \cos \alpha x \cos \beta y, & |z| < z_0; \\ \varphi_2 &= \frac{4\pi\rho_0\gamma}{k^2\lambda} \frac{\exp[\lambda(\pi/2\gamma - |z|)]}{1 + \tanh(\pi\lambda/2\gamma)} \cos \alpha x \cos \beta y, & |z| > z_0.\end{aligned}$$

Здесь  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ ,  $\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . При предельном переходе к заряженной плоскости имеем во всем пространстве  $\varphi = (2\pi\sigma(x, y)/\lambda) \times \exp(-\lambda|z|)$ , где  $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos \alpha x \cos \beta y$ ,  $\sigma_0 = \lim_{z_0 \rightarrow 0} (4z_0\rho_0/\pi)$ . Экспоненциальное убывание заряда вдоль оси  $Oz$  объясняется тем, что плоскость содержит разноименно заряженные участки.

**2.4.** Самый простой метод решения задачи — с помощью электростатической теоремы Гаусса. При решении методом интегрирования уравнения Пуассона нужно записать оператор Лапласа в цилиндрических координатах и воспользоваться тем, что вследствие симметрии системы потенциал зависит только от  $r$ .

При объемном распределении заряда

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \kappa \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), & E_1 &= \frac{2\kappa r}{R^2} & (r \leq R); \\ \varphi_2 &= -2\kappa \ln \frac{r}{R}, & E_2 &= \frac{2\kappa}{r} & (r \geq R).\end{aligned}$$

При поверхностном распределении заряда  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = -2\kappa \ln(r/R)$ .

**2.5.**  $\varphi = -2\kappa \ln(r/R)$ ,  $E = 2\kappa/r$ ,  $R$  — произвольная постоянная.

**2.6.**  $\varphi(r, z) = 2\kappa_0 K_0(\gamma r) \cos \gamma z$ , где  $K_0(\gamma r)$  — модифицированная функция Бесселя (1.163). Произвольная постоянная выбрана так, что  $\varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . При  $\gamma r \ll 1$ ,  $\varphi(r, z) \approx -2\kappa(z) \ln \gamma r$ , т.е. найденный потенциал переходит в потенциал заряженной нити с локальным значением линейной плотности заряда (см. задачу 2.5).

$$\mathbf{2.7.} \quad \varphi(x, y, z) = -\frac{q}{2a} \ln \left| \frac{z - a + \sqrt{(z - a)^2 + x^2 + y^2}}{z + a + \sqrt{(z + a)^2 + x^2 + y^2}} \right|.$$

**2.8.** Введем обозначения

$$z_1 = z + a, \quad z_2 = z - a, \quad r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_{1,2}^2}, \quad C = \frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2}.$$

Из результата предыдущей задачи следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a \frac{C + 1}{C - 1} = \text{const} \quad (1)$$

(нужно учесть, что  $z_1 - z_2 = 2a$ ).

Равенство (1) показывает, что эквипотенциальные поверхности представляют собой эллипсоиды вращения, фокусы которых совпадают с концами отрезка.

**2.9.**

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= \frac{q}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & \mathbf{E}_1 &= \frac{qr}{R^3} & (r \leq R); \\ \varphi_2(r) &= \frac{q}{r}, & \mathbf{E}_2 &= \frac{qr}{r^3} & (r \geq R). \end{aligned}$$

**2.10.**

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= \frac{q}{R}, & \mathbf{E}_1 &= 0 & (r < R); \\ \varphi_2(r) &= \frac{q}{R}, & \mathbf{E}_2 &= \frac{qr}{r^3} & (r > R). \end{aligned}$$

**2.11.** Электрическое поле в полости однородно:

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{r} - \frac{4}{3} \pi \rho (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{a}.$$

$$2.12. \quad q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1);$$

$$E_1 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{q}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \text{при } r \leq R_1;$$

$$E_2 = \frac{q(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r^2}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{R_2 - R_1} \left( 1 - \ln \frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r} \right) \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$E_3 = \frac{q}{r^2}; \quad \varphi_3 = \frac{q}{r} \quad \text{при } r \geq R_2.$$

При  $R_2 \rightarrow R_1 \equiv R$  и фиксированном значении заряда  $q$ , получаем поле сферы, равномерно заряженной по поверхности.

### 2.13.

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + 4\pi \int_r^\infty \rho(r')r' dr';$$

$$E(r) = \frac{4\pi r}{r^3} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr'.$$

2.15. Поле электронного облака в атоме:

$$\varphi_e(r) = -\frac{e_0}{r} \left( 1 - e^{-\frac{2r}{a}} \right) + \frac{e_0}{a} e^{-\frac{2r}{a}}; \quad (2.166)$$

$$E_{er} = -\frac{e_0}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{2r}{a} + 1 \right) e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{2e_0}{a^2} e^{-\frac{2r}{a}} \right]. \quad (2.167)$$

Потенциал полного электрического поля в атоме

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \frac{e_0}{r}.$$

2.16. Напряженность поля максимальна на поверхности ядра:

$$E_{\max} = \frac{Ze_0}{R^2} = 6,4 \cdot 10^{18} \frac{Z}{A^{2/3}} \text{ В/см.}$$

$$\frac{E_B}{E_{\max}} = \left( \frac{RZ}{a} \right)^2 \approx 3 \times 10^{-10} A^{2/3} Z^2.$$

$$2.18. \varphi = \frac{2q}{R^2} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|);$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2q}{R^2} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right),$$

где  $z$  — координата точки, наблюдения, отсчитываемая от плоскости диска.

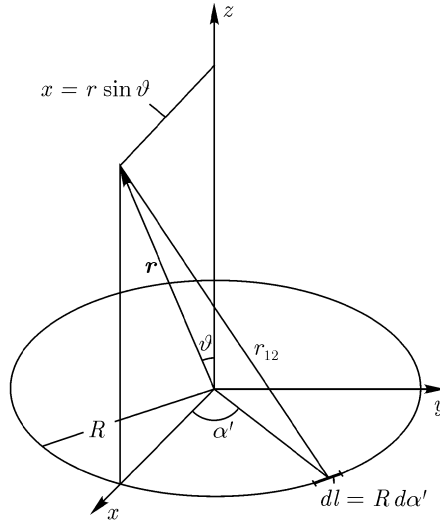


Рис. 2.14

2.19. Вследствие симметрии системы потенциал  $\varphi$  не будет зависеть от азимутального угла  $\alpha$ , поэтому можно без нарушения общности провести плоскость  $xz$  через точку наблюдения. Тогда (рис. 2.14)

$$r_{12} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \vartheta \cos \alpha'}$$

и

$$\varphi(r, \vartheta) = 2xR \int_0^\pi \frac{d\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \vartheta \cos \alpha'}},$$

где  $x = \frac{q}{2\pi R}$ .

Произведя подстановку  $\alpha' = \pi - 2\beta$  и введя обозначение

$$k^2 = \frac{4rR \sin \vartheta}{r^2 + R^2 + 2rR \sin \vartheta},$$

получим

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{4xR}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \vartheta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{2kx}{\sqrt{rR \sin \vartheta}} K(k).$$

**2.20.** а)  $\varphi = \frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ , где  $z$  — расстояние от плоскости кольца до точки наблюдения.

б) Обозначив через  $r'$  расстояние от точки наблюдения до нити кольца, получим при  $r' \ll R$ :

$$1 - k^2 \approx \frac{r'^2}{4R^2}, \quad K(k) = \ln \frac{8R}{r'} \quad \text{и} \quad \varphi(r) = -2x \ln r' + \text{const},$$

как и должно быть в случае линейного заряда.

### 2.21.

$$\varphi_d = \frac{p \cos \vartheta}{r^2}, \quad E_{dr} = \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}, \quad E_{d\vartheta} = \frac{p \sin \vartheta}{r^3}, \quad E_{d\alpha} = 0;$$

$$\varphi_q = \frac{Q}{4r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) = \frac{QP_2(\cos \vartheta)}{2r^3},$$

$$E_{qr} = \frac{3QP_2(\cos \vartheta)}{2r^4}, \quad E_{q\vartheta} = \frac{3Q \cos \vartheta \sin \vartheta}{2r^4}, \quad E_{q\alpha} = 0.$$

Здесь  $P_2(\cos \vartheta)$  — полином Лежандра.

### 2.22.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}},$$

где  $Q_{lm}$  — мультипольный момент порядка  $l$ ,  $m$ :

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'.$$



Здесь интегрирование производится по всему объему, занимаемому системой зарядов.

**2.23.** Разбиваем область интегрирования по  $r'$  в (2.9) сферической поверхностью с радиусом  $r$  на внутреннюю и внешнюю области. Во внутренней области используем разложение (1.182) с заменой  $a$  на  $r'$  и получаем такую же сумму, как в предыдущей задаче, за исключением того, что мультипольные моменты  $Q_{lm}(r)$  становятся функциями  $r$ . Во внешней области в разложении (1.182) нужно сделать замены  $a \rightarrow r$ ,  $r \rightarrow r'$ . В итоге получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left( \frac{Q_{lm}(r)}{r^{l+1}} + r^l Q'_{lm}(r) \right) Y_{lm}(\vartheta, \alpha),$$

где

$$Q'_{lm}(r) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'.$$

Интегрирование по  $r'$  в последнем интеграле проводится в пределах от  $r$  до  $\infty$ .

**2.24.** Если положительно заряженное полукольцо занимает область  $x > 0$  в плоскости  $xy$ , то при  $x, y \ll \frac{R^2 + z^2}{R}$  получаем, разлагая подынтегральную функцию в интеграле  $\int \frac{\kappa}{r_{12}} dl$  в ряд:

$$\varphi = \frac{4qRx}{\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$E_x = -\frac{4qR}{\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{12qRxz}{\pi(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

При  $z \gg R$  получается поле электрического диполя, момент которого направлен по оси  $x$  и равен  $\frac{4}{\pi}qR$ .

**2.25.**

$$\varphi_1 = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 r \cos \vartheta \quad (r \leq R),$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sigma_0 R^3}{r^2} \cos \vartheta \quad (r \geq R).$$

Внутри сферы — однородное электрическое поле с напряженностью  $E_{1z} = -4\pi\sigma_0/3$ . Вне сферы — поле диполя с моментом  $4\pi\sigma_0 R^3/3$ .

**2.26.** Вследствие аксиальной симметрии поля уравнение Лапласа, записанное в цилиндрических координатах (полярная ось направлена вдоль оси симметрии системы), принимает вид

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Будем искать решение уравнения (1) в форме степенного ряда по  $r$ :

$$(2) \quad \varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) r^n, \quad a_0(z) = \varphi(0, z) \equiv \Phi(z),$$

где  $\Phi(z)$  — потенциал на оси симметрии системы.

Подставив (2) в (1), перегруппировав члены и приравняв нулю коэффициенты получившегося ряда, найдем рекуррентные соотношения для определения коэффициентов  $a_n(z)$ , откуда:

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \Phi^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} = \Phi(z) - \frac{r^2}{4} \Phi''(z) + \dots, \\ E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{r}{2} \Phi''(z) + \dots, \quad E_\alpha = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\Phi'(z) + \dots \end{aligned}$$

**2.27.** Нужно вычислить мультипольные моменты

$$\begin{aligned} Q_{lm} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \kappa R^l Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) R d\alpha, \\ Q'_{lm} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{\chi}{R^{l+1}} Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) R d\alpha, \end{aligned}$$

где  $\kappa = q/2\pi R$ . Используя формулы (1.184), (1.189), (1.192), найдем:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \vartheta) &= \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) \quad \text{при } r > R, \\ \varphi(r, \vartheta) &= \frac{q}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) \quad \text{при } r < R. \end{aligned}$$

Обе формулы справедливы также при  $r = R$  ( $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ ).

$$2.28. \text{ а) } \varphi \approx qa^2 \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = 2qa^2 \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3};$$

$$\text{ б) } \varphi \approx \frac{3qa^2 \sin^2 \vartheta \cos \alpha \sin \alpha}{r^3}.$$

$$2.29. \text{ а) } \varphi \approx \frac{6qa^3 P_3(\cos \vartheta)}{r^4} = qa^3 \frac{15 \cos^3 \vartheta - 9 \cos \vartheta}{r^4};$$

$$\text{ б) } \varphi \approx \frac{15qabcxyz}{r^7} = \frac{15qabc \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \alpha \cos \alpha}{r^4}.$$

$$2.30. \varphi(r, \vartheta, \alpha) = q \sum_{l, m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_0, \alpha_0) Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \quad \text{при } r < r_0;$$

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = q \sum_{l, m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_0, \alpha_0) Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \quad \text{при } r > r_0.$$

$$2.31. \varphi(x, y, z) \approx \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3x^2 - r^2) + b^2(3y^2 - r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10r^5}.$$

В случае эллипсоида вращения,  $a = b$  и

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{r} + q \frac{c^2 - a^2}{5} \cdot \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3}.$$

В случае шара,  $a = b = c$  и

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

2.32. В сферических координатах с полярной осью вдоль оси симметрии системы и полюсом в центре колец

$$\varphi(r, \vartheta) = -\frac{q(a^2 - b^2)}{2} \cdot \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3}.$$

Это — потенциал линейного квадруполья, у которого заряды  $-q$  находятся на расстоянии  $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$  от центрального заряда  $2q$ .

2.33\*. Вычислим мультипольные моменты:

$$q = - \int (\mathbf{p}' \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r}) dV = - \oint (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{n}) \delta(\mathbf{r}) dS = 0.$$

так как  $\delta(\mathbf{r}) = 0$  всюду, кроме  $\mathbf{r} = 0$ ;

$$p_\alpha = - \int x_\alpha (\mathbf{p}' \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r}) dV = - \int x_\alpha p'_n \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x_n} dV = \int p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} \delta(\mathbf{r}) dV.$$

Последнее преобразование состояло в интегрировании по частям. По повторяющемуся индексу  $n$  подразумевается суммирование. Возникший при этом поверхностный интеграл обращается в нуль, так как  $\delta(\mathbf{r}) = 0$  при  $\mathbf{r} \neq 0$ . По определению  $\delta$ -функции

$$p_\alpha = p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} = p'_n \delta_{\alpha n} = p'_\alpha.$$

Все мультипольные моменты более высокого порядка пропорциональны компонентам  $\mathbf{r}$  при  $\mathbf{r} = 0$  и поэтому обращаются в нуль. Рассмотрим, например, компоненты квадрупольного момента. Действительно,

$$Q_{\alpha\beta} = - \int x_\alpha x_\beta p'_n \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x_n} dV = \int \delta(\mathbf{r}) p'_n \frac{\partial x_\alpha x_\beta}{\partial x_n} dV = p'_\alpha x_\beta + p'_\beta x_\alpha \Big|_{r=0} = 0.$$

**2.34.** После  $n$ -кратного интегрирования по частям, получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = q(-1)^n \int \delta(\mathbf{r}') \prod_i (\mathbf{a}_i \cdot \nabla') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = q \prod_i (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \frac{1}{r}.$$

**2.35.** Проще всего, воспользовавшись формулой  $\varphi = \frac{qa^2(3z'^2 - r^2)}{r^5}$  (см. ответ к задаче 2.28), выразить в ней  $z'$  через  $x, y, z$  (рис. 2.15). Получим

$$\varphi = \frac{qa^2}{r^3} [3(\cos \vartheta \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\alpha - \beta))^2 - 1].$$

Тот же результат можно получить, воспользовавшись тем, что совокупность компонент квадрупольного момента представляет собой тензор II ранга. В системе осей  $x', y', z'$  компоненты квадрупольного момента

$$Q'_{xx} = Q'_{yy} = Q'_{xy} = Q'_{xz} = Q'_{yz} = 0, \quad Q'_{zz} = 2qa^2.$$

Матрица коэффициентов преобразования имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & -\sin \beta & \sin \gamma \cos \beta \\ \cos \gamma \sin \beta & \cos \beta & \sin \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

С помощью этой матрицы вычисляем компоненты  $Q_{\alpha\beta}$  в системе  $xyz$  по формулам

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma, \delta} \alpha_{\alpha\gamma} \alpha_{\beta\delta} Q'_{\gamma\delta},$$

а затем используем формулу (2.21).

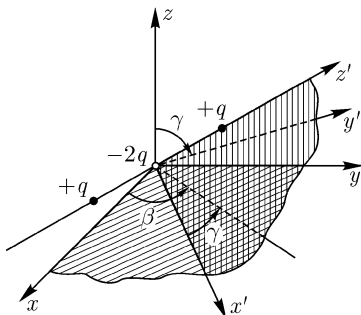


Рис. 2.15

$$2.36. \varphi = \frac{15qabc}{2r^4} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin 2(\alpha - \beta).$$

$$2.37. \varphi = \frac{qa^2}{4r^3} (3 \sin^2 \vartheta \sin 2\alpha - 3 \cos 2\vartheta - 1).$$

2.38. По принципу суперпозиции можно написать

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \int \mathbf{P} \cdot \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Преобразуя это выражение с помощью теоремы Остроградского–Гаусса, получим  $\varphi(\mathbf{r}) = \int_S \frac{P_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS$ , где  $S$  – внутренняя поверхность поляризованного шара, а  $P_n = P \cos \vartheta$ . Используя результаты задачи 2.25, найдем:

$$\varphi_1 = \frac{4\pi Pr}{3} \cos \vartheta \quad (r \leq R),$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi PR^3}{3r^2} \cos \vartheta \quad (r \geq R).$$

**2.39.**  $\varphi(\mathbf{r}) = -2\kappa \ln r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha}{nr^n}$ , где  $\kappa = \int \rho(\mathbf{r}') dS'$  — полный заряд единицы длины распределения,  $A_n = \int \rho(\mathbf{r}') r'^n \cos n\alpha' dS'$  и  $B_n = \int \rho(\mathbf{r}') r'^n \sin n\alpha' dS'$  — двумерные мультипольные моменты  $n$ -го порядка.

Из этих формул, в частности, следует, что потенциал диполя в двумерном случае имеет вид  $\varphi = \frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2}$ , где  $\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dS$  — дипольный момент распределения на единицу длины,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в плоскости  $xy$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{2.40.} \quad \varphi(r, \alpha) &= -2\kappa \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n(\alpha - \alpha_0) \quad \text{при } r > r_0, \\ \varphi(r, \alpha) &= -2\kappa \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\alpha - \alpha_0) \quad \text{при } r < r_0. \end{aligned}$$

**2.41.**  $\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{2 \times a}{r} \cos \alpha = \frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2}$ , где  $\mathbf{p}$  — дипольный момент на единицу длины,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в плоскости  $xy$  ( $r \gg a$ ), ось  $z$  направлена вдоль одного из линейных зарядов.

**2.42.** На оси симметрии диска (ось  $z$  направлена от отрицательной стороны диска к положительной):

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \tau\Omega = 2\pi\tau \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \frac{z}{|z|}; \\ E_x = E_y &= 0, \quad E_z = \frac{2\pi a^2 \tau z}{|z|(a^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

**2.43.** а) В цилиндрических координатах:

$$E_\alpha = \frac{2\tau}{r}, \quad E_r = E_z = 0;$$

б)  $\varphi = 2\tau(\pi - \alpha)$ ,  $E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{2\tau}{r}$ ;  $E_r = E_z = 0$ . Поле  $\mathbf{E}$  совпадает с магнитным полем прямолинейного тока  $\mathcal{J} = \tau c$ .

**2.44.** Уравнение силовых линий

$$(z+a)[(z+a)^2 + r^2]^{-\frac{1}{2}} \pm (z-a)[(z-a)^2 + r^2]^{-\frac{1}{2}} = C,$$

где  $C$  — постоянная. На рис. 2.16 а изображена картина силовых линий для случая разноименных зарядов. В случае одноименных зарядов в поле имеет нейтральная точка  $r = 0$ ,  $z = 0$  (рис. 2.16 б).

**2.45.** Целесообразно перейти к сферическим координатам. Устремляя  $a$  к нулю, разлагаем в ряд и отбрасывая члены порядка  $a^2$  и выше, получим  $r = C \sin^2 \vartheta$ .

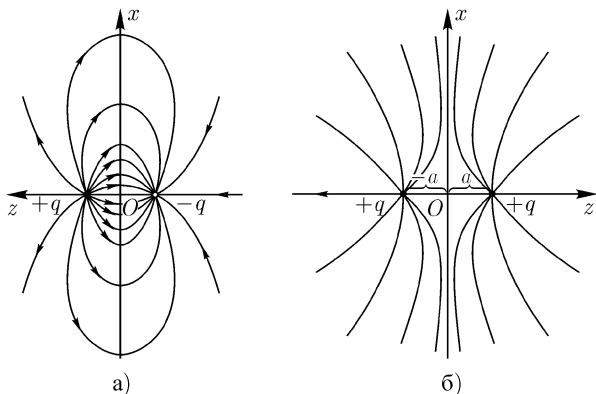


Рис. 2.16

**2.46.**  $r = C \sqrt{\sin^2 \vartheta |\cos \vartheta|}$ ,  $C = \text{const}$ . Не следует забывать, что в случае квадруполь конечных размеров, полученная формула пригодна только для больших расстояний (рис. 2.17).

$$\mathbf{2.48.} \quad q_2 = \frac{\Phi + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\pi q}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\pi}.$$

**2.49\*.** Рассмотрим силовую трубку, полученную вращением некоторой силовой линии вокруг оси  $z$ . Применив электростатическую теорему Гаусса к объему, ограниченному боковой поверхностью этой трубки и двумя плоскостями  $z = \text{const}$ , не содержащему внутри себя зарядов, найдем, что поток через любое нормальное к оси сечение трубки  $\Phi(z) = \sum_i q_i \Omega_i(z)$

(см. задачу 2.47) не зависит от  $z$  (при изменении  $z$  между  $z_k$  и  $z_{k+1}$ ). Здесь  $\Omega(z) = 2\pi(\pm 1 - \cos \alpha_i)$  — телесный угол, под которым видна отрицательная сторона такого сечения из точки  $z_i$ , где находится заряд  $q_i$ ;  $\alpha_i$  — угол между направлением оси  $z$  и радиусом-вектором точки контура нормального сечения с координатами  $(r, z)$ . Знак «+» нужно брать при  $z > z_i$ , знак «-» при  $z < z_i$ . Если при изменении  $z$  нормальное сечение трубки перейдет через заряд  $q_k$ , то  $\Phi(z)$  скачком изменится на  $\pm 4\pi q_k$ , однако при этом

не изменится  $\sum_i q_i \cos \alpha_i$ . Выразив  $\cos \alpha_i$  через  $z$ ,  $z_i$  и  $r$ , получим искомое уравнение семейства силовых линий:

$$\sum_i \frac{q_i(z - z_i)}{\sqrt{r^2 + (z - z_i)^2}} = C, \quad C = \text{const.}$$

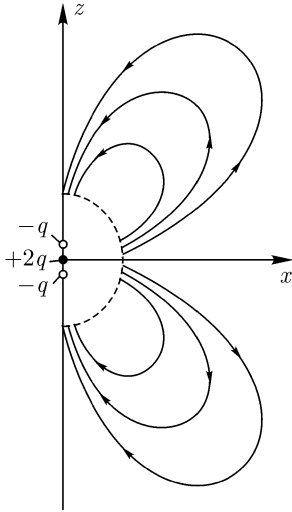


Рис. 2.17

**2.51.** Выберем цилиндрическую систему координат, ось  $z$  которой совпадает с осью цилиндра (рис. 2.18). Вместо условия  $\varphi|_S = \text{const}$  на поверхности  $S$  цилиндра удобнее использовать вытекающие из него условие  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}|_S = 0$ . В результате дифференцирования получим

$$\frac{\kappa_1 x_1}{R^2 + x_1^2 - 2R x_1 \cos \alpha} = \frac{\kappa_2 x_2}{R^2 + x_2^2 - 2R x_2 \cos \alpha}.$$

Освободимся от знаменателей и приравняем по отдельности члены с  $\cos \alpha$  и без него. В результате получим, что при  $\kappa_1 = \kappa_2$  эквипотенциальной поверхностью будет любая цилиндрическая поверхность, ось которой параллельна заряженным нитям и лежит в одной плоскости, а радиус удовлетворяет условию  $R^2 = x_1 x_2$ . При  $x_1 = 0$  существует решение  $\kappa_2 = 0$ . Этот случай соответствует цилиндрическим эквипотенциальным поверхностям в поле одной нити.

**2.52.** Воспользуемся рис. 2.19. Радиус  $R$  искомой сферы и положение ее центра определяются уравнениями

$$R^2 = z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2}.$$

Потенциал на поверхности этой сферы равен нулю.

**2.53.**

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= q \Delta \frac{e^{-\alpha r}}{r} = q \Delta \frac{1}{r} + q \Delta \frac{e^{-\alpha r} - 1}{r} = \\ &= -4\pi q \delta(\mathbf{r}) + \frac{q}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{e^{-\alpha r} - 1}{r} \right) = -4\pi q \delta(\mathbf{r}) + \frac{q \alpha^2 e^{-\alpha r}}{r}. \end{aligned}$$



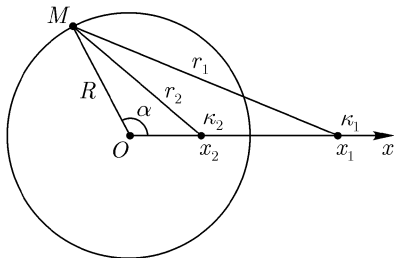


Рис. 2.18

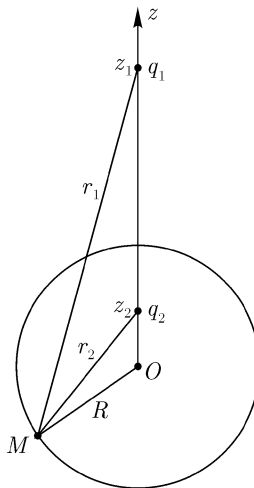


Рис. 2.19

Таким образом, имеется точечный заряд  $q$  в начале координат и сферически симметрично распределенный объемный заряд с плотностью  $\rho = -\frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{4\pi r}$ ,  $\int \rho dV = -q$ .

**2.54.** Точечный заряд  $e_0$  в начале координат, окруженный объемным зарядом с плотностью  $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$ . Такой вид имеет распределение заряда в атоме водорода (ср. с задачей 2.15).

$$\mathbf{2.55.} \quad \mathcal{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

$$\mathbf{2.56.} \quad \frac{3q^2}{5R}, \quad \frac{q^2}{2R}, \quad \frac{q^2}{R_2 - R_1} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right).$$

$$\mathbf{2.57.} \quad q_{1,2} = \frac{R\sqrt{R^2 + a^2}}{qa^2} (\sqrt{R^2 + a^2} A_{1,2} - RA_{1,2}).$$

$$\mathbf{2.58.} \quad U = \int \frac{e_0}{r} \rho(r) dV = -\frac{e_0^2}{a}.$$

$$\mathbf{2.59.} \quad U = 5e_0^2/4a.$$

**2.60.** Необходимым условием минимума потенциальной энергии является обращение в нуль всех первых производных и положительность всех

вторых производных потенциальной энергии по обобщенным координатам при некоторых значениях координат (в точке равновесия системы):

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha^2} > 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 3N,$$

где  $3N$  — число степеней свободы  $N$  точечных частиц. Под  $q_\alpha$  можно понимать их декартовы координаты. Выделим некоторую частицу и припишем ей координаты  $q_1, q_2, q_3$ . Электростатический потенциал всех остальных частиц в этой точке  $\varphi(q_1, q_2, q_3)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_3^2} = 0.$$

Следовательно, потенциальная энергия  $U = e\varphi(q_1, q_2, q_3)$  не может иметь вторые производные одного знака в точке нахождения данного заряда. Это рассуждение относится к любому заряду. Таким образом, потенциальная энергия не имеет минимума, и равновесие системы точечных зарядов неустойчиво.

$$2.61. \quad U = \frac{q_1 q_2}{a}, \quad F = \frac{q_1 q_2}{a^2}.$$

$$2.62. \quad R = \frac{32\pi\alpha}{E_0^2}.$$

2.63.

$$U = \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\kappa_1 \kappa_2 dl_1 dl_2}{r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi^2 ab} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab dl_1 dl_2}{\sqrt{c^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}},$$

где интегрирование выполняется по всем элементам обоих колец  $dl_1$  и  $dl_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы, указывающие расположение элементов. Интегрируя по  $d\alpha_2$  и делая замену  $\alpha_1 = \pi - 2\alpha$ , получим

$$U = \frac{q_1 q_2 k}{\pi \sqrt{ab}} K(k),$$

где

$$k = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c^2 + (a+b)^2}}, \quad \text{а} \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода.

При вычислении силы  $F = -\frac{\partial U}{\partial c} = -\frac{U}{k} \frac{\partial k}{\partial c}$  нужно воспользоваться формулой

$$2k^2 \frac{dK(k)}{d(k^2)} = \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k)$$

(см. справочник), где

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

— полный эллиптический интеграл второго рода. Окончательно,

$$F = \frac{q_1 q_2 c k^3}{4\pi(ab)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{E(k)}{1-k^2}.$$

$$2.64. \quad \mathbf{F} = -\frac{3q\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \frac{q\mathbf{p}}{r^3}, \quad \mathbf{N} = \frac{q\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

2.65.  $U = p_1 p_2 \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi - 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^3}$ , где  $\vartheta_1 = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$ ,  $\vartheta_2 = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$ ,  $\varphi$  — угол между плоскостями  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$  и  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$ ,

$$F = 3p_1 p_2 \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi - 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^4}.$$

Сила максимальна при  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \varphi = 0$ , т. е. при параллельных диполях.

2.66.

$$\begin{aligned} U_{21} &= \int \rho(\mathbf{r}') \varphi_1(\mathbf{r}') dV' = \\ &= \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} \int r'^l Y_{lm}(\vartheta', \alpha') dV' = \sum_{l,m} a_{lm} Q_{lm}. \end{aligned}$$

2.67. Да, при условии  $\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ . В противном случае  $\partial \rho / \partial t \neq 0$ .

2.68.

$$\begin{aligned} j_r = j_\vartheta = 0, \quad j_\alpha &= \frac{H_0 c r}{4\pi a^2} \sin \vartheta \quad \text{при } r < a; \\ j &= 0 \quad \text{при } r > a. \end{aligned}$$

**2.70.**

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\alpha = \begin{cases} 2Jr/ca^2 & \text{при } r < a, \\ 2J/cr & \text{при } a \leq r \leq b, \\ 0 & \text{при } r > b. \end{cases}$$

**2.71.** Рассмотрим решение задачи методом векторного потенциала. Если направить ось  $z$  вдоль оси цилиндра, то прямоугольные компоненты  $A$  будут удовлетворять уравнениям:

$$(1) \quad \Delta A_x = 0, \quad \Delta A_y = 0, \quad \Delta A_z = -\frac{4\pi}{c} j_z,$$

причем  $j_z = 0$  при  $r > a$ ,  $j_z = \frac{\mathcal{J}}{\pi a^2}$  при  $r \leq a$ .

Поскольку в уравнении для  $A_x$  и  $A_y$  заданный ток  $\mathcal{J}$  не входит, эти компоненты можно считать равными нулю;  $A_z$  будет зависеть только от расстояния  $r$  до оси  $z$ . Интегрируя уравнение для  $A_z$  и используя условия непрерывности  $A_z$  и  $H_\alpha$  на границе  $r = a$  и ограниченности  $H$  при  $r = 0$ , получим:

при  $r < a$

$$(2) \quad A_z = C - \frac{\mathcal{J}}{c} \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad H_\alpha = \frac{2\mathcal{J}}{ca^2} r;$$

при  $r > a$

$$(2') \quad A_z = C - \frac{\mathcal{J}}{c} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{a}\right), \quad H_\alpha = \frac{2\mathcal{J}}{cr}.$$

Константа  $C$  — произвольна.

**2.72.** При  $r < a$ 

$$A_z = C_1, \quad \mathbf{H} = 0;$$

при  $a \leq r \leq b$

$$A_z = \frac{2\mathcal{J}a^2}{c(b^2 - a^2)} \left(\ln \frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2}\right) + C_2, \quad H_\alpha = \frac{2\mathcal{J}}{c(b^2 - a^2)} \left(r - \frac{a^2}{r}\right);$$

при  $r > b$

$$A_z = \frac{2\mathcal{J}}{c} \ln \frac{b}{r} + C_3, \quad H_\alpha = \frac{2\mathcal{J}}{cr}.$$

Остальные компоненты  $A$  и  $H$  равны нулю. Две любые константы, входящие в  $A_z$ , можно выразить через третью, используя условия непрерывности векторного потенциала на границах.

**2.73.**

$$H_x = -\frac{2\mathcal{J}}{ca} \left( \arctg \frac{a-2x}{2y} + \arctg \frac{a+2x}{2y} \right),$$

$$H_y = -\frac{\mathcal{J}}{ca} \ln \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}, \quad H_z = 0.$$

Ось  $y$  перпендикулярна полосе и проходит через ее середину.

**2.74.** Пластины отталкиваются с силой

$$f = \frac{4\mathcal{J}^2}{c^2 a^2} \left( a \arctg \frac{a}{b} - \frac{1}{2} b \ln \frac{a^2 + b^2}{b^2} \right).$$

**2.75.**

$$A_z = \frac{2\mathcal{J}}{c} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mathcal{J}}{c} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2},$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{8\mathcal{J}}{c} \cdot \frac{axy}{r_1^2 r_2^2},$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{2\mathcal{J}}{c} \left( \frac{a-x}{r_1^2} + \frac{a+x}{r_2^2} \right).$$

Координаты проводников с током в перпендикулярной к ним плоскости равны  $(a, 0)$  для тока  $+\mathcal{J}$  и  $(-a, 0)$  для тока  $-\mathcal{J}$ ;  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от точек  $(a, 0)$  и  $(-a, 0)$  до точки наблюдения.

**2.76.** а) Между плоскостями  $H = \frac{4\pi}{c}i$ , в остальном пространстве  $H = 0$ ; б) между плоскостями  $H = 0$ , в остальном пространстве  $H = \frac{4\pi}{c}i$ . В обоих случаях магнитное поле направлено перпендикулярно току и параллельно токонесущим плоскостям.

**2.77.**  $H_y = \frac{2\mathcal{J}d}{c(b^2 - a^2)}$ ,  $H_x = H_z = 0$ ; ось  $y$  нормальна к плоскости, проведенной через оси цилиндров.

**2.78.** В цилиндрической системе координат, ось  $z$  которой перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр.

$$A_\alpha = \frac{2\mathcal{J}}{c} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k) \right], \quad A_z = A_r = 0,$$

где  $K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы Лежандра,  $k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}$ .

Компоненты магнитного поля:

$$H_r = \frac{2\mathcal{J}}{c} \cdot \frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[ -K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right],$$

$$H_z = \frac{2\mathcal{J}}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[ K(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right], \quad H_\alpha = 0.$$

На оси витка ( $r = 0$ ) эти выражения переходят в

$$H_r = 0, \quad H_z = \frac{2\pi a^2 \mathcal{J}}{c(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**2.79.** В любом сечении такой трубки поток магнитного поля один и тот же. Поэтому уравнение поверхности трубки:

$$N = \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = f(r, z) = \text{const.}$$

Линии пересечения этих поверхностей с плоскостями  $\alpha = \text{const}$  и дают искомые линии магнитного поля.

**2.80.** Компоненты магнитного поля:

$$H_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} H^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} = H(z) - \frac{r^2}{4} H''(z) + \dots,$$

$$H_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!} H^{(2n-1)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-1} = -\frac{r}{2} H'(z) + \dots,$$

$$H_\alpha = 0.$$

Векторный потенциал выражается через напряженность магнитного поля с помощью теоремы Стокса и соотношения  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ :

$$A_\alpha(r, z) = \frac{1}{r} \int_0^r H_z r \, dr = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} H^{(2n)} z \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} = \frac{r}{2} H(r) - \dots$$

**2.82.** Предположим, что существуют два различных поля,  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ , удовлетворяющие уравнениям (2.51), (2.54) и (2.57) при заданных объемных и поверхностных токах. Разность напряженностей  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$  удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0,$$

и вектор  $\mathbf{H}$  всюду непрерывен. Полагая  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , получаем

$$H^2 = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{H}] + \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{H}].$$

Проинтегрируем теперь обе части последнего равенства по всему пространству. После применения теоремы Остроградского–Гаусса получим

$$\int H^2 \, dV = \oint [\mathbf{A} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0,$$

если произведение  $AH$  убывает на больших расстояниях быстрее чем  $r^{-2}$ . Последнее условие заведомо выполняется для ограниченной системы токов (см. пример 2.11). Таким образом,  $\mathbf{H} = 0$  всюду в пространстве, и решение задачи единственно.

**2.84.**

$$H_z = \frac{2\pi n J}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

где

$$\cos \theta_1 = \frac{h - z}{\sqrt{a^2 + (h - z)^2}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

(см. рис. 2.20).

**2.85.** Решим задачу с использованием векторного потенциала. Плотность поверхностного тока от вращения сферы в сферической системе координат с полярной осью вдоль  $\omega$  имеет вид

$$\mathbf{i} = e_\alpha \frac{e\omega}{4\pi a} \sin \vartheta. \quad (1)$$

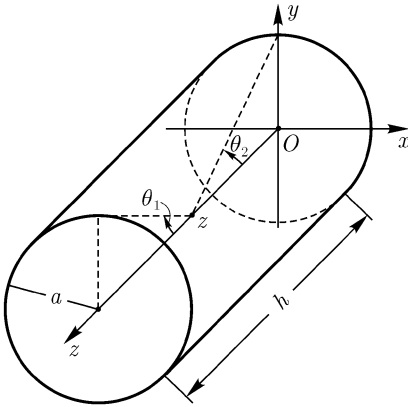


Рис. 2.20

Векторный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, а на поверхности сферы — граничному условию, следующему из (2.57). В силу симметрии тока векторный потенциал можно выбрать так, чтобы была отлична от нуля только компонента  $A_\alpha$ , не зависящая от  $\alpha$ . Уравнение для нее записываем с использованием формул (1.279):

$$(2) \quad \Delta A_\alpha - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\alpha = 0.$$

Ищем решение в форме

$$(3) \quad A_\alpha = F(r) \sin \vartheta,$$

удовлетворяющей условию  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Определяя  $F(r)$  с помощью уравнения (2) и граничных условий, находим  $A_\alpha$  и  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{2e\omega}{3ca} \quad \text{при } r < a; \quad \mathbf{H} = \frac{3r(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \quad \text{при } r > a.$$

Здесь

$$\mathbf{m} = \frac{ea^2\omega}{3c}$$

— магнитный момент системы (см. задачу 2.86).

**2.86.** Запишем с помощью дельта-функции ток вращающейся сферы (см. формулу (1) в решении предыдущей задачи) через его объемную плотность:

$$\mathbf{j} = e_\alpha \frac{e\omega}{4\pi a^3} \sin \vartheta \delta(r - a).$$

С помощью формулы (2.59) находим магнитный момент  $\mathbf{m} = ea^2\omega/3c$ , полученный в предыдущей задаче другим способом. При распределении заряда равномерно по объему получим  $\mathbf{m} = ea^2\omega/5c$ . Магнитное поле, найденное по приближенной формуле (2.59), во внешней области  $r > a$  совпадает с точным решением.

**2.88.** Подставив в (2.59) выражение (2.39) для плотности тока, создаваемой точечными частицами, получим

$$\mathbf{m} = \sum_a \frac{e_a}{2c} [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a] = \sum_a \frac{e_a}{2m_a c} [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a],$$



где  $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$  — импульс отдельной частицы. При  $e_a/m_a = e/m$  получаем формулу (2.61), определяющую магнитный момент системы частиц, обусловленный их движением в пространстве.

Следует иметь в виду, что магнитный момент является важнейшей физической характеристикой, присущей как многим макроскопическим телам (постоянным магнитам, земному шару, Солнцу и звездам), так и почти всем микрочастицам, заряженным (электроны, протоны, атомные ядра) и электронейтральным (нейтроны, атомы). Внутренние моменты микрочастиц называются спиновыми, они не связаны с их движением как целого и обусловлены особенностями (во многих случаях неизвестными) их внутренней структуры. Между спиновыми магнитным  $\mathbf{m}_s$  и механическим  $\mathbf{L}_s$  моментами выполняется соотношение типа (2.61),

$$\mathbf{m}_s = \eta_s \mathbf{L}_s,$$

однако коэффициент пропорциональности  $\eta_s$  не совпадает с  $\eta = e/2mc$  и различен для разных частиц. Спиновый магнитный момент представляет собой квантовое явление, не объясняемое классической электродинамикой.

$$2.89. \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left( \frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{L}.$$

$$2.90. \quad \mathbf{m} = \mu_B e_z, \text{ где } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \approx 0,9 \times 10^{-20} \text{ эрг/Гс — магнетон}$$

Бора.

$$2.91. \quad \mathbf{m} = \mu_s.$$

$$2.92. \quad \mathbf{H}(0) = \frac{4\mu_B}{405a^3} e_z, \quad \mathbf{m} = 6\mu_B e_z.$$

$$2.93. \quad \mathbf{m} = \frac{ea^2}{5c} \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{H} = \frac{3r(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

$$2.94. \quad \mathbf{m} = \frac{ea^2}{4c} \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{H} = \left[ \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{1/2} + \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2} - 2 \right] \frac{2e|z|}{a^2 c} \boldsymbol{\omega}.$$

2.95. В точках, где  $j = 0$ , можно положить  $\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$ . Тогда уравнение  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  выполняется при всех  $\psi$ , а уравнение  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  дает

$$\Delta \psi = 0.$$

Последнее уравнение должно быть решено при дополнительном условии

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J},$$

где  $l$  — любой замкнутый контур, охватывающий ток  $\mathcal{J}$ . Вводим цилиндрические координаты  $r, \alpha, z$  и ищем решение в виде  $\psi = \psi(\alpha)$ .

Окончательно получим

$$\psi = -\frac{2\mathcal{J}}{c}\alpha, \quad H_\alpha = \frac{2\mathcal{J}}{cr}, \quad H_r = H_z = 0.$$

**2.96.** а) Чтобы скалярный потенциал  $\psi$  магнитного поля был однозначной функцией, выберем некоторую поверхность  $S$ , опирающуюся на контур с током, и будем считать, что при переходе через эту поверхность  $\psi$  терпит разрыв:

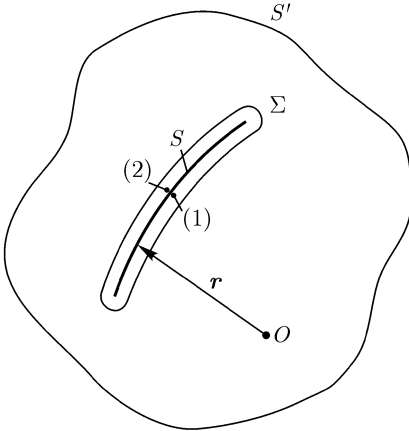


Рис. 2.21

$$(1) \quad \psi(2) - \psi(1) = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}.$$

Точки 1 и 2 лежат бесконечно близко друг к другу по разные стороны поверхности, причем направление из 1 в 2 составляет с направлением тока правинтовую систему (рис. 2.21).

Решение уравнения Лапласа можно записать в виде (см. пример 2.4):

$$(2) \quad \psi = \frac{1}{4\pi} \oint \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS.$$

В выражении (2) интегрирование нужно проводить по бесконечно удаленной замкнутой поверхности  $S'$ , а также по всем замкнутым поверхностям  $\Sigma_i$ , лежащим на конечном расстоянии от начала координат, внутри которых  $\psi$  или  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  имеют разрывы. В рассматриваемом случае интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю, так как источник поля (контур с током) имеет ограниченные размеры. Поверхности, на которых нормальная производная  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = -H_n$  имеет разрыв, отсутствуют, так как  $H_n$  — непрерывная величина. Поэтому в (2) интеграл должен быть взят по одной поверхности  $\Sigma$  до совпадения с  $S$ .

Будем стягивать  $\Sigma$  до совпадения с  $S$ . Вследствие непрерывности величин  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  и  $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$  на поверхности  $S$ , формула (2) примет вид

$$(3) \quad \psi = -\frac{1}{4\pi} \int [\psi(1) - \psi(2)] \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS,$$

где интегрирование теперь ведется по незамкнутой поверхности  $S$ .

Используя равенство (1), получим

$$(4) \quad \psi = \frac{\mathcal{J}}{c} \int \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = -\frac{\mathcal{J}}{c} \int \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}.$$

Интеграл  $\int \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}$  представляет собою телесный угол  $\Omega$ , под которым виден контур с током из точки наблюдения, поэтому формулу (4) можно записать в виде

$$\psi = -\frac{\mathcal{J}}{c} \Omega.$$

знак  $\Omega$  положителен, если радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , проведенный из точки наблюдения в некоторую точку поверхности  $S$ , и направление тока в контуре составляют правовинтовую систему.

б) Преобразуем интеграл (2.50') по контуру в интеграл по поверхности, опирающейся на контур; используя формулу (1.99), получим

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{J}}{c} \int d\mathbf{S} \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\mathcal{J}}{c} \int \nabla_M \left( \frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{S},$$

где  $\nabla_M$  означает дифференцирование по координатам точки наблюдения  $M$ . Вычисляя  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , находим:

$$(5) \quad \mathbf{H} = \frac{\mathcal{J}}{c} \int (d\mathbf{S} \cdot \nabla_M) \nabla_M \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\mathcal{J}}{c} \nabla_M \int d\mathbf{S} \cdot \nabla_M \left( \frac{1}{r} \right).$$

(При преобразовании использовано равенство  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$ ; предполагается, что точка  $r = 0$  не лежит на поверхности интегрирования.) Сравнивая (5) с формулой  $\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$ , получаем

$$\psi = -\frac{\mathcal{J}}{c} \int d\mathbf{S} \cdot \nabla_M \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathcal{J}}{c} \int \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = -\frac{\mathcal{J}}{c} \Omega.$$

$$2.97. \mathbf{F} = 0, \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{m} = \frac{\mathcal{I}}{c} \int \mathbf{n} \cdot dS$  — магнитный момент контура с током.

$$2.98. U = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \frac{3}{r^5} [(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{m}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{m}_1 + (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2)\mathbf{r}] - \\ - \frac{15}{r^7} (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный от первого тока ко второму,  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  — силы, действующие на первый и второй токи;

$$\mathbf{N}_1 = \frac{3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r})}{r^5} + \frac{\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1}{r^3},$$

$$\mathbf{N}_2 = \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{r})}{r^5} + \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2}{r^3},$$

где  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  — вращательные моменты, приложенные к первому и второму токам соответственно. Следует отметить, что  $\mathbf{N}_1 \neq \mathbf{N}_2$ , но

$$\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2) = 0.$$

Если магнитные моменты параллельны ( $\mathbf{m}_1 = m_1 \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}_2 = m_2 \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{r} = r \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}_0$  — единичные векторы), то получим

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3m_2 m_2 [2\mathbf{n} \cos \vartheta - r_0 (5 \cos^2 \vartheta - 1)]}{r^4},$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}_0$ .

**2.100.** Потенциальная функция тока  $\mathcal{I}_2$  в поле тока  $\mathcal{I}_1$ :

$$u_{21} = \frac{2\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}{c^2} \ln a + \text{const},$$

где  $a$  — расстояние между токами.

Сила, действующая на единицу длины второго тока:

$$f = -\frac{u_{21}}{a} = -\frac{2\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}{c^2 a}.$$

При параллельных токах ( $\mathcal{J}_1$  и  $\mathcal{J}_2$  одинакового знака) имеет место притяжение.

**2.101.** Сила  $F$  и вращательный момент  $N$  определяются дифференцированием потенциальной функции:

$$U(r, \alpha) = -\frac{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 a}{c^2} \ln \frac{4r^2 + a^2 + 4ar \cos \alpha}{4r^2 + a^2 - 4ar \cos \alpha}.$$

$$\mathbf{2.102.} \quad N = \frac{4\mathcal{J} \mathcal{J}' a}{c} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

$$\mathbf{2.103.} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{b}{a}.$$

$$\mathbf{2.104.} \quad \mathcal{L} = 2 \ln \frac{b}{a}.$$

$$\mathbf{2.105.} \quad L_{12} = 4\pi(b - \sqrt{b^2 - a^2});$$

$$F = \frac{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2}{c^2} \cdot \frac{\partial L_{21}}{\partial b} = \frac{4\pi \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2}{c^2} \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right).$$

**2.106\*.** В этой задаче удобно использовать формулу (2.70). Вычисляя интеграл так же, как в задаче 2.19, получим

$$L_{12} = 4\pi\sqrt{ab} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

где

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + l^2}.$$

При  $l \gg a, b$ , параметр  $k$  мал:

$$k^2 \approx \frac{4ab}{l^2}, \quad k \approx \frac{2\sqrt{ab}}{l} \ll 1,$$

поэтому можно использовать приближенные формулы для  $E$  и  $K$  (см. справочник Градштейна и Рыжика (1971), 8.113, 8.114):

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 \right), \quad E(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 \right).$$

Оставляя в выражении для  $L_{12}$  только члены, пропорциональные  $k^3$ , получим в первом неисчезающем приближении

$$L_{12} = \frac{2\pi^2 a^2 b^2}{l^3}.$$

Последний результат легко получить и из равенства  $L_{12} = \frac{c\Phi_{12}}{\mathcal{I}_1}$ , рассматривая кольца с током как магнитные диполи.

**2.107.** В обозначениях предыдущей задачи

$$F = \frac{4\pi \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}{c^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{(a+b)^2 + l^2}} \left[ -K(k) + \frac{a^2 + b^2 + l^2}{(a+b)^2 + l^2} E(k) \right].$$

**2.108.**  $\mathcal{L} = 4\pi n^2 S$ . Для соленоида большой, но конечной длины  $h$ , пренебрегая краевым эффектом, получим полную индуктивность

$$L = 4\pi n^2 S h.$$

**2.109.** Вычисляем магнитную энергию по формуле

$$W = \frac{1}{2c^2} \int \frac{\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2}{R} dS_1 dS_2.$$

Здесь  $dS_1$  и  $dS_2$  — элементы поверхности соленоида,  $R$  — расстояние между ними, через  $\mathbf{i}$  ( $i_1 = i_2 = i = n\mathcal{I}$ ) обозначена плотность поверхностного тока, которым заменен ток, текущий в обмотке соленоида,  $n$  — число витков на единицу длины.

Интеграл удобно вычислять в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi n^2 a^2 \mathcal{I}^2}{c^2} \int_0^h dz_1 \int_0^h dz_2 \oint \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\ &= \frac{2\pi^2 a^2 n^2 \mathcal{I}^2 h \left( 1 - \frac{8a}{3\pi h} \right)}{c^2}, \end{aligned}$$

где отброшены все члены порядка  $\left(\frac{a}{h}\right)^2$  и выше. Отсюда

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h \left(1 - \frac{8a}{3\pi h}\right).$$

Если пренебречь членом  $a/h$  по сравнению с единицей, то получится результат предыдущей задачи:

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h = 4\pi n^2 S h.$$

**2.110.** Для кругового сечения

$$L = 4\pi N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

Самоиндукция на единицу длины  $\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi b}$  для бесконечного соленоида получится, если сделать предельный переход  $b \rightarrow \infty$  при заданном числе витков на единицу длины  $n = \frac{N}{2\pi b}$ :

$$\mathcal{L} = 4\pi^2 n^2 a^2 = 4\pi n^2 S$$

(ср. с задачей 2.108).

Для прямоугольного сечения

$$L = 2N^2 h \ln \frac{2b+a}{2b-a}.$$

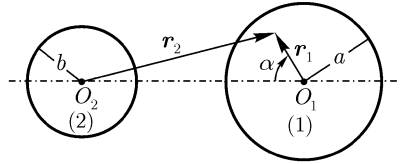


Рис. 2.22

При  $b \gg a$  опять имеем  $\mathcal{L} = 4\pi n^2 S$ .

**2.111.** Вычислим магнитную энергию единицы длины линии по формуле (2.75). Векторный потенциал прямого провода с током был получен в задаче 2.71. Для провода 1 (рис. 2.22) запишем его в виде

$$A_{1z} = C - \frac{\mathcal{I} r_1^2}{ca^2} \quad \text{при } r_1 < a, \quad (1)$$

$$A_{1z} = C - \frac{\mathcal{I}}{c} \left(1 + 2 \ln \frac{r_1}{a}\right) \quad \text{при } r_1 > a.$$

Векторный потенциал, создаваемый проводом 2, получится при замене в (1)  $\mathcal{I}$  на  $-\mathcal{I}$ ,  $a$  на  $b$  и  $r_1$  на  $r_2$ .

Находим магнитную энергию:

$$W \frac{\mathcal{I}}{2\pi ca^2} \int_1 (A_{1z} + A_{2z}) dS_1 - \frac{\mathcal{I}}{2\pi cb^2} \int_2 (A_{1z} + A_{2z}) dS_2. \quad (2)$$

Интегралы, входящие в (2), можно вычислить, используя справочник Градштейна и Рыжика (1971). Учитывая затем связь между коэффициентом индуктивности и магнитной энергией системы, получим окончательно:

$$\mathcal{L} = 1 + 2 \ln \frac{h^2}{ab}.$$

**2.112\***. Полная магнитная энергия тока, протекающего по проводнику, складывается из двух частей:

$$(1) \quad W = W_1 + W_2,$$

где

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int H_1^2 dV$$

— энергия, запасенная внутри проводника и интегрирование ведется по объему проводника,

$$W_2 = \frac{1}{8\pi} \int H_2^2 dV$$

— энергия, запасенная в остальном пространстве.

Предположим, что можно ввести параметр  $r_0$ , имеющий размерность длины и удовлетворяющий условию

$$(2) \quad a \ll r_0 \ll R,$$

где  $a$  — радиус проводника,  $R$  — радиус кривизны осевой линии проводника (который в общем случае меняется от точки к точке). Тогда на расстояниях, меньших  $r_0$ , магнитное поле можно считать совпадающим с полем бесконечного прямого провода. В частности, внутри провода:

$$H_1 = \frac{2 \mathcal{I} r}{ca^2}$$

(см. задачу 2.71). Это позволяет найти «внутреннюю» энергию  $W_1$ :

$$(3) \quad W_1 = \frac{l \mathcal{I}^2}{4c^2}.$$



Для определения «внешней энергии»  $W_2$  построим вспомогательную поверхность  $S$ , опирающуюся на произвольный контур, лежащий на поверхности проводника, и введем скалярный потенциал  $\psi$ . Скалярный потенциал будет испытывать на  $S$  скачок

$$(4) \quad \psi_+ - \psi_- = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}.$$

Интеграл, через который выражается  $W_2$ , можно преобразовать следующим образом:

$$\int (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) dV = - \int \mathbf{H} \operatorname{grad} \psi dV = - \int \operatorname{div}(\psi \mathbf{H}) dV = - \oint \psi \mathbf{H}_n dS$$

(здесь опущен индекс 2 и использовано уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ ). В последнем интеграле интегрирование должно проводиться по обеим сторонам вспомогательной поверхности  $S$  и по поверхности проводника  $S'$  (см. рис. 2.23, на котором изображено сечение проводника некоторой плоскостью). Интеграл по бесконечно удаленной поверхности обращается в нуль вследствие конечных размеров проводника с током. Таким образом,

$$(5) \quad W - 2 = - \frac{1}{8\pi} \int_{S'} \psi H_n dS + \frac{1}{8\pi} \int_S \psi_+ H_n dS - \frac{1}{8\pi} \int_S \psi_- H_n dS.$$

Первый из этих интегралов обращается в нуль, так как в силу условия (2) магнитное поле на поверхности  $S'$  совпадает с полем прямолинейного провода и имеет, следовательно, только касательную составляющую. Для преобразования других двух интегралов нужно использовать равенство (4) и условие непрерывности компоненты  $H_n$ . Получим

$$(6) \quad W_2 = \frac{\mathcal{J}}{2c} \int_S H_n dS.$$

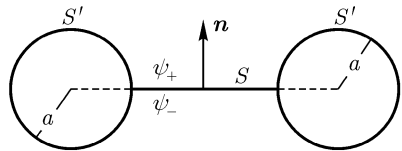


Рис. 2.23

На больших расстояниях от провода ( $r > r_0$ ) магнитное поле не зависит от распределения тока по сечению проводника, поэтому можно считать, что ток течет по оси. На малых расстояниях ( $a \leq r < r_0$ ) это поле совпадает с магнитным полем бесконечного круглого цилиндра, и тоже можно считать, что ток течет по оси. Таким образом, интеграл в формуле (6) представляет собою поток магнитной индукции, создаваемой током, текущим по оси проводника, через поверхность, которая опирается на замкнутый контур,

лежащий на поверхности проводника. Используя выражение потока через коэффициент взаимной индукции, получим

$$(7) \quad W_2 = \frac{\mathcal{J}^2}{2c^2} L'.$$

С помощью формул (1), (3), (7), используя связь между коэффициентом самоиндукции и магнитной энергией системы, получим требуемую формулу для коэффициента самоиндукции:

$$(8) \quad L = \frac{l}{2} + L'.$$

**2.113.** Используя результат предыдущей задачи, получим

$$L' = 4\pi b \left( \ln \frac{8b}{a} - 2 \right).$$

Полная самоиндукция

$$L = 4\pi b \left( \ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right).$$

**2.114.**  $L_{12} = 2l - 2\sqrt{a^2 + l^2} + 2a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + l^2}}{l}.$

**2.115.** Используя результат задачи 2.114, получим

$$L_{12} = 8 \left[ l - 2\sqrt{a^2 + l^2} + \sqrt{2a^2 + l^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + l^2}}{l} \right] - a \ln \frac{a + \sqrt{2a^2 + l^2}}{\sqrt{a^2 + l^2}},$$

$$F = \frac{8 \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2}{c^2} \left[ \frac{a^2 + 2l^2}{l\sqrt{a^2 + l^2}} - \frac{l\sqrt{2a^2 + l^2}}{a^2 + l^2} - 1 \right].$$

**2.116.**  $L = 2b \left[ 4 \ln \frac{2b}{a(1 + \sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7 \right].$

**2.117.**  $\gamma' = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{K}$ , где  $\mathbf{K}$  — любой вектор, зависящий от напряженностей электромагнитного поля.

**2.118.**  $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3} \Theta(a - r)$ ;  $\mathbf{j} = \rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ , где  $\Theta$  — ступенчатая функция (1.212).

**2.119.**  $\rho = \frac{e}{4\pi a^2} \delta(a - r)$ ;  $\mathbf{j} = \rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ .

**2.120.**

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_\omega, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega &= -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E}_\omega + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_\omega &= 4\pi \rho_\omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_\omega &= 0. \\ \mathbf{E}_\omega &= -\nabla \varphi_\omega + \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega, \\ \mathbf{H}_\omega &= \nabla \times \mathbf{A}_\omega. \end{aligned}$$

В интегралах (2.112) изменение знака частоты эквивалентно изменению знака мнимой единицы  $i$ . Поэтому  $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_\omega^*$ . Такое соотношение между гармониками Фурье справедливо для любой действительной функции.

**2.121.**  $\Gamma_\omega = \frac{c}{4\pi^2} \operatorname{Re}[\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{H}_\omega^*]$ .

**2.122.**

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_\mathbf{k} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{k}, \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_\mathbf{k} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}_\mathbf{k} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\mathbf{k}, \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_\mathbf{k} &= 4\pi \rho_\mathbf{k}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_\mathbf{k} &= 0. \end{aligned}$$

**2.124.** Фурье-образ потенциала точечного заряда был найден в задаче 1.137:

$$\varphi_\mathbf{k} = \frac{4\pi e}{k^2}, \quad \mathbf{E}_\mathbf{k} = -i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}.$$

Другой способ решения задачи — использование интеграла Фурье  $\varphi(\mathbf{r}) = \int \varphi_\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k$ . Применив оператор Лапласа под интегралом, найдем  $\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \int (-k^2 \varphi_\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k$ , откуда  $(\Delta \varphi)_\mathbf{k} = -k^2 \varphi_\mathbf{k}$ . С другой

стороны, выполнив преобразование Фурье обеих частей уравнения Пуассона на  $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi e\delta(\mathbf{r})$ , будем иметь  $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -4\pi e$ . В итоге получаем уже приведенный выше ответ.

**2.125.**

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} - i\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}, \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} &= 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} &= 0.\end{aligned}$$

**2.126.** Разложение на гармонические составляющие:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A}_{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}_{\omega} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\omega}, \\ \Delta \varphi_{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_{\omega} &= -4\pi\rho_{\omega}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A}_{\omega} - \frac{i\omega}{c} \varphi_{\omega} &= 0.\end{aligned}$$

Разложение на плоские волны:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + k^2 c^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} &= 4\pi c \mathbf{j}_{\mathbf{k}}, \\ \ddot{\varphi}_{\mathbf{k}} + k^2 c^2 \varphi_{\mathbf{k}} &= 4\pi c^2 \rho_{\mathbf{k}}, \\ i c \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} + \dot{\varphi}_{\mathbf{k}} &= 0.\end{aligned}$$

Разложение на плоские монохроматические волны:

$$\begin{aligned}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}, \\ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \varphi_{\mathbf{k}\omega} &= 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} - \frac{\omega}{c} \varphi_{\mathbf{k}\omega} &= 0.\end{aligned}$$

**2.127.** В переменных  $\xi, \eta$  одномерное волновое уравнение принимает вид  $\partial^2 \mathbf{E} / \partial \xi \partial \eta = 0$ , откуда следует приведенное решение. Оно описывает

две **плоские волны** произвольной формы, распространяющиеся в противоположных направлениях оси  $Ox$  со скоростью  $c$ . Решение, описывающее распространение плоских волн в направлении  $\mathbf{n}$ , имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1 F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) + \mathbf{E}_2 \Phi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct).$$

**2.128.**  $\gamma = c\omega\mathbf{n}$ ,  $w = (E^2 + H^2)/8\pi = E^2/4\pi$ . Энергия переносится в пространстве со скоростью  $c$ .

$$\mathbf{2.130.} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = 2\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} / (E_{01}^2 + E_{02}^2).$$

Для определения направлений вращения запишем (2.126) в проекциях на оси координат, выбрав постоянно используемую **правую** систему координат с осью  $Ox$  вдоль  $\mathcal{E}_1$  и осью  $Oz$  в направлении распространения волны  $\mathbf{k}$ . Аргумент тригонометрических функций запишем так, чтобы он увеличивался с ростом  $t$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} E_x &= \mathcal{E}_1 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \alpha), \\ E_y &= \pm \mathcal{E}_2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \alpha), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{E}_1 \geq 0$  и  $\mathcal{E}_2 \geq 0$ , знак плюс во второй формуле отвечает правой тройке векторов  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathbf{k}$ , а знак минус — левой тройке. При знаке плюс волна имеет правую спиральность, т. е. направление вращения вектора  $\mathbf{E}$  и направление распространения образуют правый винт. При знаке минус спиральность левая (винт с левой нарезкой). По историческим причинам в оптике принята противоположная терминология: вращение вектора  $\mathbf{E}$  в направлении правого винта называют левым, а противоположное вращение — правым.

**2.131.** По методике предыдущей задачи, записываем

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = a\mathbf{e}_x + be^{i\chi}\mathbf{e}_y = (\mathcal{E}_1 + i\mathcal{E}_2)e^{i\alpha}$$

и находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= a \cos \alpha \mathbf{e}_x + b \cos(\chi - \alpha) \mathbf{e}_y, \\ \mathcal{E}_2 &= -a \sin \alpha \mathbf{e}_x + b \sin(\chi - \alpha) \mathbf{e}_y, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{b^2 \sin 2\chi}{a^2 + b^2 \cos 2\chi}, \quad -\pi < \alpha \leq \pi. \end{aligned}$$

(последнее равенство получено из условия  $\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2 = 0$ ). Спиральность результирующей волны определяется знаком произведения  $\mathcal{E}_2 \cdot \mathbf{e}_{y'}$ , где  $\mathbf{e}_{y'} = \mathbf{n} \times \mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_1$  — третий орт, составляющий правую тройку с  $\mathbf{e}_{x'} = \mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_1$  и  $\mathbf{n}$ . Используя полученные выражения, находим  $\mathcal{E}_2 \cdot \mathbf{e}_{y'} = ab \sin \chi / \mathcal{E}_1$ . Согласно

результатам предыдущей задачи, при  $ab > 0$  и  $\sin \chi > 0$ ,  $0 < \chi < \pi$ , спиральность правая, при  $\sin \chi < 0$ ,  $-\pi < \chi < 0$  — левая. При  $\chi = 0$  и при  $\chi = \pm\pi$  поляризации линейные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

**2.132.** При  $\chi = 0$  поляризация линейная, плоскость поляризации проходит через биссектрису угла между осями  $Ox$ ,  $Oy$ . При  $\chi = \pi$  поляризация

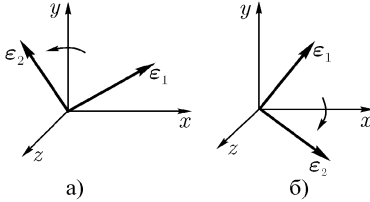


Рис. 2.24

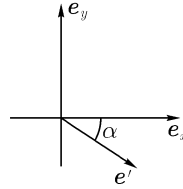


Рис. 2.25

тоже линейная, плоскость поляризации проходит через биссектрису угла между  $Ox$  и  $-Oy$ . При  $\chi = \pi/2$  поляризация круговая с правой спиральностью (рис. 2.24 а).

При  $\chi = -\frac{\pi}{2}$  поляризация круговая с левой спиральностью (рис. 2.24 б). В остальных случаях она эллиптическая, причем при  $0 < \chi < \pi$  спиральность правая, при  $-\pi < \chi < 0$  — левая.

$$\mathbf{2.133.} \quad e^{(1)} = e^{(2)*} = \frac{e_x + ie_y}{\sqrt{2}}.$$

**2.134.**  $\mathcal{E} = \sqrt{2}E_0 e'$ . Поляризация линейная, орт  $e'$  составляет угол  $\alpha$  с осью  $Ox$  (рис. 2.25).

$$\mathbf{2.135.} \quad J_{\alpha\beta} = I^{(1)} e_\alpha^{(1)} e_\beta^{(1)*} + I^{(2)} e_\alpha^{(2)} e_\beta^{(2)*},$$

где  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$  — главные значения эрмитова тензора (действительные величины), а  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$  — его собственные векторы, в общем случае комплексные и описывающие эллиптическую поляризацию. Они удовлетворяют условиям  $e^{(\sigma)} \cdot e^{(\sigma')*} = \delta_{\sigma\sigma'}$ ,  $e_\alpha^{(\sigma)} e_\beta^{(\sigma)*} = \delta_{\alpha\beta}$  (сумма по повторяющемуся индексу). Введенные в примере 2.21 величины выражаются через  $I^{(1)} \geq I^{(2)}$ :

$$I_n = 2I^{(2)}, \quad I_p = I^{(1)} - I^{(2)}, \quad P = \frac{I^{(1)} - I^{(2)}}{I^{(1)} + I^{(2)}}, \quad \rho = \frac{2I^{(2)}}{I^{(1)} + I^{(2)}}.$$

**2.136.** Введем прямоугольные оси  $x' \parallel a$  и  $y' \parallel b$ . В этих осях комплексная амплитуда поля будет иметь вид

$$\mathbf{E}_0 = ae_{x'} \pm ibe_{y'},$$

где знак «+» отвечает правой эллиптической поляризации, а знак «-» — левой. Интенсивность  $I = a^2 + b^2$ . Фаза выбрана равной нулю для  $x'$ -компоненты поля. Выражая теперь орты  $e_{x'}$ ,  $e_{y'}$  через  $e_x$ ,  $e_y$ , получим для компонент  $I_{ik}$ :

$$I_{11} = a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta,$$

$$I_{22} = a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta,$$

$$I_{12} = (a^2 - b^2) \sin \vartheta \cos \vartheta \mp 2iab = I_{21}^*.$$

Верхний знак отвечает правой эллиптической поляризации, нижний — левой. При  $b = 0$  поляризация линейна и тензор  $I_{ik}$  имеет вид

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

При  $a = b = \sqrt{I/2}$  поляризация круговая и

$$I_{ik} = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}.$$

**2.137.** Амплитуда суммарной волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E(e^{(1)} + e^{(2)}e^{i\alpha}),$$

где  $\alpha$  — сдвиг фаз, меняющийся беспорядочно,  $|\mathbf{E}|^2 = I$ . Компоненты тензора поляризации по определению (см.(2.127)) равны

$$I_{ik} = \overline{E_i E_k^*} = \overline{E(e^{(1)} + e^{(2)}e^{i\alpha})}_i (e^{(1)} + e^{(2)}e^{-i\alpha})_k.$$

При усреднении по времени получим  $\overline{e^{\pm i\alpha}} = 0$ , поэтому тензор поляризации будет иметь вид

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & 1 - \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Отсюда, используя результат примера 2.21, получим

$$P = |\cos \vartheta|.$$

Этот же результат можно получить, диагонализуя тензор  $I_{ik}$ . Его главные значения  $I_1 = 1 + |\cos \vartheta|$ ,  $I_2 = 1 - |\cos \vartheta|$ . Отсюда опять  $P = (I_1 - I_2)/(I_1 + I_2) = |\cos \vartheta|$ . Базисные векторы  $e_1 = \left(\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2}\right)$  и  $e_2 = \left(-\sin \frac{\vartheta}{2}, \cos \frac{\vartheta}{2}\right)$ . Они вещественны в рассматриваемом случае.

Результирующая волна состоит из неполяризованной части с интенсивностью  $I(1 - |\cos \vartheta|)$  и линейно поляризованной вдоль направления  $e_1 = \left(\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2}\right)$  части с интенсивностью  $I|\cos \vartheta|$ :

$$(I_{ik}) = I(1 - |\cos \vartheta|)(\delta_{ik}) + I|\cos \vartheta| \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} & \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} & \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}.$$

Результирующая волна полностью поляризована (но не монохроматична) при  $\vartheta = 0$ . При  $\vartheta = \pi/2$  – полная деполаризация.

### 2.138. Тензор поляризации

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 + I_2/2 & I_2/2 \\ I_2/2 & I_2/2 \end{pmatrix}$$

(ось  $x_1$  совпадает с направлением поляризации первой волны).

Степень поляризации

$$P = \frac{2\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_1 + I_2 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2}}.$$

Результирующая волна состоит из неполяризованной волны с интенсивностью  $(I_1 + I_2)(1 - P)/2$  и линейно поляризованной волны. Направление линейной поляризации составляет угол

$$\vartheta = \arctg \frac{2I_2\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_1(I_1 + I_2) + (3I_1 + 2I_2)\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}$$

с направлением поляризации первой волны.

**2.139.**  $\rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$ ; при  $\xi = 0$  волна не поляризована, при  $\xi = 1$  – полностью поляризована.



Положим  $\xi_i = \xi \eta_i$ , где  $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$ . Тогда

$$I_{ik} = \frac{I}{2}(1 - \xi)\delta_{ik} + \frac{I\xi}{2} \left( 1 + \sum_{l=1}^3 \eta_l \tau_{ik}^{(l)} \right).$$

Первый член в этом выражении соответствует полностью неполяризованному состоянию, а второй — полностью поляризованному. В случае а)  $\eta_3 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ .

Сравнивая

$$I''_{ik} = I\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с выражением  $I_{ik} = I n_i n_k^*$ , видим, что в данном случае  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0$ , т. е., тензор  $I''_{ik}$  описывает волну, поляризованную в направлении оси  $x$  (волна распространяется в направлении  $z$ ).

Аналогичным образом легко убедиться, что в случае б)  $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = \eta_3 = 0$  и волна линейно поляризована в направлении, составляющем  $45^\circ$  с осью  $x$ , а в случае в)  $\eta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_3 = 0$  и волна поляризована по кругу.

**2.140.** Волновой пакет удовлетворяет однородному уравнению Даламбера при условии  $\omega^2 = c^2 k^2$ . Гауссовой амплитудной функции соответствует пакет

$$\Psi(x, 0) = A(x, 0) \exp(ik_0 x), \quad \text{где } A(x, 0) = a_0 \sqrt{\pi} \Delta k \exp \left[ -\frac{x^2 \Delta k^2}{4} \right].$$

Амплитуда волнового пакета  $A(x, 0)$  имеет форму кривой Гаусса. Она становится исчезающе малой при  $|x \Delta k| \gg 1$ . Отсюда следует, что ширина пакета  $\Delta x$  связана с шириной  $\Delta k$  в пространстве волновых векторов соотношением  $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$ . Это соотношение имеет универсальный характер и справедливо как для электромагнитных волн, так и для волн любой другой природы. Оно играет особую роль для волн вероятности в квантовой механике, приводя к соотношению неопределенностей для координаты и импульса микрочастицы.

$$\mathbf{2.141.} \quad 1. \overline{\Delta x^2} \cdot \overline{\Delta k^2} = 1/2, \quad 2. \overline{\Delta x^2} \cdot \overline{\Delta k^2} \rightarrow \infty.$$

**2.142.**

$$\Psi(0, t) = A(0, t) \exp(-i\omega_0 t), \quad \text{где } A(0, t) = a_0 \sqrt{\pi} \Delta \omega \exp \left[ -\frac{t^2 \Delta \omega^2}{4} \right],$$

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \approx 1.$$

2.143.

$$\psi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{ikct} dt.$$

2.144.

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi \sin \theta},$$

где  $\theta$  — половина угла конуса раствора лучей, направленных из объектива микроскопа к рассматриваемому объекту.

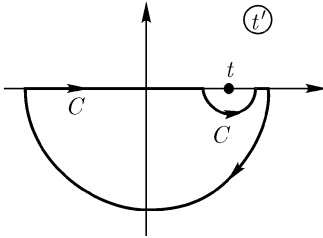


Рис. 2.26

**2.145.** Волновой импульс, посылаемый радиолокатором, имеет ширину  $\Delta x$ , связанную с поперечным разбросом волновых векторов  $k_{\perp}$  соотношением  $\Delta x \cdot k_{\perp} \geq 1$ . С другой стороны, очевидно,  $\Delta x/l \approx k_{\perp}/k$ . Из этих двух соотношений находим неточность в определении положения объекта:

$$\Delta x \geq \sqrt{l\lambda}.$$

**2.146.** Рассматриваем интеграл (1) по замкнутому контуру  $C$  (рис. 2.26), в котором точка  $t' = t$  обойдена по малой полуокружности снизу. Ввиду отсутствия особых точек подынтегрального выражения внутри контура интегрирования, этот интеграл обращается в нуль:

$$(1) \quad \oint_C \frac{U(t')}{t' - t} dt' = 0.$$

Интеграл по дуге большого круга обращается в нуль ввиду быстрого убывания  $U(t')$  при  $|t'| \rightarrow \infty$  в нижней полуплоскости. Интеграл по малой полуокружности  $c$  вычисляется непосредственно и дает полувычет подынтегральной функции:

$$(2) \quad \int_c \frac{U(t')}{t' - t} dt' = i\pi U(t).$$

Оставшийся интеграл по действительной оси с исключенной точкой должен вычисляться в смысле главного значения, т. е. из интегрирования исключается отрезок  $(t - \rho, t + \rho)$  действительной оси, причем  $\rho \rightarrow 0$ . В итоге из (1)

и (2) получаем

$$(3) \quad i\pi U(t) + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(t')}{t' - t} dt' = 0,$$

и после разделения действительной и мнимой частей будем иметь равенства, приведенные в условии задачи.

$$2.147. \quad \Gamma_{\omega} = c\alpha^2(\omega)/4\pi^2.$$

$$2.148. \quad A(t) = |U(t)|, \quad \Phi(t) = \omega_0 t + \operatorname{arctg} \left( i \frac{U^* - U}{U^* + U} \right).$$

$$2.149. \quad |a(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}.$$

Сигнал будет узкополосным (квазимонохроматическим) при  $\gamma \ll \omega_0$ . Если определить  $\Delta t$  как время, за которое интенсивность сигнала  $I \propto |U(t)|^2$  уменьшается в  $e$  раз, а  $\Delta\omega$  — как расстройку, при которой спектральная мощность уменьшается тоже в  $e$  раз, то  $\Delta t \cdot \Delta\omega = \sqrt{e-1}/2$ . Полученная в этой задаче форма спектра называется **лоренцевским контуром**.

**2.150.** Выберем лоренцевскую калибровку потенциалов (2.105). Функция  $\chi$  (см. пример 2.19) удовлетворяет однородному уравнению Даламбера (2.111). Такому же уравнению удовлетворяют  $\varphi$  и  $\partial\chi/\partial t$ . Поэтому с помощью калибровочного преобразования можно выбрать такую  $\chi$ , чтобы обратить в нуль скалярный потенциал:  $\varphi' = \varphi - (1/c)(\partial\chi/\partial t) = 0$ .

**2.151.** Приведенные в ответе формулы получаются из очевидного выражения  $\Delta N = 2\Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3$  для числа собственных колебаний поля.

**2.152.** Разложим действительные орты  $\varepsilon_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) некоторой декартовой системы координат по трем взаимно ортогональным ортам  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ ,  $\mathbf{n}$ :  $\varepsilon_{\alpha} = e_{\alpha}^{(1)*} e^{(1)} + e_{\alpha}^{(2)*} e^{(2)} + n_{\alpha} \mathbf{n}$ . Составив скалярные произведения, получим  $\delta_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha} \cdot \varepsilon_{\beta} = e_{\alpha}^{(1)} e_{\beta}^{(1)*} + e_{\alpha}^{(2)} e_{\beta}^{(2)*} + n_{\alpha} n_{\beta}$ .

---

---

## ГЛАВА 3

# Специальная теория относительности и релятивистская кинематика

### 3.1. Принцип относительности и преобразования Лоренца

**Свойства пространства-времени и интервал.** Специальная теория относительности (СТО) — это наука об основных, наиболее общих свойствах пространства, времени и движения. Эти свойства были установлены в процессе исследования механических и особенно электромагнитных явлений и сформулированы в начале 20-го века в трудах А. Эйнштейна, Г. Лоренца, А. Пуанкаре, М. Планка, Г. Минковского и других выдающихся физиков и математиков. Основные постулаты и выводы СТО получили подтверждение при дальнейшем развитии экспериментальной и теоретической физики, а также современной техники (квантовой механики и квантовой теории поля, физики элементарных частиц, ускорительной техники, атомной энергетики и др.). В настоящее время они составляют фундамент современных физических представлений, на котором развиваются новейшие теории. Но сама СТО возникла не на пустом месте. Ее основой явились представления о свойствах пространства, времени и движения, выработанные классической механикой, но углубленные, критически проанализированные и в некоторых важных пунктах измененные и дополненные Эйнштейном в связи с новыми опытными данными, полученными при изучении электромагнитных явлений, особенно в движущихся средах. Перечислим основные свойства пространства и времени, известные из классической механики.

1. Существуют **инерциальные системы отсчета (ИСО)**, относительно которых свободная частица («материальная точка» классической механики) движется равномерно и прямолинейно (покой — частный случай такого движения).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В дальнейшем будет считаться, что в каждой ИСО выбрана система трех прямоугольных декартовых координатных осей. Координаты произвольной точки  $x, y, z$  (их совокупность образует радиус-вектор  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ) могут быть измерены с помощью масштабной линейки и представляют собой расстояния от выбранной точки до координатных плоскостей по кратчайшим (перпендикулярным)

направлениям, т. е. **геометрия трехмерного пространства евклидова**. Кроме того, каждая ИСО снабжена часами для отчета промежутков времени  $\Delta t$ . В качестве часов может использоваться любой периодический физический процесс.

2. В любой ИСО свободное от вещества и физических полей **пространство однородно и изотропно, а время однородно**.

ЗАМЕЧАНИЕ. Под однородностью пространства понимается равноправие всех его частей: любая механическая система, помещенная в произвольную область свободного пространства, будет вести себя точно так же, как и в любом другом месте. По протеканию механических явлений нельзя отличить одну область однородного пространства от другой. Изотропия пространства означает равноправие всех направлений в нем: свойства и поведение механических объектов не зависят от их ориентации в изотропном пространстве. Наконец, однородность времени означает, что все его моменты равноправны: движение любой механической системы будет происходить одинаково, независимо от того, в какой момент времени она была «запущена», т. е. когда были зафиксированы начальные условия движения. Разумеется, начальные условия при разных «запусках» должны быть одними и теми же.

3. Любое механическое явление при одинаковых начальных условиях протекает одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета (**принцип относительности классической механики**, или равноправие ИСО).

4. Взаимодействия между телами и сигналы, передающие информацию, могут распространяться с бесконечной скоростью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Возможность бесконечных скоростей распространения взаимодействий содержится в концепции сил, зависящих от координат взаимодействующих тел:  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t))$ . В уравнения движения классической механики входят радиусы-векторы тел  $\mathbf{r}_1(t)$ ,  $\mathbf{r}_2(t)$  в один и тот же момент  $t$ . Изменение положения одного тела в тот же момент времени приводит к изменению силы, действующей на второе тело, независимо от расстояния между телами. Взаимодействие распространяется мгновенно.

5. Координаты и время в двух инерциальных системах отсчета,  $S$  и  $S'$ , движущихся с относительной скоростью  $V$  вдоль оси  $Ox$  (рис. 3.1), связаны соотношениями

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (3.1)$$

которые называются **преобразованиями Галилея**.

Обратим внимание на то, что время не преобразуется — во всех системах отсчета оно одинаково, имеет абсолютный характер. Это свойство времени в классической механике тесно связано с возможностью бесконечной скорости распространения сигналов и взаимодействий. Пусть в системе  $S$  имеется устройство, которое испускает изотропно во все стороны сигнал, распространяющийся с бесконечной скоростью. Соответствующие приборы, находящиеся в любых точках пространства и в любых (не обязательно

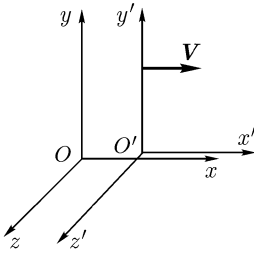


Рис. 3.1

инерциальных) системах отсчета, движущихся относительно  $S$  с конечными скоростями, зафиксируют этот сигнал в тот же момент, в который он был испущен. Тем самым такие сигналы могут служить «метками времени», с помощью которых во всех системах будет отсчитываться одно и то же, т. е. абсолютное, время  $t' = t'' = \dots = t$ .

Аналогичным образом обстоит дело с определением одновременности: если два сигнала испущены одновременно в двух разных точках в системе  $S$ , то они будут одновременно зафиксированы соответствующим прибором в системе  $S'$ . События,

одновременные в одной системе, одновременны и в любой другой системе. В классической физике одновременность абсолютна.

При произвольном направлении относительной скорости вместо (3.1) будем иметь  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$ ,  $t' = t$ . Дифференцируя первое равенство по абсолютному времени, находим закон сложения скоростей классической механики:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \quad (3.2)$$

Скорости складываются по закону сложения векторов в трехмерном пространстве (правило параллелограмма) и ничем не ограничены по абсолютной величине.

Перейдем теперь к формулировке основных положений СТО и их сравнению с представлениями классической механики.

1. Постулат о существовании инерциальных систем и их определение сохраняют полную силу и в СТО.

2. Пределы применимости утверждения о свойствах симметрии пространства и времени (однородность и изотропия свободного пространства, однородность времени) расширяются и распространяются не только на механические, но на все физические явления. Это означает, например, что следствием однородности пространства будет одинаковое протекание любого физического явления (колебания маятника, излучение электромагнитных волн антенной, распад элементарных частиц и т. д.) в любом месте свободного пространства. Аналогичным образом обобщаются понятия изотропии пространства и однородности времени. Хотя физики занимаются только физическими явлениями, вряд ли кто-нибудь из них сомневается в том, что обсуждаемые понятия можно обобщить на любые, а не только физические, явления природы.

3. Принцип относительности классической механики обобщается на все без исключения физические явления и становится одним из самых общих законов природы. В этом обобщенном смысле его можно сформулировать следующим образом: **любое явление природы протекает одинаково**

**во всех инерциальных системах отсчета, если начальное состояние системы одно и то же.**

4. Взаимодействия между телами и сигналы, передающие информацию, не могут распространяться со сколь угодно большой скоростью. Существует **максимальная (предельная) скорость** распространения сигналов и взаимодействий, которая совпадает со скоростью света в вакууме

$$c = 299\,792\,458 \pm 1,2 \text{ м/с} \approx 3 \times 10^{10} \text{ см/с.} \quad (3.3)$$

Другая, эквивалентная формулировка этого положения: скорость света в вакууме одинакова по величине во всех инерциальных системах отсчета, она не зависит от движения источника или приемника света<sup>1</sup> (**принцип постоянства скорости света**).

Совокупность положений (3) и (4) образует **принцип относительности Эйнштейна**, сформулированный им в основополагающей работе по СТО [Эйнштейн (1905)]. Нетрудно видеть, что эти положения не согласуются с законами классической механики. Согласно последним, скорости складываются по правилу параллелограмма. Если скорость света в системе  $S$  равна  $c$ , то в другой ИСО,  $S'$ , движущейся относительно исходной со скоростью  $V$ , она станет равной  $c' = c - V$ . Скорость  $c'$  по модулю может быть как больше, так и меньше  $c$  в зависимости от угла между  $c$  и  $V$ , что и доказывает несовместимость принципа относительности Эйнштейна с классическими представлениями.

Каждое событие, рассматриваемое в некоторой ИСО, будем характеризовать его пространственными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и моментом времени  $t$ , в который оно произошло. Совокупность четырех величин  $(ct, x, y, z)$  представляет собой координаты события в **четырёхмерном пространстве-времени** Минковского<sup>2</sup>. Временная координата  $ct$  выбрана так, чтобы ее размерность совпадала с размерностью пространственных координат. Величина

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4)$$

называется квадратом **интервала** между двумя близкими событиями (или близкими точками в четырёхмерном пространстве-времени). В другой ИСО интервал  $ds'^2$  выразится аналогичным образом через дифференциалы штрихованных координат пространства-времени.

<sup>1</sup>Впервые постоянство скорости света было продемонстрировано в опыте Майкельсона – Морли в 1887 г.

<sup>2</sup>Г. Минковский — немецкий физик и математик. Выдвинул идею об объединении трех пространственных измерений и времени в одно четырёхмерное пространство-время. Один из основоположников специальной теории относительности.

**Пример 3.1.** Пользуясь приведенными выше постулатами (1)–(4), доказать равенство

$$ds^2 = ds'^2 = \text{inv} \quad (3.5)$$

(инвариантность интервала) при переходе из одной ИСО  $S$  в другую систему  $S'$ .

**Решение.** При переходе из одной ИСО в другую дифференциалы четырехмерных координат должны быть связаны линейными соотношениями. Коэффициенты в формулах связи могут зависеть только от относительной скорости двух систем, но не от координат и времени — в противном случае свойство однородности пространства и времени будет нарушено. Пусть начала координат систем  $S$  и  $S'$  совпадали при  $t = t' = 0$  и в этот момент в общем начале координат произошла изотропная вспышка света. Через время  $dt$  сферический фронт (изотропия трехмерного пространства!) будет описываться в системе  $S$  уравнением сферической поверхности

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0,$$

а в системе  $S'$  — таким же уравнением в штрихованных координатах (равноправие систем!). Абсолютная величина скорости света в обеих системах одна и та же:

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = 0.$$

Из двух последних равенств следует, что обращение в нуль  $ds^2$  приводит к равенству  $ds'^2 = 0$  и наоборот. Поскольку  $ds^2$  и  $ds'^2$  имеют одинаковый порядок малости, это возможно только при линейной связи между ними,  $ds^2 = k ds'^2$ , что не противоречит, разумеется, линейной связи между дифференциалами четырехмерных координат двух систем. Поскольку обе величины являются скалярами в трехмерном пространстве (см. раздел 1.1), коэффициент  $k$  может зависеть только от квадрата трехмерного вектора  $V^2$  — относительной скорости двух ИСО, но не от его направления. Из равноправия систем следует также  $ds'^2 = k ds^2$ , или  $ds^2 = k^2 ds'^2$ , т. е.  $k = \pm 1$ . Но значение  $k = -1$  не может обеспечить равноправия трех ИСО: при  $ds^2 = -ds'^2$  и  $ds'^2 = -ds''^2$  будем иметь  $ds^2 = -ds'^2 = ds''^2$ , что выделяет систему  $S'$ . Поэтому единственная возможность состоит в выборе  $k = +1$ , что приводит к инвариантности малого интервала при преобразовании его в любую инерциальную систему отсчета. Интегрирование позволяет распространить это свойство на конечные интервалы между произвольными событиями 1 и 2:  $s_{12} = s'_{12}$ , т. е.

$$s_{12} = [c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2]^{1/2} = \text{inv}. \quad (3.6)$$

■



**Пример 3.2.** Проанализировать мысленный эксперимент с эйнштейновским «поездом»: пусть наблюдатель  $A$  находится посредине длинного «поезда», движущегося с релятивистской<sup>3</sup> скоростью, а наблюдатель  $B$  стоит на земле близ полотна железной дороги. Приборы, находящиеся в голове и в хвосте поезда на одинаковых расстояниях от  $A$ , испускают две короткие световые вспышки. Эти вспышки достигают обоих наблюдателей одновременно — в тот момент, когда они поравняются друг с другом. Как ответят наблюдатели на вопрос о том, какая вспышка произошла раньше?

**Решение.** Ответ наблюдателя  $A$ : сигналы были испущены из точек, удаленных от меня на равные расстояния, и пришли одновременно. Следовательно, они были испущены одновременно.

Ответ наблюдателя  $B$ : сигналы пришли ко мне одновременно, но в моменты испускания (предшествующие приходу) голова поезда была ко мне ближе, чем хвост. Следовательно, сигнал от хвоста прошел больший путь и был испущен раньше, чем сигнал от головы. ■

**Преобразования Лоренца.** Последний пример показывает, что с учетом конечной скорости распространения сигналов, время и понятие одновременности теряют свой абсолютный характер: промежуток времени  $\Delta t$  между двумя событиями для наблюдателя на земле отличается от промежутка  $\Delta t'$  между теми же событиями для наблюдателя в поезде. Время течет по разному в разных инерциальных системах отсчета, что не согласуется с преобразованиями Галилея (3.1). Их обобщение, учитывающее наличие предельной скорости  $c$ , было найдено<sup>4</sup> Г. Лоренцем в 1904 г.:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (3.7)$$

Это преобразование (которое иногда называют английским словом буст) отвечает случаю, когда соответствующие оси координатных систем  $S$  и  $S'$  параллельны между собой, относительная скорость  $V$  направлена вдоль оси  $Ox$  (рис. 3.1) и начала координатных систем совпадают при  $t = t' = 0$ . Более общие преобразования такого типа будут даны в разделе 4.1.

В этой и последующих главах мы будем часто использовать обозначения

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.8)$$

<sup>3</sup>т.е. со скоростью, сравнимой по величине с предельной скоростью  $c$ .

<sup>4</sup>Вывод преобразований Лоренца см. в решении задачи 3.1 и в разделе 4.1.

Преобразования, обратные (3.7), получаются изменением знака относительной скорости и в обозначениях (3.8) имеют вид

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - \beta x/c). \quad (3.9)$$

Преобразования Лоренца удовлетворяют принципу соответствия — при  $V \ll c$ ,  $\gamma \approx 1$  они переходят в преобразования Галилея (3.1).

**Пример 3.3.** Пусть пространственно-временные координаты  $x$ ,  $ct$  системы отсчета  $S$  откладываются на взаимно перпендикулярных декартовых осях. Построить на этом же чертеже координатные оси  $x'$ ,  $ct'$ . Указать положение осей  $x$ ,  $ct$ , если на прямоугольных осях отложены  $x'$ ,  $ct'$ .

**Решение.** Временной осью системы  $S'$  является прямая  $x' = 0$ . В системе осей  $ct$ ,  $x$  согласно (3.9) эта прямая задается уравнением  $ct = x/\beta$  и составляет угол  $\alpha = \operatorname{arctg}(V/c)$  с осью  $ct$  (рис. 3.2). Ось  $x'$  в  $S'$  задается уравнением  $ct' = 0$ , которое в  $S$  принимает вид  $ct = \beta x$  и представляет собой прямую, составляющую тот же угол  $\alpha$  с осью  $x$ . Новые координатные оси стали косоугольными! (аффинное преобразование, меняющее угол между осями — см. раздел 1.1). Если откладывать  $ct'$ ,  $x'$  на прямоугольных осях, то косоугольными станут оси  $ct$ ,  $x$ , отклонившись на угол  $\alpha$  в другие стороны (рис. 3.3). ■

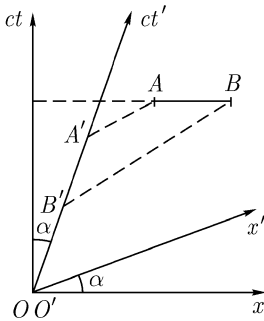


Рис. 3.2

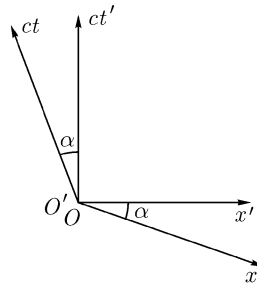


Рис. 3.3

С помощью рисунка (3.2) нетрудно проиллюстрировать и относительность одновременности. События А и В проецируются на временную ось  $ct$  в одну точку АВ и, следовательно, они одновременны в системе  $S$ . Но их проекции на временную ось  $ct'$  системы  $S'$  различны, следовательно, в системе  $S'$  эти события неодновременны, причем событие В происходит

раньше. Однако, если мы попытаемся определить время между событиями  $\Delta t' = A'B'/c$  из рисунка 3.2 с помощью обычных тригонометрических соотношений, мы потерпим неудачу и не получим правильного результата, который следует из преобразований Лоренца (3.9):

$$\Delta t' = \gamma \beta c^{-1}(x_B - x_A). \quad (3.10)$$

Для его получения нужно учесть не только поворот осей, но и изменение масштаба при переходе в другую систему.

**Пример 3.4.** *Время, отсчитываемое по часам, неподвижным относительно некоторого объекта, называется **собственным временем** этого объекта. Связать малый промежуток собственного времени  $d\tau$  с координатным временем  $dt$  в системе, относительно которой объект движется. Показать, что собственное время является инвариантом преобразования Лоренца.*

**Решение.** Пусть объект покоится в системе  $S'$ . В этой системе  $dt' = d\tau$ ,  $dx' = dy' = dz' = 0$ . В системе  $S$  величины  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  — расстояния, проходимые объектом за время  $dt$ . Из инвариантности интервала (3.5) находим

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2(1 - v^2/c^2) dt^2,$$

откуда

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \text{inv}. \quad (3.11)$$

Здесь через  $v(t)$  обозначена скорость инерциальной системы, мгновенно сопутствующей рассматриваемому объекту и, следовательно, совпадающей со скоростью самого объекта. В таком виде формула для интервала собственного времени годится и для неравномерно движущихся объектов. ■

**Пример 3.5.** *Твердый стержень имеет в своей собственной системе длину  $l_0$ . Какую длину стержня измерит наблюдатель, относительно которого стержень движется со скоростью  $v$ ? Каков объем некоторого тела, измеренный наблюдателем, если в системе покоя этого тела объем имеет величину  $\mathcal{V}_0$ ?*

**Решение.** Длина зависит от взаимной ориентации стержня и вектора относительной скорости  $v$ . Если стержень и скорость ориентированы вдоль оси  $x$ , то в системе покоя стержня расстояние между его концами  $x'_B - x'_A = l_0$ . Наблюдатель в системе  $S$  для измерения длины стержня должен сделать зарубки на оси  $x$  против концов стержня одновременно по часам в своей системе отсчета:  $x_B - x_A = l$ ,  $t_B - t_A = 0$ . С помощью

преобразований Лоренца (3.9) получим **лоренцевское сокращение движущегося масштаба**:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.12)$$

Если стержень ориентирован поперек скорости, то  $l = l_0$ , так как согласно (3.9) поперечные масштабы не изменяются. Объем  $\mathcal{V}$  движущегося тела уменьшается только за счет сокращения продольного размера:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.13)$$

■

**Пример 3.6.** Как преобразуется четырехмерный объем  $\Delta\Omega = c\Delta t\mathcal{V}$  при переходе в другую инерциальную систему?

**Решение.** С помощью (3.13) и (3.11) находим

$$\Delta\Omega = c\Delta t\mathcal{V} = c\Delta\tau\mathcal{V}_0 = \text{inv}. \quad (3.14)$$

Четырехмерный объем является инвариантом преобразования Лоренца. ■

**Пример 3.7.** Скорость частицы в системе  $S'$  имеет значение  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$ . Выразить ее скорость  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  в системе  $S$  через  $\mathbf{v}'$  и относительную скорость систем  $\mathbf{V}$ . Может ли скорость  $\mathbf{v}$  по абсолютной величине превысить скорость света  $c$ ?

**Решение.** Записываем формулы (3.7) для дифференциалов,

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{dt'(v'_x + V)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz',$$

$$dt = \frac{dt' + V dx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{dt'(1 + v'_x V/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

и делим три первые равенства почленно на четвертое. Получаем **правило сложения релятивистских скоростей**:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}. \quad (3.15)$$

При  $V \ll c$ ,  $|v'_x| \ll c$  эти формулы переходят в нерелятивистский закон сложения скоростей (3.2)

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z,$$

а при  $v' \rightarrow c$  обеспечивают предельный характер скорости света. Записывая для последнего случая  $v'_x = c \cos \vartheta$ ,  $v'_y{}^2 + v'_z{}^2 = c^2 \sin^2 \vartheta$  и вычисляя из (3.15)  $v^2$ , находим  $v^2 = c^2$ , т.е. добавление к скорости  $v'$  скорости относительного движения  $V$  по релятивистскому закону не изменяет абсолютной величины  $v' = c$ . ■

**Псевдоевклидова геометрия.** Познакомимся теперь более подробно с геометрией четырехмерного пространства-времени Минковского. Отдельные точки в четырехмерном пространстве-времени указывают пространственные координаты и время некоторого «события». Последовательность-кинематических состояний любого тела (т.е. его координаты в разные моменты времени) изображается **мировой линией**.

Мировыми линиями (в отличие от траекторий классической механики) обладают не только движущиеся, но и покоящиеся в данной инерциальной системе тела. Так, мировой линией тела, покоящегося в (пространственной) точке  $x_0$  оси  $x$ , будет прямая  $AB$ , параллельная оси  $ct$  и проходящая через  $x_0$  (рис. 3.4); мировая линия тела, движущегося с постоянной скоростью  $v = \text{const}$  (и проходящего через начало координат при  $t = 0$ ) — прямая  $CD$  ( $\text{tg } \alpha = v/c$ ); мировая линия тела, движущегося с переменной скоростью  $v(t)$  — кривая  $MN$ ; мировая линия светового луча, испущенного в момент  $t = 0$  из начала координат в направлении оси  $x$  — биссектриса координатного угла  $OF$ .

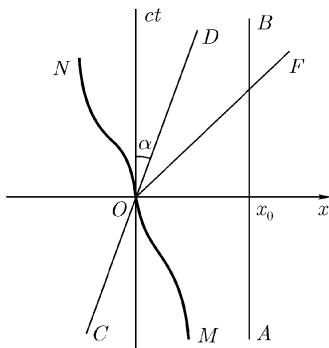


Рис. 3.4

Мы уже нашли выражения (3.4), (3.6) для интервала — величины, выполняющей роль инвариантного расстояния между точками четырехмерного пространства. Из этих выражений следует, что геометрия пространства Минковского неевклидова, в нем несправедлива, в частности, теорема Пифагора. Такая геометрия называется **псевдоевклидовой**. В отличие от геометрии Евклида трехмерного пространства обращение в нуль интервала,  $s_{12} = 0$ , не означает совпадения точек 1 и 2. В зависимости от соотношения между  $c^2(t_1 - t_2)^2$  и  $(r_1 - r_2)^2$  интервалы могут быть действительными и мнимыми. Интервалы, для которых  $s_{12}^2 > 0$ , называются **временеподобными**, а те, для которых  $s_{12}^2 < 0$  — **пространственноподобными**, причем эти свойства имеют место во всех ИСО в силу инвариантности интервала. Интервалы, равные нулю, называются **нулевыми (светоподобными)**.

Характер интервала тесно связан с **причинностью** — он определяет возможность причинной связи событий, происходящих в пространственно-временных точках 1 и 2. Если  $s_{12}^2 > 0$ , то событие 2 может быть причинно связано с событием 1 (и наоборот): из точки 1 можно послать сигнал

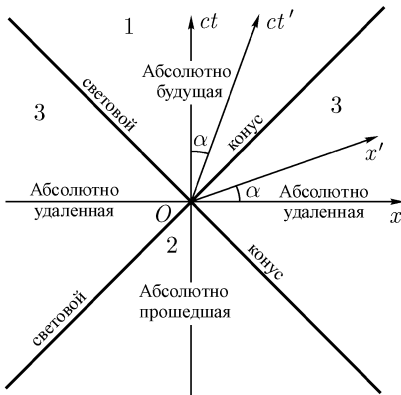


Рис. 3.5

Область 1 — абсолютно будущая; все события, изображаемые точками этой области, в любой ИСО происходят после события, которому соответствует начало координат.

Область 2 — абсолютно прошедшая; события этой области в любой ИСО предшествуют событию начала координат.

Область 3 — абсолютно удаленная; существуют ИСО, в которых события этой области происходят раньше, позже или одновременно с событием  $(0, 0)$ , но не существует таких ИСО, в которых события этой области и  $(0, 0)$  происходили бы в одной точке трехмерного пространства (для областей 1 и 2 такой вариант возможен).

**Решение.** Искомые области изображены на рис. 3.5. Они разделяются биссектрисами координатных углов. В области 1  $t > 0$  и для всех возможных ИСО  $t' > 0$ , так как оси  $ct'$  этих систем могут быть ориентированы только между двумя линиями, которым соответствуют нулевые интервалы (т. е. между линиями пересечения плоскости со световым конусом). Проведя ось  $ct'$  через данную точку и начало координат, найдем по формуле  $V = ct \operatorname{tg} \alpha$  (см. пример 3.3) скорость ИСО, в которой два рассматриваемых события происходят в одной точке трехмерного пространства. Аналогичным свойством обладает область 2. В области 3 приведенная выше формула определяет ИСО, в которой данное событие происходит одновременно с событием в начале координат. ■

со скоростью  $v = r_{12}/(t_2 - t_1) < c$ , который вызовет событие 2. Это возможно и в случае нулевого интервала, но только сигнал должен распространяться с предельной скоростью  $c$ . События, разделенные пространственно-подобным интервалом, не могут быть причинно обусловлены, так как сигналы не могут распространяться со скоростью  $v = r_{12}/(t_2 - t_1) > c$ .

**Пример 3.8.** Пусть координаты  $x, ct$  отложены на прямоугольных декартовых осях в некоторой плоскости. Указать на этой плоскости области 1, 2, 3, обладающие следующими свойствами.

В псевдоевклидовом пространстве следует вводить два сорта координат — контравариантные и ковариантные, и два типа тензорных значков, как уже делалось в разделе 1.1 при рассмотрении аффинных преобразований в трехмерном пространстве. Квадрат интервала (3.4) между близкими точками можно записать в тензорных обозначениях:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.16)$$

где

$$dx^0 = c dt, \quad dx^1 = dx, \quad dx^2 = dy, \quad dx^3 = dz \quad (3.17)$$

дифференциалы контравариантных четырехмерных координат,

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

— метрический тензор. Суммирование здесь и в дальнейшем нужно производить по четырем значениям  $i, k = 0, 1, 2, 3$  совпадающих латинских индексов.

Контравариантный метрический тензор, как и в трехмерном пространстве (см. формулу 1.35в), должен определяться из соотношений

$$g_{ik} g^{kl} = g_i^l = \delta_i^l, \quad (3.19)$$

где  $\delta_i^l$  — четырехмерный символ Кронекера. Легко видеть из (3.18), что контравариантные компоненты  $g^{ik}$  совпадают с соответствующими ковариантными, т. е.  $g^{ik} = g_{ik}$ .

Всякие четыре величины  $A^0, A^1, A^2, A^3$ , которые определены во всех ИСО и преобразуются при переходе из одной системы в другую как координаты и время, т. е. по правилу

$$A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1), \quad A^1 = \gamma(A'^1 + \beta A'^0), \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3, \quad (3.20)$$

образуют контравариантные компоненты четырехмерного вектора (4-вектора)  $A^i, i = 0, 1, 2, 3$ . Трехмерный вектор  $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3)$  называют пространственной, а величину  $A^0$  — временной составляющими 4-вектора  $A^i$ . Ковариантные составляющие этого вектора  $A_i$  определяются по правилу опускания индекса (1.35):

$$A_i = g_{ik} A^k = (A^0, -\mathbf{A}). \quad (3.21)$$

Скалярное произведение двух 4-векторов и квадрат 4-вектора представляют собой инварианты преобразований Лоренца. Они определяются как естественное обобщение формул (1.267):

$$A_i B^i = A^i B_i = g_{ik} A^i B^k = \text{inv}, \quad A_i A^i = g_{ik} A^i A^k = \text{inv}. \quad (3.22)$$

Произвольный 4-вектор, как и интервал, может быть нулевым, или изотропным ( $A_i A^i = 0$ ), времениподобным ( $A_i A^i > 0$ ) и пространственно-подобным ( $A_i A^i < 0$ ). Примерами четырехмерных векторов, кроме 4-радиус-вектора в пространстве Минковского, могут служить 4-скорость  $u^i$  частицы и ее 4-ускорение  $w^i$ :

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \left( \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right), \quad w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2}, \quad (3.23)$$

где  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  — трехмерная скорость частицы,  $d\tau$  — дифференциал собственного времени. Очевидно, что  $u^i$  является 4-вектором, так как  $dx^i/d\tau$  представляет собой отношение 4-вектора  $dx^i$  к скаляру (инварианту)  $d\tau$ . По аналогичной причине  $w^i$  — также 4-вектор.

Фаза плоской монохроматической волны, рассматривавшаяся в разделе 2.3,  $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ , представляет собой релятивистский инвариант (скаляр). Это следует из того, что изменение фазы  $\Delta\varphi/2\pi$  определяет число нулевых значений поля между двумя пространственно-временными точками, которое не может зависеть от выбранной системы отсчета. Но поскольку  $(ct, \mathbf{r})$  образуют четырехмерный радиус-вектор, то частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  плоской волны также образуют волновой 4-вектор

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right), \quad k_i = \left( \frac{\omega}{c}, -\mathbf{k} \right), \quad (3.24)$$

а фазу можно записать как скалярное произведение двух 4-векторов:

$$\varphi = -k_i x^i. \quad (3.25)$$

## Задачи

**3.1\***. Вывести преобразования Лоренца (3.7) на основе постулатов СТО (1)–(4) и доказанной выше (см. формулу (3.6)) инвариантности интервала.

**3.2.** Пусть система  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ . Часы, покоящиеся в  $S'$  в точке  $(x'_0, y'_0, z'_0)$ , в момент  $t'_0$



проходят мимо точки  $(x_0, y_0, z_0)$  в системе  $S$ , где находятся часы, показывающие в этот момент время  $t_0$ . Написать формулы преобразования Лоренца для этого случая.

**3.3.** Система  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $V$ . Доказать, что при сравнении хода часов в системах  $S$  и  $S'$  всегда будут отставать те часы в одной из этих систем отсчета, показания которых последовательно сравниваются с показаниями двух часов в другой системе отсчета. Выразить один промежуток времени через другой. (Показания движущихся часов сравниваются в момент, когда они проходят друг мимо друга.)

**3.4.** Длину стержня, движущегося вдоль своей оси в некоторой системе отсчета, можно находить таким образом: измерять промежуток времени, в течение которого стержень проходит мимо фиксированной точки этой системы, и умножать его на скорость стержня. Показать, что при таком методе измерения получается обычное лоренцево сокращение.

**3.5.** Система  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $V$ . В момент, когда начала координат совпадали, находившиеся там часы обеих систем показывали одно и то же время  $t = t' = 0$ . Какие координаты в каждой из этих систем в дальнейшем будет иметь мировая точка, обладающая тем свойством, что находящиеся в ней часы систем  $S$  и  $S'$  показывают одно и то же время  $t = t'$ ? Определить закон движения этой точки.

**3.6.** Пусть для измерения времени используется периодический процесс отражения светового «зайчика» попеременно от двух зеркал, укрепленных на концах стержня длиной  $l$ . Один период — это время движения «зайчика» от одного зеркала до другого и обратно. Световые часы неподвижны в системе  $S'$  и ориентированы параллельно направлению движения. Пользуясь постулатом о постоянстве скорости света, показать, что интервал собственного времени  $d\tau$  выражается через промежуток времени  $dt$  в системе  $S$  формулой (3.11).

**3.7.** Решить предыдущую задачу для случая, когда световые часы ориентированы перпендикулярно направлению относительной скорости.

**3.8.** «Поезд»  $A'B'$ , длина которого  $l_0 = 8,64 \cdot 10^8$  км в системе, где он покоится, идет со скоростью  $V = 240\,000$  км/сек мимо «платформы», имеющей такую же длину в своей системе покоя. В голове  $B'$  и хвосте  $A'$  «поезда» имеются одинаковые часы, синхронизированные между собой. Такие же часы установлены в начале  $A$  и в конце  $B$  «платформы». В тот момент, когда голова «поезда» поравнялась с началом «платформы», совпадающие часы показывали 12 час 00 мин. Ответить на следующие вопросы: а) можно ли утверждать, что в этот момент в какой-либо системе отсчета все часы также показывают 12 час 00 мин; б) сколько показывают каждые из

часов в момент, когда хвост «поезда» поравнялся с началом «платформы»;  
 в) сколько показывают часы в момент, когда голова «поезда» поравнялась с концом «платформы»?

**3.9.** Какой промежуток времени  $\Delta t$  занял бы по земным часам полет ракеты до звездной системы Проксима–Центавра и обратно (расстояние до нее 4 световых года<sup>5</sup>), если бы он осуществлялся с постоянной скоростью  $v = \sqrt{0,9999}c$ ? Из расчета какой длительности путешествия следовало бы запастись продовольствием и снаряжением? Каков запас кинетической энергии в такой ракете, если ее масса 10 т?

**3.10.** Два масштаба, каждый из которых имеет длину покоя  $l_0$ , равномерно движутся навстречу друг другу параллельно общей оси  $x$ . Наблюдатель, связанный с одним из них, заметил, что между совпадением левых и правых концов масштабов прошло время  $\Delta t$ . Какова относительная скорость  $v$  масштабов? В каком порядке совпадают их концы для наблюдателей, связанных с каждым из масштабов, а также для наблюдателя, относительно которого оба масштаба движутся с одинаковой скоростью в противоположные стороны?

**3.11.** Вывести формулы лоренцева преобразования от системы  $S'$  к системе  $S$  для радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ , не предполагая, что скорость  $\mathbf{V}$  системы  $S'$  относительно  $S$  параллельна оси  $x$ . Результат представить в векторной форме.

УКАЗАНИЕ. Разложить  $\mathbf{r}$  на продольную и поперечную относительно  $\mathbf{V}$  компоненты и воспользоваться преобразованиями Лоренца (3.7).

**3.12.** Записать формулы преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора  $A_i = (A_0, \mathbf{A})$ , не предполагая, что скорость  $\mathbf{V}$  системы  $S'$  относительно  $S$  параллельна оси  $x$ .

**3.13.** Вывести формулы сложения скоростей для случая, когда скорость  $\mathbf{V}$  системы  $S'$  относительно  $S$  имеет произвольное направление. Формулы представить в векторном виде.

**3.14.** Даны три системы отсчета:  $S, S', S''$ .  $S''$  движется относительно  $S'$  со скоростью  $V$ , параллельно оси  $x'$ ,  $S'$  — относительно  $S$  со скоростью  $V$ , параллельной оси  $x$ . Соответствующие оси всех трех систем параллельны. Записать преобразования Лоренца от  $S''$  к  $S$  и получить из них формулу сложения параллельных скоростей.

<sup>5</sup>Световым годом называется расстояние, проходимое светом в вакууме за год

**3.15.** Доказать формулу

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2},$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  — скорости частицы в системах  $S$  и  $S'$ ,  $\mathbf{V}$  — скорость  $S'$  относительно  $S$ .

**3.16.** Доказать соотношение

$$v = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - (\mathbf{v}' \times \mathbf{V})^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2},$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  — скорости частицы в системах  $S$  и  $S'$ ,  $\mathbf{V}$  — скорость  $S'$  относительно  $S$ .

**3.17.** Происходит три последовательных преобразования системы отсчета: 1) переход от системы  $S$  к системе  $S'$ ,двигающейся относительно  $S$  со скоростью  $\mathbf{V}$ , параллельной оси  $x$ ; 2) переход от системы  $S'$  к системе  $S''$ ,двигающейся относительно  $S'$  со скоростью  $\mathbf{v}$ , параллельной оси  $y'$ ; 3) переход от системы  $S''$  к системе  $S'''$ ,двигающейся относительно  $S''$  со скоростью, равной релятивистской сумме скоростей  $(-\mathbf{v})$  и  $(-\mathbf{V})$ .<sup>6</sup> Доказать, что система  $S'''$ , как и следует ожидать, неподвижна относительно  $S$  и  $t''' = t$ , однако  $S'''$  повернута относительно  $S$  на некоторый угол в плоскости  $xy$  (томасовская прецессия). Вычислить угол  $\varphi$  томасовской прецессии.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулами общего вида для преобразования Лоренца (см. задачу 3.11) и сложения скоростей (см. формулу (3.15)), записав эти формулы в проекциях на декартовы оси.

**3.18.** Два масштаба, каждый из которых имеет в своей системе покоя длину  $l_0$ , движутся навстречу друг другу с равными скоростями  $v$  относительно некоторой системы отсчета. Какова длина  $l$  каждого из масштабов, измеренная в системе отсчета, связанной с другим масштабом?

**3.19.** Два пучка электронов летят навстречу друг другу со скоростями  $v = 0,9c$  относительно лабораторной системы координат. Какова относительная скорость  $V$  электронов: а) с точки зрения наблюдателя в лаборатории; б) с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с одним из пучков электронов?

<sup>6</sup>Обратим внимание на то, что результирующая скорость зависит от того порядка, в котором производится сложение скоростей

**3.20.** Эффекты, возникающие при столкновении двух элементарных частиц, не зависят от равномерного движения этих частиц как целого; эти эффекты определяются лишь их относительной скоростью. Одну и ту же относительную скорость можно сообщить сталкивающимся частицам двумя способами (предполагается для простоты, что частицы обладают одинаковой массой  $m$ ): а) один ускоритель разгоняет частицы до энергии  $\mathcal{E}$ , затем быстрые частицы ударяются о неподвижную мишень из тех же частиц; б) два одинаковых ускорителя расположены так, чтобы создаваемые ими пучки частиц были направлены навстречу друг другу; каждый из ускорителей при этом должен разгонять частицы до энергии  $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}$ .

Сравнить между собой значения  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}_0$ . Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай.

**3.21.** Найти формулы преобразования ускорения  $\dot{v}$  для случая, когда система  $S'$  движется относительно системы  $S$  с произвольно направленной скоростью  $\mathbf{V}$ . Представить эти формулы преобразования в векторном виде.

**3.22.** Выразить компоненты четырехмерного ускорения  $w_i$  через обычное ускорение  $\dot{v}$  и скорость  $v$  частицы. Найти  $w_i^2$ . Пространственноподобно или времениподобно четырехмерное ускорение?

**3.23.** Выразить ускорение  $\dot{v}$  частицы в мгновенно сопутствующей ей инерциальной системе через ее ускорение  $\dot{v}$  в лабораторной системе. Рассмотреть случаи, когда скорость  $\mathbf{V}$  частицы меняется только по величине или только по направлению.

**3.24.** Релятивистская частица совершает «равноускоренное» одномерное движение (ускорение  $\dot{v} \equiv w$  постоянно в собственной системе отсчета). Найти зависимость скорости  $v(t)$  и координаты  $x(t)$  частицы от времени  $t$  в лабораторной системе отсчета, если начальная скорость  $v_0$ , а начальная координата  $x_0$ . Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат предыдущей задачи.

**3.25.** Ракета, рассматривавшаяся в задаче 3.9, разгоняется от состояния покоя до скорости  $v = \sqrt{0,9999}c$ . Ускорение ракеты составляет  $|\dot{v}| = 20 \text{ м/сек}^2$  в системе, мгновенно сопутствующей ракете. Сколько времени продлится разгон ракеты по часам в неподвижной системе отсчета и по часам в ракете?

УКАЗАНИЕ. Влияние сил инерции на ход часов в ракете не учитывать<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Это означает, что предлагается вычислить сумму собственных времен  $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$  в последовательности мгновенно сопутствующих ракете инерциальных систем отсчета, выражаемую интегралом  $\int d\tau$ .

**3.26.** Частица движется со скоростью  $v$  и ускорением  $\dot{v}$ , так что за малый промежуток времени  $\delta t$  ее скорость в лабораторной системе  $S$  меняется на величину  $\delta v = \dot{v} \delta t$ . Пусть  $S'$  — инерциальная система, мгновенно сопутствующая частице в момент  $t$ , а  $S''$  — такая же система для момента времени  $t + \delta t$ . Пользуясь преобразованиями Лоренца, показать с точностью до членов, линейных по  $\delta v$ , что координаты и время в этих системах связаны формулами:

$$(1) \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \Delta\varphi \times \mathbf{r}' - t' \Delta\mathbf{v}, \quad t'' = t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \Delta\mathbf{v}}{c^2},$$

где

$$(2) \quad \Delta\mathbf{v} = \gamma \left[ \delta\mathbf{v} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right], \quad \Delta\varphi = (\gamma - 1) \frac{\delta\mathbf{v} \times \mathbf{v}}{v^2}.$$

Какой геометрический смысл имеют преобразования (1)? Какой вид приобретают формулы (2) при  $v \ll c$  в первом исчезающем приближении?

УКАЗАНИЕ. Удобно рассмотреть цепочку преобразований  $S'' \rightarrow S \rightarrow S'$  с помощью формул, приведенных в ответе к задаче 3.11.

**3.27.** Частица имеет скорости  $v$  и  $v'$  в ИСО  $S$  и  $S'$  соответственно. Найти связь между углами  $\vartheta$  и  $\vartheta'$ , которые эти скорости составляют с одинаково направленными осями  $x$  и  $x'$ . Относительная скорость систем  $V$ .

**3.28.** Относительно системы  $S$  движутся система  $S'$  со скоростью  $V$  и два тела со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Каков угол  $\alpha$  между скоростями этих тел при наблюдении в системе  $S$  и в системе  $S'$ ?

УКАЗАНИЕ. Полезно использовать результаты задач 3.12 и 3.14.

**3.29.** Что происходит с углом между скоростями двух тел, рассмотренных в предыдущей задаче, когда скорость системы  $S'$  относительно  $S$  стремится к  $c$ ?

**3.30.** Пучок света распространяется в системе  $S'$  под углом  $\vartheta'$  к оси  $x'$ . Какой угол  $\vartheta$  с осью  $x$  он составляет в системе  $S$ ?

**3.31.** В некоторый момент времени направление луча света от звезды составляет угол  $\vartheta$  с орбитальной скоростью  $v$  Земли (в системе, связанной с Солнцем). Найти изменение направления от Земли на звезду за полгода (абберация света), не делая приближений, связанных с малостью  $v/c$ .

**3.32.** Найти форму видимой кривой, описываемой звездой на небосводе вследствие годичной абберации. Полярные координаты звезды в системе,

связанной с Солнцем,  $\vartheta$ ,  $\alpha$  (полярная ось проведена перпендикулярно плоскости земной орбиты). Орбитальная скорость Земли  $v \ll c$ .

**3.33.** Пучок света в некоторой системе отсчета образует телесный угол  $d\Omega$ . Как изменится этот угол при переходе к другой инерциальной системе отсчета?

**3.34.** Некоторый источник испускает свет изотропно во все стороны в своей системе покоя, так что внутри телесного угла  $d\Omega_0$  распространяется доля  $dN = d\Omega_0/4\pi$  от полного излучения. Найти функцию распределения излучаемого света по углам  $f(\vartheta) = dN/d\Omega$  в системе, относительно которой источник движется со скоростью  $v$ . Построить полярные диаграммы излучения для разных значений гамма-фактора  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Подробно исследовать ультрарелятивистский случай  $\gamma \gg 1$ . Какова характерная угловая ширина излучения движущегося источника в этом случае?

**3.35\*.** Монохроматический источник генерирует в своей системе отсчета электромагнитную волну с частотой  $\omega_0$ . Пользуясь законом преобразования (3.24) волнового 4-вектора, показать, что наблюдатель регистрирует частоту волны

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/c) \cos \theta},$$

где  $V$  — относительная скорость источника и наблюдателя,  $\theta$  — угол между направлением луча и относительной скоростью в системе наблюдателя (**эфф-фект Доплера**). Выразить также волновой вектор  $k$  в системе наблюдателя через величины  $\omega_0$ ,  $k_0$  в системе источника.

**3.36.** Найти частоту  $\omega$  световой волны, наблюдаемую при поперечном эффекте Доплера (направление распространения света перпендикулярно направлению движения источника в системе, связанной с приемником света). Каково направление распространения рассматриваемой волны в системе, связанной с источником?

**3.37.** Длина волны света, излучаемого некоторым источником, в той системе, в которой источник покоится, равна  $\lambda_0$ . Какую длину волны  $\lambda$  регистрируют: а) наблюдатель, приближающийся со скоростью  $V$  к источнику, и б) наблюдатель, удаляющийся с такой же скоростью от источника?

**3.38.** Источник, испускающий свет частоты  $\omega_0$  изотропно во все стороны в своей системе отсчета, движется равномерно и прямолинейно относительно наблюдателя со скоростью  $V$ , проходя от него в момент наибольшего сближения на прицельном расстоянии  $d$ . Число фотонов, излучаемых в единицу времени в единицу телесного угла (интенсивность потока фотонов), равно  $J_0$  в системе покоя источника. Найти зависимость частоты  $\omega$

и интенсивности  $J$  потока фотонов, регистрируемого наблюдателем, от угла между направлением луча и скорости  $V$ . При каких углах  $\theta = \theta_0$  регистрируемые частота и интенсивность потока фотонов совпадут с  $\omega_0$  и  $J_0$ ? Какова доля фотонов регистрируется наблюдателем в интервалах  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  и  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$ ? Начертить графики зависимостей  $\omega(\theta)$  и  $J(\theta)$  для  $V/c = 1/3$  и  $V/c = 4/5$ . Какой характер имеют эти зависимости при  $V/c \rightarrow 1$ ?

**3.39.** Найти угловое распределение силы света  $I$  (световая энергия, излучаемая в единицу времени в единицу телесного угла), а также полный световой поток от источника света, рассмотренного в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. Каждый фотон обладает энергией  $\hbar\omega$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка.

**3.40.** Зеркало движется нормально к собственной плоскости со скоростью  $V$ . Найти закон отражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при  $V = 0$ ), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай  $V \rightarrow c$ .

**3.41.** Решить предыдущую задачу для случая, когда зеркало перемещается поступательно вдоль собственной плоскости.

**3.42.** Непрозрачный куб с ребром  $l_0$  в своей системе покоя движется относительно наблюдателя со скоростью  $V$  (рис. 3.6). Наблюдатель фотографирует его в момент, когда лучи света, испускаемые поверхностью куба, приходят в объектив фотоаппарата под прямым углом к направлению движения (в системе фотоаппарата). Куб виден под малым телесным углом, вследствие чего лучи, приходящие от разных точек куба, можно считать параллельными.

Какой вид будет иметь изображение на фотопластинке? Составить чертёж изображения, нанести на него те вершины и ребра куба, которые будут сфотографированы. Вычислить их относительные длины. Изображению какого неподвижного предмета эквивалентна полученная фотография? Какой вид приняло бы изображение движущегося куба, если бы были справедливы преобразования Галилея?

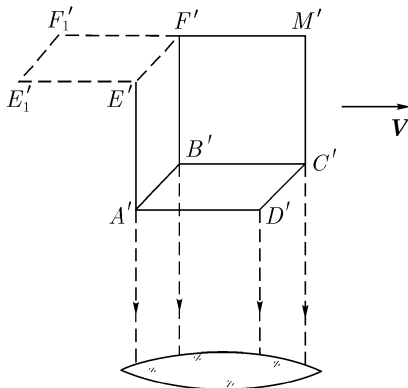


Рис. 3.6

**3.43.** Тонкий стержень  $M'N'$  неподвижен в системе  $S'$ , имеет в ней длину  $l_0$  и ориентирован так, как показано на рис. 3.7. Система  $S'$  движется со скоростью  $\mathbf{V} \parallel Ox$  относительно фотопластинки  $AB$ , покоящейся в системе  $S$ . В момент прохождения стержня мимо фотопластинки происходит короткая световая вспышка, при которой лучи света падают нормально к плоскости  $xz$  фотопластинки.

а) Какова длина  $l$  изображения на фотопластинке? Может ли она стать равной или превысить  $l_0$ ?

б) При каком угле наклона  $\alpha'$  сфотографируется только торец стержня?

в) Каков угол наклона  $\alpha$  стержня к оси  $Ox$ ?

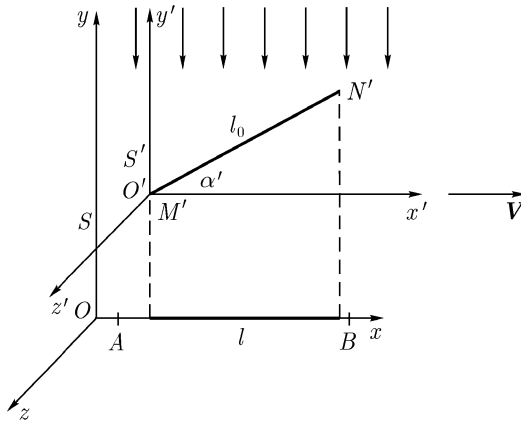


Рис. 3.7

**3.44.** Шар, движущийся со скоростью  $V$ , фотографируется неподвижным наблюдателем под малым телесным углом. Лучи света от шара падают параллельным пучком на объектив фотоаппарата, составляя прямой угол с направлением скорости  $V$ . Какую форму будет иметь изображение на фотопластинке? Какая часть поверхности шара будет сфотографирована?

УКАЗАНИЕ. Представить шар в виде совокупности тонких дисков, движущихся параллельно своим плоскостям, и построить изображение каждого диска.

**3.45.** Пусть движущийся непрозрачный куб фотографируется неподвижным наблюдателем в момент, когда лучи, приходящие от куба, составляют произвольный угол  $\alpha$  с направлением скорости  $V$  куба (в системе



наблюдателя). Телесный угол, под которым виден куб, мал, вследствие чего лучи приходят параллельным пучком и падают на фотопластинку нормально к ее поверхности (рис. 3.8). Показать, что фотография должна совпадать с фотографией неподвижного, но повернутого на некоторый угол куба. Найти угол поворота изображения при разных значениях  $V$  и фиксированном  $\alpha$ . При каком значении  $V$  будет сфотографирована одна грань  $A'B'$ ? одна грань  $B'C'$ ?

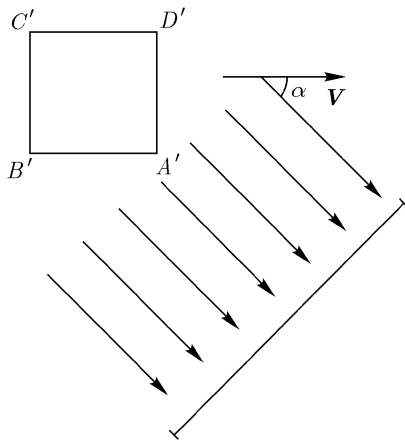


Рис. 3.8

**3.46\*.** Космический корабль движется равномерно вдоль прямой, соединяющей его с наблюдателем. Находясь на заданных расстояниях  $l_1$  и  $l_2 < l_1$  от наблюдателя, корабль испускает две короткие световые вспышки, которые регистрируются наблюдателем по его часам в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . С какой скоростью  $V$  корабль приближается к наблюдателю и в какой момент  $t_*$  он прибывает? Как связана «видимая» скорость корабля с его истинной скоростью в системе наблюдателя?

УКАЗАНИЕ. Под «видимой» или «кажущейся» скоростью следует понимать отношение пройденного пути  $l_1 - l_2$  к промежутку времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , который зарегистрировал наблюдатель. Именно таким образом определялась бы скорость в классической механике, в которой  $v \ll c$ .

**3.47\*.** Космический корабль приближается к наблюдателю с известной скоростью  $V$ . Для определения длины космического корабля наблю-

датель посылает два коротких световых импульса, которые отражаются от зеркал, установленных в голове и хвосте корабля, и возвращаются к наблюдателю одновременно по его часам. Как на основе такого мысленного эксперимента найти длины корабля: а) «кажущуюся»  $a_*$ , определяемую как расстояние между положениями зеркал, отраженные импульсы от которых пришли к наблюдателю одновременно; б) длину  $a$  в системе наблюдателя; в) длину  $a_0$  в собственной системе корабля, в которой он неподвижен. Какими окажутся искомые длины, если корабль удаляется от наблюдателя?

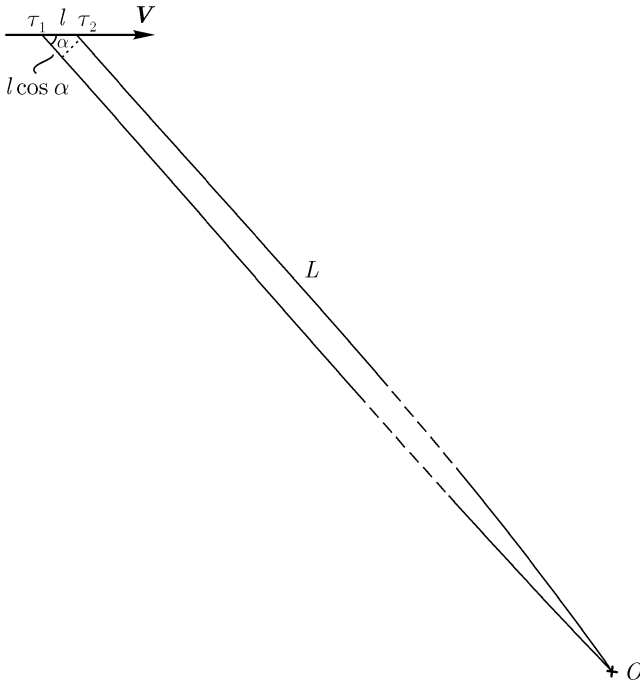


Рис. 3.9

**3.48\***. Космический корабль движется со скоростью  $V = \text{const}$  относительно наблюдателя, который находится в стороне на большом расстоянии от его траектории (рис. 3.9). Вычислить «кажущуюся» (в том смысле, в каком это понятие использовалось в задаче 3.46) скорость корабля с помощью световых сигналов. Найти проекции этой скорости на луч, направленный

ный к наблюдателю, и на плоскость, перпендикулярную лучу. При каких условиях «кажущаяся» скорость оказывается сверхсветовой? Рассмотреть, в частности, случай, когда релятивистский фактор корабля велик,  $\gamma \gg 1$ , а угол  $\alpha$  мал.

**3.49.** Ввести волновой 4-вектор, описывающий распространение плоской монохроматической волны в движущейся со скоростью  $V$  среде с показателем преломления  $n$  (фазовая скорость волны в неподвижной диэлектрической среде  $v' = c/n$ ). Найти формулы преобразования частоты, фазовой скорости и угла между волновым вектором и относительной скоростью.

**3.50.** Плоская волна распространяется в движущейся со скоростью  $V$  среде в направлении перемещения среды. Длина волны в вакууме  $\lambda$ . Найти скорость  $v$  волны относительно лабораторной системы (**опыт Физо**). Показатель преломления  $n$  определяется в системе  $S'$ , связанной со средой, и зависит от длины волны  $\lambda'$  в этой системе. Вычисления проводить с точностью до первого порядка по  $V/c$ .

Рекомендуемая литература: [Эйнштейн (1905)], [Болотовский (1990)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Мандельштам (1955)], [Меллер (1975)], [Фок (1955)], [Угаров (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Лайтман и др. (1979)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Дюге (1973)], [Пановский и Филипс (1963)], [Принцип относительности (1973)], [Болотовский (1985)], [Толмен (1974)], [Борн (1977)], [Вайскопф (1964)], [Тейлор и Уилер (1971)], [Толмен (1974)], [Гинзбург (1979)], [Минковский (1959)], [Эйнштейн (1955)].

## 3.2. Кинематика релятивистских частиц

**Энергия и импульс.** . Как известно из нерелятивистской классической механики, наиболее компактная и простая форма записи законов движения (в отсутствие макроскопических диссипативных сил) достигается на основе вариационного принципа и имеет вид

$$\delta S = 0. \quad (3.26)$$

Здесь

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L dt \quad (3.27)$$

— действие рассматриваемой механической системы,  $L$  — ее **функция Лагранжа**. В состояниях (1) и (2) задаются координаты частиц и моменты времени. При движении механической системы по физической (истинной)

траектории действие принимает стационарное значение, что и выражается в виде равенства нулю его первой вариации (3.26). Для свободной нерелятивистской частицы функция Лагранжа совпадает с ее кинетической энергией, выраженной через скорость:

$$L = \frac{mv^2}{2}, \quad (3.28)$$

где  $v$  — скорость,  $m > 0$  — положительная постоянная, инертная масса частицы. Она определяется в нерелятивистской классической механике как коэффициент пропорциональности между силой  $\mathbf{F}$  и ускорением  $\dot{v}$ , которое приобретает частица под действием этой силы:

$$\dot{v} = \frac{1}{m} \mathbf{F}.$$

В релятивистской механике вариационный подход облегчает формулировку релятивистски инвариантных уравнений, позволяющих описать движение в любой ИСО. Кроме того, вариационный принцип дает возможность описания электромагнитного и других классических и квантовых полей. Поэтому мы положим его в основу изложения релятивистской механики и классической теории поля.

При определении вида действия для свободной релятивистской частицы используем два общезначимых принципа: а) релятивистскую инвариантность действия, обеспечивающую одинаковость законов механики во всех ИСО, т. е. принцип относительности; б) принцип соответствия — при скоростях  $v \ll c$  из релятивистского действия должны следовать нерелятивистские формулы (3.27) и (3.28).

Принцип релятивистской инвариантности в совокупности со свойствами однородности и изотропии 4-пространства в ИСО позволяет выразить действие свободной частицы через единственный инвариант — длину мировой линии частицы между точками 1 и 2 четырехмерного пространства:

$$S = \alpha \int_{(1)}^{(2)} ds. \quad (3.29)$$

Величина и знак инвариантной постоянной  $\alpha$  определяются из принципа соответствия. Пользуясь формулой (3.11), записываем (3.29) в виде интеграла по времени в лабораторной системе:

$$S = \alpha c \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt. \quad (3.30)$$

Отсюда определяется функция Лагранжа. В нерелятивистском пределе  $v \ll c$  имеем

$$L = \alpha c \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (3.31)$$

Последнее равенство получено при подстановке  $\alpha = -mc$  и обеспечивает эквивалентность двух выражений (3.28) и (3.31) для функции Лагранжа в нерелятивистском пределе, так как в классической механике энергия системы определена с точностью до постоянной, а функция Лагранжа — с еще большим произволом.

Для свободной релятивистской частицы функция Лагранжа согласно (3.30) имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.32)$$

Подчеркнем, что входящая во все предыдущие формулы масса  $m$  — инвариантная величина, одинаковая во всех ИСО. В противном случае релятивистская инвариантность теории нарушится.

**Пример 3.9.** С помощью функции Лагранжа (3.32) вычислить энергию  $\mathcal{E}$  и импульс  $\mathbf{p}$  релятивистской частицы как функции ее скорости.

**Решение.** Пользуясь формулами

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \quad \mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L,$$

известными из механики, находим

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.33)$$

■

Импульс релятивистской частицы при  $v \ll c$  превращается в хорошо известное выражение  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  ньютоновской механики. Энергия же в этом пределе,

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad (3.34)$$

кроме нерелятивистского слагаемого — кинетической энергии  $mv^2/2$  — содержит еще постоянную

$$\mathcal{E}_0 = mc^2, \quad (3.35)$$

которая называется **энергией покоя** частицы. Эта постоянная, в отличие от произвольного слагаемого в потенциальной энергии нерелятивистской системы, наблюдаема и может превращаться частично или полностью в другие формы энергии. В частности, энергия, получаемая при сгорании химического или ядерного топлива, черпается из его энергии покоя. Поскольку энергия (3.33) включает в себя энергию покоя, ее называют **полной энергией**. Полная энергия в указанном смысле отличается от суммы кинетической и потенциальной энергии  $E = T + U$  в нерелятивистской механике, которую тоже называют полной энергией. **Кинетическая энергия** частицы  $T$  отличается от ее полной энергии на величину энергии покоя:

$$T = \mathcal{E} - mc^2. \quad (3.36)$$

Из выражений (3.33) получается полезная связь между полной энергией, импульсом и скоростью:

$$\mathcal{E} \mathbf{v} = c^2 \mathbf{p}. \quad (3.37)$$

**Пример 3.10.** Вывести уравнение движения релятивистской частицы путем варьирования действия (3.29) (где  $\alpha = -mc$ ), сохраняя на всех этапах вычислений ковариантную форму записи, т. е. выражая все величины через 4-векторы и 4-инварианты. После варьирования 4-координат перейти к интегрированию по инвариантному параметру, в качестве которого удобно выбрать собственное время  $\tau$ .

**Решение.** Записав (3.29) в форме

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{dx^k dx_k},$$

получаем

$$\delta S = -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta(dx^k dx_k)}{2 ds} = -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{dx^k}{ds} \delta dx_k = -m \int_{(1)}^{(2)} u^k d\delta x_k,$$

так как  $c dx^k/ds = u^k$  — 4-скорость, а операции дифференцирования и варьирования перестановочны. Интегрируя последнее выражение по частям, имеем

$$\delta S = -m u^k \delta x_k \Big|_{(1)}^{(2)} + m \int_{(1)}^{(2)} \delta x_k du^k.$$

Поскольку 4-координаты точек 1 и 2 фиксированы,  $\delta x_k = 0$  в этих точках. Записывая  $du^k = (du^k/d\tau) d\tau$ , получаем

$$\delta S = m \int_{(1)}^{(2)} \frac{du^k}{d\tau} \delta x_k d\tau = 0.$$

Ввиду произвольности и независимости  $\delta x_k$  отсюда следует уравнение движения

$$m \frac{du^k}{d\tau} = 0. \quad (3.38)$$

■

Последнее уравнение означает равенство нулю 4-ускорения у свободной частицы — совершенно естественный и даже тривиальный результат. Но форма его записи позволяет дать весьма полезную релятивистскую интерпретацию энергии и импульсу частицы. Четырехвектор

$$p^k = mu^k = \left( \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (3.39)$$

называется **четырёхмерным импульсом** частицы. Его пространственная часть совпадает с трёхмерным импульсом (3.33), а временная компонента равна  $\mathcal{E}/c$ :

$$p^k = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}). \quad (3.40)$$

Поскольку квадрат 4-вектора — инвариант, то

$$p^k p_k = \left( \frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - p^2 = \left( \frac{\mathcal{E}'}{c} \right)^2 - p'^2.$$

Пусть в штрихованной системе частица покоится, т. е.  $p' = 0$ ,  $\mathcal{E}' = mc^2$ . Из предыдущего равенства получаем связь между энергией и импульсом:

$$p^k p_k = \left( \frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - p^2 = (mc)^2 \quad \text{или} \quad \mathcal{E} = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}. \quad (3.41)$$

Здесь выбран знак плюс перед корнем, чтобы получить правильный релятивистский предел. Объединение энергии и импульса частицы в единый 4-вектор позволяет легко преобразовывать их в любые ИСО. Преобразование осуществляется по правилам (3.20).

Полученные выше формулы допускают движение частиц с предельной скоростью<sup>8</sup>  $v = c$ , но лишь в том случае, если их масса  $m = 0$ . Это вытекает из соотношений (3.37) и (3.41), которые дают для таких частиц

$$\mathcal{E} = cp. \quad (3.42)$$

Такая же связь между энергией и импульсом будет приближенно справедлива для любой **ультрарелятивистской** частицы, имеющей энергию  $\mathcal{E} \gg mc^2$ . Отношение  $\mathcal{E}/mc^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \gamma$  называют **релятивистским фактором** (лоренц-фактором).

Нулевую массу имеют кванты электромагнитного поля — фотоны (фотоны высоких энергий называют гамма-квантами), а также, возможно, нейтрино и некоторые другие гипотетические (пока не обнаруженные экспериментально) частицы. Энергия и импульс фотонов в вакууме связаны с их частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  квантовыми формулами (см. главу 6)

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k, \quad (3.43)$$

где  $\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34}$  Дж·с  $\approx 1,05 \times 10^{-27}$  эрг·с — **постоянная Планка**.

**Кинематические задачи.** Полезную и разнообразную информацию о процессах столкновений и распадов частиц можно получить только на основе законов сохранения энергии и импульса, не задаваясь явным видом взаимодействия между частицами. Энергия и импульс замкнутой (не обменивающейся с внешними полями или телами) системы частиц представляют собой интегралы движения. Связь этого фундаментального факта с симметрией пространства-времени будет установлена в разделе 4.2.

Общая кинематическая задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется несколько частиц  $a, b, \dots$  с четырехимпульсами  $p_a^i, p_b^i, \dots$ , находящихся на значительных расстояниях друг от друга и потому не взаимодействующих. При движении частицы сближаются и между ними происходит взаимодействие. Характер взаимодействия при решении кинематических задач не играет роли, требуется лишь, чтобы взаимодействие выключалось при последующем разлете частиц. Взаимодействие может вызывать упругие столкновения, при которых сами частицы и их внутренние состояния остаются неизменными, либо распады и неупругие столкновения, когда могут изменяться массы частиц, их внутренние состояния, появляться новые частицы. Этот процесс взаимодействия можно

<sup>8</sup>В научной литературе обсуждалась гипотеза о существовании частиц (таххионов), которые движутся со скоростями, превышающими предельную скорость  $c$ . В экспериментах такие частицы не обнаружены. С их гипотетическими свойствами можно познакомиться по обзорам [Барашенков (1974)], [Фейнберг (1974)].



записать в виде

$$a + b + \dots \rightarrow m + n + \dots$$

Считая, что в конечном состоянии частицы  $m, n, \dots$  находятся опять на значительных расстояниях, имеют 4-импульсы  $p_m^i, p_n^i, \dots$  и не взаимодействуют, мы можем записать закон сохранения 4-импульса всей системы в виде равенства

$$p_a^i + p_b^i + \dots = p_m^i + p_n^i + \dots, \quad (3.44)$$

которое выполняется в любой ИСО. Это равенство является основой для всех кинематических расчетов. Следует также постоянно иметь в виду, что квадрат любого 4-импульса есть инвариант и, следовательно, имеет одно и то же значение во всех ИСО. Наиболее удобными при кинематических расчетах являются лабораторная система отсчета  $S$  (Л-система) и **система центра инерции**  $S'$  (Ц-система). Последняя определяется как такая система, в которой полный трехмерный импульс частиц  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b + \dots$  равен нулю.

Как следует из (3.44), сохраняется полная энергия и полный трехмерный импульс, но отнюдь не полная масса, понимаемая как сумма масс отдельных частиц. При неупругом столкновении суммы масс до столкновения и после него как правило неодинаковы:

$$\Delta M = m_a + m_b + \dots - (m_n + m_k + \dots) \neq 0. \quad (3.45)$$

Величина  $Q = c^2 \Delta M$  называется **энергетическим выходом реакции**, а  $\Delta M$  — **дефектом массы**. Дефект массы может достигать значения полной массы частиц, вступающих в реакцию. Примером таких неупругих столкновений служит аннигиляция электронно-позитронной или мюонной пары с испусканием гамма-квантов:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2, \quad \mu^+ + \mu^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2.$$

Поскольку гамма-кванты не имеют массы, в этих случаях  $\Delta M = 2m_e$  и  $\Delta M = 2m_\mu$ . В нерелятивистских процессах (например, в химических реакциях) масса тоже, строго говоря, не сохраняется. Но дефект массы при этом составляет малую долю суммарной массы участвующих в реакции веществ (оценки см. в задаче 3.88). Поэтому закон сохранения массы при химических реакциях обычно рассматривают как точный закон природы.

Следует иметь в виду, что понятие дефекта массы имеет достаточно строгий смысл только в нерелятивистском пределе, когда величина  $\Delta M$  мала по сравнению с  $m_a + m_b + \dots$ . В релятивистском случае масса системы взаимодействующих частиц, аналогичная по смыслу массе отдельной

частицы, должна определяться как инвариантная величина

$$M = [\mathcal{E}^2/c^4 - P^2/c^2]^{1/2} = \left[ \left( \sum_a \frac{\mathcal{E}_a}{c^2} \right)^2 - \left( \sum_a \frac{\mathbf{p}_a}{c} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.46)$$

т. е. через полную энергию  $\mathcal{E}$  и полный трехмерный импульс  $\mathbf{P}$  системы, которые являются аддитивными величинами и выражаются в виде сумм энергий и импульсов всех частиц. Определенная таким образом масса одинакова до и после любого процесса взаимодействия частиц, поскольку  $\mathcal{E}$  и  $\mathbf{P}$  по отдельности сохраняются. Но она неаддитивна и зависит от углов между импульсами частиц. Лишь в Ц-системе, в которой  $\mathbf{P} = 0$ , она вновь становится аддитивной величиной и выражается через полные энергии частиц:  $M = \sum_a \mathcal{E}_a/c^2$ . В этой ИСО, в которой система частиц как целое неподвижна ( $\mathbf{P} = 0$ ), связь между массой и полной энергией приобретает вид (3.35), аналогичный энергии покоя отдельной частицы:

$$\mathcal{E} = Mc^2. \quad (3.47)$$

Реакции, идущие по схеме

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (3.48)$$

т. е. такие, при которых две частицы превращаются в две другие частицы, называются двухчастичными (частным случаем двухчастичной реакции является упругое рассеяние двух частиц). Кинематику двухчастичных реакций удобно описывать с помощью **инвариантных переменных**  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , которые выражаются через 4-импульсы частиц, участвующих в реакции:

$$s = (p_a + p_b)_i (p_a + p_b)^i, \quad t = (p_a - p_c)_i (p_a - p_c)^i, \quad u = (p_a - p_d)_i (p_a - p_d)^i. \quad (3.49)$$

Любую из величин  $s$ ,  $t$ ,  $u$  можно выразить через две другие с помощью соотношения<sup>9</sup>

$$s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)c^2. \quad (3.50)$$

Наглядное представление о кинематике двухчастичных реакций дает кинематическая плоскость, на которой откладываются значения переменных  $s$ ,  $t$ ,  $u$ . Законы сохранения энергии и импульса ограничивают на кинематической плоскости область значений параметров, возможную (физическую) для данной реакции.

<sup>9</sup>В качестве двух независимых величин можно выбрать, например,  $s$  и  $t$ . Все другие величины (энергии и углы рассеяния частиц в лабораторной системе и системе центра инерции) выражаются через них — см. задачи 3.?, 3.?

Многие формулы релятивистской кинематики приобретают более простой вид, если пользоваться системой единиц, в которой скорость света  $c = 1$ . При этом масса, энергия и импульс измеряются в одинаковых единицах, например, в МэВ ( $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ} = 10^{-3} \text{ ГэВ} = 1,602 \times 10^{-6} \text{ эрг}$ ). В некоторых задачах этого раздела используется такая система единиц (что всегда оговаривается). В ряде случаев массы элементарных частиц измеряют в единицах массы электрона  $m_e$  (т. е. используют систему, в которой  $m_e = 1$ ).

Таблица 3.1. Массы некоторых элементарных частиц

Частица	Масса		Частица	Масса	
	в единицах $m_e$	в МэВ		в единицах $m_e$	в МэВ
ФОТОН $\gamma$	0	0	АДРОНЫ		
ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ БОЗОНЫ			Мезоны		
$W^\pm$	$1,59 \times 10^5$	$8,10 \times 10^4$	$\pi^\pm$	273	139,6
$Z$	$1,81 \times 10^5$	$9,24 \times 10^4$	$\pi^0$	264	135,0
ЛЕПТОНЫ			$K^\pm$	965,9	493,6
$e^\pm$	1	0,511	$K^0, \bar{K}^0$	974,0	497,7
$\nu_e, \bar{\nu}_e$	0	0	Барионы		
$\mu^\pm$	207	105,7	$p, \bar{p}$	1836	938,2
$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	$< 0,5$	$< 0,25$	$n, \bar{n}$	1839	939,5
$\tau^\pm$	3491,4	1784,1	$\Lambda, \bar{\Lambda}$	2183,2	1115,6
$\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$	$< 68,5$	$< 35$	$\Omega^\pm$	3272,8	1672,4

Таблица 3.2. Энергии связи атомных ядер

Изотопы	${}^2\text{H}_1$	${}^4\text{He}_2$	${}^7\text{Li}_3$
$B$ , МэВ	2,23	28,11	38,96

В таблице 3.1 приведены для справок массы ряда элементарных частиц и их принятые обозначения. Черточками сверху обозначены символы античастиц, которые могут отличаться от частиц не только знаком электрического заряда, но и другими квантовыми числами. Но массы частиц и античастиц одинаковы. Среди приведенных в таблице частиц фотон  $\gamma$ , бозон  $Z$ , все типы нейтрино  $\nu$ , мезоны  $\pi^0$ ,  $K^0$ , нейтрон  $n$  и гиперон  $\Lambda$  электронейтральны, остальные частицы имеют электрические заряды, равные по абсолютной величине элементарному заряду. Заряженные лептоны имеют имена электрон (позитрон), мюон, таон. Барионы протон ( $p$ ) и нейтрон ( $n$ ) называются нуклонами (ядерными частицами).

В таблице 3.2 приведены значения энергий связи  $B$  некоторых атомных ядер. Верхний индекс указывает число нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре. Нижний индекс обозначает число протонов и заряд ядра в единицах элементарного заряда. Под энергией связи понимается величина

$$B = \Delta Mc^2 = \sum \mathcal{E}_{0n} - \mathcal{E}_0, \quad (3.51)$$

где  $\mathcal{E}_{0n}$  — энергия покоя свободного нуклона,  $\mathcal{E}_0$  — энергия покоя ядра. Суммирование производится по всем нуклонам ядра.

## Задачи

**3.51.** Выразить импульс  $p$  релятивистской частицы через ее кинетическую энергию  $T$ .

**3.52.** Выразить скорость  $v$  частицы через ее импульс  $p$ .

**3.53.** Частица с массой  $m$  обладает энергией  $\mathcal{E}$ . Найти скорость  $v$  частицы. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

**3.54.** Найти приближенные выражения кинетической энергии  $T$  частицы с массой  $m$ : а) через ее скорость  $v$  и б) через ее импульс  $p$  с точностью до  $v^4/c^4$  и  $p^4/m^4c^4$  соответственно, при  $v \ll c$ .

**3.55.** Найти скорость  $v$  частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$ , прошедшей разность потенциалов  $V$  (начальная скорость равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случаев (учесть по два члена разложения).

**3.56.** Найти скорость  $v$  частиц в следующих случаях: а) электроны в электронной лампе ( $\mathcal{E} = 300$  эВ); б) электроны в синхротроне на 300 МэВ; в) протоны в синхроциклотроне на 680 МэВ; г) протоны в синхрофазотроне на 10 ГэВ.

**3.57.** Ускоритель дает на выходе пучок зараженных частиц с кинетической энергией  $T$ ; сила тока в пучке равна  $\mathcal{I}$ . Найти силу  $F$  давления пучка на поглощающую его мишень и выделяемую в мишени мощность  $W$ . Масса частицы  $m$ , заряд  $e$ .

**3.58.** Некоторое тело движется с релятивистской скоростью  $v$  через газ, в единице объема которого содержится  $N$  медленно движущихся частиц с массой  $m$ . Найти давление  $p$ , производимое газом на элемент поверхности тела, нормальный к его скорости, если частицы упруго отражаются от поверхности тела.

**3.59.** В линейном ускорителе частица ускоряется в щели между полыми цилиндрическими электродами — «пролетными трубками», вдоль общей оси которых проходит траектория частицы. Ускорение происходит под действием высокочастотного электрического поля с частотой  $\nu = \text{const}$ . Разогнутся те частицы, которые проходят все промежутки между трубками при наличии там ускоряющегося поля. Каковы должны быть длины пролетных трубок, чтобы частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  пролетела через ускоряющие промежутки в те моменты времени, когда на них имеется максимальное напряжение  $V_e$ ? Оценить также полную длину ускорителя с  $N$  пролетными трубками.

**3.60.** Поток монохроматических  $\mu$ -мезонов, родившихся в верхних слоях атмосферы<sup>10</sup>, падает вертикально вниз. Найти отношение интенсивности потока  $\mu$ -мезонов на высоте  $h$  над уровнем моря ( $I_h$ ) и на уровне моря ( $I_0$ ), считая, что в рассматриваемом слое воздуха толщиной  $h$  происходит только ослабление потока за счет естественного распада  $\mu$ -мезонов. Энергия  $\mu$ -мезонов  $\mathcal{E} = 4,2 \cdot 10^8$  эв,  $h = 3$  км, среднее время жизни покоящегося  $\mu$ -мезона  $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  сек.

**3.61.** Система отсчета  $S'$  движется со скоростью  $V$  относительно системы  $S$ . Частица с массой  $m$ , обладающая в  $S'$  энергией  $\mathcal{E}'$  и скоростью  $v'$ , движется под углом  $\vartheta'$  к направлению  $V$ . Найти угол  $\vartheta$  между импульсом  $p$  частицы и направлением  $V$  в системе  $S$ . Выразить энергию и импульс частицы в  $S$  через  $\vartheta'$ ,  $\mathcal{E}'$  или  $\vartheta'$ ,  $v'$ . Рассмотреть, в частности, ультррелятивистский случай  $\mathcal{E}' \gg mc^2$ ,  $V \approx c$ . Показать, что в этом случае в некотором (каком?) интервале углов можно пользоваться приближенной формулой  $\vartheta' \approx \frac{1}{\gamma} \text{tg } \frac{\vartheta}{2}$ .

**3.62.** Система  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $V$ . Угловое распределение частиц, имеющих в  $S'$  одинаковую энергию  $\mathcal{E}'$ , описывается функцией  $dW/d\Omega' = F'(\vartheta', \alpha')$ , где величина  $dW$  представляет собой долю частиц, движущихся в системе  $S'$  внутри телесного угла  $d\Omega'$ . Ее обычно нормируют так, что

$$\int dW = \int F'(\vartheta', \alpha') d\Omega' = 1.$$

Угол  $\vartheta'$  отсчитывается от направления  $V$ . Найти угловое распределение таких частиц в системе  $S$ . Рассмотреть, в частности, ультррелятивистский случай.

<sup>10</sup>Задача формулируется в упрощенном виде.

**3.63.** Вывести уравнение движения свободной релятивистской частицы путем варьирования действия (3.30) с функцией Лагранжа (3.32) и с инвариантной переменной интегрирования — координатным временем  $t$ . Убедиться в эквивалентности полученного уравнения и (3.38).

**3.64\*.** Показать, что элемент объема в пространстве трехмерных импульсов  $d^3p$  преобразуется при переходе в другую ИСО следующим образом:

$$\frac{d^3p}{\mathcal{E}} = \frac{d^3p'}{\mathcal{E}'},$$

где  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$  — соответствующие энергии.

**3.65\*.** Функция распределения  $f(\mathbf{p})$  частиц по импульсам нормирована таким образом, что полное число частиц  $dN$  в системе, импульсы которых лежат внутри объема  $d^3p$ , дается выражением  $dN = f(\mathbf{p}) d^3p$ . Найти закон преобразования функции распределения при переходе в другую ИСО.

**3.66\*.** Число частиц  $dN$ , находящихся в элементе объема  $dV$  и имеющих составляющие импульса, заключенные в пределах  $p_x, p_x + dp_x; p_y, p_y + dp_y; p_z, p_z + dp_z$ , выражается в виде

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV d^3p,$$

где  $d^3p = dp_x dp_y dp_z$  — элемент объема в пространстве импульсов,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  — функция распределения по координатам и импульсам, т. е. плотность числа частиц в фазовом пространстве. Найти закон релятивистского преобразования  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ .

**3.67.** Частицы сорта 1, обладающие в системе  $S$  скоростью  $\mathbf{v}_1$ , рассеиваются неподвижными частицами сорта 2. Как преобразуется сечение рассеяния  $d\sigma_{12}$  при переходе к системе отсчета  $S'$ , в которой частицы сорта 2 обладают скоростью  $\mathbf{v}'_2$ , а частицы сорта 1 — скоростью  $\mathbf{v}'_1$ ? Рассмотреть, в частности, случай, когда скорости  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$  параллельны.

УКАЗАНИЕ. Сечением рассеяния  $d\sigma_{12}$  называется отношение числа частиц, рассеиваемых в единицу времени в телесный угол  $d\Omega$  одним рассеивающим центром, к плотности потока рассеиваемых частиц  $J_{12} = n_1 v_0$ , где  $n_1$  — число рассеиваемых частиц в единицу объема,  $v_0 = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$  — относительная скорость частиц 1-го и 2-го сорта (ср. с задачей 3.19).

**3.68.**  $\pi^0$ -мезон движется со скоростью  $v$  и распадается на лету на два  $\gamma$ -кванта. Найти угловое распределение  $\gamma$ -квантов распада  $dW/d\Omega$  в лабораторной системе отсчета, учитывая, что в системе покоя  $\pi^0$ -мезона оно сферически симметрично.

**3.69.** Выразить энергию  $\pi^0$ -мезона, рассмотренного в предыдущей задаче, через отношение  $f$  числа  $\gamma$ -квантов распада, испускаемых в переднюю полусферу, к числу  $\gamma$ -квантов испускаемых в заднюю полусферу.

**3.70.**  $\pi^0$ -мезон распадается на лету на два  $\gamma$ -кванта. Показать, что минимальный угол  $\vartheta_{\min}$  разлета  $\gamma$ -квантов определяется условием  $\cos \frac{\vartheta_{\min}}{2} = \frac{v}{c}$  в той системе отсчета, в которой скорость  $\pi^0$ -мезона равна  $v$ .

**3.71.** Найти зависимость энергии  $\gamma$ -кванта, возникающего при распаде  $\pi^0$ -мезона (ср. с задачей 3.68), от угла  $\vartheta$  между направлениями распространения кванта и движения  $\pi^0$ -мезона. Определить энергетический спектр  $\gamma$ -квантов распада в лабораторной системе отсчета.

УКАЗАНИЕ. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что в системе покоя  $\pi^0$ -мезона энергия  $\gamma$ -кванта  $\mathcal{E}' = mc^2/2$  ( $m$  — масса  $\pi^0$ -мезона).

**3.72.** Показать, что какова бы ни была форма энергетического спектра  $\pi^0$ -мезонов, энергетический спектр  $\gamma$ -квантов распада в лабораторной системе отсчета будет иметь максимум при  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{E}' = mc^2/2$ , где  $m$  — масса  $\pi^0$ -мезона. Пусть  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  — произвольные значения энергии  $\gamma$ -квантов распада, расположенные по разные стороны указанного максимума и отвечающие одинаковым значениям функции распределения. Выразить массу  $m$   $\pi^0$ -мезона через  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ .

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться энергетическим спектром  $\gamma$ -квантов, найденным в задаче 3.71.

**3.73.** Определить массу  $m$  некоторой частицы, зная, что она распадается на две частицы с массами  $m_1, m_2$ . Из опыта известны величины импульсов  $p_1 p_2$  частиц, образовавшихся при распаде, и угол  $\vartheta$  между их направлениями. Вычислить массу зараженного  $\pi$ -мезона, распадающегося по схеме  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ , если из опыта известно, что  $\pi$ -мезон до распада покоился, а  $\mu$ -мезон получил после распада импульс  $p_\mu = 29,8$  МэВ/с. Масса  $\mu$ -мезона приведена в таблице 3.1.

**3.74.** Определить массу  $m_1$  некоторой частицы, зная, что она представляет собой одну из двух частиц, образовавшихся при распаде частицы с массой  $m$  и импульсом  $p$ . Импульс  $p_2$ , масса  $m_2$  и угол  $\vartheta_2$  вылета второй частицы, образовавшейся при распаде, также известны.

**3.75.** Частица с массой  $m_1$  и скоростью  $v$  сталкивается с покоящейся частицей массы  $m_2$  и поглощается ею. Найти массу  $m$  и скорость  $V$  образовавшейся частицы.

**3.76.** Покоящееся тело с массой  $m_0$  распадается на две части с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Вычислить кинетические энергии  $T_1$  и  $T_2$  продуктов распада.

Найти распределение энергии распада в системе покоя распадающейся частицы между а)  $\alpha$ -частицей и дочерним ядром при  $\alpha$ -распаде  $U^{238}$ ; б)  $\mu$ -мезоном и нейтрино ( $\nu$ ) при распаде  $\pi$ -мезона ( $\pi \rightarrow \mu + \nu$ ); в)  $\gamma$ -квантом и ядром отдачи при излучении  $\gamma$ -кванта.

**3.77.** Покоящаяся частица  $a$  распадается по схеме  $a \rightarrow b + d$ . Выразить энергию распада  $Q_a = m_a - m_b - m_d$  ( $c = 1$ ) через кинетическую энергию  $T_b$  одной из частиц распада и массы  $m_b, m_d$ . Вычислить энергию распада и массу  $\Sigma^+$ -частицы, распадающейся по схеме  $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$ , пользуясь найденным из опыта значением  $T_{\pi^+} = 91,7$  МэВ и массами нейтрона и  $\pi^+$ -мезона, приведенными в таблице 3.1. Сделать то же самое для распада  $\Sigma^+$  по другой схеме  $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$ , если известна  $T_p = 18,8$  МэВ.

**3.78.** Покоящееся свободное возбужденное ядро (энергия возбуждения  $\Delta\mathcal{E}$ ) излучает  $\gamma$ -квант. Найти его частоту  $\omega$ . Масса возбужденного ядра  $m$ . В чем причина того, что  $\omega \neq \Delta\mathcal{E}/\hbar$ ? Как изменится результат, если ядро жестко закреплено в кристаллической решетке (эффект Мёссбауэра)?

**3.79\*.** Покоящаяся частица  $a$  с массой  $m$  распадается по схеме  $a \rightarrow a_1 + a_2 + a_3$  на три частицы с массами  $m_1, m_2, m_3$  и кинетическими энергиями  $T_1, T_2, T_3$ . Исследовать кинематику такого распада с помощью диаграммы Далица. Для этого ввести переменные  $x = (T_2 - T_3)/\sqrt{3}$ ,  $y = T_1$  и рассмотреть плоскость  $(x, y)$ . Каждому конкретному распаду отвечает определенная точка на этой плоскости.

а) Доказать, что закон сохранения энергии ограничивает на плоскости  $(x, y)$  область, имеющую форму равностороннего треугольника. Убедиться в том, что длины перпендикуляров, опущенных из точки, изображающей данный распад, на стороны треугольника, равны кинетическим энергиям образующихся частиц.

б) Убедиться в том, что двух введенных величин  $x$  и  $y$  достаточно для определения величин импульсов образующихся частиц и углов между импульсами в системе покоя распадающейся частицы.

в) Закон сохранения трехмерного импульса приводит к тому, что не все точки внутри треугольника отвечают истинным распадам. Найти на плоскости  $xy$  область, внутри которой распады кинематически возможны, для частного случая  $m_2 = m_3 = 0, m_1 \neq 0$ .

**3.80.** Построить диаграмму Далица (см. условие предыдущей задачи) для распадов  $\mu$  и  $K$ -мезонов:

$$\text{а) } \mu^\pm \rightarrow e^\pm + 2\nu, \quad \text{б) } K^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu.$$

В последнем процессе электрон, как правило, рождается ультрарелятивистским, и его массой покой можно пренебречь. Определить максимальные энергии частиц.



**3.81.** Построить диаграмму Далица (см. задачу 3.79) для распада покоящегося  $K^+$ -мезона по схеме

$$K^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^+.$$

Энергия распада  $Q = m_K - 3m_\pi \approx 75 \text{ МэВ} < m_\pi$  ( $c = 1$ ), поэтому рождающиеся  $\pi$ -мезоны можно приближенно считать нерелятивистскими. Какова максимальная энергия каждой из частиц?

**3.82.** Построить диаграмму Далица (см. условие задачи 3.79) для распада  $\omega$ -мезона по схеме

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0.$$

Считать массы всех трех мезонов одинаковыми, энергия распада  $Q = m_\omega - 3m_\pi \approx 360 \text{ МэВ} > m_\pi$ ,  $m_\omega \approx 780 \text{ МэВ}$  ( $c = 1$ ). Какова наибольшая энергия каждого из мезонов?

**3.83\*.** В условии задачи 3.79 изложены правила построения диаграммы Далица для распада трех частиц. Вероятность  $dW$  распада имеет вид

$$dW = \rho d\Gamma.$$

Здесь  $\rho$  — величина, зависящая от сил взаимодействия, ответственных за распад, и от импульсов частиц, а  $d\Gamma$  — элемент фазового объема  $\Gamma$ , определяемого интегралом

$$\Gamma = \int \frac{(d\mathbf{p}_1)}{\mathcal{E}_1} \frac{(d\mathbf{p}_2)}{\mathcal{E}_2} \frac{(d\mathbf{p}_3)}{\mathcal{E}_3} \delta(p_i - p_{1i} - p_{2i} - p_{3i}),$$

где  $p_i$  — 4-импульс распадающейся частицы ( $p_i = (m, 0)$  при распаде из состояния покоя),  $p_{\alpha i} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  — 4-импульсы образующихся частиц,  $(d^3\mathbf{p}_\alpha)$  — элемент объема импульсного пространства  $\alpha$ -й частицы. Четырехмерная  $\delta$ -функция выражает собой закон сохранения 4-го импульса при распаде и показывает, что интегрирование производится только по тем значениям импульсов  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ , которые совместимы с законами сохранения энергии и импульса.

Выразить  $d\Gamma$  через  $dx, dy$  и показать, что фазовый объем  $\Gamma$  выражается в соответствующем масштабе площадью разрешенной области на диаграмме Далица. Доказательство произвести для общего случая  $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq 0$ .

**3.84.** Частица с массой  $m$  налетает на покоящуюся частицу с массой  $m_1$ . Происходит реакция, в которой рождается ряд частиц с общей

массой  $M$ . Если  $m + m_1 < M$ , то при малых кинетических энергиях налетающей частицы реакция не идет — она запрещена законом сохранения энергии. Найти минимальное значение кинетической энергии налетающей частицы (энергетический порог  $T_0$  реакции), начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

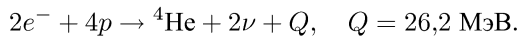
**3.85.** Промежуточный бозон  $W^+$  рождается в реакции  $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + W^+ + p$ . Вычислить пороговую энергию  $T_0$  нейтрино  $\nu_\mu$ .

**3.86.** Найти энергетические пороги  $T_0$  следующих реакций: а) рождение  $\pi$ -мезона при столкновении двух нуклонов ( $N + N \rightarrow N + N + \pi$ ); б) фоторождение  $\pi$ -мезона на нуклоне ( $N + \gamma \rightarrow N + \pi$ ); в) рождение  $K$ -мезона и  $\Lambda$ -гиперона при столкновении  $\pi$ -мезона с нуклоном ( $\pi + N \rightarrow \Lambda + K$ ); г) рождение пары протон — антипротон при столкновении протона массы  $m_p$  с ядром массы  $m$ . Рассмотреть, в частности, столкновение с протоном. Оценить порог для рождения антипротона на ядре с массовым числом  $A$ , считая  $m \approx m_p A$ .

**3.87.** Найти приближенное выражение энергетического порога  $T_0$  реакций, в которых изменение  $\Delta M$  массы сталкивающихся частиц составляет малую часть их общей массы  $M$  («реакция между нерелятивистскими частицами»). Применить полученную формулу к нахождению энергетического порога  $T_0$  реакций: а) фоторасщепление дейтерия (реакция  $\gamma + H_1^2 \rightarrow p + n$ ); б) реакция  $He_2^4 + He_2^4 \rightarrow Li_3^7 + p$ . Сравнить полученные приближенные значения с точными (см. задачу 3.84).

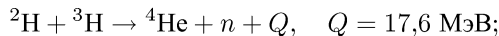
**3.88.** Оценить дефект массы  $\Delta M$  и относительное изменение массы  $\Delta M/M$  в следующих процессах:

а) реакция горения водорода на Солнце и в звездах (идет по нескольким параллельным каналам):

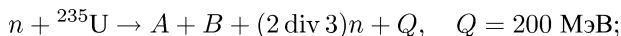


В энергетический выход реакции не включены энергии нейтрино  $\nu$ , поскольку эта энергия уносится из системы и не приводит к нагреву окружающего вещества.

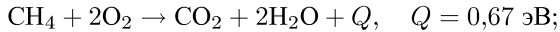
б) реакция горения дейтерия и трития в установках по управляемому термоядерному синтезу (или в водородной бомбе):



в) реакция деления урана под действием медленного нейтрона:



г) горение метана в газовой горелке:



д) реакция плавления льда при  $0^\circ\text{C}$ : энергия поглощается,  $Q = -0,6 \times 10^{-2}$  эВ в расчете на одну молекулу, перешедшую из куска льда в воду.

**3.89\***. Электрон и позитрон, имеющие в Л-системе трехмерные импульсы  $p_-$ ,  $p_+$ , аннигилируют на лету в два гамма-кванта. Вычислить инвариантную массу системы. Какая дополнительная информация необходима для вычисления энергий квантов  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ?

**3.90.** Доказать, что рождение пары электрон — позитрон одним  $\gamma$ -квантом возможно только, если в реакции участвует частица с массой покоя  $m_1 \neq 0$  (внутреннее состояние этой частицы не меняется; ее роль состоит в том, что она принимает часть энергии и импульса, делая возможным выполнение закона сохранения). Найти порог  $T_0$  реакции рождения пары.

**3.91.** Доказать, что законом сохранения энергии-импульса запрещена аннигиляция пары электрон — позитрон, сопровождаемая испусканием одного  $\gamma$ -кванта, но нет запрета на реакцию аннигиляции пары с испусканием двух фотонов.

**3.92.** Частица с энергией  $\mathcal{E}$  и массой  $m_1$  налетает на покоящуюся частицу с массой  $m_2$ . Найти скорость  $v$  центра инерции относительно лабораторной системы отсчета при таком столкновении.

**3.93\***. Частица с массой  $m_1$  и энергией  $\mathcal{E}_0$  испытывает упругое соударение с неподвижной частицей, масса которой  $m_2$ . Выразить углы рассеивания  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  частиц в лабораторной системе отсчета через их энергии  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  после столкновения.

**3.94.** Основываясь на решении предыдущей задачи, выразить энергию частиц, испытавших упругое рассеяние, через углы рассеяния в лабораторной системе отсчета.

**3.95.** Ультррелятивистская частица с массой  $m$  и энергией  $\mathcal{E}_0$  упруго рассеивается на неподвижном ядре с массой  $M \gg m$ . Определить зависимость конечной энергии  $\mathcal{E}$  частицы от угла  $\vartheta$  ее рассеяния.

**3.96.** Решить предыдущую задачу для случая неупругого рассеяния частицы на ядре. Энергия возбуждения ядра  $\Delta E$  в системе его покоя удовлетворяет неравенству  $mc^2 \ll \Delta E \ll Mc^2$ .

**3.97.** Частица с массой  $m$  испытывает упругое соударение с неподвижной частицей такой же массы. Выразить кинетическую энергию  $T_1$

рассеянной частицы через кинетическую энергию  $T_0$  налетающей частицы и угол рассеяния  $\vartheta_1$ .

**3.98.** Используя результаты задачи 3.94, найти в нерелятивистском случае зависимость кинетических энергий  $T_1$  и  $T_2$  частиц, испытавших упругое соударение, от начальной кинетической энергии  $T_0$  первой частицы и углов рассеяния  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  в лабораторной системе отсчета (вторая частица до столкновения покоилась).

**3.99.** Частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  испытывают упругое столкновение. Их скорости в системе ц. и.  $v'_1$  и  $v'_2$ , угол рассеяния  $\vartheta'$ , скорость системы ц. и. относительно лабораторной системы  $V$ . Определить угол  $\chi$  разлета частиц в лабораторной системе. Рассмотреть, в частности, случай  $m_1 = m_2$ .

**3.100.** Квант света с частотой  $\omega_0$  рассеивается на движущемся свободном электроне. Начальный импульс  $p_0$  электрона составляет угол  $\vartheta_0$  с направлением распространения кванта. Найти зависимость частоты  $\omega$  рассеянного фотона от направления его движения (эффект Комптона). Рассмотреть, в частности, случай, когда электрон до столкновения покоился.

**3.101.** Фотон с энергией  $\hbar\omega_0$  рассеивается на ультррелятивистском электроне с массой  $m$  и энергией  $\mathcal{E}_0 \gg \hbar\omega_0$ . Найти максимальную энергию  $\hbar\omega$  рассеянного фотона.

**3.102.** Найти изменение энергии электрона при столкновении его с фотоном. Начальная энергия электрона  $\mathcal{E}_0$ , фотона  $\hbar\omega_0$ , угол между их импульсами  $\vartheta$ . Исследовать результат. При каких условиях электроны будут ускоряться под действием фотонных ударов?

**3.103.** Выразить инвариантные переменные  $s$ ,  $t$ ,  $u$  (3.49) для случая упругого рассеяния одинаковых частиц через массу  $m$ , абсолютную величину импульса  $q$  и угол рассеяния  $\vartheta$  в системе ц. и.

**3.104.** Пусть в лабораторной системе частица  $b$  покоится. Выразить энергию  $\mathcal{E}_a$  частицы  $a$  в лабораторной системе, а также энергии  $\mathcal{E}'_a$ ,  $\mathcal{E}'_b$  частиц в системе ц. и. через инвариантную переменную  $s$  (см. (3.49)). Сделать то же самое для абсолютных величин трехмерных импульсов  $p_a$ ,  $p'$  ( $p'_a = p'_b = p'$ ). Использовать систему единиц, в которой скорость света  $c = 1$ .

**3.105.** Выразить энергии  $\mathcal{E}_c$ ,  $\mathcal{E}_d$  частиц, возникающих в результате двухчастичной реакции, через инвариантные переменные (3.49). Энергии  $\mathcal{E}_c$ ,  $\mathcal{E}_d$  относятся к лабораторной системе отсчета.

**3.106.** Выразить угол  $\vartheta$  между трехмерными импульсами  $p_a$  и  $p_c$  в лабораторной системе при двухчастичной реакции через инвариантные переменные  $s$ ,  $t$ ,  $u$  (3.49). Выразить через эти же переменные угол  $\vartheta'$  между импульсами  $p'_a$ ,  $p'_c$  в системе ц. и.

**3.107.** Построить область допустимых значений переменных  $s$  и  $t$  (см. (3.49)) для реакции  $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$  (фоторождение  $\pi^0$ -мезона на протоне). Какая точка этой области соответствует порогу реакции? Каково пороговое значение  $T_0$  энергии  $\gamma$ -кванта в лабораторной системе? Какую кинетическую энергию  $T_\pi$  имеет в лабораторной системе  $\pi^0$ -мезон при пороговой энергии  $\gamma$ -кванта?

**3.108.** Два  $\gamma$ -кванта превращаются в пару электрон — позитрон. Энергия одного из них задана и равна  $\mathcal{E}_0$ . При каких значениях  $\mathcal{E}_2$  энергии второго кванта и угла  $\vartheta$  между их импульсами возможна эта реакция? Изобразить эти значения на плоскости переменных  $\mathcal{E}_2$ ,  $\cos \vartheta$ . Найти также область допустимых значений переменных  $s$ ,  $t$  (3.49). Энергию записывать в единицах  $mc^2$ , где  $m$  — масса электрона.

**3.109\*.** Построить на кинематической плоскости переменных  $s$ ,  $t$  (3.49) физические области, соответствующие следующим трем процессам:

- а)  $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$  — упругое рассеяние,
- б)  $\pi^- + \bar{p} \rightarrow \pi^- + \bar{p}$  — упругое рассеяния античастиц,
- в)  $\pi^+ + \pi^- \rightarrow p + \bar{p}$  — рождение пары протон — антипротон.

Массы всех мезонов и всех нуклонов одинаковы ( $m$  и  $M$  соответственно).

**3.110.** Доказать, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно. Исходить из закона сохранения энергии — импульса.

**3.111.** Доказать, что при равномерном движении заряженной свободной частицы в среде с показателем преломления  $n(\omega)$  (масса частицы  $m$ , заряд  $e$ , скорость  $v$ ) может происходить излучение электромагнитных волн (эффект Вавилова–Черенкова)<sup>11</sup>). Выразить угол  $\vartheta$  между направлением распространения волны и направлением скорости  $v$  частицы через  $v$ ,  $\omega$ ,  $n(\omega)$ .

УКАЗАНИЕ. В покоящейся среде с показателем преломления  $n(\omega)$  фотон обладает энергией  $\mathcal{E} = \hbar\omega$  и импульсом  $p = n(\omega) \frac{\hbar\omega}{c}$ .

**3.112.** Доказать, что свободный электрон, движущийся в среде со скоростью  $v$ , может поглощать электромагнитные волны, частоты  $\omega$  которых удовлетворяют неравенству  $v > c/n(\omega)$ , где  $n(\omega)$  — показатель преломления среды.

<sup>11</sup>Аналогичный эффект может иметь место также при прохождении через вещество нейтральной частицы, обладающей электрическим или магнитным моментом.

**3.113.** Частица, имеющая, вообще говоря, сложную структуру и содержащая внутри себя электрические заряды (например, атом), движется равномерно со скоростью  $v$  в среде с показателем преломления  $n(\omega)$  и находится в возбужденном состоянии. При переходе в нормальное состояние частица излучает квант с частотой  $\omega_0$  (в системе покоя). Этот квант наблюдается в лабораторной системе отсчета под углом  $\vartheta$  к направлению движения частицы. Какая частота  $\omega$  наблюдается в лабораторной системе (эффект Доплера в преломляющей среде)? Рассмотреть, в частности, случай  $\omega_0 \rightarrow 0$ .

УКАЗАНИЕ. Члены второго порядка по  $\hbar$  не учитывать, считать, что  $\hbar\omega_0 \ll mc^2$ , где  $m$  — масса частицы.

**3.114.** Частица, рассмотренная в задаче 3.113, движется равномерно через среду, находясь в своем нормальном состоянии (остальные условия задачи 3.113 сохраняются). Доказать, что при этом может происходить излучение, сопровождаемое возбуждением частицы. Выяснить, какие условия необходимы для возникновения такого излучения. Найти частоту  $\omega$  этого излучения (сверхсветовой эффект Доплера).

**3.115.** Из законов сохранения энергии и импульса следует, что черенковское излучение одного кванта частоты  $\omega$  невозможно, если показатель преломления среды  $n(\omega) \leq 1$  (см. задачу 3.112). В частности, невозможно одноквантовое черенковское излучение достаточно жестких фотонов, так как при больших частотах  $n(\omega) < 1$ . Показать, что при равномерном движении быстрой заряженной частицы с энергией  $\mathcal{E}_0$  через среду может происходить излучение сразу двух фотонов, один из которых (с частотой  $\omega_2$ ) может быть жестким, так что для него  $n(\omega_2) \rightarrow 1$ . Выяснить, каким условиям должны удовлетворять частота  $\omega_1$  другого фотона и скорость  $v_0$  частицы ( $\hbar\omega_1 \ll cp_0$ ), чтобы был возможен такой процесс (жесткое излучение Вавилова–Черенкова). Какова наибольшая энергия жесткого кванта?

**3.116.** Рассмотреть кинематику жесткого излучения Вавилова–Черенкова (см. предыдущую задачу), считая электрон ультрарелятивистским,  $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$ , а угол  $\vartheta_2$  вылета жесткого кванта малым. Определить максимальное значение энергии  $(\hbar\omega_2)_{\max}$  жесткого кванта, которого можно достичь в этом случае; рассмотреть характерные частные случаи.

**3.117.** Кристаллическая решетка способна принимать импульс только дискретными порциями  $\mathbf{q} = 2\pi\hbar\mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g}$  — вектор обратной решетки. В случае кристаллической решетки, элементарная ячейка которой имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a_1, a_2, a_3$ , вектор  $\mathbf{g} = \left( \frac{n_1}{a_1}, \frac{n_2}{a_2}, \frac{n_3}{a_3} \right)$ , где  $n_1, n_2, n_3$  — любые целые числа. Считая, что кристалл, имеющий очень большую массу, не может принимать от части-

цы энергию, выяснить, какой характер будет иметь угловое распределение частиц, рассеиваемых на монокристалле.

**3.118.** Учитывая связь  $p_0 = 2\pi\hbar/\lambda_0$  между импульсом  $p_0$  частицы и соответствующей длиной волны  $\lambda_0$ , вывести условие Брэгга–Вульфа:  $2a \sin(\vartheta/2) = n\lambda_0$ , где  $a$  — расстояние между кристаллическими плоскостями,  $\vartheta$  — угол рассеяния частицы,  $n$  — целое число.

**3.119.** Выяснить, какой характер будет иметь энергетический спектр тормозных квантов, возникающих при рассеянии заряженных частиц на монокристалле (ср. с задачей 3.117). Угол между направлением распространения тормозного кванта и первоначальным импульсом частицы фиксирован и мал,  $\vartheta \ll 1$ . Частица ультрарелятивистская,  $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$ .

**3.120\*.** В классической модели электрон можно представить в виде заряженного шара с некоторым радиусом  $R$ . Оценить  $R$  в предположении, что масса электрона имеет электростатическое происхождение, т. е. его энергия покоя равна электростатической энергии заряженного шара.

Рекомендуемая литература: кроме источников, указанных к разделу 3.1, весьма полезны книги и статьи [Ландау и Лифшиц, Механика], [Окунь (2000)], [Барашенков (1974)], [Окунь (1989)], [Фейнберг (1974)], [Медведев (1977)], [Никитин и др. (1992)], [Сморodinский (1972)], [Бюклинг и Каянти (1975)].

### 3.3. Ответы и решения

**3.1.** 1. Из однородности пространства и времени следует, что преобразования должны быть линейными:

$$(1) \quad x' = \alpha x + \alpha'y + \beta'z + \beta t + p \quad \text{и т. д.}$$

где  $\alpha, \alpha', \beta, \dots$  — постоянные коэффициенты, которые могут зависеть от относительной скорости  $V$ . Если бы эти величины зависели от координат и времени, это означало бы, что закон преобразования (1) неодинаков для разных точек пространства и разных моментов времени, что противоречит однородности пространства-времени.

2. Пусть три пространственные оси двух систем отсчета,  $S$  и  $S'$ , совпадают при  $t = t'$  (рис. 1.1). В этих условиях свободные члены в равенствах (1) (постоянные  $p$  и т.п.) обращаются в нуль. Мы видим, далее, что плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью  $x'y'$ . Это означает, что при  $z = 0$  должно быть и  $z' = 0$ , причем эти равенства должны выполняться при любых значениях  $x', y', z'$  и соответственно  $x, y, z$ . Это возможно только если связь между  $z$  и  $z'$  имеет вид  $z' = kz, k = \text{const}$ . Ввиду произвольности

направления осей  $y$  и  $z$  (изотропия пространства!) такая же связь с тем же коэффициентом  $k$  должна быть между  $y$  и  $y'$ :  $y' = ky$ .

Преобразования  $x'$  и  $t'$  запишем в виде

$$(2) \quad x' = \alpha x + \beta t + \alpha' y + \beta' z, \quad t' = \sigma x + \delta t + \sigma' y + \delta' z.$$

В плоскости  $x' = 0$  имеем  $x = Vt$  при любых  $z$  и  $y$ , так как система  $S'$  движется относительно  $S$  со скоростью  $V$ . Подставив эти значения  $x$  и  $x'$  в первое равенство (2), будем иметь  $\alpha' = \beta' = 0$ ,  $\beta = -\alpha V$ . Наконец, обратимся к формуле преобразования для  $t'$ . Мы установили часы в системе  $S'$  так, чтобы при  $x = 0$  и  $t = 0$  было  $t' = 0$ . Это возможно только при  $\sigma' = \delta' = 0$ . В итоге имеем следующие формулы преобразований:

$$(3) \quad x' = \alpha(V)(x - Vt), \quad y' = k(V)y, \quad z' = k(V)z, \quad t' = \sigma(V)x + \delta(V)t,$$

где у коэффициентов явно указана зависимость от относительной скорости.

3. Используем теперь условие равноправия систем  $S$  и  $S'$ . Оно означает, что формулы перехода из  $S'$  в  $S$  должны получаться из формул перехода (3) заменой  $V$  на  $-V$ :

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= \alpha(-V)(x' + Vt'), & y &= k(-V)y', & z &= k(-V)z', \\ t &= \sigma(-V)x' + \delta(-V)t'. \end{aligned}$$

Обратимся сначала к формулам для  $y$  и  $z$ . Случаи (3) и (4) отличаются только направлением относительной скорости, которая в том и другом случаях перпендикулярна плоскости  $yz$ . Но оба направления совершенно равноправны (изотропия пространства, равноправие правого и левого!), поэтому  $k(-V) = k(V)$ . Совершая преобразование от  $y$  к  $y'$  и затем снова от  $y'$  к  $y$ , будем иметь  $y = k^2 y'$ , т. е.  $k^2 = 1$ ,  $k = \pm 1$ . Значение  $k = -1$  отвечает противоположной ориентации осей  $y$  и  $y'$ , поэтому соответствие с рис. 1.1 будет только при значении  $k = 1$ .

Подставим в формулу (4) для  $x$  значения  $x'$  и  $t'$  из (3):

$$(5) \quad x = [\alpha(-V)\alpha(V) + V\sigma(V)\alpha(-V)]x + \alpha(-V)V[\delta(V) - \alpha(V)]t.$$

Чтобы это равенство было справедливо при всех  $x$  и  $t$ , коэффициенты преобразования должны удовлетворять соотношению

$$(6) \quad \delta(V) = \alpha(V).$$

Второе соотношение, следующее из (5), нам не потребуется. Вместо него воспользуемся постулатом об инвариантности скорости света.

4. Пусть в момент совпадения систем  $S$  и  $S'$  ( $t = t' = 0$ ) из совпадающих начал отсчета испущен короткий световой сигнал. Точка пересечения



фронта волны с осью  $x$  движется в системе  $S$  со скоростью  $x/t = c$ . Но вследствие того, что световой сигнал распространяется во всех системах отсчета с одинаковой скоростью, скорость фронта в системе  $S'$  будет той же самой:  $x'/t' = c$ . С помощью этих условий получаем из (3), поделив уравнение для  $x'$  почленно на уравнение для  $t'$ :

$$c = \frac{\alpha(c - V)}{\sigma c + \alpha}.$$

Отсюда

$$(7) \quad \sigma(V) = -\frac{V}{c^2}\alpha(V).$$

Чтобы определить коэффициент  $\alpha(V)$ , рассмотрим уравнения сферического волнового фронта в системах  $S$  и  $S'$ :

$$(8) \quad x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2.$$

В этих уравнениях опять использовано свойство инвариантности скорости света, поэтому  $c$  — одинаковое. Поскольку  $y' = y$ ,  $z' = z$ , то  $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$ . С помощью (3), (6) и (7) получаем из последнего уравнения

$$\alpha^2(1 - v^2/C^2)(c^2t^2 - x^2) = (ct)^2 - x^2,$$

откуда

$$(9) \quad \alpha(V) = \pm(1 - V^2/c^2)^{-1/2}.$$

Здесь снова нужно взять только знак плюс, так как минус соответствует противоположному направлению осей  $x$  и  $x'$ . Собирая воедино результаты (3)–(9), приходим к преобразованиям Лоренца (3.7).

### 3.2.

$$x - x_0 = \frac{x' - x'_0 + V(t' - t'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y - y_0 = y' - y'_0,$$

$$z - z_0 = z' - z'_0, \quad t - t_0 = \frac{t' - t'_0 + \frac{V}{c^2}(x' - x'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

**3.5.** Координаты часов, показывающих равное время  $t = t'$  в системах  $S$  и  $S'$ :

$$x = \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)t, \quad x' = -\frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)t.$$

Из этих формул видно, что точка, в которой  $t = t'$ , движется равномерно в каждой из систем  $S$  и  $S'$ . Если ввести систему отсчета, относительно которой эта точка неподвижна, то  $S$  и  $S'$  движутся в противоположные стороны с равными скоростями  $V_0 = \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$  ( $V_0$  представляет собой релятивистскую «половину» скорости  $V$  в том смысле, что релятивистское сложение двух скоростей  $V_0$  даст  $V$ ).

**3.6.** В системе  $S'$  продолжительность одного периода  $T' = 2l/c$ ; в системе  $S$  время  $T_1$  движения «зайчика» вдоль стержня в направлении относительной скорости  $V$  вычисляется из уравнения

$$T_1 = \frac{1}{c} (t\sqrt{1 - V^2/c^2} + VT_1),$$

время движения в обратном направлении  $T_2$  получается заменой  $V$  на  $-V$ . Для отношения  $T'$  к  $T = T_1 + T_2$  находим

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

откуда следует (3.11).

**3.8.** а) Нельзя. 12 час 00 мин могут показать одновременно двое часов в одной из систем отсчета и только одни часы в другой системе отсчета.

б) Показания пространственно совпадающих часов не зависят от выбора системы отсчета:

$$t'_A = 12 \text{ час } 00 \text{ мин} + \frac{l_0}{V} = 13 \text{ час } 00 \text{ мин},$$

$$t_A = 12 \text{ час } 00 \text{ мин} + \frac{l_0}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 12 \text{ час } 36 \text{ мин}.$$

Показания оставшихся часов  $B$  и  $B'$  будут зависеть от выбора системы отсчета вследствие относительности одновременности.

С точки зрения наблюдателя на «платформе» (рис. 3.10а):

$$t'_B = 12 \text{ час } 21,6 \text{ мин}, \quad t_B = t_A = 12 \text{ час } 36 \text{ мин}.$$

С точки зрения наблюдателя в «поезде» (рис. 3.10 б):

$$t'_B = t'_A = 13 \text{ час } 00 \text{ мин}, \quad t_B = 13 \text{ час } 14,4 \text{ мин.}$$

в) С точки зрения наблюдателя на «платформе»:

$$t_A = 13 \text{ час } 00 \text{ мин} = t_B, \quad t'_B = 12 \text{ час } 36 \text{ мин}, \quad t'_A = 13 \text{ час } 14,4 \text{ мин.}$$

С точки зрения наблюдателя в «поезде»:

$$t_A = 12 \text{ час } 21,6 \text{ мин}, \quad t'_A = t'_B = 12 \text{ час } 36 \text{ мин}, \quad t_B = 13 \text{ час } 00 \text{ мин.}$$

Во всех случаях отстают те часы, показания которых приходится сравнивать с показаниями двух часов в другой системе отсчета.

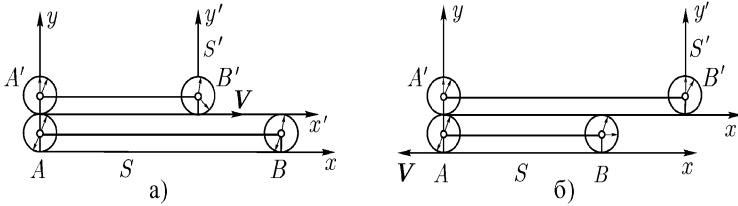


Рис. 3.10

**3.9.** По земным часам:  $\Delta t = 8$  лет. При расчете запасов снаряжения следует брать в основу промежутков времени  $\Delta t_0 = 0,01 \Delta t \approx 1$  месяц по часам в ракете;

$$T = mc^2(\gamma - 1) \approx 2,5 \cdot 10^{16} \text{ кВТ}\cdot\text{ч.}$$

Это количество энергии примерно в 10 000 раз превышает годовую выработку электроэнергии во всем мире в настоящее время.

**3.10.**

$$v = \frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + l_0^2/c^2}.$$

Для наблюдателя, связанного с первым масштабом (рис. 3.11 а), сначала совпадут левые концы, потом правые; для наблюдателя, связанного со вторым масштабом (рис. 3.11 б), — наоборот. С точки зрения наблюдателя, относительно которого масштабы движутся с одинаковой по величине скоростью, концы совпадают одновременно.

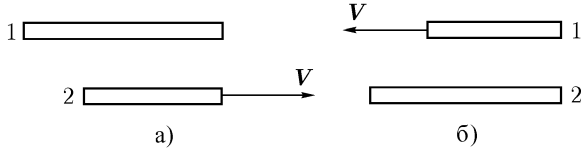


Рис. 3.11

**3.11.** Введем поперечную и продольную компоненты радиуса-вектора

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \mathbf{V} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{V^2}, & r'_{\parallel} &= \mathbf{V} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{V^2}; \\ r_{\perp} &= \mathbf{r} - r_{\parallel}, & r'_{\perp} &= \mathbf{r}' - r'_{\parallel}. \end{aligned}$$

Применив к  $r_{\parallel}$  и  $r_{\perp}$  преобразования Лоренца (3.7), получим

$$r_{\parallel} = \gamma(r'_{\parallel} + \mathbf{V}t'), \quad r_{\perp} = r'_{\perp}.$$

Окончательно:

$$\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t') + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}}{V^2}, \quad t = \gamma \left( t' + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right).$$

**3.12.**

$$\mathbf{A} = \gamma \left( \mathbf{A}' + \frac{\mathbf{V}}{c} A'_0 \right) + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{A}' \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}}{V^2}, \quad A_0 = \gamma \left( A'_0 + \frac{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{V}}{c} \right).$$

$$\mathbf{3.13.} \quad v = v_{\parallel} + v_{\perp} = \frac{v' + \mathbf{V} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{V}}{V^2} [(v' \cdot \mathbf{V}) + V^2]}{\gamma \left( 1 + \frac{v' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right)},$$

где  $v$  и  $v'$  — скорости в системах  $S$  и  $S'$ . Можно также просто продифференцировать по времени радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , выраженный через  $\mathbf{r}'$  и  $t'$  формулой, полученной в задаче 3.11.

**3.17.** Угол томасовской прецессии определяется соотношением

$$\varphi = -\arccos \frac{v^2 \sqrt{1 - V^2/c^2} + V^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{V^2 + v^2 - V^2 v^2/c^2}.$$

При  $v, V \ll c$  угол  $\varphi \approx 0$ .

При  $v \rightarrow c$  угол  $\varphi \rightarrow -\arccos \sqrt{1 - V^2/c^2}$ ; если при этом и  $V \rightarrow c$ , то  $\varphi \rightarrow \pi/2$ .

$$3.18. \quad l = l_0 \frac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}.$$

$$3.19. \quad \text{а) } V = 2 \cdot 0,9c = 1,8c; \quad \text{б) } V = 0,994c.$$

3.20. Относительная скорость двух частиц в системе, связанной с одной из них,  $V = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$ . Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = mc^2 \left[ 2 \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 - 1 \right].$$

В ультрарелятивистском случае  $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$  и, следовательно,

$$\mathcal{E} = \frac{2\mathcal{E}_0^2}{mc^2}.$$

Если ускорению подвергаются электроны ( $mc^2 = 0,5$  МэВ), то, например, при  $\mathcal{E}_0 = 50$  МэВ получается выигрыш мощности ускорителя в 200 раз:  $\mathcal{E} = 10\,000$  МэВ.

3.21. Эту задачу, как и задачу 3.13, можно решить двумя способами. Результат:

$$\dot{v} = \frac{1}{\gamma^2 s^2} \dot{v}' - \frac{(\gamma - 1)(\dot{v}' \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}}{\gamma^3 s^3 V^2} - \frac{(\dot{v}' \cdot \mathbf{V})v'}{\gamma^2 s^3 c^2},$$

где

$$s = 1 + \frac{v' \cdot \mathbf{V}}{c^2}.$$

Из этих формул видно, что если в одной системе отсчета частица движется с постоянным ускорением  $\dot{v}'$ , то в другой системе отсчета ускорение  $\dot{v}$ , вообще говоря, зависит от времени (так как в формулы преобразования входит переменная скорость  $v'$  частицы).

3.22.  $w_i w^i = -\gamma^6 \left[ \dot{v}^2 - \left( \dot{v} \times \frac{v}{c} \right)^2 \right] = -\gamma^4 \left[ \dot{v}^2 + \gamma^2 v^2 \frac{\dot{v}^2}{c^2} \right] < 0$ , т. е. четырехмерное ускорение — пространственноподобный вектор.

**3.23.** Пусть  $S'$  — мгновенно сопутствующая частице система. Согласно ответу к задаче 3.21,

$$(1) \quad \dot{v}' = \gamma^2 \left[ v + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\dot{v} \cdot v) v \right].$$

Отсюда квадрат ускорения

$$(2) \quad v'^2 = \gamma^4 \left[ \dot{v}^2 + \frac{\gamma^2 (\dot{v} \cdot v)^2}{c^2} \right] = \gamma^6 \left[ \dot{v}^2 - \left( \dot{v} \times \frac{v}{c} \right)^2 \right].$$

Если скорость частицы меняется только по величине, то  $\dot{v} \parallel v$  и

$$(3) \quad \dot{v}' = \gamma^3 \dot{v}.$$

Если скорость частицы меняется только по направлению, то  $v \perp \dot{v}$  и  $v \cdot \dot{v} = 0$ , так что

$$(4) \quad \dot{v}' = \gamma^2 \dot{v}.$$

Результат (2) можно получить и другим, более простым способом, воспользовавшись выражением квадрата четырехмерного ускорения, найденным в предыдущей задаче. Квадрат  $w_i w^i$  является четырехмерным инвариантом. Это значит, что вычисление  $w_i w^i$  как в системе  $S$ , так и в системе  $S'$  должно дать один и тот же результат. Замечая, что скорость частицы  $v' = 0$ , получим формулу (2).

### 3.24.

$$v(t) = \frac{wt + v_0 / \sqrt{1 - (v_0/c)^2}}{\sqrt{1 + (wt)^2/c^2 + (v_0/c)^2 / (1 - v_0^2/c^2)}}^2,$$

$$x(t) = \frac{c^2}{w} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left( wt + \frac{v_0}{1 - v_0^2/c^2} \right)^2} - \frac{v_0/c}{1 - v_0^2/c^2} \right\} + x_0.$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$v(t) \approx c, \quad x(t) \approx ct - c^2/w.$$

В нерелятивистском пределе:

$$v(t) = v_0 + wt, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} wt^2.$$

**3.25.** Время разгона по часам в неподвижной системе:

$$T = \frac{1}{|\dot{v}|} \int_0^V \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v}{|\dot{v}| \sqrt{1 - v^2/c^2}} = 47,5 \text{ лет.}$$

Время разгона по часам в системе, связанной с ракетой,

$$\tau = \frac{c}{2|\dot{v}|} = \ln \left| \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right| = 2,5 \text{ года.}$$

**3.26.** Формулы (1) описывают преобразование Лоренца с малой относительной скоростью  $\Delta v$  и поворот на угол  $\Delta\varphi = |\Delta\varphi|$ , причем ось вращения проходит через начало координат и параллельна вектору  $\Delta\varphi$ . Эти преобразования вследствие малости  $\Delta v$  и  $\Delta\varphi$  могут производиться в любой последовательности. Таким образом, мгновенно сопутствующая система является вращающейся. Это вращение представляет собой чисто кинематический релятивистский эффект и называется прецессией Томаса (см. задачу 3.17).

При  $v \ll c$  формулы (2) принимают вид

$$\Delta v \approx \delta v, \quad \Delta\varphi \approx \frac{1}{2c^2} \delta v \times v.$$

В этом пределе величину

$$\omega_T = \frac{\Delta\varphi}{\delta t} = \frac{1}{2c^2} \dot{v} \times v$$

можно рассматривать как угловую скорость томасовской прецессии мгновенно сопутствующей системы относительно лабораторной системы  $S$ .

$$\mathbf{3.27.} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{v' \sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \vartheta'}{v' \cos \vartheta' + V}.$$

**3.28.** В системе  $S$ :  $\cos \alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|}$ . В системе  $S'$  :

$$\cos \alpha' = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{V})}{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{V})^2} \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V})^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{V})^2}}.$$

**3.29.** Угол в системе  $S'$  стремится к нулю. Для того чтобы убедиться в этом, положим  $\mathbf{V} = V_0 \mathbf{e}$ , где  $|V_0| = 1$ . Вычислим  $\cos \alpha'$  по формуле, полученной в предыдущей задаче. Воспользовавшись тождеством

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_1) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}),$$

получим

$$\cos \alpha' = \frac{c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V})}{\sqrt{(c - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V}/c)^2} \cdot \sqrt{(c - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V}/c)^2}} = 1,$$

откуда  $\alpha' = 0$ . Это сужение углового распределения является характерным релятивистским эффектом, проявляющимся во многих явлениях.

$$\mathbf{3.30.} \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta'}.$$

**3.31.** Определение угла аберрации сводится к вычислению двух углов (рис. 3.12.): угла  $\alpha_1$  между направлением луча  $AC$  и направлением скорости  $v$  Земли в первом ее положении и угла  $\alpha_2$  между направлением  $BC$

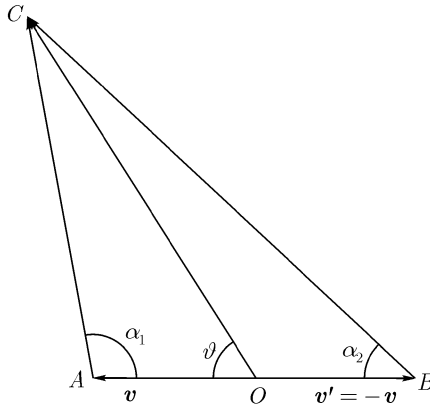


Рис. 3.12

луча и направлением скорости  $v'$  Земли во втором ее положении (через полгода). Угол аберрации  $\delta$  можно определить как  $\delta = (\pi - \alpha_2) - \alpha_1 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2$ . Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  вычислим по формулам задачи 3.27, выразив



их через угол  $\vartheta$ , который наблюдается в системе отсчета, связанной с Солнцем, между лучом  $OC$  света и вектором скорости Земли:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha_1) = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - \beta}, \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha_2) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta + \beta},$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ .

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta}} = \beta \gamma \sin \vartheta.$$

Заметим, что все три угла между скоростями, изображенные на рис. 3.12, относятся к разным системам отсчета и что сам рисунок условен (например, изображенные на нем отрезки  $AC = CO = CB = c$ ).

Из полученных результатов видно, в частности, что угол аберрации  $\delta$  зависит только от относительной скорости  $v$  Земли и Солнца и не зависит от скорости Солнечной системы относительно звезды.

**3.32.** Если положение Земли на орбите определяется азимутальным углом  $\varphi$  и  $\mathbf{a} = (0, a_\vartheta, a_\alpha)$  — вектор, проведенный из точки  $(\vartheta, \alpha)$  небесной сферы в точку видимого положения звезды на небесной сфере, то

$$\begin{aligned} a_\vartheta &= -\beta \cos \vartheta \cdot \sin(\alpha - \varphi), \\ a_\alpha &= -\beta \cos(\alpha - \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что видимое положение звезды на небосводе в течение года описывает эллипс с полуосями  $\beta \cos \vartheta$  и  $\beta$ .

**3.33.** Рассмотрим в системе  $S$  пучок внутри телесного угла  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$ . В системе  $S'$  этот пучок будет наблюдаться внутри угла  $d\Omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\alpha'$ . Угол  $\alpha = \alpha'$ , а  $\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta}$ . Отсюда

$$d\Omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\alpha' = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} d\Omega.$$

При этом, разумеется,  $\int d\Omega' = \int d\Omega = 4\pi$ .

**3.34.** В системе  $S$  та же доля  $dN$  от полного излучения придется на другой телесный угол  $d\Omega$ . Поэтому с помощью формулы из ответа к предыдущей задаче получим

$$f(\vartheta) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} = \frac{1}{\gamma^2 [1 - (1 - \gamma^{-2})^{1/2} \cos \vartheta]^2},$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением наблюдения и скоростью источника. Угловое распределение света становится анизотропным по мере роста  $\beta = v/c$

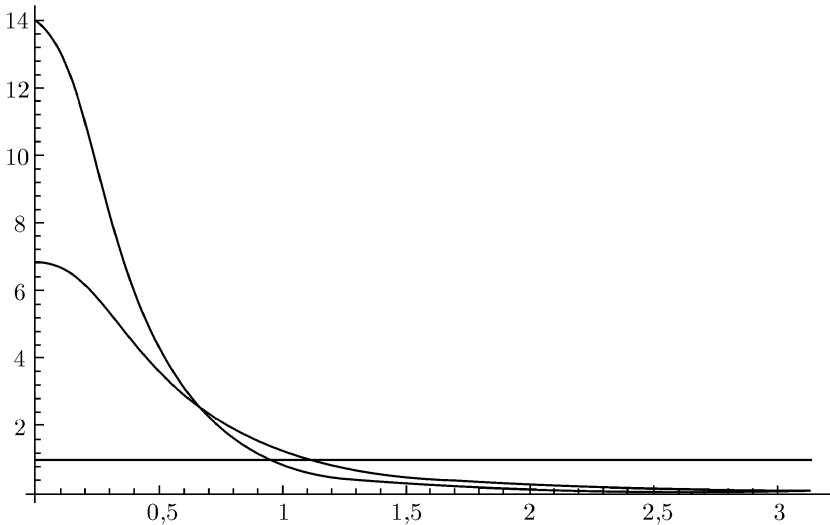


Рис. 3.12 а

(см. рис. 3.12 а, на котором представлена функция  $f(\vartheta)$  для  $\gamma = 1, 0, 1, 5, 2, 0$ . Угол измерен в радианах). При  $\gamma \gg 1$  распределение становится резко анизотропным, так что в направлении относительной скорости излучается подавляющая часть света:  $f(0)/f(\pi) \approx 4\gamma^2 \gg 1$ . Функцию распределения при углах  $\vartheta \ll 1$  можно упростить путем разложения  $\cos \vartheta$  в ряд:

$$f(\vartheta) = \frac{4}{\gamma^2(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^2}.$$

Из последней формулы следует, что любой источник света, движущийся с релятивистской скоростью, будет в основном излучать вперед по движе-

нию внутри конуса с углом раствора

$$\Theta_0 \approx \gamma^{-1} \ll 1,$$

если его излучение в системе покоя не сильно отличается от изотропного.

$$3.35. \mathbf{k} = \gamma \left( \mathbf{k}_0 + \frac{\mathbf{V} \omega_0}{c^2} \right) + \frac{\gamma - 1}{V^2} (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}.$$

3.36. Если  $\omega_0$  — частота в той системе, где источник покоится и  $V$  — скорость источника относительно приемника света, то приемник зарегистрирует меньшую частоту  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$  (красное смещение).

Угол  $\alpha$  луча с направлением движения источника в системе его покоя определяется формулой

$$\cos \alpha = -\frac{V}{c}.$$

Угол  $\alpha$  близок к  $90^\circ$  только при  $V \ll c$ . Если  $V \rightarrow c$ , то  $\alpha \rightarrow \pi$ .

$$3.37. \text{ а) } \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}; \quad \text{ б) } \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}.$$

$$3.38. \omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \Theta}, \quad J = J_0 \frac{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \beta \cos \Theta)^2}.$$

Частоты совпадают,  $\omega = \omega_0$ , при  $\Theta = \Theta_0$ , где  $\cos \Theta = (1 - \sqrt{1 - \beta^2})/\beta$ ; при этом  $J = J_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ . Интенсивности сравниваются,  $J = J_0$ , при  $\Theta = \Theta_1 < \Theta_0$ ,  $\cos \Theta_1 = [1 - (1 - \beta^2)^{\frac{8}{4}}]/\beta$ . Когда источник света находится далеко от наблюдателя, приближаясь к нему, так что  $\Theta < \Theta_0$ , частота  $\omega > \omega_0$  из-за эффекта Доплера («фиолетовое» смещение). Если к тому же  $\Theta < \Theta_1$ , то интенсивность  $J$  также превышает  $J_0$  — движущийся источник выглядит более ярким, чем неподвижный. Интенсивность максимальна при  $\Theta = 0$  и составляет  $J_{\max} = J_0(1 + \beta)^{\frac{3}{2}}/\sqrt{1 - \beta}$ . При  $\Theta = \Theta_0$  частота  $\omega < \omega_0$ , и наблюдатель видит «красное» смещение; интенсивность света теперь меньше, чем у неподвижного источника. Эти эффекты особенно заметны при  $V \approx c$ , когда

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \gg \omega_0 \quad \text{и} \quad J_{\max} = J_0 \frac{(1 + \beta)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \beta)^{\frac{1}{2}}} \gg J_0,$$

а угол

$$\Theta \approx \sqrt{2}(1 - \beta)^{\frac{1}{4}} \ll 1,$$

так что покраснение света начинается, когда источник находится еще далеко от наблюдателя, приближаясь к нему. Это происходит, начиная с расстояний  $l \approx d/\Theta_0$ .

Число фотонов, излучаемых в единицу лабораторного времени в интервале углов  $0 < \Theta < \Theta_0$ , есть

$$\begin{aligned} N_1 &= J_0(1 - \beta^2) \int_0^{\Theta_0} \frac{2\pi \sin \Theta d\Theta}{(1 - \beta \cos \Theta)^2} = 2\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{1 + \beta - \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \\ &= 2\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2} (1 + \cos \Theta_0), \end{aligned}$$

а в интервале  $\Theta_0 < \Theta < \pi$

$$N_2 = 2\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1 + \beta}{\beta} = 2\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2} (1 - \cos \Theta_0).$$

Очевидно, что  $N_1 + N_2 = 4\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2}$  соответствует полному числу фотонов, излучаемому в единицу времени по всем направлениям.  $N_1$  и  $N_2$  равны между собой при  $\beta \ll 1$ , когда  $\cos \Theta_0 \approx 0$ . Если же  $\beta$  приближается к единице, то  $N_1$  делается много больше, чем  $N_2$ . Таким образом в этом ультрарелятивистском случае подавляющая часть света излучается в узком конусе  $\Theta < \Theta_0$ , испытывая при этом фиолетовое смещение.

**3.39.** Используя решение предыдущей задачи, получим

$$I = Jh\omega = I_0 \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta \cos \Theta)^3},$$

где  $I_0 = J_0 \hbar \omega_0$  — изотропно распределенная сила света в системе покоя источника. Полный световой поток

$$\Phi = \int_{4\pi} I d\Omega = 2\pi I_0 (1 - \beta^2)^2 \int_0^\pi \frac{\sin \Theta d\Theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \Theta)^3} = 4\pi I_0 = \Phi_0$$

одинаков в системе покоя источника и в лабораторной системе.

**3.40.** Введем систему  $S'$ , связанную с зеркалом ( $S$  — лабораторная система). Обозначим через  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$  углы, образуемые волновыми векторами  $k'_1$  и  $k'_2$  падающей и отраженной волн с направлением скорости  $V$  зеркала (рис. 3.13). Частоту до и после отражения будем обозначать  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  соответственно. Аналогичные величины в системе  $S$  будем обозначать теми же буквами без штрихов. Будем исходить из известных законов отражения в системе  $S'$ :  $\omega'_1 = \omega'_2 = \omega'$  и  $\alpha'_2 = \pi - \alpha'_1$ , откуда  $\cos \alpha'_2 = -\cos \alpha'_1$ .

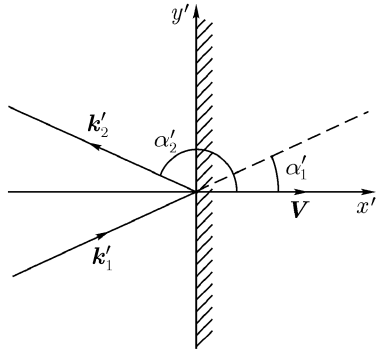


Рис. 3.13

Выражая  $\omega'$  через  $\omega$ ,  $\cos \alpha'$  через  $\cos \alpha$  с помощью формул (3.20) и (3.24) и решая получившиеся уравнения относительно  $\omega_2$  и  $\cos \alpha_2$ , найдем

$$\cos \alpha_2 = -\frac{(1 + \beta^2) \cos \alpha_1 - 2\beta}{1 - 2\beta \cos \alpha_1 + \beta^2},$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1 - 2\beta \cos \alpha_1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Если  $\beta \rightarrow 1$ , то при нормальном падении на удаляющееся зеркало  $\omega_2 \rightarrow 0$ , а при нормальном падении на приближающееся зеркало  $\omega_2 \rightarrow \infty$ .

**3.41.**  $\omega_1 = \omega_2$ .

Угол падения равен углу отражения.

**3.42.** Изображение создается квантами света, одновременно достигающими фотопластинки. Но эти кванты испускаются точками движущегося тела, вообще говоря, неодновременно. Это происходит как вследствие неодинаковости расстояний различных точек тела до фотопластинки, так и из-за того, что события, одновременные в одной системе отсчета, неодновременны в другой. Поэтому изображение движущегося предмета будет не таким, как изображение неподвижного предмета.

Кванты, испущенные разными точками ребра  $A'B'$  одновременно в системе  $S'$  (куба), достигнут фотопластинки тоже одновременно. Длина изображения  $AB$  будет такой же, как и в случае неподвижного куба, и будет определяться только тем сокращением, которое обусловлено расстоянием до предмета и фокусным расстоянием фотоаппарата. Примем эту длину за 1.

У неподвижного куба изображение ребра  $E'F'$  было бы слито с изображением  $A'B'$  (в предельном случае сколь угодно малого телесного угла, когда все лучи параллельны). В случае движущегося куба кванты от ребра  $E'F'$  достигнут фотопластинки одновременно с квантами от ребра  $A'B'$ , если первые испущены раньше на время  $\Delta t = l_0/c$  (в системе  $S$ ). В это время ребро  $E'F'$  занимало положение  $E'_1F'_1$  и до испускания света ребром  $A'B'$  проделало путь, равный  $Vl_0/c$ . Следовательно, теперь ребро  $E'F'$  не будет загорожено ребром  $AB$ , изображения ребер  $A'E'$  и  $B'F'$  будут иметь длину  $V/c = \beta$ , а не нуль, как у неподвижного куба, и вся грань  $A'B'F'E'$  сфотографируется в виде прямоугольника  $ABFE$  (рис. 3.14 а) с отношением сторон  $1 : \beta$ .

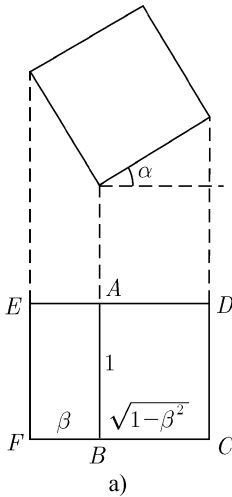


Рис. 3.14

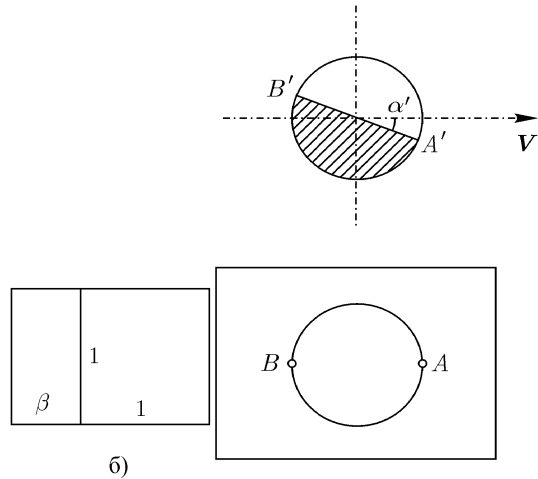


Рис. 3.15

Кванты, создающие изображение ребер  $A'B'$  и  $C'D'$ , испускаются кубом одновременно в системе  $S$ . В системе  $S'$ , как следует из преобразований Лоренца (3.7), кванты с ребра  $C'D'$  должны быть испущены раньше, чем с ребра  $A'B'$ , на время  $\Delta t' = \frac{1}{c^2} \gamma V l$ , где  $l$  — длина ребер  $B'C'$  и  $A'D'$  в системе  $S$ . Можно считать, что в системе  $S'$  в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии  $\Delta x' = l_0$ , произошли два события, одно на  $\Delta t'$  позже другого. Расстояние между ними в системе  $S$  определяется с помощью (3.7):

$$l \equiv \Delta x = \gamma(\Delta x' - V\Delta t'),$$

откуда, подставляя  $\Delta x'$  и  $\Delta t'$ , находим  $l = l_0\sqrt{1 - \beta^2}$  — длину ребер  $BC$  и  $AD$  в системе  $S$ . Они испытали обычное лоренцево сокращение. Их изображения (с учетом сокращения в фотоаппарате) будут иметь длины  $\sqrt{1 - \beta^2}$ .

Чертеж изображения куба приведен на рис.3.14а. Любопытно отметить, что такое же изображение даст неподвижный куб, повернутый относительно  $V$  на угол  $\alpha = \arcsin(V/c)$ . Видимая форма предмета в данном случае не испытывает деформации из-за лоренцева сокращения — предмет только «повернулся» на угол  $\alpha$ . Этот результат, как оказывается (см. Вайскопф (1964), а также следующие задачи), имеет место для любого предмета и любого угла между скоростью и направлением наблюдения. Нужно только, чтобы предмет был виден под малым телесным углом.

Если бы были справедливы преобразования Галилея, то ребра  $A'D'$  и  $B'C'$  не испытали бы лоренцева сокращения, и изображение приняло бы вид, показанный на рис. 3.14б. Задняя (по отношению к направлению движения) грань куба по-прежнему была бы сфотографирована. Таким образом, видимая форма движущегося предмета подверглась бы искажению.

**3.43.** а)  $l = l_0|\sqrt{1 - \beta^2} \cos \alpha' - \beta \sin \alpha'|$ ,  $\beta = V/c$ . Значение  $\alpha'_{\max}$ , при котором функция  $|\sqrt{1 - \beta^2} \cos \alpha' - \beta \sin \alpha'|$  имеет максимум, определяется условием  $\operatorname{tg} \alpha' = -\beta/\sqrt{1 - \beta^2}$ . При этом  $l = l_0$ : таким образом, наибольшая длина  $l$  равна  $l_0$ . Изображение в этом случае эквивалентно изображению неподвижного стержня, ориентированного параллельно фотопластинке. Стержень «повернулся» на угол  $\pi - \alpha'_{\max}$ .

б)  $\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \beta^2}{\beta}\right)$ ; в этом случае изображение получится таким, как если бы стержень был неподвижен и ориентирован перпендикулярно фотопластинке.

в) Если два наблюдателя, неподвижных в системе  $S$ , одновременно сделают зарубки на плоскости  $xy$  в точках  $M$  и  $N$ , мимо которых в данный момент проходят концы стержня, то полученный ими отрезок  $MN$  будет составлять с осью  $x$  угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right).$$

**3.44.** Изображение будет иметь форму круга. Сфотографируется полусфера, заштрихованная на рис. 3.15. Она ограничена плоскостью  $A'B'$ , составляющей угол.

$$\alpha' = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{1 - \beta^2}$$

с направлением  $V$  (в системе шара). Вопреки естественному интуитивному представлению, движущийся шар не воспринимается наблюдателем как эллипсоид, сплюснутый в направлении движения. Лоренцево сокращение оказывается невидимым! Но это, разумеется, не означает, что оно отсутствует.

**3.45.** Видимые положения куба изображены схематически на рис. 3.16. При  $V/c < \cos \alpha$  видна передняя грань  $A'D'$  и нижняя грань  $A'B'$ .

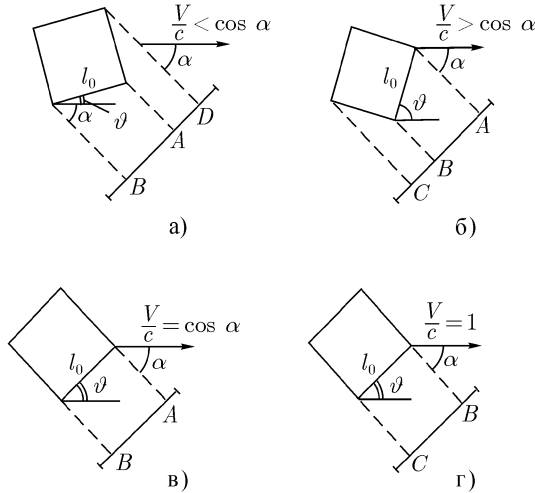


Рис. 3.16

Если в оптической системе фотоаппарата не происходит сокращения размеров предмета, то

$$AB = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\sin \alpha}{1 - \beta \cos \alpha}, \quad AD = l_0 \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha}.$$

С помощью этих формул находим угол  $\vartheta$  поворота куба:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \Theta, \quad \operatorname{tg} \Theta = \frac{\cos \alpha - \beta}{\sin \alpha \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

При  $V/c = \cos \alpha$  имеем  $\vartheta = \pi/2 - \alpha$  и видна только нижняя грань  $A'B'$ .



При  $V/c > \cos \alpha$  видны нижняя и задняя грани,

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \operatorname{arctg} \frac{\beta - \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Наконец, при  $V/c \rightarrow 1$  видна только задняя грань, нижняя грань испытала лоренцево сокращение до нуля,  $\vartheta = \pi - \alpha$ .

**3.46.** Скорость корабля  $V$  равна отношению расстояния  $l_1 - l_2$  ко времени  $\Delta t = \tau_2 - \tau_1$  между моментами испускания световых вспышек. Ввиду независимости скорости света от скоростей источника и приемника имеем  $\tau_{1,2} = t_{1,2} - l_{1,2}/c$ . Поэтому

$$(1) \quad V = \frac{l_1 - l_2}{\Delta t + (l_1 - l_2)/c},$$

где  $\Delta t = t_2 - t_1$  — промежуток времени между вспышками, зарегистрированный наблюдателем. Записав (1) в виде

$$(2) \quad l_1 - l_2 = \frac{V}{1 - V/c} \Delta t = V_* \Delta t,$$

замечаем, что коэффициент пропорциональности между расстоянием  $l_1 - l_2$  и временем  $\Delta t$  («кажушаяся» скорость  $V_* = V/(1 - V/c)$ ) превышает скорость света при  $V > c/2$ . «Кажущаяся» скорость и «кажущееся» положение объекта возникают из-за того, что наблюдатель видит положение объекта не в момент наблюдения, а в предшествующий момент  $t - l/c$  из-за конечного значения скорости света.

Аналогичный эффект конечности скорости звука хорошо заметен при наблюдениях за движением сверхзвукового самолета: звук отстает от самолета и приходит к наблюдателю из точек траектории, находящихся позади самолета.

Момент прибытия корабля:  $t_* = \tau_1 + l_1/V = \tau_2 + l_2/V$ . Все времена здесь определены в одной системе отсчета — системе наблюдателя.

**3.47.** Для определения искомых длин мы располагаем тремя величинами: двумя скоростями  $c$ ,  $V$  и промежутком времени  $\Delta t$  между посылками сигналов. Обозначим времена отражения сигналов от заднего и переднего зеркал соответственно через  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (в системе наблюдателя). Положения корабля в моменты  $\tau_1$  и  $\tau_2$  изображены на рис. 3.17. Времена испускания сигналов:

$$(1) \quad t_1 = \tau_1 - \frac{l+a}{c}, \quad t_2 = \tau_2 - \frac{l-V\Delta\tau}{c}, \quad \Delta\tau = \tau_2 - \tau_1.$$

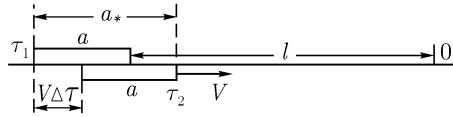


Рис. 3.17

Времена возвращения сигналов к наблюдателю:

$$(2) \quad t'_1 = \tau_1 + \frac{l+a}{c}, \quad t'_2 = \tau_2 + \frac{l-V\Delta\tau}{c}.$$

Из условия  $t'_1 = t'_2$  находим  $a = (c-V)\Delta\tau$  и из (1) получаем время между посылками сигналов наблюдателем:  $\Delta t = t_2 - t_1 = 2\Delta\tau$ , т. е.  $\Delta\tau = \Delta t/2$ . Из этих данных и рис. 3.17 находим

$$(3) \quad a_* = a + V\Delta\tau = \frac{a}{1-V/c} = \frac{1}{2}c\Delta t, \quad a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V}{c}\right)c\Delta t.$$

«Кажущаяся» длина  $a_*$  корабля из-за конечности скорости света больше, чем его «истинная» длина  $a$  в системе наблюдателя.

Длина корабля  $a_0$  в собственной системе связана с его длиной  $a$  в системе наблюдателя лоренцевой формулой (3.12). Используя (3) и (3.12), находим

$$a_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}}c\Delta t = \sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}}a_*.$$

Вопреки интуитивному представлению о лоренцевом сокращении масштабов, собственная длина корабля  $a_0$  меньше его «кажущейся», т. е. «видимой» (с помощью приборов) длины  $a_*$ . Этот «парадокс» объясняется использованным способом измерения длин с помощью световых сигналов и конечностью скорости света. При  $c \rightarrow \infty$  все три рассмотренные выше длины совпадают.

Случай корабля, удаляющегося от наблюдателя, получается из рассмотренного заменой  $V$  на  $-V$ . При этом кажущаяся длина  $a_*$  становится меньше двух других длин, а связь между  $a$  и  $a_0$  остается прежней.

**3.48.** Пренебрегая собственным размером корабля, рассмотрим его движение на отрезке  $l \ll L$ . В этих условиях лучи, проведенные из начала и конца отрезка  $l$  к наблюдателю, можно считать параллельными. Свет, испущенный в начале отрезка  $l$  (момент  $\tau_1$ ) будет зарегистрирован наблюдателем в момент  $t_1 = \tau_1 + (L+l\cos\alpha)/c$ . Свет, испущенный в конце отрезка

(момент  $\tau_2$ ) придет к наблюдателю в момент  $t_2 = \tau_2 + L/c$  (см. рис. 3.9). Поскольку  $l = V\Delta\tau$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta\tau(1 - V \cos \alpha/c)$ . «Кажущаяся» скорость

$$(1) \quad V_* = \frac{l}{\Delta t} = \frac{V}{1 - \beta \cos \alpha}, \quad \beta = \frac{V}{c}.$$

Проецируя вектор  $V_*$ , направленный вдоль  $V$ , на направление луча и на перпендикулярную лучу плоскость, получаем

$$(2) \quad V_{*\parallel} = \frac{V \cos \alpha}{1 - \beta \cos \alpha}, \quad V_{*\perp} = \frac{V \sin \alpha}{1 - \beta \cos \alpha}.$$

При  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \gg 1$  и  $\alpha \ll 1$  имеем

$$(3) \quad V_{*\parallel} = \frac{2c}{\gamma^{-2} + \alpha^2}, \quad V_{*\perp} = \frac{2c\alpha}{\gamma^{-2} + \alpha^2}$$

и, следовательно,  $V_{*\parallel\max} \approx 2c\gamma^2 \gg c$ ,  $V_{*\perp\max} \approx c\gamma \gg c$ . Сверхсветовые скорости макроскопических объектов (облаков релятивистской плазмы) неоднократно наблюдались в астрономии. По-видимому, их происхождение объясняют формулы (1)–(3).

**3.49.** Пусть в системе отсчета  $S'$ , связанной со средой, распространяется плоская волна с частотой  $\omega'$  и волновым вектором  $\mathbf{k}' = (k' \cos \alpha', k' \sin \alpha', 0)$ ,  $\mathbf{k}' \perp Oz$ . Фазовая скорость волны  $v' = c/n = \omega'/k'$  в системе  $S'$  не зависит от угла  $\alpha'$ , определяющего направление распространения волны. Компоненты поля пропорциональны  $e^{-ik'_i x^i}$ , где  $k'_i = \left(\frac{\omega'}{c}, -\mathbf{k}'\right)$ .

Так как фаза  $k_i x^i = k'_i x'^i$  — инвариант относительно преобразования Лоренца, то  $k_i$  представляет собой 4-вектор (волновой 4-вектор). Используя (3.20) и (3.24), мы можем найти компоненты  $k_i$  в системе  $S$ , относительно которой среда движется со скоростью  $V \parallel Ox$ , откуда

$$(1) \quad \omega = \gamma\omega'(1 + \beta n \cos \alpha'),$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha'}{\gamma(\cos \alpha' + \beta/n)},$$

$$(3) \quad v = \frac{\omega}{k} = c \frac{1 + \beta n \cos \alpha'}{\sqrt{n^2 + 2\beta n \cos \alpha' + \beta^2(1 - n^2 \sin^2 \alpha')}},$$

где  $\beta = V/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Из (3) видно, что фазовая скорость волны относительно системы  $S$  зависит от направления распространения. Возникает своеобразная анизотропия, связанная с движением среды.

**3.50.** Искомую скорость можно найти по формуле (3) предыдущей задачи

$$v = c \frac{1 + \beta n(\lambda')}{n(\lambda') + \beta} \approx \frac{c}{n(\lambda')} + V \left( 1 - \frac{1}{n^2(\lambda')} \right).$$

Здесь  $\lambda' = 2\pi c/\omega'$ ,  $\omega'$  — частота, наблюдаемая в системе  $S'$ , относительно которой среда покоится. По формуле (1) предыдущей задачи находим с точностью до членов первого порядка по  $V/c$ :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega'} = 1 + \frac{nV}{c},$$

откуда

$$\frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} \lambda \frac{nV}{c},$$

и окончательно

$$v = \frac{c}{n(\lambda)} + V \left( 1 - \frac{1}{n^2(\lambda)} - \frac{\lambda}{n(\lambda)} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right).$$

**3.51.**  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$ , где  $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ .

**3.52.**  $p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)}$ .

**3.53.**  $v = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$ .

**3.54.**  $\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\mathcal{E}_0/\mathcal{E})^2}$ ,  $\mathcal{E}_0 = mc^2$ .

В нерелятивистском случае  $\beta \approx \sqrt{2T/\mathcal{E}_0}$ , в ультрарелятивистском  $\beta = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} \right)^2$ .

**3.55.** а)  $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$ ,

б)  $T = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3c^2} + \dots$

$$3.56. v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \cdot \frac{1 + \frac{eV}{2mc^2}}{\left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^2}}.$$

В частности, при  $eV \ll mc^2$ ,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{eV}{mc^2}\right) \ll c;$$

при  $eV \gg mc^2$ ,

$$v = c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{eV}\right)^2\right] \approx c.$$

$$3.57. \text{ а) } v = 3,42 \cdot 10^{-2}c; \quad \text{ б) } v = 0,9999985c; \quad \text{ в) } 0,81c; \quad \text{ г) } 0,9956c.$$

$$3.58. F = \frac{\mathcal{J}}{ce} \sqrt{T(T + 2mc^2)}, \quad W = \frac{\mathcal{J}}{e} T.$$

$$3.59. p = \frac{2mv^2 N}{1 - v^2/c^2}.$$

Давление имеет одинаковое значение в системе, связанной с телом, и в системе, связанной с газом. В этом можно убедиться как путем прямого вычисления давления в каждой из этих систем отсчета, так и произведя преобразование Лоренца для четырехмерной силы (см. раздел 4.2).

**3.60.** Длина  $n$ -й трубки

$$L_n = \frac{v_n}{2\nu} = \frac{c}{2\nu} \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{nV_e e + mc^2}\right)^2},$$

где  $v_n$  — скорость частицы в  $n$ -й трубке. В начале ускорения  $mc^2 \gg neV_e$  и  $L_n \approx \frac{1}{2\nu} \sqrt{\frac{2eV_e}{m}} \sqrt{n}$ . В ультрарелятивистском пределе  $T_n \gg mc^2$ ,  $v \approx c$  и  $L_n \approx c/2\nu$ .

Оценим длину ускорителя:

$$\begin{aligned} L &= \sum_n L_n \approx \frac{c}{2\nu} \int_0^N \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{nV_e e + mc^2}\right)^2} dn = \\ &= \frac{c}{2\nu e V_e} \left[ \sqrt{(NeV_e + mc^2)^2 - m^2 c^4} - mc^2 \arccos \frac{mc^2}{NeV_e + mc^2} \right]. \end{aligned}$$

### 3.61. Отношение интенсивностей

$$\frac{I_h}{I_0} = \exp \frac{h}{v\tau} \approx \exp \left[ \frac{h}{\tau_0 c} \frac{m_\mu c^2}{\mathcal{E}} \right] \approx 2,5$$

( $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  — время жизни  $\mu$ -мезона, движущегося со скоростью  $v$ ).

Если бы релятивистское преобразование времени не имело места, мы получили бы для отношения интенсивностей (считая, что скорость мезонов равна  $c$ ):

$$\frac{I'_h}{I'_0} \approx \exp \frac{h}{\tau_0 c} \approx 94,4.$$

Наблюдения согласуются с первым результатом ( $I_h/I_0 \approx 2,5$ ) и тем самым дают прямое экспериментальное доказательство существования релятивистского эффекта замедления хода движущихся часов.

$$3.62. \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\gamma} \frac{p' \sin \vartheta'}{p' \cos \vartheta' + V \frac{\mathcal{E}'}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \frac{V}{v'}}, \text{ где}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \mathcal{E} = \gamma(\mathcal{E}' + p'V \cos \vartheta'),$$

$p, p'$  — импульсы частицы в системах  $S$  и  $S'$  соответственно.

Приведенной в условии приближенной формулой для ультрарелятивистского случая можно пользоваться, если  $\cos \frac{\vartheta'}{2} \gg \sqrt{\left|1 - \frac{V}{v'}\right|}$ , где  $v' = \frac{p' c^2}{\mathcal{E}'}$  — скорость частицы в  $S'$ . Энергия в ультрарелятивистском случае принимает вид

$$\mathcal{E} \approx pc \approx 2\gamma \mathcal{E}' \cos^2 \frac{\vartheta'}{2}.$$

3.63. Рассмотрим  $dN$  частиц, движущихся в системе  $S'$  внутри телесного угла  $d\Omega'$ . В системе  $S$  те же  $dN$  частиц будут двигаться внутри телесного угла  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$ , образованного векторами скоростей этих частиц в системе  $S$ . Угловое распределение частиц в системе  $S$  будет описываться функцией  $F(\vartheta, \alpha)$ , определяемой из равенства

$$(1) \quad F(\vartheta, \alpha) d\Omega = F'(\vartheta', \alpha') d\Omega' = dW = \frac{dN}{N}.$$

Угол  $\vartheta'$  должен быть выражен через  $\vartheta$  с помощью формулы

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{\left(\cos \vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2}{\left(\cos \vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \vartheta'},$$

следующей из решения задачи 3.62 ( $v' = p' \frac{c^2}{\mathcal{E}'}$  — скорость частицы в системе  $S'$ ). Учитывая, что  $\alpha = \alpha'$ , получим окончательно:

$$(2) \quad F(\vartheta, \alpha) = F'[\vartheta'(\vartheta), \alpha] \frac{\gamma^2 \left[ \left(\cos \vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \vartheta' \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| 1 + \frac{V}{v'} \cos \vartheta' \right|}.$$

В случае ультррелятивистских частиц  $v' = c$  и угловое распределение в системе  $S$  упрощается (ср. с задачей 3.33):

$$(3) \quad F(\vartheta, \alpha) = F'[\vartheta'(\vartheta), \alpha] \frac{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \vartheta'\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Заметим, что частицы, движущиеся в системе  $S$  под разными углами  $\vartheta$ , обладают различной энергией, несмотря на то, что в системе  $S'$  у них одна и та же энергия.

### 3.65.

$$f'(\mathbf{p}') = \gamma \left( 1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{V}}{\mathcal{E}'} \right) f(\gamma(p'_x + V \mathcal{E}'/c^2), p'_y, p'_z), \quad \gamma = \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

**3.66.** Функция распределения  $f$  является инвариантной величиной. это означает, что при переходе к другой системе отсчета  $S'$ :

$$f'(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

где в правой части равенства надо выразить  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $t$  через штрихованные величины по формулам (3.20).

**3.67.** Обозначим через  $n_1$  и  $n_2$  числа рассеиваемых и рассеивающих частиц в единице объема. Рассмотрим процесс рассеяния в системе  $S$ . Общее число частиц  $dN$ , рассеянных в интервал телесного угла  $d\Omega$  за время  $t$  рассеивающими частицами, заключенными в объеме  $V$ , выражается, согласно определению сечения, формулой:  $dN = d\sigma_{12} J_{12} n_2 V t$ , где  $J_{12} = n_1 v_1$ . В системе  $S'$  можно написать для того же числа  $dN$  аналогичное выражение:  $dN = d\sigma'_{12} J'_{12} n'_2 V' t'$ , где  $J'_{12} = n'_1 |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2|$  (в этой системе  $dN$  представляет собой число частиц, рассеиваемых в телесный угол  $d\Omega'$ , соответствующий  $d\Omega$ ). Таким образом,

$$(1) \quad d\sigma_{12} n_1 n_2 v_1 V t = d\sigma'_{12} n'_1 n'_2 |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2| V' t'.$$

Подобно четырехмерной плотности  $(\rho c, \rho \mathbf{v})$  электрического тока, величина  $(nc, n\mathbf{v})$  является 4-вектором. Отсюда следует, что

$$(2) \quad n_1 n_2 = n'_1 n'_2 \left( 1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{c^2} \right),$$

так как скалярное произведение двух 4-векторов инвариантно. Учитывая (2) и то, что 4-объем инвариантен:  $Vt = V't'$ , мы получим окончательно:

$$(3) \quad d\sigma'_{12} = d\sigma_{12} \frac{v_1 \left( 1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{c^2} \right)}{|\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2|}.$$

В том частном случае, когда  $\mathbf{v}'_1 \parallel \mathbf{v}'_2$ ,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2}{1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{c^2}}$$

(см. задачу 3.13) и из (3) следует, что сечение инвариантно:

$$(4) \quad d\sigma_{12} = d\sigma'_{12}.$$

Этот случай имеет место, например, при преобразовании от лабораторной системы отсчета к системе ц.и. Заметим, что если поток определить формулой  $J_{12} = n_1 \tilde{v}$ , где  $\tilde{v} = v_1 \left( 1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{c^2} \right)$ , то сечение будет инвариантно при произвольном преобразовании Лоренца.



$$3.68. dW = \frac{d\Omega}{4\pi\gamma^2(1 - \beta \cos \vartheta)^2}, \int_{4\pi} dW = 1, \text{ где } \beta = v/c.$$

$$3.69. f = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \text{ откуда } \mathcal{E} = mc^2 \frac{f + 1}{2\sqrt{f}}, \text{ где } m - \text{ масса } \pi^0\text{-мезона.}$$

3.71. Поскольку импульс фотона  $p = \mathcal{E}/c$ , то (ср. с задачей 3.62)

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}'}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta)}, \quad \mathcal{E}' = \frac{mc^2}{2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Сопоставив следующее отсюда выражение  $d\mathcal{E} = -\frac{\mathcal{E}' d(1 - \beta \cos \vartheta)}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta)^2}$  с угловым распределением  $\gamma$ -квантов распада, найденным в ответе к задаче 3.68, получим распределение вероятностей для энергий фотонов распада:

$$dW(\mathcal{E}) = \frac{|d\mathcal{E}|}{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}},$$

где  $\mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$  — минимальное значение энергии  $\gamma$ -кванта распада (при  $\vartheta = \pi$ ),  $\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$  — максимальное значение энергии  $\gamma$ -кванта распада (при  $\vartheta = 0$ ). Отсюда видно, что спектр  $\gamma$ -квантов распада имеет в лабораторной системе отсчета прямоугольную форму, т. е. любые значения энергии в промежутке от  $\mathcal{E}_{\min}$  до  $\mathcal{E}_{\max}$  равновероятны.

$$3.72. m = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2}}{c^2}.$$

$$3.73. m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \left[ \sqrt{(p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2)} - p_1 p_2 \cos \vartheta \right], \quad c = 1;$$

$m_\pi = 139,58 \text{ МэВ.}$

$$3.74. m_1^2 = m^2 + m_2^2 - 2 \left[ \sqrt{(p^2 + m^2)(p_2^2 + m_2^2)} - p p_2 \cos \vartheta_2 \right], \quad c = 1.$$

$$3.75. m^2 = \mathcal{E}^2 - p^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$V = \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2 \sqrt{1 - v^2}}, \quad c = 1.$$

$$3.76. T_1 = \frac{(m_0 - m_1)^2 - m_2^2}{2m_0}; T_2 = \frac{(m_0 - m_2)^2 - m_1^2}{2m_0}, c = 1.$$

а)  $T_\alpha/T_\gamma = 58,5;$

б)  $T_\nu/T_\mu = 7,27;$

в)  $T_\gamma/T_\alpha \approx \frac{2mc^2}{\Delta\mathcal{E}},$

где  $m$  — масса исходного ядра,  $\Delta\mathcal{E}$  — энергия его возбуждения, причем  $mc^2 \gg \Delta\mathcal{E}$ .

Из общих формул для  $T_1, T_2$ , а также из рассмотренных примеров видно, что большая часть энергии приходится на долю более легкой частицы.

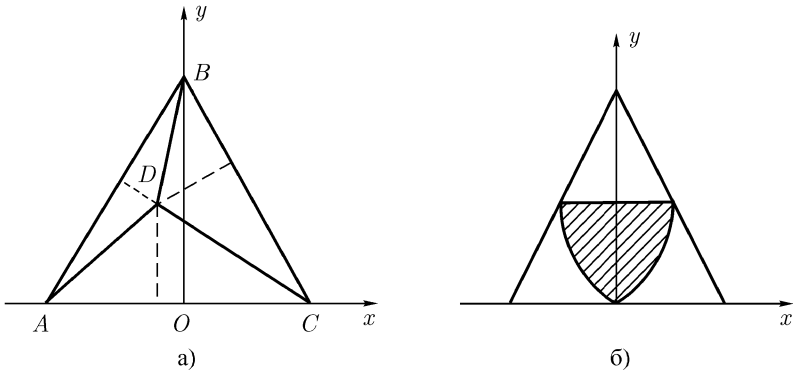


Рис. 3.18

$$3.77. Q_a = T_b \left[ 1 + \frac{T_b + 2m_b}{m_a + \sqrt{T_b^2 + 2T_b m_b + m_a^2}} \right];$$

$$Q_{\Sigma^+} = 109,6 \text{ МэВ}; M_{\Sigma^+} = 1188,7 \text{ МэВ} \quad (\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+);$$

$$Q_{\Sigma^+} = 116,1 \text{ МэВ}; M_{\Sigma^+} = 1189,3 \text{ МэВ} \quad (\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0).$$

Оба значения  $M_{\Sigma^+}$  находятся в хорошем согласии друг с другом.

3.78.

$$\omega = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar} \left( \frac{\Delta\mathcal{E}}{2mc^2} \right).$$

Энергия  $\hbar\omega$ , уносимая квантом, меньше чем  $\Delta\mathcal{E}$ , на величину энергии  $(\Delta\mathcal{E})^2/(2mc^2)$ , уносимой ядром отдачи. В условиях жесткой связи ядра

с кристаллической решеткой последняя не получает энергии (так как ее масса  $M \gg m$  очень велика) и квант уносит всю энергию,  $\hbar\omega = \Delta\mathcal{E}$ .

**3.79.** а) Закон сохранения энергии ограничивает равносторонний треугольник  $ABC$  (рис. 3.18 а), высота  $BO$  которого равна энергии распада  $Q = m - m_1 - m_2 - m_3$  ( $c = 1$ ). Расстояние от точки  $D$  до основания  $AC$  равно  $T_1$  по построению, расстояния от  $D$  до  $AB$  и  $BC$  легко вычисляются и оказываются равными  $T_2$  и  $T_3$  соответственно.

б) Величины импульсов при заданных массах всех частиц определяют заданием двух энергий, например  $T_1$  и  $T_2$  (так как  $T_3 = Q - T_1 - T_2$ ), или их двумя линейными комбинациями  $x$  и  $y$ . Импульсы частиц, образовавшихся при распаде, являются сторонами треугольника ( $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$  в системе покоя распадающейся частицы). Углы треугольника характеризуют относительные направления вылета частиц и могут быть найдены по известным  $p_1, p_2, p_3$ .

в) Границы разрешенной области определяются условиями

$$p_1 + p_2 \geq p_3, \quad -p_3 \leq p_1 - p_2 \leq p_3.$$

Эти условия приводят к области, заштрихованной на рис. 3.18 б. Сверху область ограничена прямой  $y = (m - m_1)^2/2m$ , снизу — гиперболой  $x =$

$$= \pm \sqrt{\frac{y^2 + 2m_1 y}{3}}.$$

**3.80.** Диаграмма Далица имеет вид, изображенный на рис. 3.18 б.

а)  $T_1 \max \approx T_2 \max \approx T_3 \max \approx 69,8$  МэВ.

б)  $T_1 \max = \frac{(m - m_1)^2}{2m} \approx 127$  МэВ,  $T_2 \max = T_3 \max = \frac{m^2 - m_1^2}{2m} \approx 228$  МэВ.

Максимальные импульсы всех трех частиц одинаковы.

**3.81.** Диаграмма Далица в приближении  $Q \ll m_\pi$  приведена на рис. 3.19.

$$OB = Q, \quad R = Q/3, \quad T_{\max} = 2Q/3 \approx 50 \text{ МэВ}.$$

**3.82.** Диаграмма Далица приведена на рис. 3.20.  $OB = Q$ ,  $T_{\max} \approx 210$  МэВ. Внутренняя замкнутая кривая дается уравнением

$$x = \pm \sqrt{\frac{(2m_\pi y + y^2)[(m_\omega - m_\pi)^2 - 4m_\pi^2 - 2m_\omega y]}{3[(m_\omega - m_\pi)^2 - 2m_\omega y]}}.$$

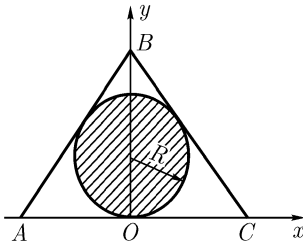


Рис. 3.19

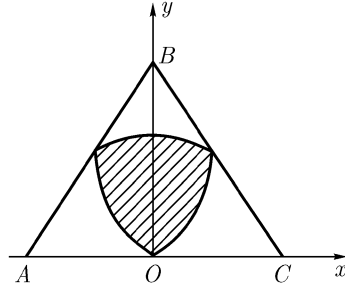


Рис. 3.20

**3.83.**  $\delta$ -функцию от 4-вектора нужно понимать как произведение четырех  $\delta$ -функций от его компонент:

$$(1) \quad \delta(p_i - p_{i1} - p_{i2} - p_{i3}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3).$$

Производя интегрирование по  $d^3\mathbf{p}_3$  с помощью (1), приходим к выражению

$$(2) \quad \Gamma = \int \frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3} \delta(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 + 2p_1 p_2 \cos \vartheta} - \mathcal{E}_3),$$

где  $\mathcal{E}_3 = m - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ ,  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ .

Представим  $d^3\mathbf{p}_2$  в виде  $d^3\mathbf{p}_2 = p_2^2 dp_2 d\Omega_2$ ,  $d\Omega_2$  — элемент телесного угла. Примем за полярную ось направление  $\mathbf{p}_1$ ; тогда  $d\Omega_2 = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ . Кроме того,  $p_2 dp_2 = \mathcal{E}_2 d\mathcal{E}_2$ , как следует из (3.41). Преобразуем  $\delta$ -функцию в (2), используя формулу (1.209):

$$(3) \quad \begin{aligned} \delta(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 + 2p_1 p_2 \cos \vartheta} - \mathcal{E}_3) &= \\ &= 2\mathcal{E}_3 \delta(2p_1 p_2 \cos \vartheta + p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 - \mathcal{E}_3^2). \end{aligned}$$

Поскольку  $-1 \leq \cos \vartheta \leq 1$ , то интеграл (2) будет отличен от нуля только при выполнении неравенств

$$p_1 + p_2 \geq p_3, \quad p_1 - p_2 \leq p_3, \quad p_1 - p_2 \geq -p_3,$$

но именно эти неравенства определяют границы разрешенной области на диаграмме Далица.

С помощью (3) и (1.207), выполнив интегрирование по  $d\vartheta$ , получим

$$\Gamma = \pi \int \frac{d^3\mathbf{p}_1 d\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 p_1} = 4\pi^2 \int d\mathcal{E}_1 d\mathcal{E}_2.$$

Перейдем теперь к интегрированию по переменным

$$x = \frac{T_2 - T_3}{\sqrt{3}} = \frac{\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2 + m_3 - m_2 - m}{\sqrt{3}}, \quad y = T_1 = \mathcal{E}_1 - m_1,$$

которые использовались при построении диаграммы Далица. Преобразовав элемент  $d\mathcal{E}_1 d\mathcal{E}_2$ , найдем

$$\Gamma = 2\sqrt{3}\pi^2 \int dx dy,$$

где область интегрирования ограничена внутренней кривой диаграммы (см. рис. 3.18 б–3.20).

Последняя формула показывает, что элемент фазового объема  $d\Gamma = 2\sqrt{3}\pi^2 dx dy$  пропорционален элементу площади на диаграмме Далица. Энергии  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  частиц, образующихся при распаде, можно измерять экспериментально и наносить соответствующие точки на диаграмму Далица. При этом густота точек будет пропорциональна величине  $\rho$  (см. условие задачи), которая таким образом может быть найдена из данных эксперимента.

**3.84.** Рассмотрим 4-вектор энергии — импульса системы частиц  $p_i$ . Он сохраняется, т. е. его соответствующие компоненты до и после реакции равны между собой. При значении кинетической энергии  $T_0$ , соответствующем порогу реакции, образовавшиеся частицы покоятся в системе ц. и. (заметим, что в лабораторной системе отсчета частицы не могут покоиться при пороговом значении  $T_0$ , так как это означало бы нарушение закона сохранения импульса). Вектор полного 4-импульса системы до реакции имеет в лабораторной системе вид

$$p_{(0)}^i = \left( \frac{\mathcal{E}_0}{c} + m_1 c, \mathbf{p}_0 \right),$$

где  $\mathcal{E}_0$  — полная энергия и  $\mathbf{p}_0$  — полный импульс, соответствующие порогу реакции.

После же реакции в системе ц. и. 4-импульс равен  $p'_i = (Mc, 0)$ . Вследствие инвариантности квадрата 4-вектора и закона сохранения 4-импуль-

са  $p_{(0)}^i p_i^{(0)} = p'^i p'_i$ . Запишем последнее равенство в развернутом виде

$$M^2 c^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} + 2m_1 \mathcal{E}_0 + m_1^2 c^2 - p_0^2,$$

откуда

$$T_0 = \frac{c^2}{2m_1} (M - m_1 - m)(M + m_1 + m).$$

**3.85.**  $T_0 \approx 3,5 \times 10^6$  МэВ = 3,5 ТэВ.

**3.86.** а)  $T_0 = 288$  МэВ; б)  $T_0 = 160$  МэВ; в)  $T_0 = 763$  МэВ;

г)  $T_0 = \frac{2m_p(m + 2m_p)c^2}{m}$ .

В частном случае столкновения с протоном  $m = m_p$  имеем

$$T_0 = 6m_p c^2 = 5,63 \text{ ГэВ}.$$

Приближенная формула для пороговой энергии

$$T_0 = \frac{2(A + 2)}{A} m_p c^2.$$

При больших  $A$ ,  $T_0 \approx 2m_p c^2$ .

**3.87.**  $T_0 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Delta \mathcal{E}$ . В случае а) имеем по приведенной выше приближенной формуле

$$\Delta \mathcal{E} = T_0 = 2,18 \text{ МэВ} \quad (m = 0).$$

По точной формуле (см. задачу 3.35) мы получили бы больше на  $\frac{|Q|^2}{2Mc^2} \approx \approx 0,0012$  МэВ, где  $Q = -(M - m_1 - m)c^2$  — энергетический выход реакции. В случае б) приближенная формула дает  $T_0 = 2|Q| = 7,96$  МэВ. Отличие от точной формулы составляет 0,003 МэВ.

**3.88.**

	$\Delta M, \text{ г}$	$\Delta M/M$
а)	$4,6 \times 10^{-26}$	$0,65 \times 10^{-2}$
б)	$3,1 \times 10^{-26}$	$0,35 \times 10^{-2}$
в)	$3,6 \times 10^{-25}$	$0,85 \times 10^{-3}$
г)	$1,2 \times 10^{-33}$	$1,4 \times 10^{-11}$
д)	$10^{-35}$	$3 \times 10^{-13}$

3.89.

$$M^2 = 2(m^2 + \mathcal{E}_- \mathcal{E}_+ / c^4 - \mathbf{p}_- \cdot \mathbf{p}_+ / c^2) > 0,$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{m^2 c^4 + \mathcal{E}_- \mathcal{E}_+ - c^2 \mathbf{p}_- \cdot \mathbf{p}_+}{(\mathcal{E}_- + \mathcal{E}_+)(1 - V \cos \theta / c)},$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_- + \mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_1,$$

где  $V = (\mathbf{p}_- + \mathbf{p}_+) / M$ ,  $\theta$  — угол вылета первого кванта относительно  $V$ ,  $\mathcal{E}_\pm$  — энергии электрона и позитрона в Л-системе.

3.90. Уравнение реакции имеет вид

$$\gamma + \text{частица} \rightarrow e^+ + e^- + \text{частица}.$$

Порог можно найти по общей формуле (см. задачу 3.84)

$$T_0 = \hbar \omega_0 = \frac{c^2}{2m_1} (m_1 + 2m - m_1)(m_1 + 2m + m_1) = 2mc^2 \left(1 + \frac{m}{m_1}\right),$$

где  $m$  — масса электрона (или позитрона). Когда частицы нет, так что  $m_1 \rightarrow 0$ , пороговая энергия  $T_0 \rightarrow \infty$ , что и означает невозможность реакции.

Последний результат можно также получить, показав невозможность выполнения равенства  $k_i = p_{+i} + p_{-i}$ , где  $k_i$ ,  $p_{+i}$ ,  $p_{-i}$  — 4-импульсы фотона позитрона и электрона. Возводя обе части последнего равенства в квадрат, будем иметь

$$k^i k_i = (\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-)^2 - (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2.$$

Но  $k^i k_i = 0$ , а инвариантная величина, стоящая в правой части, не равна нулю ни при каких значениях  $\mathbf{p}_+$ ,  $\mathbf{p}_-$ . Это становится очевидным, если перейти в систему отсчета, в которой  $\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- = 0$ .

$$3.92. \quad v = \frac{c \sqrt{\mathcal{E}^2 - m_1^2 c^4}}{\mathcal{E} + m_2 c^2}.$$

3.93. По закону сохранения 4-импульса

$$(1) \quad p_{1i}^{(0)} + p_{2i}^{(0)} = p_{1i} + p_{2i}.$$

Чтобы определить угол рассеяния первой частицы, перенесем  $p_{1i}$  налево и возведем обе части получившегося равенства в квадрат:

$$(2) \quad p_1^{(0)i} p_{1i}^{(0)} + p_2^{(0)i} p_{2i}^{(0)} + p_1^i p_{1i} + p_2^i p_{2i} + 2p_1^{(0)i} p_2^{(0)i} - 2p_{1i}^{(0)} p_1^i - 2p_{2i}^{(0)} p_2^i = p_{2i} p_2^i.$$

Согласно (3.41.),  $p_1^{(0)i} p_{1i}^{(0)} = p_1^i p_{1i} = m_1^2 c^2$ ,  $p_2^{(0)i} p_{2i}^{(0)} = p_2^i p_{2i} = m_2^2 c^2$ . Скалярные произведения преобразуются следующим образом ( $p_2^{(0)} = 0$ ):

$$\begin{aligned} -p_{1i}^{(0)} p_2^{(0)i} &= \mathbf{p}_1^{(0)} \cdot \mathbf{p}_2^{(0)} - \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_1^{(0)} \mathcal{E}_2^{(0)} = -\mathcal{E}_0 m_2, & p_{2i}^{(0)} p_1^i &= m_2 \mathcal{E}_1, \\ -p_{1i}^{(0)} p_1^i &= \mathbf{p}_1^{(0)} \cdot \mathbf{p}_1 - \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_1^{(0)} \mathcal{E}_1 = p_0 p_1 \cos \vartheta_1 - \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1}{c^2}, \end{aligned}$$

где  $p = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + m_1^2 c^4}$ . Подставляя полученные выражения в (2), найдем

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\mathcal{E}_1 (\mathcal{E}_0 + m_2 c^2) - \mathcal{E}_0 m_2 c^2 - m_1^2 c^4}{c^2 p_0 p_2}.$$

Аналогично

$$\cos \vartheta_2 = \frac{(\mathcal{E}_0 + m_2 c^2)(\mathcal{E}_2 - m_2 c^2)}{c^2 p_0 p_2}.$$

### 3.94.

$$(1) \quad \mathcal{E}_1 = m_1 c^2 \frac{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(1 + \gamma_0 \frac{m_2}{m_1}\right) \pm \cos \vartheta_1 (\gamma_0^2 - 1) \sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} - \sin^2 \vartheta_1}}{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - (\gamma_0^2 - 1) \cos^2 \vartheta_1},$$

$$(2) \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 + (\gamma_0^2 - 1) \cos^2 \vartheta_2}{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - (\gamma_0^2 - 1) \cos^2 \vartheta_2} m_2 c^2,$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{m_1 c^2}.$$

Из этих формул видно, что при  $m_1 > m_2$  возможно рассеяние только на углы  $\vartheta_1$ , не превышающие  $\arcsin \sqrt{m_2/m_1}$  (подкоренное выражение в (1) должно быть положительно). При этом каждому значению  $\vartheta_1$  отвечают два значения энергии  $\mathcal{E}_1$ .



При  $m_1 = m_2$  угол рассеяния  $\vartheta_1$  не превышает  $\pi/2$  и каждому значению  $\vartheta_1$  отвечает только одно значение энергии, соответствующее выбору знака «+» в формуле (1). Знаку «-» отвечало бы значение  $\mathcal{E}_1 = m_1 c^2$  не зависимо от угла рассеяния, что, очевидно, не соответствует действительности. По аналогичной причине в числителе формулы (2) для  $\mathcal{E}_2$  оставлен только знак «+».

При  $m_1 < m_2$  возможно рассеяние на любой угол и каждому значению  $\vartheta_1$  отвечает одно значение  $\mathcal{E}_1$ . Если  $0 < \vartheta_1 < \pi/2$ , то в формуле (1) нужно выбрать знак «+», если  $\pi/2 < \vartheta_1 < \pi$ , то нужно выбрать знак «-». При таком выборе знаков рассеянию налетающей частицы на больший угол соответствует большая потеря энергии, как и должно быть.

$$3.95. \quad \mathcal{E} \approx \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \frac{\mathcal{E}_0}{Mc^2}(1 - \cos \vartheta)}.$$

$$3.96. \quad \mathcal{E} \approx \frac{\mathcal{E}_0 - \Delta E}{1 + \frac{\mathcal{E}_0}{Mc^2}(1 - \cos \vartheta)}.$$

$$3.97. \quad T_1 = \frac{T_0 \cos^2 \vartheta_1}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{T_0}{mc^2} \right) \sin^2 \vartheta_1}.$$

3.98.

$$T_1 = T_0 \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 - 2 \sin^2 \vartheta_1 \pm 2 \cos \vartheta_1 \sqrt{\left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 - \sin^2 \vartheta_1} \right];$$

$$T_2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_0 \cos^2 \vartheta_2.$$

Правило знаков сформулировано в решении задачи 3.94.

3.99. Угол разлета частиц  $\chi = \vartheta_1 + \vartheta_2$  выражается формулой

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{(v'_1 + v'_2) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \vartheta'}{\frac{V^2}{c^2} v'_1 \sin^2 \vartheta' + (V - v'_1) (1 - \cos \vartheta')}$$

(ср. с задачей 3.28).

При  $m_1 = m_2$  скорости  $v'_1 = v'_2 = V$  и

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{2c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V^2 \sin \vartheta'}.$$

В этом случае  $\chi < 90^\circ$ .

**3.100.** Поступая так же, как при решении задачи 3.93, получим

$$\omega = \frac{\omega_0 \left( \frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_0 \cos \vartheta_0 \right)}{\frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_0 \cos \vartheta_1 + \frac{\hbar \omega_0}{c} (1 - \cos \vartheta)},$$

где  $\vartheta$  — угол между направлениями движения первичного и рассеянного фотонов,  $\vartheta_1$  — угол между направлениями начального движения электрона и движения фотона после рассеяния.

Если электрон до столкновения покоился, то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar \omega_0}{mc^2} (1 - \cos \vartheta)}.$$

**3.101.** Энергия рассеянного кванта максимальна при  $\vartheta_0 = \vartheta = \pi$ ,  $\vartheta_1 = 0$ , т.е. при лобовом столкновении с рассеянием кванта назад. При этом

$$(1) \quad \hbar \omega \approx \hbar \omega_0 \frac{2\mathcal{E}_0}{\frac{(mc^2)^2}{2\mathcal{E}_0} + 2\hbar \omega_0}.$$

Из (1) видно, что в ультрарелятивистском случае происходит значительное «ужесточение» кванта,  $\hbar \omega \gg \hbar \omega_0$ . Отметим два частных случая.

При  $\hbar \omega_0 \ll mc^2 \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)$  формула (1) дает:  $\mathcal{E}_0 \gg \hbar \omega = 4\hbar \omega_0 \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \gg \hbar \omega_0$ .

Если же  $\hbar \omega_0 \gg mc^2 \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)$ , то  $\hbar \omega$  приближается к  $\mathcal{E}_0$ .

$$3.102. \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \hbar\omega_0 \frac{p_0 c (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1) + \hbar\omega_0 (1 - \cos \vartheta)}{\mathcal{E}_0 - p_0 c \cos \vartheta_1 + \hbar\omega_0 (1 - \cos \vartheta)}.$$

Обозначения углов те же, что в задаче 3.100. Покоившийся вначале электрон при столкновении с фотоном всегда увеличивает свою энергию:

$$\mathcal{E} - mc^2 = \frac{(\hbar\omega_0)^2 (1 - \cos \vartheta)}{mc^2 + \hbar\omega_0 (1 - \cos \vartheta)}.$$

Если электрон обладает до рассеяния импульсом  $p_0 \gg \hbar\omega/c$ , то его энергия увеличивается при рассеянии, если  $\vartheta_0 < \vartheta_1$ , и уменьшается в противном случае. Максимальное ускорение электрона получится при  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\vartheta = \vartheta_2 = \pi$ . При этом

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 2\hbar\omega_0 \frac{p_0 c + \hbar\omega_0}{\mathcal{E}_0 + p_0 c + 2\hbar\omega_0}.$$

Если электрон нерелятивистский, но  $p_0 c \gg \hbar\omega_0$ , то  $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 2\hbar\omega_0 (v_0/c) \ll \ll \hbar\omega_0$ . Если электрон ультрарелятивистский, то  $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 \approx \hbar\omega_0$  и условия ускорения электрона оптимальны.

$$3.103. s = 4(m^2 + q^2), t = -2q^2(1 - \cos \vartheta), u = -2q^2(1 + \cos \vartheta).$$

$$3.104. \mathcal{E}_a = \frac{1}{2m_b} (s - m_a^2 - m_b^2), \quad p_a = \frac{1}{2m_b} \sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)},$$

$$\mathcal{E}'_a = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_a^2 - m_b^2), \quad p' = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)},$$

$$\mathcal{E}'_b = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_b^2 - m_a^2),$$

где

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

Поскольку в системе ц. и.  $\mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b$ , то величина  $s$  имеет смысл квадрата полной энергии в этой системе отсчета:

$$s = (\mathcal{E}'_a + \mathcal{E}'_b)^2 = (\mathcal{E}'_c + \mathcal{E}'_d)^2.$$

$$3.105. \mathcal{E}_c = \frac{1}{2m_b} (m_b^2 + m_c^2 - u),$$

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2m_b} (m_b^2 + m_d^2 - t); \quad c = 1.$$

$$3.106. \cos \Theta = \frac{(s - m_a^2 - m_b^2)(m_b^2 + m_c^2 - u) + 2m_b^2(t - m_a^2 - m_c^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}\sqrt{\lambda(u, m_b^2, m_c^2)}};$$

$$\cos \Theta' = \frac{s^2 + s(2t - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2 - m_d^2) + (m_a^2 - m_b^2)(m_c^2 - m_d^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}\sqrt{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}}$$

Здесь  $c = 1$ , а величина  $\lambda$  определена в ответе к задаче 3.104.

**3.107.** Величина  $s = (\mathcal{E}'_\pi + \mathcal{E}'_p)^2$  имеет смысл квадрата полной энергии двух частиц в системе ц. и., поэтому она всегда положительна. Минимальное значение  $s_{\min} = (m + M)^2$  соответствует случаю, когда  $\pi$ -мезон (масса  $m$ ) и протон (масса  $M$ ) покоятся в системе ц. и. Таким образом,  $(m + M)^2 \leq s \leq \infty$ .

Косинус угла рассеяния  $\Theta'$  в системе ц. и. связан с  $s$  и  $t$  формулой

$$(1) \quad \cos \Theta' = \frac{s^2 + s(2t - 2M^2 - m^2) + M^2(M^2 - m^2)}{(s - M^2)\sqrt{s^2 - 2s(M^2 + m^2) + (M^2 - m^2)^2}}.$$

Поскольку  $-1 \leq \cos \Theta' \leq 1$ , то, подставляя в это двойное неравенство  $\cos \Theta'$  из (1), найдем допустимые при заданном  $s$  значения  $t$ .

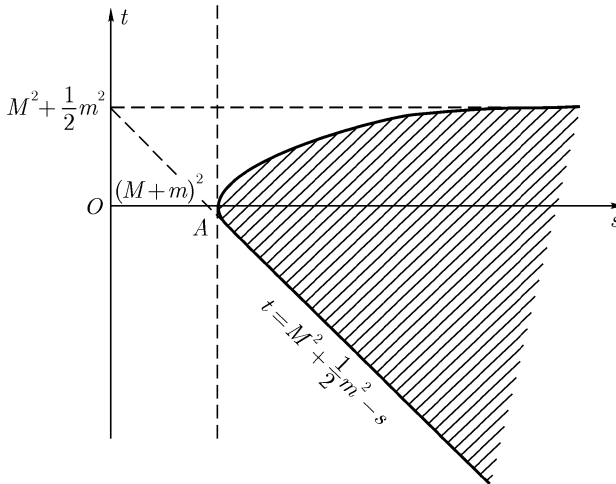


Рис. 3.21

Физическая область заштрихована на рис. 3.21. Порогу реакции отвечает точка  $A$ , причем  $s_A = (M + m)^2$ ,  $t_A = -\frac{m^2 M}{M + m}$ .

$$T_0 = m + \frac{m^2}{2M}, \quad T_\pi = \frac{m^3}{2M(M + m)}.$$

**3.108.** Искомые области изображены на рис. 3.22.

**3.109.** Разрешенные области для первых двух процессов изображены на рис. 3.23 а, для третьего — на рис. 3.23 б.

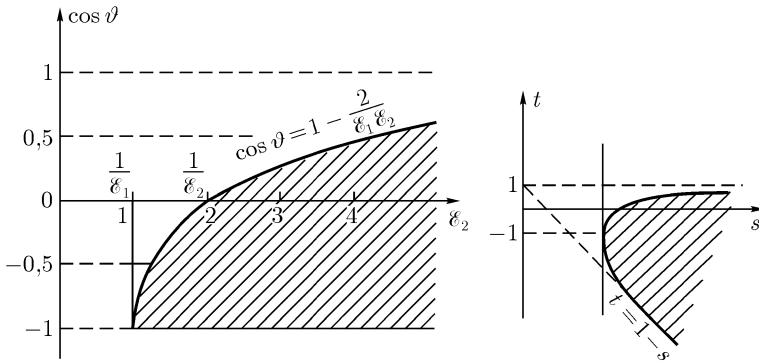


Рис. 3.22

Можно построить одну кинематическую диаграмму для всех трех процессов, рассматривая их как три возможных канала одной реакции, в которой участвуют два нуклона и два мезона. Начальные и конечные состояния мезонов и нуклонов в рассматриваемых каналах различаются энергиями, импульсами и зарядами<sup>12</sup>.

Для построения диаграммы (рис. 3.24) проведем три прямые, на которых соответственно  $s = 0$ ,  $t = 0$  и  $u = 0$ , таким образом, чтобы они, пересекаясь, образовывали равносторонний треугольник с высотой  $h = s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$  ( $c = 1$ ). Значениями  $s = s_0 = \text{const}$  будет соответствовать прямая, параллельная оси  $s = 0$  и отстоящая от нее на расстояние  $|s_0|$ . Эта прямая проводится с той же стороны, с которой находится треугольник, если  $s_0 > 0$ , и со стороны, противоположной треугольнику, при  $s_0 < 0$ . Аналогично строятся линии  $t = \text{const}$  и  $u = \text{const}$ .

<sup>12</sup>А также еще некоторыми характеристиками, изучаемыми в квантовой теории.

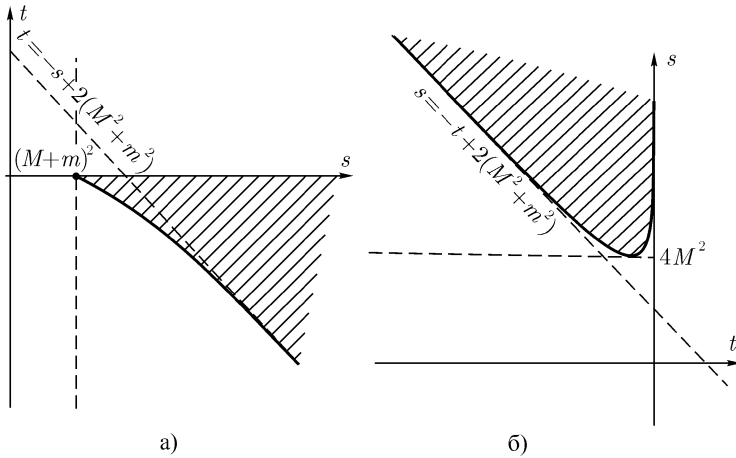


Рис. 3.23

В результате на плоскости построена косоугольная система координат и любой точке плоскости сопоставлены три числа  $s$ ,  $t$  и  $u$ , положительные или отрицательные. Сумма этих трех величин удовлетворяет нужному условию (3.50). Чтобы в этом убедиться, возьмем произвольную точку  $D$  и опустим из нее перпендикуляры на стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  или их продолжения. Поскольку площадь  $ABC =$  площади  $ABD -$  (площадь  $BCD +$  площадь  $ACD$ ), то

$$(1) \quad DM - DN - DK = h = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2.$$

Но  $-DN = s$ ,  $-DK = t$ ,  $-DM = u$ , откуда и следует (3.50).

Для нашей цели удобно несколько изменить определения  $s$ ,  $t$  и  $u$  по сравнению с (3.49). Пусть

$$(2) \quad \begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^i (p_a + p_b)_i, & t &= (p_a + p_c)^i (p_a + p_c)_i, \\ u &= (p_a + p_d)^i (p_a + p_d)_i, \end{aligned}$$

где для частиц, исчезающих в результате реакции,  $p^i = (-\mathcal{E}, -\mathbf{p})$ , а для частиц, рождающихся в реакции,  $p^i = (\mathcal{E}, \mathbf{p})$ . Это правило знаков соответствует тому, что  $\sum_a p_a^i = 0$ , как и в случае распада. Припишем индексы  $a$  и  $b$  мезонам, а  $c$  и  $d$  — нуклонам. Тогда для канала в)  $p_a^i = (-\mathcal{E}_a, -\mathbf{p}_a)$ ,



вием  $p_{ai} + p_{bi} + p_{ci} + p_{di} = 0$ . Из 4-импульсов частиц с учетом того, что при заданных массах всех частиц  $m_a^2 = p_{ai}^2$  и т. д., как нетрудно убедиться, можно составить только 2 независимых инварианта, например  $s = (p_a + p_b)_i (p_a + p_b)_i$  и  $t = (p_a + p_c)_i (p_a + p_c)_i$ . Поэтому для изображения таких процессов требуется двумерное пространство (кинематическая плоскость).

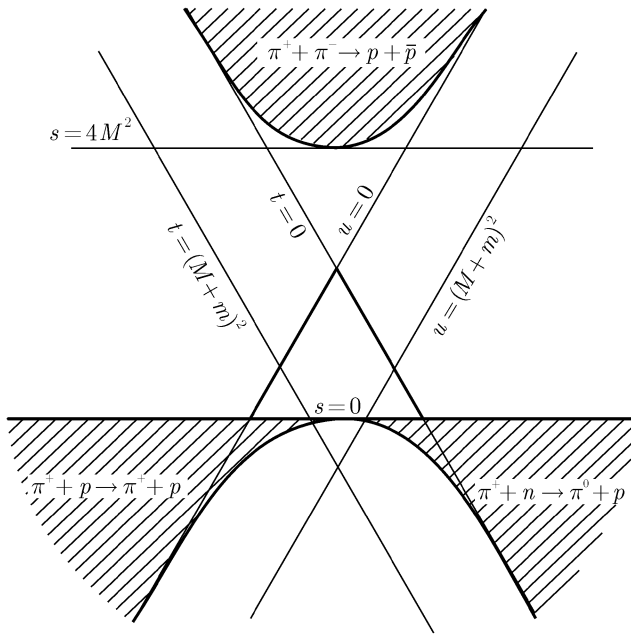


Рис. 3.25

**3.111.** Если частица, двигаясь с 4-импульсом  $p_{0i}$ , испустила в среде фотон с 4-импульсом  $k = \left( \frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\omega\mathbf{n}}{c} \right)$ , то законы сохранения энергии и импульса могут быть выражены четырехмерным равенством

$$p_{0i} = p_i + k_i,$$

где  $p_i$  — 4-импульс частицы после излучения фотона. Перенесем  $k_i$  налево и возведем обе части получившегося равенства в квадрат. После элементар-



ных преобразований получим

$$(1) \quad \cos \vartheta = \frac{1}{n\beta} \left[ 1 + \frac{\pi\Lambda}{n\lambda} (n^2 - 1) \sqrt{1 - \beta^2} \right],$$

где  $\Lambda = \hbar/mc$  — комптонова длина волны частицы,  $\lambda = 2\pi c/\omega n$  — длина волны фотона,  $\beta = v/c$ . второй член, равный по порядку величины  $\Lambda/\lambda$ , обычно очень мал. Если опустить этот член, выражающий квантовые поправки ( $\Lambda$  пропорциональна  $\hbar$ ), то выражение (1) сведется к классическому условию излучения Вавилова–Черенкова:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta}.$$

**3.113.** Обозначив через  $p_{0i}$  и  $p_i$  4-импульсы частицы до и после излучения, через  $k_i$  — 4-импульс фотона, напомним закон сохранения энергии и импульса в виде

$$p_{0i} - k_i = p_i.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и отбрасывая член с  $\hbar^2$ , получим

$$(m^2 - m_0^2) c^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + \frac{2\mathcal{E}_0 k}{c} = 0,$$

где  $m_0$  — масса возбужденной частицы,  $m$  — масса частицы в нормальном состоянии.

Представим разность  $c^2(m^2 - m_0^2)$  в виде  $c^2(m_0 - m)(m_0 + m) \approx \approx 2\hbar\omega_0 m$ . Тогда

$$(1) \quad n(\omega)\beta \cos \vartheta = 1 - \frac{\omega_0}{\omega} \sqrt{1 - \beta^2},$$

где  $\beta = v/c$ . При  $\omega_0 \rightarrow 0$  равенство (1) переходит в условие

$$n(\omega)\beta \cos \vartheta = 1$$

возникновения излучения Вавилова–Черенкова. Это излучение не связано, таким образом, с изменением внутреннего состояния частицы.

При  $\omega_0 \neq 0$  перепишем (1) в виде

$$(2) \quad \omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - n(\omega)\beta \cos \vartheta}.$$

Формулой (2) описывается эффект Доплера в преломляющей среде (ср. с задачей 3.49). Она применима, если  $n(\omega)\beta \cos \vartheta < 1$  и отличается от соответствующей формулы, описывающей эффект Доплера в вакууме, только наличием  $n(\omega)$  в знаменателе. При  $\beta \ll 1$  никаких качественно новых явлений не возникает, но при  $\beta \approx 1$  и при наличии дисперсии в среде явление усложняется.

В общем случае формула (2) представляет собой нелинейное уравнение относительно  $\omega$  ( $n$  — функция  $\omega$ !) и может иметь более чем одно решение. При этом вместо одной смещенной линии, как в обычном эффекте Доплера, в лабораторной системе будет наблюдаться несколько линий (сложный эффект Доплера).

**3.114.** Поступая так же, как и при решении задачи 3.113, получим следующие результаты.

Излучение частоты  $\omega$ , сопровождаемое возбуждением частицы, может возникнуть, если скорость  $v = \beta c$  движения частицы превосходит пороговое значение  $\frac{c}{n(\omega) \cos \vartheta}$  ( $\vartheta$  — угол между направлением скорости частицы и направлением импульса фотона). Необходимая для этого энергия заимствуется из кинетической энергии частицы. Излучение такого типа наблюдается при фиксированном значении  $\omega$  только в некотором интервале острых углов  $\vartheta$  внутри черенковского конуса, поверхность которого определяется уравнением  $n\beta \cos \vartheta = 1$ . Наблюдаемая частота  $\omega$  связана с углом  $\vartheta$  и величинами  $\beta$ ,  $n(\omega)$  формулой

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{n(\omega)\beta \cos \vartheta - 1} \quad [n(\omega)\beta \cos \vartheta > 1],$$

представляющей собой, как и в случае задачи 3.113, уравнение относительно  $\omega$ . Это уравнение допускает, в общем случае, несколько решений (сложный сверхсветовой эффект Доплера).

**3.115.** Обозначим через  $\vartheta_1$  угол между начальным импульсом электрона  $p_0$  и направлением распространения мягкого кванта, а через  $\vartheta_2$  — угол между  $p_0$  и направлением распространения жесткого кванта. Из закона сохранения 4-импульса (ср. задачу 3.111) в предположении  $\hbar\omega_1 \ll \mathcal{E}_0$ ,  $\hbar\omega_0 \ll \mathcal{E}_0$  следует

$$(1) \quad \cos \vartheta_2 = \frac{c}{v_0 n(\omega_1)} + \frac{\hbar\omega_2}{\hbar\omega_1} \cdot \frac{1 - \frac{v_0}{c} \cos \vartheta_1}{\frac{v_0}{c} n(\omega_1)}.$$

Отсюда видно, что жесткий черенковский квант  $\hbar\omega_2$  распространяется внутри черенковского конуса, отвечающего мягкому черенковскому кванту с частотой  $\omega_1$ . Угол раствора этого конуса при принятой точности определяется условием  $\cos\vartheta_1 = c/v_0 n(\omega_1)$ . Для возникновения жесткого излучения Вавилова–Черенкова необходимо выполнение неравенства  $v_0 > c/n(\omega_1)$ , как и в случае обычного черенковского излучения. Это возможно только при  $n(\omega_1) > 1$ . Следовательно, один из квантов должен быть достаточно мягким. Решая (1) относительно  $\hbar\omega_2$ , получим

$$\hbar\omega_2 = \hbar\omega_1 \frac{\frac{n(\omega_1)v_0}{c} \cos\vartheta_1 - 1}{1 - \frac{v_0}{c} \cos\vartheta_2}.$$

Максимальное значение энергии  $\hbar\omega_2$  достигается при  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ :

$$(\hbar\omega_2)_{\max} = \hbar\omega_1 \frac{n(\omega_1) \frac{v_0}{c} - 1}{1 - \frac{v_0}{c}}$$

$$\mathbf{3.116.} \quad \hbar\omega_2 = \frac{2\hbar\omega_1 [n(\omega_1) \cos\vartheta_1 - 1]}{(mc^2/\mathcal{E}_0)^2 + 2(\hbar\omega_1/\mathcal{E}_0)[n(\omega_1) \cos\vartheta_1 - 1] + \vartheta_2^2}.$$

Максимальное значение  $\hbar\omega_2$  достигается при  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ . Частные случаи: при  $\mathcal{E}_0 \ll (mc^2)^2/\hbar\omega_1$

$$(\hbar\omega_2)_{\max} \approx 2\hbar\omega_1 \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 [n(\omega_1) - 1],$$

при  $\mathcal{E}_0 \gg (mc^2)^2/\hbar\omega_1$

$$(\hbar\omega_2)_{\max} \approx \mathcal{E}_0.$$

Из последнего выражения видно, что жесткий черенковский квант может уносить большую часть первоначальной энергии ультрарелятивистского электрона.

**3.117.** Угол рассеяния принимает дискретные значения, определяемые уравнением

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{n\pi\hbar}{ap_0},$$

где  $\frac{1}{a} = \frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \frac{n_3}{a_3}$ ,  $n_i$  — целые числа.

**3.119.** При  $h\omega \ll \mathcal{E}_0$

$$h\omega = \frac{(qc)^2/2\mathcal{E}_0}{(mc^2/\mathcal{E}_0)^2 + \vartheta^2 - 2(qc/\mathcal{E}_0)}.$$

Энергия  $h\omega$  тормозного кванта принимает дискретные значения при фиксированных значениях угла  $\vartheta$ , так как передаваемый импульс  $q = 2\pi\hbar g$  дискретен.

**3.120.** Согласно результатам задачи 2.56, электростатическая энергия заряженного шара дается выражением  $W = \alpha e^2/R$ , где  $e$  — полный заряд шара,  $\alpha$  — численный множитель порядка единицы. Приравняв  $W = m_e c^2$ , находим  $R = \alpha e^2/m_e c^2$ . Величина

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8 \times 10^{-13} \text{ см}$$

называется **классическим радиусом электрона**. Этот параметр появляется во многих задачах электродинамики. Однако ему нельзя приписывать буквальный смысл радиуса элементарной частицы, так как классическая теория, на основе которой получена его оценка, из-за квантовых эффектов теряет силу уже на значительно больших расстояниях

$$\Lambda = \frac{\hbar}{mc}.$$

Для электрона  $\Lambda = 137r_0 = 3,9 \times 10^{-11}$  см. Величина  $\Lambda$  называется **комптоновской длиной волны**.

---

---

## ГЛАВА 4

# Вариационный принцип в релятивистской механике и теории поля

### 4.1. Четырехмерные векторы и тензоры

**Преобразования тензоров.** При переходе от одной инерциальной системы  $S'$  к другой  $S$  контравариантные компоненты 4-вектора преобразуются по правилу

$$A^i = \Lambda^i_k A'^k, \quad (4.1)$$

где матрица  $(\Lambda^i_k)$  преобразования Лоренца частного вида (3.20) (буст вдоль оси  $Ox$ ) дается таблицей

$$\Lambda^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Матрицу преобразования часто записывают через параметр  $\psi$  («быстроту») согласно формулам

$$\text{ch } \psi = \gamma, \quad \text{sh } \psi = \beta\gamma, \quad \text{ch}^2 \psi - \text{sh}^2 \psi = 1. \quad (4.3)$$

Ковариантные компоненты 4-вектора, согласно (3.21) и (3.18), преобразуются с другой матрицей:

$$A_i = \Lambda_i^k A'_k, \quad (4.4)$$

где

$$\Lambda_i^k = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & -\text{sh } \psi & 0 & 0 \\ -\text{sh } \psi & \text{ch } \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Определения (4.1), (4.4) непосредственно обобщаются на тензор любого ранга. Так, смешанный тензор  $\Pi$  ранга представляет собой 16-компонентную величину  $T_i^k$  ( $i, k = 0, 1, 2, 3$ ), преобразующуюся по правилу

$$T_i^k = \Lambda_i^m \Lambda_n^k T_m'^n \quad (4.6)$$

Рассмотрению более общих преобразований Лоренца, чем то, которому отвечают матрицы (4.2), (4.5), посвятим следующий пример.

**Пример 4.1.** *Какой вид имеет наиболее общее линейное преобразование координат? Какие условия накладывает требование инвариантности интервала между двумя событиями на коэффициенты преобразования? Сколько независимых параметров определяют такое преобразование?*

**Решение.** Преобразование имеет вид

$$x^k = \Lambda_n^k x'^n + a^k, \quad (4.7)$$

где  $\Lambda_n^k, a^k$  — коэффициенты преобразования. Поскольку координаты — действительные величины, то и коэффициенты преобразования должны быть действительными. Тождественному преобразованию отвечают значения

$$\Lambda_n^k = \delta_n^k, \quad a^k = 0. \quad (4.8)$$

При  $\Lambda_n^k = \delta_n^k$  имеем

$$x^k = x'^k + a^k, \quad (4.9)$$

откуда следует, что  $a^k$  — 4-вектор сдвига системы отсчета, компоненты которого независимы и произвольны.

Из условия инвариантности малого интервала  $ds'^2 = ds^2$  находим

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} \Lambda_m^i \Lambda_n^k dx'^m dx'^n = g_{mn} dx'^m dx'^n,$$

откуда

$$g_{ik} \Lambda_m^i \Lambda_n^k = g_{mn}. \quad (4.10)$$

Умножая последнее равенство на  $g^{nr}$ , получим

$$g_{ik} \Lambda_n^k g^{nr} \Lambda_m^i = \delta_m^r. \quad (4.11)$$

Вспомня определение обратной матрицы  $\Lambda^{-1}$ ,

$$\Lambda^n_i (\Lambda^{-1})^i_m = (\Lambda^{-1})^n_i \Lambda^i_m = \delta_m^n, \quad (4.12)$$

находим для нее следующее выражение:

$$(\Lambda^{-1})^n_i = g_{ik} \Lambda^k_r g^{rn} = \Lambda^i_n. \quad (4.13)$$

Обращаем внимание читателя на обратный порядок индексов  $i$  и  $n$  в правой и левой частях. Этот факт в совокупности с явным видом метрического тензора  $g_{ik}$  означает, что обратная матрица получается из исходной путем транспонирования и изменения знака элементов первой строки и первого столбца (отвечающих индексу 0). Преобразование, обратное (4.7), выглядит следующим образом:

$$x'^i = (\Lambda^{-1})^i_k (x^k - a^k) = \Lambda_k^i (x^k - a^k). \quad (4.14)$$

Свойство (4.11) матрицы преобразования называется **псевдоортогональностью**. Оно означает, что 16 матричных элементов  $\Lambda^i_m$  ( $i, m = 0, 1, 2, 3$ ) связаны между собой десятью соотношениями (уравнений десять, а не шестнадцать, так как перемена местами индексов  $m$  и  $r$  не приводит к новым равенствам). Следовательно, матрица преобразования  $\Lambda$  определяется шестью независимыми параметрами. Это находится в соответствии с физическими представлениями о преобразовании Лоренца общего вида, которое задается шестью параметрами (например, величиной и направлением относительной скорости и тремя углами, определяющими ориентацию пространственных осей). Указанные шесть параметров, как и четыре компоненты вектора сдвига  $a^k$ , меняются непрерывным образом и в совокупности образуют десять независимых величин.

Кроме десяти непрерывных параметров, преобразование (4.7) определяется еще двумя дискретными параметрами, принимающими всего по два значения. Это следует из равенства (4.11): поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей, то

$$(\det \hat{g})^2 (\det \hat{\Lambda})^2 = 1,$$

или

$$\det \hat{\Lambda} = \pm 1. \quad (4.15)$$

Положив в (4.11)  $r = m = 0$ , находим

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2 = 1, \quad (4.16)$$

откуда  $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$  или

$$\Lambda^0_0 / |\Lambda^0_0| = \pm 1. \quad (4.17)$$

Таким образом, кроме десяти непрерывных параметров преобразования необходимо задать знак  $\det \hat{\Lambda}$  и знак  $\Lambda^0_0$ .

Тождественному преобразованию соответствует  $\det \widehat{\Lambda} = +1$  и  $\Lambda^0_0 = +1$ , и никакими изменениями непрерывных параметров невозможно изменить знаки этих величин. Значениям  $\Lambda^0_0 = -1$  и  $\det \widehat{\Lambda} = -1$  соответствует, в частности, отражение времени при неизменных координатах (преобразование  $t' = -t$ ,  $x'^\mu = x^\mu$ ). Значениям  $\Lambda^0_0 = -1$ ,  $\det \widehat{\Lambda} = +1$  соответствует, например, инверсия всех четырех осей,  $x'^k = -x^k$ ; наконец, значениям  $\Lambda^0_0 = +1$ ,  $\det \widehat{\Lambda} = -1$  отвечает пространственная инверсия,  $x'^\mu = -x^\mu$ ,  $t' = t$ .

Преобразования (4.7) образуют группу<sup>1</sup>, которая называется группой Пуанкаре. Преобразования, не содержащие сдвига ( $a^k = 0$ ), также образуют группу — группу общих преобразований Лоренца. Преобразования с  $\Lambda^0_0 \geq 1$  и  $\det \widehat{\Lambda} = 1$  образуют шестипараметрическую группу собственных преобразований Лоренца. ■

**Пример 4.2.** Вывести преобразование Лоренца (3.5) на основе общих соотношений (4.7)–(4.16), полученных в предыдущем примере.

**Решение.** Преобразования (3.7) соответствуют случаю, изображенному на рис. 3.1, причем  $t = t' = 0$  в момент, когда трехмерные точки  $O$  и  $O'$  совпадали. Поэтому в общих формулах (4.7) нужно положить  $a^i = 0$ . Обратимся далее к преобразованиям координат  $x^2$  и  $x^3$ . Ввиду совпадения плоскостей  $(x^1, x^2)$  и  $(x'^1, x'^2)$  значению  $x^3 = 0$  должно соответствовать  $x'^3 = 0$  независимо от значений  $x^0, x^1, x^2$ . Это возможно только, если в линейной связи

$$x'^3 = \Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3,$$

следующей из (4.7), коэффициенты  $\Lambda^3_0 = \Lambda^3_1 = \Lambda^3_2 = 0$ . Аналогичные соображения показывают, что и  $\Lambda^2_0 = \Lambda^2_1 = \Lambda^2_3 = 0$ . Кроме того, ввиду равноправия осей  $x^2$  и  $x^3$  должно быть  $\Lambda^3_3 = \Lambda^2_2 = k(\mathbf{V})$ , т. е.

$$x'^2 = k(\mathbf{V})x^2, \quad x'^3 = k(\mathbf{V})x^3, \quad (4.18)$$

где указана возможная зависимость коэффициента преобразования  $k$  от носительной скорости. В силу равноправия систем  $S$  и  $S'$  формулы (4.18) должны давать обратные преобразования при замене  $\mathbf{V}$  на  $-\mathbf{V}$ :

$$x^2 = k(-\mathbf{V})x'^2, \quad x^3 = k(-\mathbf{V})x'^3. \quad (4.19)$$

Но оба направления  $\mathbf{V}$  перпендикулярны к плоскости  $x^2x^3$  и совершенно равноценны (изотропия пространства!). Поэтому  $k(-\mathbf{V}) = k(\mathbf{V})$ . Переходя

<sup>1</sup>Краткие сведения по теории групп см., например, в [Боголюбов и Ширков (1980)]



от  $x^2$  к  $x'^2$  и затем снова к  $x^2$ , найдем  $x^2 = k^2(\mathbf{V})x^2$ , т.е.  $k = \pm 1$ . Значение  $k = -1$  отвечает противоположной ориентации осей  $x^2$  и  $x'^2$ , поэтому рисунку 3.1 соответствует только

$$\Lambda^3_3 = \Lambda^2_2 = k = +1. \quad (4.20)$$

Теперь записываем равенства (4.7) для  $k = 0$  и 1:

$$x'^0 = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1, \quad x'^1 = \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1. \quad (4.21)$$

Четыре неизвестных коэффициента находим из следующих соотношений:

а) Уравнение плоскости  $x'^1 = 0$  в системе  $S$  имеет вид  $x^1 = Vt = \beta x^0$ . Отсюда с помощью (4.21) находим

$$\Lambda^1_0 = -\beta \Lambda^1_1. \quad (4.22)$$

б) Из уравнений (4.11) при  $r = 0$ ,  $m = 1$  получаем

$$\Lambda^0_0 \Lambda^0_1 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 = 0, \quad (4.23)$$

откуда с помощью (4.22) находим

$$\Lambda^0_1 = -\beta(\Lambda^1_1)^2 / \Lambda^0_0. \quad (4.24)$$

в) Из уравнений (4.11) при  $r = m = 0$  и  $r = m = 1$  получаем два уравнения:

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 = 1, \quad (\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2 = 1. \quad (4.25)$$

Из четырех алгебраических уравнений (4.22)–(4.25) вычисляем коэффициенты преобразования, отбирая положительные значения  $\Lambda^0_0$  и  $\Lambda^1_1$ :

$$\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \gamma, \quad \Lambda^0_1 = \Lambda^1_0 = -\beta\gamma. \quad (4.26)$$

(собственное преобразование Лоренца). ■

4-тензоры, как и тензоры в трехмерном пространстве, могут по-разному вести себя при инверсии пространственных координатных осей (см. раздел 1.1). Контравариантным **псевдотензором**  $N$ -го ранга называется совокупность  $4^N$  величин  $P^{ik\dots l}$ , которые преобразуются при отражениях и поворотах в четырехмерном пространстве Минковского по правилу

$$P^{ik\dots l} = |\widehat{\Lambda}| \Lambda^i_m \Lambda^k_n \dots \Lambda^l_p P'^{mn\dots p}. \quad (4.27)$$

Определитель  $|\widehat{\Lambda}| = -1$ , если преобразование включает в себя отражение нечетного числа (одной или трех) координатных осей. Примером псевдотензора является антисимметричный единичный псевдотензор IV ранга  $e^{iklm}$ . Он определяется условиями:

а) компоненты  $e^{iklm}$  меняют знак при перестановке любой пары значков (это условие, как и в трехмерном пространстве, обращает в нуль все компоненты, у которых имеется два или больше совпадающих значков);

$$\text{б) } e^{0123} = 1;$$

в) правилом (4.27) перехода в другую систему координат.

Эти правила приводят к тому, что  $e^{iklm}$  оказывается инвариантным псевдотензором: в любой системе координат

$$e'^{iklm} = e^{iklm}. \quad (4.28)$$

**Дуальные тензоры.** С помощью тензора  $e^{iklm}$  можно строить новые тензоры. Так, произвольному ковариантному 4-вектору  $B_m$  можно сопоставить антисимметричный тензор III ранга

$$\widetilde{B}^{ikl} = e^{iklm} B_m. \quad (4.29)$$

Антисимметричный ковариантный тензор II ранга  $A_{lm} = -A_{ml}$  можно превратить в другой антисимметричный тензор

$$\widetilde{A}^{ik} = (1/2)e^{iklm} A_{lm}. \quad (4.30)$$

Наконец, из компонент антисимметричного тензора III ранга можно построить вектор

$$\widetilde{J}^i = (1/3!)e^{iklm} J_{klm}. \quad (4.31)$$

Во всех трех случаях дело сводится к переименованию компонент исходных тензоров. Пары тензоров с тильдой и без нее называются **дуальными** друг другу. В дуальные пары могут входить только антисимметричные тензоры. Если в правые части двух последних равенств подставить тензоры с произвольной симметрией, то их симметричные части при суммировании дадут нулевой вклад, и, таким образом, никак не отразятся на значениях левых частей.

Дифференцирование тензора по 4-координатам приводит к изменению его ранга. Это связано с тем, что оператор производной представляет собой 4-вектор.

**Пример 4.3.** Показать, что оператор 4-градиента  $\partial/\partial x^k$  преобразуется как истинный ковариантный 4-вектор.

**Решение.** С помощью (4.14) находим преобразование

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x'^m} = \Lambda_k^m \frac{\partial}{\partial x'^m}, \quad (4.32)$$

которое совпадает с правилом преобразования (4.4) ковариантного 4-вектора. Поэтому для обозначения 4-градиента наряду с (4.32) применяют и другие символы, явно использующие ковариантный (нижний) значок, например:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = \partial_k \Phi = \Phi_{,k}. \quad (4.33)$$

При инверсии осей 4-градиент преобразуется как 4-координаты. ■

Рекомендуемая литература: [Фок (1955)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Рашевский (1953)], [Медведев (1977)], [Вейнберг (1977)], [Паули (1947)], [Берке (1985)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля].

## Задачи

**4.1.** Показать, что метрический тензор (3.9) имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах координат.

**4.2.** Доказать равенство

$$e^{iklm} A_i B_k C_l D_m = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} \quad (4.34)$$

**4.3.** На основе определения тензора  $e^{iklm}$  доказать равенства (4.28).

**4.4.** Некоторый контравариантный тензор  $\Pi$  ранга обладает свойством симметрии ( $S^{ik} = S^{ki}$ ) либо антисимметрии ( $A^{ik} = -A^{ki}$ ). Как выглядят соответствующие соотношения для ковариантного и смешанного тензоров?

**4.5.** Записать тензор  $\Pi$  ранга  $T_i^k$  с произвольной симметрией в виде суммы тензора, пропорционального единичному  $\delta_i^k$ , и тензора с нулевым следом.

**4.6.** Имеется тензор  $T^{ikl}$  с произвольной симметрией. Составить из его компонент тензоры  $S^{ikl}$  и  $A^{ikl}$ , которые были бы симметричны и антисимметричны по любой паре значков.

4.7. Показать, что

$$e_{iklm} = -e^{iklm}. \quad (4.35)$$

4.8\*. Доказать тождества:

а)  $e_{iklm}e^{iklm} = -24$ ;

б)  $e_{iklm}e^{ikln} = -6\delta_m^n$ ;

в)  $e_{iklm}e^{ikjr} = -2(\delta_l^j\delta_m^r - \delta_l^r\delta_m^j)$ ;

г)

$$e_{iklm}e^{iprs} = - \begin{vmatrix} \delta_k^p & \delta_k^r & \delta_k^s \\ \delta_l^p & \delta_l^r & \delta_l^s \\ \delta_m^p & \delta_m^r & \delta_m^s \end{vmatrix}; \quad (4.36)$$

д)

$$e_{iklm}e^{jprs} = - \begin{vmatrix} \delta_i^j & \delta_i^p & \delta_i^r & \delta_i^s \\ \delta_k^j & \delta_k^p & \delta_k^r & \delta_k^s \\ \delta_l^j & \delta_l^p & \delta_l^r & \delta_l^s \\ \delta_m^j & \delta_m^p & \delta_m^r & \delta_m^s \end{vmatrix}.$$

4.9. Обратить равенства (4.29)–(4.31) и выразить вектор  $B_m$  и тензоры  $A_{lm}$ ,  $J_{klm}$  через  $\tilde{B}^{ikl}$ ,  $\tilde{A}^{ik}$  и  $\tilde{J}^i$  соответственно. Как преобразуются тензоры с тильдой при отражении координатных осей, если исходные тензоры являются полярными?

4.10. Два непараллельных 4-вектора  $A_i$  и  $B_k$ , имеющие общее начало, определяют двумерную гиперплоскость в 4-пространстве. Показать, что тензор  $\tilde{C}^{ik}$ , дуальный антисимметричному тензору  $A_iB_k - A_kB_i$ , ортогонален любому 4-вектору, лежащему в указанной гиперплоскости.

4.11\*. Три некомпланарных (линейно независимых) 4-вектора  $A_i$ ,  $B_j$ ,  $C_k$  являются ребрами 3-мерного гиперпараллелепипеда в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве. Определить объем указанного параллелепипеда. Показать, что 4-вектор  $\tilde{V}_i$ , дуальный антисимметричному тензору III ранга, изображающему указанный объем, ортогонален любому 4-вектору, принадлежащему данному трехмерному гиперпараллелепипеду.

4.12\*. Найти, на какие трехмерные тензоры расщепляется 4-тензор II ранга  $T^{ik}$  при пространственных поворотах.

**4.13\*.** Найти, на какие трехмерные тензоры расщепляется истинный антисимметричный 4-тензор  $\Pi$  ранга  $A_{ik}$  при пространственных поворотах и отражениях.

УКАЗАНИЕ. Использовать результаты задачи 1.10.

**4.14.** Для антисимметричного тензора  $A_{ik}$ , рассмотренного в предыдущей задаче, доказать тождества

$$A_{ik}\tilde{A}^{kl} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}\delta_i^l, \quad \tilde{A}_{ik}\tilde{A}^{kl} = A_{ik}A^{kl} + (1/2)A_{mn}A^{mn}\delta_i^l, \quad (4.37)$$

где  $\tilde{A}_{ik}$  — дуальный тензор,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{a}$  — полярный и аксиальный 3-векторы, составляющие  $A_{ik}$ .

**4.15.** Два 4-вектора,  $A_i$  и  $B_i$ , называются параллельными, если

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}.$$

Доказать, что отношение одноименных компонент параллельных 4-векторов инвариантно относительно преобразования Лоренца.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться свойством равных отношений.

**4.16.** Пространственные повороты координатной системы образуют подгруппу собственных преобразований Лоренца. Записать матрицу преобразования Лоренца для пространственного поворота, выбрав в качестве параметров преобразования углы Эйлера (рис. 1.2).

**4.17.** Система отсчета  $S''$  движется относительно  $S'$  со скоростью  $V'$ , параллельной оси  $x'$ ,  $S'$  — относительно  $S$  со скоростью  $V$ , параллельной оси  $x$ . Одноименные оси всех трех систем параллельны. Путем перемножения соответствующих матриц получить матрицу преобразования от  $S''$  к  $S$ . Получить также формулу сложения одинаково направленных скоростей.

**4.18.** Система  $S'$  движется относительно  $S$  со скоростью  $V$ , направление которой задается в  $S$  сферическими углами  $\Theta$ ,  $\Phi$ . Пространственные оси двух систем параллельны. Получить матрицу преобразования Лоренца путем перемножения матриц пространственного поворота и буста вдоль одной из координатных осей.

**4.19\*.** Получить матрицу преобразования  $\hat{\Lambda}$  для случая, указанного в предыдущей задаче, на основе общих свойств этой матрицы, разобранных в примере 4.1.

**4.20.** Запишем бесконечно малое собственное преобразование Лоренца общего вида в форме

$$x^k = x'^k + \delta\Omega_l^k x'^l,$$

где  $\delta\Omega_l^k$  — параметры преобразования. Какие ограничения на матрицу  $\delta\Omega_l^k$  накладывает требование инвариантности интервала и каково число независимых параметров преобразования? Какой геометрический смысл имеют величины  $\delta\Omega_l^k$ ?

**4.21.** Найти правила преобразования производных  $A^i_{,i}$ ,  $\partial_k A_i$ ,  $\partial_i T^i_k$ , где  $A$  — вектор,  $T^k$  — тензор II ранга.

**4.22.** Показать, что оператор Даламбера

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4.38)$$

— релятивистский инвариант.

**4.23.** По аналогии с ротором трехмерного вектора  $\text{rot } A$  определить ротор 4-вектора  $A_i$ . Можно ли рассматривать 4-ротор как 4-вектор?

**4.24\*.** В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве задана гладкая замкнутая линия  $l$ . Для произвольного дифференцируемого 4-вектора  $A_i(x) \equiv A_i(x^0, x^1, x^2, x^3)$  доказать теорему Стокса:

$$\oint_l A_i dl^i = \int_S \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) dS^{ik}, \quad (4.39)$$

где  $S$  — произвольная незамкнутая гиперповерхность, опирающаяся на контур  $l$ ;  $dS^{ik}$  — направленный элемент этой гиперповерхности,  $dl^i$  — направленный элемент контура  $l$ .

**4.25\*.** Доказать теорему Остроградского–Гаусса в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве:

$$\oint_{\Sigma} A^i dS_i = \int_{\Omega} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d^4x, \quad (4.40)$$

где  $A^i$  — произвольный дифференцируемый 4-вектор,  $\Sigma$  — замкнутая трехмерная гиперповерхность, ограничивающая 4-объем  $\Omega$ ,  $dS_i$  — направленный элемент гиперповерхности,  $d^4x$  — элемент 4-объема.

УКАЗАНИЕ. Элементы трехмерной гиперповерхности, перпендикулярные координатным осям, образуют 4-вектор и даются выражениями (ср. с задачей 4.11)

$$\begin{aligned} dS_0 &= \pm dx^1 dx^2 dx^3, & dS_1 &= \pm dx^0 dx^2 dx^3, \\ dS_2 &= \pm dx^0 dx^1 dx^3, & dS_3 &= \pm dx^0 dx^1 dx^2. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы Стокса и Остроградского – Гаусса справедливы для любого 4-тензора ранга  $s \neq 0$ . Все индексы кроме тех, по которым производится суммирование в равенствах (4.39) и (4.40), остаются свободными.

## 4.2. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Преобразование электромагнитного поля

**Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем.** Воздействие внешнего электромагнитного поля на заряженную частицу, движущуюся с произвольной скоростью (постоянной или переменной) описывается силой Лоренца

$$\mathcal{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (4.41)$$

и мы будем рассматривать это утверждение как фундаментальный опытный факт. Используя его, а также некоторые общефизические принципы, мы установим вид взаимодействия между заряженными частицами и электромагнитным полем, построим функции Лагранжа и Гамильтона, выясним правила релятивистского преобразования напряженностей электромагнитного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и найдем инвариантную форму уравнений движения релятивистских частиц в электромагнитном поле.

Для выполнения этой программы на основе вариационного подхода необходимо установить вид действия для заряженной частицы в электромагнитном поле. Для этого к действию (3.29) для свободной частицы необходимо добавить слагаемое, описывающее взаимодействие частицы с полем:

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds + S_{int}. \quad (4.42)$$

Оно должно быть релятивистским инвариантом, содержать в виде произведения заряд частицы и величины, характеризующие поле, а также — и это самое главное — приводить к следствиям, подтверждаемым опытом, в том числе к силе Лоренца (4.41). Первое из перечисленных условий вытекает

из принципа относительности, второе можно рассматривать как обобщение данных опыта, согласно которым взаимодействие частиц с полем описывается единственной скалярной характеристикой частицы — ее **электрическим зарядом** (см. главу 2). В качестве величин, относящихся к полю, в  $S_{int}$  не удастся ввести напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  ввиду достаточно сложного закона их преобразования в произвольную инерциальную систему. Поэтому поле описывают другой, но связанной с напряженностями поля системой полевых функций — **четырёхмерным векторным потенциалом**  $A_i(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , который в трехмерных обозначениях уже использовался в главе 2. В этих предположениях релятивистски инвариантное выражение для  $S_{int}$  записывается в максимально простом виде:

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int_{(1)}^{(2)} A_i(x^0, x^1, x^2, x^3) dx^i, \quad (4.43)$$

где интеграл, как и в (3.29), берется вдоль мировой линии частицы. Множитель  $c^{-1}$  определяется используемой (абсолютной гауссовой) системой единиц, а знак минус — требованием, чтобы компоненты  $A_i$  совпали с уже введенными в главе 2 скалярным  $\varphi$  и векторным  $\mathbf{A}$  потенциалами. Запись действия в форме (4.43) иногда называют гипотезой **минимальности электромагнитного взаимодействия**. Все исследованные до сих пор многочисленные электромагнитные явления находятся в согласии с (4.43) и это выражение для широкой области физических явлений можно считать твердо установленным фактом. Не исключено, однако, что описание электромагнитного взаимодействия с некоторыми еще не открытыми экспериментально частицами, поиски которых продолжаются (пример — магнитный монополю Дирака), потребуют пересмотра этого взаимодействия<sup>2</sup>.

Если имеется несколько заряженных частиц, то действие для них записывается в виде суммы выражений (4.43):

$$S_{int} = -\sum_a \frac{e_a}{c} \int_{(1)}^{(2)} A_i(x_a^0, x_a^1, x_a^2, x_a^3) dx_a^i, \quad (4.44)$$

где начальная и конечная точки (1) и (2) для каждой частицы свои, а индекс  $a$  у координат обозначает номера частиц. Здесь под  $A_i$  нужно понимать значения 4-потенциала, создаваемого внешними телами и всеми частицами, кроме  $a$ -й, в точке нахождения частицы с номером  $a$ . Таким образом,

<sup>2</sup>Классическая формула (4.43) не описывает взаимодействие внутреннего (спинового) магнитного момента элементарной частицы с электромагнитным полем, поскольку спин представляет собой квантовую характеристику частицы. Приближенную квазиклассическую теорию такого взаимодействия см. ниже в этом разделе.



действие частицы на самое себя исключается из взаимодействия, как уже отмечалось в гл. 2. Это связано с тем, что современная электродинамика (не только классическая, но и квантовая) не в состоянии правильно вычислить энергию самодействия.

Выражение (4.44) означает, что воздействие на данную частицу осуществляется через поле, которое создают другие частицы в ее окрестности (и которое, согласно теории относительности, должно распространяться с конечной скоростью, не превышающей предельной скорости  $c$ ). Концепция взаимодействия частиц через промежуточный агент (поле) называется **близкодействием**. Она находит подтверждение и в современной квантовой теории элементарных частиц, где переносчиками взаимодействия выступают кванты соответствующих полей — фотоны, глюоны, промежуточные бозоны и др. Эта картина принципиально отличается от концепции взаимодействия частиц в нерелятивистской механике, основанной на понятии потенциальной энергии  $U(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t))$ . Радиусы-векторы двух частиц входят в потенциальную энергию в один и тот же момент времени, и изменение положения одной частицы мгновенно приводит к изменению силы, действующей на вторую частицу. Скорость распространения взаимодействий при этом бесконечна, и никакого промежуточного агента для переноса взаимодействия не требуется. Хотя в этом случае тоже можно использовать понятие поля, но оно выступает лишь как формально-математический объект и не является органической составной частью физического процесса взаимодействия частиц. Такая картина взаимодействия называется **дальнодействием**.

Концепция дальнодействия несовместима с теорией относительности, которая устанавливает конечную предельную скорость распространения взаимодействия. Это приводит к тому, что энергия и импульс, испущенные одной из взаимодействующих частиц, разделенных конечным расстоянием  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ , должны принадлежать некоторой промежуточной субстанции — полю — в течение конечного времени  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$ , пока они не будут восприняты второй частицей. Понятие поля как физической реальности является, таким образом, неизбежным атрибутом теории относительности. Оно вытекает, разумеется, и из опыта, поскольку электромагнитное поле может существовать как самостоятельный объект и в отсутствие заряженных частиц.

**Уравнения движения релятивистской частицы.** Теперь мы займемся анализом следствий, вытекающих из формул (4.42), (4.43) для действия, описывающего заряженную частицу в электромагнитном поле:

$$S = - \int_{(1)}^{(2)} \left( mc ds + \frac{e}{c} A_i dx^i \right) \quad (4.45)$$

**Пример 4.4.** Пользуясь выражением (4.45), установить вид функции Лагранжа для частицы в электромагнитном поле. Произвести переход к нерелятивистскому пределу. Записать уравнения движения в лагранжевой форме.

**Решение.** В интеграле (4.45) нужно перейти к интегрированию по координатному времени  $t$ , и тогда подынтегральное выражение по определению действия будет функцией Лагранжа. Записывая с помощью (3.12)  $ds = c\sqrt{1-v^2/c^2} dt$  и  $A_i dx^i = A_0 c dt - \mathbf{A} d\mathbf{r} = c\varphi dt - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} dt$ , где использовано обозначение  $A_0 = \varphi$ , находим **функцию Лагранжа** для релятивистской частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi. \quad (4.46)$$

Здесь в качестве обобщенных координат выступают декартовы координаты частицы  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , от которых (а также от времени  $t$ ) зависят  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ .

Нерелятивистское приближение:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi \quad (4.47)$$

(постоянная  $mc^2$  опущена).

Обобщение на систему частиц:

$$L = - \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - v_a^2/c^2} + \sum_a e_a \left( \frac{1}{c} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{A}_a - \varphi_a \right). \quad (4.48)$$

Через  $\mathbf{A}_a$ ,  $\varphi_a$  обозначены электромагнитные потенциалы в точке нахождения частицы без учета поля самой частицы. Время  $t$  общее для всех частиц.

Уравнения движения могут быть записаны в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (4.49)$$

где  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  — обобщенные координаты и скорости (они не обязаны быть 4-векторами). Если в качестве обобщенных координат выбраны декартовы координаты частицы, то уравнение (4.49) можно записать в векторной форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (4.50)$$

где  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . ■

**Пример 4.5.** Вывести уравнение движения заряженной частицы в релятивистски-инвариантной форме путем варьирования действия (4.45) и перехода к инвариантной переменной интегрирования — собственному времени  $\tau$ .

**Решение.** Первая вариация действия имеет вид:

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left( -mc \delta ds - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i - \frac{e}{c} A_i \delta dx^i \right).$$

Далее вычисляем

$$\delta ds = \delta \sqrt{dx^i dx_i} = \frac{dx_i}{ds} \delta dx^i = \frac{1}{c} u_i \delta dx^i,$$

где  $u_i = dx_i/d\tau$  — 4-скорость частицы, и находим

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left[ \left( -m u_i - \frac{e}{c} A_i \right) \delta dx^i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right].$$

Пользуясь возможностью перестановки  $\delta dx^i = d\delta x^i$  и проведя интегрирование по частям, получим

$$\delta S = - \left( m u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} \left( m du_i \delta x^i + \frac{e}{c} dA_i \delta x^i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right). \quad (4.51)$$

В фиксированных 4-точках 1 и 2  $\delta x^i = 0$ , поэтому внеинтегральный член обращается в нуль. Под знаком интеграла производим преобразования:

$$du_i = \frac{du_i}{d\tau} d\tau; \quad dA_i \delta x^i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\tau} d\tau \delta x^i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k d\tau \delta x^i;$$

$$\delta A_i dx^i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} dx^k \delta x^i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} u^k d\tau \delta x^i.$$

Последние два слагаемых объединяем, вводя антисимметричный тензор (ротор 4-потенциала)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i, \quad (4.52)$$

который называется **тензором электромагнитного поля**. В итоге получаем вариацию действия в компактной инвариантной записи:

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left( m \frac{du_i}{d\tau} - \frac{e}{c} F_{ik} u^k \right) \delta x^i d\tau.$$

Приравнивая ее нулю и пользуясь независимостью вариаций  $\delta x^i$ , которые являются функциями инвариантного параметра  $\tau$ , находим уравнение движения:

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (4.53)$$

Существует очевидное формальное сходство между релятивистским уравнением (4.53) и нерелятивистским уравнением Ньютона  $m\dot{v} = \mathcal{F}$ . Левая часть уравнения (4.53) представляет собой произведение массы на 4-ускорение. Правая часть описывает воздействие электромагнитного поля на частицу и называется **четырёхмерной электромагнитной силой**:

$$\mathcal{F}_i = \frac{e}{c} F_{ik} u^k. \quad (4.54)$$

Смысл полученного уравнения становится еще более прозрачным, если переписать его в трехмерной форме. Пользуясь определением 4-скорости, записываем левую часть при  $i = 1, 2, 3$  в виде  $-\gamma dp/dt$ , где  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  — релятивистский фактор. В правую часть введем вместо  $A_i$  трехмерный скаляр  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и трехмерный вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,  $A_i = (\varphi, -\mathbf{A})$ ,  $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$ . В этих обозначениях имеем следующие отличные от нуля значения компонент тензора электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} F_{0x} = -F_{x0} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}, & F_{xy} = -F_{yx} &= -\text{rot}_z \mathbf{A}, \\ F_{0y} = -F_{y0} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t}, & F_{xz} = -F_{zx} &= \text{rot}_y \mathbf{A}, \\ F_{0z} = -F_{z0} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}, & F_{yz} = -F_{zy} &= -\text{rot}_x \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Это позволяет записать пространственную часть уравнения (4.53) в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left( -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}. \quad (4.56)$$

Но производная по времени от импульса равна силе, действующей на частицу. В электромагнитном поле это должна быть сила Лоренца (4.41). Сравнение (4.56) с (4.41) позволяет выразить напряженности поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  через электромагнитные потенциалы:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.57)$$

Уравнение движения частицы приобретает ньютоновскую форму

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (4.58)$$

но с релятивистской зависимостью (3.33) импульса от скорости и с силой Лоренца в правой части. Временная компонента уравнения (4.53) описывает изменение полной энергии частицы:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.59)$$

Это уравнение не является независимым, оно может быть получено умножением обеих частей (4.58) скалярно на  $\mathbf{v}$ . При этом  $\mathbf{v}, d\mathbf{p} = d\mathcal{E}$ . Магнитное поле не производит работы над частицей, так как магнитная сила всегда перпендикулярна скорости.

**Пример 4.6.** Пусть уравнение движения релятивистской частицы имеет вид (ср. с (4.58))

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathcal{F},$$

где  $\mathcal{F}$  — сила любой природы (не обязательно электромагнитная). Записать это уравнение в релятивистски ковариантной форме, введя 4-вектор силы для произвольного случая.

**Решение.** Вводим дифференциал собственного времени  $d\tau = \gamma^{-1}dt$  и записываем уравнение движения так, чтобы в левой части был 4-вектор:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \gamma \mathcal{F}^\alpha, \quad \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}$$

(второе уравнение, как и (4.59), не является независимым). Совокупность величин в правых частях этих равенств образует 4-вектор силы:

$$\mathcal{F}^k = (\gamma \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}/c, \gamma \mathcal{F}), \quad (4.60)$$

где  $\mathcal{F}$  — трехмерная сила, действующая на релятивистскую частицу. Ее можно выразить через силу, приложенную к частице в ее системе покоя (см. задачу 4.42). ■

**Пример 4.7.** Пользуясь соотношением (4.51), найти функцию Гамильтона заряженной частицы и записать ее уравнение движения в форме уравнения Гамильтона–Якоби.

**Решение.** В отличие от подхода, использованного в примере 4.5, когда действие рассматривалось для разных произвольно выбранных траекторий частицы (и из условия стационарности определялась та из них, которая отвечает реальному движению), теперь считаем действие определенным на реальной физической траектории, но рассматриваем его как обычную функцию 4-координат конечной точки (2) движения, считая фиксированной точку (1). На физической траектории интегральный член в правой части (4.51) (вариация действия при закрепленных концах) обращается в нуль. Имеем также  $\delta x^i|_{(1)} = 0$ , поскольку точка (1) зафиксирована. Таким образом,  $\delta S = - \left( m u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i$ , откуда  $\partial_i S = -m u_i - (e/c) A_i$ .

Но из классической гамильтоновой механики известно, что производные действия по пространственным координатам равны компонентам обобщенного импульса  $\mathbf{P}$ , а взятая с обратным знаком производная по времени представляет собой функцию Гамильтона частицы  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \nabla S. \quad (4.61)$$

Поэтому назовем величину

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = m u_i + \frac{e}{c} A_i \quad (4.62)$$

ковариантным **обобщенным 4-импульсом**. Более удобно использовать его контравариантные компоненты:

$$P^i = \left( \frac{\mathcal{E} + e\varphi}{c}, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \quad (4.63)$$

где  $\mathbf{p}$  — обычный трехмерный импульс (3.33),  $\mathcal{E}$  — полная энергия свободной частицы, а  $\mathcal{E} + e\varphi = \mathcal{H}$  — функция Гамильтона. Как известно из механики, она должна быть выражена через обобщенные координаты (у нас  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ) и обобщенный импульс  $\mathbf{P}$ . Находя из (4.63)

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (4.64)$$

и пользуясь второй формулой (3.33), находим **функцию Гамильтона** релятивистской частицы:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2} + e\varphi(\mathbf{r}, t). \quad (4.65)$$

В нерелятивистском приближении получим из (4.65)

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + e\varphi(\mathbf{r}, t). \quad (4.65')$$

(постоянное  $mc^2$  опущено).

Теперь не составляет труда записать уравнение Гамильтона–Якоби. Используем равенства (4.61) и подставляем в первое из них функцию Гамильтона (4.65), в которой  $\mathbf{P}$  заменен на  $\nabla S$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\varphi = 0. \quad (4.66)$$

Более удобна запись без радикала:

$$\left( \nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (4.67)$$

Последние два равенства и представляют собой разные формы записи **уравнения Гамильтона–Якоби** для релятивистской частицы. Неизвестной величиной, которая определяется из полученных уравнений, выступает в этом методе функция  $S(\mathbf{r}, t)$ . ■

### Преобразование напряженностей электромагнитного поля.

**Пример 4.8.** Пользуясь определением тензора электромагнитного поля (4.52) и соотношениями (4.55), (4.57), составить таблицы, связывающие компоненты  $F^{ik}$  и  $F_{ik}$  с напряженностями  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ . Записать формулы релятивистского преобразования напряженностей поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .

**Решение.** Получаем:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Поучительно сравнить эти две таблицы с общей структурой антисимметричного тензора II ранга, рассмотренного в задаче 4.23. Из предлагаемого

сравнения, а также из формул (4.57) следует, что относительно инверсии пространственных осей  $\mathbf{E}$  — истинный вектор, а  $\mathbf{H}$  — псевдовектор.

Преобразование в другую систему отсчета осуществляем по общим правилам типа (4.6):  $F_{ik} = \Lambda_i^l \Lambda_k^n F'_{ln}$ , где матрица  $\Lambda_i^l$  определена равенством (4.5). Находим

$$\begin{aligned} F_{01} &= \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 F'_{01} + \Lambda_0^1 \Lambda_1^0 F'_{10} = (\text{ch}^2 \psi - \text{sh}^2 \psi) F'_{01} = F'_{01}, \\ F_{02} &= \Lambda_0^0 \Lambda_2^2 F'_{02} + \Lambda_0^1 \Lambda_2^2 F'_{12} = \text{ch} \psi F'_{02} - \text{sh} \psi F'_{12} \end{aligned}$$

и т. д. С помощью таблиц (4.68) и (4.5) получаем

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + \beta H'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta H'_y), \\ H_x &= H'_x, & H_y &= \gamma(H'_y - \beta E'_z), & H_z &= \gamma(H'_z + \beta E'_y). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Здесь ось  $Ox$  направлена вдоль относительной скорости  $\mathbf{V}$ , а оси  $Oy$  и  $Oz$  перпендикулярны ей. Поэтому (4.69) легко записать для произвольного направления скорости  $\mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{H}/c), \\ \mathbf{H}'_{\parallel} &= \mathbf{H}_{\parallel}, & \mathbf{H}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{V} \times \mathbf{E}/c). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Значками  $\parallel$  и  $\perp$  отмечены составляющие, параллельная и перпендикулярная  $\mathbf{V}$ . При  $V \ll c$  с точностью до линейных членов следует положить в (4.69), (4.70)  $\gamma = 1$ . ■

**Пример 4.9.** Построить все возможные независимые релятивистские инварианты из компонент тензора электромагнитного поля.

**Решение.** Пространственные повороты составляют часть преобразований, относящихся к группе общих преобразований Лоренца, поэтому число лоренц-инвариантов не может быть больше числа инвариантов относительно трехмерных вращений. А последних из двух 3-векторов,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , входящих в состав тензора электромагнитного поля, можно составить только три: два истинных скаляра,  $E^2$  и  $H^2$ , и один псевдоскаляр  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ . Последний оказывается инвариантом и относительно собственных преобразований Лоренца, как это следует из тензорной формы записи (см.(4.37)):

$$e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = -8\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \quad (4.71)$$

При инверсии осей инвариантом является  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2$ .

Величины  $E^2$  и  $H^2$  не лоренц-инвариантны, так как согласно (4.70) напряженности при переходе в другую систему в общем случае меняют



свою величину и направление. Но их разность является истинным скаляром, как это следует из явной лоренц-инвариантной записи

$$2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) = F_{ik}F^{ik}. \quad (4.72)$$

Этим исчерпываются независимые инварианты тензора электромагнитного поля. ■

**Пример 4.10.** *Рассмотреть преобразование 4-потенциала, состоящее в добавлении к нему некоторого 4-вектора  $f_i$ :  $\tilde{A}_i = A_i + f_i$ . Каким свойством должен обладать вектор  $f_i$ , чтобы преобразование не изменяло компонент тензора электромагнитного поля, т. е. напряженностей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ?*

**Решение.** Из условий  $\tilde{F}_{ik} = \partial_k \tilde{A}_i - \partial_i \tilde{A}_k = \partial_k A_i - \partial_i A_k = F_{ik}$  находим  $\partial_k f_i = \partial_i f_k$ . Общее решение последнего уравнения имеет вид  $f_k = \partial_k f$ , где  $f$  — произвольная дифференцируемая скалярная функция 4-координат. Преобразование 4-потенциала

$$\tilde{A}_i = A_i + \partial_i f, \quad (4.73)$$

оставляющее инвариантным наблюдаемые величины — напряженности поля — называется **калибровочным** (градиентным). Оно связано с простым математическим фактом равенства нулю ротора градиента скалярной функции, имеющем место как в трехмерном, так и в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Таким образом, электромагнитные потенциалы определяются неоднозначно.

В трехмерной записи калибровочное преобразование потенциалов имеет вид, уже найденный в главе 2 (см. (2.103), (2.104)):

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \nabla f. \quad (4.74)$$

классической электродинамике наблюдаемыми и измеряемыми величинами являются сила (4.41), действующая на заряженную частицу, или изменение ее энергии (4.59), а также энергия и поток энергии самого электромагнитного поля. Все эти величины выражаются через напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые и могут быть найдены таким путем из эксперимента. Потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  играют роль вспомогательных функций, из которых напряженности получают дифференцированием по формулам (4.57). Теория электромагнитного поля, позволяющая вычислять тензор  $F_{ik}$ , должна быть калибровочно инвариантной, т. е. ее выводы не должны зависеть от изменений потенциала, вызванных преобразованием (4.73). Это требование приводит к глубоким

следствиям, и не только в классической электродинамике, но и при построении современных теорий квантовых полей и элементарных частиц.

Рекомендуемая литература: [Бредов и др. (1985)], [Голдстейн (1957)], [Коткин и Сербо (1977)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Меллер (1975)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Френкель (1956)], [Айзерман (1974)], [Новожиллов и Яппа (1978)], [Ландау и Лифшиц, Механика], [Фок (1955)], [Паули (1947)].

## Задачи

**4.26.** Записать в виде таблиц через напряженности  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  тензоры  $\tilde{F}_{ik}$  и  $\tilde{F}^{ik}$ , дуальные тензоры электромагнитного поля.

**4.27.** Записать инварианты электромагнитного поля с использованием тензора, дуального тензору  $F_{ik}$ .

**4.28\*.** В системе  $S$  имеется однородное электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ . Найти все возможные инерциальные системы отсчета, в которых поле будет обладать одним из следующих свойств:

а) напряженности становятся параллельными,  $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$ , либо антипараллельными;

б) одна из напряженностей обращается в нуль,  $\mathbf{E}' = 0$  или  $\mathbf{H}' = 0$ ;

в) напряженности становятся взаимно перпендикулярными,  $\mathbf{E}' \perp \mathbf{H}'$ ;

г) напряженности становятся одинаковыми по абсолютной величине,  $E' = H'$ ;

д) обе напряженности обращаются в нуль,  $E' = H' = 0$ .

Указать, при каких значениях исходных полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  реализуются эти случаи.

**4.29.** Бесконечно длинный круговой цилиндр равномерно заряжен с линейной плотностью  $\kappa$ . Вдоль оси цилиндра течет равномерно распределенный ток  $J$ . Найти такую систему отсчета, в которой существует только электрическое или только магнитное поле. Найти величины этих полей.

**4.30\*.** Записать уравнения Максвелла (2.82)–(2.85) и дифференциальный закон сохранения электрического заряда (2.47) в ковариантной четырехмерной форме через тензор электромагнитного поля (4.67).

**4.31\*.** Система дифференциальных уравнений для магнитных силовых линий вида

$$(1) \quad d\mathbf{r} \times \mathbf{H} = 0$$

не является релятивистски инвариантной и при переходе в другую инерциальную систему отсчета не сохраняет своего вида.

а) Показать, что для полей некоторого специального вида система уравнений

$$(2) \quad d\mathbf{r} \times \mathbf{H} + c\mathbf{E} dt = 0, \quad \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

может рассматриваться как релятивистски инвариантное обобщение системы (1).

б) Выяснить структуру полей, для которых такое обобщение возможно, путем рассмотрения условий совместности уравнений (2). Сколько независимых уравнений содержится в системе (2)?

в) Какой вид имеет условие интегрируемости системы (2)?

г) Убедиться в том, что силовые линии, определяемые системой (2), перемещаются в поперечном направлении со скоростью  $\mathbf{u} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/H^2$ , т. е. являются движущимися даже в случае статических полей.

**4.32\***. Показать, что релятивистски инвариантная система уравнений для электрических силовых линий, аналогичная системе (2) предыдущей задачи, имеет вид

$$(1) \quad e_{iklm} F^{lm} dx^k = 0$$

Какие требования налагаются на  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а также на распределение зарядов и токов условиями совместности и интегрируемости системы (1)? Как перемещаются силовые линии, определяемые системой (1)?

**4.33.** Найти величину ЭДС электромагнитной индукции, возникающей при движении проводника в магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Воспользоваться либо формулами преобразования напряженностей поля, либо формулами преобразования потенциалов.

**4.34\***. Найти поля  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  точечного заряда  $e$ , движущегося равномерно со скоростью  $\mathbf{V}$ , произведя преобразование Лоренца из системы отсчета, в которой заряд покоится. Записать 4-потенциал в явно релятивистски-ковариантной форме.

УКАЗАНИЕ. Для ковариантной записи 4-потенциал следует выразить через 4-скорость частицы и 4-радиус-вектор, соединяющий два события: наблюдение поля в 3-точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t$  и его генерацию зарядом в 3-точке  $\mathbf{s}(t')$  в предшествующий момент времени  $t'$ .

**4.35.** Показать, что электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда «сплющивается» в направлении движения. При этом происходит ослабление поля  $E$  на линии движения заряда по сравнению с кулоновым полем. Как согласуется это ослабление с формулой преобразования  $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ ?

**4.36°.** Электрический диполь с моментом  $p_0$  в сопутствующей системе равномерно движется со скоростью  $V$ . Найти создаваемое им электромагнитное поле  $\varphi$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $H$ .

**4.37°.** В некоторой системе координат заряженные частицы совершают нерелятивистское периодическое движение или покоятся, создавая при этом дипольные электрический и магнитный моменты  $p_0$ ,  $m_0$ . Найти правило преобразования моментов при переходе в произвольную инерциальную систему отсчета.

УКАЗАНИЕ. Представить совокупность дипольных моментов как интеграл по трехмерному объему от некоторой ковариантной «плотности момента» и воспользоваться преобразованиями Лоренца.

**4.38.** Незаряженная проволочная петля с током  $J'$ , имеющая форму прямоугольника  $a \times b$ , движется равномерно со скоростью  $V$  параллельно своей стороне  $a$ . Провод имеет конечное сечение. Найти распределение электрических зарядов на петле, а также ее электрический и магнитный моменты, наблюдаемые в лабораторной системе отсчета.

**4.39°.** Вывести уравнение движения релятивистской частицы (4.58) на основе функции Лагранжа (4.46).

**4.40°.** Сделать то же самое с помощью функции Гамильтона (4.65).

**4.41.** Записать релятивистское уравнение движения частицы под действием силы  $\mathcal{F}$ , выразив импульс явным образом через скорость  $v$  частицы. Рассмотреть, в частности, случаи, когда скорость а) меняется только по величине; б) меняется только по направлению; в)  $v \ll c$ .

**4.42.** Выразить друг через друга 3-вектор силы, действующей на частицу в лабораторной системе ( $\mathcal{F}$ ) и в системе покоя ( $\mathcal{F}'$ ). Скорость частицы  $v$ . Проверить полученные формулы путем применения их к силе Лоренца.

**4.43.** Какая сила  $\mathcal{F}$  действует с точки зрения наблюдателя в мгновенно сопутствующей системе на тело массы  $m$ , находящееся в ракете и неподвижное относительно нее, если ракета движется с релятивистской скоростью  $v$  по круговой орбите радиуса  $R$ ?

**4.44.** Две частицы с зарядами  $e_1$  и  $e_2$  движутся параллельно оси  $x$  с равными постоянными скоростями  $v$ . Найти силу взаимодействия частиц в лабораторной системе. Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский предел. Показать, что найденная сила может быть вычислена по форму-

ле  $\mathcal{F} = -e_2 \nabla \psi$  из так называемого конвекционного<sup>3</sup> потенциала

$$\psi = e_1 / \gamma^2 R, \quad \text{где} \quad R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (1 - \beta^2)[(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]},$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  — радиусы-векторы зарядов.

УКАЗАНИЕ. Удобно исходить из кулоновской силы в сопутствующей системе и выполнить ее преобразование по формулам задачи 4.42.

**4.45.** Найти конвекционный потенциал  $\psi$  бесконечно длинного прямого равномерно заряженного провода. Линейная плотность заряда  $\kappa$  в той системе отсчета, где провод покоится. Провод перемещается поступательно со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к своей длине (в лабораторной системе отсчета). Рассмотреть, в частности, случаи  $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$ .

**4.46.** Бесконечно длинная равномерно заряженная нить с линейной плотностью заряда  $\kappa$  в системе, где нить покоится, перемещается вдоль своей длины равномерно со скоростью  $v$ . На расстоянии  $r$  от нее находится точечный заряд, движущийся параллельно прямой с той же скоростью. Найти электромагнитную силу  $\mathcal{F}$ , действующую на заряд.

**4.47.** Распределение электронов в параллельном пучке обладает аксиальной симметрией и характеризуется объемной плотностью заряда  $\rho$  в системе отсчета, связанной с электронами. Электроны ускорены разностью потенциалов  $V$ . Полный ток в пучке равен  $J$ . Найти величину электромагнитной силы  $\mathcal{F}$ , приложенной к одному из электронов пучка в лабораторной системе отсчета.

УКАЗАНИЕ. Полезно использовать результат предыдущей задачи.

**4.48.** Найти уширение  $\Delta a$  пучка электронов, рассмотренного в предыдущей задаче, на пути  $L$  вследствие взаимного отталкивания электронов. Сечение пучка — круг радиуса  $a$ . Считать уширение малым ( $\Delta a \ll L$ ).

**4.49\*\*.** Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется с произвольной скоростью в однородном постоянном электрическом поле  $E$ . В начальный момент  $t = 0$  частица находилась в начале координат и имела импульс  $\mathbf{p}_0$ . Определить трехмерные координаты и время  $t$ , а также энергию частицы в лабораторной системе в функции ее собственного времени  $\tau$ . Исключив  $\tau$ , представить трехмерные координаты в зависимости от  $t$ . Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и релятивистский пределы.

**4.50.** Найти в аналитической форме траекторию заряженной частицы, рассмотренной в предыдущей задаче. Построить на компьютере траектории

<sup>3</sup>Конвекционным потенциалом движущейся как целое системы зарядов называется функция координат, дифференцирование которой дает компоненты силы, действующей в лабораторной системе на единичный пробный заряд, движущийся вместе с этой системой зарядов.

для разных начальных условий. Исследовать, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский случаи.

**4.51.** Найти пробег  $l$  релятивистской заряженной частицы с зарядом  $e$ , массой  $m$  и начальной энергией  $\mathcal{E}$  в тормозящем однородном электрическом поле  $\mathbf{E}$ , параллельном начальной скорости частицы.

**4.52\*.** Релятивистская частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в однородном постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . В начальный момент времени  $t = 0$  частица имела импульс  $\mathbf{p}_0$  и находилась в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$ . Вычислить импульс и энергию, а также координаты частицы в функции собственного и координатного времени.

**4.53\*.** Нерелятивистская частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в скрещенных постоянных однородных электрическом  $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$  и магнитном  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  полях. В начальный момент  $t = 0$  частица находилась в начале координат и имела скорость  $\mathbf{v} = (v_{ox}, 0, v_{oz})$ . Определить зависимости компонент скорости и координат от времени, начертить с помощью компьютера возможные траектории частицы.

**4.54.** Релятивистская частица движется в параллельных однородных постоянных электрическом  $\mathbf{E}$  и магнитном  $\mathbf{H}$  полях ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H} \parallel Oz$ ). При  $t = 0$  частица находилась в начале координат, обладая импульсом  $\mathbf{p}_0 = (p_{ox}, 0, p_{oz})$ . Определить зависимость компонент импульса и энергии от собственного времени частицы  $\tau$ . Построить на компьютере проекции траектории частицы на координатные плоскости.

**4.55.** Найти зависимость от собственного времени компонент импульса и энергии релятивистской частицы, движущейся в однородных и постоянных электрическом  $\mathbf{E}$  и магнитном  $\mathbf{H}$  ( $H > E$ ) взаимно перпендикулярных полях. Начальный импульс частицы  $\mathbf{p}_0$ ,  $x = y = z = 0$  при  $t = 0$ .

**4.56.** Решить предыдущую задачу для  $E > H$ . Исследовать путем предельного перехода  $E \rightarrow H$  движение частицы в одинаковых по абсолютной величине взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях.

**4.57\*.** Найти закон движения частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  в поле плоской электромагнитной волны, четырехмерный потенциал которой имеет вид

$$A^i = \varepsilon^i f(s), \quad \varepsilon^i = \text{const}$$

(линейно поляризованная волна). Здесь  $f(s)$  — произвольная дважды дифференцируемая функция, ее аргумент  $s = n_l x^l$  выражается через нулевой 4-вектор  $n_l = (1, -\mathbf{n})$ , указывающий направление распространения плоской волны ( $n^l n_l = 0$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$ ),  $\varepsilon^i$  — четырехмерный пространственноподобный вектор поляризации, нормированный условием  $\varepsilon^i \varepsilon_i = -1$  и ортогональный волновому вектору ( $n^l \varepsilon_l = 0$ ). Заданы начальные условия общего

вида. Найти также изменение энергии частицы за конечное время. Рассмотреть, в частности, случаи периодической плоской волны и волнового пакета конечной протяженности.

УКАЗАНИЕ. Показать, что собственное время частицы пропорционально аргументу  $s$  плоской волны, и использовать это при решении задачи.

**4.58\***. Решить предыдущую задачу для плоской волны с произвольной поляризацией. Четырехмерный потенциал  $A^i(s)$  удовлетворяет условию  $n_i A^i(s) = 0$ . Сделать то же самое в трехмерной форме, выразив в явном виде координаты и время через напряженности поля  $\mathbf{E}(s)$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(s)$ .

**4.59.** Нерелятивистская заряженная частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  проходит через двумерное электростатическое поле с потенциалом  $\phi = k(x^2 - y^2)$ , где  $k = \text{const} > 0$  (линза с сильной фокусировкой). В момент времени  $t = 0$  частица находится в точке с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ ; начальная скорость  $v_0$  параллельна оси  $z$ . Определить движение частицы.

**4.60.** Записать дифференциальные уравнения движения релятивистской частицы в электромагнитном поле, исходя из функции Лагранжа в цилиндрических координатах.

**4.61\***. Между обкладками цилиндрического конденсатора с радиусами  $a, b$  ( $a < b$ ) поддерживается разность потенциалов  $V$ . В пространстве между обкладками имеется аксиально симметричное магнитное поле, напряженность которого параллельна оси конденсатора. Из внутренней обкладки, играющей роль катода, вылетают электроны с нулевой начальной скоростью. Найти критическое значение потока магнитного поля  $\Phi_{cr}$  между обкладками, при котором электроны перестанут попадать на анод вследствие искривления их траекторий в магнитном поле.

**4.62.** Длинный прямой цилиндрический катод радиуса  $a$ , по которому течет равномерно распределенный ток  $\mathcal{I}$ , испускает электроны с нулевой начальной скоростью. Эти электроны движутся под действием ускоряющего потенциала  $V$  к длинному коаксиальному аноду радиуса  $b$ . Каково должно быть минимальное значение разности потенциалов  $V_{cr}$  между катодом и анодом, чтобы электроны достигали анода, несмотря на искривление их траекторий магнитным полем тока  $\mathcal{I}$ ?

**4.63.** По бесконечно длинному прямому цилиндрическому проводу радиуса  $a$  течет ток  $\mathcal{I}$ . С поверхности провода срывается электрон, начальная скорость  $v_0$  которого направлена вдоль провода. Найти наибольшее расстояние  $b$ , на которое электрон может удалиться от оси провода.

**4.64.** Решить задачу 4.62, используя преобразование Лоренца к системе отсчета, в которой имеется только одно поле ( $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ ). Такое преобразование было рассмотрено в задаче 4.29.

**4.65\*.** Заряженные частицы совершают нерелятивистское движение в ограниченной области пространства. а) Найти связь между их кинетической и потенциальной энергиями, усредненными по большому промежутку времени. б) Сделать то же самое при наличии однородного магнитного поля  $\mathbf{H}$  и при условии  $e_a/m_a = e/m$ , где  $e_a, m_a$  — заряд и масса отдельной частицы.

**4.66.** Найти траекторию относительного движения нерелятивистских частиц с зарядами  $e, e'$  и массами  $m_1, m_2$ . Исследовать решение в зависимости от начальных условий, задаваемых полной энергией взаимодействующих нерелятивистских частиц  $\mathcal{E}$  и моментом импульса  $l$  их относительного движения.

**4.67\*.** Найти дифференциальное сечение рассеяния  $\sigma(\theta)$  нерелятивистских частиц с зарядом  $e$  в поле неподвижного точечного заряда  $e'$ . Скорость частиц вдали от неподвижного рассеивающего центра равна  $v_0$ .

**4.68.** Найти дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц на точно таких же частицах. Записать дифференциальное сечение через угол рассеяния и энергию, определенные в системе центра масс и в лабораторной системе, в которой частицы мишени первоначально покоятся.

**4.69.** На неподвижную частицу с зарядом  $e'$  налетает ограниченный стационарный поток одинаковых нерелятивистских частиц с зарядами  $e$ ,

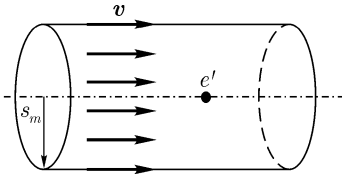


Рис. 4.1

массами  $m$  и скоростями  $v$  (рис. 4.1). Концентрация частиц в потоке  $n$ . Вычислить силу, действующую на неподвижную частицу, пренебрегая взаимодействием налетающих частиц друг с другом. Объяснить причину того, что при радиусе пучка  $s_m \rightarrow \infty$  эта сила обращается в бесконечность. Сохраняется ли для силы бесконечное значение, если заряд  $e'$  является одним из зарядов нейтральной системы (нейтральный атом, плазма)?

**4.70.** «Пробная» частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется со скоростью  $v$  в газе, состоящем из одинаковых заряженных частиц. Их массы  $m'$ , заряды  $e'$ , концентрация  $n'$ , распределение по скоростям описывается функцией  $f(v)$  ( $\int f(v) d^3v = n'$ ). Записать выражение для средней силы  $\overline{\mathcal{F}}(v)$ , действующей на «пробную» частицу.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат, полученный при решении предыдущей задачи. Зависимостью кулонова логарифма от скорости пренебречь.



**4.71.** Пробная частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в среде, состоящей из беспорядочно распределенных неподвижных бесконечно тяжелых одинаковых частиц с зарядами  $e'$  и концентрацией  $n$ . Как изменяются во времени энергия и импульс пробной частицы под действием средней силы со стороны среды?

**4.72.** Частицы среды имеют одинаковые по абсолютной величине скорости  $v_0$ , распределенные сферически симметрично, заряды  $e$  и массы  $m$ . Вычислить среднюю силу  $\overline{\mathcal{F}}$ , действующую на пробную частицу с зарядом  $e'$  и массой  $m'$ , которая движется со скоростью  $v$ .

Сделать то же самое для случая, когда частицы среды движутся с одинаковой по величине и направлению скоростью  $v_0$ .

**4.73\*.** Электроны в плазме совершают беспорядочное тепловое движение и, кроме того, имеют упорядоченную составляющую скорости, которая возникает под действием однородного электрического поля  $E$ , созданного внешним источником. Произвести порядковую оценку зависимости средней силы трения  $\overline{\mathcal{F}}$  от упорядоченной скорости  $u$ , считая, что трение вызвано столкновениями с неподвижными ионами. Показать, что  $\overline{\mathcal{F}}$  как функция  $u$  имеет максимум, и оценить  $\overline{\mathcal{F}}_{\max}$ . Как будет вести себя электронный газ под действием электрического поля  $E$  при  $E < \overline{\mathcal{F}}_{\max}/e$  и  $E > \overline{\mathcal{F}}_{\max}/e$ ?

**4.74\*.** Релятивистская частица с зарядом  $-e$  и массой  $m$  движется в поле неподвижного точечного заряда  $Ze$ . Найти уравнение траектории частицы. Исследовать все возможные случаи движения в зависимости от начальных условий, задаваемых полной энергией частицы  $\mathcal{E}$  и ее моментом импульса  $l$ .

**4.75\*.** Исследовать процесс падения релятивистской частицы на центр в кулоновском поле притяжения (см. предыдущую задачу, случай  $Ze^2 > lc$ ): а) вычислить время  $\Delta t$  падения с расстояния  $r$ ; б) показать, что скорость частицы стремится к  $c$  при  $r \rightarrow 0$ .

**4.76\*.** Релятивистская частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в поле одноименного неподвижного точечного заряда  $Ze$ . Найти уравнение траектории частицы. Исследовать все возможные случаи движения в зависимости от начальных условий, задаваемых полной энергией частицы  $\mathcal{E}$  и ее моментом импульса  $l$ .

**4.77.** Вычислить угол  $\theta$  отклонения релятивистской частицы с зарядом  $\pm e$ , энергией  $\mathcal{E} > mc^2$  и моментом импульса  $l > Ze^2/c$ , пролетающей в кулоновском поле неподвижного заряда  $Ze$ .

**4.78.** Релятивистская частица с зарядом  $\pm e$ , массой  $m$  и скоростью на бесконечности  $v_0$  рассеивается на малый угол кулоновским полем

неподвижного заряда  $Ze$ . Вычислить дифференциальное сечение рассеяния  $\sigma(\theta)$ .

**4.79\***. В бетатроне во время ускорения электрона магнитное поле непрерывно нарастает, порождая разгоняющую электрон ЭДС индукции, а орбита его остается неизменной. Доказать, что для ускорения электрона на орбите постоянного радиуса необходимо, чтобы полный магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий орбиту, был вдвое больше потока  $\Phi_0$ , который получился бы, если бы поле внутри орбиты было однородно и равно полю на орбите (бетатронное правило «2: 1»).

**4.80\***. Показать, что с точностью до членов  $v^2/c^2$  энергия запаздывающего взаимодействия двух заряженных частиц имеет вид<sup>4</sup>

$$U(t) = \frac{e_1 e_2}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})] \right\} \quad (4.75)$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор относительного положения частиц,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  — скорости частиц. Все величины в правой части равенства берутся в момент  $t$ .

**УКАЗАНИЕ.** Воспользоваться разложениями потенциалов Льенара–Вихерта (см. следующую главу) по степеням времени запаздывания, учитывая только те члены, которые не зависят от ускорений и их производных. Произвести калибровочное преобразование потенциалов таким образом, чтобы скалярный потенциал принял форму кулоновского потенциала.

**4.81.** Найти приближенное выражение функции Лагранжа двух взаимодействующих частиц с зарядами  $e_1$ ,  $e_2$  и массами  $m_1$ ,  $m_2$ , учитывая эффект запаздывания с точностью до поправочных членов порядка  $v^2/c^2$ .

**Динамика орбитальных и спиновых магнитных моментов.** При движении заряженной частицы в центрально-симметричном электрическом поле сохраняется ее момент импульса относительно центра симметрии  $\mathbf{l} = \mathbf{r}_0(t) \times \mathbf{p}(t)$ , где  $\mathbf{r}_0(t)$  — радиус-вектор частицы. Это приводит к сохранению магнитного момента  $\mathbf{m}_l$ , создаваемого орбитальным движением частицы (**орбитального магнитного момента**):

$$\mathbf{m}_l = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} d^3r = \eta \mathbf{l}, \quad (4.76)$$

где в интеграл подставлено выражение  $\mathbf{j} = ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$  для тока, создаваемого движущейся точечной частицей, а коэффициент пропорционально-

<sup>4</sup>Это выражение носит название формулы Брейта. Аналогичное выражение используется при приближенном квантовом описании запаздывающего взаимодействия.

сти  $\eta = ec/2\mathcal{E}$  называется **гирромагнитным отношением**. Для нерелятивистской частицы  $\eta = \eta_0 = e/2mc$  зависит от отношения ее заряда к массе (см. задачу 2.88).

**Пример 4.11.** Вывести уравнение, описывающее движение орбитального магнитного момента во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ .

**Решение.** На магнитный диполь во внешнем поле действует момент сил  $\mathbf{N} = \mathbf{m}_l \times \mathbf{H}$ . Изменение момента импульса дается уравнением механики

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{N} = \mathbf{m}_l \times \mathbf{H}. \quad (4.77)$$

Из уравнения (4.76) находим  $\dot{\mathbf{m}}_l = \dot{\eta}\mathbf{l} - (\dot{\mathcal{E}}/\mathcal{E})\eta\mathbf{l}$ . Поскольку энергия частицы в постоянном магнитном поле сохраняется,  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ , то уравнение движения орбитального магнитного момента принимает вид

$$\frac{d\mathbf{m}_l}{dt} = \eta\mathbf{m}_l \times \mathbf{H}. \quad (4.78)$$

■

Кроме механического и магнитного орбитальных моментов, большинство элементарных частиц обладает собственными (спиновыми) механическим  $\mathbf{s}$  и магнитным  $\mathbf{m}_s$  моментами, коэффициент пропорциональности между которыми различен для разных частиц:

$$\mathbf{m}_s = g\eta_0\mathbf{s}. \quad (4.79)$$

Для электрона  $g_e \approx 2(1 + \alpha/2\pi)$ , где  $\alpha = e^2/\hbar c \approx \frac{1}{137}$  — постоянная тонкой структуры; для протона  $g_p \approx 5,59$ , а величина  $\eta_0 = e/2m_p c$  определяется зарядом и массой протона. Она приблизительно на три порядка меньше, чем соответствующая величина для электрона. Изменение спинового механического момента во времени<sup>5</sup> описывается уравнением, аналогичным (4.77):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{m}_s \times \mathbf{H}. \quad (4.80)$$

Нейтрон не имеет электрического заряда, но обладает спиновым магнитным моментом ( $g_n\eta_0\mathbf{s}$ , где  $g_n \approx -3,83$ ). Благодаря квантованию спина ( $\mathbf{s} \cdot \mathbf{H}/H = \pm\hbar/2$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка) магнитный момент нейтрона может ориентироваться во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  только двумя

<sup>5</sup>Спиновый момент имеет квантовую природу и его последовательное описание достигается методами квантовой механики. В приведенных формулах под  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{m}_s$  следует понимать средние по квантовомеханическому состоянию значения спиновых моментов микрочастицы.

способами: по или против поля. Первоначальная ориентация сохраняется, если выполнено условие достаточно плавного изменения поля, или его адиабатичности, состоящее в том, что скорость поворота поля в системе покоя нейтрона мала по сравнению с частотой прецессии спина  $\omega_L = 2|m_s|H/\hbar$  в магнитном поле. В этом случае движение нейтронов с магнитным моментом, ориентированным по полю или против него, можно рассматривать как движение классической частицы в силовом поле с потенциальной энергией

$$U(\mathbf{r}) = \mp |m_s|H(r). \quad (4.81)$$

Энергия  $U$  обычно очень мала, поэтому магнитное поле оказывает влияние практически лишь на движение очень медленных («холодных») нейтронов.

Рекомендуемая литература: [Френкель (1956)], [Матышев (2000)], [Берестецкий и др. (1989)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Джексон (1975)], [Джексон (1965)].

## Задачи

**4.82.** Проинтегрировать уравнение (4.78) движения магнитного момента в магнитном поле и выразить компоненты  $m_i$  через его начальное значение  $m_i(0)$ . Каков характер движения магнитного момента?

**4.83\***. Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$ , имеющая внутренние (спиновые) механический  $\mathbf{s}$  и магнитный

$$\mathbf{m}_s = \frac{eg}{2mc} \mathbf{s}$$

моменты, совершает нерелятивистское движение во внешнем электростатическом центрально-симметричном поле  $\varphi(r)$ . Вычислить энергию взаимодействия  $U$  спина с внешним полем в первом исчезающем приближении по  $v/c$ , приняв во внимание томасовскую прецессию мгновенно сопутствующей системы с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}}{2c^2}.$$

Происхождение прецессии Томаса поясняется в задаче 3.26.

УКАЗАНИЕ. Скорости изменения произвольного вектора  $\mathbf{A}$  в лабораторной инерциальной и вращающейся системах координат связаны соотношением

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{lab} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A},$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость вращения ([Ландау и Лифшиц, Механика])

**4.84\***. Вычислить энергию взаимодействия спина  $s$  нерелятивистского нуклона с полем ядерных сил, которым можно сопоставить потенциальную энергию  $V(r)$ . Действием слабых электростатических сил на нуклон пренебречь.

**4.85\*\***. Записать уравнение движения спинового момента частицы (4.80) в четырехмерной ковариантной форме, справедливой в любой инерциальной системе отсчета.

УКАЗАНИЕ. Для ковариантного описания спина использовать аксиальный 4-вектор  $S^k$ , совпадающий в системе покоя частицы с трехмерным вектором спина  $s$ . В качестве независимой переменной использовать собственное время частицы.

**4.86**. Записать компоненты 4-вектора спина  $S^k$  предыдущей задачи в произвольной инерциальной системе отсчета через трехмерный вектор  $s$ , определенный в системе покоя частицы.

**4.87\*\***. Вывести для релятивистской частицы уравнение эволюции трехмерного вектора  $s$ , характеризующего спин частицы в сопутствующей системе отсчета. Исследовать движение спина в постоянном и однородном поле для трех основных случаев: а) движение поперек магнитного поля; б) движение вдоль магнитного поля; в) произвольное движение в электрическом поле.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.

**4.88**. Убедиться в том, что уравнение движения спина (4.82) учитывает томасовскую прецессию, рассмотренную в задачах 3.26, 4.83.

**4.89**. Нейтрон с магнитным моментом  $m_n$  и кинетической энергией  $T$  влетает из пустоты в магнитное поле с напряженностью  $H = \text{const}$ , имеющее плоскую границу. При каком условии нейтрон отражается от поля?

**4.90**. Рассмотреть возможные траектории холодного нейтрона (масса  $M$ , магнитный момент  $m_n$ ) в поле бесконечного прямого провода с током  $\mathcal{I}$ .

**4.91**. Поток холодных нейтронов (скорость  $v_0$ , магнитный момент  $m_n$ , масса  $M$ ) рассеивается на магнитном поле бесконечного прямого провода с током  $\mathcal{I}$ . Вычислить дифференциальную поперечную длину рассеяния

$$l(\alpha) = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right|,$$

где  $s(\alpha)$  — прицельное расстояние, при котором нейтрон рассеивается на угол  $\alpha$ .

**Приближенные методы. Усреднение по быстрым движениям.** Для большинства задач о движении заряженных частиц в неоднородных и переменных электромагнитных полях не удается получить точных решений. Многие приближенные методы решения таких задач основаны на разделении и последовательном учете «быстрых» и «медленных» движений. Пусть частица участвует в быстром квазипериодическом движении (например, вращение вокруг направления магнитного поля или колебания в высокочастотной волне), наряду с которыми происходит более медленное и регулярное изменение ее координат и энергии, связанное с медленным изменением магнитного поля или амплитуды волны. Тогда можно произвести усреднение по быстрому движению, что дает как правило более простые уравнения, приближенно описывающие сглаженное движение частицы на достаточно больших временах и расстояниях. Такой метод находит, в частности, широкое применение при исследовании движения частиц в слабо неоднородных и медленно изменяющихся во времени электромагнитных полях при  $H > E$  и называется в этом случае **приближением ведущего центра**, или **дрейфовым приближением**. Усреднение по ларморовскому вращению приводит к тому, что исследуется движение не самой частицы, а центра ее ларморовского кружка (ведущего центра) — см. разобранные ниже примеры и последующие задачи. Более глубокие сведения по методу усреднения можно почерпнуть из книг и обзоров [Боголюбов и Митропольский (1958)], [Сивухин (1963)], [Чирков (2001)], [Альвен и Фельтхаммар (1967)], [Заславский и Сагдеев (1988)], [Морозов и Соловьев (1963)].

**Пример 4.12.** *Усреднить по ларморовскому вращению энергию и импульс заряженной частицы, движущейся во взаимно перпендикулярных однородных и постоянных полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  ( $E < H$ ). Найти таким путем сглаженную скорость движения ведущего центра частицы.*

**Решение.** Используем формулы, полученные в задаче 4.55 и проводим усреднение по собственному времени, что является заведомо инвариантной операцией, не изменяющей закона преобразования усредняемой величины. Обозначив усреднение чертой, находим

$$\bar{p}_x = \gamma_E^2 (\mathcal{E}_0 - v_E p_{0x}) v_E / c^2, \quad \bar{p}_y = 0, \quad \bar{p}_z = p_{0z}, \quad \bar{\mathcal{E}} = \gamma_E^2 (\mathcal{E}_0 - v_E p_{0x}).$$

Скорость ведущего центра  $v_c$  определяем через усредненные величины:

$$\mathbf{v}_c = \frac{c^2 \bar{\mathbf{p}}}{\bar{\mathcal{E}}} = v_E \mathbf{e}_x + v_{\parallel} \mathbf{e}_z, \quad v_{\parallel} = \frac{c^2 p_{0z}}{\bar{\mathcal{E}}} \mathbf{h}, \quad (4.82)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$  — единичный вектор. Частица движется поперек магнитного и электрического полей со скоростью **электрического дрейфа**  $v_E < c$ :

$$\mathbf{v}_E = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2}. \quad (4.83)$$

Скорость электрического дрейфа не зависит от знака заряда частицы и его величины, а также от массы и энергии частицы.

Скорость вдоль магнитной силовой линии в общем случае имеет вид

$$v_{\parallel} = v_{0z} \frac{1 - E^2/H^2}{1 - v_{0x}E/cH}. \quad (4.84)$$

Она сводится к начальной продольной скорости  $v_{0z}$ , если  $E \ll H$ . ■

**Пример 4.13.** *Заряженная частица движется в постоянном, но неоднородном магнитном поле. Напряженность  $\mathbf{H}$  не меняется по направлению, но слабо (на расстоянии порядка ларморова радиуса частицы) изменяется по абсолютной величине. Вычислить в первом неисчезающем приближении скорость поперечного дрейфа частицы, обусловленную неоднородностью магнитного поля.*

**Решение.** Поскольку энергия частицы сохраняется, поперечное движение описывается уравнением

$$(1) \quad \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\perp}, \quad \boldsymbol{\Omega} = -\frac{ec}{\mathcal{E}} \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{H} = H\mathbf{h}$  — поле в точке, в которой находится частица. Представим ее радиус-вектор в виде суммы  $\mathbf{R} + \mathbf{r}$  радиуса-вектора ведущего центра  $\mathbf{R}$  и радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  самой частицы относительно ведущего центра. С точностью до членов I порядка малости имеем  $H(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = H(\mathbf{R}) + (\mathbf{r}_{\perp} \cdot \nabla)H(\mathbf{R})$ . Уравнение (1) примет вид

$$(2) \quad \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\perp} \left( 1 + \frac{(\mathbf{r}_{\perp} \cdot \nabla)H}{H} \right),$$

где теперь  $H(\mathbf{R})$  всюду берется в точке ведущего центра и не зависит от координат самой частицы.

Представим скорость частицы в виде  $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{0\perp} + \mathbf{v}'_{\perp}$ , где  $\mathbf{v}_{0\perp} = \dot{\mathbf{r}}_{0\perp}$  — скорость в однородном поле  $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{v}'_{\perp}$  — малая добавка, вызванная неоднородностью поля. В поправочном члене в (2) заменим  $\mathbf{v}_{\perp}$  и  $\mathbf{r}_{\perp}$  на их

невозмущенные значения  $v_{0\perp}$  и  $r_{0\perp}$ , причем  $\dot{v}_{0\perp} = \Omega \times v_{0\perp}$ . Таким образом,

$$(3) \quad \dot{v}'_{\perp} = \Omega \times [v'_{\perp} + v_{0\perp}(r_{0\perp} \cdot \nabla H)/H].$$

Теперь усредняем (3) по ларморовскому вращению, т. е. по периоду  $T = 2\pi/\Omega$ . Имеем

$$\overline{\dot{v}'_{\perp}} = \frac{1}{T}[v'_{\perp}(t+T) - v'_{\perp}(t)] \approx 0$$

с точностью до членов I порядка, так как поправки к членам I порядка имеют порядок не ниже второго. Следовательно, скорость поперечного дрейфа

$$v_g = \overline{v}_{0\perp} + \overline{v}'_{\perp} = \overline{v}'_{\perp} = -\overline{v_{0\perp}(r_{0\perp} \cdot \nabla H)/H},$$

где  $r_{0\perp}(t) = R_{\perp}(e_1 \sin \Omega t + e_2 \cos \Omega t)$  — радиус-вектор частицы в однородном поле,  $R_{\perp} = cp_{\perp}/eH$  — ларморов радиус. Проведя усреднение по времени, найдем скорость **градиентного дрейфа**:

$$v_g = \frac{v_{\perp} R_{\perp}}{2H} \mathbf{h} \times \nabla H. \quad (4.85)$$

В отличие от электрического дрейфа, скорость градиентного дрейфа зависит от энергии и заряда частицы. Параметром малости, по которому производилось разложение, выступает безразмерная величина

$$(4) \quad R_{\perp} |\nabla H|/H \ll 1.$$

■

**Пример 4.14.** *Нерелятивистская заряженная частица совершает колебания в одномерном потенциальном поле  $U(x)$  с периодом  $T_0$ . В некоторый момент включается модулированное по амплитуде быстропеременное электрическое поле  $E(x) \cos \omega t$ ,  $\omega \gg 2\pi/T_0$ . Произвести усреднение по быстрым осцилляциям электрического поля и получить уравнение, которое описывало бы усредненное движение частицы в результирующем поле. Оценить пределы применимости описания на основе усредненного уравнения.*

**Решение.** Точное уравнение движения имеет вид

$$(1) \quad m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} + eE(x) \cos \omega t.$$



Его усреднение основано на выделении малой осциллирующей добавки  $q(t)$  к координате частицы:

$$(2) \quad x(t) = X(t) + q(t), \quad \bar{x}(t) = X(t), \quad \bar{q}(t) = 0.$$

Чертой обозначено усреднение по быстрым осцилляциям с частотой  $\omega$ . При таком усреднении медленная координата  $X(t)$  и выражающиеся через нее величины могут считаться постоянными на временах порядка периода  $T = 2\pi/\omega$  быстрых осцилляций. Малость  $q$  может достигаться не малостью поля  $E$ , а его быстрыми изменениями, уменьшающими амплитуду колебаний частицы.

Уравнение (1) после подстановки (2) и учета членов первого порядка по  $q$  принимает вид

$$(3) \quad \ddot{X} + \ddot{q} = -\frac{1}{m} \frac{dU(x)}{dX} - \frac{1}{m} \frac{d^2U(x)}{dX^2} q + \frac{e}{m} E(X) \cos \omega t + \frac{e}{m} \frac{dE(x)}{dX} q \cos \omega t.$$

Это разложение предполагает неравенства

$$\left| q \frac{d^2U}{dX^2} \right| \ll \left| \frac{dU}{dX} \right|, \quad \left| q \frac{dE}{dX} \right| \ll |E|,$$

а следующие члены должны быть пренебрежимо малы. Иными словами, должна быть обеспечена малость  $|q|$  по сравнению с меньшим из масштабов  $L$  изменения функций  $E(X)$  и  $dU/dX$ .

Усреднив (3) по периоду  $2\pi/\omega$ , получаем уравнение

$$(4) \quad \ddot{X} = -\frac{1}{m} \frac{dU}{dX} + \frac{e}{m} \frac{dE}{dX} \overline{q \cos \omega t}.$$

В нем нужно выразить  $q$  через  $X$  и произвести усреднение в последнем слагаемом. Вычитая (4) из (3), получаем уравнение для осциллирующей добавки

$$\ddot{q} = -\frac{q}{m} \frac{d^2U}{dX^2} + \frac{e}{m} E(X) \cos \omega t + \frac{e}{m} \frac{dE}{dX} (q \cos \omega t - \overline{q \cos \omega t}).$$

Поскольку  $q(t)$  осциллирует с частотой вынуждающей силы  $\omega$ , то по порядку величины  $\dot{q} \sim \omega^2 q$ ,  $qU''/m \sim \omega_0^2 q$ , а последнее слагаемое имеет лишний малый множитель порядка  $q/L$  по сравнению с предпоследним. В итоге в пренебрежении малыми членами остается приближенное уравнение

$$\ddot{q} = \frac{e}{m} E(X) \cos \omega t,$$

решение которого, обусловленное вынуждающей силой, имеет вид

$$(5) \quad q(t) = -\frac{e}{m\omega^2} E(X) \cos \omega t.$$

Возвращаясь к уравнению (4) и произведя усреднение, получим искомое уравнение для сглаженного по быстрым осцилляциям движения

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{eff}}{dX}, \quad \text{где} \quad U_{eff}(X) = U(X) + \frac{e^2}{4m\omega^2} E^2(X) = U(X) + \frac{m\bar{q}^2}{2} \quad (4.86)$$

— эффективная потенциальная энергия, учитывающая усредненное воздействие высокочастотного поля. ■

**Фазовые траектории и фазовый портрет.** Характер движения частицы в поле  $U_{eff}(X)$  зависит от его конкретного вида, а также от начальных условий. Можно составить общее представление о характере движения при разных начальных условиях, если найти **особые точки** фазовой плоскости  $(X, p)$ , ее **сепаратрисы** и изобразить **фазовый портрет** рассматриваемой системы, т. е. характерные типы фазовых траекторий.

**Особыми точками** называются точки, в которых одновременно  $\dot{X} = 0$ ,  $\dot{p} = 0$ . Поскольку  $\dot{X} = p/m$ , то все особые точки лежат (в рассматриваемом простейшем случае) на оси  $OX$  и находятся в точках равновесия  $X_n$ ,  $U'_{eff} = 0$ . Точки равновесия являются устойчивыми при  $U''_{eff}(X_n) = k_n > 0$  и неустойчивыми при  $k_n < 0$ . При  $k_n = 0$  требуется рассмотреть старшие производные.

Вблизи особых точек нетрудно исследовать движение частицы в общем виде. Разлагая функцию Гамильтона  $H(p, X) = p^2/2m + U_{eff}(X)$  по малым отклонениям  $p$  и  $x = X - X_n$  от особой точки, получим уравнение кривой II порядка на фазовой плоскости:

$$p^2 \pm mk_n x^2 = 2m(E - E_n),$$

где  $E$  — полная энергия частицы,  $E_n = U_{eff}(X_n)$ . Знак (+) в левой части соответствует устойчивой точке, которая называется **эллиптической**, или **центром**, так как фазовые траектории остаются в ее окрестности и имеют вид эллипсов. При этом возможны только значения  $E \geq E_n$ .

Знак (−) отвечает гиперболам, а значения  $E$  при этом могут быть как больше, так и меньше  $E_n$ . При  $E = E_n$  фазовые траектории вырождаются в четыре прямолинейных отрезка, исходящие из особой точки (две пересекающиеся прямые — асимптоты гипербол). Соответствующая точка неустойчива (частица уходит от нее) и называется **гиперболической**, или **седлом**.

Фазовые траектории, проходящие через неустойчивые особые точки и разделяющие области финитного (хотя бы с одной стороны) и инфинитного движения, называются **сепаратрисами**. Примеры особых точек и фазовых траекторий приведены на рис. 4.2. На нем изображено одномерное потенциальное поле  $U(q)$  и фазовый портрет частицы, движущейся в этом поле.  $C_1$  и  $C_2$  — сепаратрисы, точки  $(0, q_1)$  и  $(0, q_3)$  на фазовой плоскости — эллиптические (центры), точки  $(0, q_2)$  и  $(0, q_4)$  — гиперболические (седла).

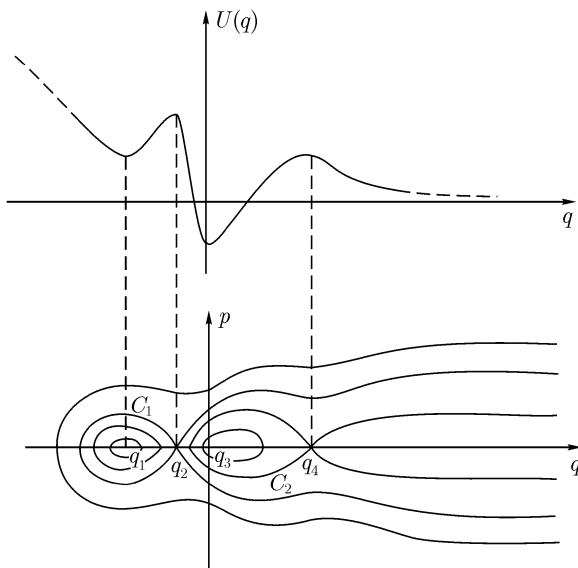


Рис. 4.2

**Адиабатические инварианты.** Обратимся теперь к случаю, противоположному тому, который был рассмотрен в примере 4.14. Пусть внешнее поле  $U(x, \lambda(t))$ , в котором частица совершает периодическое движение с периодом  $T$ , медленно (**адиабатически**) изменяется со временем, так что параметр  $\lambda(t)$  удовлетворяет условию

$$|T\dot{\lambda}| \ll \lambda \quad (4.87)$$

(разумеется, при переменном  $\lambda$  движение будет не строго периодическим, но близким к периодическому). Как известно из механики [Ландау и Лифшиц, Механика], [Заславский и Сагдеев (1988)], в этом случае можно по-

строить приближенный интеграл движения — **адиабатический инвариант**

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (4.88)$$

где интегрирование производится по квазипериоду колебаний, а  $p$  и  $q$  — канонические переменные. Хотя адиабатический инвариант (4.88), вычисленный с точными  $p$  и  $q$ , испытывает малые осцилляции с периодом колебаний системы, его усреднение по указанному периоду приводит к постоянному значению, которое сохраняется с высокой (часто экспоненциальной) точностью в течение многих периодов. При фактическом вычислении интеграла (4.88) в большинстве случаев достаточно это сделать в нулевом приближении, т. е. считать  $\lambda = \text{const}$  и только после нахождения явной зависимости  $I(\lambda)$  придавать параметру  $\lambda$  зависимость от  $t$ . С помощью адиабатических инвариантов можно решать многие задачи о движении частиц в медленно изменяющихся электромагнитных полях.

**Пример 4.15.** Построить адиабатический инвариант, связанный с вращением заряженной частицы вокруг направления магнитного поля. Поле испытывает медленные изменения в пространстве и во времени.

**Решение.** Определим адиабатический инвариант в системе  $S'$  ведущего центра частицы. Канонические переменные  $p'$  и  $q'$  берем в нулевом приближении, т. е. без учета пространственной и временной неоднородности поля. Выберем в качестве  $q'$  азимутальный угол  $\alpha'$ , определяющий положение частицы на ларморовой орбите. Линейная скорость частицы имеет только азимутальную составляющую  $v' = v'_\alpha = R'_\perp \dot{\alpha}'$ , где  $R'_\perp$  — ларморов радиус. Функция Лагранжа (4.46) имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{R'^2_\perp \dot{\alpha}'^2}{c^2}} + \frac{e}{c} A'_\alpha R'_\perp \dot{\alpha}' - e\varphi',$$

где  $A'$  и  $\varphi'$  — электромагнитные потенциалы в системе ведущего центра.

Вычислив обобщенный импульс

$$p'_\alpha = \mathcal{E}' R'^2_\perp \dot{\alpha}' / c^2 + (e/c) A'_\alpha R'_\perp$$

и подставив его в интеграл (4.88), получим два интеграла, из которых первый дает

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{E}' R'^2_\perp \dot{\alpha}' d\alpha' = \frac{2\pi e}{c} R'^2_\perp H',$$

так как  $\dot{\alpha}' = ceH'/\mathcal{E}'$  — частота вращения. Второй интеграл представляется в виде

$$\int_0^{2\pi} A'_\alpha R'_\perp d\alpha' = \oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{l}' = \int \text{rot } \mathbf{A}' \cdot \mathbf{n} dS = \pi R'_\perp{}^2 H',$$

где использована теорема Стокса. Объединяя два последних результата, находим

$$I' = \frac{3e}{2c} R'_\perp{}^2 H' = \frac{3e}{2c} \frac{p'_\perp{}^2}{H'}.$$

При переходе в лабораторную систему, движущуюся вдоль  $\mathbf{H}'$  со скоростью частицы  $v_\parallel$ , имеем  $H' = H$  и  $p'_\perp = p_\perp$ . Таким образом, адиабатический инвариант в лабораторной системе

$$\frac{p_\perp^2}{H} = \text{const.} \quad (4.89)$$

Если поле однородно, но медленно меняется со временем, то  $p_\parallel = \text{const}$ , а  $p_\perp(t) = p_\perp(0) \sqrt{H(t)/H(0)}$ . Вместе с поперечным импульсом изменяется и энергия частицы. Если поле постоянно, но неоднородно в пространстве, то энергия частицы  $\mathcal{E} = \text{const}$ , но при движении частицы будет изменяться угол  $\vartheta$  между импульсом частицы и направлением поля:

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{H(\mathbf{r})}{H(\mathbf{r}_0)}} \sin \vartheta_0,$$

где поле  $H$  берется в точке ведущего центра частицы.

## Задачи

**4.92.** Дать качественное объяснение происхождению электрического дрейфа. Для этого построить с помощью компьютера несколько витков траектории частицы во взаимно перпендикулярных полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и указать причину ее регулярного смещения в направлении  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

**4.93.** Сделать то же самое для градиентного дрейфа.

**4.94.** К заряженной частице, движущейся в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , приложена слабая неэлектромагнитная сила  $\mathcal{F}$ , перпендикулярная  $\mathbf{H}$ . Вычислить скорость поперечного дрейфа, вызванного приложенной силой.

**4.95.** Магнитное поле постоянно по абсолютной величине в рассматриваемой области пространства, но слабо (на расстояниях порядка ларморова радиуса) изменяется по направлению. Вычислить скорость поперечного дрейфа заряженной частицы, вызванного кривизной силовых линий (такой дрейф называется **центробежным**). Используя результаты решения примеров 4.12 и 4.13, показать, что при наличии слабо неоднородного магнитного поля и малого ( $E \ll H$ ) электрического поля скорость движения ведущего центра частицы с учетом поперечных дрейфов первого порядка имеет вид

$$\dot{r}_c \equiv v_c = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{H} \mathbf{E} \times \mathbf{h} + \frac{1}{2H} v_{\perp} R_{\perp} \mathbf{h} \times \nabla H + v_{\parallel} R_{\parallel} \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}, \quad (4.90)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ ,  $R_{\perp, \parallel} = cp_{\perp, \parallel}/eH$ . Каков порядок величины дрейфов, вызванных медленным изменением во времени магнитного поля и пространственной неоднородностью электрического поля?

**4.96.** Прямым расчетом доказать адиабатическую инвариантность величины  $I = p_{\perp}^2/H$  при медленном изменении магнитного поля со временем. Для этого вычислить изменение поперечного импульса частицы за ларморов период, считая ее траекторию окружностью в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}$ , и связать его с изменением магнитного поля.

**4.97.** Показать, что скорость изменения энергии заряженной частицы в медленно меняющихся в пространстве и во времени электрическом и магнитном полях ( $E \ll H$ ) в приближении ведущего центра имеет вид

$$\dot{\mathcal{E}} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_c - \frac{c}{2} v_{\perp} R_{\perp} \mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{E}. \quad (4.91)$$

Здесь учтены слагаемые до II порядка малости включительно.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Уравнения (4.89), (4.90) и (4.91) образуют полную систему уравнений, описывающих движение частицы в заданном медленно меняющемся электромагнитном поле ( $E \ll H$ ). Все величины в правых частях этих уравнений следует брать в точке нахождения ведущего центра частицы. Более подробные сведения о выводе и применениях этих уравнений можно найти в [Сивухин (1963)].

**4.98.** Исходя из инвариантности величины  $I = p_{\perp}^2/H$ , показать, что в дрейфовом приближении сохраняются магнитный поток через орбиту циклотронного вращения частицы и магнитный момент нерелятивистской частицы, создаваемый ее циклотронным вращением. При каких дополнительных условиях сохраняется магнитный момент релятивистской частицы?

**4.99.** Частица движется в слабо неоднородном постоянном магнитном поле. Пользуясь инвариантностью величины  $I = p_{\perp}^2/H$  и законом сохранения энергии, показать, что в дрейфовом приближении на частицу действует

сила  $\mathcal{F}$ , направленная вдоль магнитной силовой линии, и найти величину этой силы. Выразить ее через магнитный момент циклотронного вращения частицы.

**4.100.** Поляризуемая нейтральная система заряженных частиц, не имеющая дипольного момента в отсутствие внешнего поля, помещена в слабо неоднородное статическое электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Считая скалярную поляризуемость  $\beta$  системы известной, записать в дипольном приближении нерелятивистское уравнение движения ее центра масс. Найти потенциальную энергию и интеграл энергии системы.

**4.101.** Пусть на нейтральную систему предыдущей задачи действует дополнительно слабо неоднородное магнитное поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ . Записать уравнение движения центра масс.

**4.102\*.** Система одинаковых заряженных нерелятивистских частиц находится в аксиально-симметричном внешнем потенциальном поле. Показать, что слабое однородное внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}$ , приложенное вдоль оси симметрии системы, приводит систему частиц как целое во вращение с угловой скоростью

$$\Omega_L = -\frac{e\mathbf{H}}{2mc}$$

(ларморовская прецессия). Указать критерий слабости магнитного поля.

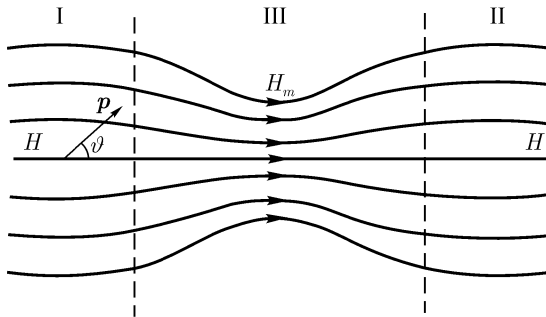


Рис. 4.3

**4.103.** Между областями I и II, в которых статическое магнитное поле однородно и равно  $H$ , находится область III, в которой поле усилено

(«магнитная пробка»). Максимальное значение поля равно  $H_m$ , схематический вид силовых линий показан на рис. 4.3. В области I движется частица, импульс  $p$  которой в некоторый момент времени составляет угол  $\vartheta$  с направлением силовой линии. Считая изменение поля в пространстве медленным, найти соотношение между  $\vartheta$ ,  $H$  и  $H_m$ , при котором частица отразится от области с сильным полем.

**4.104.** Структура магнитного поля в адиабатической ловушке с аксиально-симметричным полем имеет вид, схематически изображенный на рис. 4.4. В среднюю часть ловушки, где напряженность поля равна  $H$ , впрыснута порция частиц с изотропно распределенными скоростями. Какая доля  $R$  частиц удержится в ловушке в течение длительного времени?

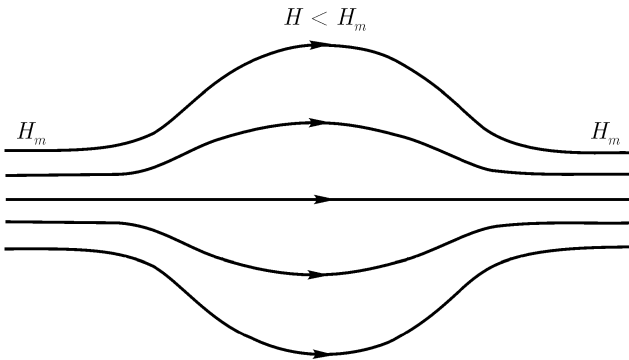


Рис. 4.4

**4.105.** В ловушке с аксиально-симметричным полем, изображенным на рис. 4.4, захвачена порция частиц. Частицы проводят большую часть времени в средней части ловушки, где поле почти однородно. Пусть поле ловушки медленно нарастает во времени таким образом, что форма магнитных силовых линий не меняется. Найти, как изменяется расстояние от ведущего центра каждой из частиц до оси ловушки.

**4.106.** В однородном магнитном поле с напряженностью  $H$  находится неподвижный точечный заряд  $q$ . Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$ , имеющая на бесконечности продольную составляющую скорости  $v_{||}$ , рассеивается на заряде  $q$ . Считая применимым дрейфовое приближение и пренебрегая изменением продольной скорости при рассеянии, найти, по какой силовой линии будет двигаться ведущий центр частицы после рассеяния. До рассеяния он



двигался по силовой линии, уравнение которой в цилиндрических координатах с осью  $Oz$ , проходящей через заряд  $q$  и ориентированной вдоль поля, имеет вид  $r = l$ ,  $\varphi = 0$ .

**4.107.** Магнитное поле Земли можно представить приближенно как поле точечного диполя с магнитным моментом  $\mu = 8,1 \cdot 10^{25}$  Гс  $\cdot$  см<sup>3</sup>. Протон с энергией  $\mathcal{E} = 50$  МэВ в некоторый момент времени находится в плоскости магнитного экватора на расстоянии двух земных радиусов от центра Земли и движется поперек магнитных силовых линий. Найти в дрейфовом приближении закон движения ведущего центра протона. За какое время  $T$  он совершит полный оборот вокруг земного шара? Каков ларморов радиус  $R$  протона? Радиус земного шара  $r_* = 6380$  км, его масса  $M = 6 \times 10^{27}$  г.

**4.108\*.** Протон находится в плоскости геомагнитного экватора (см. условие предыдущей задачи) на расстоянии  $r$  от центра Земли, его импульс составляет угол  $\alpha$  с направлением магнитной силовой линии. а) Пренебрегая гравитационным полем, показать, что ведущий центр протона, наряду с движением вдоль магнитных силовых линий, будет испытывать азимутальный дрейф, и найти угловую скорость дрейфа  $\omega_d$ , выразив ее через  $r$  и геомагнитную широту  $\lambda$ . б) Указать значения  $\lambda_m$ , соответствующие точкам отражения частицы в земном магнитном поле. в) Найти условия, при которых протон может достичь поверхности Земли.

**4.109.** Расстояние между магнитными пробками в адиабатической аксиально-симметричной ловушке, изображенной на рис. 4.4, медленно изменяется по закону  $l(t)$ . Построить адиабатический инвариант, связанный с продольными колебаниями захваченной в ловушку частицы. Пользуясь адиабатическим инвариантом, выразить изменение энергии частицы через расстояние между пробками  $l(t)$ , считая поле в большей части ловушки квазиоднородным (отражение от «магнитных зеркал»).

**4.110\*\*.** Электрическое поле  $\mathbf{E}$  всюду однородно и направлено вдоль оси  $Ox$ , а магнитное поле параллельно  $Oy$  и испытывает скачок по абсолютной величине на плоскости  $z = 0$ , так что при  $z < 0$   $H = H_1$ , а при  $z > 0$   $H = H_2 > H_1 \gg E$ .

Частица первоначально находится в области  $z < 0$  и имеет импульс  $\mathbf{p}_1 \perp \mathbf{H}_1$ . Вычислить энергию частицы  $\mathcal{E}_2$ , усредненную по ларморовскому вращению, после того, как ее ларморов кружок продрейфует в область  $z > 0$ .

**4.111\*\*\*.** Релятивистская частица движется в неоднородных электрическом и магнитном полях

$$\mathbf{E} = e_x E_x(x) + e_y E_y, \quad \mathbf{H} = e_x H_x + e_z H_z(x),$$

где  $E_y = \text{const} > 0$ ,  $H_x = \text{const}$ , а  $E_x(x)$  и  $H_z(x)$  — произвольные (не обязательно медленно меняющиеся) функции  $x$ , принимающие значения  $E_x = 0$ ,  $H_z = H_1$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $E_x = 0$ ,  $H_z = H_2 > H_1$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Кроме того, всюду  $E_y \ll H$  и  $|H_x| \ll H_z$ .

Построить адиабатический инвариант частицы, связанный с ее движением в направлении оси  $Ox$ . С помощью адиабатического инварианта найти изменение энергии частицы при переходе из области с полем  $H_1$  в область, где поле  $H_z = H_2$ . Проанализировать частные случаи, в том числе случай резкого скачка  $H_z$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой и предыдущей задачах предлагается в упрощенной модели исследовать взаимодействие заряженной частицы с фронтом ударной волны в плазме с магнитным полем.

**4.112.** Обобщить уравнения (4.86), выведенные в примере 4.14, на случай одномерного движения релятивистской частицы в быстро осциллирующем поле.

**4.113\*.** Нерелятивистская заряженная частица движется в периодическом постоянном потенциальном поле  $U(x) = U_0[1 - \cos(2\pi x/L)]$ , на которое наложено быстроосциллирующее модулированное электрическое поле  $E(x, t) = E_0 \sin(2\pi x/L) \cos \omega t$ .

а) Провести усреднение по быстрым осцилляциям и найти усредненную потенциальную энергию, которой можно описать сглаженное движение частицы. Указать пределы применимости метода.

б) Найти особые точки на фазовой плоскости «медленных» переменных  $p$ ,  $X$ . Дать их классификацию и вычислить частоты малых колебаний вблизи точек устойчивого равновесия.

в) Изобразить фазовый портрет системы.

**4.114.** Сделать то же самое, что в предыдущей задаче, при наличии быстроосциллирующего электрического поля

$$E(x, t) = E_0 \cos(2\pi x/L) \cos \omega t.$$

**4.115.** Согласно гипотезе Дирака<sup>6</sup>, могут существовать частицы, имеющие магнитные заряды («монополи Дирака»). Величина магнитного заряда  $g$ , по Дираку, квантуется:

$$\frac{e_0 g}{\hbar c} = \frac{1}{2} k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

<sup>6</sup>Дирак П. А. М. — выдающийся английский физик-теоретик, основоположник релятивистской квантовой механики и квантовой электродинамики.

где  $e_0$  — элементарный электрический заряд. На частицы с магнитным зарядом в магнитном поле действует сила  $\mathcal{F} = g\mathbf{H}$ . Вычислить величину минимального магнитного заряда и приращение энергии магнитного монополя в поле  $H = 1$  кЭ на единицу пути.

**4.116\***. Дирак предложил описывать векторный потенциал магнитного заряда  $g$  в сферической системе координат  $(r, \vartheta, \alpha)$  выражением  $\mathbf{A} = (0, 0, (g/r) \operatorname{tg}(\vartheta/2))$ . Вычислить напряженность магнитного поля и его поток через замкнутую поверхность, окружающую начало координат. Какие трудности формального и физического характера возникают при его использовании?

**4.117\***. Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в поле магнитного монополя с магнитным зарядом  $g$ . Найти ее интегралы движения. Для нерелятивистской частицы найти также зависимость координат от времени.

### 4.3. Четырехмерная формулировка электродинамики. Введение в теорию поля

**Методы Лагранжа и Гамильтона в теории поля.** В истории физики электродинамика явилась первой полевой теорией, в которой были развиты и отработаны методы классической теории поля (принцип наименьшего действия, лагранжево и гамильтоново описание поля, методы теории преобразований). Квантовая электродинамика явилась первой квантовой теорией поля, позволившей рассчитывать различные квантовоэлектродинамические эффекты с точностью, которая до сих пор не достигнута ни в какой другой области физики.

Одно время казалось, однако, что лагранжевы и гамильтоновы подходы, столь эффективно применявшиеся в электродинамике, не имеют перспективы в квантовой теории элементарных частиц, особенно при описании сильных взаимодействий (см., например, статью [Ландау (1960)]<sup>7</sup>). Но создание вскоре теории электрослабого взаимодействия и экспериментальное обнаружение предсказанных ею промежуточных бозонов, а также создание современной квантовой теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики, построенной в значительной степени по аналогии с квантовой электродинамикой — не оставляют сомнений в важной роли методов классической теории поля в новейших теориях элементарных частиц. Поэтому в настоящую книгу включены разделы, посвященные общим принципам

<sup>7</sup>Ландау Лев Давидович (1908–1968) — выдающийся советский физик-теоретик, Нобелевский лауреат, автор (вместе с Е. М. Лифшицем) всемирно известного курса теоретической физики.

теории полей. В необходимых случаях мы используем и квантовые понятия, как правило не выходящие за пределы стандартного университетского курса квантовой механики.

В этом разделе главное внимание уделено лагранжевой форме уравнений поля и принципу наименьшего действия, законам сохранения, а также основным понятиям теории преобразований. Дополнительные сведения по классической теории поля и ее связи с современными квантовыми теориями элементарных частиц можно почерпнуть из учебников и монографий [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Иваненко и Соколов (1951)], [Волошин и Тер-Мартirosян (1984)], [Рубаков (1999)], [Медведев (1977)], [Коноплева и Попов (1980)], [Гальцов и др. (1991)], [Соколов и др. (1986)], [Линде (1990)], [Окунь (1988)].

Наиболее естественный путь введения вариационного принципа в теорию непрерывных систем, каковыми являются электромагнитное и другие поля — это предельный переход от механики дискретных точечных масс к механике непрерывной среды (см. Дополнение 2). В результате мы приходим к определению действия как интеграла по некоторой фиксированной области  $\Omega$  в четырехмерном пространстве-времени от плотности функции Лагранжа (или лагранжиана)  $\mathcal{L}$ :

$$S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathcal{L}(q^A, q_{,i}^B, x) d^4x. \quad (4.92)$$

Лагранжиан<sup>8</sup>  $\mathcal{L}$  в общем случае зависит от функций<sup>9</sup>  $q^A(x^k)$ , описывающих рассматриваемое поле, и их производных  $q_{,k}^A \equiv \partial q^A / \partial x^k$ , а также от четырехмерных координат  $x^k$ . В зависимости от природы поля полевые функции  $q^A$  могут быть действительными или комплексными, а их число (число значений индекса  $A$ ) может быть различным. Полевые функции  $q^A$ , как и их вариации, считаются в дальнейшем независимыми.

Структура лагранжиана не может быть полностью произвольной — она должна подчиняться ряду ограничений, которые вытекают из общезначимых принципов и надежно установленных симметрий, присущих физическим явлениям и подтверждаемых опытом. Перечислим основные ограничения:

<sup>8</sup>Здесь выделен множитель  $1/c$ , чтобы в нерелятивистском пределе имелась обычная связь между действием и функцией Лагранжа

<sup>9</sup>В этом разделе мы используем большие латинские индексы для нумерации компонент полевых функций ( $A, B = 1, 2, \dots, N$ ). Малые латинские индексы нумеруют четырехмерные координаты ( $i, k = 0, 1, 2, 3$ ). Малые греческие индексы, как и раньше, будут использоваться для обозначения номера пространственной координаты ( $\alpha, \mu = 1, 2, 3$ ). В некоторых случаях, когда это не будет вызывать недоразумений, через  $q$  и  $x$  без индексов будут обозначаться совокупности  $N$  полевых функций и четырех координат соответственно.

1. Релятивистская инвариантность. Действие  $S$  должно быть инвариантом преобразования Лоренца, чтобы получаемые из него следствия не противоречили принципу относительности<sup>10</sup>. Поскольку  $d^4x$  — тоже релятивистский инвариант, то инвариантом должен быть и лагранжиан  $\mathcal{L}$ .

2. Локальность. Лагранжиан может зависеть только от конечного числа производных. Все величины, входящие в него, берутся в одной пространственно-временной точке. В электродинамике такая структура теории естественным образом приводит к картине взаимодействия частиц через поле, имеющееся в точке локализации каждой из частиц.

3. Включение в лагранжиан производных не выше первого порядка от полевых функций. Это ограничивает уравнения поля вторым порядком по координатам и времени.

4. Инвариантность действия относительно некоторых преобразований (помимо преобразований Лоренца), связанных с внутренними симметриями теории. Особенно большую роль в теории элементарных частиц играет калибровочное преобразование, обобщающее калибровочное (градиентное) преобразование электромагнитных потенциалов, смысл и следствия которого будут разъяснены ниже.

5. Действительность лагранжиана, обеспечивающая действительность (отсутствие мнимой части) у энергии поля и других физических величин.

Можно дать следующую формулировку вариационного принципа для поля:

**Эволюция поля в пространстве и во времени происходит таким образом, что действие остается стационарным относительно малых изменений поля при фиксированном его значении на границе области интегрирования, т. е.**

$$\delta S = 0 \quad \text{при} \quad \delta q^A|_{\Sigma} = 0, \quad (4.93)$$

где  $\Sigma$  — трехмерная гиперповерхность, ограничивающая четырехмерный объем интегрирования  $\Omega$  в (4.92).

Одни и те же уравнения поля можно получить из различных лагранжианов  $\mathcal{L}'$ , отличающихся дивергенцией произвольного вектора  $F^m(q^A, x)$ :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF^m(q^A, x)}{dx^m}. \quad (4.94)$$

Это объясняется тем, что четырехкратный интеграл от дивергенции преобразуется в трехмерный интеграл по гиперповерхности  $\Sigma$ , вариация которого равна нулю в силу того, что полевые функции  $q^A(x^i)$  на этой поверхности заданы.

<sup>10</sup>Разумеется, при формулировке нерелятивистских теорий действие не обязано быть релятивистским инвариантом (см., например, задачи (4.118)–(4.124))

**Пример 4.16.** Предполагая известным лагранжиан поля, записать уравнения поля в лагранжевой форме, пользуясь сформулированным выше вариационным принципом для поля.

**Решение.** Придаем компонентам полевых функций малые независимые приращения  $\delta q^A(x^i)$ , не связанные с изменением 4-координат, и вычисляем в первом порядке вариацию

$$(1) \quad \delta S = S[q^A + \delta q^A] - S[q^A] = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A} \delta q^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,i}^A} \delta q_{,i}^A \right).$$

Здесь использовано правило суммирования по повторяющимся значкам (как  $i$ , так и  $A$ ). Пользуясь равенством

$$(2) \quad \delta q_{,i}^A \equiv \delta \frac{\partial q^A}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \delta q^A,$$

освобождаем  $\delta q^A$  из-под знака производной путем интегрирования (1) по частям:

$$(3) \quad \delta S = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A} - \frac{d}{dx^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,i}^A} \right) \delta q^A(x^k) + \int_{\Sigma} d^3\Sigma_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,i}^A} \delta q^A.$$

Здесь  $d^3\Sigma_i$  — проекция элемента трехмерной гиперповерхности  $\Sigma$  на ось  $i$ ; ввиду того, что поле на  $\Sigma$  задано, имеем  $\delta q^A|_{\Sigma} = 0$ , и последнее слагаемое в правой части (3) обращается в нуль. Приравнявая нулю первую вариацию действия, получаем из (3) вследствие произвольности и независимости функций  $\delta q^A$  и произвольности области интегрирования

$$\frac{\delta S}{\delta q^A} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A} - \frac{d}{dx^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,i}^A} = 0, \quad A = 1, 2, \dots, N. \quad (4.95)$$

Это и есть искомые уравнения поля в лагранжевой форме. Тожество в левой части определяет вариационную производную от функционала действия. ■

**Пример 4.17.** По аналогии с механикой системы материальных точек ввести плотность обобщенного импульса поля

$$\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,0}^A}, \quad A = 1, 2, \dots, N, \quad (4.96)$$

построить гамильтониан (плотность функции Гамильтона) поля и сформулировать уравнения эволюции поля в гамильтоновой форме.

**Решение.** По аналогии с классической механикой материальных точек определяем гамильтониан поля через его лагранжиан:

$$\mathcal{H}(q^A, \pi_B, q_{,\alpha}^C, x^k) = q_{,0}^A \pi_A - \mathcal{L}. \quad (4.97)$$

В правой части равенства, где подразумевается суммирование по индексу  $A$ , нужно выразить все «обобщенные скорости»  $q_{,0}^A$  через обобщенные импульсы  $\pi_A$  с помощью равенств (4.96). В результате гамильтониан станет функцией  $q^A$  и  $\pi_A$ , пространственных производных  $q_{,\alpha}^A$  и, при наличии внешних полей или источников, также функцией координат  $x^k$ .

Для получения уравнений поля в гамильтоновой форме удобно снова воспользоваться вариационным принципом. Однако, прямое перенесение расчета, произведенного в предыдущем примере, на рассматриваемый случай невозможно. Это связано с тем, что уравнений Гамильтона вдвое больше, чем уравнений Лагранжа, и для их получения, следовательно, нужно иметь вдвое больше независимых вариаций.

Это затруднение можно преодолеть, если ввести в лагранжиан дополнительные формально независимые переменные, подчинив их соответствующим условиям связи. Рассмотрим этот прием сначала на примере вывода уравнений Лагранжа. Обозначим  $s^A = q_{,0}^A$  и введем величины  $s^A$  в правую часть равенства (4.92):

$$(1) \quad S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(q^A, s^B, q_{,\alpha}^C, x^k) d^4x.$$

Вариационная задача с действием (1) и уравнениями связи

$$(2) \quad s^A - q_{,0}^A = 0 \quad (A = 1, 2, \dots, N),$$

очевидно, эквивалентна той, которая была рассмотрена в примере (4.16). Но теперь мы можем считать переменные  $q^A$ ,  $s^A$  и их вариации независимыми, если введем в задачу неопределенные множители Лагранжа  $\lambda_A(x^k)$ :

$$(3) \quad S = \int_{\Omega} [\mathcal{L}(q^A, s^B, q_{,\alpha}^C, x^k) - \lambda_A (s^A - q_{,0}^A)] d^4x.$$

Вычислив первую вариацию действия, как в примере (4.16), получим  $2N$  уравнений, в которые войдут и множители Лагранжа:

$$(4) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}^A} - \frac{\partial \lambda_A}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s^A} - \lambda_A = 0.$$

С учетом уравнений связи (2) система (4) эквивалентна лагранжевым уравнениям (4.95).

Теперь используем тот факт, что согласно (4), (2) и (4.96) лагранжевы множители совпадают с плотностью обобщенного импульса:

$$(5) \quad \lambda_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,0}^A} = \pi_A.$$

Вводим их в выражение (3) и вместо величин  $q^A$ ,  $s^A$  принимаем за независимые переменные систему  $q^A$ ,  $\pi_A$

$$S = \int_{\Omega} [\pi_A q_{,0}^A - \mathcal{H}(q^A, \pi_B, q_{,\alpha}^C, x^k)] d^4x \quad (4.98)$$

Приравнивая нулю первую вариацию действия при независимых  $\delta q^A$ ,  $\delta \pi_A$ , получаем уравнения поля в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial q^A}{\partial x^0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_A}, \quad \frac{\partial \pi_A}{\partial x^0} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^A} + \frac{d}{dx^\alpha} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{,\alpha}^A}. \quad (4.99)$$

Эти уравнения менее симметричны, чем уравнения Лагранжа (4.95), поскольку координата  $x^0$  оказывается выделенной. ■

## Задачи

**4.118.** Уравнение, описывающее волны малой амплитуды в упругой изотропной среде, имеет в трехмерных обозначениях вид

$$(1) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{q} + \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{q}),$$

где положительные постоянные  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $K$  — это соответственно плотность среды, модуль сдвига и модуль всестороннего сжатия; вектор  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  описывает смещение малого элемента среды в результате деформации, вызванной распространяющейся волной.

Записать лагранжиан и гамильтониан, приводящие к уравнению (1).

**4.119.** Система макроскопических тел малых размеров («материальных точек»), взаимодействуя гравитационными силами, совершает нерелятивистское движение. Построить действие для полной системы, состоящей



из вещества и гравитационного поля, описываемого ньютоновским гравитационным потенциалом  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . Вывести из вариационного принципа уравнения движения для материальных точек и гравитационного потенциала.

**4.120.** Сделать то же самое для системы точечных заряженных частиц в пренебрежении магнитным взаимодействием и гравитацией.

**4.121.** В пространстве задано распределение стационарных электрических токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Записать действие, приводящее к уравнениям магнито-статике.

**4.122\*.** Комплексное скалярное поле  $\psi(\mathbf{r}, t)$  в нерелятивистском приближении имеет лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - U |\psi|^2, \quad (4.100)$$

где  $m > 0$  — масса частицы,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $U(\mathbf{r}, t)$  — потенциальное поле, в котором движется частица. Получить из лагранжиана и интерпретировать уравнение движения для  $\psi(\mathbf{r}, t)$ .

УКАЗАНИЕ. Комплексное поле  $\psi = q^1 + iq^2$  эквивалентно двум действительным функциям  $q^1(\mathbf{r}, t)$  и  $q^2(\mathbf{r}, t)$ . В качестве независимых вариаций удобно рассматривать линейные комбинации вариаций этих функций  $\delta q^1 + i\delta q^2 = \delta \psi$  и  $\delta q^1 - i\delta q^2 = \delta \psi^*$ .

**4.123\*.** Построить плотность функции Гамильтона  $\mathcal{H}$ , используя лагранжиан (4.100). Вычислить полную энергию поля и дать квантовую интерпретацию полученного результата.

**4.124\*.** Уравнение Шредингера для волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$  бесспиновой нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \psi + e\varphi(\mathbf{r}, t)\psi, \quad (4.101)$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — электромагнитные потенциалы (заданные действительные функции). Построить лагранжиан, приводящий к уравнению (4.101).

**4.125\*.** Комплексное скалярное поле  $\varphi(x^k)$  имеет релятивистски инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \partial^k \varphi \partial_k \varphi^* \right) - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} |\varphi|^2. \quad (4.102)$$

Найти уравнение движения для поля  $\varphi(x^k)$ . Какой вид имеет дисперсионное соотношение между волновым вектором и частотой соответствующих волн? Интерпретировать его в духе квантовых соотношений де-Бройля.

**4.126\***. Пусть лагранжиан действительного скалярного поля  $\varphi$  имеет вид

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^k \varphi \partial_k \varphi) - V(\varphi),$$

где потенциал  $V(\varphi)$  имеет вид

$$(2) \quad V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4$$

(модель Хиггса). По сравнению с потенциалом предыдущей задачи квадратичный член поменял знак и добавлен положительный член четвертого порядка.

Записать дифференциальное уравнение для поля  $\varphi$ . Какой характер будет иметь решение при  $\varphi^2 \ll \mu^2/\lambda$ ? При каких условиях для указанного эффективного потенциала можно сохранить интерпретацию  $\varphi$  как волновой функции квантов поля и какую массу будут иметь эти кванты?

**Действие для электромагнитного поля.** После нескольких примеров и задач, которые иллюстрировали эффективность вариационного принципа в теории самых разных полей, перейдем к дальнейшему изучению электромагнитного поля на основе этого исключительно мощного метода исследования. Начнем с составления действия, пригодного для описания в классической теории в наиболее общем случае физической системы, состоящей из электромагнитного поля и заряженных релятивистских частиц, взаимодействующих через посредство поля. Для частных случаев этот вопрос уже рассматривался в задачах (4.120), (4.121). Две составляющие части действия были построены ранее — действие для свободной частицы (3.27) и член взаимодействия частицы с полем (4.43). Обобщая эти выражения на систему частиц, будем иметь

$$S_p = - \sum_a m_a c \int ds_a \quad (4.103)$$

и

$$S_{int} = - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i(x_a) dx_a^i, \quad (4.104)$$

где индекс  $a$  обозначает номер частицы и суммирование производится по всем частицам. Для полного описания рассматриваемой системы необходимо дополнить действие слагаемым  $S_{em}$  относящимся к электромагнитному полю:

$$S = S_p + S_{int} + S_{em}. \quad (4.105)$$

Последнее слагаемое должно быть выражено через полевые функции, то есть 4-потенциал  $A_i$ , и удовлетворять сформулированным выше принципам релятивистской инвариантности и симметрии. Для электромагнитного поля следует добавить еще одно важное условие, ограничивающее возможный вид действия — линейность уравнений поля, вытекающую из принципа суперпозиции полей в вакууме. Из этого условия следует, что действие должно быть билинейным функционалом 4-потенциала. К тому же действие для поля должно быть релятивистским и калибровочным инвариантом. Всем этим требованиям удовлетворяет единственный инвариант электромагнитного поля  $F^{ik}F_{ik}$ ,<sup>11</sup> через который и выражается действие для электромагнитного поля:

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c} \int F^{ik}F_{ik} d^4x. \quad (4.106)$$

Численный множитель соответствует гауссовой абсолютной системе единиц. При выводе уравнений движения поля из действия (4.105) нужно варьировать электромагнитный потенциал при фиксированных значениях 4-координат частиц. При этом удобно записать слагаемые, в которые входит потенциал, единообразно, то есть в виде интеграла по четырехмерному пространству-времени, тогда как в (4.104)  $S_{int}$  записано в виде суммы интегралов по мировым линиям частиц. Требуемая запись достигается путем использования дельта-функции Дирака, через которую легко выразить плотности заряда и электрического тока:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (4.107)$$

Введя единое время  $t$  для всех частиц, будем иметь  $dx_a^i/dt = (c, \mathbf{v}_a)$  и

$$S_{int} = -\frac{1}{c^2} \int \mathbf{j}^i(x) A_i(x) d^4x, \quad (4.108)$$

где

$$\mathbf{j}^i(x) = (c\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)) \quad (4.109)$$

<sup>11</sup>Второй инвариант преобразования Лоренца,  $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ , меняет знак при инверсии пространственных осей, и его включение в действие приведет к уравнениям различного вида в правой и левой системах координат.

— **4-вектор плотности тока.** Ток можно записать в такой форме, чтобы его векторная природа была видна явным образом. Используем 4-скорость частицы:

$$\mathbf{j}^i(x) = \sum_a e_a u_a^i \sqrt{1 - v_a^2/c^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \sum_a c e_a \int u_a^i \delta^4(x - x_a(\tau_a)) d\tau_a. \quad (4.110)$$

В последнем выражении интегрирование проводится по инвариантному собственному времени  $a$ -й частицы,  $d\tau_a = \sqrt{1 - v_a^2/c^2} dt$ , а

$$\delta^4(x - x_a) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \delta(x^0 - ct)$$

— также релятивистский инвариант. Последнее утверждение следует из инвариантности  $d^4x$  и интеграла

$$\int_{\Omega} \delta^4(x - x_a) d^4x = 1,$$

который имеет указанное значение для любой четырехмерной области  $\Omega$ , если она включает точку  $x_a$ .

**Пример 4.18.** Показать, что вариация действия  $\delta S_{int}$  при заданном токе  $\mathbf{j}^i(x)$  калибровочно инвариантна, хотя величина  $S_{int}$  зависит от калибровки 4-потенциала  $A_i(x)$ .

**Решение.** Подставив в (108) преобразованный согласно (4.73) потенциал  $A_i = \tilde{A}_i - \partial_i f$ , находим

$$S_{int} = \tilde{S}_{int} + \frac{1}{c^2} \int \mathbf{j}^i(x) \partial_i f(x) d^4x.$$

Далее преобразуем подынтегральное выражение:

$$\mathbf{j}^i(x) \partial_i f(x) = \partial_i (f \mathbf{j}^i) - f \partial_i \mathbf{j}^i.$$

Последнее слагаемое обращается в нуль в силу сохранения электрического заряда (уравнение неразрывности):

$$\partial_i \mathbf{j}^i \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4.111)$$

Оставшееся слагаемое при интегрировании преобразуется по теореме Остроградского–Гаусса в интеграл по трехмерной гиперповерхности, ограничивающей объем интегрирования:

$$\int \partial_i (f \mathbf{j}^i) d^4x = \oint f \mathbf{j}^i d^3\Sigma_i.$$

Но поскольку поле на указанной гиперповерхности фиксировано, то вариация от последнего интеграла равна нулю. Таким образом, вариация  $\delta S_{int}$  калибровочно инвариантна:  $\delta S_{int} = \delta \tilde{S}_{int}$ .

**Пример 4.19.** Вывести уравнения Максвелла в четырехмерной форме путем варьирования действия (4.105).

**Решение.** Уравнение  $\delta S = 0$  принимает вид

$$(1) \quad \delta \int \left( -\frac{1}{16\pi c} F^{ik} F_{ik} - \frac{1}{c^2} j^i A_i \right) d^4x = 0,$$

где варьируется 4-потенциал, а  $j^i$  следует рассматривать как заданный источник поля. Имеем:

$$\delta (F^{ik} F_{ik}) = 2F^{ik} \delta F_{ik} = 2F^{ik} \delta (\partial_i A_k - \partial_k A_i) = -4F^{ik} \partial_k \delta A_i.$$

Далее преобразуем последнее выражение:

$$F^{ik} \partial_k \delta A_i = \partial_k (F^{ik} \delta A_i) - (\partial_k F^{ik}) \delta A_i.$$

При интегрировании по 4-объему первого слагаемого в правой части получим с помощью теоремы Остроградского–Гаусса

$$\int_{\Omega} \partial_k (F^{ik} \delta A_i) d^4x = \oint_{\Sigma} F^{ik} \delta A_i d^3\Sigma_k = 0,$$

так как  $\delta A_i = 0$  на ограничивающей 4-объем гиперповерхности  $\Sigma$ . В итоге (1) принимает вид

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{1}{16\pi c} \partial_k F^{ik} - \frac{1}{c^2} j^i \right) \delta A_i d^4x = 0,$$

откуда ввиду произвольности  $\delta A_i$  и области интегрирования следует уравнение Максвелла в 4-форме

$$\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (4.112)$$

Второе уравнение Максвелла запишем через дуальный тензор поля: согласно (4.30),  $\tilde{F}^{ik} = (1/2)e^{iklm} F_{lm} = e^{iklm} \partial_l A_m$ , откуда  $\partial_i \tilde{F}^{ik} = e^{iklm} \partial_i \partial_l A_m = 0$ . Последнее равенство и дает второе уравнение Максвелла:

$$\partial_i \tilde{F}^{ik} = 0. \quad (4.113)$$

С помощью (4.36) его можно записать через исходный тензор поля:

$$\partial_l F_{ik} + \partial_i F_{kl} + \partial_k F_{li} = 0. \quad (4.114)$$

■

## Задача

**4.127\*.** Получить уравнения Максвелла в трехмерной форме из равенств (4.112) и (4.114).

**Теорема Нетер и интегралы движения.** Уже упоминавшиеся выше свойства симметрии классических и квантовых полей, которые выражаются в инвариантности действия относительно некоторых преобразований четырехмерных координат  $x^k$  и полевых функций  $q^A(x)$ , приводят к сохранению ряда динамических величин, характеризующих поле. Нахождение интегралов движения играет в теории поля не менее важную роль, чем в классической механике. Связь между законами сохранения и свойствами симметрии поля устанавливает теорема Э. Нетер, рассмотренная в следующем примере.

**Пример 4.20.** Пусть действие для некоторого поля инвариантно относительно бесконечно малого преобразования 4-координат и полевых функций вида<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} x'^k &= x^k + \delta x^k, & \delta x^k &= \Gamma^k_a \delta \lambda^a; & q'^A(x') &= q^A(x) + \delta^* q^A(x), \\ & & & & \delta^* q^A(x) &= G^A_{Ba} q^B(x) \delta \lambda^a. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Здесь  $\lambda^a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) — не зависящие от координат и взаимно независимые параметры преобразования; тождественному преобразованию отвечают значения  $\lambda^a = 0$ ;  $\delta \lambda^a$  — их малые приращения;  $\delta q^A(x) = \delta^* q^A(x) - q^A_{,l} \delta x^l$  — вариация вида функции при неизменном аргументе, аналогичная той, которая использовалась в примере 4.16, и отличающаяся от полной вариации  $\delta^* q^A(x)$ , определенной выше и включающей в себя и изменение аргумента; все вариации линейны по  $\delta \lambda^a$ .

Показать, что при указанных условиях можно построить  $n$  4-компонентных величин  $J^k_a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) — обобщенных токов<sup>13</sup>, или токов

<sup>12</sup>Преобразования (4.115), не обязательно бесконечно малые, образуют группу Ли — см, например, [Боголюбов и Ширков (1980)].

<sup>13</sup>Индекс  $k$  является векторным значком. Смысл индекса  $a$  зависит от выбора параметров преобразования  $\lambda^a$ . Если  $\lambda^a$  — скалярный параметр, то  $J^k_a$  — 4-вектор. Если  $a$  — векторный значок, то ток Нетер — тензор II ранга. Если  $a$  включает в себя два векторных значка, то ток Нетер — тензор III ранга и т. д.

Нетер<sup>14</sup> — удовлетворяющих уравнениям непрерывности

$$\partial_k J_a^k = 0. \quad (4.116)$$

Какие сохраняющиеся величины связаны с обобщенными токами?

**Решение.** Естественный путь решения поставленной задачи — приравнять нулю вариацию действия, обусловленную рассматриваемым преобразованием (4.115), и из полученного равенства, которое должно линейно зависеть от параметров  $\delta\lambda^a$ , извлечь требуемые уравнения непрерывности (4.116). Начнем с вычисления вариации действия  $\delta^* S$ , обозначая ее звездочкой, поскольку преобразование (4.115) затрагивает не только изменение формы полевых функций  $q^a$ , но и преобразование координат:

$$\delta^* S = \int_{\Omega'} \mathcal{L} \left( q'^A(x'), \frac{\partial q'^A(x')}{\partial x'^k}, x'^l \right) d^4 x' - \int_{\Omega} \mathcal{L} (q^A(x), q_{,k}^A, x^l) d^4 x. \quad (4.117)$$

Перейдем в первом интеграле к переменным  $x$ . С помощью (4.115) находим

$$d^4 x' = \left| \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \right| = \left| \delta_l^k + \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^l} \right| d^4 x \approx \left( 1 + \frac{\partial \delta x^l}{\partial x^l} \right) d^4 x,$$

где использован якобиан преобразования от штрихованных координат к нештрихованным, а последнее приближенное равенство записано с точностью до членов первого порядка по  $\delta x$ . Далее,

$$\frac{\partial q'^A(x')}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x^l} \left[ q^A(x) + \delta q^A(x) + \frac{\partial q^A(x)}{\partial x^j} \delta x^j \right].$$

Опять с точностью до линейных членов находим

$$\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \approx \frac{\partial}{\partial x'^k} (x^l - \delta x^l(x')) \approx \delta_k^l - \frac{\partial \delta x^l(x)}{\partial x^k}$$

и окончательно получаем

$$\frac{\partial q'^A(x')}{\partial x'^k} = q_{,k}^A + \delta q_{,k}^A + q_{,k,j}^A \delta x^j.$$

<sup>14</sup>Нетер Амали Эмми (1882–1935) — немецкий математик, автор фундаментальных работ по теоретической физике, устанавливающих связь законов сохранения со свойствами симметрии физической системы.

Используя полученные формулы, приводим (4.117) к виду

$$\delta^* S = \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{L} \left( q^A + \delta q^A + q_{,j}^A \delta x^j, q_{,k}^A + \delta q_{,k}^A + q_{,k,j}^A \delta x^j, x^l + \delta x^l \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{\partial \delta x^n}{\partial x^n} \right) - \mathcal{L} \left( q^A, q_{,k}^A, x^l \right) \right\} d^4 x$$

и после устранения членов выше первого порядка малости получаем

$$\delta^* S = \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^l}{\partial x^l} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A} q_{,l}^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,k}^A} q_{,k,l}^A \right) \delta x^l \right\} d^4 x + \\ + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A} - \frac{d}{dx^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,k}^A} \right) \delta q^A d^4 x + \int_{\Omega} \frac{d}{dx^k} \left( \partial \mathcal{L} q_{,k}^A \delta q^A \right) d^4 x.$$

Здесь производится суммирование по повторяющимся индексам  $A, l, k$ .

Первый интеграл сворачивается в простое выражение

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dx^k} (\mathcal{L} \delta x^k) d^4 x,$$

а второй равен нулю ввиду выполнения уравнений Лагранжа (4.95). В оставшиеся члены подставляем величины  $\delta q^A = G_{Ba}^A q^B \delta \lambda^a - q_{,k}^A \delta x^k$ ,  $\delta x^k = \Gamma_a^k \delta \lambda^a$  и приравниваем вариацию действия нулю:

$$\delta^* S = \delta \lambda^a \int_{\Omega} d^4 x \frac{d}{dx^k} \left\{ \left( \mathcal{L} \delta_l^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,k}^A} q_{,l}^A \right) \Gamma_a^l + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,k}^A} G_{Ba}^A q^B \right\} = 0. \quad (4.118)$$

Параметры преобразования  $\delta \lambda^a$  не зависят от координат и поэтому вынесены за знак интеграла.

Ввиду линейной независимости величин  $\delta \lambda^a$  и произвольности области интегрирования  $\Omega$  из (4.118) следует  $n$  равенств (4.116), где

$$J_a^k = - \left( \mathcal{L} \delta_l^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,k}^A} q_{,l}^A \right) \Gamma_a^l - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,k}^A} G_{Ba}^A q^B \quad (4.119)$$

— обобщенные токи (токи Нетер).



Равенства нулю четырехмерных дивергенций выражают собой в дифференциальной форме законы сохранения физических величин, связанных с обобщенными токами:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J_a^0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_a = 0. \quad (4.120)$$

Здесь  $J_a^0/c$  можно рассматривать как трехмерную плотность некоторой величины, а  $\mathbf{J}_a$  — как плотность ее потока. Пользуясь трехмерной теоремой Остроградского–Гаусса и считая все величины достаточно быстро убывающими в любом пространственно-подобном направлении (т. е. при удалении от начала координат вдоль пространственных осей), находим обычным образом интегральные законы сохранения:

$$Q_a(x^0) = \int J_a^0(x^0, x^1, x^2, x^3) d^3x = \operatorname{const}, \quad (4.121)$$

где интегрирование производится по всему бесконечному трехмерному пространству.

Токи Нетер определяются использованным выше способом неоднозначно, так как в фигурные скобки равенства (4.118) можно добавить произвольный вектор (по индексу  $k$ )  $j_a^k$  с равной нулю дивергенцией, зависящий от тех же величин, что и лагранжиан. Указанный вектор можно выразить через произвольный антисимметричный тензор второго ранга:

$$j_a^k = f_a^{lk}, \quad f_a^{lk} = -f_a^{kl}, \quad (4.122)$$

поскольку

$$j_{a,k}^k = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} f_a^{lk} \equiv 0.$$

Но эта неоднозначность не сказывается на значениях интегральных величин  $Q_a$ , так как добавка к интегралу в правой части (4.121) имеет вид  $\int f_a^{\mu 0}, \mu d^3x$ . Этот интеграл по бесконечному трехмерному объему от трехмерной дивергенции преобразуется по теореме Остроградского–Гаусса в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль ввиду отсутствия поля на бесконечности. Плотность же распределения величины  $Q_a$  в пространстве и ее трехмерный ток остаются неоднозначными, и для доопределения этих дифференциальных величин требуются дополнительные соображения (см. примеры и задачи далее в этой главе). ■

## Задачи

**4.128.** Лагранжиан (4.100) квантовомеханической частицы инвариантен относительно изменения фазы волновой функции на постоянную величину, т. е. преобразования  $\psi'(x, t) = \psi(x, t) \exp(i\alpha)$ ,  $\alpha = \text{const}$  (координаты и время не преобразуются). Построить обобщенный нетеровский ток, связанный с этим преобразованием, и выяснить, сохранение какой величины связано с инвариантностью относительно фазового преобразования.

**4.129.** Сделать то же самое для релятивистского лагранжиана (4.102). Можно ли для обобщенного тока сохранить в релятивистском случае ту же интерпретацию, что и в нерелятивистской квантовой механике?

**4.130.** Сделать то же самое для лагранжиана, построенного в задаче (4.124) (нерелятивистская заряженная частица во внешнем электромагнитном поле)

**4.131\*.** Какое преобразование нужно произвести над волновой функцией  $\psi$  предыдущей задачи, чтобы при калибровочном преобразовании потенциалов

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad \varphi = \tilde{\varphi} + \frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

не изменились плотность и ток вероятности, а также лагранжиан заряженной частицы (последний был построен в задаче 4.124).

**4.132\*.** Действительное векторное поле  $V^k(x)$  взаимодействует со скалярным комплексным полем  $\chi(x) = 2^{-1/2}(\chi_1(x) + i\chi_2(x))$ . Лагранжиан, описывающий взаимодействующие поля, имеет вид

$$(1) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_k V_i - \partial_i V_k)(\partial^k V^i - \partial^i V^k) + \\ + [(\partial_k + igV_k)\chi^*][(\partial^k - igV^k)\chi] + \mu^2 \chi^* \chi - \lambda(\chi^* \chi)^2,$$

где  $g$  — константа взаимодействия.

1. Показать, что в отсутствие взаимодействия ( $g = 0$ ) кванты поля  $V^k$  имеют нулевую массу, а кванты поля  $\chi$  — массу, найденную в задаче 4.126.

2. При включении взаимодействия кванты векторного поля  $V^k$  приобретают массу  $m_v = g\mu/\sqrt{\lambda}$  (хиггсовский механизм возникновения массы у векторных частиц).

УКАЗАНИЕ. Для облегчения расчетов сначала произвести фазовое преобразование над полем  $\chi \rightarrow 2^{-1/2}(\varphi_0 + \eta(x)) \exp(i\zeta(x)/\varphi_0)$  и калибровочное преобразование над полем  $V^k \rightarrow A^k(x) - (1/g\varphi_0)\partial^k \zeta(x)$ , где  $\zeta(x)$ ,  $\varphi_0$ ,  $\eta(x)$  — действительные величины.

**4.133\*•.** Бесконечно малый сдвиг системы отсчета на вектор  $\delta a^k$  описывается преобразованием 4-координат и полевых функций

$$x'^k = x^k + \delta a^k, \quad q'^A(x') = q'^A(x + \delta a) = q^A(x). \quad (4.123)$$

Показать, что обобщенный нетеровский ток представляет собой тензор  $\Pi$  ранга (**канонический тензор энергии-импульса**) и имеет вид

$$J_l^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,k}^A} q_{,l}^A - \mathcal{L} \delta_l^k. \quad (4.124)$$

К сохранению каких величин приводит инвариантность лагранжиана относительно 4-мерного сдвига?

**Пример 4.21.** На основе теоремы Нетер найти тензор энергии-импульса электромагнитного поля в отсутствие заряженных частиц. Искомый тензор должен обладать следующими свойствами: а) калибровочной инвариантностью (т. е. выражаться только через компоненты тензора поля  $F_{ik}$ ); б) симметрией относительно перестановки тензорных знаков<sup>15</sup>.

**Решение.** Согласно (4.92), (4.106), лагранжиан свободного электромагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi} F^{ik} F_{ik}.$$

В данном случае полевые функции  $q^A = A^i$ . Чтобы вычислить частную производную, входящую в (4.124), воспользуемся формулой

$$\delta \mathcal{L}_{em} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^i_{,k}} \delta A^i_{,k} = -\frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta(A_{k,i} - A_{i,k}) = \frac{1}{4\pi} F^{ik} \delta A_{i,k},$$

откуда

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial A^i_{,k}} = \frac{1}{4\pi} F_i^k.$$

Подставляя последнюю величину в (4.124), находим **канонический тензор энергии-импульса** свободного электромагнитного поля:

$$J^{kl} = \frac{1}{4\pi} F^{ik} A_i{}^{,l} + \frac{1}{16\pi} (F^{mn} F_{mn}) g^{kl}. \quad (4.125)$$

<sup>15</sup>Второе свойство требуется, чтобы связь между плотностью импульса и плотностью момента импульса имела тот же вид, что и связь между импульсом и моментом в классической механике — см. задачу 4.139.

Этот тензор имеет в силу теоремы Нетер равную нулю дивергенцию,  $J^{kl},{}_k = 0$ , но он несимметричен и неинвариантен относительно калибровочного преобразования 4-потенциала. Чтобы избавиться от этих существенных недостатков, следует добавить к нему подходящий тензор с равной нулю дивергенцией, взятой по индексу  $k$ . Такой тензор, как было разъяснено в примере 4.20, сам должен представлять собой дивергенцию от некоторого тензора (в данном случае III ранга), антисимметричного по двум значкам.

Исходя из вида (4.125), естественно выбрать  $f^{ikl} = (a/4\pi)F^{ik}A^l$ ,  $f^{kil} = -f^{ikl}$ , с неопределенным пока множителем  $a$ . Его дивергенция  $f^{ikl},{}_i = (a/4\pi)F^{ik}A^l,{}_i$ ; при этом учтено, что  $F^{ik},{}_i = 0$  при  $j^k = 0$  в силу уравнения Максвелла (4.112). Заметим, что  $f^{ikl},{}_{i,k} = (a/4\pi)F^{ik}A^l,{}_{i,k} = 0$ . Добавляя тензор II ранга  $f^{ikl},{}_i$  к каноническому тензору (4.125), находим

$$T^{kl} = J^{kl} + f^{ikl},{}_i = \frac{1}{4\pi}F^{ik}(A_i,{}^l + aA^l,{}_i) + \frac{1}{16\pi}(F^{mn}F_{mn})g^{kl}$$

При  $a = -1$  получаем выраженный только через калибровочно инвариантные компоненты  $F^{ik}$  **симметричный тензор энергии-импульса**

$$T^{kl} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{ki}F_i{}^l + \frac{1}{4}g^{kl}F^{mn}F_{mn} \right). \quad (4.126)$$

След симметричного тензора энергии-импульса электромагнитного поля, как следует из (4.126), обращается в нуль во всех системах отсчета:  $T^k{}_k = 0$ .

С помощью таблиц (4.68) найдем отдельные компоненты тензора энергии-импульса. Величина

$$T^{00} = w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \quad (4.127)$$

представляет собой плотность энергии электромагнитного поля, уже рассмотренную в разделе 2.3. Компоненты  $T^{0\alpha}/c = T^{\alpha 0}/c = g^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) образуют плотность импульса электромагнитного поля

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (4.128)$$

которая отличается от плотности потока энергии  $\gamma$  (вектора Пойнтинга) множителем  $1/c^2$ . Уравнение неразрывности для компонент тензора  $T^{\alpha k}$  имеет вид  $g_{,t}^\alpha + T_{,\beta}^{\alpha\beta} = 0$ . Записав его в интегральной форме с помощью

трехмерной теоремы Остроградского–Гаусса,

$$-\frac{dG^\alpha}{dt} = \oint_S T^{\alpha\beta} dS_\beta, \quad (4.129)$$

где

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} d^3x \quad (4.130)$$

— полный импульс поля в объеме  $V$ , мы видим, что пространственная часть  $T^{\alpha\beta}$  представляет собой плотность потока импульса, а интеграл в (4.129) дает поток  $\alpha$ -й компоненты импульса из трехмерного объема  $V$  через его поверхность  $S$ . Трехмерный тензор

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta) - \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \delta_{\alpha\beta} \quad (4.131)$$

называется **максвелловским тензором натяжений**. ■

**Пример 4.22.** Построить тензор энергии-импульса системы, состоящей из электромагнитного поля и взаимодействующих с ним заряженных релятивистских частиц.

**Решение.** Следует ожидать, что при наличии заряженных частиц дивергенция тензора электромагнитного поля (4.126) (который мы теперь обозначим через  $T_{em}^{ik}$ ) не обратится в нуль, так как энергия и импульс поля могут изменяться при взаимодействии с частицами. Но полная энергия и импульс замкнутой системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля, должны сохраняться. Поэтому величина  $T_{em,k}^{ik}$  должна преобразовываться в дивергенцию некоторого другого тензора, относящегося к частицам:

$$T_{em,k}^{ik} = -T_{part,k}^{ik}. \quad (4.132)$$

Суммарный тензор  $T^{ik} = T_{em}^{ik} + T_{part}^{ik}$  и можно будет рассматривать как полный тензор энергии-импульса замкнутой системы.

Следуя этому плану, вычисляем

$$T_{em,k}^{ik} = \frac{1}{4\pi} (F^{il} F_l^k{}_{,k} + F_l^k F^{il}{}_{,k} + (1/2) F_{mn} F^{mn,i}).$$

Далее, используя уравнения Максвелла (4.112) и (4.114) соответственно, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} F^{il} F_l^k{}_{,k} &= -\frac{1}{c} F^{il} j_l; \\ F_l^k F^{il}{}_{,k} &= -(1/2) F_{kl} F^{kl,i} \end{aligned}$$

и получаем

$$T_{em,k}^{ik} = -(1/c)F^{il}j_l.$$

Теперь используем выражение для 4-тока в форме (4.110) и уравнение движения частицы (4.53):

$$\begin{aligned} T_{em,k}^{ik} &= -\sum_a e_a \int u_a^k F_a^{ik} \delta^4(x - x_a) d\tau_a = -\sum_a cm_a \int \frac{du_a^i}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a) d\tau_a = \\ &= -\sum_a cm_a u_a^i \delta(x - x_a) \Big|_{\tau_a=-\infty}^{+\infty} + \sum_a cm_a \int u_a^i \frac{d}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a) d\tau_a; \end{aligned}$$

внеинтегральный член обращается в нуль, а производная от дельта-функции преобразуется следующим образом:

$$\frac{d}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a) = -\frac{dx_a^k}{d\tau_a} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x - x_a) = -u_a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^4(x - x_a).$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\partial T_{em}^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x^k} \sum_a cm_a \int u_a^i u_a^k \delta^4(x - x_a) d\tau_a = -\frac{\partial T_{part}^{ik}}{\partial x^k},$$

откуда находим симметричный тензор энергии-импульса частиц:

$$T_{part}^{ik} = \sum_a cm_a \int u_a^i u_a^k \delta^4(x - x_a) d\tau_a. \quad (4.133)$$

Полученный тензор обладает всеми нужными свойствами: интеграл по трехмерному объему  $V$  дает

$$\begin{aligned} \int_V T_{part}^{00} d^3x &= \sum_a cm_a \int u_a^0 u_a^0 \sqrt{1 - v_a^2/c^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) d^3x \delta(x^0 - ct) dt = \\ &= \sum_V m_a u_a^0 u_a^0 \sqrt{1 - v_a^2/c^2} = \sum_V \mathcal{E}_a \end{aligned}$$

— полную энергию частиц в объеме  $V$ ; интеграл

$$\frac{1}{c} \int_V T_{part}^{0\alpha} d^3x = \frac{1}{c} \int_V T_{part}^{\alpha 0} d^3x = \sum_a p_a^\alpha$$

— полный импульс частиц в том же объеме. Трехмерный тензор

$$T_{part}^{\alpha\beta} = \sum_a p_a^\alpha v_a^\beta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (4.134)$$

представляет собой плотность потока импульса частиц. ■

## Задачи

**4.134.** Привести тензор энергии-импульса электромагнитного поля к диагональному виду. Найти все системы отсчета, в которых тензор имеет диагональную форму. В каком случае диагонализация тензора невозможна?

**4.135.** Построить тензор энергии-импульса для лагранжиана (4.100), соответствующего нерелятивистскому уравнению Шредингера. Дать квантовомеханическое истолкование интегралам по трехмерному объему от отдельных компонент тензора энергии-импульса.

УКАЗАНИЕ. Чтобы можно было в этой задаче использовать общую формулу (4.124), нужно включить в лагранжиан энергию покоя частицы.

**4.136.** Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета  $S$  известен тензор  $T^{ik}$  энергии-импульса поля. Наблюдатель движется относительно  $S$  с 4-скоростью  $u_i$ . Какие плотности энергии и импульса (в расчете на единицу трехмерного объема) измерит наблюдатель в своей системе отсчета?

**4.137.** Показать, что поток тензора натяжений Максвелла через поверхность некоторого трехмерного объема в статическом случае равен полной электромагнитной силе, приложенной к частицам, находящимся в этом объеме (если частицы не пересекают его границ). Какая величина добавляется к этому балансу в переменном поле?

**4.138.** На основе общих результатов, полученных в примере 4.20, выразить через лагранжиан и его производные обобщенный нетеровский ток, соответствующий бесконечно малому собственному преобразованию Лоренца (см. задачу 4.20). Проанализировать частный случай, когда преобразование сводится только к повороту пространственных осей. На примерах лагранжиана (4.100) для бесспиновой нерелятивистской частицы и аналогичного лагранжиана для нерелятивистской частицы со спином  $1/2$  выделить в нетеровском токе слагаемые, относящиеся к орбитальному моменту импульса, и те, которые относятся к спиновому моменту. Записать средние квантовомеханические значения этих величин в форме, принятой в квантовой механике.

**4.139\***. Пользуясь теоремой Нетер, построить 4-тензор плотности момента импульса для электромагнитного поля в отсутствие частиц. Для этого рассмотреть бесконечно малое собственное преобразование Лоренца, включающее в себя как чисто пространственные повороты, так и лоренцевские псевдоповороты (см. задачу 4.20). Путем добавления к тензору момента некоторой дивергенции привести его к такому виду, чтобы связь между плотностью импульса и плотностью момента импульса имела тот же вид, что связь между импульсом и моментом системы частиц:  $M = \sum_a r_a \times p_a$ .

**4.140\***. Построить тензор плотности момента  $M_{kij}$  для замкнутой системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля. Выяснить смысл пространственных  $M_{\alpha\beta}$  и смешанных  $M_{0\alpha}$  компонент тензора полного момента импульса системы.

**4.141\***. Пользуясь теоремой Нетер, найти интегралы движения нерелятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Показать, что полный момент импульса складывается из момента импульса  $m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$  самой частицы и момента импульса  $\int \mathbf{r} \times \mathbf{g} d^3x$  электромагнитного поля. Его электрическая составляющая — это кулоновское поле частицы, магнитная составляющая — внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}$ .

**4.142.** Электромагнитное поле отлично от нуля лишь внутри некоторого конечного пространственного объема  $V$ , в котором отсутствуют заряды. Показать, что полные энергия и импульс поля образуют 4-вектор.

**4.143\***. Система состоит из частиц и электромагнитного поля и занимает конечный объем. Из рассмотрения баланса полного момента импульса  $M_{ik}$  этой системы найти выражение для плотности потока  $\mathcal{R}$  момента импульса поля. Воспользоваться результатами задачи 4.140.

## 4.4. Ответы и решения

$$4.4. S_{ik} = S_{ki}, A_{ik} = -A_{ki}, S_i^k = S^k_i \neq S_k^i, A_i^k = -A^k_i \neq -A_k^i.$$

$$4.5. T_i^k = (1/4)T_l^l \delta_i^k + (T_i^k - (1/4)T_l^l \delta_i^k).$$

$$4.6. S^{ikl} = T^{ikl} + T^{kli} + T^{lik} + T^{kil} + T^{ilk} + T^{lki}; \\ A^{ikl} = T^{ikl} + T^{kli} + T^{lik} - T^{kil} - T^{ilk} - T^{lki}.$$

$$4.9. B_m = +(1/6)e_{mikl} \tilde{B}^{ikl}, A_{lm} = -(1/2)e_{lmik} \tilde{A}^{ik}, J_{klm} = e_{iklm} \tilde{J}^i.$$

Поскольку  $e_{iklm}$  — псевдотензор, то  $\tilde{B}^{ikl}$ ,  $\tilde{A}^{ik}$  и  $\tilde{J}^i$  также псевдотензоры, если  $B_m$ ,  $A_{lm}$  и  $J_{klm}$  — истинные тензоры.



**4.10.** Вектор  $C_l$ , лежащий в плоскости  $(A_i, B_k)$ , можно представить как линейную суперпозицию векторов  $A_i$  и  $B_k$ :

$$C_l = SA_l + PB_l,$$

где  $S$  и  $P$  — некоторые инварианты. Дуальный тензор согласно (4.30) имеет вид

$$\tilde{C}^{ik} = (1/2)e^{iklm}(A_l B_m - A_m B_l) = e^{iklm} A_l B_m.$$

Ортогональность вектора  $C_l$  и тензора  $\tilde{C}^{ik}$  означает обращение в нуль их скалярного произведения  $C_l \tilde{C}^{lk} = 0$ , что фактически имеет место в силу антисимметрии псевдотензора  $e^{iklm}$  по любой паре значков.

**4.11.** В трехмерном пространстве объем, построенный на трех векторах  $dr, dr', dr''$ , можно записать в виде определителя (см. задачу 1.14)

$$dV = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ dx'_1 & dx'_2 & dx'_3 \\ dx''_1 & dx''_2 & dx''_3 \end{vmatrix}.$$

Он не имеет направления (является псевдоскаляром), но может быть положительным или отрицательным. По аналогии трехмерный объем в 4-пространстве можно выразить в виде определителя, который представляет собой, однако, антисимметричный 4-тензор III ранга:

$$V_{ikl} = \begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l \\ B_i & B_k & B_l \\ C_i & C_k & C_l \end{vmatrix}.$$

Имеется 4 существенно различных компоненты такого тензора (с индексами 123, 120, 103, 023), которые можно трактовать как компоненты дуального псевдовектора

$$\tilde{V}_i = (1/6)e^{iklm} V_{klm} = e^{iklm} A_k B_l C_m.$$

Наличие направления у трехмерного гиперобъема означает возможность различной ориентации любого элемента трехмерной гиперповерхности в четырехмерном пространстве (вспомним, что элемент двумерной поверхности в трехмерном пространстве также может иметь различную ориентацию). В частности, компонента  $\tilde{V}^0$  изображает обычный трехмерный объем, построенный на трехмерных векторах  $A, B, C$  и взятый с тем

или другим знаком (в зависимости от того, правую или левую тройку векторов образуют векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ). В зависимости от знака он может быть направлен вдоль оси  $Ox^0$  (в будущее) или против нее (в прошлое). Аналогичный смысл имеют другие компоненты  $\tilde{V}^i$ .

Любой вектор  $G_l$ , принадлежащий трехмерной гиперповерхности, может быть разложен по 4-векторам, на которых она построена:

$$G_l = SA_l + PB_l + QC_l,$$

где  $S, P, Q$  — инварианты. Векторы  $G_l$  и  $\tilde{V}^i$  взаимно ортогональны, так как  $G_l \tilde{V}^l = 0$ .

**4.12.** На трехмерный тензор  $\Pi$  ранга  $T^{\mu\nu}$ , ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ), два трехмерных вектора  $T^{0\mu}$  и  $T^{\mu 0}$  и трехмерный скаляр  $T^{00}$ .

**4.13.** Любой антисимметричный 4-тензор  $\Pi$  ранга включает в себя трехмерный полярный вектор  $\mathbf{p}$  и трехмерный аксиальный вектор  $\mathbf{a}$ :

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Но обратное утверждение неверно: далеко не любая совокупность трехмерных вектора и псевдовектора образует 4-тензор  $\Pi$  ранга.

**4.16.**

$$\Lambda^i_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \hat{g} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

где матрица трехмерного поворота  $\hat{g}(\alpha_1\theta\alpha_2)$  определена в ответе задачи 1.20.

**4.18.** Искомую матрицу,  $x^i = \Lambda^i_k x'^k$ , можно представить в виде произведения

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\Theta, \Phi) \hat{\Lambda}(V) \hat{\Lambda}^{-1}(\Theta, \Phi),$$

где  $\hat{\Lambda}(\Theta, \Phi)$  — матрица пространственного поворота, переводящего ось  $Ox^3$  в новое положение  $Ox'^3$ , которое определяется сферическими углами  $\Theta, \Phi$  в старой системе;  $\hat{\Lambda}(V)$  — буст вдоль новой оси  $Ox'^3$ . Произведя поворот

по часовой стрелке на угол  $\Phi$  вокруг оси  $Ox^3$  и на угол  $\Theta$  вокруг новой оси  $Ox'^2$ , находим

$$\widehat{\Lambda}(\Theta, \Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta \cos \Phi & -\sin \Phi & \sin \Theta \cos \Phi \\ 0 & \cos \Theta \sin \Phi & \cos \Phi & \sin \Theta \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Матрица буста вдоль оси  $Ox'^3$  получается из (4.2) перестановкой строк и столбцов с номерами 1 и 3:

$$\widehat{\Lambda}(V) = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & 0 & 0 & \text{sh } \psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \psi & 0 & 0 & \text{ch } \psi \end{pmatrix}$$

Матрица  $\widehat{\Lambda}^{-1}(\Theta, \Phi)$  получается транспонированием  $\widehat{\Lambda}(\Theta, \Phi)$ . После перемножения матриц (что требует некоторой аккуратности) получим

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}(V, \Theta, \Phi) &= \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & \text{sh } \psi n_x & \text{sh } \psi n_y & \text{sh } \psi n_z \\ \text{sh } \psi n_x & 1 + (\text{ch } \psi - 1)n_x^2 & (\text{ch } \psi - 1)n_x n_y & (\text{ch } \psi - 1)n_x n_z \\ \text{sh } \psi n_y & (\text{ch } \psi - 1)n_y n_x & 1 + (\text{ch } \psi - 1)n_y^2 & (\text{ch } \psi - 1)n_y n_z \\ \text{sh } \psi n_z & (\text{ch } \psi - 1)n_z n_x & (\text{ch } \psi - 1)n_z n_y & 1 + (\text{ch } \psi - 1)n_z^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $n_x = \sin \Theta \cos \Phi$ ,  $n_y = \sin \Theta \sin \Phi$ ,  $n_z = \cos \Theta$  — проекции орта  $V/V$  на пространственные оси исходной системы координат.

**4.19.** Запишем преобразование (4.7) для дифференциалов 4-координат:

$$(1) \quad dx^0 = \Lambda^0_0 dx'^0 + \Lambda^0_\beta dx'^\beta, \quad dx^\alpha = \Lambda^\alpha_0 dx'^0 + \Lambda^\alpha_\beta dx'^\beta$$

Применим эти преобразования к началу отсчета  $O'$  пространственных координат системы  $S'$ . При этом  $dx'^\beta = 0$ , а  $dx^\alpha/dx^0 = V^\alpha/c$  — скорость системы  $S'$  относительно  $S$ . Из (1) получаем

$$(2) \quad \Lambda^\alpha_0 = \Lambda^0_0(V/c)n^\alpha,$$

где  $n^\alpha$  — проекции орта скорости на пространственные оси. Из равенства (4.16), пользуясь тем, что  $n^1 n^1 + n^2 n^2 + n^3 n^3 = 1$ , находим

$$(3) \quad \Lambda^0_0 = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} = \text{ch } \psi \quad \text{и} \quad \Lambda^\alpha_0 = n^\alpha(V/c) \text{ch } \psi.$$

Далее используем (4.10). Положив  $m = 0$ ,  $l = \alpha = 1, 2, 3$ , и учитывая (3), имеем

$$(4) \quad \Lambda^0_\alpha = \frac{V}{c} (n^1 \Lambda^1_\alpha + n^2 \Lambda^2_\alpha + n^3 \Lambda^3_\alpha).$$

Для нахождения величин  $\Lambda^\mu_\alpha$  примем во внимание, что эта матрица может зависеть только от компонент вектора  $V = Vn$ . Поэтому ее общий вид

$$(5) \quad \Lambda^\mu_\alpha = A\delta^\mu_\alpha + Bn^\mu n_\alpha,$$

где  $A$  и  $B$  могут зависеть только от абсолютной величины  $V$ . Из (4) получаем

$$(6) \quad \Lambda^0_\alpha = \frac{V}{c} (A + B)n_\alpha.$$

Положив в (4.10)  $m = \alpha$ ,  $l = \beta$  и подставив в него (5) и (6), приходим к равенству

$$(7) \quad (V^2/c^2)(A + B)^2 n_\alpha n_\beta - A^2 \delta_{\alpha\beta} - (2AB + B^2)n_\alpha n_\beta = -\delta_{\alpha\beta}.$$

В этом равенстве имеются слагаемые с тензором  $\delta_{\alpha\beta}$ , инвариантные относительно поворотов, и слагаемые с тензором  $n_\alpha n_\beta$ , которые можно обратить в нуль поворотом системы координат. Слагаемые обоих типов должны компенсировать друг друга по отдельности, что позволяет найти  $A = 1$  и  $B = \text{ch } \psi - 1$  (знаки выбраны так, чтобы преобразование Лоренца было собственным). Легко видеть, что элементы матрицы преобразования (3),  $\Lambda^0_\alpha = n_\alpha(V/c) \text{ch } \psi$  и  $\Lambda^\mu_\alpha = \delta^\mu_\alpha + (\text{ch } \psi - 1)n^\mu n_\alpha$ , совпадают с теми, которые получены в предыдущей задаче.

**4.20.** Инвариантность интервала приводит к условию  $g_{il}\delta\Omega^l_k + g_{kl}\delta\Omega^l_i = 0$  или, используя правило опускания индекса,

$$\delta\Omega_{ik} = -\delta\Omega_{ki} \quad (4.135)$$

(антисимметрия). Это свойство сохраняется и при подъеме одного из значков:  $\delta\Omega^i_k = -\delta\Omega_k^i$ . Таким образом, имеется всего 6 независимых параметров преобразования, соответствующих комбинациям значков  $i, k = 0, 1, 0, 2, 0, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 3$ .

Величины  $\delta\Omega^\alpha_0 = \delta\Omega^0_\alpha = V\alpha/c$  — малые углы псевдоповоротов в плоскостях  $(0, \alpha)$ . Величины  $\delta\Omega^\alpha_\beta = \varphi_{\beta \rightarrow \alpha}$  — малые углы обычных поворотов в плоскостях  $(\beta, \alpha)$  от оси  $\beta$  к  $\alpha$ .

**4.21.**  $A_{,i}^i = \partial_i A^i = \text{inv}$  — скаляр, 4-дивергенция;  $\partial_k A^i$  — ковариантный тензор II ранга;  $\partial_i T^i_k$  — ковариантный вектор.

**4.22.** Инвариантность оператора Даламбера становится очевидной из записи его в тензорных обозначениях:

$$\square = -g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (4.136)$$

**4.23.** По аналогии с компонентами 3-ротора  $\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}$  четырехмерный ротор следует определить как антисимметричный 4-тензор

$$\begin{aligned} F_{ik} &= \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \equiv \\ &\equiv A_{k,i} - A_{i,k}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

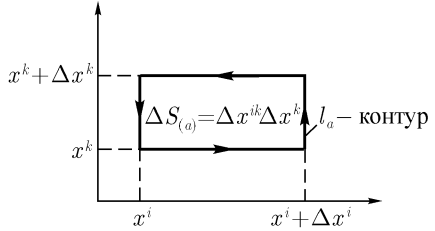


Рис. 4.5

Он имеет 6 существенно различных компонент и не может быть сведен к 4-вектору. Но ему можно, согласно (4.39), сопоставить дуальный антисимметричный тензор II ранга

$$\tilde{F}_{ik} = (1/2)e^{iklm} F_{lm}. \quad (4.138)$$

**4.24.** Выделим малый элемент двумерной гиперповерхности, который можно считать плоским, в форме прямоугольника и введем локальную систему координат, оси которой  $i$  и  $k$  параллельны сторонам прямоугольника (рис. 4.5). Рассмотрим интеграл по замкнутой границе прямоугольника:

$$\begin{aligned} \oint_{(l_a)} A_j dl^j &= \int_0^{\Delta x^k} [A_k(x^i + \Delta x^i, x^k + \eta) - A_k(x^i, x^k + \eta)] d\eta + \\ &+ \int_0^{\Delta x^i} [A_i(x^i + \xi, x^k) - A_i(x^i + \xi, x^k + \Delta x^k)] d\xi \approx \\ &\approx \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \Delta x^i \Delta x^k - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \Delta x^i \Delta x^k = \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \Delta S_{(a)}^{ik}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались малостью прямоугольника и учли только члены низшего порядка.

Левая часть равенства представляет собой инвариант, не зависящий от системы координат; таким же инвариантом должна быть и правая часть, а  $\Delta S^{ik}$  представляет собой, следовательно, контравариантный тензор II ранга, изображающий направленный элемент двумерной гиперповерхности. Далее следует разделить всю рассматриваемую гиперповерхность на прямоугольники, которые одновременно будут элементами касательных плоскостей в соответствующих точках гиперповерхности, и для каждого из них записать полученное выше соотношение. Просуммируем правую и левую части приближенного равенства по всей гиперповерхности, ограниченной контуром  $l$ ,

$$\sum_a \oint_{(l_a)} A_j dl^j \approx \sum_a \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \Delta S_{(a)}^{ik},$$

устремляя к нулю площади прямоугольников. В правой части получаем интегральную сумму, в пределе изображающую интеграл по всей гиперповерхности. В левой части интегралы по внутренним отрезкам, общим для соседних прямоугольников, входят с разными знаками и взаимно сокращаются. Остается лишь интеграл по внешним границам прямоугольников. В результате получается равенство, приведенное в условии задачи.

#### 4.26.

$$\tilde{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.27. \quad I_1 = F_{ik} F^{ik} = -\tilde{F}_{ik} \tilde{F}^{ik} = 2(H^2 - E^2), \quad I_2 = F_{ik} \tilde{F}^{ik} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}.$$

4.28. а) Если в исходной системе  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0$ , т.е. напряженности параллельны, то это свойство сохранится в любой системе, движущейся вдоль общего направления  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  с произвольной скоростью  $V < c$ .

Если в исходной системе  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} \neq 0$ , то из условия параллельности  $\mathbf{E}' \times \mathbf{H}' = 0$  находим систему, обладающую нужными свойствами, которая движется в направлении  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ :

$$\frac{V}{c} = \frac{E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2}}{2(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \frac{V}{c} < 1.$$

В любой другой инерциальной системе, движущейся относительно найденной системы вдоль общего направления  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$ , напряженности также параллельны и имеют значения

$$\begin{aligned} E'^2 &= (1/2)[E^2 - H^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2}], \\ H'^2 &= (1/2)[H^2 - E^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2}]. \end{aligned}$$

б) При  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$  и  $H^2 - E^2 > 0$  можно обратить в нуль электрическое поле, а при  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$  и  $E^2 - H^2 > 0$  — магнитное. Сохраняются в силе формулы п. а), из которых следует

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2}, & \mathbf{H}' &= \frac{\mathbf{H}}{H} \sqrt{H^2 - E^2} & \text{при } H > E, \\ \mathbf{V} &= c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{E^2}, & \mathbf{E}' &= \frac{\mathbf{E}}{E} \sqrt{E^2 - H^2} & \text{при } H < E. \end{aligned}$$

При  $E = H$  искомая система, реализуемая макроскопическими телами, отсутствует, так как  $V = c$ .

в) В силу инвариантности  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$  свойство перпендикулярности  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}' = 0$  должно выполняться во всех инерциальных системах, в том числе и в исходной:  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ . Если же  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \neq 0$ , то и  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}' \neq 0$ .

г) и д)  $E' = H'$  возможно лишь при условии  $E = H$ .

**4.29.** При  $\kappa < J/c$  в системе отсчета, движущейся со скоростью  $V = c^2 \kappa / J$  параллельно оси цилиндра в направлении вектора  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , электрическое поле  $E' = 0$ , а магнитное поле

$$H' = \frac{2J}{c r} \sqrt{1 - \frac{c^2 \kappa^2}{J^2}}.$$

При  $\kappa > J/c$  в системе отсчета, движущейся со скоростью  $V = J/\kappa$  параллельно оси цилиндра в направлении  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , имеем

$$H' = 0, \quad E' = \frac{2\kappa}{r} \sqrt{1 - \frac{J^2}{c^2 \kappa^2}}.$$

При  $\kappa = J/c$  не существует такой системы отсчета, в которой имелось бы только электрическое или только магнитное поле. Как видно из приведенных формул, при  $\kappa \rightarrow J/c$  скорость такой системы отсчета стремилась бы к  $c$ , а величины обоих полей — к нулю.

## 4.30.

$$(1) \quad \partial_i F^{ik} = \frac{4\pi}{c} j^k, \quad \partial_k j^k = 0,$$

$$(2) \quad F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k} = 0.$$

Второе уравнение Максвелла можно записать более компактно через дуальный тензор  $\tilde{F}^{ik} = e^{iklm} \partial_l A_m$ :

$$(3) \quad \partial_i \tilde{F}^{ik} = 0.$$

Из уравнений (1) следует, что совокупность величин  $j^k = (c\rho, \mathbf{j})$  образует четырехмерный вектор плотности тока.

**4.31.** а) В фиксированный момент времени ( $dt = 0$ ) получаем уравнения вида  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ,  $d\mathbf{r} \times \mathbf{H} = 0$ . Из второго уравнения следует, что  $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}$ , т. е.  $d\mathbf{r}$  является элементом магнитной силовой линии. Систему (2) можно записать в виде  $F_{ik} dx^k = 0$ , откуда следует ее релятивистская инвариантность.

б) Условие совместности системы имеет вид  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ . Оно релятивистски инвариантно и показывает, что релятивистски инвариантные магнитные силовые линии можно ввести только для взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей.

в) Условие интегрируемости системы имеет вид

$$\mathbf{H} \times \left( \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{H} = 0,$$

или в ковариантной записи,  $F_{ik} e^{klmn} \partial_l F_{mn} = 0$ , и всегда удовлетворяется в силу уравнений Максвелла.

г) Записав уравнения (2) в виде  $(\mathbf{E} \perp \mathbf{H})$ :

$$d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{r})}{H^2} + c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2} dt,$$

убеждаемся в справедливости сделанного в условии задачи утверждения г).

**4.32.** В трехмерной записи система, приведенная в условии задачи, принимает вид

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{E} - c\mathbf{H} dt = 0, \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$





форма записи 4-потенциала

$$A^k = \frac{eu^k}{u^l R_l}.$$

**4.35.** Из формул предыдущей задачи следует, что вдоль линии движения заряда ( $\vartheta = 0, \pi$ ) поле  $E$  ослаблено по сравнению с кулоновым  $E_C = e/R^2$  в  $1 - V^2/c^2$  раз, а в перпендикулярном направлении ( $\vartheta = \pi/2$ ) поле  $E$  усилено в  $(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$  раз. При  $V \approx c$  поле велико только в узком интервале углов  $\delta\vartheta \approx (1 - V^2/c^2)^{1/2}$  вблизи экваториальной плоскости.

Условие  $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$  относится к одним и тем же точкам 4-пространства. Но если в системе покоя заряда какая-то точка находится на оси  $x$  на расстоянии  $R$  от заряда, то в лабораторной системе то же точка будет находиться от него на расстоянии  $R\sqrt{1 - \beta^2}$ . Сравнивая значения  $E_{\parallel}$  в точке  $R\sqrt{1 - \beta^2}$  и  $E'_{\parallel}$  в точке  $R$ , получим

$$E_{\parallel} = \frac{eR\sqrt{1 - \beta^2}(1 - \beta^2)}{(R\sqrt{1 - \beta^2})^3} = \frac{e}{R^2} = E'_{\parallel},$$

как и должно быть.

$$\mathbf{4.36.} \quad \varphi = \frac{p_0 \cdot \mathbf{r}_*}{\gamma r_*^3}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{V}}{c} \varphi, \quad \mathbf{E} = \frac{3\mathbf{R}(p_0 \cdot \mathbf{r}_*) - p_0 r_*^2}{\gamma^2 r_*^5} \mathbf{4}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{R} = (x - Vt, y, z)$ ,  $\mathbf{r}_* = (x - Vt, y/\gamma, z/\gamma)$ , диполь движется по оси  $x$ , находясь в момент  $t$  в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{V}t$ .

**4.37.** По определению

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho dV, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV.$$

Величину  $\mu^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2c}(x^\alpha j^\beta - x^\beta j^\alpha)$  можно рассматривать как пространственную часть антисимметричного тензора  $\Pi$  ранга, а  $\mu^{0\beta} = \frac{1}{c}j^0 x^\beta$  — как элементы его первой строки (при условии, что  $\mu^{00} = 0$ ). Это следует из того, что  $(c\rho, \mathbf{j}) = j^k$  образуют 4-вектор (см. задачу 4.30). Дополняя первый столбец элементами  $\mu^{i0} = -\mu^{0i}$ , получим антисимметричный 4-тензор «плотности дипольного момента»<sup>16</sup>  $\mu^{ik}$ .

<sup>16</sup>Кавычки здесь использованы в связи с тем, что введенная величина может рассматриваться как плотность лишь в чисто формальном смысле — интеграл от нее по объему дает дипольные моменты системы. Для макроскопических тел такая трактовка значительно более оправдана.

Совокупность  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{m}$  выразится в виде интеграла  $\int \mu^{ik} dV$ :

$$p_\alpha = \int \mu^{0\alpha} dV = - \int \mu^{\alpha 0} dV, \quad m_\gamma = - \int \mu^{\alpha\beta} dV$$

(в последнем случае индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  нужно переставлять циклически). Из этих формул следует, что моменты  $(\mathbf{p}, \mathbf{m})$  преобразуются как произведение антисимметричного 4-тензора II ранга на объем и не образуют сами по себе какого-либо 4-тензора. Используя правило (4.70) преобразования антисимметричного тензора и правило (3.13) преобразования объема, находим

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{p}_0) \mathbf{V}}{\gamma V^2} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{m}_0,$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 - (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{m}_0) \mathbf{V}}{\gamma V^2} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{p}_0.$$

**4.38.** Используя формулы преобразования четырехмерной плотности тока, найдем, что стороны 2 и 4 прямоугольника (рис. 4.7) не заряжены, а стороны 1 и 3 несут заряды  $q_1 = -q_3 = -VJ'a/c^2$ , где  $J'$  — ток в системе  $S'$ , связанной с петлей. Отсюда (или из результата предыдущей задачи) следует, что электрический дипольный момент петли, наблюдаемый в  $S'$ , равен  $p = q_3 b = Vm'/c$ , где  $m' = J'ab/c$  — магнитный момент петли, наблюдаемый в системе  $S'$ .

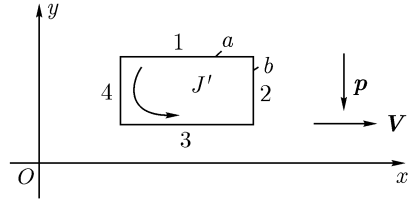


Рис. 4.7

$$4.41. \quad \frac{m\dot{\mathbf{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \mathcal{F};$$

Частные случаи:

$$\frac{m\dot{\mathbf{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \mathcal{F} \quad \text{при} \quad \mathbf{v} \parallel \mathcal{F},$$

$$\frac{m\dot{\mathbf{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \mathcal{F} \quad \text{при} \quad \mathbf{v} \perp \mathcal{F},$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathcal{F} \quad \text{при} \quad v \ll c.$$

Величины  $m(1 - v^2/c^2)^{-3/2}$  и  $m(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  в старой научной литературе назывались продольной и поперечной массами соответственно. Но

при произвольном угле между силой и скоростью в релятивистском случае невозможно выделить какой-либо множитель в качестве коэффициента пропорциональности между силой и ускорением, которому можно было бы приписать смысл массы. Поэтому термины «релятивистская масса» или «масса, зависящая от скорости» не могут быть корректно определены, и пользоваться ими нецелесообразно. Остается единственная масса  $m$  — не зависящая от скорости инвариантная величина.

$$4.42. \quad \mathcal{F} = \frac{1}{\gamma} \mathcal{F}' + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}') \mathbf{v}}{v^2}, \quad \mathcal{F}' = \gamma \mathcal{F} - (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}) \mathbf{v}}{v^2},$$

где  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

$$4.43. \quad \mathcal{F} = \gamma^2 \frac{mv^2}{R}.$$

$$4.45. \quad \psi(r, \alpha) = -\frac{2\kappa(1 - \beta^2)}{\sqrt{(1 - \beta^2) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \ln r,$$

где  $\beta = v/c$ ,  $r$  — расстояние от точки наблюдения до провода.

$$4.46. \quad \mathcal{F} = \frac{2e\kappa}{\gamma r}.$$

Решить задачу можно разными способами:

а) непосредственно вычислить электромагнитную силу, действующую на движущийся точечный заряд со стороны линейного заряда и тока (учесть лоренцево сокращение!);

б) определить силу в той системе отсчета, в которой магнитное поле отсутствует, и воспользоваться формулами преобразования 4-силы;

в) воспользоваться конвекционным потенциалом  $\psi$ , полученным в задаче 4.45.

4.47.

$$\mathcal{F} = e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{2J(r)}{vr}, \quad \text{где } r \text{ — расстояние электрона от оси пучка,}$$

$$J(r) = \frac{2\pi v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int_0^r \rho(r) r dr \quad \text{— ток через круг радиуса } r,$$

$$v = \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{eV}{2mc^2}\right) \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{— скорость электронов.}$$

На поверхности пучка на электрон действует сила  $\mathcal{F} = e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{2J}{va}$ , где  $a$  — радиус пучка.

**4.48.** Ускорение наружного электрона нормально к оси пучка и к скорости электрона, поэтому в лабораторной системе отсчета имеем

$$\dot{v}_n = \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{m} \mathcal{F} = \frac{2eJ(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{mav}$$

(можно использовать результаты задач 4.41 и 4.47). Уширение пучка

$$\Delta a = \frac{\dot{v}_n t^2}{2} = \frac{\dot{v}_n L^2}{2v^2}.$$

Согласно условию  $\Delta a \ll L$ , откуда  $\dot{v}_n L/v \ll v$  или  $\dot{v}_n t \ll v < c$ . Таким образом, применение нерелятивистской формулы для вычисления  $\Delta a$  оправдано.

То же значение  $\Delta a$  можно получить, рассматривая уширение пучка в системе отсчета, движущейся вместе с электронами пучка; в этой системе на электроны действует только электрическая сила.

**4.49.** Интегрируя уравнения движения, записанные в ковариантной форме,

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \frac{eE}{mc^2} \mathcal{E}, \quad \frac{dp_y}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{eE}{m} p_x,$$

получим энергию и импульс в функции собственного времени:

$$p_x = (\mathcal{E}_0/c) \operatorname{sh} \kappa E \tau + p_{0x} \operatorname{ch} \kappa E \tau, \quad p_y = p_{0y}, \quad p_z = 0, \\ \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{ch} \kappa E \tau + c p_{0x} \operatorname{sh} \kappa E \tau, \quad \kappa = e/mc.$$

Повторное интегрирование уравнений  $dx/d\tau = p_x/m$  и т. д. позволяет получить 4-координаты в функции собственного времени. В частности,

$$x^0(\tau) = ct = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{sh} \kappa E \tau + \frac{c p_{0x}}{eE} (\operatorname{ch} \kappa E \tau - 1).$$

Из последнего уравнения находим

$$\tau(t) = \frac{mc}{eE} \ln \frac{p_{0x} + eEt + \sqrt{(p_{0x} + eEt)^2 + m^2 c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \mathcal{E}_0/c}.$$

Заметим, что  $\tau > 0$  и растет с ростом  $t$  независимо от знака заряда, при  $e > 0$  и  $e < 0$ . Подставляя  $\tau$ , выраженное через  $t$ , в формулы для  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  и  $\mathcal{E}(\tau)$ ,

находим

$$x(t) = \frac{c}{eE} \left[ \sqrt{(p_{0x} + eEt)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2} - \frac{\mathcal{E}_0}{c} \right];$$

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE} \tau(t), \quad z(t) = 0, \quad \mathcal{E}(t) = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - c^2p_{0x}^2 + (cp_{0x} + eEct)^2}.$$

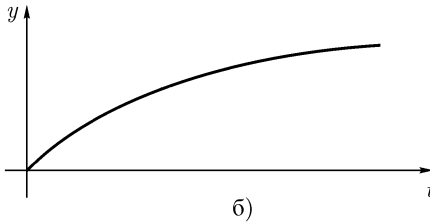
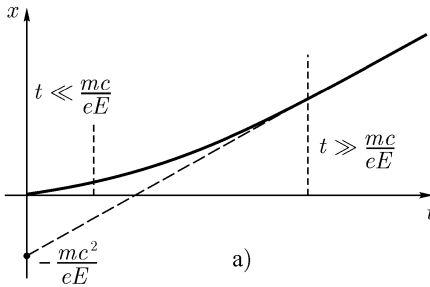


Рис. 4.8

и  $y(t)$  представлен на рис. 4.8 а и 4.8 б соответственно. Движение, которое получается при  $p_{0y} = 0$  (см. рис. 4.8 а) принято называть гиперболическим.

**4.50.** Траектория частицы определяется уравнением

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left( \operatorname{ch} \frac{Ee}{cp_{0y}} y - 1 \right) + \frac{cp_{0x}}{eE} \operatorname{sh} \frac{eE}{cp_{0y}} y.$$

В нерелятивистском пределе  $\mathcal{E}_0 = mc^2$ ,  $p_0 \ll mc$  и  $|eEy| \ll |cp_{0y}|$ . Последнее следует из того, что  $eE\tau$  — приобретенный частицей импульс — должен быть в нерелятивистском случае мал по сравнению с  $mc$ . Таким образом,

$$x = \frac{meEy^2}{2p_{0y}^2} + \frac{p_{0x}}{p_{0y}} y.$$

При  $p_0 \ll mc$  и  $t \ll mc/|e|E$  движение нерелятивистское. Выражения для  $x$ ,  $y$ ,  $z$  переходят при этом в обычные нерелятивистские формулы равноускоренного движения:

$$x(t) = \frac{p_{0x}}{m} t + \frac{eE}{2m} t^2,$$

$$y(t) = \frac{p_{0y}}{m} t.$$

По истечении достаточно большого времени с начала движения ( $t \gg \gg mc/|e|E$ ) скорость частицы становится близкой к  $c$  (даже если она была мала в начале). При этом

$$x(t) = ct - \frac{mc^2}{eE},$$

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE} \ln \frac{2|e|Et}{mc}$$

и движение становится равномерным (со скоростью  $c$ ). Ход  $x(t)$

4.51.  $l = \frac{\mathcal{E} - mc^2}{eE}$ .

4.52. Из четырехмерного уравнения движения

$$\frac{dp^k}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{kl} p_l$$

получаем уравнения для компонент 4-импульса:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\mathcal{E}}{c} \right) = 0, \quad \frac{dp_x}{d\tau} = -\omega_c p_y,$$

$$\frac{dp_y}{d\tau} = \omega_c p_x, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = 0,$$

где циклотронная частота  $\omega_c = eH/mc$  положительна или отрицательна в зависимости от знака заряда. Из уравнений и начальных условий находим:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2} = \text{const},$$

$$p_z = p_{0z} = \text{const},$$

$$p_x = p_{0\perp} \cos(\omega_c \tau + \alpha),$$

$$p_y = p_{0\perp} \sin(\omega_c \tau + \alpha).$$

С помощью уравнений  $dx/d\tau = p_x/m$  и т. д. находим 4-координаты как функции собственного времени:

$$x(\tau) = \frac{p_{0\perp}}{m\omega_c} \sin(\omega_c \tau + \alpha) + x_0 - \frac{p_{0y}}{m\omega_c},$$

$$t = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \tau, \quad z(\tau) = \frac{p_{0z}}{m} \tau + z_0,$$

$$y(\tau) = -\frac{p_{0\perp}}{m\omega_c} \cos(\omega_c \tau + \alpha) + y_0 + \frac{p_{0x}}{m\omega_c}.$$

Импульс частицы, оставаясь постоянным по абсолютной величине, вращается

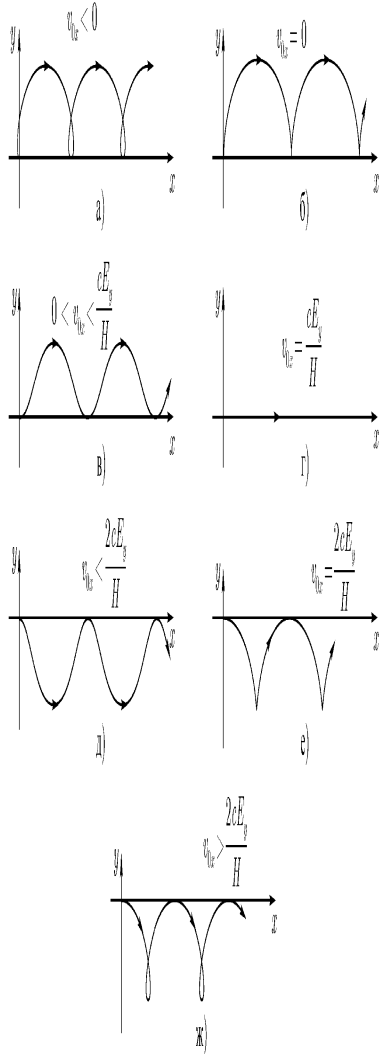


Рис. 4.9

вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью  $\omega_c$  (в функции собственного времени) либо с меньшей угловой скоростью

$$\Omega = \omega_c mc^2 / \mathcal{E}_0 = \omega_c \gamma_0^{-1}$$

в функции координатного времени. Сама частица движется по винтовой линии, навитой на круговой цилиндр радиуса

$$R_{\perp} = cp_{0\perp} / |e|H = cp_{\perp} / |e|H$$

(ларморов радиус, или гирорадиус частицы) с шагом  $h = 2\pi|v_{0z}|/|\Omega|$ . Ось цилиндра совпадает с силовой линией магнитного поля, имеющей в плоскости  $xOy$  координаты  $x_0, y_0$ .

### 4.53.

$$\begin{aligned} v_x &= a\omega_c \cos \omega_c t + \frac{cE_y}{H}, & x &= a \sin \omega_c t + \frac{cE_y}{H}, \\ v_y &= -a\omega_c \sin \omega_c t, & y &= a(\cos \omega_c t - 1), \\ v_z &= \frac{eE_z}{m}t + v_{0z}, & z &= \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}, \end{aligned}$$

где  $\omega_c = eH/mc$ ,  $a\omega_c = v_{0x} - cE_y/H$ .

Вдоль оси  $z$  происходит равноускоренное движение под действием  $z$ -составляющей электрического поля. Движение в плоскости  $xy$  представляет собой обращение заряда в однородном магнитном поле по окружности, радиус которой  $R = v_{0x}/\omega_c = cp_{0x}/eH$ , а центр равномерно движется («дрейфует») в направлении, перпендикулярном плоскости  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ . Скорость дрейфа

$$v_E = \frac{eE_y}{H}.$$

Возможные проекции траектории частицы на плоскость приведены на рис. 4.9. Траектории а), в), д), ж) являются трохоидами общего вида, б), е) — циклоидами. Движение будет нерелятивистским во все моменты времени, если  $v_0 \ll c$ ,  $E_y/H \ll 1$ .

**4.54.**  $p_x = p_{0x} \cos \kappa H \tau - p_{0y} \sin \kappa H \tau$ ,  $p_y = p_{0y} \cos \kappa H \tau - p_{0x} \sin \kappa H \tau$ ,  
 $p_z = (p_{0z} E/H) \operatorname{ch} \kappa E \tau + (\mathcal{E}_0 E/cH) \operatorname{sh} \kappa E \tau$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{ch} \kappa E \tau + p_{0z} c \operatorname{sh} \kappa E \tau$ ,  
 $\kappa = e/mc$ .

**4.55.** Помимо прямого интегрирования уравнения движения в рассматриваемой системе отсчета существует другой эффективный метод



решения задачи: преобразование Лоренца из системы, в которой электромагнитное поле и движение частицы выглядят наиболее просто. Такой системой  $S'$  является система, движущаяся относительно исходной со скоростью  $\mathbf{v}_E = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/H^2$  вдоль оси  $Ox$ , в которой  $\mathbf{E}' = 0$ , а  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}\sqrt{E^2 - H^2}/H$  (см. задачу 4.28). Направив ось  $Oz$  вдоль  $\mathbf{H}$ , а ось  $Oy$  вдоль  $\mathbf{E}$ , запишем решение задачи в системе  $S'$ :

$$\begin{aligned} p'_x &= p'_{0x} \cos \omega'_c \tau - p'_{0y} \sin \omega'_c \tau, & p'_y &= p'_{0x} \sin \omega'_c \tau + p'_{0y} \cos \omega'_c \tau, \\ p'_z &= p'_{0z}, & \mathcal{E}' &= \mathcal{E}'_0, & \omega'_c &= eH'/mc = e\sqrt{H^2 - E^2}/mc. \end{aligned}$$

Поскольку  $\tau$ -инвариант и  $\omega'_c$ -инвариант, следует преобразовать в исходную систему только компоненты импульса и энергию.

В результате получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \gamma_E^2 (\mathcal{E}_0 - v_E p_{0x}) + \gamma_E^2 (p_{0x} - v_E \mathcal{E}_0/c^2) v_E \cos \omega'_c \tau - \gamma_E p_{0y} v_E \sin \omega'_c \tau, \\ p_x &= \gamma_E^2 (\mathcal{E}_0 - v_E p_{0x}) v_E/c^2 + \gamma_E^2 (p_{0x} - v_E \mathcal{E}_0/c^2) \cos \omega'_c \tau - \gamma_E p_{0y} \sin \omega'_c \tau, \\ p_y &= p_{0y} \cos \omega'_c \tau + \gamma_E (p_{0x} - v_E \mathcal{E}_0/c^2) \sin \omega'_c \tau, \\ p_z &= p_{0z}, & \gamma_E &= (1 - v_E^2/c^2)^{-1/2} = H/(H^2 - E^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Зависимость координат от собственного времени вычисляется путем однократного интегрирования из уравнений  $dx/d\tau = p_x/m$  и т. д.

#### 4.56.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{E(\mathcal{E}_0 E - cp_{0x} H)}{E^2 - H^2} \operatorname{ch} \kappa \sqrt{E^2 - H^2} \tau + \\ &\quad + \frac{cp_{0y} E}{\sqrt{E^2 - H^2}} \operatorname{sh} \kappa \sqrt{E^2 - H^2} \tau + \frac{H(cp_{0x} E - \mathcal{E}_0 H)}{E^2 - H^2}, \\ p_x &= \frac{H(\mathcal{E}_0 E - cp_{0x} H)}{c(E^2 - H^2)} \operatorname{ch} \kappa \sqrt{E^2 - H^2} \tau + \\ &\quad + \frac{p_{0y} H}{\sqrt{E^2 - H^2}} \operatorname{sh} \kappa \sqrt{E^2 - H^2} \tau + \frac{E(cp_{0x} E - \mathcal{E}_0 H)}{c(E^2 - H^2)}, \\ p_y &= p_{0y} \operatorname{ch} \kappa \sqrt{E^2 - H^2} \tau + \frac{\mathcal{E}_0 E - cp_{0x} H}{c\sqrt{E^2 - H^2}} \operatorname{sh} \kappa \sqrt{E^2 - H^2} \tau, \\ p_z &= p_{0z}, & \kappa &= e/mc. \end{aligned}$$

При  $E \rightarrow H$ , раскрывая неопределенности, находим

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= (\mathcal{E}_0 - cp_{0x})\omega_c^2\tau^2/2 + cp_{0y}\omega_c\tau + \mathcal{E}_0, \\ p_x &= (\mathcal{E}_0/c - p_{0x})\omega_c^2\tau^2/2 + p_{0y}\omega_c\tau + p_{0x}, \\ p_y &= (\mathcal{E}_0/c - p_{0x})\omega_c\tau + p_{0y}, \\ p_z &= p_{0z}, \quad \omega_c = eH/mc.\end{aligned}$$

Вычисление траектории частицы в параметрической форме (параметр — собственное время) сводится к однократному интегрированию полученных выражений.

**4.57.** Построим тензор электромагнитного поля плоской волны:

$$(1) \quad F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k} = (n_i\varepsilon_k - n_k\varepsilon_i)f'(s).$$

Поскольку  $n^i F_{ik} = 0$ , из уравнения движения (4.53)

$$(2) \quad m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k$$

находим  $md(u_i n^i)/d\tau = 0$ . Отсюда получаем

$$(3) \quad u_i n^i = u_i(0) n^i = \text{const},$$

где введено начальное значение 4-скорости частицы  $u_i(0)$ . Подставляя, далее, в (3)  $u_i = dx_i/d\tau$  и выбирая 4-координаты таким образом, чтобы было  $x_i(\tau) = 0$  при  $\tau = 0$ , получаем

$$(4) \quad s = n_i x^i = n_i u^i(0)\tau;$$

таким образом, переменные  $\tau$  и  $s$  отличаются постоянным множителем, и в уравнении (2) можно перейти к независимой переменной  $s$ :

$$(5) \quad m \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{cn_l u^l(0)} (\varepsilon_i n_k u^k(0) - n_i \varepsilon_k u^k) f'(s).$$

Последнее уравнение упрощается путем умножения его на  $\varepsilon^i$ :  $m \frac{d(u_i \varepsilon^i)}{ds} = -(e/c)f'(s)$ , откуда находим

$$(6) \quad u_i \varepsilon^i = u_i(0) \varepsilon^i - (e/mc)[f(s) - f(0)].$$

Подстановка (6) в правую часть (5) дает простое уравнение с известной правой частью:

$$(7) \quad \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{mc} \left[ \varepsilon_i - \frac{n_i}{n^l u^l(0)} \left( \varepsilon^k u_k(0) - \frac{e}{mc} (f(s) - f(0)) \right) \right] f'(s).$$

После интегрирования находим 4-скорость частицы в функции переменной  $s$ :

$$(8) \quad u_i(s) = u_i(0) + \frac{e}{mc} \left[ \varepsilon_i - n_i \frac{\varepsilon^k u_k(0)}{n^l u^l(0)} \right] [f(s) - f(0)] + \\ + \frac{e^2}{2m^2 c^2} \frac{n_i}{n^l u^l(0)} [f(s) - f(0)]^2,$$

и 4-координаты

$$x_i(s) = x_i(0) + \int_0^s u_i(s') ds'.$$

Последние два равенства дают закон движения частицы в параметрической форме.

Полагая в равенстве (8)  $i = 0$ , находим энергию частицы в поле плоской волны:

$$(9) \quad \mathcal{E}(s) = \mathcal{E}_0 + e \left[ \varepsilon_0 - n_0 \frac{\varepsilon^k u_k(0)}{n^l u^l(0)} \right] [f(s) - f(0)] + \\ + \frac{e^2}{2mc} \frac{n_0}{n^l u^l(0)} [f(s) - f(0)]^2.$$

Формула упрощается, если частица в начальный момент покоилась, т. е.  $\mathcal{E}_0 = mc^2$ ,  $u_l(0) = (c, 0)$ :

$$(10) \quad \mathcal{E}(s) = mc^2 + \frac{e^2}{2mc^2} [f(s) - f(0)]^2.$$

Если на частицу действует волновой пакет конечной протяженности, т. е.  $f(0) = 0$  и  $f(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ , то результирующего набора энергии частиц за все время действия волны не происходит,  $\mathcal{E}(\infty) = mc^2$ . В периодическом поле энергия частицы колеблется около среднего значения

$$(11) \quad \overline{\mathcal{E}} = mc^2 + \frac{e^2}{2mc^2} [\overline{f^2} + f^2(0)].$$

Средний импульс первоначально покоившейся частицы, на которую действует периодическое поле, отличен от нуля в исходной системе отсчета:

$$(12) \quad \bar{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} \boldsymbol{\varepsilon} f(0) + \frac{e^2 \mathbf{n}}{2mc^3} \left[ \overline{f^2} + f^2(0) \right].$$

Задачу можно решить также путем интегрирования уравнения движения в трехмерной форме или методом Гамильтона – Якоби.

#### 4.58.

$$\begin{aligned} u^i(s) &= u^i(0) + \frac{e}{mc} \left[ A^i(s) - A^i(0) + \frac{n^i}{n^l u_l(0)} u_j(0) (A^j(s) - A^j(0)) \right] - \\ &\quad - \frac{e^2}{2m^2 c^2} \frac{n^i}{n^l u_l(0)} [A^j(s) - A^j(0)] [A_j(s) - A_j(0)], \\ x^i(s) &= \int_0^s u^i(s') ds' + x^i(0). \end{aligned}$$

В трехмерной форме

$$\begin{aligned} r_{\parallel}(s) &= r_{\parallel}(0) + \frac{c}{w} \int_0^s p_{\parallel}(s') ds', & \mathbf{r}_{\perp}(s) &= \mathbf{r}_{\perp}(0) + \frac{c}{w} \int_0^s \mathbf{p}_{\perp}(s') ds', \\ p_{\parallel}(s) &= p_{\parallel}(0) + (\mathcal{E}(s) - \mathcal{E}(0)) / c, & \mathbf{p}_{\perp}(s) &= \mathbf{p}_{\perp}(0) + \frac{e}{c} \int_0^s \mathbf{E}(s') ds', \\ \mathcal{E}(s) &= \mathcal{E}(0) + \frac{ec}{w} \int_0^s \mathbf{E}(s') \cdot \mathbf{p}_{\perp}(s') ds', & t &= \frac{1}{cw} \int_0^s \mathcal{E}(s') ds', \\ w &= \mathcal{E}(0) - cp_{\parallel}(0). \end{aligned}$$

Здесь значки  $\parallel$ ,  $\perp$  относятся к направлениям, параллельному и перпендикулярному относительно  $\mathbf{n}$ .

**4.59.**  $x = x_0 \cos \omega t$ ,  $y = y_0 \cos \omega t$ ,  $z = v_0 t + z_0$ , где  $\omega^2 = 2ek/m$ . Из полученных зависимостей  $x(t)$  и  $y(t)$  видно, что с помощью линзы рассматриваемого типа может быть сформирован пучок заряженных частиц, имеющий форму плоской ленты.

4.60.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{mr\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + eE_r + \frac{e}{c}(-H_\alpha\dot{z} + H_z r\dot{\alpha}),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = e \left[ E_\alpha + \frac{1}{c}(H_r\dot{z} - H_z\dot{r}) \right] r,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = e \left[ E_z + \frac{1}{c}(H_\alpha\dot{r} - H_r\dot{\alpha}) \right].$$

**4.61.** При  $H = 0$  траектории электронов прямолинейны. По мере увеличения магнитного поля траектории все больше искривляются в плоскости, перпендикулярной оси. Введем цилиндрические координаты  $(r, \alpha, z)$ , где  $z$  совпадает с осью цилиндра. Электроны перестанут попадать на анод, когда при  $r = b$  их скорость окажется параллельной поверхности анода, т. е. при  $\dot{r}|_{r=b} = 0$ . При этом  $\dot{\alpha}|_{r=b} = v_{\max}/b$ . Воспользуемся одним из уравнений предыдущей задачи, которое в данном случае принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = -\frac{e}{c}H(r)r\frac{dr}{dt}.$$

Проинтегрируем обе части равенства вдоль траектории частицы от  $r = a$  до  $r = b$ :

$$\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Big|_{r=a}^{r=b} = -\frac{e}{2\pi c} \int_a^b 2\pi H r dr = -\frac{e\Phi}{2\pi c}.$$

Отсюда

$$\Phi_c = \frac{2\pi cb}{|e|} p_{\max} = 2\pi cb \sqrt{\frac{2mV}{|e|} \left( 1 + \frac{|e|V}{2mc^2} \right)},$$

если выразить импульс через кинетическую энергию и положить  $T_{\max} = |e|V$ .

При малой разности потенциалов  $|e|V \ll mc^2$  (или  $v \ll c$ , что то же самое) результат упрощается:

$$\Phi_c = 2\pi cb \sqrt{\frac{2mV}{|e|}}.$$

**4.62.** Разность потенциалов должна быть больше, чем

$$V_c = \sqrt{\frac{4\mathcal{J}^2}{c^2} \ln^2 \frac{b}{a} + \frac{m^2 c^4}{e^2}} - \frac{mc^2}{|e|}.$$

При  $|e|V \ll mc^2$  (нерелятивистские электроны), получаем из общей формулы

$$V_c = \frac{2|e|\mathcal{J}^2}{mc^4} \ln^2 \frac{b}{a}.$$

**4.63.**  $b = a \exp \frac{p_0 c^2}{|e|\mathcal{J}}$ , где  $p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$ .

**4.65.** а) В нерелятивистском случае кинетическая энергия  $T$  — квадратичная функция скоростей частиц. По теореме Эйлера об однородных функциях

$$2T = \sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \mathbf{v}_a = \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a,$$

где суммирование производится по всем частицам в системе. Перепишем это равенство в виде

$$2T = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) + \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$$

и произведем усреднение согласно формуле

$$\bar{f} = \lim_{\delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} f(t) dt.$$

Поскольку

$$\overline{\frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right)} = \frac{1}{\delta t} \left[ \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \Big|_{t=\delta t} - \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \Big|_{t=0} \right]_{\delta t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

в силу ограниченности импульсов и координат частиц, то

$$(1) \quad 2\bar{T} = \overline{\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}}.$$

Потенциальная энергия при кулоновском взаимодействии является однородной функцией координат степени  $-1$ , поэтому

$$(2) \quad \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} = -U \quad \text{и} \quad 2\bar{T} = -\bar{U}.$$

При этом сохраняющаяся полная энергия системы заряженных частиц  $E = \bar{T} + \bar{U} = -\bar{T} < 0$ , так как финитное движение возможно только при отрицательной полной энергии.

Соотношение (1) называется **теоремой вириала**. Оно дает связь между  $\bar{T}$  и  $\bar{U}$  во всех случаях, когда потенциальная энергия представляет собой однородную функцию координат.

б)

$$(3) \quad 2\bar{T} + \frac{e}{mc} \bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{H} = -\bar{U},$$

где  $\mathbf{L} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a]$  — полный момент импульса системы.

**4.66.** Траектория лежит в плоскости, перпендикулярной сохраняющемуся при движении моменту импульса  $l$ . При  $ee' < 0$  (притяжение) и  $0 > \mathcal{E} \geq -me^2e'^2/(2l^2)$ , где  $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  — приведенная масса, движение финитно (связанное состояние). Траектория — эллипс, уравнение которого

$$(1) \quad r = \frac{a}{1 + \epsilon \cos \varphi}.$$

Здесь

$$(2) \quad a = \frac{l^2}{m|ee'|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}l^2}{me^2e'^2}} < 1,$$

угол  $\varphi$  отсчитывается от линии, соединяющей частицы в момент их наибольшего сближения. При  $\mathcal{E} \rightarrow 0$  ( $\epsilon \rightarrow 1$ ) траектория переходит в параболу, движение становится инфинитным.

При  $\mathcal{E} > 0$  в обоих случаях,  $ee' < 0$  и  $ee' > 0$ , траектория представляет собой гиперболу

$$(3) \quad r = \frac{a}{\mp 1 + \epsilon \cos \varphi},$$

где  $\epsilon > 1$ . Знак (+) соответствует притяжению, вторая частица находится во внутреннем фокусе гиперболы (рис. 4.10 а). Знак (–) соответствует отталкиванию, вторая частица при этом находится во внешнем фокусе гиперболы (рис. 4.10 б).

**4.67.** Дифференциальное сечение рассеяния можно вычислить по формуле

$$(1) \quad \sigma(\theta) = \frac{s ds}{\sin \theta d\theta},$$

где  $\theta$  — угол рассеяния частицы, соответствующий данному значению  $s$  параметра соударения (прицельного расстояния). В данном случае  $\theta$  — угол между направлениями подлета частицы к рассеивающему центру и отлета от него, определяемый асимптотами гиперболы.

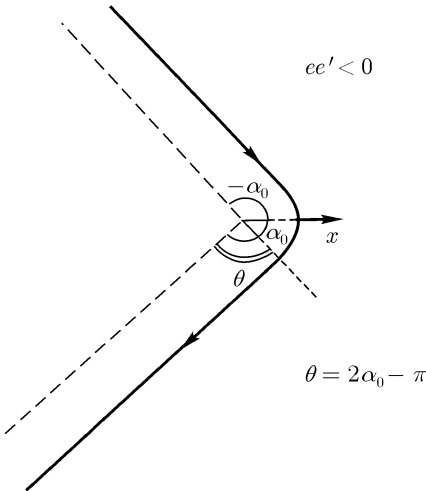


Рис. 4.10 а

Из рис. 4.10 а (притяжение) находим  $\theta = 2\alpha_0 - \pi$ , из рис. 4.10 б (отталкивание)  $\theta = \pi - 2\alpha_0$ . Оба случая объединяются в одну формулу  $\theta/2 = \pm(\pi/2 \mp \alpha_0)$ . Отсюда и из уравнения траектории (3) предыдущей задачи находим

$$\begin{aligned} \cot^2(\theta/2) &= \sin^{-2}(\theta/2) - 1 = \\ &= \cos^{-2} \alpha_0 - 1 = \epsilon^2 - 1 = \\ &= 2\mathcal{E}l^2 / (me^2e'^2). \end{aligned}$$

Момент импульса выражается через прицельное расстояние формулой  $l = mv_0s$ . Таким образом,

$$(2) \quad s^2 = \frac{e^2e'^2}{m^2v_0^4} \cot^2 \frac{\theta}{2}.$$

Дифференцируя и подставляя в (1), получим знаменитую **формулу Резерфорда**, с помощью которой было открыто атомное ядро:

$$(3) \quad \sigma(\theta) = \left( \frac{ee'}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Сечение одинаково в случае притяжения и отталкивания частиц.



4.68. В системе центра масс:

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{4\mathcal{E}_c} \right)^2 \left[ \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} \right] d\Omega_c,$$

где  $\mathcal{E}_c = mv_0^2/2$ ,  $m = m_1/2$  — приведенная масса.

В лабораторной системе:

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{2\mathcal{E}_l} \right) \left[ \frac{1}{\sin^4 \vartheta} + \frac{1}{\cos^4 \vartheta} \right] 4 \cos \vartheta d\Omega_l,$$

где  $\mathcal{E}_l = m_1 v_0^2/2$ ,  $\vartheta$  — угол рассеяния в лабораторной системе,  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ .

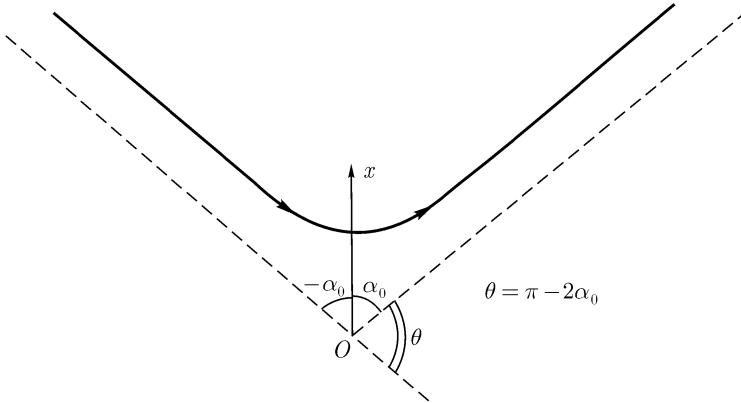


Рис. 4.10 б

4.69. Через площадку  $d\sigma = s ds d\alpha$  плоскости, перпендикулярной направлению движения частиц, проходит за единицу времени  $nv d\sigma$  частиц. Они передают неподвижной частице импульс, равный

$$(1) \quad m\Delta v_z nv d\sigma,$$

где  $\Delta v_z$  — изменение  $z$ -компоненты скорости одной частицы при рассеянии ее на неподвижной частице.

Искомая сила, равная полному импульсу, передаваемому за единицу времени, получится интегрированием (1) по всему сечению пучка частиц.

При этом нужно выразить  $\Delta v_z$  через прицельный параметр  $s$ . Поскольку столкновения упругие, имеем

$$(2) \quad \Delta v_z = -2v \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$\theta$  — угол рассеяния. Его связь с прицельным параметром была найдена при решении задачи 4.67 (формула 2). После использования указанной формулы и предыдущего соотношения (2), а также интегрирования по  $s$  получим из (1) выражение для силы:

$$(3) \quad \mathcal{F} = \frac{4\pi}{m} e^2 e'^2 n \lambda \frac{\mathbf{v}}{v^3},$$

где

$$\lambda = \ln \left[ s_m \frac{mv^2}{ee'} \right].$$

При  $s_m \rightarrow \infty$ , что соответствует неограниченному пучку, величина  $\lambda$  расходится. Это объясняется дальнедействующим характером кулоновых сил. Фактически в нейтральной системе любой заряд экранируется зарядами противоположного знака, поэтому с данной частицей взаимодействуют только те, которые пролетают от нее на расстоянии, не превышающем радиуса экранировки. Поэтому в реальных условиях под  $s_m$  нужно понимать радиус экранировки (радиус Дебая в плазме, радиус нейтрального атома при рассеянии частиц в неионизованном веществе и т. д.).

Величина  $\lambda$  называется кулоновским логарифмом. Пренебрегая слабой зависимостью его от скорости частицы, обычно считают  $\lambda = \text{const}$ .

#### 4.70.

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathbf{v}) = -\frac{4\pi}{\mu} e^2 e'^2 \lambda \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f(\mathbf{v}') d^3v',$$

где  $\mu = mm'/(m + m')$  — приведенная масса.

Полезно иметь в виду следующую электростатическую аналогию: приведенное выражение можно записать в виде электрической силы  $\mathcal{F} = q\mathbf{E}$ , с которой действует на заряд  $q = -4\pi e^2 e'^2 \lambda/\mu$  «электростатическое поле»

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}) = -\text{grad}_{\mathbf{v}} \varphi(\mathbf{v}),$$

где

$$\varphi(\mathbf{v}) = \int \frac{f(\mathbf{v}') d^3v'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}$$

— «электростатический потенциал», удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta \mathbf{v} \varphi(\mathbf{v}) = -4\pi f(\mathbf{v}).$$

**4.71.** Энергия пробной частицы не меняется при столкновениях с неподвижными бесконечно тяжелыми частицами. Изменение среднего импульса описывается уравнением

$$(1) \quad \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \mathcal{F},$$

где  $\mathcal{F}$  — средняя сила. Ее удобно вычислять с помощью электростатической аналогии, указанной в решении предыдущей задачи. Распределение по скоростям частиц среды описывается функцией  $f(\mathbf{v}) = n\delta(\mathbf{v})$ . Поэтому  $\varphi(\mathbf{v}) = n/v$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{v}) = n\mathbf{v}/v^3$ ,

$$(2) \quad \mathcal{F} = -\frac{4\pi}{m} e^2 e'^2 n \lambda \frac{\mathbf{v}}{v^3},$$

$\mathcal{F}$  имеет характер «силы трения», стремящейся уменьшить направленную скорость частицы. Но это трение тем меньше, чем больше скорость частицы ( $\mathcal{F} \propto 1/v^2$ , «падающее трение»).

Интегрируя уравнение (1), найдем

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \exp \left[ -\frac{t}{\tau} \right],$$

где  $\tau = mv^3/4\pi e^2 e'^2 n \lambda$  — характерное время потери частицей направленной скорости.

**4.72.**

$$\mathcal{F} = \begin{cases} 0 & \text{при } v < v_0, \\ 4\pi n e^2 e'^2 \lambda \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \frac{\mathbf{v}}{v^2} & \text{при } v > v_0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} -4\pi n e^2 e'^2 \lambda \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \frac{\mathbf{v}_0}{v_0} & \text{при } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_0 > v_0^2, \\ 4\pi n e^2 e'^2 \lambda \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \frac{\mathbf{v}_0}{v_0} & \text{при } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_0 < v_0^2. \end{cases}$$

**4.73.** На электрон, движущийся со скоростью  $v$  в среде неподвижных однозарядных ионов, действует сила трения

$$(1) \quad \overline{\mathcal{F}} = -\frac{4\pi e^4 n \lambda}{m} \frac{v}{v^3}$$

(см. решение задачи 4.71). Отметим, что зависимость силы от скорости можно получить и из следующих полукачественных соображений. Сила трения есть потеря импульса частицей в единицу времени из-за столкновений. Если среднее время между столкновениями  $\tau$ , а при каждом столкновении теряется импульс порядка полного импульса частицы  $mv$  (это означает, что в результате столкновения электрон отклоняется на большой угол), то

$$(2) \quad \mathcal{F} \approx \frac{mv}{\tau}.$$

При таком столкновении электрон подходит к иону на расстояние, на котором его кинетическая энергия — порядка потенциальной:

$$(3) \quad \frac{mv^2}{2} \approx \frac{e^2}{r}.$$

Это приближенное равенство позволяет оценить сечение столкновения

$$(4) \quad \sigma \approx \pi r^2 \approx \frac{4\pi e^4}{m^2 v^4}$$

и среднее время между столкновениями

$$(5) \quad \tau \approx \frac{1}{n\sigma v} \approx \frac{m^2 v^3}{4\pi n e^4}.$$

Подставляя  $\tau$  в (2), находим, учитывая тормозящий характер силы

$$(6) \quad \mathcal{F} \approx -\frac{4\pi n e^4 v}{m v^3},$$

что отличается от (1) отсутствием кулонова логарифма  $\lambda$ . Но это естественно: при оценке по формулам (2)–(5) мы не учитывали далеких столкновений с малыми передачами импульса, вклад которых и дается кулоновым логарифмом.

Усредним теперь формулу (1) по возможным скоростям электрона. Для этого положим

$$(7) \quad v = u + v_T,$$

где  $v_T$  — тепловая скорость,  $u$  — скорость, приобретаемая под действием электрического поля  $E$ . При  $u \ll v_T$  можем положить в знаменателе выражения (1)  $v^3 \approx v_T^3$ . В числителе же нельзя пренебречь  $u$  по сравнению с  $v_T$ , так как при усреднении по направлениям тепловой скорости получим  $\overline{v_T} = 0$ . В итоге будем иметь абсолютное значение тормозящей силы

$$(8) \quad \overline{\mathcal{F}} = \frac{4\pi n e^4 \lambda}{m v_T^3} u,$$

где  $v_T^2 = 3T/m$ , если применимо распределение Максвелла ( $T$  — температура в единицах энергии). Таким образом, при  $u \ll v_T$  получаем  $\mathcal{F} \propto u$ .

При  $u \gg v_T$  полагаем  $v \approx u$  и получаем

$$(9) \quad \overline{\mathcal{F}} \approx \frac{4\pi n e^4 \lambda}{m u^2},$$

т. е.  $\overline{\mathcal{F}} \propto 1/u^2$ . Максимуму  $\overline{\mathcal{F}}$ , очевидно, будет соответствовать значение  $u \approx v_T$ ; при этом обе формулы (8) и (9) дадут одинаковое значение

$$(10) \quad \overline{\mathcal{F}}_{\max} \approx \frac{4\pi n e^4 \lambda}{m v_T^2}.$$

Примерный ход функции  $\overline{\mathcal{F}}(u)$  представлен на рис. 4.11.

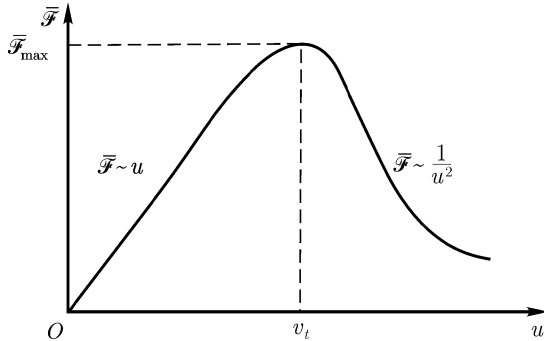


Рис. 4.11

Если в плазме  $E < \overline{\mathcal{F}}_{\max}/e = E_D$ , то сила торможения при некотором значении  $u$ , удовлетворяющем равенству  $\overline{\mathcal{F}}(u) = eE$ , превысит ускоряющую электрическую силу  $eE$ , и электроны не смогут больше ускоряться.

Это — область значений поля  $E$ , при которых имеет место обычный закон Ома. В случае  $E > E_D$  ускоряющая сила превышает торможение, и электроны получают возможность ускоряться неограниченно<sup>17</sup>. Это явление получило название «убегающих электронов».

Подставляя в формулу (10) максвелловское значение  $v_T^2$ , получим

$$(11) \quad E_D = \frac{e\lambda}{3D^2}, \quad D^2 = \frac{T}{4\pi ne^2}.$$

Точный расчет дает близкое значение

$$(12) \quad E_D = 0,214 \frac{e\lambda}{D^2}.$$

**4.74.** Задачу можно решить различными способами, в частности, с помощью уравнений движения в цилиндрических координатах, приведенных в ответе к задаче 4.60. Ниже мы используем метод Гамильтона–Якоби, удобный при нахождении траектории частицы.

Запишем уравнение Гамильтона–Якоби в плоских полярных координатах с полярным углом  $\alpha$ , отсчитываемым вокруг направления сохраняющегося в центрально-симметричном поле  $U(r) = -Ze^2/r$  вектора момента импульса  $l$ :

$$(1) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{Ze^2}{r}\right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Для решения задачи требуется найти действие  $S$ , зависящее от координат  $r$ ,  $\alpha$ , времени  $t$  и двух независимых и неаддитивных постоянных интегрирования. Проведя разделение переменных

$$S(r, \alpha, t) = W(r) + F(\alpha) + f(t),$$

находим из уравнения (1)

$$(2) \quad f(t) = -\mathcal{E}t, \quad F(\alpha) = l\alpha, \\ W(r) = \pm \int \left[ \mathcal{E}^2/c^2 - m^2 c^2 - (l^2 - Z^2 e^4/c^2)r^{-2} + 2Ze^2 \mathcal{E}/c^2 r \right]^{1/2} dr.$$

Здесь  $\mathcal{E}$  и  $l$  — постоянные, введенные при разделении переменных и представляющие собой полную энергию и момент импульса частицы. В данном

<sup>17</sup>Но эта возможность как правило не реализуется из-за коллективных эффектов в плазме.

случае полная энергия  $\mathcal{E}$  включает в себя не только энергию покоя частицы и ее кинетическую энергию, но также и потенциальную энергию ее взаимодействия с кулоновским центром:

$$(3) \quad \mathcal{E} = \sqrt{c^2(p_r^2 + p_\alpha^2/r^2) + m^2c^2} - \frac{Ze^2}{r}.$$

Это следует из уравнения (1), если использовать определения обобщенных импульсов:  $p_r = \partial S/\partial r$ ,  $p_\alpha = \partial S/\partial \alpha = l$ .

Чтобы найти траекторию частицы методом Гамильтона–Якоби, нужно продифференцировать действие  $S$  по  $l$  и приравнять эту производную некоторой постоянной,  $\partial S/\partial l = \alpha_0$ , которая должна быть определена из начальных условий. Это приведет к уравнению траектории вида

$$(4) \quad l \int \frac{dr}{r^2} \left[ \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m^2c^2 - \frac{l^2c^2 - Z^2e^4}{c^2r^2} + \frac{2Ze^2\mathcal{E}}{c^2r} \right]^{-1/2} = \pm(\alpha - \alpha_0).$$

Для вычисления интеграла и классификации траекторий удобно ввести другие постоянные, которые будут обобщать на релятивистский случай величины, использованные в соответствующей нерелятивистской задаче 4.66:

$$(5) \quad a = \frac{Ze^2}{\mathcal{E}} \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2} (1 - \rho^2)}, \quad \text{где } \rho = \frac{Ze^2}{lc}.$$

Здесь параметры  $\varepsilon$  и  $\rho$  безразмерны,  $a$  имеет размерность длины. Далее рассматриваем различные соотношения между параметрами.

Случай 1.  $\rho = Ze^2/lc < 1$ ,  $a > 0$ . Переходя в (4) к интегрированию по переменной  $x = a/r$ , и выбирая  $\alpha = 0$  в одной из точек наибольшего приближения частицы к центру, приводим интеграл к табличному:

$$(6) \quad \int_{1+\varepsilon}^{a/r} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x-1)^2}} = -\arccos \frac{a/r - 1}{\varepsilon} = \pm \sqrt{1 - \rho^2} \alpha.$$

Таким образом, получаем уравнение траектории:

$$(7) \quad r = \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \sqrt{1 - \rho^2} \alpha}.$$

Здесь опять может быть несколько вариантов. При  $\varepsilon < 1$ , что, согласно (5), имеет место при  $mc^2 > \mathcal{E} \geq mc^2 \sqrt{1 - \rho^2}$ , движение финитно.

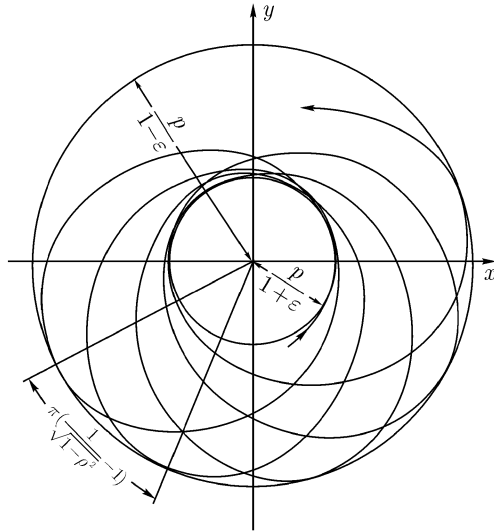


Рис. 4.12

Траектория в общем случае имеет вид незамкнутой розетки, заключенной между окружностями с радиусами  $a/(1 + \varepsilon)$  и  $a/(1 - \varepsilon)$  (рис. 4.12). В нерелятивистском случае аналогом такой траектории является эллипс. Ее можно получить путем вращения (прецессии) эллипса в своей плоскости. Полное колебание радиуса от минимального значения  $r_{\min} = a/(1 + \varepsilon)$  (перигей) до максимального значения  $r_{\max} = a/(1 - \varepsilon)$  (апогей)<sup>18</sup> и обратно до нового минимума происходит при возрастании  $\alpha$  на  $2\pi/\sqrt{1 - \rho^2}$ . Перигей орбиты, таким образом, за один период изменения  $r$  поворачивается на угол  $2\pi[(1 - \rho^2)^{-1/2} - 1]$ . Если  $\sqrt{1 - \rho^2}$  представляет собой рациональное число, то после некоторого числа оборотов траектория замыкается на себя.

При  $\varepsilon > 1$ , что соответствует  $\mathcal{E} > mc^2$ , движение инфинитно. Траектория напоминает гиперболу (она получается из гиперболы путем увеличения полярных углов в  $(1 - \rho^2)^{-1/2}$  раз). Она имеет две ветви, уходящие на бесконечность при  $\alpha = \pm\alpha_0$ , где  $\alpha_0 = (1 - \rho^2)^{-1/2} \arccos(-1/\varepsilon)$ . Частица, приближающаяся к центру по одной из этих ветвей, может совершить вокруг него несколько оборотов, раньше чем уйти на бесконечность по другой

<sup>18</sup>С равным основанием эти точки можно называть перигелий и апогелий или периселений и апоселений.



ветви (рис. 4.13). При  $\varepsilon = 1$  ( $\mathcal{E} = mc^2$ ) движение также инфинитно, а траектория «параболоидна».

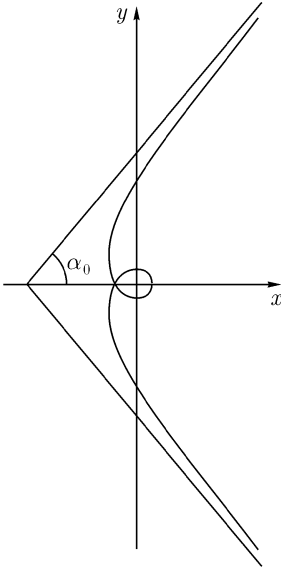


Рис. 4.13

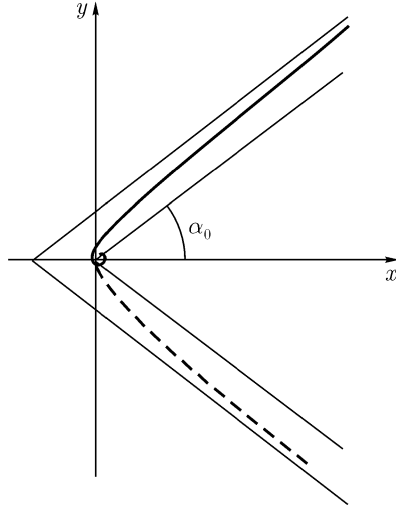


Рис. 4.14

При  $\rho \ll 1$  рассмотренные траектории переходят в обычные эллипс ( $\varepsilon < 1$ ), гиперболу ( $\varepsilon > 1$ ) и параболу ( $\varepsilon = 1$ ) нерелятивистской кеплеровой задачи. Это естественно, так как при  $v/c \ll 1$  выполняется условие  $\rho \ll 1$ .<sup>19</sup>

Случай 2.  $\rho = Ze^2/lc > 1$ ,  $a = -|a| < 0$ . Ввиду изменения знаков в подкоренном выражении интеграла (3) вычисляем его заново и получаем

$$(7) \quad \int \frac{d(|a|/r)}{\sqrt{(1 - |a|/r)^2 - \varepsilon^2}} = \text{Arch} \frac{1 + |a|/r}{\varepsilon} = \pm \sqrt{\rho^2 - 1} \alpha,$$

<sup>19</sup>Можно произвести такую оценку величины  $\rho$  в нерелятивистском случае для связанного состояния:

$$\rho = \frac{Ze^2}{lc} \approx \frac{Ze^2}{rmvc} \approx \frac{|U|}{mvc}.$$

По теореме вириала (задача 4.65)  $\overline{|U|} = 2\overline{T} \approx mv^2$ , так что  $\rho \approx v/c \ll 1$ . При инфинитном движении на большей части траектории  $|U| \ll 2T$ , поэтому  $\rho$  еще меньше.

что соответствует наиболее простому выбору постоянных интегрирования. Отсюда получаем уравнение траектории:

$$(8) \quad r = \frac{|a|}{-1 + \varepsilon \operatorname{ch} \sqrt{\rho^2 - 1} \alpha}.$$

Траектории имеют вид спиралей, закручивающихся вокруг начала координат при  $\alpha \rightarrow \pm\infty$ . Частица падает на силовой центр (в нерелятивистском случае падение на центр возможно только при  $l = 0$ ,  $\rho = \infty$ ). При  $\mathcal{E} > mc^2$  параметр  $\varepsilon < 1$  и траектория имеет две ветви, уходящие на бесконечность при  $\alpha = \pm\alpha_0$ , где  $\alpha_0 = (\rho^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{Ar} \operatorname{ch}(1/\varepsilon)$  (рис. 4.14). При  $\mathcal{E} < mc^2$  параметр  $\varepsilon > 1$  и траектория имеет вид, изображенный на рис. 4.15.

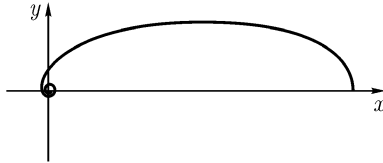


Рис. 4.15

Случай 3.  $\rho = Ze^2/lc = 1$ ,  $a = 0$ . Вычислив интеграл заново, получим уравнение траектории

$$(9) \quad r = \frac{2Ze^2/\mathcal{E}}{\alpha^2 - 1 + m^2c^4/\mathcal{E}^2}.$$

Траектория также представляет собой спираль, закручивающуюся вокруг центра при  $\alpha \rightarrow \pm\infty$ , но медленнее, чем в случае  $\rho > 1$ . Общий характер траектории такой же, как в случае 2.

**4.75.** При  $\mathcal{E} > mc^2$  (инфинитное движение)

$$\Delta t = \frac{1}{c\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}} \left\{ \mathcal{E} \left[ \sqrt{(r+b)^2 - d^2} - \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \frac{Ze^2m^2c^4}{\mathcal{E}^2 - m^2c^4} \ln \frac{r+b + \sqrt{(r+b)^2 - d^2}}{b + \sqrt{b^2 - d^2}} \right\},$$

где

$$b = \frac{Ze^2\mathcal{E}}{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}, \quad d^2 = \frac{l^2c^2}{\mathcal{E}^2 - m^2c^4} + \frac{Z^2e^4m^2c^4}{(\mathcal{E}^2 - m^2c^4)^2}.$$

**4.76.** В обозначениях задачи 4.74 имеем при  $\rho < 1$

$$r = \frac{a}{-1 + \varepsilon \cos \sqrt{1 - \rho^2} \alpha}.$$

Траектория имеет гиперboloидный характер (рис. 4.16). Две ее ветви уходят на бесконечность при  $\alpha = \pm\alpha_0$ , где  $\alpha_0 = (1 - \rho^2)^{-1/2} \arccos(1/\varepsilon)$ . При  $\rho \ll 1$  частица движется по гиперболе. Этот случай отвечает нерелятивистскому движению,  $v \ll c$ . При  $\rho > 1$

$$r = \frac{|a|}{1 - \varepsilon \operatorname{ch} \sqrt{\rho^2 - 1} \alpha},$$

где  $\varepsilon < 1$ . Характер траектории такой же, как в первом случае. Две ее ветви уходят на бесконечность при  $\alpha = \pm(\rho^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{ar} \operatorname{ch}(1/\varepsilon)$ . В случае  $\rho = 1$

$$r = \frac{2Ze^2/\mathcal{E}}{1 - m^2c^4/\mathcal{E}^2 - \alpha^2}.$$

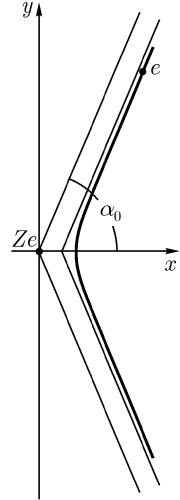


Рис. 4.16

Ветви траектории уходят на бесконечность при  $\alpha = \pm\sqrt{1 - m^2c^4/\mathcal{E}^2}$ .

**4.77.** В случае притяжения

$$\theta = \left( \frac{2lc}{\sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}} - 1 \right) \pi - \frac{2lc}{\sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}} \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}}{Ze^2c},$$

где  $v_0$  — скорость частицы на больших расстояниях от рассеивающего центра.

В случае отталкивания

$$\theta = \pi - \frac{2lc}{\sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}} \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}}{Ze^2c}.$$

**4.78.** Малым углам рассеяния отвечают большие прицельные расстояния  $s$ . Поэтому, положив  $l = p_0s$ , где  $p_0$  — импульс частицы при  $r \rightarrow \infty$ ,

можно найти интересующую нас зависимость угла рассеяния  $\theta$  от  $s$  предельным переходом к большим значениям  $s$  (при этом, очевидно,  $l > Ze^2/c$ ) в общих формулах, приведенных в предыдущей задаче. При выполнении предельного перехода для обоих случаев, притяжения и отталкивания, получится один и тот же результат:

$$\theta = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{v_0 p_0 s}{Ze^2} = \frac{2Ze^2}{v_0 p_0 s} \ll 1,$$

откуда  $s = 2Ze^2/v_0 p_0 \theta$  и

$$\sigma(\theta) = \left| \frac{s ds}{\theta d\theta} \right| = 4 \left( \frac{Ze^2}{v_0 p_0} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}.$$

#### 4.79. Ускоряющее электрическое поле:

$$E_\alpha = \frac{1}{2\pi r c} \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $r$  — радиус орбиты электрона,  $\Phi$  — магнитный поток, пронизывающий орбиту,  $\alpha$  — азимутальный угол.

При передвижении электрона по орбите на расстояние  $r d\alpha$  поле  $E_\alpha$  совершает работу

$$\delta A = E_\alpha r d\alpha.$$

Ускорение электрона происходит на орбите постоянного радиуса  $r = cp/eH_0$ , где  $H_0$  — магнитное поле на орбите, перпендикулярное ее плоскости и нарастающее со временем. Из условия  $dr = 0$  находим  $dp = p dH_0/H_0$ . Энергия электрона  $\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$  увеличивается на  $d\mathcal{E} = c^2 p dp/\mathcal{E} = c^2 p^2 dH_0/\mathcal{E} H_0$  при увеличении поля на  $dH_0$ . Очевидно, что  $\delta A = d\mathcal{E}$ . Используя предыдущие равенства и соотношение  $c^2 p/\mathcal{E} = v = r d\alpha/dt$ , получим после интегрирования

$$\Phi = 2\Phi_0,$$

где  $\Phi_0 = \pi r^2 H_0$ . Последним равенством и выражается искомое правило «2: 1».

**4.80.** Как следует из вида функции Лагранжа (4.46), энергия  $U$  взаимодействия двух заряженных частиц определяется формулой

$$U = -\frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e\varphi,$$

в которую нужно подставить заряд  $e_1$  одной из частиц и запаздывающие потенциалы<sup>20</sup>  $\varphi_2$ ,  $\mathbf{A}_2$  поля другой частицы. Воспользовавшись разложениями запаздывающих потенциалов по степеням времени запаздывания, получим

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{R} + \frac{e_2}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{e_2 \mathbf{v}_2}{cR},$$

где  $R$  — расстояние между частицами. Выбрав калибровочную функцию  $\chi$  в виде

$$\chi = \frac{e_2}{2c} \frac{\partial R}{\partial t},$$

произведем градиентное преобразование потенциалов. Новые потенциалы принимают вид

$$\varphi'_2 = \varphi_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{e_2}{R}, \quad \mathbf{A}'_2 = \mathbf{A}_2 + \nabla \chi = \frac{e_2 [\mathbf{v}_2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{n}]}{2cR},$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ . Отсюда для энергии взаимодействия получаем **формулу Брейта**

$$U = e_1 \varphi'_2 - \frac{e_1}{c} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A}'_2 = \frac{e_1 e_2}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})] \right\}.$$

Эта формула приближенно учитывает то обстоятельство, что сила, действующая на одну из двух взаимодействующих частиц, находящихся на расстоянии  $R$  друг от друга, определяется предшествующим положением и состоянием движения другого заряда. Энергия и импульс передаются зарядами полю и переносятся полем от заряда к заряду в течение промежутка времени  $R/c$ . Частицы и поле образуют единую систему, и вследствие этого невозможно точное описание движения системы взаимодействующих частиц без привлечения степеней свободы поля.

#### 4.81.

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_1^4}{8c^2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_2 v_2^4}{8c^2} - \frac{e_1 e_2}{R} + \frac{e_1 e_2}{2c^2 R} [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})].$$

#### 4.82. В декартовой системе координат с осью $Oz$ вдоль $\mathbf{H}$

$$\begin{aligned} m_{lz}(t) &= m_{lz}(0) = \text{const}, \\ m_{lx}(t) &= m_{l\perp}(0) \cos(\omega t + \alpha), \\ m_{ly}(t) &= m_{l\perp}(0) \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

где  $\omega = \kappa H$ ,  $|\mathbf{m}_l(t)| = |\mathbf{m}_l(0)|$ .

<sup>20</sup>Определение запаздывающих потенциалов см. в главе 5.

**4.83.** Мгновенно сопутствующая система из-за томасовской прецессии является вращающейся. В ней согласно (4.66) при  $\gamma \approx 1$

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле в лабораторной системе. Спиновый механический момент в сопутствующей системе изменяется по закону

$$\left( \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{\text{rot}} = \mathbf{m}_s \times \mathbf{H}'.$$

Переходя в лабораторную систему, имеем

$$\left( \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{\text{lab}} = \left( \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{s} = \mathbf{m}_s \times \mathbf{H}_{\text{eff}},$$

где

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}' - \frac{m}{c\hbar} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}$$

играет роль эффективного магнитного поля, действующего на спиновый магнитный момент. Энергия взаимодействия имеет обычный вид

$$U = -\mathbf{m}_s \cdot \mathbf{H}_{\text{eff}}.$$

Подставляя

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

а также  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ , находим

$$U = \frac{e(g-1)}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}. \quad (4.139)$$

Это выражение используется в квантовой теории атомов и называется энергией спин-орбитального взаимодействия.

$$\mathbf{4.84.} \quad U = -\frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}.$$

Энергия взаимодействия спина нуклона с ядром возникает только за счет томасовской прецессии и должна быть добавлена к основной энергии взаимодействия  $V(r)$ . Спин-орбитальное взаимодействие нуклонов необходимо учитывать при расчете ядерных уровней.

**4.85.** В искомое ковариантное уравнение могут входить 4-векторы  $S^k$  и  $u^k$ , характеризующие частицу, и тензор поля  $F_{ik}$ . В системе покоя  $S^k = (0, \mathbf{s})$ ,  $u^k = (c, 0)$ , откуда следует  $S^k u_k = 0$ . Этот инвариант равен нулю в любой системе, поэтому его дифференцирование по собственному времени дает  $(dS^k/d\tau)u_k + S^k(du^k/d\tau) = 0$ , или, с учетом уравнения движения (4.53),

$$(1) \quad \frac{dS^k}{d\tau} u_k = -\frac{e}{mc} S^k F_{kl} u^l.$$

Искомое уравнение должно быть согласовано с (1) и в системе покоя частицы принимать форму (4.80). Будем искать уравнение в виде

$$(2) \quad \frac{dS^k}{d\tau} = a F^{kl} S_l + b u^k F^{il} u_i S_l,$$

где  $a$  и  $b$  — инвариантные постоянные. Мы воспользовались тем, что вектор  $S_l$  и тензор  $F^{kl}$  могут входить в правую часть лишь линейно. Воспользовавшись уравнением (1), находим связь между постоянными  $a$  и  $b$ :

$$(3) \quad a + bc^2 = \frac{e}{mc}.$$

Перейдем теперь в уравнении (2) в сопутствующую систему координат. При  $k = 1, 2, 3$ ,  $\tau = t$  получим

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{s}}{dt} = a \mathbf{s} \times \mathbf{H}.$$

Но это уравнение должно совпасть с нерелятивистским трехмерным уравнением движения спина (4.80). Из сравнения находим

$$(5) \quad a = g\kappa_0 = \frac{ge}{2mc}.$$

Постоянную  $b$  находим из (3):

$$(6) \quad b = \frac{e}{mc^3} \left(1 - \frac{g}{2}\right).$$

Таким образом, ковариантное квазиклассическое уравнение движения спинного момента имеет вид

$$(7) \quad \frac{dS^k}{dt} = \frac{ge}{2mc} F^{kl} S_l + \frac{e}{mc^3} \left(1 - \frac{g}{2}\right) u^k F^{il} u_i S_l.$$

Впервые уравнение такого типа было получено Я.И. Френкелем<sup>21</sup> еще в 1926 г. Впоследствии оно было переоткрыто еще несколькими авторами (см. подробности и ссылки в статье [Тернов и Бордовицын (1980)]). Это уравнение позволяет описывать эволюцию среднего спина частицы (который называют также вектором поляризации) в плавно меняющихся электромагнитных полях при квазиклассическом движении частицы. Некоторые новые сведения по этому вопросу можно почерпнуть из статьи [Померанский и др. (2000)].

В случае заряженных лептонов (электронов и позитронов, мюонов, таонов) спиновый магнитный момент  $m_s = e\hbar/2mc$  ( $g = 2$ ,  $s = \hbar/2$ ) описывается квантовым релятивистским уравнением Дирака. Для электронов  $m_s = m_B = e\hbar/2m_e c = 9,27 \times 10^{-24}$  Дж/Тл =  $0,927 \times 10^{-20}$  эрг/Гс — магнетон Бора. Та добавка к спиновому магнитному моменту,

$$m_s = \frac{e\hbar}{2mc} + \frac{e\hbar}{4mc}(g - 2),$$

которая связана с отличием  $g$  от 2, называется **аномальным моментом**. Ее происхождение разъясняется в главе 6. Уравнение (7) учитывает как нормальный, так и аномальный магнитные моменты. Полное квантовое описание частиц со спином см. в [Ахиезер и Берестецкий (1981)], [Берестецкий и др. (1989)].

$$4.86. \quad S^0 = \gamma \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}/c, \quad \mathbf{S} = \mathbf{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2},$$

где  $\gamma$  — релятивистский фактор частицы.

**4.87.** Используя уравнение (7) задачи (4.85), запишем его для пространственных и временной компонент  $S^k$  в трехмерных обозначениях:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \frac{a}{c\gamma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E} + \frac{a}{\gamma} \mathbf{S} \times \mathbf{H} + b\gamma \mathbf{v} \left[ c\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} - \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{H} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{S}) \right], \\ \frac{dS^0}{dt} &= \frac{a}{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} + b\gamma [c^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) - c\mathbf{H} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{S})]. \end{aligned}$$

Выразив  $\mathbf{S}$  и  $S^0$  через  $\mathbf{s}$  и воспользовавшись значениями  $a$  и  $b$  из задачи 4.85, получим после простых, но громоздких вычислений, которые следует производить очень внимательно и аккуратно, уравнения, описывающие

<sup>21</sup>Френкель Яков Ильич (1894–1952) — выдающийся советский физик-теоретик, автор многих работ и первого современного полного курса теоретической физики.



эволюцию спина  $\mathbf{s}$ :

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{e}{2mc}(g-2+2/\gamma)\mathbf{s} \times \mathbf{H} + \\ + \frac{e\gamma}{2mc^3(\gamma+1)}(g-2)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})(\mathbf{v} \times \mathbf{s}) + \\ + \frac{e}{2mc^2} \left( g - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \right) \mathbf{s} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{v}],$$

$$(2) \quad \frac{ds_{\parallel}}{dt} = \frac{e}{2mcv}(g-2)\mathbf{s}_{\perp} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{v}) + \frac{e}{2mv}(g/\gamma^2 + 2 - g)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}_{\perp}).$$

Здесь  $s_{\parallel}$ ,  $\mathbf{s}_{\perp}$  — компоненты, параллельная и перпендикулярная  $\mathbf{v}$ . Последнее уравнение при  $v \rightarrow 0$  теряет силу, так как невозможно определить  $s_{\parallel}$  и  $\mathbf{s}_{\perp}$ .

При  $\mathbf{E} = 0$  изменение угла между спином и импульсом частицы может, согласно (2), происходить только при наличии у нее аномального магнитного момента, т. е. при  $g \neq 2$ .

а) При  $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$  и  $\mathbf{E} = 0$  имеем  $\gamma = \text{const}$ . Уравнение движения спина

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_s \times \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\Omega}_s = -\frac{ec\mathbf{H}}{\mathcal{E}} - \frac{e}{2mc}(g-2)\mathbf{H},$$

совпадает по форме с уравнением движения импульса частицы (см. задачу 4.52):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{p}, \quad \boldsymbol{\Omega}_p = \frac{ec\mathbf{H}}{\mathcal{E}},$$

отличаясь от нее только угловой скоростью вращения:

$$\boldsymbol{\Omega}_s = \boldsymbol{\Omega}_p - \frac{e}{2mc}(g-2)\mathbf{H}.$$

Спин прецессирует вокруг направления магнитного поля. Угловая скорость прецессии отличается от скорости вращения импульса при наличии аномального магнитного момента.

б)

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\Omega} = -\frac{ecg\mathbf{H}}{\mathcal{E}}.$$

Импульс не прецессирует, а прецессия спина обусловлена полным магнитным моментом.

в) Если ось  $Ox$  совместить с  $\mathbf{E}$ , а движение частицы происходит в плоскости  $xOy$ , то уравнение (1) даст

$$\dot{s}_z = 0, \quad \dot{s}_x = -\Omega s_y, \quad \dot{s}_y = \Omega s_x, \quad \Omega = -\frac{eE v_y}{2mc^2} \left( g - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right).$$

Это — прецессия вокруг направления, перпендикулярного плоскости движения (т. е. вокруг орбитального момента импульса, сохраняющего свое направление, но не величину) с переменной угловой скоростью  $\Omega$ . Проекция  $\zeta = s_x e_x + s_y e_y$  спина на плоскость  $xOy$  в свою очередь вращается со скоростью  $\dot{\varphi}$ , которую можно найти из уравнения (7) задачи 4.85. Запишем (рис. 4.17)

$$s_{\parallel} = \zeta_{\parallel} = \zeta \cos \varphi, \quad s_{\perp} \cdot \mathbf{E} = \zeta_{\perp} \cdot \mathbf{E} = -\zeta E \sin \varphi \sin \alpha = -\zeta E (v_y/v) \sin \varphi.$$

Подставив это в (2), находим

$$\dot{\varphi} = \frac{eE v_y}{2m v^2} (g/\gamma^2 + 2 - g).$$

**4.88.** В отсутствие магнитного поля ( $\mathbf{H} = 0$ ) в нерелятивистском приближении ( $\gamma = 1$ ) имеем из уравнения (1) предыдущей задачи

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{m}_s \times \mathbf{H}_{eff}, \quad \mathbf{H}_{eff} = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} - \frac{2mc}{eg} \boldsymbol{\omega}_T.$$

Последнее слагаемое и описывает томасовскую прецессию.

**4.89.** Отражение происходит при антипараллельной ориентации магнитного момента и поля, если угол скольжения  $\alpha$  достаточно мал, так что  $\sin \alpha \leq \sqrt{m_n H/T}$ .

**4.90.** Движение нейтрона вдоль провода равномерно. Движение в плоскости, перпендикулярной проводу, происходит в потенциальном поле  $U = \pm 2m_n \mathcal{J}/cr$ . Следовательно, проекции траекторий нейтрона на эту плоскость имеют тот же вид, что и траектории относительного движения двух частиц с зарядами  $e$  и  $e'$ , взаимодействующих по закону Кулона (см. задачу 4.66). При этом в решении данной задачи нужно заменить  $ee'$  на  $\pm 2m_n \mathcal{J}/c$ , а под  $\mathcal{E} = Mr^2/2 + l^2/2Mr^2 + U(r)$  — понимать энергию поперечного движения ( $l = Mr^2 \dot{\alpha}$  — момент импульса). В частности, при  $\mathcal{E} < 0$  нейтроны совершают финитное движение около провода.

$$4.91. \quad l(\alpha) = \frac{m_n \mathcal{J}}{cMv_0^2 \sin^2 \alpha/2}.$$

4.94. Частица дрейфует под действием эффективного электрического поля  $\mathbf{E}_{eff} = \mathcal{F}/e$  со скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{eH^2} \mathcal{F} \times \mathbf{H}.$$

4.95. В приближении нулевого ларморова радиуса частица движется вдоль изогнутой силовой линии со скоростью  $v_{\parallel}$ , испытывая при этом действие центробежной силы

$$(1) \quad \mathcal{F}_c = -\frac{\mathcal{E}v_{\parallel}^2}{c^2\rho} \mathbf{n},$$

где  $\mathcal{E}$  — полная энергия частицы,  $\rho$  — локальный радиус кривизны силовой линии,  $\mathbf{n}$  — орт главной нормали. Из дифференциальной геометрии используем соотношение  $\mathbf{n}/\rho = (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h}$ , где  $\mathbf{h}$  — орт касательной, и с помощью формулы для дрейфовой скорости, полученной в предыдущей задаче, находим скорость центробежного дрейфа

$$(2) \quad \mathbf{v}_{de} = v_{\parallel} R_{\parallel} \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h},$$

где  $R_{\parallel} = cp_{\parallel}/eH$ . По порядку величины  $v_{de} \approx v_{\parallel} R/\rho \ll v_{\parallel}$ .

Учет неоднородности электрического поля приводит к члену второго порядка малости  $ER/HL \ll 1$ . Такой же порядок имеют члены с  $\dot{\mathbf{H}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$ .

4.96. Изменение во времени магнитного поля порождает электрическое поле согласно уравнению Максвелла  $c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{H}}$ . Вычислим изменение энергии частицы за один ларморов оборот:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \oint e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e \int \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= e \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} \pi R_{\perp}^2 = -\frac{e}{c} \pi R_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n} = +\frac{e}{c} \pi R_{\perp}^2 \dot{H}. \end{aligned}$$

Изменение знака в последнем равенстве произошло из-за того, что нормаль  $\mathbf{n}$  к ларморовскому кружку, согласованная с направлением обхода по правилу правого винта, направлена противоположно магнитному полю. Поделим

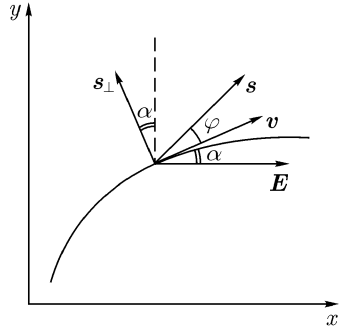


Рис. 4.17

далее обе части последнего равенства на ларморов период  $T_L$ . Имеем в левой части  $\Delta\mathcal{E}/T_L = v_\perp \Delta p_\perp / T_L = v_\perp \dot{p}_\perp$ . Аналогичным образом в правой части получаем  $(e/2c)(2\pi R_\perp / T_L) R_\perp \dot{H} = 2^{-1} v_\perp p_\perp \dot{H} / H$ . В итоге имеем постоянство адиабатического инварианта:

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\perp^2}{H} = 0.$$

**4.97.** Полная скорость частицы складывается из скорости ведущего центра  $v_c$  (4.90) и скорости  $\dot{r}_\perp$  ларморова вращения относительно ведущего центра. Мгновенная скорость изменения энергии частицы  $\dot{\mathcal{E}}$  выражается обычной формулой

$$\dot{\mathcal{E}} = e\mathbf{E} \cdot (\mathbf{v}_c + \dot{\mathbf{r}}_\perp).$$

Это выражение нужно усреднить по ларморовскому периоду:  $\dot{\mathcal{E}} = T_L^{-1} \oint \dot{\mathcal{E}} dt$ . Первое слагаемое,  $e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_c$ , содержит только плавно меняющиеся величины и при усреднении не изменится. Второе слагаемое преобразуется следующим образом:

$$T_L^{-1} \oint e\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\perp dt = eT_L^{-1} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_\perp = -(e/2)v_\perp R_\perp \mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{E}.$$

**4.98.** Адиабатическим инвариантом для релятивистской частицы является величина  $\gamma\mu$ , где  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — лоренц-фактор,  $\mu = p_\perp v_\perp / 2H$  — магнитный момент. Если кинетическая энергия частицы сохраняется, то  $\gamma = \text{const}$  и  $\mu = \text{const}$ . Последнее соотношение выполняется для нерелятивистской частицы, у которой  $\gamma \approx 1$ , и в том случае, когда ее энергия не сохраняется.

$$\mathcal{F} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla H,$$

где  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{h} p_\perp v_\perp / 2H$  — магнитный момент, создаваемый вращением частицы.

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} = -\nabla U_{eff}(\mathbf{R}), \quad U_{eff}(\mathbf{R}) = -\frac{\beta}{2} E^2(\mathbf{R}),$$

где  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$  — радиус-вектор и скорость центра масс,  $M$  — полная масса системы.

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} = -U_{eff}(\mathbf{R}) + \frac{\beta}{c} [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}) \times \mathbf{H}(\mathbf{R})].$$

**4.102.** Выбрав векторный потенциал магнитного поля в виде  $\mathbf{A} = \mathbf{H} \times \mathbf{r}/2$ , запишем функцию Лагранжа нерелятивистской системы в виде

$$(1) \quad L = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} + \frac{e}{2c} \sum_a \mathbf{v}_a \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{r}_a] - U.$$

В отсутствие магнитного поля, но в системе отсчета (штрихованной), вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , имеем  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \Omega \times \mathbf{r}'_a$ , и функция Лагранжа приобретет вид

$$(2) \quad L_\Omega = \sum_a \frac{mv_a'^2}{2} + \sum_a m\mathbf{v}'_a \cdot [\Omega \times \mathbf{r}'_a] - U + \sum_a \frac{m}{2} [\Omega \times \mathbf{r}'_a]^2.$$

При выполнении условия  $|\Omega \times \mathbf{r}'_a| \ll |\mathbf{v}'_a|$  в (2) можно пренебречь последним членом. Потенциальная энергия системы вообще не изменяется при переходе во вращающуюся систему. Поэтому функции  $L$  и  $L_\Omega$  становятся одинаковыми при  $\Omega = e\mathbf{H}/2mc$  и достаточно слабом поле. Но это означает, что и поведение частиц одинаково: система частиц, наблюдаемая в лабораторной системе отсчета, при наложении магнитного поля приобретает угловую скорость  $\Omega_L = -\Omega$ . Знак минус появляется потому, что направления вращения частиц относительно координатных осей и осей относительно частиц противоположны. Условие малости поля означает, что частота ларморовской прецессии мала по сравнению с собственными частотами квазипериодического движения частиц в системе.

$$4.103. \quad \sin \vartheta > \sqrt{H/H_m}.$$

$$4.104. \quad R = 1 - H/H_m.$$

$$4.105. \quad r = r_0 \sqrt{H_0/H},$$

где  $r_0$  — расстояние ведущего центра до оси ловушки в поле  $H_0$ ,  $r$  — расстояние после изменения поля до величины  $H$ . Возрастание поля вызывает сжатие плазмы к оси ловушки.

$$4.106. \quad \text{Ведущий центр перейдет на силовую линию } r = l, \varphi = 2cq/Hv_{\parallel}l^2.$$

**4.107.** Ведущий центр протона движется равномерно по окружности радиуса  $r = r_*$ , лежащей в плоскости экватора, с угловой скоростью

$$\omega_d = \frac{3c\mathcal{E}}{e\mu} r - \frac{3GmM}{e\mu},$$

где  $G$  — гравитационная постоянная;  $R \approx 226$  км,  $T \approx 14,9$  с.

**4.108.** а) Из уравнения (4.90), вычисляя произведения  $\mathbf{h} \times \nabla H$  и  $\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h}$  для поля магнитного диполя, находим, что движение поперек магнитных силовых линий сводится к азимутальному дрейфу, при котором расстояние до центра Земли и широтный угол не меняются. Кроме того, ведущий центр движется вдоль силовой линии, уравнение которой имеет вид

$$(1) \quad r = r_0 \cos^2 \lambda,$$

где  $r_0$  — расстояние в экваториальной плоскости от силовой линии до центра. При этом энергия частицы остается постоянной вследствие пренебрежения гравитационным полем.

Используя известные выражения для напряженности поля магнитного диполя, а также уравнения (4.89), (1) и (4.90), находим угловую скорость азимутального дрейфа:

$$(2) \quad \omega_d = \frac{v_d \alpha}{r} = -\frac{3cpvr_0 \sin^2 \alpha}{2e\mu} \frac{1 + \sin^2 \lambda}{\cos^3 \lambda (3 \sin^2 \lambda + 1)} - \frac{cpvr_0 \cos^3 \lambda (3 \sin^2 \lambda - 1)}{e\mu (3 \sin^2 \lambda + 1)^2}.$$

Здесь  $p$  и  $v$  — импульс и скорость протона.

б) С помощью уравнения (4.89) находим условие, определяющее  $\lambda_m > 0$ :

$$(3) \quad \frac{\cos^6 \lambda_m}{\sqrt{3 \sin^2 \lambda_m + 1}} = \sin^2 \alpha.$$

Частицы движутся в области  $-\lambda_m \leq \lambda \leq \lambda_m$ .

в) Протон достигает поверхности Земли при условии

$$r_0 \cos^2 \lambda_m \leq r_*,$$

где  $r_*$  — радиус земного шара.

**4.109.** В аксиально симметричной ловушке при  $L = \text{const}$  продольное движение частицы строго периодически. Поэтому при медленном изменении  $L$  будет сохраняться продольный адиабатический инвариант

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \oint P_{\parallel} dl = \text{const},$$

где

$$P_{\parallel} = \gamma m v_{\parallel} + (e/c) A_{\parallel}$$

— продольная компонента обобщенного импульса, интегрирование проводится вдоль силовой линии.

Продольная часть векторного потенциала  $A_{\parallel}$  не влияет на величину магнитного поля  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , и ее можно положить равной нулю,  $A_{\parallel} = 0$ . Поэтому

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\parallel} dl,$$

где  $p_{\parallel} = \gamma m v_{\parallel}$  — продольная компонента обычного импульса.

Если в большей части ловушки поле однородно, а размеры областей, где поле нарастает, малы, то за один период колебаний  $p_{\parallel} \approx \text{const}$  и  $I_{\parallel} \approx p_{\parallel} L/\pi$ . Условие адиабатической инвариантности принимает вид

$$p_{\parallel}(t)L(t) = \text{const.}$$

Условие медленности изменения поля:  $|\dot{L}| \ll |v_{\parallel}|$ . Изменение энергии со временем:

$$\mathcal{E}^2(t) = \mathcal{E}_0^2 + c^2 p_{0\parallel}^2 (L_0 - L(t)) / L(t),$$

где индексом 0 обозначены начальные значения.

$$4.110. \mathcal{E}_2 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_1^2 H_2 / H_1}.$$

Для получения этого результата следует доказать постоянство магнитного потока через площадь, охватываемую траекторией частицы за ларморов период. См. литературу [Топтыгин (1983), приложения III, IV]

4.111. См. оригинальную работу [Ходжаев и др. (1982)], а также [Топтыгин (1983), приложение IV]

$$4.112. \frac{m\ddot{X}}{(1 - \dot{X}^2/c^2)^{3/2}} = -\frac{dU_{eff}}{dX}, \quad U_{eff}(X, \dot{X}) = \frac{e^2(1 - \dot{X}^2/c^2)^{3/2}}{4m\omega^2} E^2(X).$$

$$4.113. \text{ а) } U_{eff}(X) = U_0(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} U_1 \sin^2 \varphi,$$

где  $\varphi = 2\pi X/L$ ,  $U_1 = e^2 E_0^2 / 2m\omega^2$ ,  $|e|E_0/m\omega^2 \ll L$ .

б), в) При  $U_1 < U_0$  центры расположены в точках  $X_n = nL$ , седла — в точках  $\tilde{X}_n = (n + 1/2)L$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Частота собственных колебаний вблизи всех центров одинакова,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{U_0 + U_1}{m}}.$$

Фазовый портрет см. на рис. 4.18 а.

При  $U_1 > U_0$  центры расположены в точках  $X_{1n} = nL$  (частота собственных колебаний  $\omega_{01} = (2\pi/L)[(U_0 + U_1)/m]^{1/2}$ ) и  $X_{2n} = (n + 1/2)L$  (частота собственных колебаний  $\omega_{02} = (2\pi/L)[(U_1 - U_0)/m]^{1/2}$ ),  $n = 0, \pm 1, \dots$  Седла находятся в точках  $\tilde{X}_n$ , определяемых условием  $\cos \tilde{\varphi}_n = -U_0/U_1$ . Существенно, что в этом случае появляются дополнительные точки устойчивого равновесия  $X = X_{2n}$ , которые при  $U_1 < U_0$  были неустойчивыми, и фазовый портрет претерпевает заметные изменения (рис. 18 б).

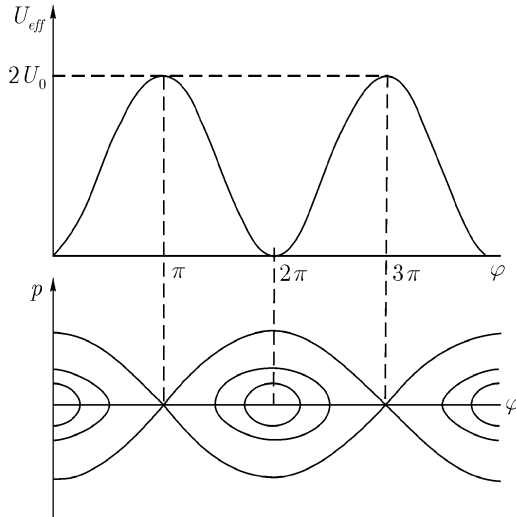


Рис. 4.18 а

**4.114.** При  $U_0 > U_1$  центры расположены в точках  $X_n = nL$ , седла — в точках  $\tilde{X}_n = (n + 1/2)L$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . При  $U_0 < U_1$  точки  $X_n$  становятся седлами, сохраняются седла в точках  $\tilde{X}_n$ , но возникают центры в точках, определяемых условием  $\cos \tilde{\varphi}_n = U_0/U_1 < 1$ .

**4.115.** В гауссовой системе единиц размерности  $E$  и  $H$ , а также  $e_0$  и  $g$  совпадают:

$$g_{\min} = \frac{e_0}{2} \left( \frac{\hbar c}{e_0^2} \right) \approx \frac{137}{2} e_0 \gg e_0,$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = gH \text{ дин/см} = (300 \times 137/2)H \text{ эВ/см.}$$

При  $H = 10^3$  Э имеем  $d\mathcal{E}/dl = 20,55$  МэВ/см.



**4.116.** Вычисляя  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , находим в области, в где  $r \neq 0$ ,  $\vartheta \neq \pi$  магнитное поле  $H_r = g/r^2$ ,  $H_\vartheta = H_\alpha = 0$  или  $\mathbf{H} = g\mathbf{r}/r^3$  — «кулоновское» поле точечного магнитного заряда. При  $r \rightarrow 0$  это поле имеет такую же особенность, как и поле точечного электрического заряда. Но потенциал Дирака имеет особенность также при  $\vartheta \rightarrow \pi$  ( $r \rightarrow z$ ), т. е. на всей отрицательной полуоси  $0 > z > -\infty$ . На этой особенности дифференциальное выражение  $\text{rot } \mathbf{A}$  не определено.

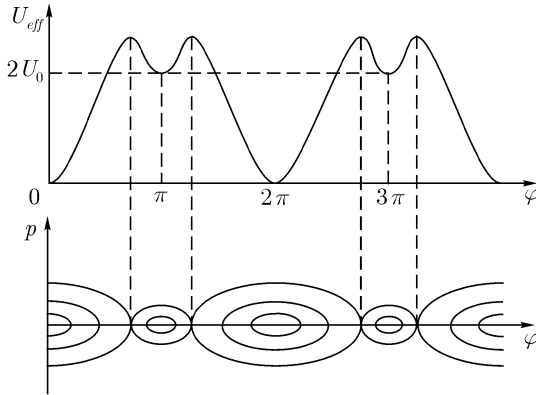


Рис. 4.18 б

Чтобы найти поле на этой сингулярной дираковской «нити», подсчитаем его поток через круг малого радиуса  $s \rightarrow 0$ , плоскость которого перпендикулярна оси  $Oz$ , а центр лежит на оси:

$$\int_{\pi s^2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} 4\pi g, & z < 0 \ (\vartheta \rightarrow \pi); \\ 0, & z > 0 \ (\vartheta \rightarrow 0). \end{cases}$$

Конечное значение магнитного потока через бесконечно малую площадку свидетельствует о сингулярности магнитного поля на отрицательной полуоси  $Oz$ :

$$H_z = \begin{cases} 4\pi g \delta(x) \delta(y), & z < 0; \\ 0 & z > 0. \end{cases}$$

Полный магнитный поток через замкнутую поверхность, окружающую начало координат, равен нулю, так как поток нити направлен противоположно потоку точечного заряда.

Таким образом, кроме точечного магнитного заряда потенциал Дирака описывает сингулярную «нить». Чтобы сделать ее ненаблюдаемой, Дирак накладывает на волновые функции частиц требование  $\psi = 0$  на сингулярной нити. Этот запрет выглядит искусственным и, по-видимому, не обеспечивает ненаблюдаемости нитей. Обсуждение проблемы магнитного монополя в рамках традиционной электродинамики и квантовой механики, а также оригинальные статьи Дирака читатель может найти в сборнике [Монополь Дирака (1970)]. Дальнейшие исследования, основанные на свойствах калибровочных полей Янга – Миллса, см. в [Соколов и др. (1986)], [Рубаков (1999)], [Гальцов и др. (1991)].

Однако, существует простая макроскопическая модель дираковского монополя с сингулярной нитью. Торец длинного тонкого соленоида создает магнитное поле, близкое полю монополя, на расстояниях, больших по сравнению с диаметром соленоида, но малых по сравнению с его длиной.

#### 4.117. Уравнение движения:

$$(1) \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{eg}{cr^3} [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}].$$

Интегралы движения:

$$(2) \quad c^2 p^2 + m^2 c^4 = \mathcal{E}^2 = \text{const}, \quad [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] - \frac{eg}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{J} = \text{const}.$$

Закон движения нерелятивистской частицы в сферических координатах  $(r, \vartheta, \varphi)$  с полярной осью, направленной вдоль  $\mathbf{J}$ :

$$(3) \quad \begin{aligned} r^2 &= r_0^2 + v^2(t - t_0)^2, \\ \varphi &= \frac{1}{\sin \vartheta} \arctg \frac{v(t - t_0)}{r_0}, \quad \text{tg } \vartheta = -\frac{mvcr_0}{eg} = \text{const}. \end{aligned}$$

#### 4.118.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\rho}{2} (q_{,t}^\alpha)^2 - \frac{\mu}{4} (q_{,\beta}^\alpha + q_{,\alpha}^\beta - \frac{2}{3} \delta_{\beta\gamma}^\alpha q_{,\gamma}^\alpha)^2 - \frac{K}{2} (q_{,\alpha}^\alpha)^2; \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2\rho} (\pi^\alpha)^2 + \frac{\mu}{4} (q_{,\beta}^\alpha + q_{,\alpha}^\beta - \frac{2}{3} \delta_{\beta\gamma}^\alpha q_{,\gamma}^\alpha)^2 + \frac{K}{2} (q_{,\alpha}^\alpha)^2, \end{aligned}$$

где  $\pi^\alpha = \rho q_{,t}^\alpha$ . Указанному в условии задачи уравнению движения соответствуют различные лагранжианы, отличающиеся преобразованием (4.94). Приведенные в ответе выражения выбраны так, что гамильтониан имеет смысл плотности энергии деформированного упругого тела.

$$4.119. S = S_g + S_m + S_{int},$$

где

$$S_g = -\frac{1}{8\pi cG} \int_{\Omega} (\nabla\varphi)^2 d^4x$$

— действие для гравитационного поля,  $G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}$  — гравитационная постоянная,

$$S_m = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{2} (\dot{r}_b)^2 dt$$

— действие для свободных частиц,

$$S_{int} = -\sum_{b=1}^N \int_{t_1}^{t_2} m_b \varphi(\mathbf{r}_b, t) dt = \int_{\Omega} \rho \varphi d^4x$$

— член взаимодействия,  $\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_b m_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t))$  — плотность массы точечных частиц, записанная через дельта-функцию.

Уравнение для потенциала получается варьированием величины  $S_g + S_{int}$  по  $\varphi$  при фиксированных координатах частиц  $\mathbf{r}_a$  и дает

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho(\mathbf{r}, t);$$

уравнения движения частиц выводятся путем варьирования радиусов-векторов  $\mathbf{r}_b$  в  $S_{int} + S_m$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}_a = -\nabla\varphi(\mathbf{r}_a, t).$$

В случае точечных частиц последнее уравнение некорректно, так как потенциал в правой части содержит бесконечный член самодействия (вида  $-Gm_a/|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_a|$ ). Правильное уравнение движения  $a$ -й частицы под действием всех остальных получится, если из полного потенциала  $\varphi$  исключить потенциал, создаваемый  $a$ -й частицей:

$$\ddot{\mathbf{r}}_a = -\nabla\varphi'(\mathbf{r}_a, t),$$

где

$$\varphi'(\mathbf{r}_a, t) = -\sum_{b=1}^N \prime \frac{Gm_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|};$$

штрих у суммы означает отсутствие члена с  $b = a$ . Отметим, что в уравнение движения не вошла масса частицы. Это означает, что все тела любой массы и природы движутся в заданном гравитационном поле совершенно одинаково.

**4.120.**  $S = S_f + S_{part} + S_{int}$ , где

$$S_f = \frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} (\nabla\varphi)^2 d^4x$$

— действие для электрического поля,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — электростатический потенциал;

$$S_{part} = \sum_{b=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \frac{m_b}{2} (\dot{\mathbf{r}}_b)^2 dt$$

— действие для свободных частиц;

$$S_{int} = - \sum_{b=1}^N \int_{t_1}^{t_2} e_b \varphi(\mathbf{r}_b, t) dt = - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho \varphi d^4x$$

— взаимодействие заряженных частиц и поля;  $e_b$  — заряд частицы,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{a=1}^N e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$$

— объемная плотность электрического заряда.

Уравнения для поля и частиц:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -e_a \nabla\varphi'.$$

В последнем уравнении из правой части следует исключить расходящийся вклад в потенциал  $a$ -й частицы, описывающий эффект самодействия.

**4.121.**

$$S = \int_{\Omega} \left[ -\frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi c} + \frac{1}{c^2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \right] d^4x,$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — векторный потенциал, определяющий напряженность магнитного поля.

**4.122.**

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi$$

— уравнение Шредингера для волновой функции нерелятивистской частицы в потенциальном поле  $U(\mathbf{r}, t)$ .

## 4.123.

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}} \psi_{,t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}^*} \psi_{,t}^* - \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + U |\psi|^2.$$

Полная энергия поля:

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \int \psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right) \psi d^3x;$$

последнее выражение получено путем интегрирования по частям в предположении  $\psi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Оно совпадает с квантовомеханическим средним значением энергии частицы. Если потенциальная энергия  $U(\mathbf{r})$  не зависит от времени и частица находится в состоянии с определенной энергией, т.е.  $\hat{H}\psi = E\psi$ , где  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U$  — квантовомеханический оператор Гамильтона, то  $H = E$ . Это означает, что энергия, вычисленная по формулам теории поля как интеграл по всему трехмерному пространству, совпадает с энергией квантовой частицы.

## 4.124.

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \psi_{,t} - \psi \psi_{,t}^*) - \frac{\hbar^2}{2m} \left| \nabla \psi + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \psi \right|^2 - e\varphi |\psi|^2.$$

Уравнение (4.101) получается из приведенного лагранжиана по алгоритму (4.95):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}^*} - \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}^*} = 0.$$

## 4.125.

$$(1) \quad \square \varphi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi = 0$$

(уравнение Клейна–Гордона–Фока). Записав решение в виде плоской волны с инвариантной фазой,  $\varphi = A \exp(ik^l x_l)$ , где  $A = \text{const}$ ,  $k^l = (\omega/c, \mathbf{k})$ , получим из уравнения Клейна–Гордона–Фока дисперсионное соотношение

$$(2) \quad \frac{\omega^2}{c^2} = \mathbf{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}.$$

Если согласно де-Бройлю интерпретировать произведения  $\hbar\omega$  и  $\hbar\mathbf{k}$  как энергию  $\mathcal{E}$  и импульс  $\mathbf{p}$  частицы, то приходим к релятивистскому соотношению между энергией и импульсом

$$(3) \quad \mathcal{E}^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4.$$

Поскольку волновая функция  $\varphi(x^k)$  однокомпонентна и является скаляром, зависящим только от пространственных 4-координат, она может описывать только частицы без внутренних степеней свободы, т. е. частицы с нулевым спином.

**4.126.** Из приведенного лагранжиана с помощью (4.95) получаем уравнение движения

$$(1) \quad \square\varphi + \mu^2\varphi - \lambda\varphi^3 = 0.$$

При малых  $\varphi$  и в пренебрежении нелинейным членом вместо дисперсионного соотношения (2) предыдущей задачи получим

$$(2) \quad \frac{\omega^2}{c^2} = -\mu^2 + k^2$$

и при  $k^2 < \mu^2$  будем иметь чисто мнимые частоты  $\omega = ic\sqrt{\mu^2 - k^2}$ . Это означает, что решения  $\varphi \propto \exp(\pm\sqrt{\mu^2 - k^2}ct)$  со знаком плюс будут нарастать экспоненциально. Но рост не может быть безграничным, так как нелинейное слагаемое ограничивает амплитуду  $\varphi$ .

Найдем значение  $\varphi = \varphi_0$ , при котором  $V(\varphi)$  имеет минимум. Из условия  $\partial V/\partial\varphi^2 = 0$  находим  $\varphi_0 = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$ . Из физических соображений можно ожидать, что поле  $\varphi$  дорастет до значения  $\varphi_0$  и затем будет колебаться около указанного значения, причем колебания поля будут соответствовать кванты — частицы с некоторой действительной и положительной массой.

Для проверки этой гипотезы делаем подстановку  $\varphi(x) = \varphi_0 + \eta(x)$ ,  $|\eta| \ll |\varphi_0|$  в лагранжиан и оставляем члены не выше второго порядка:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \partial^k \eta \partial_k \eta \right) - \mu^2 \eta^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}.$$

Постоянное слагаемое может быть опущено. Член, содержащий квадрат массы, имеет теперь правильный знак. Сравнивая его с соответствующим слагаемым в уравнении (1) предыдущей задачи, находим массу квантов, соответствующих возбуждениям  $\eta$ :  $m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$ . В результате мы приходим к следующей физической картине: указанному в условии задачи потенциалу  $V(\varphi)$  соответствуют два низших энергетических состояния (вакуумных

решения) с отличными от нуля значениями поля  $\varphi_0 = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$ . На этом фоне возможны возбужденные состояния, в которых имеется некоторое число квантов — частиц с массой  $m_\eta$  и обычной для релятивистских частиц связью между энергией и импульсом

$$\mathcal{E} = \sqrt{c^2 p^2 + m_\eta^2 c^4}, \quad p = \hbar k, \quad \mathcal{E} = \hbar \omega.$$

Волновые функции частиц при низких уровнях возбуждений поля могут представлять собой суперпозиции плоских волн с  $\omega = \mathcal{E}/\hbar$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ .

**4.128.** Имеется всего один скалярный параметр преобразования  $\alpha$ . При малом  $\alpha$  имеем  $\psi' = \psi + i\alpha\psi$ ,  $x'^k = x^k$ , поэтому в общих формулах (4.115) следует положить  $\Gamma_a^k = 0$ ,  $G_{Ba}^A = i$ ,  $\delta\lambda^a = \alpha$ . Обобщенный ток представляет собой 4-вектор:  $J_a^k = j^k$ , причем, согласно (4.119),

$$(1) \quad j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}^*} i c \psi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}} i c \psi = c \hbar |\psi|^2;$$

$$(2) \quad j^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\beta}^*} i \psi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\beta}} i \psi = \frac{i \hbar^2}{2m} (\psi \psi_{,\beta}^* - \psi^* \psi_{,\beta}).$$

Величина  $\rho(\mathbf{r}, t) = j^0/c\hbar = |\psi|^2$  неотрицательна, может быть нормирована на единицу (для состояний финитного движения, когда частица все время находится в конечной области пространства) и интерпретируется в квантовой механике как плотность вероятности. 3-вектор  $\mathbf{j}/\hbar$  представляет собой плотность потока вероятности. Уравнение неразрывности (4.120) приводит к сохранению полной вероятности во времени:  $\int \rho(\mathbf{r}, t) d^3x = \text{const}$ . Возможна и другая, более адекватная интерпретация рассматриваемого закона сохранения для заряженных частиц. Домножая равенства (1), (2) на заряд частицы  $e$ , получим плотность электрического заряда  $e\rho = \rho_e$  и плотность электрического тока  $e\mathbf{j}/\hbar = \mathbf{j}_e$ , создаваемые в обычном 3-мерном пространстве в результате движения частицы по законам квантовой механики. В такой интерпретации нетеровский ток, связанный с фазовым преобразованием волновой функции заряженной частицы, представляет собой четырехмерную плотность электрического тока.

**4.129.**  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ ,  
где

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\varphi^* \varphi_{,t} - \varphi \varphi_{,t}^*), \quad \mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\varphi \nabla \varphi^* - \varphi^* \nabla \varphi).$$

Интерпретация величины  $\rho$  как плотности вероятности невозможна, так как  $\rho$  может иметь оба знака. Но произведение  $e\rho = \rho_e$  можно рассматривать как плотность электрического заряда, если  $\varphi$  описывает такое поле, квантами которого являются частицы и античастицы, имеющие заряды разных знаков. Релятивистские волновые уравнения и вытекающие из них следствия тесно связаны с понятием античастиц. Об интерпретации уравнения Клейна–Гордона–Фока подробнее см. [Бьеркен и Дрелл (1978), Берестецкий и др. (1989)]

$$4.130. \quad \mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}\psi^*\psi, \quad \rho = \psi^*\psi.$$

4.131. Для того, чтобы наблюдаемые величины  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  не изменились при калибровочном преобразовании потенциалов

$$(1) \quad \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad \varphi = \tilde{\varphi} + \frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

нужно преобразовать фазу волновой функции:

$$(2) \quad \psi = \tilde{\psi} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} f(\mathbf{r}, t)\right).$$

Преобразование (1)–(2) отличается от преобразования фазы с  $\alpha = \text{const}$ , рассмотренного в задачах 4.128–4.130, своим локальным характером: фазовый множитель волновой функции зависит теперь от координат и времени. Инвариантность наблюдаемых величин относительно локального фазового преобразования сохраняется только при наличии дополнительного компенсирующего поля, роль которого играет электромагнитное поле.

Обобщение этой простой идеи привело к созданию начиная с 60-х годов нового научного направления — теории калибровочных полей — и позволило достичь впечатляющих успехов в физике элементарных частиц.

4.132. Выполнив преобразование к новым полевым функциям  $A^k(x)$ ,  $\zeta(x)$ ,  $\eta(x)$ , получим лагранжиан

$$(1) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_k A_i - \partial_i A_k)(\partial^k A^i - \partial^i A^k) + \\ + \frac{g^2}{2}(\varphi_0 + \eta)^2 A_k A^k + \frac{1}{2}(\partial_k \eta \partial^k \eta) + \\ + \frac{\mu^2}{2}(\varphi_0 + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(\varphi_0 + \eta)^4.$$



В отсутствие векторного поля,  $A_i = 0$ , имеем лагранжиан, уже исследованный в задаче 4.126. Он описывает скалярное поле с вакуумными состояниями, которым отвечают отличные от нуля значения  $\varphi_0 = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$ . Возбуждения поля (его кванты) возникают при  $\eta \neq 0$  и имеют массу  $m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$ .

В отсутствие скалярного поля,  $\varphi_0 = \eta = 0$ , лагранжиан векторного поля  $A_k$ , приобретает вид такой же, как у свободного электромагнитного поля:

$$(2) \quad \mathcal{L}_v^{(0)} = -\frac{1}{4}(\partial_k A_i - \partial_i A_k)(\partial^k A^i - \partial^i A^k).$$

Он не содержит никаких постоянных, через которые можно было бы выразить массу частиц, и описывает поле с нулевой массой квантов. Для вакуумного состояния скалярного поля,  $\varphi_0^2 = \mu^2/\lambda$  и  $\eta = 0$ , лагранжиан приобретает вид

$$(3) \quad \mathcal{L}_v = -\frac{1}{4}(\partial_k A_i - \partial_i A_k)(\partial^k A^i - \partial^i A^k) + \frac{g^2\mu^2}{2\lambda}A_k A^k + \text{const.}$$

Уравнение движения при дополнительном условии типа условия Лоренца  $\partial_i A^i = 0$  имеет вид

$$(4) \quad \square A^l - \frac{g^2\mu^2}{\lambda}A^l = 0.$$

Сравнивая (4) с уравнением (1) задачи 4.125, находим массу векторных частиц в рассмотренной модели:

$$(5) \quad m_v = \frac{g\mu\hbar}{c\sqrt{\lambda}}.$$

Изложенный механизм возникновения массы у первоначально безмассовых частиц носит название механизма Хиггса. Предполагается, что этот механизм объясняет наличие массы у промежуточных векторных бозонов ( $W^\pm$  и  $Z^0$ , см. таблицу 3.1), наблюдающихся на опыте. Один из «промежуточных бозонов» — фотон — остается безмассовым. Но хиггсовские скалярные частицы — кванты поля  $\eta$  — до сих пор экспериментально не обнаружены. Более подробные сведения см. в содержательном обзоре [Окунь (1988)]

**4.133.** Из классической механики известно, что инвариантность функции Лагранжа относительно сдвига во времени приводит к сохранению

полной энергии, а относительно сдвига в пространстве — к сохранению полного импульса системы. По аналогии, в случае поля следует отождествить интеграл по всему трехмерному пространству  $\mathcal{E} = \int J^{00} d^3x$  с полной энергией поля, а  $P^\alpha = (1/c) \int J^{0\alpha} d^3x$  — с его полным импульсом. Следует, однако, помнить, что обобщенные токи определяются неоднозначно. Поэтому требуются дополнительные соображения, чтобы найти удовлетворительные выражения для плотностей соответствующих величин. См. примеры 4.21, 4.22 и задачи 4.135, 4.139.

**4.134.** Из вида тензора энергии-импульса, записанного через напряженности электромагнитного поля (см. пример 4.21), следует, что его недиагональные элементы обращаются в нуль в том и только в том случае, когда напряженность  $\mathbf{E}$  параллельна или антипараллельна  $\mathbf{H}$ , либо одна из них равна нулю. При этом

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2),$$

если векторы поля направлены вдоль  $Ox$ . Все системы отсчета, обладающие таким свойством, были найдены в задаче 4.28. Если поле изменяется в пространстве и во времени, то, вообще говоря, диагонализировать тензор путем перехода в соответствующую инерциальную систему отсчета можно только в одной точке пространства в определенный момент времени.

Диагонализация невозможна, если в исходной системе отсчета  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$  и  $E = H$ .

**4.135.** Добавив в лагранжиан (4.100) слагаемое  $-mc^2\psi^*\psi$ , находим

$$(1) \quad T^0_0 = T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t} \psi_{,t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_t} \psi^*_{,t} - \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \psi^{\alpha} \psi^*_{,\alpha} + (U + mc^2) \psi^* \psi,$$

что тождественно плотности функции Гамильтона, вычисленной в задаче 4.123, с добавлением энергии покоя частицы. Далее находим

$$(2) \quad \frac{1}{c} T^{0\alpha} = -\frac{1}{c} T^0_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t} \psi_{,\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_t} \psi^*_{,\alpha} = -\frac{i\hbar}{2} (\psi^* \psi_{,\alpha} - \psi \psi^*_{,\alpha}).$$

Полный импульс, связанный с полем  $\psi$ , вычисляется с помощью интегрирования второго слагаемого по частям в предположении обращения в нуль поля на бесконечности,

$$(3) \quad P^\alpha = \frac{1}{c} \int T^{0\alpha} d^3x = \int \psi^* \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) \psi d^3x = \\ = - \int \psi^* \hat{p}_\alpha \psi d^3x = \int \psi^* \hat{p}^\alpha \psi d^3x,$$

и совпадает со средним квантовомеханическим значением импульса частицы.

Поучительно проверить симметрию тензора энергии-импульса. Имеем

$$(4) \quad \frac{1}{c}T^{\alpha 0} = \frac{1}{c}T^{\alpha 0}_0 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\alpha}} \psi_{,t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,\alpha}} \psi^*_{,t} \right) = \\ = \frac{\hbar^2}{2mc^2} [(\partial^\alpha \psi^*)\psi_{,t} + (\partial^\alpha \psi)\psi^*_{,t}].$$

По внешнему виду это выражение сильно отличается от  $T^{0\alpha}/c$ , определяемых уравнением (2). Однако, следует иметь в виду, что с учетом главного члена (энергии покоя)  $\psi_{,t} \approx -imc^2\psi/\hbar$ , поэтому  $T^{\alpha 0}/c \approx i\hbar\psi^*\partial^\alpha\psi/2 - i\hbar\psi\partial^\alpha\psi^*/2$ , что совпадает с  $T^{0\alpha}$ . Наконец, трехмерный тензор  $T^{\alpha\beta}$  дает

$$(5) \quad \int T^{\alpha\beta} d^3x = \int \psi^* \hat{p}^\alpha \hat{v}^\beta \psi d^3x$$

— среднее квантовомеханическое значение плотности потока импульса.

**4.136.** Если наблюдатель находится в системе  $S'$ , то плотность энергии  $\mathcal{H} = T'^{00} = T^{ik}u'_i u'_k/c^2 = T^{ik}u_i u_k/c^2$ ; плотность проекции импульса на пространственноподобное направление, определяемое единичным вектором  $n_k$  ( $n_k n^k = -1$ ) записывается в виде  $P'_n = T^{ik}u_i n_k/c$ .

**4.137.** В общем случае

$$\oint_S \sigma^{\alpha\beta} dS_\beta = \int_V \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \right)^\alpha d^3x.$$

Кроме силы, в правую часть равенства входит изменение импульса поля за единицу времени в рассматриваем объеме.

**4.138.** В качестве независимых параметров преобразования естественно выбрать шесть независимых компонент антисимметричной матрицы преобразования Лоренца  $\delta\Omega_{li} = -\delta\Omega_{il}$ , введенной при решении задачи 4.20. Индекс  $a$ , входящий в общее выражение (4.119), будет представлять собой совокупность двух векторных индексов,  $a = (i, l)$ . Имеем

$$(1) \quad x'^l = x^l + \delta\Omega^l_i x^i, \quad \delta x^l = \delta\Omega^l_i x^i = \Gamma^l_{ij} \delta\Omega^{ij}/2, \quad \Gamma^l_{ij} = \delta^l_i x_j - \delta^l_j x_i.$$

(Удобно с самого начала ввести множитель  $1/2$ , т. е. выбрать  $\delta\lambda = \delta\Omega/2$ , чтобы получить согласие с известным из механики определением момента).

Из (4.119) с помощью выражений (1) получаем плотность нетеровского тока

$$(2) \quad J^k{}_{mn} = J^k{}_m x_n - J^k{}_n x_m - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A{}_{,k}} G^A{}_{Bmn} q^B.$$

Здесь  $J^k{}_l$  — канонический тензор энергии-импульса (4.124), а вид матрицы  $G^A{}_{Bmn}$  определяется природой полевых функций  $q^A$ .

а) Пусть  $q^A = \psi$  — скалярная комплексная волновая функция нерелятивистской бесспиновой частицы, удовлетворяющая уравнению Шредингера. С помощью (4.100) и (4.124) находим

$$(3) \quad J^0{}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A{}_{,0}} q^A{}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,0}} \psi^*_{,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,0}} \psi_{,\alpha} = \frac{i\hbar c}{2} (\psi^* \psi_{,\alpha} - \psi \psi^*_{,\alpha}).$$

Скаляр не изменяется при пространственных поворотах, поэтому  $G^A{}_{Bmn} = 0$ . Пользуясь (1) и (2), находим

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{c} \int J^0{}_{\alpha\beta} d^3x &= \frac{1}{c} \int (J^0{}_{\alpha\beta} x_{\beta} - J^0{}_{\beta\alpha} x_{\alpha}) d^3x = \\ &= i\hbar \int \psi^* (x_{\beta} \psi_{,\alpha} - x_{\alpha} \psi_{,\beta}) d^3x = \int \psi^* [\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}]_{\alpha\beta} \psi d^3x \equiv \bar{l}_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r} = (-x_1, -x_2, -x_3)$ ,  $\hat{\mathbf{p}} = (-i\hbar\partial_1, -i\hbar\partial_2, -i\hbar\partial_3)$ . Таким образом, после интегрирования компонент  $J^0{}_{\alpha\beta}/c$  по 3-пространству мы получили среднее квантовомеханическое значение орбитального момента частицы  $\bar{l}$ , выраженное через компоненты дуального 3-тензора ( $\bar{l}_{12} \rightarrow \bar{l}_3$  и т. д.). Обращаем внимание на изменение порядка индексов  $\alpha, \beta$  в правой и левой частях предыдущей цепочки равенств. В общем случае рассмотренное выражение при  $G^A{}_{Bmn} = 0$  можно представить в виде

$$(5) \quad \bar{L}_{\beta\alpha} = \int (x_{\beta} dP_{\alpha} - x_{\alpha} dP_{\beta}),$$

где  $dP_{\alpha} = J^0{}_{\alpha} d^3x/c$  — импульс поля, приходящийся на элемент объема  $d^3x$ . Ввиду явного сходства с моментом импульса сплошной среды в механике эту величину называют **орбитальным моментом поля**. Для скалярного поля он является интегралом движения.

б) Пусть нерелятивистская частица имеет спин 1/2. Ее волновая функция  $\Psi(x, \xi) = \psi(x)\chi(\xi)$  представляет собой произведение скаляра  $\psi$  на спинор  $\chi$  — двухкомпонентную величину. При повороте на малый угол  $\delta\varphi$

вокруг направления  $\mathbf{n}$  в 3-пространстве спинор преобразуется по закону [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]

$$(6) \quad \chi' = (1 + i\mathbf{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \delta\varphi/2)\chi,$$

где  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$  — вектор, компонентами которого выступают спиновые матрицы Паули. Из сравнения (6) с (1) находим вид матрицы  $\widehat{G}$ :

$$(7) \quad \widehat{G} = (i/2)\mathbf{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Вычисляя последнее слагаемое в (2) и интегрируя его затем по 3-пространству, получаем добавочный член к орбитальному моменту (4) — спиновый момент:

$$(8) \quad S_n = \left( \chi, \frac{\hbar}{2} \mathbf{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \chi \right) \int |\psi(x)|^2 d^3x = \frac{\hbar}{2} (\chi, \mathbf{n} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \chi).$$

Здесь получено среднее квантовомеханическое значение проекции спинового момента на направление  $\mathbf{n}$ . Интеграл от квадрата модуля координатной волновой функции дает единицу в силу условия нормировки.

В общем случае **спин поля** описывается выражением

$$(9) \quad S_{\alpha\beta} = - \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A_{,0}} G^A_{B\beta\alpha} q^B.$$

Сохраняющейся величиной в общем случае выступает полный момент  $J_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}$ .

**4.139.** Преобразование координат описывается формулами (1) из решения предыдущей задачи. В качестве полевых функций в электродинамике выступают компоненты 4-потенциала  $q^A(x) = A^l(x)$ . При малом повороте четырехмерной системы координат меняется аргумент 4-потенциала и его проекции на координатные оси. Изменение аргумента означает сдвиг в пространстве, который ввиду однородности 4-пространства не приводит к изменению полевых функций (ср. с рассмотрением сдвига в задаче 4.132). Изменение проекций 4-потенциала подчиняется тому же закону, что и преобразование любого 4-вектора, например, радиуса-вектора, т. е.

$$(1) \quad A'^l = A^l + \delta\Omega^l_i A^i = A^l + (\delta^l_i A_j - \delta^l_j A_i) \delta\Omega^{ij}/2.$$

Таким образом, в данном случае во втором слагаемом формулы (2) из решения предыдущей задачи нужно сделать замену

$$(2) \quad G^A_{B\alpha} q^B(x) \rightarrow \delta^l_i A_j(x) - \delta^l_j A_i(x),$$

а вычисление производной  $\partial\mathcal{L}/\partial A_{,k}^l$  было проделано в примере 4.21. В результате находим обобщенный нетеровский ток, который в данном случае является тензором III ранга, антисимметричным по двум нижним индексам  $i, j$ :

$$(3) \quad J_{kij} = J_{ki}x_j - J_{kj}x_i + \frac{1}{4\pi}(F_{ki}A_j - F_{kj}A_i).$$

Хотя полученный тензор в силу теоремы Нетер удовлетворяет дифференциальному закону сохранения  $\partial^k J_{kij} = 0$  (в этом легко убедиться и непосредственно), ему присущи два крупных недостатка: он не обладает калибровочной инвариантностью и не имеет структуры механического момента (т. е. векторного произведения радиуса-вектора на импульс). Это наводит на мысль сконструировать тензор плотности момента на основе калибровочно инвариантного и симметричного тензора энергии-импульса  $T_{ik}$  (см. (4.126)):

$$(4) \quad M_{kij} = T_{ki}x_j - T_{kj}x_i.$$

Вычислим дивергенцию этого тензора:

$$\partial^k M_{kij} = T_{ji} - T_{ij} + x_j \partial^k T_{ki} - x_i \partial^k T_{kj} = 0.$$

Полученный результат связан с симметрией ( $T_{ji} = T_{ij}$ ) и дифференциальным законом сохранения ( $\partial^k T_{kl} = 0$ ) тензора энергии-импульса. Таким образом, тензор  $M_{kij}$ , как и  $J_{kij}$ , удовлетворяет уравнению неразрывности (4.116), вытекающему из теоремы Нетер, и, следовательно, указанные два тензора должны отличаться дивергенцией некоторого антисимметричного тензора IV ранга. Убедимся в этом:

$$\begin{aligned} M_{kij} - J_{kij} &= \\ &= \frac{1}{4\pi}(F_{kl}F^l{}_i x_j - F_{kl}F^l{}_j x_i) + \frac{1}{4\pi}F_{kl}(A^l{}_i x_j - A^l{}_j x_i) - \frac{1}{4\pi}(F_{ki}A_j - F_{kj}A_i) = \\ &= \frac{1}{4\pi}F_{kl}(A_i^l x_j - A_j^l x_i) + \frac{1}{4\pi}(F_{kj}A_i - F_{ki}A_j) = \partial^l \left[ \frac{1}{4\pi}F_{kl}(A_i x_j - A_j x_i) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, оба тензора плотности момента,  $M_{kij}$  и  $J_{kij}$ , совместимы с теоремой Нетер и приводят к одинаковым интегральным сохраняющимся величинам — компонентам антисимметричного тензора II ранга момента импульса:

$$(5) \quad M_{ij} = \frac{1}{c} \int M_{0ji} d^3x = \frac{1}{c} \int J_{0ji} d^3x$$

(в правой части порядок индексов обратный). Но тензор  $M_{0ij}$  приводит к более симметричным и наглядным выражениям:

$$(6) \quad M_{ij} = \frac{1}{c} \int (x_i T_{0j} - x_j T_{0i}) d^3x = \int (x_i dP_j - x_j dP_i),$$

где  $dP_i = T_{0i} d^3x/c$  — импульс поля, заключенный в трехмерном объеме  $d^3x$ . Пространственная часть тензора  $M_{ij}$  образует трехмерный антисимметричный тензор  $\Pi$  ранга, дуальный псевдовектору углового момента поля  $M$ :

$$(7) \quad M = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} d^3x,$$

где

$$c\mathbf{g}^\alpha = T^{0\alpha} = -T_{0\alpha}, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

$$4.140. \quad M_{kji} = x_i T_{kj} - x_j T_{ki},$$

где  $T_{kl} = T_{kl}^{em} + T_{kl}^{part}$  — полный тензор энергии-импульса, определенный в примере 4.22. Для пространственных компонент  $M_{\alpha\beta} = (1/c) \int M_{0\alpha\beta} d^3x$  момента импульса системы находим

$$(1) \quad M = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} d^3x + \sum_a \mathbf{r} \times \mathbf{p}_a = \text{const}.$$

Для интерпретации смешанных компонент  $M_{0\alpha}$  введем время  $t$ , общее для всех частиц. Тогда из теоремы Нетер следует сохранение величин

$$(2) \quad M_{0\alpha} = ct(G_\alpha + P_\alpha) - \frac{1}{c} \left\{ \int x_\alpha w d^3x + \sum_a x_\alpha^a \mathcal{E}_a \right\} = \text{const},$$

где  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{P}$  — полные импульсы поля и частиц соответственно,  $w$  — плотность энергии электромагнитного поля. Введем в рассмотрение точку в 3-пространстве с радиусом-вектором

$$(3) \quad \mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{r} w d^3x + \sum_a \mathbf{r}_a \mathcal{E}_a}{\int w d^3x + \sum_a \mathcal{E}_a}.$$

Постоянство компонент  $M_{0\alpha}$  означает, что эта точка движется по закону  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t$  со скоростью

$$(4) \quad \mathbf{V} = \frac{c^2(\mathbf{P} + \mathbf{G})}{\mathcal{E}_{field} + \mathcal{E}_{part}}, \quad \text{где} \quad \mathcal{E}_{field} = \int w d^3x, \quad \mathcal{E}_{part} = \sum_a \mathcal{E}_a,$$

которая в силу сохранения полного импульса и полной энергии системы постоянна. Полученные соотношения представляют собой обобщение теоремы механики о равномерном движении центра масс замкнутой системы на случай релятивистских объектов.

**4.141.** Функция Лагранжа имеет вид

$$(1) \quad L(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{H} \times \mathbf{r}/2$  — векторный потенциал. Ввиду отсутствия явной зависимости функции Лагранжа от времени сохраняется энергия частицы

$$(2) \quad \mathcal{E} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \frac{mv^2}{2}.$$

Ввиду инвариантности функции Лагранжа относительно поворотов вокруг направления  $\mathbf{H} \parallel Oz$  сохраняется также канонический импульс

$$(3) \quad P_\alpha = \left[ \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right]_z = m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]_z + \frac{e}{2c} [\mathbf{r} \times [\mathbf{H} \times \mathbf{r}]]_z,$$

соответствующий повороту вокруг оси  $Oz$ .

Вывод закона сохранения, связанного с пространственным сдвигом, требует большей аккуратности, так как функция Лагранжа не инвариантна относительно сдвига. Вычисляя изменение функции Лагранжа при замене  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ , находим из (1)

$$(4) \quad \delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = \frac{e}{2c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \cdot \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r} \cdot \frac{d}{dt} \frac{e}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{H},$$

т. е. вариация выражается через полную производную по времени от некоторой функции координат. С другой стороны, из уравнения Лагранжа получаем

$$(5) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

где  $\mathbf{P} = m\mathbf{v} + (e/2c)\mathbf{H} \times \mathbf{r}$  — канонический импульс, сопряженный радиусу-вектору, который не сохраняется. Подставляя (5) в (4), находим сохраняющийся обобщенный импульс

$$(6) \quad \mathcal{P} = \mathbf{P} + \frac{e}{2c} \mathbf{H} \times \mathbf{r} = m\mathbf{v} - \frac{e}{c} \mathbf{r} \times \mathbf{H}.$$



Постоянство приведенной величины следует и непосредственно из уравнения движения

$$(7) \quad m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

при  $\mathbf{H} = \text{const.}$

Вычислим еще электромагнитный импульс, создаваемый кулоновским полем частицы и внешним магнитным полем. Используя формулу (4.128), находим

$$(8) \quad \mathbf{p}_{em} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H} d^3x = \frac{1}{2\pi c} \int \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{E} d^3x = \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0(t)).$$

Здесь  $\mathbf{E} = e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|^3$ ,  $\mathbf{r}_0(t)$  — радиус-вектор частицы,  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$ . Преобразование интеграла произведено с помощью формулы (1.89) для  $\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A})$  и уравнений  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Импульс поля в конечном счете оказался локализованным в точке нахождения частицы. Для момента полного импульса системы  $m\mathbf{v} + \mathbf{p}_{em}$ , который складывается из импульса частицы и импульса поля, находим

$$(9) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}_0 \times (m\mathbf{v} + \mathbf{p}_{em}),$$

куда вошел радиус-вектор  $\mathbf{r}_0(t)$  частицы. Проекция (9) на направление магнитного поля сохраняется и совпадает с (3).

**4.142.** Импульс и энергию поля в объеме  $V$  в момент  $t = x^0/c$  можно выразить интегралами  $\int T^{\alpha 0} dV$  и  $\int T^{00} dV$  соответственно, где интегрирование производится по всему трехмерному пространству. Объединим их и запишем в ковариантной форме, введя единичный 4-вектор  $n_i = (1, 0, 0, 0)$ :  $\int_{\Sigma(t)} T^{ki} dS_i$ , где  $dS_i = n_i dV$  — элемент гиперповерхности  $\Sigma(t)$ , определяемой условием  $t = x^0/c = x_0/c = \text{const.}$ , т.е. это — элемент трехмерного объема. Обобщим написанный интеграл и распространим его на замкнутую гиперповерхность  $\Sigma_{tot}$ , окружающую 4-объем  $\Omega$ :

(1)  $\Sigma_{tot} = \Sigma(t) + \Sigma(t') + \Sigma'$ .

Здесь  $\Sigma'$  — боковая цилиндрическая гиперповерхность, образующие которой параллельны оси времени  $x^0$  (см. условный рис. 4.19).

Применим четырехмерную теорему Остроградского — Гаусса к интегралу по всей гиперповерхности:

$$(2) \quad \oint_{\Sigma_{tot}} T^{ki} dS_i = \int_{\Omega} \frac{\partial T^{ki}}{\partial x^i} d\Omega,$$

где  $dS_i$  на боковой поверхности, конечно, имеет вид, отличный от  $n_i dV$ . Поскольку  $\Omega$  и  $d\Omega$  — инварианты, а  $\partial T^{ki}/\partial x^i$  — 4-вектор, то и интеграл в левой части также 4-вектор. Векторами являются и его отдельные слагаемые  $T^{ki} dS_i$  при любой ориентации элементов  $dS_i$ , в частности, интеграл  $\int_{\Sigma(t)} T^{k0} dV$ .

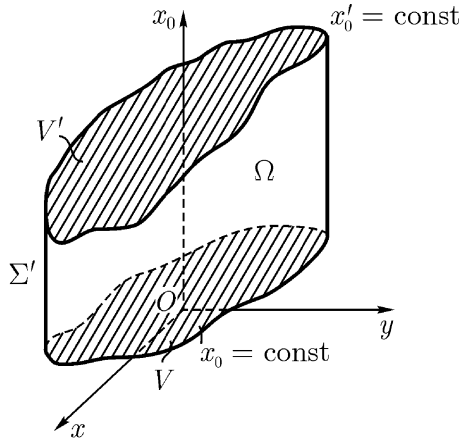


Рис. 4.19

На удаленной боковой поверхности  $\Sigma'$  поле отсутствует,  $T^{ki} = 0$ . Из этого факта, уравнения (1) и уравнения непрерывности  $\partial T^{ki}/\partial x^i = 0$  следует, что  $\int T^{k0}(t) dV = \int T^{k0}(t') dV$ , т. е. рассматриваемый 4-вектор, как и должно быть, не изменяется со временем.

**4.143.** Полный момент импульса частиц и поля в рассматриваемом конечном 3-объеме

$$(1) \quad L^{\alpha\beta}(t) = \sum l^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} \int_{\Sigma(t)} (x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}) dS_\gamma,$$

где  $l^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha$  — момент импульса одной частицы, сумма берется по всем частицам. Гиперповерхность  $\Sigma(t)$  перпендикулярна оси  $t$  и представляет собой, в отличие от предыдущей задачи, конечный трехмерный

объем  $V$ . Убыль момента импульса системы за время  $dt$ :

$$(2) \quad -dL^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta}(t) - L^{\alpha\beta}(t + dt) = - \sum_{\Sigma(t+dt)} dl^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} \int_{\Sigma(t+dt)} \dots - \frac{1}{c} \int_{\Sigma(t)} \dots$$

Перейдем в (2) к интегрированию по замкнутой цилиндрической гиперповерхности  $\Sigma_{tot}$ , записав  $\int_{\Sigma(t+dt)} + \int_{\Sigma(t)} + \int_{\Sigma'} = \oint_{\Sigma_{tot}}$ . Здесь  $\Sigma'$  — боковая цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси времени (см. рис. 4.20, не забывая об условности изображения 4-пространства на бумажном листе). Во всех интегралах элементы  $dS_i$  должны быть ориентированы вдоль внешней нормали к гиперповерхности.

Применив теорему Остроградского–Гаусса, будем иметь

$$(3) \quad \oint_{\Sigma_{tot}} (x^\alpha T^{\beta i} - x^\beta T^{\alpha i}) dS_i = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} (x^\alpha T^{\beta i} - x^\beta T^{\alpha i}) d\Omega.$$

С помощью уравнений (4.133) и (4.53) убеждаемся, что интеграл по 4-объему в (3) преобразуется в изменение момента импульса частиц  $\sum dl^{\alpha\beta}$ . В результате (2) преобразуется к виду

$$(4) \quad -dL^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int_{\Sigma'} (x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}) dS_\gamma.$$

Элементы гиперповерхности  $\Sigma'$  нормальны к оси времени, их можно записать в виде  $dS_\gamma = c dt n_\gamma df$ , где  $df$  — элемент обычной двумерной поверхности, ограничивающей объем  $V$ ,  $\mathbf{n}$  — орт нормали к этому элементу. Это позволяет получить из (4) выражение для убыли момента импульса в единицу времени:

$$(5) \quad -\frac{dL^{\alpha\beta}}{dt} = \oint (-x^\alpha T^{\beta\gamma} + x^\beta T^{\alpha\gamma}) n_\gamma df.$$

Введем антисимметричный по значкам  $\alpha, \beta$  тензор  $\mathcal{R}^{\alpha\beta\gamma} = x^\beta T^{\alpha\gamma} - x^\alpha T^{\beta\gamma}$ . Этот тензор можно интерпретировать как плотность потока мо-

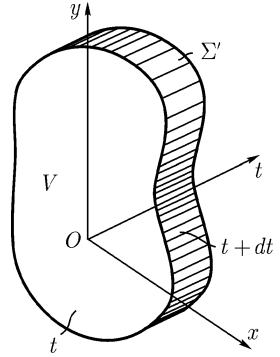


Рис. 4.20

мента импульса, что вытекает из (5). Компонента  $\mathcal{R}^{\alpha\beta\gamma}$  равна количеству  $\alpha\beta$ -компоненты полного момента импульса  $L^{\alpha\beta}$ , протекающему в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной оси с номером  $\gamma$ . Обозначим через  $\mathbf{L}$  и  $\mathcal{R}$  3-векторы, дуальные антисимметричным тензорам  $L^{\alpha\beta}$  и  $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma$ . Тогда равенство (5) примет вид

$$(6) \quad -\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \oint \mathcal{R}, df,$$

где

$$(7) \quad \mathcal{R} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \mathbf{r} \times \mathbf{n} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{H}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})].$$

При получении последней формулы использовано выражение (4.126) для компонент тензора энергии-импульса и таблицы (4.68).

---

---

## ГЛАВА 5

# Излучение и рассеяние электромагнитных волн

### 5.1. Функция Грина и запаздывающие потенциалы

Излучение электромагнитных волн удобно изучать с помощью электромагнитных потенциалов, удовлетворяющих неоднородным уравнениям Даламбера

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

и условию Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (5.2)$$

Мы получим решения этих уравнений в безграничном пространстве, предполагая, что источники поля  $\mathbf{j}$ ,  $\rho$  распределены в конечной области пространства и представляют собой известные функции координат и времени. Следует подчеркнуть, что такая постановка задачи с самого начала носит приближенный характер. В действительности создаваемое заряженными частицами поле влияет на их движение, поэтому правые части уравнений (5.1), строго говоря, представляют собой нелинейные функционалы от искомых потенциалов. Но во многих случаях (хотя и не всегда — см. раздел 5.4) обратное влияние собственного поля на движение зарядов оказывается малым и им можно пренебречь. При этом задача линеаризуется. Именно такую задачу мы и будем решать.

**Функции Грина волнового уравнения.** Определим функцию Грина  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  как решение волнового уравнения для безграничного пространства с дельтаобразной правой частью:

$$\Delta G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (5.3)$$

Решение неоднородного волнового уравнения можно записать с помощью функции Грина в виде интеграла:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') j(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'. \quad (5.4)$$

Применяя к  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  оператор Даламбера и пользуясь (5.3), убеждаемся, что уравнение (5.1) удовлетворяется.

**Пример 5.1.** Показать, что функция Грина волнового уравнения зависит только от разностей  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $\tau = t - t'$ .

**Решение.** Правая часть уравнения (5.3) зависит только от  $\mathbf{R}$  и  $\tau$ , а производные в левой части при фиксированных  $\mathbf{r}'$  и  $t'$  можно брать по  $\mathbf{R}$  и  $\tau$ . При этом уравнение (5.3) примет вид

$$\Delta G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = -4\pi \delta(\mathbf{R}) \delta(\tau), \quad (5.5)$$

где оператор  $\Delta$  действует на координаты  $\mathbf{R}$ . Из вида уравнения следует, что  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G(\mathbf{R}, \tau)$ . ■

**Пример 5.2.** Из уравнения (5.5) найти наиболее общий вид фурье-образа  $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$  разложения функции Грина по плоским монохроматическим волнам (см. формулы (2.114)).

**Решение.** Разлагая обе части уравнения (5.5) по плоским монохроматическим волнам в соответствии со второй формулой (2.114), получаем алгебраическое уравнение

$$(k^2 - \omega^2/c^2) \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi.$$

Формальное решение последнего уравнения имеет вид

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2}. \quad (5.6)$$

Оно является формальным потому, что имеет сингулярность при  $k^2 = \omega^2/c^2$  и требует дополнительной информации для выполнения обратного преобразования Фурье, т. е. задания правила интегрирования сингулярной функции. Кроме того, решение (5.6) не является общим: в нем пропущено решение однородного волнового уравнения, имеющее вид  $F(\mathbf{k}, \omega) \delta(k^2 - \omega^2/c^2)$ , где функция  $F$  должна быть ограниченной при  $\omega^2 = k^2 c^2$ . Указанная функция

является решением однородного волнового уравнения в силу равенства типа  $x\delta(x) = 0$ . Таким образом, наиболее общий вид фурье-образа функции Грина следующий:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2} + F(\mathbf{k}, \omega)\delta(k^2 - \omega^2/c^2), \quad (5.7)$$

из которого в зависимости от правила интегрирования сингулярной дроби и вида функции  $F$  получаются разные функции Грина (см. пример 5.3 и задачи 5.2–5.4). ■

**Пример 5.3.** *Запаздывающей функцией Грина  $G^R(R, \tau)$  волнового уравнения называется решение уравнения (5.5), удовлетворяющее условию*

$$G^R(R, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0. \quad (5.8)$$

*Указать правило обхода полюсов при вычислении интеграла Фурье по частоте, приводящее к выполнению указанного условия, и вычислить  $G^R(R, \tau)$ .*

**Решение.** Решение однородного уравнения представляет собой набор плоских монохроматических волн и не может удовлетворять условию (5.8). Поэтому полагаем в (5.7)  $F = 0$  и при интегрировании по  $d\omega$  деформируем путь интегрирования в комплексной плоскости, обходя полюсы подынтегрального выражения  $\omega = \pm\omega_k = \pm ck$  сверху (рис. 5.1). При  $\tau > 0$  замыкаем путь интегрирования дугой большого радиуса в нижней полуплоскости, на которой подынтегральное выражение экспоненциально мало, и получаем сумму вычетов относительно двух полюсов:

$$\begin{aligned} G^R(\mathbf{k}, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega\tau) = \\ &= \frac{4\pi c^2 \sin(\omega_k \tau)}{\omega_k}, \quad \tau > 0. \end{aligned}$$

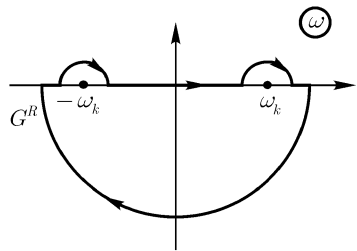


Рис. 5.1

При  $\tau < 0$  замыкаем контур интегрирования дугой большого радиуса в верхней полуплоскости и получаем нуль ввиду отсутствия полюсов внутри контура:  $G(\mathbf{k}, \tau) = 0$  при  $\tau < 0$ .

При интегрировании по волновым векторам используем сферические координаты с полярной осью вдоль  $\mathbf{R}$ . Представив  $d^3k = k^2 dk d\Omega_k$ , вычислим интеграл

$$\int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) d\Omega_k = 2\pi \int_0^\pi \exp(ikR \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{kR} \sin(kR).$$

В итоге будем иметь

$$G^R(R, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G^R(\mathbf{k}, \tau) = \frac{2c}{\pi R} \int_0^\infty \sin(kR) \sin(kc\tau) dk.$$

Представив произведение синусов в виде разности косинусов, и воспользовавшись представлением (1.219) дельта-функции, получим окончательно

$$G^R(R, \tau) = \frac{1}{R} \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right). \quad (5.9)$$

Условие (5.8) обеспечено аргументом дельта-функции. Решение (5.9) представляет собой бесконечно тонкий сферический волновой пакет, испущенный в момент  $t'$  из точки  $R = 0$  и распространяющийся со скоростью  $c$ . ■

Другие функции Грина, также удовлетворяющие уравнению (5.5), см. в задачах 5.2–5.9.

**Запаздывающие потенциалы.** Запаздывающая функция Грина играет важную роль в классической электродинамике, так как она обеспечивает **принцип причинности**: причина (движение зарядов в источнике) должна **предшествовать** следствию (изменению поля в точке наблюдения). С помощью (5.4) и (5.9) находим **запаздывающие потенциалы**:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (5.10)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (5.11)$$

Временной аргумент распределения зарядов и токов показывает, что поле в точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t$  определяется значениями величин  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  в точке  $\mathbf{r}'$  в предшествующий момент  $t' = t - R/c$ . Электромагнитные возмущения в вакууме распространяются со скоростью  $c$ .

**Пример 5.4.** Записать фурье-образы разложения запаздывающих потенциалов  $\mathbf{A}_\omega^R(\mathbf{r})$ ,  $\varphi_\omega^R(\mathbf{r})$  и напряженностей электромагнитного поля на монохроматические компоненты.



**Решение.** При аперриодическом движении частиц имеем по определению компонент Фурье (см. формулу (1.250))

$$\mathbf{A}_\omega^R(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}^R(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{c} \int \frac{\exp(i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (5.12')$$

где  $\tau = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ , или в окончательной форме

$$\mathbf{A}_\omega^R(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\exp(i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') dV' \quad (5.12)$$

и, аналогично,

$$\varphi_\omega^R(\mathbf{r}) = \int \frac{\exp(i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_\omega(\mathbf{r}') dV'. \quad (5.13)$$

Множитель

$$G_\omega^R(R) = \frac{1}{R} \exp(i\omega R/c) \quad (5.14)$$

под интегралами (5.12) и (5.13) представляет собой гармонику Фурье запаздывающей функции Грина. Напряженности поля выразятся в виде

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_\omega^R(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_\omega = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega^R(\mathbf{r}) - \nabla \varphi_\omega^R(\mathbf{r}). \quad (5.15)$$

Если движение частиц периодически с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , то потенциалы и напряженности поля можно разложить в ряды Фурье. Удобно разложение по экспонентам с мнимыми показателями типа (1.245). Разложение будет содержать частоты  $\omega_m = m\omega$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m^R(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\exp(i\omega_m|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}_m(\mathbf{r}') dV', \\ \varphi_m^R(\mathbf{r}) &= \int \frac{\exp(i\omega_m|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_m(\mathbf{r}') dV', \end{aligned} \quad (5.16)$$

где  $\mathbf{j}_m = (1/T) \int_0^T \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) e^{i\omega_m t} dt$  и аналогично для  $\rho_m$ . Напряженности поля примут вид

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_m^R(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_m = -\frac{i\omega_m}{c} \mathbf{A}_m^R(\mathbf{r}) - \nabla \varphi_m^R(\mathbf{r}). \quad (5.17)$$

■

Излучение электромагнитных волн системой заряженных частиц в свободном пространстве — это процесс, при котором электромагнитное поле отрывается от источника и распространяется в виде волн на произвольные расстояния. Поэтому для расчета процесса излучения необходимо исследовать поле на большом расстоянии от источника, превышающем как размеры источника ( $r \gg l$ ), так и длину излучаемой волны ( $r \gg \lambda$ , **волновая зона**). Структура поля в волновой зоне упрощается и становится похожей на поле плоской волны с характерными соотношениями (2.122) между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}, \quad E = H, \quad (5.18)$$

причем в данном случае  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ , если источник излучаемых волн находится вблизи начала координат. Справедливость соотношений (5.18) в волновой зоне будет подтверждена ниже прямым расчетом.

Энергия  $dI/d\Omega$ , излучаемая в направлении  $\mathbf{n}$  в единицу телесного угла (дифференциальная интенсивность излучения) выразится через вектор Пойнтинга  $\gamma$  в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \gamma \cdot \mathbf{n} r^2 = \frac{cr^2}{4\pi} \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t). \quad (5.19)$$

Суммарная по всем направлениям (полная) интенсивность излучения получается интегрированием (5.19) по телесному углу:

$$I(r, t) = \frac{cr^2}{4\pi} \int \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) d\Omega = \frac{cr^2}{4\pi} \int \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) d\Omega. \quad (5.20)$$

Зависимость  $I$  от  $r$  связана только с эффектом запаздывания, и через любую сферу с центром в источнике излучения в конечном счете пройдет вся излученная им энергия.

**Спектральный состав излучения.** Если движение частиц периодически, то средняя за период интенсивность излучения в данном направлении  $\overline{dI/d\Omega} = (1/T) \int_0^T (dI/d\Omega) dt$  при подстановке в (5.19) разложения Фурье магнитного поля примет вид

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dI}{d\Omega}} &= \frac{cr^2}{4\pi T} \int_0^T \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{cr^2}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_m(\mathbf{r})|^2 = \\ &= \frac{cr^2}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} |\mathbf{H}_m(\mathbf{r})|^2 \end{aligned}$$

(нулевая гармоника поля излучения отсутствует,  $\mathbf{H}_{-m} = \mathbf{H}_m^*$ ). Из структуры полученного выражения следует, что отдельные слагаемые можно интерпретировать как дифференциальные интенсивности излучения на соответствующих частотах  $\omega_m = m\omega$ ,  $m = 1, 2, \dots$ :

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \frac{cr^2}{2\pi} |\mathbf{H}_m(\mathbf{r})|^2. \quad (5.21)$$

Если движение частиц аperiодично и излучение продолжается конечное время, выключаясь при  $t \rightarrow \pm\infty$ , то спектр излучения оказывается непрерывным. Полная энергия  $d\mathcal{E}^{rad}/d\Omega$ , излученная в заданном направлении  $\mathbf{n}$ , выразится интегралом

$$\frac{d\mathcal{E}^{rad}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI(t)}{d\Omega} dt.$$

Разложим поле излучения в интеграл Фурье и воспользуемся снова формулой (5.19). Находим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}^{rad}}{d\Omega} &= \frac{cr^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{cr^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})|^2 d\omega = \\ &= \frac{cr^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} |\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Величину

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi^2} |\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})|^2, \quad (5.22)$$

не зависящую от  $r$  в волновой зоне, можно интерпретировать как энергию, излучаемую за все время процесса в данном направлении на частоте  $\omega$  (в расчете на единицу телесного угла и на единичный интервал частот). Формулы (5.21) и (5.22) похожи, но числовые коэффициенты и размерности их различны.

Рекомендуемая литература: [Колоколов и др. (2000)], [Джесон (1975)], [Иваненко и Соколов (1951)], [Бредов и др. (1985)], [Гальцов и др. (1991)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Соколов и Тернов (1983)].

## Задачи

**5.1.** Показать, что запаздывающие потенциалы (5.10), (5.11) удовлетворяют условию Лоренца (5.3).

**5.2\*.** Опережающей функцией Грина  $G^A(R, \tau)$  называется решение уравнения (5.5), которое удовлетворяет условию  $G^A(R, \tau) = 0$  при  $\tau > 0$ . Указать форму контура интегрирования в плоскости комплексной частоты  $\omega$ , приводящее к этому условию, и построить в явном виде опережающую функцию Грина  $G^A(R, \tau)$ .

**5.3.** Показать, что запаздывающую (5.9) и опережающую (см. предыдущую задачу) функции Грина можно записать в лоренц-инвариантной форме  $G^{R,A}(\mathbf{R}, \tau) = 2c\Theta(\pm\tau)\delta(X_i X^i)$ , где  $X^i = (c\tau, \mathbf{R})$ ,  $\Theta$  — ступенчатая функция (1.212).

УКАЗАНИЕ. Использовать свойство дельта-функции (1.209).

**5.4.** Показать, что фурье-образы запаздывающей и опережающей функций Грина можно записать в форме

$$\tilde{G}^{R,A}(\mathbf{k}, \omega) = -4\pi \frac{\mathcal{P}}{k_i k^i} \pm i4\pi^2 \epsilon(k^0) \delta(k_i k^i),$$

где  $\epsilon(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$  — знаковая функция,  $k^i = (\omega/c, \mathbf{k})$ .

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться правилами (1.223) интегрирования сингулярных выражений.

**5.5.** Записать компоненты Фурье  $A_\omega^A(\mathbf{r})$ ,  $\varphi_\omega^A(\mathbf{r})$  опережающих потенциалов, которые получаются по формуле (5.4) при постановке в нее опережающей функции Грина  $G^A$  (см. задачу 5.2). Сравнить их с (5.12), (5.13). Какой физический смысл можно приписать тем и другим?

**5.6.** Показать, что гармоники Фурье  $G_\omega^{R,A}(R)$  запаздывающей и опережающей функций Грина удовлетворяют уравнению

$$(1) \quad (\hat{H}_\omega \pm i\omega 0) G_\omega^{R,A}(R) = -4\pi \delta(\mathbf{R}),$$

где оператор

$$\hat{H}_\omega = \Delta + (\omega/c)^2$$

действует на координаты  $\mathbf{R}$ . Бесконечно малая мнимая добавка  $\pm i\omega 0$  дает правила обхода полюсов в плоскости комплексного  $\omega$ .

УКАЗАНИЕ. Перейти в уравнении (1) к разложению Фурье по координатам и сравнить результат с полученными ранее фурье-образами (см. формулу (5.6) и задачу 5.2). Учесть правила обхода полюсов, изображенные на рис. 5.1 и 5.3.

**5.7\***. Показать, что решение уравнения (1) предыдущей задачи можно записать в виде

$$G_{\omega}^{R,A}(\mathbf{R}) = \pm \frac{4\pi i}{\omega} \int_0^{\infty} d\tau \exp\left[\pm \frac{i}{\omega}(\widehat{H}_{\omega} \pm i\omega 0)\tau\right] \delta(\mathbf{R}).$$

Показать также, что подынтегральное выражение

$$\psi^{R,A}(\mathbf{R}, \tau) = \exp\left[\pm \frac{i}{\omega}(\widehat{H}_{\omega} \pm i\omega 0)\tau\right] \delta(\mathbf{R})$$

удовлетворяет «уравнению Шредингера»

$$\mp i \frac{\partial \psi^{R,A}}{\partial t} = (\widehat{H}_{\omega} \pm i\omega 0) \psi^{R,A}$$

и начальному условию  $\psi^{R,A}(\mathbf{R}, 0) = \delta(\mathbf{R})$ , где  $t = \tau/\omega$  играет роль времени.

**5.8\***. Вычислить функцию  $\psi^{R,A}(\mathbf{R}, \tau)$ , определенную в предыдущей задаче.

**5.9.** Определим функции  $G^{\pm}(\mathbf{R}, \tau)$  следующими равенствами:

$$G^{+}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{2}(G^R(\mathbf{R}, \tau) + G^A(\mathbf{R}, \tau)), \quad G^{-}(\mathbf{R}, \tau) = G^A(\mathbf{R}, \tau) - G^R(\mathbf{R}, \tau).$$

Найти их фурье-образы и указать дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции.

**5.10.** Записать уравнения, которым удовлетворяют электромагнитные потенциалы  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , если вместо условия Лоренца (5.3) на них наложено условие  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  (кулоновская калибровка). Представить уравнения в такой форме, чтобы в каждое из них входил один из потенциалов и источников поля.

**5.11.** Записать уравнения, которым удовлетворяют безвихревая (потенциальная) и соленоидальная части векторов электромагнитного поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Показать, что потенциальная часть электрического поля описывает мгновенное (незапаздывающее) кулоновское поле, которое

создается распределением зарядов в тот же момент времени, для которого определяется  $\mathbf{E}^{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ .

**5.12\*.** Разложить запаздывающую функцию Грина (5.14) в ряд по сферическим гармоникам  $Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ , где углы  $\vartheta, \alpha$  определяют направление вектора  $\mathbf{r}$ .

**5.13.** Представить фурье-образы запаздывающих потенциалов  $\mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r})$ ,  $\varphi_{\omega}(\mathbf{r})$  в волновой зоне ( $kr \gg 1$ ) в виде разложения по сферическим гармоникам Лежандра  $Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ . Как связаны коэффициенты разложения потенциалов, если сами потенциалы удовлетворяют условию Лоренца (5.2)?

УКАЗАНИЕ. Использовать разложение функции Грина  $G_{\omega}^R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  из предыдущей задачи.

**5.14\*.** Построим три последовательности векторных шаровых функций (**шаровых векторов**)  $\mathfrak{Y}_{lm}^{(k)}(\vartheta, \alpha)$ , определив их через сферические функции Лежандра соотношениями

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}_{lm}^{(1)}(\vartheta, \alpha) &= [l(l+1)]^{-1/2} \nabla_{\vartheta\alpha} Y_{lm}(\vartheta, \alpha), \\ \mathfrak{Y}_{lm}^{(2)}(\vartheta, \alpha) &= [l(l+1)]^{-1/2} \widehat{\mathbf{l}} Y_{lm}(\vartheta, \alpha), \quad l = 1, 2, \dots, \quad \mathfrak{Y}_{00}^{(1)} = \mathfrak{Y}_{00}^{(2)} = 0, \\ \mathfrak{Y}_{lm}^{(3)}(\vartheta, \alpha) &= \mathbf{n} Y_{lm}(\vartheta, \alpha),\end{aligned}$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ,  $\widehat{\mathbf{l}} = -i\mathbf{r} \times \nabla = -i\mathbf{n} \times \nabla_{\vartheta\alpha}$ ,  $\nabla_{\vartheta\alpha} = \mathbf{e}_{\vartheta} \partial/\partial\vartheta + (\mathbf{e}_{\alpha}/\sin\vartheta)(\partial/\partial\alpha)$ .  $\widehat{\mathbf{l}}$  — эрмитов оператор момента импульса в квантовой механике. Доказать, что шаровые векторы с разными  $k$  взаимно перпендикулярны и образуют полную ортонормированную систему функций на сфере:

$$\int \mathfrak{Y}_{l'm'}^{(k')*}(\vartheta, \alpha) \cdot \mathfrak{Y}_{lm}^{(k)}(\vartheta, \alpha) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{kk'}.$$

Показать также, что при инверсии координат (замена  $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ )  $\mathfrak{Y}_{lm}^{(1)}$  и  $\mathfrak{Y}_{lm}^{(3)}$  приобретают множитель  $(-1)^{l+1}$ , а  $\mathfrak{Y}_{lm}^{(2)}$  — множитель  $(-1)^l$ .

**5.15.** Показать, что в волновой зоне ( $r \gg \lambda$ ) при выполнении условия Лоренца (5.3) скалярный потенциал ограниченной излучающей системы связан с ее векторным потенциалом соотношением

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{r} + \frac{q}{r},$$

где  $q = \text{const}$  — полный электрический заряд системы.

## 5.2. Излучение нерелятивистских систем зарядов и токов

Исследование излучения упрощается, если время распространения электромагнитных возмущений в пределах излучающей системы мало по сравнению с характерным временем  $T$  движения заряженных частиц в системе:

$$l/c \ll T. \quad (5.23)$$

При периодическом движении  $T$  — это период, поэтому неравенству (5.23) можно придать форму

$$l \ll \lambda, \quad (5.24)$$

где  $\lambda$  — длина волны излучения. Наконец,  $l/T \approx v$  — характерная скорость частиц, и условие (5.23) сводится к требованию, чтобы скорость частиц была нерелятивистской:

$$v \ll c. \quad (5.25)$$

Проанализируем поле излучения системы зарядов, удовлетворяющих условиям (5.23)–(5.25). Для этого достаточно вычислить векторный потенциал в волновой зоне ( $r \gg \lambda$ ) и учесть лишь члены, обратно пропорциональные расстоянию  $r$  до системы, так как только они дадут вклад в излучаемую системой энергию.

Исходим из запаздывающего потенциала (5.10) и разлагаем  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  в ряд по отношению размеров системы к расстоянию  $r$ :  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . Представим плотность тока, стоящего под знаком интеграла, в виде разложения

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) = \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \dot{\mathbf{j}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} + \dots, \quad (5.26)$$

где точкой обозначена производная по времени. В знаменателе же подынтегрального выражения оставляем член нулевого приближения, заменяя  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  на  $r$ .

**Электрическое дипольное излучение.** Взяв из разложения (5.26) первый неисчезающий член, будем иметь

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV'.$$

Далее пользуемся тождеством

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \nabla'(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}') = \nabla' \cdot [\mathbf{j}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}')] - \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'(\nabla' \cdot \mathbf{j}),$$

где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор, и получаем

$$\mathbf{a} \cdot \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV'.$$

Здесь мы использовали уравнение непрерывности (2.47). Пользуясь определением электрического дипольного момента (2.23), можем записать  $\int \mathbf{r}' \dot{\rho}(\mathbf{r}', t - r/c) dV' = \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$  и

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr}. \quad (5.27)$$

**Пример 5.5.** Вычислить напряженности поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  в волновой зоне электрического дипольного излучателя. Вычислить также энергию, излучаемую в единицу времени в направлении  $\mathbf{n}$  (в расчете на единицу телесного угла) и суммарную по всем направлениям излучаемую энергию.

**Решение.** Удерживаем только члены порядка  $r^{-1}$ , которые получаются при дифференцировании аргумента  $\dot{\mathbf{p}}$ , но не знаменателя:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.28)$$

Электрический вектор  $\mathbf{E}$  можно выразить через магнитный вектор  $\mathbf{H}$  с помощью формул (5.19) для плоской волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \frac{(\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}}{c^2 r}. \quad (5.29)$$

Характерно, что в волновой зоне вектор Пойнтинга направлен по радиусу от источника и обратно пропорционален квадрату расстояния:

$$\gamma = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n}.$$

Поэтому через элемент поверхности сферы  $r^2 d\Omega$  внутри данного телесного угла  $d\Omega$  пройдет одна и та же энергия (с учетом запаздывания) независимо от расстояния  $r$ . Дифференциальная интенсивность излучения примет вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 = \frac{[\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3}, \quad (5.30)$$



где  $\theta$  — угол между направлениями  $\ddot{\mathbf{p}}$  и  $\mathbf{n}$  в момент  $t - r/c$ . При интегрировании по всему телесному углу получим полную интенсивность излучения

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}. \quad (5.31)$$

Для отдельной заряженной частицы  $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$ , и (5.31) дает **формулу Лармора**

$$I = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}. \quad (5.32)$$

Из нее следует, что излучать может только ускоренно движущаяся частица,  $\dot{\mathbf{v}} \neq 0$ . ■

Рассмотренное излучение называется **электрическим дипольным излучением**, поскольку все величины выражаются через производные от электрического дипольного момента. При периодическом движении интенсивности излучения отдельных гармоник Фурье можно вычислить с помощью формул (5.21) и (5.28). Они имеют вид

$$I_m = \frac{4\omega_m^4}{3c^3} |\mathbf{p}_m|^2. \quad (5.33)$$

Если диполь колеблется с одной частотой  $\omega$ , т.е.  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos \omega t = (\mathbf{p}_0/2)(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$ , то  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0/2$  и интенсивность излучения, усредненная по периоду колебаний,  $\bar{I} = I_1 = \omega^4 \mathbf{p}_0^2 / 3c^3$ .

**Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение.** При равенстве нулю или постоянстве дипольного момента электрическое дипольное излучение отсутствует, и для расчета поля излучения нужно учесть следующие члены разложения (5.26). Такая ситуация возникает, например, в случае системы заряженных частиц с одинаковым отношением  $e_a/m_a = \eta$ :

$$\mathbf{p} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a = \eta \sum_a m_a \mathbf{r}_a = \eta \mathbf{R} \sum_a m_a.$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор центра масс; в отсутствие внешних сил  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \text{const}$ ,  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ , дипольное излучение обращается в нуль.

**Пример 5.6.** Вычислить векторный потенциал ограниченной системы зарядов в отсутствие электрического дипольного момента с учетом членов следующего порядка малости по параметру  $l/\lambda$  в (5.26). Результат выразить через магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты. Вычислить дифференциальную и полную интенсивности магнитно-дипольного и электрического квадрупольного излучения.

**Решение.** Преобразуем второй член в правой части (5.26) с помощью тождества

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')\dot{\mathbf{j}} = (1/2)[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')\dot{\mathbf{j}} + (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{j}})\mathbf{r}'] + (1/2)(\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{j}}) \times \mathbf{n}.$$

Подстановка этого выражения в (5.10) дает векторный потенциал вида

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{1}{2c^2r} \frac{\partial}{\partial t} \int [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j} + (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{j}})\mathbf{r}'] dV'. \quad (5.34)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{m}}$  — производная от магнитного момента (2.59) системы по времени. Второй интеграл в (5.34) преобразуем с помощью тождества  $\int \mathbf{P} dV = -\int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV$  и уравнения непрерывности, где  $\mathbf{P}$  — произвольный вектор, отличный от нуля в конечной области, а интегрирование производится по всему пространству. В результате получим

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{1}{2c^2r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mathbf{r}'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')\rho dV'. \quad (5.35)$$

Интеграл в последнем равенстве можно записать через электрический квадрупольный момент (2.24). Введя тензорные обозначения, будем иметь

$$\int x_\alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')\rho dV' = (1/3)Q_{\alpha\beta}n_\beta + (1/3)n_\alpha \int \rho r'^2 dV'.$$

В итоге находим векторный потенциал в волновой зоне:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}}{6c^2r} + \frac{\mathbf{n}}{6c^2r} \int \ddot{\rho}(\mathbf{r}', t - r/c)r'^2 dV', \quad \text{где } Q_\alpha = Q_{\alpha\beta}n_\beta. \quad (5.36)$$

При вычислении напряженностей поля последнее слагаемое в (5.36) не дает вклада, поле излучения выражается только через магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{c^2r} \left\{ (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n} \right\}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2r} \left\{ \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}} + \frac{1}{6c} (\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \right\}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Поле магнитного диполя получается из поля электрического диполя заменой  $\ddot{\mathbf{p}} \rightarrow \ddot{\mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$ . При гармоническом движении зарядов  $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2\mathbf{p}$ ,  $\ddot{\mathbf{m}} = -\omega^2\mathbf{m}$ ,  $\ddot{\mathbf{Q}} = i\omega^3\mathbf{Q}$ , поэтому интенсивности электрического и магнитного дипольных излучений пропорциональны  $\omega^4$ , тогда как электрическое квадрупольное излучение пропорционально  $\omega^6$ .

Имея напряженности поля, нетрудно вычислить дифференциальную интенсивность квадрупольного и магнитно-дипольного излучения в данном направлении  $\mathbf{n}$ :

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n})^2 + \frac{1}{144\pi c^5} (\dot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n})^2 - \frac{1}{12\pi c^4} \ddot{\mathbf{m}} \cdot (\dot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}). \quad (5.38)$$

При интегрировании (5.38) по направлениям вектора  $\mathbf{n}$  следует записать все произведения векторов в тензорных обозначениях и воспользоваться формулами для усреднения компонент единичного вектора, полученными при решении задачи 1.33. Суммарная по всем направлениям интенсивность излучения запишется в виде

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta}^2. \quad (5.39)$$

По сравнению с интенсивностью электрического дипольного излучения (5.31) слагаемые в (5.39) содержат малый множитель  $(l/\lambda)^2$ . Поэтому они будут играть существенную роль только в отсутствие электрического дипольного излучения. ■

**Вектор Герца и излучение антенн.** Если излучателем является макроскопическое тело с размерами  $l \geq \lambda$ , то разложение поля излучения по мультиполям неприменимо, и следует пользоваться точными выражениями (5.10), (5.11) для запаздывающих потенциалов. Количество неизвестных функций можно уменьшить, если вместо потенциалов  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , связанных условием Лоренца (5.2), ввести одну векторную функцию  $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$  (**вектор Герца**, или **поляризационный потенциал**) через которую выражаются электромагнитные потенциалы. Вектор Герца может быть двух типов: электрическим  $\mathbf{Z}^{(e)}$  и магнитным  $\mathbf{Z}^{(m)}$ . Первый случай реализуется, когда источник состоит из электрических дипольных излучателей, распределенных с объемной плотностью  $\mathbf{P}$ , которая называется **вектором электрической поляризации**. Электромагнитные потенциалы связаны с электрическим вектором Герца соотношениями

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^{(e)}}{\partial t}. \quad (5.40)$$

Распределение зарядов и токов электронейтральной системы выражается через вектор электрической поляризации по формулам

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (5.41)$$

Уравнение непрерывности при этом выполняется, а полный заряд ограниченной системы должен быть равен нулю:

$$q = \int_{V \rightarrow \infty} \rho dV = - \oint_{S \rightarrow \infty} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Полный электрический дипольный момент выражается в виде интеграла от вектора  $\mathbf{P}$  по объему системы.

Для того, чтобы электромагнитные потенциалы удовлетворяли уравнениям (5.1) и соотношениям (5.40), вектор Герца следует подчинить неоднородному уравнению Даламбера:

$$\Delta \mathbf{Z}^{(e)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^{(e)}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{P}. \quad (5.42)$$

Применяя к обеим частям (5.42) попеременно операторы  $-\operatorname{div}$  и  $\partial/c\partial t$ , получим уравнения для потенциалов (5.1). Решение уравнения (5.42) можно записать по аналогии с запаздывающими потенциалами:

$$\mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (5.43)$$

Магнитный вектор Герца следует вводить, когда источник содержит магнитные дипольные излучатели, распределенные с плотностью  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ , которая называется **вектором магнитной поляризации**. В этом случае вместо (5.41) имеем

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (5.44)$$

интеграл по объему системы от  $\mathbf{M}$  даст полный магнитный дипольный момент, а магнитный вектор Герца должен определяться из неоднородного волнового уравнения

$$\Delta \mathbf{Z}^{(m)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^{(m)}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{M}. \quad (5.45)$$

Электромагнитные потенциалы выражаются формулами

$$\varphi = 0, \quad \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}. \quad (5.46)$$

**Пример 5.7. Принцип взаимности.** Два независимых источника излучения характеризуются распределениями токов  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$  и создают монохроматические поля одинаковой частоты  $\omega$ . Показать, что токи и напряженности полей связаны соотношением

$$\int \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV = \int \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dV, \quad (5.47)$$

где интегрирование производится по всему пространству.

**Решение.** В силу принципа суперпозиции поле каждого из источников удовлетворяет своей системе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1 - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}_1, & \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_2 - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}_2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_1, & \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_2. \end{aligned}$$

Проведя простые преобразования, подобных тем, которые производились при решении примера 2.15, и используя теорему Остроградского–Гаусса, получим

$$\int \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV = \int \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dV + \frac{c}{4\pi} \oint_{S \rightarrow \infty} (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{E}_2 - \mathbf{H}_2 \times \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{S}.$$

На бесконечно удаленной поверхности выражение, стоящее под знаком интеграла, обращается в нуль в силу соотношений (5.18), так как векторы  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  от источников, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, совпадают. Это приводит к (5.47). ■

Путем несложных вычислений нетрудно показать, что для электрического диполя, колеблющегося с частотой  $\omega$   $\int \mathbf{j} dV = i\omega \mathbf{p}$ , поэтому для двух электрических диполей малых размеров соотношение (5.47) принимает вид

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1. \quad (5.48)$$

Если дипольные излучатели представляют собой квазилинейные проводники, длины которых малы по сравнению с длиной волны излучения, то путем замены  $\mathbf{j} dV \rightarrow J dl$  получим из (5.47)

$$J_1 U_2(1) = J_2 U_1(2), \quad (5.49)$$

где  $U_i(k) = \int \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}_i$  — разности потенциалов, создаваемые источниками  $i$  на концах проводников  $k$ ,  $J_i$  — силы токов в излучателях. Равенство (5.49) не зависит от того, в каком режиме — активном (как передатчик) или пассивном (как приемник) работает данный диполь. Меняются только силы токов, угловые диаграммы направленности в обоих режимах одни и те же.

Это свойство, как оказывается, сохраняется и для произвольных антенных систем. Диаграммы направленности любой антенны при работе на прием и передачу совпадают.

Рекомендуемая литература: [Медведев (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Пановский и Филипс (1963)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Алексеев (1977)], [Джексон (1975)], [Стрэттон (1948)].

## Задачи

**5.16•.** Вычислить электромагнитные потенциалы и напряженности поля на расстояниях, удовлетворяющих условию  $l \ll r \ll \lambda$ . Учесть электрические дипольный, квадрупольный и магнитный дипольный члены.

**5.17•.** Для электрического дипольного излучателя вычислить в волновой зоне электрическое поле по формуле  $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$  и показать, что его можно записать в виде  $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{H}$  дается формулой (5.28).

**5.18.** Вычислить напряженности поля точечного электрического дипольного осциллятора с моментом  $\mathbf{p} = p_0 \cos \omega t$  на расстояниях, удовлетворяющих условию  $l \ll r$  при любом соотношении между  $r$  и  $\lambda$ .

**5.19.** Найти уравнения силовых линий электрического и магнитного полей электрического осциллятора предыдущей задачи. Проследить за качественным изменением картины поля в зоне, прилегающей к осциллятору, и в волновой зоне.

**5.20.** Найти выражение для потери момента импульса в единицу времени  $-d\mathbf{L}/dt$  системой, излучающей как электрический диполь.

УКАЗАНИЕ. Можно использовать результаты задачи (4.143) (формулы (6), (7)).

**5.21\*.** Найти электромагнитное поле  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  заряда  $e$ , движущегося равномерно по окружности радиуса  $a$ . Движение нерелятивистское, угловая скорость  $\omega$ . Расстояние до точки наблюдения  $r \gg a$ . Найти средние по времени угловое распределение  $d\bar{I}/d\Omega$  и полную интенсивность  $\bar{I}$  излучения, а также исследовать его поляризацию.

**5.22.** Две одинаковые металлические пластины радиуса  $R$  находятся на взаимном расстоянии  $h \ll R$  и образуют обкладки плоского конденсатора. Разность потенциалов на обкладках изменяется по закону  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ , причем  $R \ll 2\pi c/\omega$ . Вычислить среднюю по времени интенсивность излучения.

**5.23.** При переходе электрона в атоме водорода из состояния  $2p$  в  $1s$  эффективная плотность электронного заряда изменяется по закону

$$\rho(r, \vartheta, \alpha, t) = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{3}a_B^4} r e^{-3r/2a_B} Y_{00} Y_{10}(\vartheta, \alpha) e^{-i\omega_0 t},$$

где  $a_B = \hbar^2/m_e e^2$  — боровский радиус,  $\omega_0 = 3e^2/8\hbar a_B$  — частота перехода между электронными состояниями,  $Y_{lm}$  — сферические функции Лежандра. Вычислить в электрическом дипольном приближении среднюю по времени

интенсивность излучения. Сравнить полученный результат с результатом квантового расчета (см. раздел 6.2, задача 6.49).

**5.24.** Плоский квадруполь образован четырьмя точечными зарядами  $\pm q$ , расположенными в вершинах квадрата со стороной  $a$  и вращается со скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр квадрата перпендикулярно его плоскости. Вычислить угловое распределение интенсивности излучения, усредненного по времени, и полную интенсивность при условии  $a \ll 2\pi c/\omega$ .

**5.25.** На покоящуюся частицу с зарядом  $e$  и массой  $m$  в момент  $t=0$  начинает действовать электрическое поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ , где амплитуда  $\mathbf{E}_0$  и  $\alpha$  — постоянные. Найти спектральную плотность излучения  $dI_\omega/d\omega$ .

**5.26.** Дипольные моменты некоторой ограниченной системы зарядов изменяются со временем по закону  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-t^2/\tau^2}$ ,  $\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0 e^{-t^2/\tau^2}$ , где  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{m}_0$ ,  $\tau$  — постоянные величины. Вычислить спектральную плотность излучения  $dI_\omega/d\omega$  в дипольном приближении (указать критерий применимости приближения).

**5.27.** В прямоугольной проволочной рамке размером  $a \times b$  течет ток  $J(t) = J_0 \cos \omega t$ , причем  $a, b \ll 2\pi c/\omega$ . Вычислить среднюю по времени интенсивность излучения.

**5.28.** В замкнутой проволочной петле, охватывающей площадь  $S$ , на промежутке времени  $-\infty < t < \infty$  течет переменный ток  $J(t) = J_0 \tau t / (\tau^2 + t^2)$ ,  $\tau$ ,  $J_0$  — постоянные. Вычислить в дипольном приближении спектральную плотность излучения. Указать критерий применимости приближения.

**5.29.** Частица имеет внутренние магнитный  $\mathbf{m}$  и механический  $\mathbf{s}$  моменты, связанные соотношением  $\mathbf{m} = \eta \mathbf{s}$ . Она влетает в однородное магнитное поле  $\mathbf{H}$ , причем угол между  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{H}$  равен  $\beta$ . Вычислить среднюю по времени интенсивность излучения, вызванную прецессией магнитного момента.

**5.30.** Заряд  $q$  и масса  $m$  распределены равномерно по объему шара с радиусом  $R$ . Шар вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своего диаметра, составляющего угол  $\beta$  с внешним однородным магнитным полем  $\mathbf{H}$ . Вычислить коэффициент пропорциональности между магнитным и механическими моментами шара и среднюю по времени интенсивность излучения, вызванную прецессией магнитного момента.

**5.31.** Исследовать влияние интерференции на излучение электромагнитных волн системой зарядов в следующем примере: два одинаковых

электрических заряда  $e$  движутся равномерно с нерелятивистской скоростью и с частотой  $\omega$  по круговой орбите радиуса  $a$ , оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Найти поляризацию, угловое распределение  $\frac{dI}{d\Omega}$  и интенсивность  $\bar{I}$  излучения. Как изменится интенсивность излучения, если убрать один из зарядов (ср. с результатом задачи 5.21).

**5.32.** Насколько расположение зарядов в предыдущей задаче должно отличаться от диаметрального, чтобы интенсивности электрического дипольного и квадрупольного излучений были равны?

**5.33.** Колебания двух электрических дипольных осцилляторов имеют одинаковую частоту  $\omega$ , но сдвинуты по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ . Амплитуды дипольных моментов равны по величине  $p$  и направлены под углом  $\varphi$  друг к другу. Расстояние между осцилляторами мало по сравнению с длиной волны. Найти поле  $\mathbf{H}$  в волновой зоне, угловое распределение  $\frac{dI}{d\Omega}$  и полную интенсивность  $\bar{I}$  излучения.

**5.34.** Исследовать состояние поляризации поля излучения системы осцилляторов, рассмотренных в предыдущей задаче, используя методику, изложенную в разделе 2.3 (задачи 2.130, 2.131).

**5.35\*.** Найти среднюю по времени плотность  $\bar{\gamma}$  потока энергии на больших расстояниях от заряда, рассмотренного в задаче 5.21, учитывая члены порядка  $\frac{1}{r^3}$ . Найти вращательный момент  $N$ , приложенный к полностью поглощающему сферическому экрану большого радиуса, около центра которого движется этот заряд.

**5.36.** Электрический и магнитный диполи взаимно перпендикулярны, колеблются с частотой  $\omega_0$  и находятся в одном месте пространства. Найти угловое распределение  $\frac{dI}{d\Omega}$  и полную интенсивность  $\bar{I}$  излучения, усредненные по времени.

**5.37\*.** При выполнении условия  $l \ll \lambda$  вычислить векторный потенциал излучающей системы в волновой зоне с учетом членов порядка  $(l/\lambda)^2$ . Вычислить также интенсивность излучения в предположении  $\ddot{\mathbf{p}} \neq 0$ ,  $\ddot{\mathbf{m}} \neq 0$ ,  $\ddot{Q}_{\alpha\beta} \neq 0$ .

**5.38\*.** Частица с зарядом  $e$  колеблется вдоль оси  $Oz$  по закону  $z(t) = a \sin \omega t$ . Вычислить интенсивности  $dI_m/d\Omega$  излучения на кратных частотах  $\omega_m = m\omega$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , не предполагая отношение  $a/\lambda$  малым.



**5.39.** Вычислить угловое распределение  $dI/d\Omega$  полного излучения со всеми частотами осциллятора предыдущей задачи. Вычислить также суммарную по всем направлениям интенсивность излучения  $I$ .

УКАЗАНИЕ. Использовать соотношение из теории функций Бесселя:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 J_m^2(mx) = \frac{x^2(4+x^2)}{16(1-x^2)^{7/2}}.$$

**5.40\*** Простейшая модель излучения нейтронных звезд (пульсаров) — это модель наклонного ротатора: шар, имеющий магнитный момент  $m$ , вращается в вакууме с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, составляющей угол  $\varphi$  с направлением  $m$ .

1. Вычислить угловое распределение  $\overline{dI/d\Omega}$  и полную интенсивность  $\bar{I}$  излучения, усредненные по времени.

2. Оценить численно по порядку величины магнитный момент пульсара, взяв из наблюдений характерное значение магнитного поля на поверхности нейтронных звезд  $H_0 \approx 2 \times 10^{12}$  Э и из теории радиус звезды  $R \approx 10$  км.

3. Оценить численно интенсивность излучения пульсара  $\bar{I}$  и сравнить его со светимостью Солнца  $L_{\odot} \approx 4 \times 10^{33}$  эрг/с, взяв из наблюдений для пульсара в Крабовидной туманности период вращения  $T \approx 0,033$  с.

4. Сравнить полученную выше интенсивность излучения пульсара со скоростью уменьшения энергии вращения звезды, которую следует оценить на основе наблюдательных данных об увеличении периода вращения пульсара в Крабовидной туманности  $\dot{T}/T \approx 1,3 \times 10^{-11}$  с $^{-1}$ .

**5.41.** Равномерно заряженная по объему капля пульсирует с неизменной плотностью. Поверхность капли при этом описывается уравнением

$$R(\vartheta) = R_0[1 + aP_2(\cos \vartheta) \cos \omega t],$$

где  $a \ll 1$ . Заряд капли  $q$ . Найти угловое распределение  $\overline{dI/d\Omega}$  и полную интенсивность  $\bar{I}$  излучения, усредненные по времени.

**5.42.** Электрический заряд  $q$  распределен сферически симметричным образом в ограниченной области и совершает радиальные колебания. Найти электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  вне распределения зарядов.

**5.43.** Найти в векторной форме выражения для напряженностей электромагнитных полей электрического  $\mathbf{p}$  и магнитного  $\mathbf{m}$  дипольных осцилляторов на расстояниях от них, больших по сравнению с их размерами.

УКАЗАНИЕ. При дифференцировании по  $\mathbf{r}$  учитывать, что дипольные моменты должны быть взяты в ретардированный момент  $t' = t - r/c$  и, следовательно, зависят от  $\mathbf{r}$ .

**5.44\***. Центры двух электрических дипольных осцилляторов с частотой  $\omega$  и одинаковыми амплитудами  $\mathbf{p}_0 \parallel Oz$  находятся на оси  $Oz$ , на равных расстояниях от начала координат и на расстоянии  $\lambda/4$  друг от друга. Колебания осцилляторов сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Найти угловое распределение излучения  $dI/d\Omega$ .

**5.45.** Показать, что полный электрический дипольный момент ограниченной системы зарядов и токов равен интегралу по объему от вектора электрической поляризации, введенного посредством равенств (5.41).

**5.46.** Показать, что полный магнитный дипольный момент ограниченной системы зарядов и токов равен интегралу по объему от вектора магнитной поляризации, введенного посредством равенств (5.44).

**5.47.** Показать, что напряженности поля выражаются через векторы Герца  $\mathbf{Z}^{(e)}$ ,  $\mathbf{Z}^{(m)}$  следующим образом:

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{Z}^{(e)} - \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^{(m)}}{\partial t} - 4\pi \mathbf{P};$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^{(e)}}{\partial t} + \text{rot rot } \mathbf{Z}^{(m)} - 4\pi \mathbf{M}.$$

**5.48.** Пусть два независимых ограниченных монохроматических источника одинаковой частоты создают поля  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$ . Показать, что для любой замкнутой поверхности  $S$ , внутри которой расположены эти источники, выполняется соотношение

$$\int_S [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] \cdot d\mathbf{S} = \int_S [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1] \cdot d\mathbf{S}.$$

**5.49.** Показать, что для электрических дипольных монохроматических излучателей соотношение взаимности (5.47) принимает вид  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1$ .

**5.50.** Найти выражения электрических дипольного  $\mathbf{Z}_p$  и квадрупольного  $\mathbf{Z}_Q$ , а также магнитного дипольного  $\mathbf{Z}_m$  членов разложения электрического вектора Герца, справедливые при произвольной зависимости токов и зарядов от времени. Указанные величины должны быть применимы на расстояниях  $r \gg a$ ,  $\lambda \gg a$  (выполнение условия  $r \gg \lambda$  не обязательно). Здесь  $a$  — размер системы, верхний индекс  $(e)$  у вектора Герца опущен.

**5.51.** Моменты двух одинаковых электрических диполей направлены по одной прямой и осциллируют в противофазе с частотой  $\omega$  (амплитуда  $\mathbf{p}_0$ ). Расстояние между центрами  $a \ll \lambda$ . Найти электромагнитное поле

на расстояниях  $r \gg a$ . Найти угловое распределение излучения  $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$  и его полную интенсивность  $\bar{I}$ .

**5.52\***. В линейной антенне длиной  $l$  возбуждена стоячая волна тока  $\mathcal{I}$  с амплитудой  $\mathcal{I}_0$ , частотой  $\omega$  и узлами на концах антенны. Число полу-волн тока, укладываемых на длине антенны, равно  $m$ . Найти угловое распределение излучения  $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ .

**5.53.** Найти полное излучение  $\bar{I}$  и сопротивление излучения  $R = \frac{2\bar{I}}{\mathcal{I}_0^2}$  антенны, рассмотренной в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. Результат выражается через интегральный косинус

$$\text{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt,$$

где  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера.

**5.54.** В линейной антенне длиной  $l$  распространяется бегущая волна<sup>1</sup> тока  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{i(k\xi - \omega t)}$ , где  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $\xi$  — координата точки на антенне. Найти угловое распределение  $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$  и полную интенсивность  $\bar{I}$  излучения.

**5.55\***. В круглой проволочной петле радиуса  $a$  возбуждена стоячая волна тока вида  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \sin na' e^{-i\omega t}$ . Найти электромагнитное поле  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  в волновой зоне.

**5.56.** В линейной антенне (см. задачу 5.52) течет затухающий ток

$$J = J_0 \sin[k_m(\xi + l/2)] e^{-\gamma t} \cos \omega_m t \Theta(t), \quad -l/2 \leq \xi \leq l/2,$$

где  $\omega_m = ck_m = m\pi c/l$ ,  $\Theta$  — ступенчатая функция,  $m = 1, 2, \dots$  — число полу-волн, укладываемых на длине антенны. Вычислить спектральную плотность излучения  $d^2 I_\omega / d\omega d\Omega$  в плоскости симметрии, перпендикулярной оси антенны.

**5.57.** В плоскости  $xz$  расположено  $N$  антенн, параллельных оси  $Ox$ , каждая длиной  $l$ . Расстояние между соседними антеннами  $a$  задано. В каждой антенне течет ток  $J = J_0 \sin k_m z \cos \omega_m t$ . Вычислить угловое распределение излучения  $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ , усредненного по времени.

<sup>1</sup>Нагрузки на концах антенны должны быть подобраны таким образом, чтобы отраженной волны не возникало.

**5.58.** Решить предыдущую задачу для случая, когда антенны расположены очень густо и создают тонкую пластину шириной  $2b$  и длиной  $l$  с поверхностной плотностью тока  $i_0$ .

**5.59.** Отражение системы  $B$  зарядов  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  в плоскости  $z = 0$  состоит в том, что а) каждая точка  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  переходит в положение  $\mathbf{r}' = (x, y, -z)$ ; б) плотность заряда меняет знак:  $\rho(\mathbf{r}, t) = -\rho'(\mathbf{r}', t)$ , где  $\rho'$  — плотность заряда в отраженной системе  $B'$ . Выяснить, как при отражении преобразуются плотность тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ , электрические  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{Q}$  и магнитный  $\mathbf{m}$  моменты системы, а также электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .

**5.60.** Доказать, что электромагнитное поле произвольной системы  $B$  зарядов вблизи идеально проводящей плоскости может быть получено как суперпозиция полей системы  $B$  и системы  $B'$ , отраженной в этой плоскости (см. предыдущую задачу). Рассмотреть, в частности, излучение электрического дипольного осциллятора с моментом  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 f(t)$  ( $|\mathbf{p}_0| = 1$ ,  $f(t)$  — произвольная функция), находящегося на расстоянии  $b \ll \lambda$  от такой плоскости и образующего с ней угол  $\varphi_0 = \text{const}$  (ограничиться электрическим дипольным приближением).

УКАЗАНИЕ. На идеально проводящей плоскости должны выполняться граничные условия

$$H_n = 0 \quad \text{и} \quad E_\tau = 0.$$

**5.61.** Электрический диполь с амплитудой момента  $\mathbf{p}_0$  и частотой  $\omega$  находится на расстоянии  $\frac{a}{2}$  от идеально проводящей плоскости ( $a \ll \lambda$ , вектор  $\mathbf{p}_0$  параллелен плоскости). Найти электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  на расстояниях  $r \gg \lambda$  и угловое распределение излучения  $\frac{dI}{d\Omega}$ .

**5.62.** а) Показать, что если функция  $u(r, \vartheta, \alpha)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$ , то потенциал Герца для монохроматического поля электрического типа ( $H_r = 0$ ) с частотой  $\omega = kc$  в свободном от источников поля пространстве может быть представлен в форме:  $\mathbf{Z} = ur + \text{grad } \chi$ ,  $\chi = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial r}(ru)$ ; б) найти выражения составляющих напряженности электромагнитного поля  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  по осям сферической системы координат через  $u(r, \vartheta, \alpha)$  (функция  $u$  называется потенциалом Дебая).

УКАЗАНИЕ. Доказывая, что  $\Delta \mathbf{Z} + k^2 \mathbf{Z} = 0$ , обратить внимание на то, что существует соотношение  $\Delta \chi + k^2 \chi + 2u = 0$ .

**5.63.** Показать, что поле точечного электрического дипольного осциллятора с моментом  $\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$ , находящегося в точке  $\mathbf{r}_0$  ( $\mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{p}_0$ ), может

быть описано потенциалом Дебая (см. задачу 5.62) вида  $u = \frac{p_0}{r_0} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}$ , где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ .

**5.64.** Точечный электрический дипольный осциллятор с моментом  $p_0 e^{-i\omega t}$  находится на расстоянии  $b$  от центра идеально проводящего шара радиуса  $a$ . Момент направлен вдоль линии, соединяющей диполь с центром шара. Воспользовавшись потенциалом Дебая  $u$  (см. задачу 5.62), найти электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ . Найти угловое распределение излучения  $\frac{dI}{d\Omega}$ .

### 5.3. Излучение релятивистских частиц

**Электромагнитное поле движущейся заряженной частицы.**

**Пример 5.8.** Вычислить электромагнитные потенциалы частицы, движущейся произвольным образом, на основе общих выражений для запаздывающих потенциалов (5.10), (5.11), представив плотности заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$  через дельта-функцию.

**Решение.** Пусть заряд частицы  $e$ , ее радиус-вектор  $\mathbf{s}(t)$ , скорость  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t)$  и ускорение  $\dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{s}}(t)$  известны. Плотности заряда и тока выражаются через них в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)). \quad (5.50)$$

Для вычисления потенциалов удобно использовать общую формулу (5.4) с запаздывающей функцией Грина (5.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{c} \int G^R(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t')) dV' dt' = \\ &= \frac{e}{c} \int \frac{\mathbf{v}(t')}{R(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) dt', \end{aligned} \quad (5.51)$$

где  $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{s}(t')$ . Интегрирование по объему произведено с помощью  $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t'))$ . Последующее интегрирование по времени выполняем с использованием формулы (1.209), где в данном случае  $g(t') = t' + \frac{R(t')}{c} - t$ ,  $dg(t')/dt' = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}(t')/R(t')$ . Используя эти равенства, получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)} \Big|_{t'}. \quad (5.52)$$

Таким же путем находим скалярный потенциал:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)} \Big|_v. \quad (5.53)$$

Значение  $t'$ , при котором берутся правые части (5.52) и (5.53), должно определяться из условия  $g(t') = 0$ , т. е. из уравнения

$$c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|, \quad (5.54)$$

где  $s(t')$  — координаты частицы,  $\mathbf{r}$  — координаты точки наблюдения. Разность  $t - t' = |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|/c$  представляет собой время распространения электромагнитного возмущения от частицы до точки наблюдения поля. ■

**Пример 5.9.** Вычислить напряженности электромагнитного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , которые создает произвольным образом движущаяся заряженная частица.

**Решение.** Вычисляем  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ , пользуясь представлением (5.51). Оператор  $\nabla$  действует на координаты  $\mathbf{r}$ , которые входят только в  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$  под интегралом по  $dt'$ . Выполним дифференцирование под интегралом, пользуясь формулой

$$\nabla f(R) = \frac{\partial f}{\partial R} \nabla R = \frac{\partial f}{\partial R} \mathbf{n}.$$

Получим

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \left\{ \frac{1}{R^2} \delta(t' + R/c - t) - \frac{1}{cR} \delta'(t' + R/c - t) \right\} dt'.$$

Далее переходим к интегрированию по  $dg = \left(\frac{dg}{dt'}\right) dt' = \left(1 - \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}\right) dt'$  и, пользуясь правилами интегрирования выражений с дельта-функциями (1.209), (1.210), находим

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{cR^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)} + \frac{e}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)} \frac{d}{dt'} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)}, \quad (5.55)$$

где правая часть берется при значении  $t'$ , определяемом уравнением (5.54). При вычислении производной по  $t'$  имеем

$$\frac{d\mathbf{v}(t')}{dt'} = \dot{\mathbf{v}}(t'), \quad \frac{dR(t')}{dt'} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{n}(t')}{dt'} = -\frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{R} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})}{R}.$$

Выполнив дифференцирование в (5.55) с помощью этих формул, после приведения подобных членов получим окончательное выражение для магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{e(1 - v^2/c^2)(\mathbf{v} \times \mathbf{n})}{cR^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} + \frac{e\{c\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times [(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}) \times \mathbf{n}]\}}{c^2R(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3}. \quad (5.56)$$

Вычисление электрического поля  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/c\partial t$  производится аналогичным образом: представляем скалярный потенциал в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{e}{R(t')} \delta(t' + R(t')/c - t) dt' \quad (5.57)$$

и дифференцируем величины (5.51), (5.57) под знаком интеграла. Это позволяет получить электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2/c^2)(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} + \frac{e\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{c^2R(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3}. \quad (5.58)$$

В формулах для напряженностей поля (5.56), (5.58) все величины, входящие в правые части, берутся в момент  $t'$ , который определяется из уравнения (5.54). ■

Сравнение напряженностей (5.56) и (5.58) показывает, что они связаны соотношением

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (5.59)$$

т. е. вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен  $\mathbf{E}$  и линии, которая соединяет заряд в момент  $t'$  с точкой наблюдения (но вектор  $\mathbf{E}$  имеет проекцию на эту линию). Каждая из напряженностей состоит из двух слагаемых: первое изменяется в пространстве как  $R^{-2}$  и не содержит ускорения заряда, а второе пропорционально ускорению  $\dot{\mathbf{v}}$  и убывает как  $R^{-1}$ . Слагаемые первого типа образуют квазистационарное поле, так как оно присуще и равномерно движущемуся заряду, а закон убывания с расстоянием — такой же, как у статического поля. Слагаемые второго типа описывают волновое поле излучения, поскольку оно медленно спадает с расстоянием и создает конечный поток электромагнитной энергии через замкнутую поверхность большого радиуса, окружающую частицу. Поле излучения возникает только при ускоренном движении заряженной частицы ( $\dot{\mathbf{v}} \neq 0$ ).

**Пример 5.10.** Выразить через скорость и ускорение поток энергии  $dI/d\Omega$  излучения в единичный телесный угол от частицы, движущейся произвольным образом. Произвести анализ углового распределения, рассмотрев подробно три случая: а) излучение нерелятивистской ( $v \ll c$ )

частицы; б) излучение ультрарелятивистской ( $\gamma = \mathcal{E}/mc^2 \gg 1$ ) частицы при  $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$ ; в) то же при  $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ . В последних двух случаях представить интенсивность излучения в направлении, составляющем малый угол  $\theta$  со скоростью частицы, в упрощенной форме, произведя разложение по  $\theta$ . Интерпретировать полученные результаты на основе закона преобразования функции распределения (см. задачу 3.34).

**Решение.** Поток энергии в единичный телесный угол вычисляется через напряженности поля в волновой зоне по формуле (5.19). Используя вместо  $\mathbf{H}^2$  равную ей величину  $\mathbf{E}^2$ , получим с помощью (5.58)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]]^2}{4\pi c^3(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^6}, \quad (5.60)$$

где все величины в правой части берутся в момент времени  $t - R/c$ .

Поток энергии в единицу телесного угла (5.60) зависит от  $R$  только через временной аргумент. Это означает, что поток энергии через площадки  $R^2 d\Omega$  внутри выбранного телесного угла  $d\Omega$ , находящиеся на разных расстояниях от частицы, в соответствующие моменты времени (с учетом конечной скорости переноса энергии) будет одинаковым — электромагнитные возмущения распространяются от генерировавшей их заряженной частицы на бесконечность. Они образуют поле излучения, которое, возникнув, отрывается от своего источника.

Квазистационарное поле (т.е. слагаемые в (5.56), (5.58), не содержащие  $\dot{\mathbf{v}}$  и пропорциональные  $R^{-2}$ ) таким свойством не обладает. С ростом  $R$  поток энергии квазистационарного поля внутри данного телесного угла убывает как  $R^{-2}$ . Следовательно, квазистационарное поле остается все время связанным с частицей и не создает потока на бесконечности.

а) Нерелятивистская частица,  $v \ll c$ . Пренебрегая членами порядка  $v/c$ , получим из (5.60)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2] = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta, \quad (5.61)$$

где  $\theta$  — угол между ускорением в момент  $t'$  и направлением наблюдения. Излучение распределено симметрично относительно направления  $\dot{\mathbf{v}}$  и максимально в направлении, перпендикулярном  $\dot{\mathbf{v}}$ . Интегрирование (5.61) по телесному углу дает формулу Лармора (5.32).

б) Ультрарелятивистская частица,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$ , ускорение направлено вдоль скорости:  $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$ . Обозначив через  $\theta$  угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$ , получаем из (5.60)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 [1 - (v/c) \cos \theta]^6}. \quad (5.62)$$



Высокая степень знаменателя, весьма малого при  $\cos\theta \approx 1$ , приводит к сильной анизотропии излучения. В наиболее интересной области малых углов произведем разложение  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ . Учитывая, что  $v \approx c$ , получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{16e^2\dot{v}^2\gamma^{10}(\gamma\theta)^2}{\pi c^3(1 + \gamma^2\theta^2)^6}. \quad (5.63)$$

Излучение сосредоточено в конусе с углом раствора порядка нескольких  $1/\gamma$ . Это свойство излучения ультрарелятивистских частиц объясняется релятивистским преобразованием углов и уже было отмечено в разделе 3.1.

в) Ультрарелятивистская частица, ускорение перпендикулярно скорости,  $\dot{v} \perp v$ . Общая формула (5.60) дает

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{1}{[1 - (v/c)\cos\theta]^4} - \frac{(1 - v^2/c^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{[1 - (v/c)\cos\theta]^6} \right\}. \quad (5.64)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между плоскостями  $(v, n)$  и  $(v, \dot{v})$ . Распределение (5.64), как и (5.62), сконцентрировано в направлении вперед. При малых  $\theta$  оно имеет вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4e^2\dot{v}^2\gamma^8}{\pi c^3(1 + \gamma^2\theta^2)^4} \left[ 1 - \frac{4\gamma^2\theta^2\cos^2\varphi}{(1 + \gamma^2\theta^2)^2} \right]. \quad (5.65)$$

■

**Потеря энергии и импульса заряженной частицей.** Величина  $\frac{dI}{d\Omega}$  представляет собой поток электромагнитной энергии внутри единичного телесного угла, который может измерить неподвижный в лабораторной системе наблюдатель. Она отличается от скорости потерь энергии частицей за счет излучения в единичный телесный угол  $d^2\mathcal{E}/dt' d\Omega$ , где  $dt'$  — интервал «ретардированного» времени, в течение которого некоторая порция излучения была испущена. Их различие вызвано тем, что интервалы  $dt$  и  $dt'$  различны, хотя оба определены в лабораторной системе. Они связаны соотношением, вытекающим из (5.54). Дифференцируя это равенство, получим

$$dt = \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \right) dt'. \quad (5.66)$$

Приравнивая энергию, испущенную частицей за время  $dt'$ , и энергию, прошедшую мимо наблюдателя за время  $dt$ , будем иметь с помощью (5.66)

$$-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} = \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \right) \frac{dI}{d\Omega}. \quad (5.67)$$

Величина  $dI/d\Omega$  согласно (5.60) зависит от аргумента  $t'$ . Это соотношение устанавливает связь между потерей энергии частицей и интенсивностью излучения, регистрируемой наблюдателем.

Проинтегрировав (5.67) по всему телесному углу, получим полную (или суммарную по всем направлениям) потерю энергии излучающей частицей:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \int \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \right) \frac{dI}{d\Omega} d\Omega. \quad (5.68)$$

Она не совпадает с полной интенсивностью

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega. \quad (5.69)$$

Величина  $-d\mathcal{E}/dt'$  является более удобной характеристикой излучения релятивистской частицы, чем полная интенсивность  $I$ , так как она релятивистски инвариантна. Интенсивность не является инвариантной величиной.

**Пример 5.11.** Доказать релятивистскую инвариантность величины  $-d\mathcal{E}/dt'$ . Выразить скорость потери импульса  $-d\mathbf{p}/dt'$  излучающей частицей через суммарную по всем направлениям скорость потери энергии  $-d\mathcal{E}/dt'$ .

**Решение.** Сравним скорость потери энергии в мгновенно сопутствующей системе  $S_0$ , в которой частица в данный момент покоится, и в лабораторной системе  $S$ , в которой скорость частицы  $\mathbf{v}$ . В системе  $S_0$  интенсивность излучения (совпадающая со скоростью потерь энергии  $-d\mathcal{E}_0/dt'_0$ ) дается формулой (5.61). Поскольку она — четная функция угла, то потери импульса частицей в этой системе не происходит,  $d\mathbf{p}_0 = 0$ . Потеря же энергии за время  $dt'_0 = d\tau$  равна  $-d\mathcal{E}_0$ .

Потерю энергии частицей в лабораторной системе вычислим, пользуясь преобразованием Лоренца (3.9) для 4-вектора  $p^k = (d\mathcal{E}/c, d\mathbf{p})$ :  $-d\mathcal{E} = -d\mathcal{E}_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Она происходит за время  $dt' = d\tau(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Отсюда для скорости потерь энергии находим

$$-d\mathcal{E}/dt' = -d\mathcal{E}_0/d\tau, \quad (5.70)$$

что и доказывает релятивистскую инвариантность этой величины.

Потерю импульса вычисляем опять с помощью преобразования Лоренца:

$$d\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} d\mathcal{E}_0}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отнесем эту потерю к «времени частицы»  $dt'$  в лабораторной системе:

$$-\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left( -\frac{d\mathcal{E}_0}{\sqrt{1-v^2/c^2} dt'} \right).$$

Но  $\sqrt{1-v^2/c^2} dt' = d\tau$  — дифференциал собственного времени частицы, поэтому с учетом (5.70) получаем простую связь между потерями энергии и импульса в одной и той же — лабораторной — системе отсчета:

$$-\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left( -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} \right). \quad (5.71)$$

Эта формула справедлива при любой скорости частицы. ■

**Пример 5.12.** *Выразить скорости потерь энергии и импульса релятивистской частицей в единицу собственного времени в ковариантной форме через четырехмерные скорость и ускорение, а также через соответствующие трехмерные величины.*

**Решение.** Используем определение 4-ускорения (3.23) и выражаем инвариантную величину  $d\mathcal{E}/dt'$  через релятивистский инвариант — квадрат 4-ускорения:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{2e^2}{3c^3} w^k w_k. \quad (5.72)$$

При  $v \rightarrow 0$  (5.72) переходит в формулу Лармора (5.32). Объединяя (5.71) с (5.72) и вводя интервал собственного времени  $d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2} dt'$  и 4-скорость (3.23), записываем обе указанные формулы в виде равенства 4-векторов:

$$-\frac{d\mathbf{p}^i}{d\tau} = -\frac{2e^2}{3c^5} w^k w_k u^i, \quad (5.73)$$

где  $\mathbf{p}^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$  — четырехмерный вектор энергии-импульса релятивистской частицы.

4-ускорение можно выразить через трехмерные величины:

$$w^k = \frac{du^k}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt'} \gamma(c, \mathbf{v}) = \left( \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c}, \gamma^2 \dot{\mathbf{v}} + \gamma^4 \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2} \right).$$

Записав квадрат 4-ускорения,

$$w^k w_k = -\gamma^6 \left[ \dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right],$$

находим релятивистское обобщение формулы Лармора (5.72) через трехмерные величины:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{2e^2\gamma^6}{3c^2} \left[ \dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right]. \quad (5.74)$$

■

### Спектральное распределение излучения релятивистских частиц.

Выразим спектральную плотность излучения в заданном направлении (5.22) через скорость и радиус-вектор релятивистской частицы. В волновой зоне имеем  $R(\tau) \approx r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}(\tau)$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ,  $\mathbf{s}(\tau)$  — радиус-вектор частицы. С помощью (5.12'), проводя сначала интегрирование по  $dV'$ , получим в волновой зоне

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{e}{c} \frac{\exp(i\mathbf{k}r)}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(\tau) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}(\tau)) d\tau, \quad (5.75)$$

где  $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$  — волновой вектор излучаемой волны. Гармонику Фурье напряженности магнитного поля находим по формуле (5.15):

$$\mathbf{H}_\omega = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\omega = \frac{ie\omega}{c^2} \frac{\exp(i\mathbf{k}r)}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times \mathbf{v}(\tau) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}(\tau)) d\tau. \quad (5.76)$$

Связь (5.18) между напряженностями электрического и магнитного полей в волновой зоне вытекает из уравнений Максвелла. Подставив (5.76) в общее выражение (5.22), получим спектральную плотность излучения в заданном направлении:

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times \mathbf{v}(\tau) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}(\tau)) d\tau \right|^2. \quad (5.77)$$

**Пример 5.13.** Произвести полуколичественный анализ спектрального распределения излучения ультрарелятивистской ( $\gamma \gg 1$ ) частицы. Рассмотреть два предельных случая: а) полный угол отклонения частицы во внешнем поле велик по сравнению с углом излучения  $1/\gamma$ ; б) полный угол отклонения частицы мал или порядка угла излучения  $1/\gamma$ . Оценить для обоих случаев характерные спектральные интервалы излучения.

**Решение.** а) Полный угол отклонения частицы велик по сравнению с углом излучения. Пример такой ситуации — излучение ультррелятивистской частицы в магнитном поле. В данном направлении  $\mathbf{n}$  частица излучает с малого участка траектории, на котором направление скорости изменяется на угол порядка  $1/\gamma$ . Длина этого участка (длина формирования излучения, или когерентная длина)  $l_{coh} \approx \rho/\gamma$ , где  $\rho$  — мгновенный радиус кривизны. За время излучения  $\tau \approx l_{coh}/v \approx \rho/v\gamma$  фаза волны, согласно (5.76), изменится на  $\Delta\varphi = \omega\tau - \mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{s}(\tau)\omega/c$ , где  $\Delta\mathbf{s}(\tau)$  — смещение частицы за время  $\tau$ . Поскольку угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$  не превышает  $1/\gamma$  по порядку величины, то  $\mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{s}(\tau)/c \approx v\tau/c \approx \rho/c\gamma$  и  $\Delta\varphi \approx (\omega\rho/v\gamma)(1 - v/c) \approx \omega\rho/2\gamma^3c$ . Излучаться могут волны только таких частот, для которых  $\Delta\varphi < 1$ ; при  $\Delta\varphi > 1$  волны внутри конуса излучения имеют большие сдвиги фаз и гасят друг друга. Интервал излучаемых частот определяется условием

$$\Delta\omega < \omega_c = \frac{c}{\rho}\gamma^3. \quad (5.78)$$

При  $\omega \gg \omega_c$  интенсивность излучения сильно уменьшается.

Если частица движется в однородном магнитном поле перпендикулярно его напряженности, то, согласно результатам раздела 4.2,  $\rho = = cp/eH \approx \gamma mc^2/eH$ . При этом

$$\omega_c = \frac{eH}{mc}\gamma^2. \quad (5.79)$$

Движение в однородном магнитном поле строго периодически, поэтому спектр состоит из дискретных линий, расстояние между которыми равно частоте вращения релятивистской частицы  $\Omega = ecH/\mathcal{E} = eH/mc\gamma$ . При  $\gamma \gg 1$  спектр становится квазинепрерывным. Максимальное излучение приходится на частоты порядка  $\omega_c$  (см. задачи 5.83, 5.85).

б) Полный угол отклонения частицы за все время ускорения мал или порядка угла излучения. Все излучение происходит в узкий конус и определяется всем участком траектории, на котором изменяется скорость частицы. Такая ситуация возникает, например, при рассеянии ультррелятивистской частицы на малый угол в кулоновском поле ядра.

Пусть внешнее поле существует в области размером  $a$  (это может быть, например, радиус экранировки кулоновского поля). Частица будет испытывать ускорение в течение времени  $\Delta t' \approx a/v \approx a/c$ . Для неподвижного в лабораторной системе наблюдателя этот процесс будет длиться в течение времени

$$\Delta t \approx \frac{\Delta t}{\Delta t'} \Delta t' \approx \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) \frac{a}{c} \approx \frac{a}{\gamma^2 c}.$$

Спектральный интервал оценим с помощью соотношения  $\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1$ :

$$\Delta\omega \approx \omega_c \approx \frac{c}{a} \gamma^2. \quad (5.80)$$

Характерная частота, как и (5.79), пропорциональна квадрату энергии частицы. ■

**Излучение при столкновениях частиц.** Заряженные частицы при столкновениях движутся с ускорением и, вследствие этого, излучают электромагнитные волны (**тормозное излучение**). Закон движения сталкивающихся частиц и излучаемая ими при столкновении энергия определяются видом взаимодействия и прицельным расстоянием  $\rho$  (если потенциальная энергия взаимодействия сталкивающихся частиц зависит только от расстояния между ними). Энергию, излучаемую во всех направлениях при рассеянии потока частиц некоторым рассеивающим центром, удобно характеризовать дифференциальным эффективным излучением

$$\frac{d\kappa}{d\Omega} = 2\pi \int_0^\infty \frac{d\mathcal{E}^{rad}(\rho)}{d\Omega} \rho d\rho \quad (5.81)$$

и полным эффективным излучением

$$\kappa = 2\pi \int_0^\infty \mathcal{E}^{rad}(\rho) \rho d\rho. \quad (5.82)$$

Здесь  $d\mathcal{E}^{rad}(\rho)/d\Omega$  — энергия, излучаемая в направлении  $\mathbf{n}$  в единицу телесного угла при одиночном столкновении с прицельным параметром  $\rho$ , усредненная по азимуту в плоскости, перпендикулярной потоку частиц.

Если главную роль при столкновении играет электрическое дипольное излучение, то (5.81) принимает вид

$$\frac{d\kappa}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c} [A + BP_2(\cos\theta)], \quad (5.83)$$

где  $P_2(\cos\theta)$  — полином Лежандра,  $\theta$  — угол между направлением наблюдения  $\mathbf{n}$  и направлением  $Oz$  потока падающих частиц,

$$A = \frac{2}{3} \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho \int_{-\infty}^\infty \ddot{\mathbf{p}}^2 dt, \quad B = \frac{1}{3} \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho \int_{-\infty}^\infty (\ddot{\mathbf{p}}^2 - 3\ddot{p}_z^2) dt. \quad (5.84)$$

**Пример 5.14.** Вывести формулы (5.83), (5.84) из общего выражения (5.30) для электрического дипольного излучения.

**Решение.** Выбираем ось  $Oz$  координатной системы вдоль пучка частиц и ось  $Ox$  в плоскости, определяемой вектором  $\mathbf{n}$  и осью  $Oz$  (рис. 5.2). Имеем  $\mathbf{n} = e_x \sin \theta + e_z \cos \theta$  и

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}})^2} &= \ddot{\mathbf{p}}^2 - \overline{(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{p}})^2} = \\ &= \ddot{\mathbf{p}}^2 - \overline{\dot{p}_\perp^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta} - \overline{\dot{p}_z \cos^2 \theta} - 2\overline{\dot{p}_\perp \dot{p}_z \cos \phi \sin \theta \cos \theta} = \\ &= \ddot{\mathbf{p}}^2 - \frac{1}{2}\overline{\dot{p}_\perp^2} \sin^2 \theta - \overline{\dot{p}_z^2} \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

где чертой обозначено усреднение по азимутальному углу  $\phi$ . В полученный результат вводим  $\overline{\dot{p}_\perp^2} = \ddot{\mathbf{p}}^2 - \overline{\dot{p}_z^2}$  и  $\cos^2 \theta = (2P_2(\cos \theta) + 1)/3$ . Подставляя преобразованное таким образом выражение  $(\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}})^2$  в (5.30) и интегрируя по прицельным параметрам и по времени, приходим к (5.83), (5.84). ■

**Пример 5.15.** Вывести формулу для спектральной плотности эффективного излучения при рассеянии пучка частиц, испущенного вдоль оси  $Oz$ .

**Решение.** Произведем разложение Фурье

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \mathbf{p}_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

получим с помощью (1.219)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{p}}^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^4 |\mathbf{p}_\omega|^2 d\omega.$$

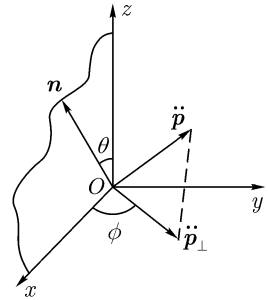


Рис. 5.2

Выполняя аналогичные преобразования интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{p}_z^2(t) dt$  и подставляя эти результаты в (5.83), (5.84), находим

$$\frac{d\kappa}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2 \kappa \omega}{d\omega d\Omega} d\omega,$$

где

$$\frac{d^2 \kappa \omega}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} [A(\omega) + B(\omega) P_2(\cos \theta)] \quad (5.85)$$

– спектральная плотность эффективного излучения,

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3} \int_0^\infty |\mathbf{p}_\omega|^2 2\pi\rho d\rho, \quad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3} \int_0^\infty (|\mathbf{p}_\omega|^2 - 3|p_{z\omega}|^2) 2\pi\rho d\rho. \quad (5.86)$$

■

**Излучение при распадах и превращениях частиц.** Распады частиц и их превращения в другие частицы сопровождаются внезапным (точнее, происходящим за короткое время) исчезновением заряженных частиц, совершавших некоторое заданное движение, или появлением движущихся с некоторыми (часто релятивистскими) скоростями новых частиц. При этом возникает тормозное излучение, которое называют **внутренним** в отличие от излучения, сопровождающего столкновение частицы с внешним объектом. Длительность процесса превращения частиц можно оценить по порядку величины с помощью квантовомеханического соотношения неопределенности энергия-время:

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta\mathcal{E}}, \quad (5.87)$$

где  $\Delta\mathcal{E}$  – характерная энергия данного процесса.

Методами классической электродинамики можно рассчитать спектр внутреннего тормозного излучения в приближении  $\tau \rightarrow 0$ , т. е. для относительно низких частот

$$\omega \ll 2\pi/\tau \quad (5.88)$$

Это ограничение относится к неподвижному в лабораторной системе объекту, в котором происходит превращение частиц. Если объект движется с релятивистской скоростью, нужно произвести преобразование Лоренца интервала времени и частоты, что приведет к условию

$$\omega\tau \ll \frac{2\pi}{1 - (v/c) \cos\theta}, \quad (5.89)$$

где  $\theta$  – угол между направлениями скорости и наблюдения волны.

Еще одно ограничение на частоту накладывают законы сохранения энергии и импульса при испускании фотонов (см. главу 6), которые учитываются в квантовой теории. Они ограничивают частоту некоторым значением  $\omega_{\max}$ . Генерацию квантов с энергиями  $\hbar\omega$  порядка максимальной  $\hbar\omega_{\max}$  нужно рассчитывать методами квантовой механики.



Рекомендуемая литература: [Байер и др. (1973)], [Бредов и др. (1985)], [Джексон (1975)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Соколов и Тернов (1983)], [Пановский и Филипс (1963)], [Гинзбург (1987)], [Алферов и др. (1989)], [Алексеев (1977)], [Тернов и Михайлин (1986)], [Болотовский и др. (1978)], [Медведев (1977)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля].

## Задачи

**5.65.** Показать, что компоненты Фурье потенциалов Лиенара – Вихерта при аperiodическом движении частицы можно представить в виде

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{v}(\tau) \exp(i\omega\tau + i\omega R(\tau)/c)}{R(\tau)} d\tau, \quad (5.90)$$

$$\varphi_\omega(\mathbf{r}) = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega\tau + i\omega R(\tau)/c)}{R(\tau)} d\tau, \quad (5.91)$$

где  $R(\tau) = |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)|$ . Если движение частицы периодически с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$ , то гармоники Фурье с частотой  $n\omega_0$  ( $n$  — целое) выразятся в виде

$$\mathbf{A}_n = \frac{e}{cT} \int_0^T \frac{\mathbf{v}(\tau)}{R(\tau)} \exp[in\omega_0(\tau + R(\tau)/c)] d\tau. \quad (5.92)$$

Скалярный потенциал  $\varphi_n(\mathbf{r})$  отличается от последнего выражения отсутствием множителя  $\mathbf{v}(\tau)/c$ .

УКАЗАНИЕ. Исходить из выражения (5.12') и произвести интегрирование по  $dV'$ .

**5.66\*** Произвести разложение по степеням  $R/c$  в общих формулах для запаздывающих потенциалов (5.10), (5.11) и найти таким путем разложение потенциалов Лиенара – Вихерта по степеням  $1/c$ .

**5.67.** Вычислить потенциалы поля равномерно движущегося точечно-го заряда из потенциалов Лиенара – Вихерта (5.52), (5.53), выразив в последних ретардированное время  $t'$  через время  $t$  наблюдения поля. Вычислить также напряженности поля равномерно движущегося точечного заряда.

**5.68.** Точечный заряд  $e$  движется с малой скоростью  $\mathbf{v}$  и ускорением  $\dot{\mathbf{v}}$  в ограниченной области. Найти приближенные выражения для электромагнитного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  частицы в точках, расстояние  $r$  до которых от частицы

велико по сравнению с размером области движения заряда. Определить положение границы квазистационарной и волновой зон.

**5.69.** Определить угловое распределение  $dI/d\Omega$  излучения заряда, рассмотренного в предыдущей задаче. Найти полное излучение  $I$ .

**5.70.** Найти связь (5.67) между скоростью потерь энергии частицей на единицу телесного угла в данном направлении и интенсивностью излучения геометрическим способом, рассмотрев форму области пространства, в которой локализована электромагнитная энергия, излученная частицей за время  $dt'$ .

**5.71.** Доказать, что если частица совершает периодическое движение, то средняя за период скорость потерь энергии совпадает со средней интенсивностью излучения.

**5.72.** Показать, что если ускорение частицы вызвано действием на нее внешнего электромагнитного поля с напряженностями  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , то суммарную по всем направлениям скорость потерь энергии можно записать в виде

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{2e^2\gamma^2}{3m^2c^2} \left[ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 \right]. \quad (5.93)$$

Проанализировать этот результат, рассмотрев случаи продольного и поперечного (относительно скорости  $\mathbf{v}$ ) ускорения.

**5.77.** Найти мгновенное угловое распределение интенсивности излучения  $\frac{dI}{d\Omega}$  релятивистской частицы, скорость которой в ретардированный момент времени перпендикулярна ее ускорению. Начертить полярную диаграмму для случаев  $v \ll c$  и  $v \sim c$ . Определить направления, в которые не происходит излучения.

**5.78.** Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется со скоростью  $v$  по окружности в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Найти угловое распределение  $\frac{dI}{d\Omega}$  интенсивности излучения, усредненное по периоду обращения частицы в магнитном поле. Какой характер принимает это угловое распределение в ультрарелятивистском случае  $v \sim c$ ?

УКАЗАНИЕ. Использовать результаты предыдущей задачи. Перейти к сферическим координатам с полюсом в центре круговой траектории и полярной осью вдоль  $\mathbf{H}$ . При вычислении интеграла по азимутальному углу воспользоваться формулами из справочников.

**5.79\***. Найти компоненты Фурье поля излучения  $A_n$ ,  $H_n$  заряда  $e$ , движущегося по круговой орбите радиуса  $a$  с релятивистской скоростью  $v$ . Исследовать характер поляризации компонент Фурье.

УКАЗАНИЕ. Использовать формулы (1.145), (1.146), (1.150).

**5.80.** Объяснить наличие высших гармоник в спектре поля заряда, движущегося с постоянной скоростью по круговой орбите (см. предыдущую задачу). Как будут меняться интенсивности этих гармоник, когда  $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0$ ? Какой вид будет иметь поле излучения в этом случае?

**5.81\***. Заряд  $e$  движется по окружности радиуса  $a$  со скоростью  $v = \beta c$ . Найти спектральное разложение интенсивности излучения  $\frac{dI_n}{d\Omega}$  в данном направлении.

Вычислить также суммарное по всем направлениям излучение на отдельных гармониках. При интегрировании по углам использовать интегралы от функций Бесселя

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cot^2 \vartheta J_n^2(n\beta \sin \vartheta) = 2 \int_0^{2n\beta} \frac{J_{2n}(x)}{x} dx - \frac{1}{n\beta} \int_0^{2n\beta} J_{2n}(x) dx,$$

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cot^2 \vartheta J_n'^2(n\beta \sin \vartheta) = \frac{2}{n\beta} J_{2n}'^2(2n\beta) - \frac{2}{\beta^2} \int_0^{2n\beta} \frac{J_{2n}(x)}{x} dx +$$

$$+ \frac{1}{n\beta} \int_0^{2n\beta} J_{2n}(x) dx.$$

**5.82.** Получить угловое распределение полного излучения заряженной частицы, движущейся по круговой орбите в однородном магнитном поле, путем суммирования излучений на отдельных гармониках, найденных в предыдущей задаче. Подробно исследовать ультрарелятивистский случай ( $\gamma = \mathcal{E}/mc^2 \gg 1$ ), записать упрощенную формулу для углового распределения излучения.

УКАЗАНИЕ. Использовать формулу из теории функций Бесселя

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 J_m'^2(mx) = \frac{4 + 3x^2}{16(1 - x^2)^{5/2}}$$

и аналогичную формулу из условия задачи 5.39.

**5.83\*\*.** Вычислить спектральную **мощность** излучения в заданном направлении  $\mathbf{n}$ , создаваемую ультррелятивистской заряженной частицей при движении по окружности в однородном магнитном поле. Ввиду присутствия в спектре огромного числа  $N \sim \gamma^3 \gg 1$  близких гармоник считать частоту  $\omega$  непрерывной величиной. Произвести приближенный расчет в первом исчезающем приближении по  $\gamma^{-2}$  и  $\theta^2$ , где  $\gamma$  — релятивистский фактор,  $\theta$  — угол между плоскостью орбиты и направлением излучения. Результат выразить через модифицированные функции Бесселя

$$K_{2/3}(\xi) = \sqrt{3} \int_0^{\infty} x \sin \left[ \frac{2}{3} \xi \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx,$$

$$K_{1/3}(\xi) = \sqrt{3} \int_0^{\infty} \cos \left[ \frac{2}{3} \xi \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx.$$

Проанализировать спектральное и угловое распределение при малых и больших частотах. Излучение ультррелятивистских частиц в магнитном поле называют **синхротронным излучением**.

**5.84.** Вычислить на основе формулы (3), полученной в предыдущей задаче, суммарную по всем направлениям спектральную мощность синхротронного излучения. Проанализировать результат для больших и малых частот. При интегрировании по углу  $\theta$  использовать формулы из теории функций Бесселя

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (1+x^2)^2 K_{2/3}^2 \left[ (y/2)(1+x^2)^{3/2} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{y\sqrt{3}} \left\{ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right\};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 (1+x^2) K_{1/3}^2 \left[ (y/2)(1+x^2)^{3/2} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{y\sqrt{3}} \left\{ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right\}.$$

**5.85\*.** Вычислить спектральную мощность синхротронного излучения в заданном направлении  $\mathbf{n}$ , создаваемую ультррелятивистской заряженной

частицей при движении по спирали в однородном магнитном поле. Угол между направлением скорости частицы и магнитным полем равен  $\pi/2 - \alpha$ , так что значению  $\alpha = 0$  соответствует движение по окружности. Использовать те же приближения, что в задаче 5.83. Определить также период между импульсами излучения, которые регистрирует удаленный наблюдатель, и граничную частоту  $\omega_c$  спектра.

**5.86.** Найти спектр синхротронного излучения, который регистрирует наблюдатель от облака моноэнергичных космических электронов с энергией  $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$ . Электроны находятся в однородном магнитном поле и их функция распределения по импульсам изотропна:

$$f(p)d^3p = \frac{N_0}{4\pi} \delta(p - p_0) dp d\Omega_p.$$

Направление магнитного поля составляет угол  $\Theta$  с направлением наблюдения  $\mathbf{n}$ . Размер облака электронов мал по сравнению с расстоянием до него.

**5.87\*.** Пусть в облаке космических электронов, рассмотренном в предыдущей задаче, частицы распределены по энергиям по степенному закону (что часто наблюдается в космических источниках радиоизлучения):

$$f(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = (\nu - 1) N_0 \mathcal{E}_*^{\nu-1} d\mathcal{E} / \mathcal{E}^\nu, \quad \mathcal{E} \geq \mathcal{E}_*, \quad \nu > 1.$$

Вычислить спектр синхротронного излучения этого источника в той области частот, которая зависит от граничной энергии  $\mathcal{E}_*$  только через нормировочный множитель. Найти связь спектра излучения со спектральным индексом  $\nu$  энергетического спектра релятивистских электронов.

**5.88.** Крабовидная туманность в нашей Галактике считается одним из главных источников синхротронного излучения в широком диапазоне частот. Согласно наблюдениям, показатель спектра синхротронного излучения имеет значения  $\alpha \approx 0,3$  при  $f = \omega/2\pi < 10^{14}$  Гц и  $\alpha \approx 1,0$  при  $f > 10^{14}$  Гц. Предполагается, что в туманности существует магнитное поле  $H \approx 10^{-4}$  Э. Оценить показатели энергетического спектра электронов и найти значение энергии  $\mathcal{E}_*$ , при котором происходит излом спектра.

**5.89\*.** Ультрарелятивистская частица влетает в электрический «ондулятор» — устройство, в котором на частицу действует периодически изменяющееся электрическое поле  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t$ , перпендикулярное ее начальной скорости,  $v_0 \perp \mathbf{E}_0$ . Поле предполагается достаточно слабым, так что траектория частицы лишь немного отличается от прямой линии. Вычислить угловое распределение  $d\mathcal{E}^{rad}/d\Omega$  и полную энергию  $\mathcal{E}^{rad}$ , излучаемую частицей за время пролета ондулятора длиной  $L$ . Оценить по

порядку величины характерные частоты излучаемых волн для электронов с энергией  $\mathcal{E} = 5$  ГэВ, движущихся в радиочастотном поле с  $\lambda_0 = 2\pi/\omega_0 = 3$  см.

**5.90.** В магнитном ондуляторе длиной  $L$  создано поперечное статическое магнитное поле в виде циркулярно поляризованной волны

$$\mathbf{H}(z) = H_0 \left( e_x \sin \frac{2\pi}{\lambda_0} z + e_y \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} z \right), \quad \lambda_0 \ll L.$$

В ондулятор в момент  $t = 0$  влетает ультрарелятивистский электрон с начальными значениями координат и скорости  $x = a$ ,  $y = z = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = -\beta_{\perp} c$ ,  $\dot{z} = \beta_{\parallel} c$ , где  $\beta_{\perp} = \lambda_0 \omega_H / 2\pi c \gamma \ll 1$ , но  $\beta_{\perp} \gg \gamma^{-1}$ ,  $\beta_{\parallel}^2 = \beta^2 - \beta_{\perp}^2 \approx 1$ ,  $\omega_H = eH_0/mc$ ,  $a = \beta_{\perp} c/\omega_0$ ,  $\omega_0 = 2\pi\beta_{\parallel} c/\lambda_0$ . Вычислить спектральное распределение полной энергии, излученной электроном. Произвести сравнение со спектром синхротронного излучения, полученным в задачах 5.84, 5.86.

**5.91\***. На круговой орбите одновременно находится  $N$  электронов (см. задачу 5.79). Исследовать влияние интерференции полей, создаваемых этими электронами, на интенсивность излучения  $n$ -й гармоники Фурье. Рассмотреть частные случаи: а) совершенно беспорядочного распределения электронов на орбите; б) правильного расположения электронов на расстоянии  $2\pi/N$  друг от друга.

**5.92.** Рассмотреть в предыдущей задаче излучение гармоник Фурье сгустком электронов, размеры которого малы по сравнению с радиусом орбиты. Провести расчет для двух функций распределения частиц внутри сгустка: а) равномерное распределение в пределах сектора с угловым размером  $\varphi$ ,

$$f(\psi) = \begin{cases} 1/\varphi, & -\varphi/2 \leq \psi \leq \varphi/2; \\ 0, & |\psi| > \varphi/2; \end{cases}$$

б) гауссово распределение,

$$f(\psi) = \frac{1}{\varphi\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\psi^2}{\varphi^2}\right), \quad \varphi \ll 2\pi.$$

Вычислить когерентную и некогерентную мощности излучения сгустка.

**5.93.** Нерелятивистская частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  испытывает лобовое столкновение (прицельный параметр  $\rho = 0$ ) с рассеивающим центром, взаимодействие с которым описывается потенциальной энергией  $U(r)$ . На некотором расстоянии  $r_{\min}$  от центра частица испытывает отражение. Выразить энергию  $\mathcal{E}^{rad}$  электромагнитного излучения частицы через потенциальную энергию  $U(r)$  и полную нерелятивистскую энергию  $\mathcal{E}$  частицы.

**5.94.** Вычислить  $\mathcal{E}^{rad}$  (см. предыдущую задачу) для случая кулоновского отталкивания:  $U(r) = Zeq/r$ ,  $eq > 0$ . Какая доля энергии частицы расходуется на излучение?

**5.95\*.** Две частицы с зарядами  $e_1, e_2$  и массами  $m_1, m_2$  ( $\frac{e_1}{m_1} \neq \frac{e_2}{m_2}$ ) совершают эллиптическое движение (см. задачу 4.66). Найти полную, усредненную по времени, интенсивность излучения  $\bar{I}$ .

**5.96.** Найти среднюю за период потерю момента импульса  $\frac{d\bar{K}}{dt}$  системой двух частиц, совершающих эллиптическое движение (см. предыдущую задачу).

УКАЗАНИЕ. Общая формула для потери момента импульса была получена в задаче 5.20.

**5.97\*.** Найти дифференциальное эффективное излучение  $\frac{d\mathbf{kn}}{d\Omega}$  при рассеянии потока частиц с зарядами  $e_1$ , массами  $m_1$  и скоростью  $v_0$  на одноименно заряженной частице с зарядом  $e_2$  и массой  $m_2$ .

УКАЗАНИЕ. При вычислении интегралов  $A$  и  $B$ , входящих в формулу (5.83), перейти от интегрирования по  $dt$  к интегрированию по  $dr$ ,  $dt = \frac{dr}{\dot{r}}$ , где  $\dot{r} = \sqrt{1 - \frac{2a}{r} - \frac{s^2}{r^2}}$ ,  $s$  — прицельное расстояние,  $2a$  — минимальное расстояние, на которое могут сближаться частицы (оно достигается при  $s = 0$ ). Интегрировать сначала по  $ds$ , затем по  $dr$ . При вычислении  $B$  необходимо использовать уравнение траектории относительного движения, которое можно найти в ответе к задаче 4.66.

**5.98\*.** Частица с зарядом  $e_1$  и массой  $m$  сталкивается с другой частицей, масса которой много больше  $m$ , а заряд  $e_2$ ; прицельное расстояние  $s$ . Кинетическая энергия налетающей частицы велика по сравнению с потенциальной энергией взаимодействия частиц  $\frac{e_1 e_2}{r}$ . Вследствие этого скорость  $v$  налетающей частицы может считаться постоянной в течение всего столкновения; она не обязательно мала по сравнению со скоростью света. Найти угловое распределение полного излучения  $\frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega}$ . Рассмотреть, в частности, случай  $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ .

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться общей формулой для углового распределения полного излучения 5.60. Ускорение частицы  $\dot{\mathbf{v}}$  выразить через действующую на нее кулонову силу и скорость  $\mathbf{v}$  частицы с помощью формул  $\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}$  и  $\dot{\mathbf{p}} = e_1 e_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ .

**5.99.** Определить полное излучение энергии  $\Delta W$  и импульса  $\Delta p$  частицей, рассмотренной в предыдущей задаче, за все время ее движения. Сделать это как непосредственно — путем интегрирования углового, распределения, найденного в предыдущей задаче, так и с помощью формул, полученных в задачах (5.68), (5.71).

**5.100\*.** Частица с зарядом  $e_1$  и массой  $m$  сталкивается с тяжелой частицей, заряд которой  $e_2$ . Прицельное расстояние  $s$  велико, так что кинетическая энергия частицы в течение всего времени движения велика по сравнению с ее потенциальной энергией. Скорость частицы  $v \ll c$ . Найти спектр тормозного излучения частицы  $\frac{d\Delta W_\omega}{d\omega}$ .

**5.101\*.** Поток частиц с зарядами  $e_1$  и массами  $m_1$  рассеивается на частице с зарядом  $e_2$  и массой  $m_2$  ( $e_1/m_1 = e_2/m_2$ ). Выразить дифференциальное эффективное излучение  $dk_n/d\omega$  через компоненты  $Q_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента системы. Результат представить в форме, аналогичной 5.83, 5.84.

**5.102\*.** Найти полное эффективное излучение  $\kappa$  при рассеянии потока заряженных частиц (заряд  $e$ , масса  $m$ , скорость  $v_0$ ) одинаковой с ними частицей.

**5.103.** Поток частиц с зарядом  $e$  и скоростью  $v \ll c$  рассеивается на абсолютно твердой сфере радиуса  $a$ . Найти эффективное излучение  $dk_\omega$  в интервале частот  $d\omega$ . Чему равно полное эффективное излучение  $\kappa$ ? Чему равно дифференциальное сечение  $d\sigma/d\hbar\omega$  генерации фотонов с частотой  $\omega$  в расчете на единицу энергии  $\hbar\omega$  фотона?

**5.104\*.** Решить предыдущую задачу для рассеяния релятивистских частиц.

**5.105.** Найти интенсивность излучения гармоник Фурье с частотами  $\omega_n = n\omega_0$ , кратными основной частоте  $\omega_0$ , при нерелятивистском эллиптическом движении двух заряженных частиц (см. задачу 5.95).

УКАЗАНИЕ. При движении по эллипсу относительные координаты частиц можно представить в параметрической форме

$$x = a(\cos u - \epsilon), \quad y = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u, \quad \omega_0 t = u - \epsilon \sin u,$$

где  $u$  — параметр,  $\omega_0 = (2|\mathcal{E}|)^{3/2}/e_1^2 e_2^2 \mu^{1/2}$  — частота обращения по эллипсу,  $\epsilon = \sqrt{1 - 2|\mathcal{E}|L^2/e_1^2 e_2^2 \mu}$  — его эксцентриситет,  $a = |e_1 e_2|/2|\mathcal{E}|$  — большая полуось,  $\mathcal{E} < 0$  — полная нерелятивистская энергия системы (энергия связи),  $L$  — момент импульса,  $\mu$  — приведенная масса.



**5.106.** Дипольный момент малой («точечной») системы зарядов, находящийся в начале координат, мгновенно изменяется от значения  $\mathbf{p}_1$  до  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}$ . Вычислить электромагнитное поле во всем пространстве и спектральную плотность излучения в заданном направлении  $d^2I_\omega/d\omega d\Omega$ .

УКАЗАНИЕ. Записать плотность дипольного момента (вектор электрической поляризации) в форме

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}_1 \Theta(-t) + \mathbf{p}_2 \Theta(t),$$

где  $\Theta(t)$  — ступенчатая функция, и использовать формулы (5.41) и электрический вектор Герца для вычисления поля.

**5.107.** Положительный точечный заряд а) двигался равномерно со скоростью  $v$  вдоль оси  $Oz$  и мгновенно остановился при  $t = 0$  в начале координат; б) покоился в начале координат и внезапно при  $t = 0$  приобрел постоянную скорость  $v$ . Нарисовать картину электрического поля для момента  $t > 0$ . Как распределено в пространстве магнитное поле?

**5.108.** При бета-распаде атомных ядер происходит изменение их энергии и зарядового числа ядра на единицу с испусканием электрона (позитрона) и нейтрино:  $N_Z \rightarrow N_{Z\pm 1} + e^\mp + \nu$ . Рождающийся электрон может иметь релятивистскую энергию. Рассматривая этот процесс как внезапный старт заряженной частицы с постоянной скоростью, вычислить величины  $d^2I_\omega/d\omega d\Omega$ ,  $dI_\omega/d\omega$  и число фотонов  $N_\omega$  с заданной частотой, приходящихся на единичный интервал энергии квантов.

**5.109\*.** Бета-электрон (см. предыдущую задачу) обладает не только зарядом, но и спиновым магнитным моментом (в системе покоя электрона это — магнетон Бора  $\mu_B$ , см. раздел 4.2). Уточнить результаты предыдущей задачи путем учета внезапного появления не только заряда электрона, но и его магнитного момента. Ввиду релятивистского движения электрона следует также учесть правило преобразования моментов (см. задачу 4.37). Вычислить величины  $d^2I_\omega/d\omega d\Omega$ ,  $dI_\omega/d\omega$ , считая магнитный момент в системе покоя электрона направленным вдоль скорости (продольно поляризованные электроны) и рассматривая его как классическую величину.

**5.110.** Возбужденное атомное ядро может передать энергию возбуждения орбитальному электрону, в результате чего атом ионизируется. Предполагая процесс конверсии мгновенным, а конверсионный электрон свободным и нерелятивистским, найти число квантов  $N_\omega$  с заданной частотой в расчете на единичный интервал энергии.

**5.111\*.** Ядро с зарядом  $Ze$  захватывает орбитальный электрон и превращается в другое ядро с зарядом  $(Z - 1)e$ :  $N_Z \rightarrow N_{Z-1} + \nu$ . Разность энергий ядерных уровней передается нейтрино. Предполагая, что электрон

в атоме движется по круговой орбите радиуса  $a$  с частотой  $\omega_0$ , найти число квантов  $N_\omega$  с заданной частотой на единицу энергии, обусловленное внезапным исчезновением электрона вместе с его зарядом и магнитным моментом.

УКАЗАНИЕ. Захват электрона может произойти из любой точки его орбиты. Направление спина электрона неупорядоченно. Поэтому нужно провести усреднение по начальным фазам движения электрона и по направлениям его спина.

**5.112.** Пион распадается на мюон и мюонное нейтрино:  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$ . Кинетическая энергия образовавшихся частиц  $T = (m_\pi - m_\mu)c^2 \approx 34$  МэВ в системе покоя пиона. Найти число квантов  $N_\omega$  заданной частоты в расчете на единицу энергии. Из законов сохранения (в предположении нулевой массы нейтрино) определить максимальную возможную энергию кванта  $\hbar\omega_{\max}$ .

**5.113.** Каон распадается по схеме  $K^+ \rightarrow \pi_+ + \pi_+ + \pi^-$ , причем пионы можно считать нерелятивистскими. Вычислить распределение интенсивности излучения по частотам и по углам в системе покоя каона. Вычислить также распределение мягких квантов по частотам независимо от угла вылета.

## 5.4. Взаимодействие заряженных частиц с излучением

**Взаимодействие заряженной частицы с собственным электромагнитным полем.** В разделе 2.1 мы уже столкнулись с трудностью определения собственной электростатической энергии заряженной частицы. Для точечной частицы эта энергия оказывается бесконечной. Введение конечного «классического» радиуса частицы (см. задачу 3.120)

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \quad (5.94)$$

и связанного с этим предположения о наличии у нее внутренней структуры позволяет сделать собственную энергию конечной. Но при этом возникают противоречия с теорией относительности (см. задачи 5.114–5.117). К тому же объект размером  $r_0$  не описывается классической теорией: квантовые эффекты становятся существенными уже на значительно больших расстояниях, равных комптоновской длине волны

$$\Lambda = \frac{\hbar}{mc} \approx 137r_0. \quad (5.95)$$

К сожалению, квантовая теория не разрешает трудностей, связанных с вычислением собственной энергии. В ней появляются, кроме бесконечной

собственной энергии, другие бесконечные величины, например, добавка к заряду частицы<sup>2</sup>.

При ускоренном движении частицы возникает ее дополнительное взаимодействие с собственным полем. Ускоренное движение порождает излучение электромагнитных волн, что приводит к потере частицей энергии и импульса. Следовательно, само движение частицы будет зависеть от излучения ею электромагнитных волн, и корректная постановка задачи о движении заряженной частицы требует включения в уравнение движения членов, учитывающих влияние излучения на движение.

Во многих случаях, однако, это влияние оказывается малым, что и позволяет считать движение излучающей частицы заданным. Количественный критерий малости реакции излучения можно получить, сравнивая потери энергии на излучение за некоторое время  $\Delta t$  с изменением кинетической энергии частицы под действием внешних сил за то же время. Оценим обе энергии в системе отсчета, в которой частица в течение рассматриваемого промежутка времени совершает нерелятивистское движение. С помощью формулы Лармора (5.32) получаем

$$\Delta \mathcal{E}^{rad} \approx 2e^2 \dot{v}^2 \Delta t / 3c^3 \approx 2e^2 \dot{v} \Delta v / 3c^3,$$

где  $\Delta v$  — изменение скорости за время  $\Delta t$ . С другой стороны,  $\Delta \mathcal{E}^{kin} \approx m \Delta v \cdot v$ . Неравенство  $\Delta \mathcal{E}^{rad} \ll \Delta \mathcal{E}^{kin}$  дает

$$\Delta t \approx \left| \frac{v}{\dot{v}} \right| \gg \frac{2e^2}{3mc^3} = \frac{2r_0}{3c} = \tau_0, \quad (5.96)$$

где  $\tau_0$  — время распространения электромагнитных возмущений на расстояние порядка классического радиуса частицы. Наибольшее значение времени  $\tau_0$  имеет для самой легкой элементарной частицы — электрона:  $\tau_e = 0,63 \times 10^{-23}$  с.

При квазипериодическом движении частицы ее средняя скорость и ускорение возвращаются к исходным значениям через каждый период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , и потерю энергии на излучение за период нужно сравнивать со средней кинетической энергией:  $\Delta \mathcal{E}^{rad} \approx (2e^2 l^2 \omega_0^4 / 3c^3) T_0$ ,  $\mathcal{E}^{kin} \approx m \omega_0^2 l^2$ , где  $l$  — размер области движения частицы. Сравнение дает  $T_0 \gg \tau_0$  или  $\omega_0 \tau_0 \ll 1$ , т. е. в неравенствах (5.96) нужно заменить время  $\Delta t$  на период  $T_0$ .

Таким образом, при нерелятивистском движении реакцию излучения можно рассматривать как малый эффект, если движение частицы достаточно плавное и ее состояние слабо меняется за время  $\tau$  или на расстояниях  $c\tau \approx r_0$ . При нерелятивистском движении это условие фактически

<sup>2</sup>Подробное изложение этих вопросов можно найти в книгах [Берестецкий и др. (1989)], [Ахиезер и Берестецкий (1981)], [Боголюбов и Ширков (1980)].

всегда выполняется. Но в ультрарелятивистском случае (см., например, задачу 5.138) сила радиационного торможения может стать главным фактором, определяющим движение частицы.

**Перенормировка массы. Сила радиационного торможения в релятивистском случае.** Приведем теперь вывод явного и релятивистски ковариантного выражения для силы радиационного торможения [Соколов и Тернов (1983)], [Байер и др. (1973)], [Гальцов и др. (1991)]. Этот вопрос тесно связан с релятивистски-инвариантным представлением собственной электромагнитной массы частицы.

Исходим из ковариантного уравнения движения (4.53) точечной частицы, имеющей заряд  $e$  и некоторую массу  $m_0$ :

$$m_0 \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k + \mathcal{F}_i, \quad (5.97)$$

где производная берется по инвариантному собственному времени  $\tau$ . В правую часть кроме внешней электромагнитной силы (первое слагаемое) добавлена сила  $\mathcal{F}_i$  воздействия на частицу создаваемого ею собственного электромагнитного поля. Запишем эту силу через 4-потенциал  $\mathcal{A}_i$  собственного поля частицы в той же форме, что и внешнюю силу:

$$\mathcal{F}_i = \frac{e}{c} \frac{dx^k}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x^k} \right). \quad (5.98)$$

Потенциал  $\mathcal{A}_i$  удовлетворяет уравнениям (5.1), которые можно записать в четырехмерной форме:

$$\square \mathcal{A}_i(x) = -\frac{4\pi}{c} j_i(x) = -4\pi e \int d\tau' \frac{dx_i(\tau')}{d\tau'} \delta^4(x - x(\tau')). \quad (5.99)$$

Здесь под  $x$  понимается совокупность четырех текущих координат пространства-времени, а под  $x(\tau') \equiv x'$  — четырехмерные координаты частицы в функции ее собственного времени. Для плотности тока использовано представление (4.110). Решение уравнения (5.99) запишем в форме (5.4) через запаздывающую функцию Грина:

$$\mathcal{A}_i(x) = \frac{1}{c^2} \int G^R(x-y) j_i(y) d^4 y = \frac{e}{c} \int d\tau' \frac{dx_i(\tau')}{d\tau'} G^R(x - x(\tau')). \quad (5.100)$$

С помощью последнего уравнения находим силу, действующую на частицу со стороны ее собственного поля:

$$\mathcal{F}_i(x) = \frac{e^2}{c^2} \int \frac{dx^k(\tau)}{d\tau} \left( \frac{dx_k(\tau')}{d\tau'} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{dx_i(\tau')}{d\tau'} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) G^R(x(\tau) - x(\tau')) d\tau'. \quad (5.101)$$

Здесь  $x$ , входящий в аргумент силы  $\mathcal{F}_i$ , имеет смысл четырехмерных координат частицы, которые рассматриваются как функции ее собственного времени.

Следующий важный этап вычисления силы самодействия связан с представлением запаздывающей функции Грина в виде суммы двух слабых и их интерпретации (см. задачи 5.3, 5.9):

$$G^R(x - x') = G^+(x - x') - \frac{1}{2}G^-(x - x'), \quad \text{где} \quad G^+(x - x') = c\delta(s^2), \quad (5.102)$$

$$G^-(x - x') = 2c [\Theta(x'_0 - x_0) - \Theta(x_0 - x'_0)] \delta(s^2) = -2c \frac{x_0 - x'_0}{|x_0 - x'_0|} \delta(s^2),$$

$$s^2 = (x_k - x'_k)(x^k - x'^k). \quad (5.103)$$

Функция  $G^-$ , согласно результатам задачи 5.9, удовлетворяет однородному уравнению Даламбера, несингулярна, и связанное с ней поле можно интерпретировать как поле излучения частицы. Соответствующая часть силы самодействия будет представлять собой реакцию излучения. Функция  $G^+$  удовлетворяет уравнению с дельтаобразным источником и ответственно за квазистационарное поле, связанное с частицей и создающее ее электромагнитную массу. Обе эти функции зависят от разностей  $x_k(\tau) - x_k(\tau') = s_k$ . При фиксированном  $\tau'$  имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial s^k} = 2(x_k - x'_k) \frac{\partial}{\partial (s^2)}. \quad (5.104)$$

Поскольку  $\tau$  и  $\tau'$  — разные моменты собственного времени частицы, они должны быть близки друг другу и их разность даже для протяженной частицы имеет порядок величины  $\tau_0$ , определяемой согласно (5.96). Для точечной частицы, очевидно,  $\tau_0 \rightarrow 0$ . Поэтому целесообразно произвести разложение всех величин под интегралом (5.101) по малой разности  $\tau' - \tau = \nu$  и перейти к интегрированию по  $\nu$ :

$$x_k - x'_k \approx -\nu \frac{dx_k}{d\tau} - \frac{\nu^2}{2} \frac{d^2 x_k}{d\tau^2} - \frac{\nu^3}{6} \frac{d^3 x_k}{d\tau^3} + \mathcal{O}(\nu^4), \quad s^2 \approx c^2 \nu^2 + \mathcal{O}(\nu^4). \quad (5.105)$$

С помощью этих разложений находим

$$G^R(x - x') = \left(1 - \frac{\nu}{|\nu|}\right) \frac{\delta(\nu)}{s|\nu|}, \quad (5.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{dx_k}{d\tau} + \frac{\nu}{2} \frac{d^2 x_k}{d\tau^2} + \frac{\nu^2}{6} \frac{d^3 x_k}{d\tau^3} \right) \frac{d}{d\nu}$$

и вычисляем силу самодействия по формуле (5.101), произведя один раз интегрирование по частям:

$$\mathcal{F}_i = - \left\{ \frac{e^2}{2c^2} \int \frac{\delta(\nu)}{|\nu|} d\nu \right\} \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} + \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{d^3 x_i}{d\tau^3} - \frac{1}{c^2} \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{d^3 x_k}{d\tau^3} \right). \quad (5.107)$$

Первое отрицательное слагаемое, содержащее расходящийся интеграл, можно интерпретировать как часть силы инерции, в которую входит бесконечная электромагнитная масса

$$\Delta m = \frac{e^2}{2c^2} \int \frac{\delta(\nu)}{|\nu|} d\nu \quad (5.108)$$

частицы. Вместе с массой  $m_0$  «голой» (т.е. не взаимодействующей с полем излучения) частицы она образует полную наблюдаемую на опыте массу  $m = m_0 + \Delta m$  частицы. Именно так интерпретируется аналогичная расходящаяся величина в квантовой электродинамике, а сама процедура ее включения в наблюдаемую массу называется «перенормировкой массы». Такая интерпретация возможна, поскольку «голая» масса является величиной ненаблюдаемой, и ей можно приписать бесконечную отрицательную составляющую. Но сам факт появления расходящейся величины является, несомненно, свидетельством несовершенства теории.

Второе слагаемое в (5.108) представляет собой силу торможения частицы, вызванную потерей импульса на излучение:

$$\mathcal{F}_i^{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{d^3 x_i}{d\tau^3} - \frac{1}{c^2} \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{d^3 x_k}{d\tau^3} \right). \quad (5.109)$$

Уравнение движения частицы с учетом радиационной силы (**уравнение Дирака – Лоренца**) записывается в виде

$$m \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = \frac{e}{c} F_{ik} \frac{dx^k}{d\tau} + \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{d^3 x_i}{d\tau^3} - \frac{1}{c^2} \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{d^3 x_k}{d\tau^3} \right), \quad (5.110)$$

где  $m$  — наблюдаемая на опыте конечная масса частицы. Лоренцеву **силу радиационного трения** можно записать в более компактной форме, продифференцировав по собственному времени тождество  $u^k w_k = 0$ , где  $u^k$  и  $w_k$  — соответственно четырехмерные скорость и ускорение:

$$\mathcal{F}_i = \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{dw_i}{d\tau} + \frac{1}{c^2} u_i (w_k w^k) \right). \quad (5.111)$$

**Пример 5.16.** *Исследовать роль отдельных членов в правой части уравнения (5.110). Для этого рассмотреть ситуацию, когда частица подвергается воздействию внешнего поля  $F_{ik}$  в течение конечного времени и вычислить изменение  $\Delta p_i$  ее 4-импульса за время действия поля. Установить связь между силой радиационного трения и потерей частицей энергии и импульса на излучение.*

**Решение.** Пусть при  $\tau \leq \tau_1$  и  $\tau \geq \tau_2$  частица движется без ускорения. Интегрируя уравнение (5.110) по интервалу  $[\tau_1, \tau_2]$ , будем иметь  $\Delta p_i = (\Delta p_i)^{ext} + (\Delta p_i)^{rad}$ , где первое слагаемое

$$(\Delta p_i)^{ext} = \int_1^2 \frac{e}{c} F_{ik} dx^k$$

представляет собой изменение 4-импульса за счет внешнего поля. Второе слагаемое запишем, используя формулу (5.111) для радиационной силы:

$$(\Delta p_i)^{rad} = \int_1^2 \mathcal{F}_i d\tau = \frac{2e^2}{3c^3} w_i \Big|_1^2 + \frac{2e^2}{3c^5} \int_1^2 w_k w^k u_i d\tau.$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю ввиду обращения в нуль ускорения. Оставшийся интеграл совпадает с результатом интегрирования величины (5.73) и представляет собой, таким образом, изменение 4-импульса частицы вследствие излучения. ■

**Пример 5.17.** *Записать силу радиационного трения в нерелятивистском случае. Какие трудности возникают в исследовании движения частицы при включении в уравнение движения радиационной силы?*

**Решение.** В нерелятивистском приближении  $d/d\tau = d/dt$ ,  $\gamma = 1$ . Используя формулу (5.111), находим в соответствии с общим соотношением (4.60), связывающим четырехмерную и трехмерную силы,  $\mathcal{F}_i = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{F})$ , где

$$\mathbf{F} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (5.112)$$

— нерелятивистская трехмерная сила радиационного трения.

Запишем уравнение движения частицы в отсутствие внешних полей, но с учетом радиационной силы:

$$m\dot{v} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}. \quad (5.113)$$

Важной особенностью этого уравнения, как и значительно более сложного уравнения (5.110), является более высокий (третий) порядок производных от координат по времени по сравнению с обычными уравнениями движения релятивистской (и нерелятивистской) классической механики. Интегрируя уравнение (5.113), получаем его общее решение

$$v(t) = a + be^{t/\tau_0},$$

где  $a$ ,  $b$  — постоянные интегрирования,  $\tau_0$  определена согласно (5.96). Обратим внимание на то, что показатель экспоненты положителен, и второе слагаемое представляет «самоускоряющееся» решение: скорость нарастает в отсутствие ускоряющей силы. Но нельзя забывать о том, что уравнение (5.113), имея второй порядок относительно скорости, требует задания двух начальных условий, т. е. скорости и ускорения. В отсутствие внешних сил ускорение равно нулю, поэтому  $v(0) = v_0$ ,  $\dot{v}(0) = 0$ . Определяя из этих условий постоянные интегрирования, находим  $b = 0$  и получаем правильное для этого простейшего случая решение  $v(t) = v_0 = \text{const}$ . ■

**Пример 5.18.** *Выразить силу радиационного трения через скорость частицы и внешнее электромагнитное поле. Для этого использовать уравнение движения частицы в пренебрежении излучением, считая радиационную силу малой. Рассмотреть подробно случаи нерелятивистского и ультрарелятивистского движения.*

**Решение.** Из уравнения движения (4.53) находим

$$w_i = \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{mc} F_{ik} u^k, \quad \frac{d^2 u_i}{d\tau^2} = \frac{e}{mc} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} u^k u^l + \frac{e^2}{(mc)^2} F_{ik} F^{kl} u_l$$

и, используя эти результаты, получаем из (5.111) радиационную силу, выраженную через внешнее поле:

$$\mathcal{F}_i = \frac{2e^3}{3mc^4} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} u^k u^l + \frac{2e^4}{3m^2 c^5} (F_{ks} u^s) (F^{kl} u_l) u_i. \quad (5.114)$$



В нерелятивистском пределе подставляем в (5.114)  $u^k = (c, \mathbf{v})$  и с помощью таблиц (4.68) получаем трехмерную радиационную силу

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \mathbf{E} \times \mathbf{H} & \text{при } E \gg vH/c; \\ \frac{2e^3}{3mc^4} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{H}} + \frac{2e^4}{3m^2c^5} \mathbf{H} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) & \text{при } E \ll vH/c. \end{cases} \quad (5.115)$$

Здесь

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

и аналогично записывается  $\dot{\mathbf{H}}$ . Малость радиационной силы по сравнению с силой Лоренца в обоих случаях приводит к ограничению внешнего поля

$$H \ll \frac{|e|}{r_0^2}. \quad (5.116)$$

Но это ограничение практически неважно, так как квантовые поправки становятся существенными при меньших значениях поля.

В ультрарелятивистском случае  $u^k = \gamma(c, \mathbf{v})$ ,  $\gamma \gg 1$ , поэтому в (5.114) нужно учесть только слагаемое, содержащее произведение трех 4-скоростей. Из (5.114) с помощью (4.68) находим трехмерную силу

$$\mathbf{F} = -\frac{2e^4\gamma^2}{3m^2c^4} \{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 - (c\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H})^2\} \mathbf{v}, \quad (5.117)$$

направленную противоположно скорости частицы. Здесь всюду, кроме  $\gamma$ , следует считать  $|\mathbf{v}| = c$ . Выбрав ось  $Oz$  вдоль  $\mathbf{v}$ , получим более простое выражение для радиационной силы:

$$F_z = -\frac{2e^4\gamma^2}{3m^2c^4} \{(E_x - H_y)^2 + (E_y + H_x)^2\}. \quad (5.118)$$

Как следует из (5.117), (5.118), эта сила пропорциональна квадрату энергии частицы и квадрату внешнего поля. ■

**Рассеяние электромагнитных волн частицами.** Кроме взаимодействия с полем собственного излучения, заряженные частицы могут взаимодействовать с электромагнитными волнами, созданными внешними источниками. Это приводит к ускоренному движению частиц, и возникает вторичное (рассеянное) излучение. Процесс рассеяния характеризуется дифференциальным

$$d\sigma_s = \frac{dI(\theta, \alpha)}{\gamma_0} \quad \text{и полным} \quad \sigma_s = \int d\sigma_s \quad (5.119)$$

сечениями рассеяния. Здесь  $dI(\theta, \alpha) = \bar{\gamma} r^2 d\Omega$  — средняя (по времени) интенсивность излучения в телесный угол  $d\Omega$ ;  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma}_0$  — средние плотности потока энергии в рассеянной и падающей волнах, определяемые через вектор Пойнтинга.

Плодотворным подходом к исследованию процессов взаимодействия частиц с электромагнитными волнами является метод осцилляторов поля, тесно связанный с разложением Фурье, суть которого для свободного поля была изложена в конце раздела 2.3. Применение этого метода к более сложным случаям см. в задаче 5.143 и последующих.

Рекомендуемая литература: [Алексеев (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Гинзбург (1987)], [Френкель (1956)], [Соколов и Тернов (1983)], [Джексон (1975)], [Новожилов и Яппа (1978)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Байер и др. (1973)].

## Задачи

**5.114\***. Найти импульс электромагнитного поля частицы с зарядом  $e$ , движущейся равномерно со скоростью  $v$ . Частицу рассматривать в ее системе покоя  $S'$  как твердый шарик с радиусом  $r_0$  (в системе, где скорость частицы равна  $v$ , имеет место лоренцево сокращение). Ввести электромагнитную массу  $m_0$  покоя частицы, связанную соотношением Эйнштейна с энергией ее поля в состоянии покоя. Какие при этом возникают трудности?

**5.115.** Найти энергию  $W_m$  магнитного поля, а также полную электромагнитную энергию  $W$  частицы, рассмотренной в предыдущей задаче.

**5.116\***. Найти силу  $F$ , с которой заряженная сферически симметричная частица действует сама на себя (сила самодействия) при ускоренном поступательном движении с малой скоростью  $v \ll c$ . Запоздывание и лоренцево сокращение не учитывать.

УКАЗАНИЕ. Вычислить равнодействующую сил, приложенных к малым элементам  $de$  заряда частицы, воспользовавшись выражением для напряженности поля точечного заряда (5.58).

**5.117\***. Найти уточненное выражение для силы  $F$  самодействия заряженной сферически симметричной частицы (см. предыдущую задачу). При решении учитывать эффект конечной скорости распространения взаимодействия с точностью до первого порядка по времени  $t' - t$  распространения взаимодействия между элементами частицы. Рассмотреть, в частности, предельный случай точечной частицы. Оценить вклад отбрасываемых членов более высокого порядка по  $t' - t$  в этом предельном случае.

**5.118\***. В задачах (5.114)–(5.117) было показано, что «наивное» определение собственной энергии и импульса заряженной частицы конечных размеров (модель Абрагама–Лоренца, см. формулы (1) и (2) из решения задачи (5.114)) приводит к неправильной связи между ними. Ввести ковариантное определение указанных величин, используя для этого тензор энергии-импульса электромагнитного поля (4.126) и произведя интегрирование по некоторой пространственноподобной гиперповерхности, выбранной таким образом, чтобы в системе покоя частицы выполнялись условия

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{8\pi c} \int E'^2 dV', \quad \mathbf{p}_0 = 0.$$

Показать, что в этом случае энергия и импульс частицы образуют 4-вектор с компонентами  $p^i = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v})$ , где

$$m = \frac{\gamma}{8\pi c} \int (E^2 - H^2) d^3x = \frac{1}{8\pi c} \int E'^2 dV'$$

— инвариантная масса. В первом интеграле интегрирование производится по трехмерному объему в произвольной инерциальной системе, во втором — в системе покоя частицы.

**5.119.** Какое время  $T$  прожил бы резерфордовский атом водорода, если бы электрон в атоме двигался и излучал как классическая частица? Считать, что электрон, теряя энергию, движется к протону по пологой спирали, так что в каждый момент времени он излучает как заряд на круговой орбите (радиус орбиты медленно меняется со временем). При каком условии справедливо это предположение? Начальный радиус атома  $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$  см.

**5.120.** Релятивистская частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , теряя энергию на излучение. Найти закон изменения энергии и радиуса орбиты со временем  $\mathcal{E}(t)$  и  $r(t)$ . В начальный момент времени  $t = 0$  энергия частицы равна  $\mathcal{E}_0$  (ср. с задачей 5.119).

**5.121.** Электрон в бетатроне разгоняется на орбите постоянного радиуса  $a$  вихревым электрическим полем. Последнее индуцируется временным магнитным полем частоты  $\omega$ . Найти критическое значение энергии электрона  $\mathcal{E}_{\text{кр}}$ , при котором потери на излучение сравняются с энергией, приобретаемой электроном за счет работы вихревого электрического поля.

**5.122\***. Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  притягивается к некоторому центру квазиупругой силой  $-m\omega_0^2 r$ . В некоторый момент времени  $t = 0$  в этом гармоническом осцилляторе возникают свободные колебания. Учитывая реакцию излучения, но считая ее малой, найти закон затухания

этих колебаний. Определить форму спектра такого осциллятора и ширину спектральной линии («естественная ширина»). Как связаны между собой неопределенность энергии  $\hbar\omega$  излучаемых фотонов и время жизни осциллятора?

**5.123.** Газ состоит из атомов с массой  $m$ . Неподвижный атом этого газа излучает свет с частотой  $\omega_0$  (естественной шириной линии испускания пренебрегаем). Из-за теплового движения атомов и эффекта Доплера наблюдатель, неподвижный относительно сосуда с газом, регистрирует частоту, отличающуюся от  $\omega_0$ . Найти форму  $\frac{dI_\omega}{d\omega}$  спектра излучения газа, нагретого до температуры  $T$ .

УКАЗАНИЕ. Скорости атомов газа распределены по закону Максвелла

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

где  $\frac{dN}{N}$  — доля молекул, скорость  $\mathbf{v}$  которых заключена в промежутке  $dv_x dv_y dv_z$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана. Так как выполняется условие  $v \ll c$ , можно в формуле, выражающей доплеровское изменение частоты (см. задачу 3.35), отбросить все члены, порядок которых выше  $\frac{v}{c}$ .

**5.124.** Излучающий атом, описываемый моделью гармонического осциллятора, движется в газе; при этом атом испытывает столкновения с другими атомами, скачком меняющие характер его колебаний. Вероятность того, что время свободного движения атома имеет продолжительность от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$ , выражается формулой  $dW(\tau) = \frac{\Gamma}{2} e^{-\frac{\Gamma\tau}{2}} d\tau$  (среднее значение промежутка времени между столкновениями  $\bar{\tau} = \frac{2}{\Gamma}$ ). Найти, пренебрегая естественной шириной линии, форму спектра излучения такого осциллятора  $\frac{dI_\omega}{d\omega}$ .

**5.125\***. На трехмерный изотропный осциллятор падает группа волн, характеризуемая спектральным распределением интенсивности  $S_\omega$  и полной интенсивностью  $S = \int_0^\infty S_\omega d\omega$  ( $S$  — количество энергии, протекающее через  $1 \text{ см}^2$  за все время прохождения группы). Ширина спектрального распределения группы велика по сравнению с естественной шириной спектральной линии осциллятора  $\gamma$ . Скорость электрона  $v \ll c$ . Найти энергию,

поглощенную осциллятором из световой волны, учитывая торможение излучением. Как сказывается на результате характер поляризации и направление распространения волн, входящих в группу?

**5.126.** Найти полное количество энергии  $\Delta W$ , поглощенной одномерным осциллятором с собственной частотой  $\omega_0$  из группы волн со спектральным распределением  $S_\omega$ , в следующих трех случаях: а) линейно поляризованная плоская группа волн, у которой направление колебаний вектора  $\mathbf{E}$  составляет угол  $\vartheta$  с осью осциллятора; б) неполяризованная плоская группа волн, распространяющаяся под углом  $\theta$  к оси осциллятора; в) изотропное поле излучения (на осциллятор с равной вероятностью падают плоские волны с любым направлением поляризации и любым направлением распространения).

**5.127\*.** Линейно поляризованная волна падает на изотропный гармонический осциллятор. Скорость электрона  $v \ll c$ . Найти дифференциальное  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  и полное  $\sigma$  сечения рассеяния волны с учетом силы лучистого трения. Рассмотреть, в частности, случаи сильно связанного и слабо связанного электрона.

**5.128.** Плоская электромагнитная волна, поляризованная по кругу, рассеивается свободным зарядом. Определить рассеянное поле  $\mathbf{H}$ , исследовать характер его поляризации. Найти дифференциальное  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  и полное  $\sigma$  сечения рассеяния.

**5.129.** Неполяризованная плоская волна рассеивается свободным нерелятивистским электроном. Вычислить дифференциальное и полное сечение рассеяния. Найти степень  $\rho$  деполаризации рассеянной волны в зависимости от угла  $\vartheta$  рассеяния.

**5.130\*.** Линейно поляризованная волна рассеивается свободным зарядом. Заряд движется с релятивистской скоростью  $v$  в направлении распространения волны. Найти дифференциальное сечение рассеяния. Рассмотреть также случай рассеяния неполяризованной волны.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (5.60) и выразить  $\dot{v}$  через  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .

**5.131\*.** Изотропный гармонический осциллятор с частотой  $\omega_0$ , зарядом  $e$  и массой  $m$  помещен в слабое однородное постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Определить движение осциллятора. Исследовать характер поляризации излучения осциллятора<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Такой гармонический осциллятор представляет собой модель атома во внешнем магнитном поле. В задаче, таким образом, предлагается развить классическую теорию эффекта Зеемана.

**5.132.** Система частиц состоит из  $N$  одномерных гармонических осцилляторов, положения равновесия которых находятся в точках с радиусами-векторами  $r_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Вычислить дифференциальное сечение рассеяния плоской монохроматической волны малой амплитуды ( $eE_0/m\omega c \ll 1$ ) этой системой частиц. Проанализировать различные соотношения между длиной волны и линейным размером области, в которой находятся частицы.

**5.133.** Электромагнитная волна малой амплитуды ( $eE_0/m\omega c \ll 1$ ) рассеивается на свободном нерелятивистском электроны. Вычислить среднюю за период волны силу, действующую на электрон. Рассмотреть различные поляризации падающей волны.

**5.134.** Частица с зарядом  $e$  движется с релятивистской скоростью  $v$  в поле плоской монохроматической волны, распространяющейся в направлении  $n$ . Плотность  $w$  энергии электромагнитной волны известна. Найти среднюю за период волны силу, действующую на частицу. Как выразится сила при наличии некогерентного пакета плоских волн, распространяющихся в одном направлении?

УКАЗАНИЕ. В системе покоя частицы использовать силу (3) из решения предыдущей задачи. Затем преобразовать ее (и все величины, от которых она зависит) в систему, движущуюся со скоростью  $v$  относительно исходной. С помощью результатов задачи 3.67 убедиться в том, что томсоновское сечение не преобразуется.

**5.135\***. Бесконечная плоская поверхность испускает электромагнитное излучение, плотность энергии которого  $w$ , а диаграмма направленности задается функцией  $\psi(\mu) = 3\mu^2/2\pi$ ,  $\mu = \cos\theta > 0$ , где  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности и направлением излучения. Найти предельную скорость, до которой может ускориться электрон в поле излучения. Почему электрон не может приобрести бесконечную энергию?

**5.136\***. Горячее плоское пятно радиуса  $a$  испускает излучение с плотностью  $w_0$  вблизи поверхности пятна и с изотропной диаграммой направленности. Электрон находится на оси симметрии, перпендикулярной плоскости пятна. Вывести и исследовать дифференциальное уравнение, которое описывает изменение релятивистского фактора  $\gamma$  с расстоянием. Получить его численные решения. Определить предельный лоренц-фактор, до которого возможно ускорение.

**5.137.** Светимостью  $L$  в астрономии называется полная энергия, излучаемая источником в единицу времени. Светимость измеряется в эрг/с или в единицах светимости Солнца  $L_\odot = 3,86 \times 10^{33}$  эрг/с. **Критическая (эдингтоновская) светимость**  $L_c$  — это предельная светимость, при которой сила гравитации еще может уравновесить силу радиационного давления

на плазменную оболочку звезды. При  $L > L_c$  давление излучения приводит к разлету плазменной оболочки. Вычислить критическую светимость сферической звезды, выразив ее через массу звезды в предположении, что давление излучения действует на квазинейтральную водородную (электронно-протонную) плазму.

**5.138\***. На электрон в разреженной плазме действует сильная ( $eE_0/mc\omega \gg 1$ ) электромагнитная волна, поляризованная по кругу, в которой

$$E_x = E_0 \sin \omega \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad E_y = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad H_x = E_y, \quad H_y = -E_x.$$

Рассмотреть рассеяние волны электроном в стационарном режиме, в котором его скорость в направлении распространения волны  $v_z = 0$  и электрон движется по круговой орбите, лежащей в плоскости  $xy$ , а частота его обращения равна частоте волны  $\omega$ . Движению электрона в продольном направлении препятствует электрическое поле, возникающее вследствие поляризации плазмы. Стационарность движения достигается за счет того, что вся энергия, получаемая от волны, рассеивается электроном. Показать, что такой режим движения электрона существует, и найти сечение рассеяния сильной волны электроном. На основе численного расчета построить кривую зависимости полного сечения рассеяния от амплитуды падающей волны в нелинейном режиме.

**5.139\*\***. Пусть сильная электромагнитная волна, поляризованная по кругу (см. предыдущую задачу) распространяется в направлении однородного и постоянного магнитного поля. Исследовать стационарный режим движения электрона, в том числе подробно исследовать случай резонанса, когда направление вращения электрона волной и частота волны совпадают с направлением и частотой обращения электрона в магнитном поле. Выполнить численный расчет сечения рассеяния сильной волны электроном в магнитном поле, построить резонансную кривую зависимости сечения рассеяния от частоты волны и от величины продольного магнитного поля.

**5.140\*\***. Свободный электрон находится в поле плоской монохроматической волны произвольной силы. Вычислить без учета реакции излучения интенсивность рассеянного излучения и сечение рассеяния. Рассмотреть различные поляризации падающей на электрон плоской волны.

**5.141\***. Релятивистская частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в постоянном и однородном электрическом поле  $\mathbf{E} = \text{const}$  под произвольным углом. Вычислить без учета реакции излучения спектральную плотность излучения в данном направлении  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ .

**5.142.** Нерелятивистская заряженная частица, движущаяся со скоростью  $v_0$ , подвергается воздействию электрического поля  $E(t) = E_0 T_0 \delta(t)$  в направлении своего движения. Проанализировать решения уравнения движения частицы с учетом силы радиационного торможения. Можно ли выбрать постоянные интегрирования так, чтобы избавиться от самоускорения? Вычислить полную энергию, излученную частицей.

**5.143.** Разложить по плоским волнам потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  и электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  неподвижного точечного заряда  $e$ .

**5.144.** Точечный заряд движется в вакууме со скоростью  $\mathbf{v} = \text{const}$ . Разложить поле  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  заряда на плоские монохроматические волны.

**5.145\***. Найти потенциалы  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  поля равномерно движущегося точечного заряда  $e$  (см. ответ к задаче 4.34), используя разложения этих потенциалов по плоским волнам, полученные в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. Для вычисления интеграла по  $(d\mathbf{k})$  сделать замену переменных  $k_x \rightarrow \frac{k_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,  $k_y \rightarrow k_y$ ,  $k_z \rightarrow k_z$  (ось  $x \parallel v$ ) и воспользоваться разложением поля неподвижного точечного заряда на плоские волны (см. задачу 5.143).

**5.146\***. Нейтральная точечная система зарядов движется в вакууме равномерно со скоростью  $\mathbf{v}$ . Найти электромагнитное поле  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , воспользовавшись разложением Фурье по плоским монохроматическим волнам, если электрический  $\mathbf{p}$  и магнитный  $\mathbf{m}$  дипольные моменты в лабораторной системе отсчета заданы.

УКАЗАНИЕ. Плотности электрического заряда и тока системы выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= c \operatorname{rot}[\mathbf{m}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)] + \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)], \\ \rho &= -\operatorname{div}[\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)]. \end{aligned}$$

**5.147.** Получить потенциалы поля равномерно движущегося магнитного диполя (момент  $\mathbf{m}_0$  в системе покоя диполя). Скорость диполя  $\mathbf{v}$ . Ограничиться двумя частными случаями: а) когда  $\mathbf{m}_0 \parallel \mathbf{v}$ , б) когда  $\mathbf{m}_0 \perp \mathbf{v}$ . Воспользоваться формулами преобразования моментов, полученными в задаче 4.37.

**5.148.** Получить поле равномерно движущегося электрического диполя (момент  $\mathbf{p}_0$  в системе покоя) с помощью результатов задачи 5.146 (см. ответ к задаче 4.36).



**5.149\***. Электромагнитное поле излучения описывается осцилляторными координатами  $q_{\mathbf{k}\lambda}$  (см. формулу 2.144). Написать дифференциальные уравнения, которыми описывается взаимодействие поля излучения в переменных  $q_{\mathbf{k}\lambda}$  с заряженной нерелятивистской частицей.

**5.150.** Найти изменение в единицу времени энергии  $\frac{dW}{dt}$  поля излучения в результате взаимодействия частицы с полем. Выразить эту величину через осцилляторные координаты  $q_{\mathbf{k}\lambda}$  и силы  $F_{\mathbf{k}\lambda}(t)$  (см. решение предыдущей задачи).

**5.151\***. Частица с зарядом  $e$  совершает простое гармоническое колебание по заданному закону  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \sin \omega_0 t$ , где  $\mathbf{r}_0 = \text{const}$ . Используя метод осцилляторов поля (см. задачу 5.149), найти угловое распределение и полную интенсивность  $I$  излучения<sup>4</sup>.

**5.152.** Заряд  $e$  движется с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  по окружности радиуса  $a_0$ . Используя метод осцилляторов поля, исследовать характер поляризации поля излучения заряда, найти угловое распределение и полную интенсивность излучения (ср. с задачей 5.21).

**5.153\***. Линейно поляризованная волна с частотой  $\omega$  падает на гармонический осциллятор, собственная частота которого  $\omega_0$ . Используя метод осцилляторов поля, найти дифференциальное  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  и полное  $\sigma$  сечения рассеяния (лучистое трение не учитывать). Исследовать поляризацию рассеянного излучения.

**5.154.** Найти дифференциальное  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  и полное  $\sigma$  сечения рассеяния линейно поляризованной, поляризованной по кругу и неполяризованной монохроматических волн на свободном заряде, используя метод осцилляторов поля (ср. с задачами 5.127 и 5.128).

**5.155.** На свободном заряде рассеивается: а) неполяризованная волна с частотой  $\omega$ ; б) волна, поляризованная по кругу. Исследовать характер поляризации поля излучения, используя метод осцилляторов поля (см. задачи 5.127 и 5.128).

---

<sup>4</sup>Задача, конечно, может быть решена значительно проще (см. раздел 5.2). Предлагаемый метод решения интересен своей тесной связью с методом решения аналогичной задачи в квантовой электродинамике.

## 5.5. Ответы и решения

5.2.  $G^A(R, \tau) = \delta(\tau + R/c)/R$ . Контур интегрирования см. на рис. 5.3.

5.5.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\omega^A(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\exp[-i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') dV', \\ \varphi_\omega^A(\mathbf{r}) &= \int \frac{\exp[-i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_\omega(\mathbf{r}') dV'. \end{aligned}$$

Гармоники Фурье запаздывающих потенциалов содержат экспоненты  $\exp[i(kR - \omega t)]$ ,  $k = \omega/c$ , что соответствует расходящимся сферическим волнам, переносящим возмущения от излучающей системы зарядов в окружающее пространство. Гармоники Фурье опережающих потенциалов содержат экспоненты  $\exp[-i(kR + \omega t)]$ , которые описывают сходящиеся к центру сферические волны. Такие волны могли бы создаваться некоторым источником, находящимся на бесконечности, но не заданной системой зарядов. Поэтому опережающие потенциалы непригодны для описания процесса излучения в безграничном пространстве.

$$5.8. \quad \psi^{R,A}(R, \tau) = -i^{1/2} \left( \frac{\omega}{4\pi\tau c^2} \right)^{3/2} \exp \left[ \pm \frac{i\tau}{\omega} (\omega^2 \pm i\omega 0) + \frac{i\omega}{4\tau c^2} R^2 \right].$$

$$5.9. \quad \tilde{G}^+(k) = -4\pi \frac{\mathcal{P}}{k_i k^i}, \quad \tilde{G}^-(k) = -i8\pi^2 \epsilon(k^0) \delta(k_i k^i),$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta G^+ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G^+}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \\ \Delta G^- - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G^-}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$5.10. \quad \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t),$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{R})}{R^5} \right\} dV',$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . В уравнение для  $\varphi$  время входит как параметр. Поэтому скалярный потенциал описывает кулоновское поле, определяемое мгновенным (незапаздывающим) распределением зарядов.

**5.11.** Имеем по определению соленоидальных и потенциальных величин:

$$\nabla \cdot \mathbf{H}^\perp = \nabla \cdot \mathbf{E}^\perp = \nabla \cdot \mathbf{j}^\perp = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^\parallel = \nabla \times \mathbf{E}^\parallel = \nabla \times \mathbf{j}^\parallel = 0.$$

В силу уравнения Максвелла  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  все магнитное поле соленоидально, т. е.  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\perp$ ,  $\mathbf{H}^\parallel = 0$ . Потенциальное электрическое поле удовлетворяет уравнениям

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^\parallel(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \times \mathbf{E}^\parallel(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Это — уравнения электростатики, в которые время входит как параметр. Они описывают мгновенное кулоновское взаимодействие. Соленоидальные составляющие удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \times \mathbf{H}^\perp = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^\perp}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^\perp, \quad \nabla \times \mathbf{E}^\perp = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^\perp}{\partial t}.$$

**5.12.** Воспользуемся дифференциальным уравнением для функции  $G_\omega^R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ :

$$(1) \quad \begin{aligned} (\Delta_r + k^2)G_\omega^R &= -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\ &= -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r - r')\delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta')\delta(\alpha - \alpha'), \quad k = \frac{|\omega|}{c}. \end{aligned}$$

Поскольку сферические функции Лежандра  $Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = -l, -l + 1, \dots, +l$ ) образуют полную ортонормированную систему (см. раздел 1.3), то они удовлетворяют условию

$$(2) \quad \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta')\delta(\alpha - \alpha').$$

Таким образом, в правую часть уравнения (1) можно ввести сумму (2). В левой части уравнения присутствует оператор Лапласа

$$(3) \quad \Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi},$$

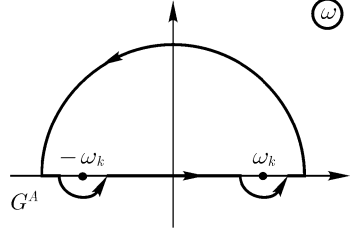


Рис. 5.3

причем, согласно результату задачи 1.119,

$$\left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right\} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = \\ = \Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\vartheta, \alpha).$$

Это позволяет искать решение уравнения (1) в виде ряда

$$(4) \quad G_{\omega}^R = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r, r') \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$$

и для неизвестных функций  $f_l(r, r')$  получить уравнение

$$(5) \quad \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] f_l = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r').$$

Решениями однородного уравнения (5) являются всевозможные сферические функции Бесселя, определение и некоторые свойства которых см. в разделе 1.3. При фиксированном конечном  $r'$  решение уравнения (5) должно быть ограничено при  $r \rightarrow 0$  и описывать расходящуюся сферическую волну при  $r \rightarrow \infty$ . Для удовлетворения этим условиям ищем решение в форме

$$(6) \quad f_l(r, r') = \begin{cases} B j_l(kr), & r < r'; \\ C h_l^{(1)}(kr), & r > r', \end{cases}$$

где сферические функции Бесселя  $j_l$  и Ханкеля  $h_l^{(1)}$  обладают нужными асимптотиками.

Коэффициенты  $B, C$  нужно находить из граничных условий при  $r = r'$ . Очевидно, что сама функция  $f_l(r, r')$  должна быть непрерывна при  $r = r'$ ,  $f_l(r, r')|_{r=r'+0} = f_l(r, r')|_{r=r'-0}$  — в противном случае уравнение (5) нарушится. Условие на первую производную можно получить, проинтегрировав обе части (5) по малому интервалу  $[r' - \epsilon, r' + \epsilon]$  и перейдя к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ . Это даст (с учетом непрерывности и конечности  $f_l(r, r')$ )

$$(8) \quad \frac{df_l}{dr} \Big|_{r=r'+0} - \frac{df_l}{dr} \Big|_{r=r'-0} = -\frac{4\pi}{r'^2}.$$

С помощью (6)–(8), используя также значение определителя Вронского для сферических функций Бесселя

$$W(j_l(z), h_l^{(1)}(z)) = j_l(z)h_l^{(1)'}(z) - h_l^{(1)}(z)j_l'(z) = \frac{i}{z^2},$$

получим

$$(9) \quad f_l(r, r') = 4\pi ik \begin{cases} j_l(kr)h_l^{(1)}(kr'), & r < r'; \\ j_l(kr')h_l^{(1)}(kr), & r > r'. \end{cases}$$

Эту функцию и следует подставлять в разложение (4).

### 5.13.

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{l,m} \mathbf{Q}_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha), \quad \varphi_\omega(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{l,m} Q'_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{lm} &= 4\pi(-i)^{l+2} \int \mathbf{j}_\omega(r', \vartheta', \alpha') j_l(kr') Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') r'^2 dr' d\Omega', \\ Q'_{lm} &= 4\pi(-i)^{l+2} \int \rho(r', \vartheta', \alpha') j_l(kr') Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') r'^2 dr' d\Omega'; \\ Q'_{lm} &= \frac{r}{r'} \cdot \mathbf{Q}_{lm}. \end{aligned}$$

### 5.16.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}(t') \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta}(t') x_\alpha x_\beta}{2r^5}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t). \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{cr} + \frac{\mathbf{m}(t') \times \mathbf{n}}{r^2}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{cr^2} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})}{r^3} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}. \end{aligned}$$

Электрическое поле выражается статическими формулами с зависящими от времени дипольным и квадрупольным моментами. Магнитное поле содержит дополнительный член, обязанный закону Био–Савара: если элементарный диполь  $\mathbf{p}(t) = e(t)\mathbf{l}$ , то  $\mathbf{H}_{BS} = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}/cr^2 = J(t)[\mathbf{l} \times \mathbf{r}]/cr^3$  представляет собой поле элементарного тока  $J(t) = \dot{q}(t)$ , текущего в отрезке  $l$ .

**5.18.** В сферических координатах с полярной осью вдоль  $\mathbf{p}_0$  имеем

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2p_0}{r^2} \cos \vartheta \left[ \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t) + k \sin(kr - \omega t) \right], \\ E_\vartheta &= \frac{p_0}{r} \sin \vartheta \left[ \left( \frac{1}{r^2} - k^2 \right) \cos(kr - \omega t) + \frac{k}{r} \sin(kr - \omega t) \right], \\ H_\alpha &= -\frac{p_0 k^2}{r} \sin \vartheta \left[ \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right], \quad E_\alpha = H_r = H_\vartheta = 0. \end{aligned}$$

**5.19.** Магнитные силовые линии имеют вид окружностей, плоскости которых нормальны к оси  $z$ , а центры лежат на этой оси: Электрические силовые линии описываются следующими уравнениями.

$$C_1 = \sin^2 \vartheta \left[ \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t) + k \sin(kr - \omega t) \right], \quad C_2 = \alpha,$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные.

**5.20.** Плотность потока момента импульса:

$$\mathfrak{R} = \frac{(\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}})(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{p}})}{2\pi c^3 r^2}.$$

При вычислении величины  $-\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int \mathfrak{R} r^2 d\Omega$  полезно воспользоваться формулой  $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3} \delta_{ik}$  (см. гл. I).

В результате получим:

$$-\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

**5.21.**

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \text{rot } \mathbf{Z}}{\partial t} = ea \left[ \mathbf{e}_\vartheta \left( -i \frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{\omega}{cr^2} \right) + \mathbf{e}_\alpha \left( \frac{\omega^2}{c^2 r} + i \frac{\omega}{cr^2} \right) \cos \vartheta \right] e^{i(kr - \omega t + \alpha)},$$

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{Z} = ea \left[ \mathbf{e}_r \left( -\frac{i\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2 \sin \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \left( \frac{\omega^2}{c^2 r} + i \frac{\omega}{cr^2} - \frac{1}{r^3} \right) \cos \vartheta + \mathbf{e}_\alpha \left( i \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{\omega}{cr^2} - \frac{i}{r^3} \right) \right] e^{i(kr - \omega t + \alpha)}.$$

В волновой зоне  $r \gg \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  выражения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  упрощаются:

$$\mathbf{H} = ea \frac{\omega^2}{c^2 r} (-i \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\alpha \cos \vartheta) e^{i(kr - \omega t + \alpha)},$$

$$\mathbf{E} = ea \frac{\omega^2}{c^2 r} (\mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta + i \mathbf{e}_\alpha) e^{i(kr - \omega t + \alpha)} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}.$$

При излучении в верхнюю полусферу ( $\cos \vartheta > 0$ ) получается левая эллиптическая поляризация, в частности, при  $\vartheta = 0$  — левая круговая поляризация. При излучении в нижнюю полусферу ( $\cos \vartheta < 0$ ) — правая эллиптическая поляризация, переходящая в круговую при  $\vartheta = \pi$ . Волны, излучаемые в экваториальной плоскости, имеют линейную поляризацию. Угловое распределение и полная интенсивность излучения:

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \bar{\gamma} \cdot nr^2 = \frac{e^2 \omega^4 a^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad \bar{I} = \frac{2\omega^4 e^2 a^2}{3c^3}.$$

Рассмотренный случай осуществляется, например, при движении заряда в однородном магнитном поле.

$$5.22. \quad \bar{I} = U_0^2 R^4 \omega^4 / 48c^3.$$

$$5.23. \quad \bar{I} = 2^{17} (ea_B)^2 \omega_0^4 / 3^{11} c^3.$$

$$5.24. \quad \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{4q^2 a^4 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2 \vartheta (\cos^2 \vartheta + 1/2), \quad \bar{I} = \frac{112q^2 a^4 \omega^6}{15c^5}.$$

$$5.25. \quad \frac{dI\omega}{d\omega} = \frac{2e^4 E_0^2}{3\pi m^2 c^3} \frac{\omega^2 + \alpha^2}{[(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2][(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2]}.$$

$$5.26. \quad \frac{dI\omega}{d\omega} = \frac{2\tau^2 \omega^4}{3c^3} (p_0^2 + m_0^2) e^{-(\omega\tau)^2/2}.$$

Критерий применимости: размер системы  $l \ll ct$ .

$$5.27. \quad \bar{I} = \frac{S^2 J_0^2 \omega^4}{3c^5}, \quad S = ab.$$

$$5.28. \quad \frac{dI\omega}{d\omega} = \frac{2\pi J_0^2 S^2 \tau^2 \omega^4}{3c^5} e^{-2\omega\tau}.$$

Критерий применимости: размер системы  $\sqrt{S} \ll ct$ .

$$5.29. \quad \bar{I} = 2\eta^4 H^4 m^2 \sin^2 \beta / 3c^3.$$

$$5.30. \quad \eta = \frac{q}{2mc}, \quad \bar{I} = \frac{q^2 \omega^2}{600c} \left( \frac{qHR}{mc^2} \right)^4 \sin^2 \beta.$$

$$5.31. \quad p = \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{Q} \neq 0,$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} = -\frac{4ea^2 \omega^3}{c^3 r} \sin \vartheta [\mathbf{e}_\vartheta \cos(2\omega t' - 2\alpha) + \mathbf{e}_\alpha \cos \vartheta \sin(2\omega t' - 2\alpha)].$$

Частота колебаний распределения заряда и тока и, следовательно, частота поля вдвое превышает частоту  $\omega$  обращения каждого из зарядов по орбите. Поляризация излучения — эллиптическая, приближающаяся к круговой при  $\vartheta \rightarrow 0$ ,  $\pi$  и переходящая в линейную при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{2e^2 a^4 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta), \quad \bar{I} = \frac{32}{5} \cdot \frac{e^2 a^4 \omega^6}{c^5}.$$

Если убрать один из зарядов, то интенсивность излучения возрастет по порядку величины в  $\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2$  раз, т. е. весьма значительно, так как выполняется условие  $\frac{a}{\lambda} \ll 1$ .

**5.32.** Если угол между радиусами-векторами зарядов равен  $\pi - \varphi$ , то

$$\varphi = \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \frac{a\omega}{c}.$$

**5.33.** Направим ось  $x$  вдоль амплитуды момента осциллятора, опережающего по фазе, а в качестве плоскости  $xy$  выберем плоскость, в которой лежат моменты обоих осцилляторов. Обозначив через  $\vartheta$ ,  $\alpha$  полярные углы орта  $\mathbf{n}$ , указывающего направление распространения волны, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(r, t) &= \mathbf{H} e^{-i\omega t'} = \frac{\omega^2 p}{c^2 r} \{ e_{\vartheta} [\sin \alpha + i \sin(\alpha - \varphi)] + \\ &+ e_{\alpha} [\cos \alpha + i \cos(\alpha - \varphi)] \cos \vartheta \}^{-i\omega t'}, \\ \overline{\frac{dI}{d\Omega}} &= \frac{p^2 \omega^4}{8\pi c^3} \{ 2 - [\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha - \varphi)] \sin^2 \vartheta \}, \quad \bar{I} = \frac{2p^2 \omega^4}{3c^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Излучение максимально в направлениях  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ , перпендикулярных моментам обоих осцилляторов, и неравномерно распределено по азимуту. Это иллюстрируется на рис. 5.4 полярными диаграммами для случая  $\varphi = 45^\circ$ . На рис. 5.4а показано угловое распределение по  $\alpha$  в плоскости  $\vartheta = 90^\circ$ , на рис. 5.4б — угловое распределение по  $\vartheta$  в плоскости  $\alpha = \frac{\varphi}{2} = 22,5^\circ$ .

**5.34.** Сдвинув начало отсчета фазы на  $\gamma$ , получим новую амплитуду поля  $\mathbf{H} e^{-i\gamma} = \mathbf{H}_1 - i\mathbf{H}_2$ . Потребовав, чтобы  $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 = 0$ , найдем, что

$$\text{tg } 2\gamma = 2 \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \varphi) + \cos \alpha \cos(\alpha - \varphi) \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \alpha - \sin^2(\alpha - \varphi) + [\cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha - \varphi)] \cos^2 \vartheta}. \quad (2)$$



Определив с помощью (2)  $\cos \gamma$  и  $\sin \gamma$ , найдем  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  в зависимости от  $\vartheta$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$ .

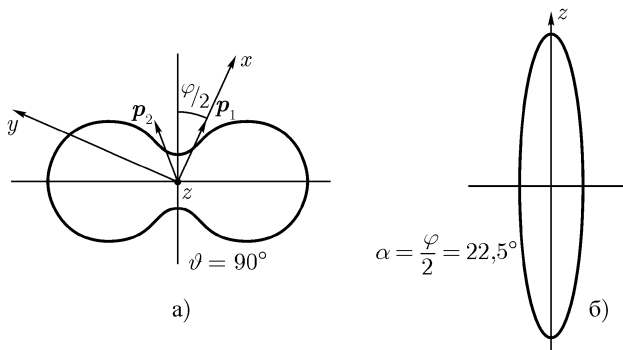


Рис. 5.4

Рассмотрим некоторые частные случаи. При  $\vartheta = 90^\circ$  поляризация линейная; плоскость поляризации перпендикулярна плоскости  $xy$ . При  $\vartheta = 0$ ,  $\pi$  поляризация эллиптическая, причем отношение полуосей эллипса равно  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ ; в частности, при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\vartheta = 0, \pi$  поляризация круговая. Легко исследуются также случаи  $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ ,  $\frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\varphi}{2} + \pi$ . Во всех этих случаях поляризация, вообще говоря, эллиптическая. При  $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ ,  $\frac{\varphi}{2} + \pi$  в направлениях, определяемых условием

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = |\cos \vartheta|,$$

поляризация получается круговой.

При  $\alpha = \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$  направления с круговой поляризации определяются уравнением  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = |\cos \vartheta|$ .

$$5.35. \quad \bar{\gamma} = \frac{e^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3 r^2} (1 + \cos^2 \vartheta) \mathbf{e}_r + \frac{e^2 a^2 \omega^3}{4\pi c^2 r^3} \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{N} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 \omega^3}{c^3} \mathbf{e}_z.$$

Последний результат можно получить либо учитывая, что теряемый излучающей системой в единицу времени момент импульса  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}$  (см. задачу 5.20) равен вращательному моменту  $\mathbf{N}$ , приложенному к экрану,

либо непосредственно по формуле  $N$

$$N = \frac{1}{c} \int_{r \gg a} \mathbf{r} \times \bar{\gamma} r^2 d\Omega.$$

**5.36.**  $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega_0^4}{4\pi c^3} \{p^2(1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha) + m^2 \sin^2 \vartheta + mp \sin \vartheta \sin \alpha\};$   
 $I = \frac{2\omega_0^4}{3c^3} (p^2 + m^2).$  Здесь использована система координат, ось  $x$  которой направлена вдоль  $\mathbf{p}$ , а ось  $z$  — вдоль  $\mathbf{m}$ .

Усреднив интенсивности излучения по периоду колебания, получим

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{\omega_0^4}{8\pi c^3} \{p_0^2(1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha) + m_0^2 \sin^2 \vartheta\}, \quad \bar{I} = \frac{\omega_0^4}{3c^3} (p_0^2 + m_0^2).$$

**5.37.**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}}{6c^2 r} + \frac{\mathbf{n}}{6c^2 r} \int r'^2 \ddot{\rho} dV' + \\ &+ \frac{1}{2c^3 r} \int \mathbf{r}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 \ddot{\rho} dV' - \frac{1}{c^3 r} \int \mathbf{r}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{j}}) dV', \\ I &= \frac{2}{3c^3} (\dot{\mathbf{p}}^2 + \dot{\mathbf{m}}^2) + \frac{1}{180c^5} \ddot{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{15c^5} \dot{\mathbf{p}} \cdot \ddot{\mathbf{L}}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{L} = \int \dot{\rho} r'^2 \mathbf{r}' dV' + \int [r'^2 \mathbf{j} - 3\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j})] dV',$$

все остальные обозначения общепринятые и все величины, зависящие от времени, берутся в запаздывающий момент  $t' = t - r/c$ . Обращаем внимание читателя на последнее слагаемое в выражении для  $I$  [Баранова и Зельдович (1977)], которое отсутствует в большинстве учебников по электродинамике.

**5.38.** Используя разложение (5.16) потенциалов в ряд Фурье и вычислив гармонику Фурье напряженности магнитного поля (5.17), получим

$$\mathbf{H}_m = i \frac{e m \omega^2}{2\pi c^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}}}{r} \int_0^T \mathbf{n} \times \mathbf{v}(\tau) \exp i(m\omega\tau - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{s}(\tau)) d\tau,$$

где  $\mathbf{k}_m = m\omega\mathbf{n}/c$ ,  $\mathbf{s}(\tau) = \mathbf{e}_z z(\tau)$ . Интеграл по времени выражается через функцию Бесселя согласно (1.150). В итоге получим

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_m|^2 r^2 = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \operatorname{tg}^2 \theta m^2 J_m^2(m\beta \cos \theta),$$

где  $\beta = a\omega/c$ ,  $\theta$  — угол между направлением излучения  $\mathbf{n}$  и осью  $Oz$ . Здесь учтено, что гармоники с номерами  $m$  и  $-m$  дают одинаковый вклад в излучение. При  $\beta \ll 1$  получим

$$\frac{dI_1}{d\Omega} \approx \frac{e^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta$$

— дипольное излучение,

$$\frac{dI_2}{d\Omega} \approx \frac{e^2 a^4 \omega^6}{2\pi c^5} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

— квадрупольное излучение, содержащее по сравнению с дипольным малый множитель  $(a\omega/c)^2$ .

### 5.39.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 \beta^2 (4 + \beta^2 \cos^2 \theta)}{32\pi c (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^{7/2}} \sin^2 \theta,$$

$$I = \frac{e^2 \omega^2 \beta^2 (4 - 3\beta^2)}{12c (1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad \beta < 1.$$

**5.40.** 1. Напряженности поля в волновой зоне вычисляем по формулам (5.37), полагая в них  $\mathbf{Q} = 0$ . Угловое распределение излучения

$$(1) \quad \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{1}{4\pi c^3} \overline{|\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{m}}|^2}.$$

Для вычисления правой части используем уравнение движения магнитного момента  $\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}$ . Получаем  $(\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{m}})^2 = \omega^4 m_{\perp}^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2(\omega t - \alpha))$ , где  $\mathbf{m}_{\perp}$  — составляющая, перпендикулярная оси вращения;  $\vartheta$  — полярный угол, отсчитываемый от направления  $\boldsymbol{\omega}$ ;  $\omega t$  и  $\alpha$  — азимуты векторов  $\mathbf{m}_{\perp}$  и  $\mathbf{n}$  в плоскости, перпендикулярной  $\boldsymbol{\omega}$ . После подстановки в (1) и усреднения по времени находим

$$(2) \quad \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{\omega^4 m^2 \sin^2 \varphi}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad \bar{I} = \frac{2\omega^4 m^2 \sin^2 \varphi}{3c^3}.$$

2. Предполагая магнитное поле пульсара дипольным, находим по порядку величины  $m \approx H_0 R^3 \approx 2 \times 10^{30} \text{ Э} \cdot \text{см}^3$ .

3. Подставляя в (2) требуемые величины и  $\sin^2 \varphi \approx 1$ , находим  $\bar{I} \approx \approx 1,3 \times 10^{38} \text{ эрг/с}$ , что составляет  $\approx 3 \times 10^4 L_\odot$ .

4. Уменьшение энергии вращения вычисляем по формуле  $\dot{E}_{\text{rot}} = I\omega\dot{\omega} = -2\mathcal{E}_{\text{rot}}\dot{T}/T$ , где  $I = (2/5)MR^2$  — момент инерции шара,  $M \approx 1,3M_\odot \approx \approx 2,6 \times 10^{33} \text{ г}$  — масса звезды (порядка массы Солнца). Получаем  $\dot{E}_{\text{rot}} \approx \approx -5 \times 10^{38} \text{ эрг/с}$ .

Близость оценок магнитодипольного излучения пульсара и уменьшения механической энергии вращения свидетельствует в пользу разумности модели. Наблюдаемая светимость от Крабовидной туманности  $\approx \approx 4 \times 10^{37} \text{ эрг/с}$  в рентгеновском диапазоне и  $\approx 2 \times 10^{36} \text{ эрг/с}$  в оптическом. Эти данные также не противоречат модели и указывают на то, что около 10% энергии длинноволнового первичного излучения перерабатывается в окружающей звезде плазме во вторичное рентгеновское излучение.

$$5.41. \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{9}{800\pi} \cdot \frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta,$$

$$\bar{I} = \frac{3}{500} \cdot \frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}.$$

$$5.42. \quad \mathbf{E} = \frac{qr}{r^3}, \quad \mathbf{H} = 0.$$

5.43. Поле магнитного диполя:

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}}(t')}{c^2 r} + \frac{\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{m}}(t')}{c^2 r},$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}_m = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\mathbf{n}(\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - \dot{\mathbf{m}}}{cr^2} + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})}{c^2 r}.$$

Поле электрического диполя получится из поля магнитного диполя путем замены  $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{H}_m \rightarrow \mathbf{E}_e$ ,  $\mathbf{E}_m \rightarrow -\mathbf{E}_e$ .

$$5.44. \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega^2 p_0^2}{8\pi c^3} (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha) \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right),$$

где  $\vartheta$ ,  $\alpha$  — полярные углы, характеризующие направление излучения (см. полярные диаграммы на рис. 5.5). Опережающий осциллятор расположен выше по оси  $z$ .

**5.50.** Разлагая вектор Герца  $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$  на монохроматические компоненты и используя разложение, полученное в задаче 5.12, найдем,

$$(1) \quad \mathbf{Z}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}(t')}{r},$$

где  $t' = t - \frac{r}{c}$ ,

$$(2) \quad \mathbf{Z}_Q(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2r^2} \mathbf{Q}(t') + \frac{1}{2rc} \dot{\mathbf{Q}}(t'),$$

$$(3) \quad \mathbf{Z}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{m}(t') \times \mathbf{n}}{r} + \frac{c}{r^2} \left[ \int \mathbf{m}(t') dt' \right] \times \mathbf{n}.$$

Эти формулы справедливы при  $r \gg a$ , где  $a$  — размер системы. Произвольная постоянная, возникающая при вычислении интеграла, входящего в (3), не сказывается на величине напряженностей поля.

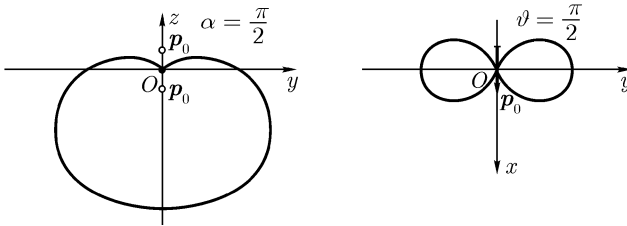


Рис. 5.5

**5.51.** Дипольные моменты системы равны нулю, электрический квадрупольный момент имеет одну отличную от нуля компоненту  $Q_{zz}$  (если направить ось  $z$  вдоль  $\mathbf{p}_0$ ).

Вследствие этого вектор  $\mathbf{Q}$  будет параллелен оси  $z$  и равен  $\mathbf{Q}(t') = Q_0 \cos \vartheta \cos \omega t' \mathbf{e}_z$  при соответствующем выборе начала отсчета времени, здесь  $Q_0 = 2p_0 a$ .

Удобно проводить вычисления в комплексной форме, воспользовавшись выражением (2) из решения задачи 5.50 и спроектировав  $\mathbf{Z}$  на оси сферической системы координат. Отделив вещественную часть, получим

в результате:

$$H_\alpha = \frac{Q_0 \sin 2\vartheta}{4} \left[ \left( \frac{k^3}{r} - \frac{3k}{r^3} \right) \sin(\omega t - kr) - \frac{3k^2}{r^2} \cos(\omega t - kr) \right],$$

$$E_r = \frac{Q_0(3 \cos^2 \vartheta - 1)}{2} \left[ \left( \frac{3}{r^4} - \frac{k^2}{r^2} \right) \cos(\omega t - kr) - \frac{3k}{r^3} \sin(\omega t - kr) \right],$$

$$E_\vartheta = \frac{Q_0 \sin 2\vartheta}{4} \left[ \left( \frac{6}{r^4} - \frac{3k^2}{r^2} \right) \cos(\omega t - kr) + \left( \frac{k^3}{r} - \frac{6k}{r^3} \right) \sin(\omega t - kr) \right],$$

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{Q_0^2 \omega^6}{32\pi c^5} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta, \quad \bar{I} = \frac{Q_0^2 \omega^6}{60c^5},$$

где  $Q_0 = 2p_0 a$ .

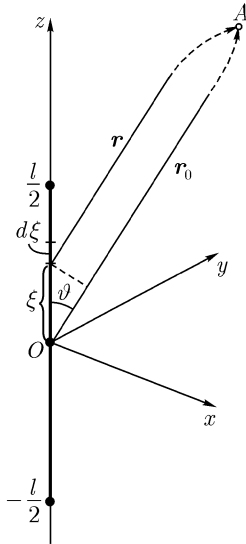


Рис. 5.6

**5.52.** Выберем координатную систему, как показано на рис. 5.6. Распределение тока в антенне выражается формулой

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \sin \left[ k \left( \xi + \frac{l}{2} \right) \right] e^{-i\omega t},$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{m\pi}{l}.$$

Электрический дипольный момент единицы длины антенны  $P = \frac{i}{\omega} \mathcal{I}$ , согласно (5.41). Элемент  $d\xi$  антенны можно рассматривать как электрический дипольный осциллятор с моментом  $dp = P d\xi$ . Поскольку выполняется неравенство  $d\xi \ll \lambda$ , то создаваемое элементом  $d\xi$  в точке  $A$  магнитное поле можно вычислить по формулам (5.27) и 5.28:

$$d\mathbf{H}_0(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{\omega^2}{c^2 r} e_\alpha \sin \vartheta P \left( t - \frac{r}{c} \right) d\xi,$$

где

$$r = r_0 - \xi \cos \vartheta.$$

Так как мы интересуемся только полем в волновой зоне, то величину  $\frac{\sin \vartheta}{r}$ , которая мало меняется в области  $r \gg l$ , можно вынести из-под знака интеграла.

Таким образом

$$H_r = H_\vartheta = 0, \quad H_\alpha = -\frac{i\omega \sin \vartheta}{c^2 r_0} \mathcal{J}_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{ik\xi \cos \vartheta} \sin m\pi \left( \frac{\xi}{l} + \frac{1}{2} \right) d\xi.$$

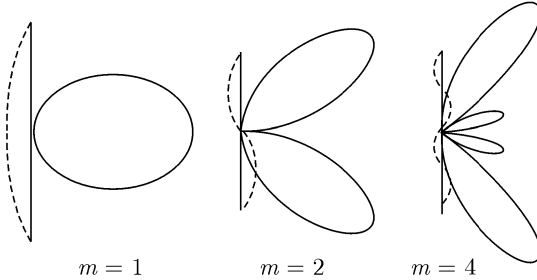


Рис. 5.7

Выполнив интегрирование, найдем угловое распределение по формуле  $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \overline{H_\alpha^2} r_0^2$ :

$$\frac{dI}{d\Omega} = \begin{cases} \frac{\mathcal{J}_0^2}{2\pi c} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta} & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ \frac{\mathcal{J}_0^2}{2\pi c} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta} & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

Характер углового распределения виден из полярных диаграмм, приведенных на рис. 5.7. Штриховой линией показано распределение тока по длине антенны, сплошной — угловое распределение излучения.

### 5.53.

$$\bar{I} = \frac{\mathcal{J}_0^2}{2c} [\ln(2\pi m) + C - Ci(2\pi m)],$$

$$R = 2 \frac{\bar{I}}{\mathcal{J}_0^2} = \frac{1}{c} [\ln(2\pi m) + C - Ci(2\pi m)].$$

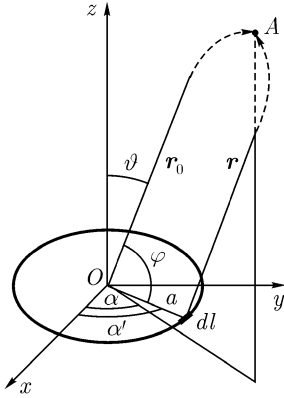


Рис. 5.8

$$5.54. \quad \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{\mathcal{I}_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \left[ \frac{kl}{2} (1 - \cos \vartheta) \right]}{(1 - \cos \vartheta)^2},$$

$$\bar{I} = \frac{\mathcal{I}_0^2}{c} \left[ C - 1 + \ln \frac{4\pi l}{\lambda} - Ci \left( \frac{4\pi l}{\lambda} \right) + \frac{\sin(4\pi l/\lambda)}{4\pi l/\lambda} \right],$$

где  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  — длина излучаемой волны,  $\vartheta$  полярный угол, отсчитываемый от координатной оси  $\xi$ .

Легко убедиться, что бегущая волна излучает интенсивнее, чем стоячая волна с теми же значениями  $l$ ,  $\lambda$ ,  $\mathcal{I}_0$ .

**5.55.** Если расстояние  $r$  точки наблюдения  $A(r_0, \vartheta, \alpha)$  (рис. 5.8) от петли велико ( $r \gg a$ ), то можно считать, что радиусы-векторы  $\mathbf{r}$  от всех элементов кольца  $d\mathbf{l}$  параллельны, причем  $r_0 - a \cos \varphi = r_0 - a \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha)$ . Элемент  $d\mathbf{l}$  обладает электрическим дипольным моментом  $d\mathbf{p} = P d\mathbf{l} = \frac{i}{\omega} \mathcal{I} d\mathbf{l}$ , где через  $P$  обозначен электрический дипольный момент единицы длины провода, и создает в точке  $A$  магнитное поле (см. (5.28):

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\mathbf{p}(t') \times \mathbf{n}}{r} = -i \frac{\omega a}{c^2} \cdot \frac{\mathcal{I}_0}{r_0} e^{-i\omega t + ikr_0 - iak \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha)} \times \\ \times \sin n\alpha' [\cos(\alpha' - \alpha) \mathbf{e}_\vartheta + \cos \vartheta \sin(\alpha' - \alpha) \mathbf{e}_\alpha] d\alpha'.$$

В знаменателе последнего выражения пренебрегаем величиной порядка  $a$  по сравнению с  $r_0$ . Этого нельзя делать в показателе степени, так как величина  $ak$ , вообще говоря, не мала и существенно влияет на фазу.

Задача нахождения поля сводится к интегрированию:

$$H_\vartheta = -\frac{i\omega a}{c^2} \frac{\mathcal{I}_0}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha' - \alpha) \sin n\alpha' e^{-ika \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha)} d\alpha'.$$

Выражение для  $H_\alpha$  отличается от выражения  $H_\vartheta$  заменой в предэкспоненциальном множителе  $\cos(\alpha' - \alpha)$  на  $\sin(\alpha' - \alpha)$ .



Вводя переменную интегрирования  $\beta = \alpha' - \alpha$ , получим:

$$H_{\vartheta} = -\frac{i\omega a}{c^2} \cdot \frac{\mathcal{J}_0}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \left( \cos n\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos \beta \sin n\beta e^{-ika \sin \vartheta \cos \beta} d\beta + \sin n\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos \beta \cos n\beta e^{-ika \sin \vartheta \cos \beta} d\beta \right).$$

Первый из интегралов, стоящих в скобке, обращается в нуль вследствие нечетности подынтегральной функции, второй может быть преобразован к промежутку  $0, \pi$  (четная подынтегральная функция) и выражен через производную от функции Бесселя (см. раздел 1.3). Таким образом,

$$H_{\vartheta}(r_0, t) = -E_{\alpha} = \frac{2\pi\omega a}{c^2} \cdot \frac{\mathcal{J}_0}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t - n\frac{\pi}{2})} \sin n\alpha J'_n(ka \sin \vartheta).$$

Путем аналогичных вычислений с использованием формулы  $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$ , получим

$$H_{\alpha}(r_0, t) = E_{\vartheta} = \frac{2\pi\omega a n \mathcal{J}_0 e^{i(kr_0 - \omega t - n\frac{\pi}{2})}}{c^2 r_0} \cos n\alpha \frac{J_n(ka \sin \vartheta)}{ka \operatorname{tg} \vartheta}.$$

**5.56.** Вводим электрический вектор Герца согласно (5.43) и вычисляем магнитное поле по формуле, приведенной в задаче 5.47:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^{(e)}}{\partial t} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' = \\ &= \operatorname{rot} \frac{\mathbf{e}_z J_0}{c} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{R} \sin[k_m(\xi + l/2)] \cos \omega_m(t - R/c) \exp[-\gamma(t - r/c)] d\xi. \end{aligned}$$

Пользуясь рисунком 5.6, находим  $R \approx r_0 - \xi \cos \vartheta \approx r_0$ , так как в плоскости симметрии  $\vartheta = \pi/2$ . При вычислении интеграла по  $d\xi$  отличный от нуля результат получается только для нечетных  $m$ . После вычисления ротора и интеграла Фурье получим для нечетных значений  $m$  компоненту Фурье магнитного поля

$$\mathbf{H}_{\omega} = \frac{J_0[\omega_m^2 + \gamma(i\omega - \gamma)]}{r_0 c^2 k_m [\omega_m^2 + (i\omega - \gamma)^2]} [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{e}_z] e^{i\omega r_0/c}$$

и спектральную плотность излучения в плоскости симметрии  $\vartheta = \pi/2$ :

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{J_0^2 [(\omega_m^2 - \gamma^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}{4\pi^2 c \omega_m^2 [(\omega_m^2 - \omega^2 + \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]}.$$

При  $m$  четном спектральная плотность излучения в плоскости симметрии обращается в нуль. При  $\gamma^2 \ll \omega_m^2$  спектр излучения имеет типичную резонансную форму с острым максимумом на частоте  $\omega^2 = \omega_m^2 + \gamma^2$ .

**5.57.** Магнитное поле создается  $N$  источниками. Вычисляя его через вектор Герца, как в предыдущей задаче, будем иметь

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t) = -Re \left\{ i \frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{e}_z J_0 k_m}{c r_0} \exp[i\omega_m(t - R/c)] \cdot \sum_{s=0}^{N-1} \exp[i s k_m a \sin \vartheta \cos \varphi] \int_{-l/2}^{l/2} \sin[k_m(\xi + l/2)] \exp[i k_m \xi \cos \vartheta] d\xi \right\}.$$

Интеграл берется без затруднений, а сумма вычисляется по формуле для геометрической прогрессии. Интенсивность излучения, усредненная по времени, вычисляется по формуле

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{c r_0^2}{8\pi} |\mathbf{H}|^2 = \frac{J_0^2}{2\pi c \sin^2 \vartheta} \frac{\sin^2[(N/2)k_m a \sin \vartheta \cos \varphi]}{\sin^2[(1/2)k_m a \sin \vartheta \cos \varphi]} \begin{cases} \cos^2[(m\pi/2) \cos \vartheta], \\ \sin^2[(m\pi/2) \cos \vartheta], \end{cases}$$

где верхнее значение в фигурных скобках относится к  $m$  нечетному, а нижнее — к  $m$  четному.

$$\mathbf{5.58.} \quad \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{2i_0^2}{2\pi c k_m^2} \frac{\sin^2[k_m b \sin \vartheta \cos \varphi]}{\sin^4 \vartheta \cos^2 \varphi} \begin{cases} \cos^2[(m\pi/2) \cos \vartheta], \\ \sin^2[(m\pi/2) \cos \vartheta], \end{cases}$$

где верхнее значение в фигурных скобках относится к  $m$  нечетному, а нижнее — к  $m$  четному.

**5.59.** Так как  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , то  $(j_x, j_y, j_z) \rightarrow (-j_x, -j_y, j_z)$ , при этом отраженные токи вычисляются в отраженных точках:  $\mathbf{j}_x(\mathbf{r}) = -\mathbf{j}'_x(\mathbf{r}')$  и т. д.

Аналогично, используя обычные определения и формулы (5.1), (5.2), записанные в декартовых координатах, получим:

$$\begin{aligned}(p_x, p_y, p_z) &\rightarrow (-p_x, -p_y, p_z), & (Q_x, Q_y, Q_z) &\rightarrow (-Q_x, -Q_y, -Q_z), \\ (\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_y, \mathbf{m}_z) &\rightarrow (\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_y, -\mathbf{m}_z), & (E_x, E_y, E_z) &\rightarrow (-E_x, -E_y, E_z), \\ & & (H_x, H_y, H_z) &\rightarrow (H_x, H_y, -H_z).\end{aligned}$$

**5.60.** Граничные условия  $H_n = 0$  и  $E_\tau = 0$  на поверхности ( $z = 0$ ) проводника выполняются — это прямо следует из результатов задачи 5.59. В частном случае электрического дипольного осциллятора электромагнитное поле в полупространстве  $z > 0$  совпадает с полем электрического дипольного осциллятора с моментом  $\mathbf{p} = 2e_z f(t) \sin \varphi_0$ . Оно обращается в нуль при  $\varphi_0 = 0$  (диполь параллелен плоскости) и максимально при  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  (диполь перпендикулярен плоскости). Полная энергия, излучаемая в последнем случае в полупространство  $z > 0$ , вчетверо превышает энергию излучения такого же осциллятора, находящегося вдали от проводящей плоскости.

**5.61.**

$$\begin{aligned}E_\vartheta &= H_\alpha = \frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r} \cos 2\vartheta \cos \alpha \cos \omega t', \\ E_\alpha &= -H_\vartheta = -\frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r} \cos \vartheta \sin \alpha \cos \omega t', \\ \overline{\frac{dI}{d\Omega}} &= \frac{p_0^2 a^2 \omega^6}{32\pi c^6} (\cos^2 2\vartheta \cos^2 \alpha + \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{5.62.} \quad \text{б)} \quad H_r &= 0, & H_\vartheta &= -\frac{ik}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & H_\alpha &= ik \frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \\ E_r &= k^2 u r + \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}, & E_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r \partial \vartheta}, & E_\alpha &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r \partial \alpha}.\end{aligned}$$

**5.64.**

$$u = \frac{p_0}{b} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} - ikp_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{h_l^{(1)}(kb)}{b} \left. \frac{\frac{d[rj_l(kr)]}{dr}}{\frac{d[rh_l^{(1)}(kr)]}{dr}} \right|_{r=a} \cdot h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \vartheta).$$

Поля  $E$  и  $H$  выражаются отсюда по формулам, полученным в задаче 5.62. Для нахождения углового распределения излучения нужно воспользоваться асимптотическим выражением сферических функций Ханкеля (см. (1.173)). При этом получится:

$$E_\alpha = H_\vartheta = 0,$$

$$H_\alpha = ik \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = F(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{r} = E_\vartheta,$$

где

$$F(\vartheta) = \frac{p_0 k^2}{b} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{i^{l-1}} \frac{j_l(kb) \frac{d[rh_l^{(1)}(kr)]}{dr} - h_l^{(1)}(kb) \frac{d[rj_l(kr)]}{dr}}{\frac{d[rh_l^{(1)}(kr)]}{dr}} \Bigg|_{r=a} \times$$

$$\times \frac{dP_l(\cos \vartheta)}{d\vartheta},$$

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{c}{8\pi} |H_\alpha|^2 r^2 = \frac{c}{8\pi} |F(\vartheta)|^2.$$

### 5.66.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int R^{n-1} \rho(\mathbf{r}', t) dV' = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n n!} \frac{d^n R_0^{n-1}}{dt^n},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n n!} \frac{d^n (\mathbf{v}(t) R_0^{n-1})}{dt^n}, \quad \text{где } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad R_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|.$$

Все величины в правых частях этих равенств берутся в тот же момент времени, что и в левых. Запоздывающее взаимодействие формально сводится к мгновенному. Полученными разложениями можно пользоваться при достаточно медленном ( $v \ll c$ ) и плавном (ограничены ускорение и его производные всех порядков) движении для не слишком больших  $R_0$ .

5.67. См. ответ к задаче 4.34.

5.68. При малых  $v/c$  формулы (5.56), (5.58) принимают вид:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3} + 3\frac{e\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{cr^4} - \frac{e\mathbf{v}}{cr^2} + \frac{e\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})}{c^2r^3} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}},$$

$$\mathbf{H} = \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{cr^3} + \frac{e\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}}{c^2r^2} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

Здесь  $r$  — расстояние от какой-либо точки области, в которой происходит движение заряда, до точки наблюдения.

Первые три члена в выражении  $\mathbf{E}$  и первый член в  $\mathbf{H}$  пропорциональны  $1/r^2$  и преобладают на сравнительно малых расстояниях от заряда (в квазистационарной зоне). Электрическое поле в этой зоне сводится в основном к кулонову полю  $\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}$ ; магнитное поле описывается формулой Био–Савара  $\mathbf{H} = \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{cr^3}$ . На больших расстояниях от заряда (в волновой зоне) доминируют последние члены в  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , убывающие по закону  $1/r$ . Эти члены описывают поле излучения и имеют вид:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})}{c^2r}, \quad \mathbf{H} = \frac{e\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}}{c^2r},$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Положение границы квазистационарной и волновой зон определяется условием

$$\frac{e/r_{\text{гр}}^2}{e|\dot{\mathbf{v}}|/c^2r_{\text{гр}}} \sim 1,$$

откуда

$$r_{\text{гр}} \approx a \left( \frac{c^2}{v^2} \right),$$

если учесть, что  $|\dot{\mathbf{v}}| \sim \frac{v^2}{a}$ , где  $a$  — величина порядка размера той области, в которой происходит движение заряда.

$$5.69. \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n})^2, \quad I = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}}^2, \quad \text{где } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

5.70. Энергия, излученная зарядом в течение промежутка времени  $dt'$ , заключена между двумя сферами. Первая из этих сфер имеет центр в точке  $O$ , где заряд находился в момент  $t'$ , вторая — в точке  $O'$ , где он находился

в момент  $t' + dt'$  (рис. 5.9). Радиус первой сферы  $R$ , радиус второй  $R + c dt'$ . Рассмотрим элемент объема  $dV = dS dR = R^2 d\Omega (c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt'$ . В этом объеме заключена электромагнитная энергия  $dW = \frac{E^2}{4\pi} dV = \frac{cE^2}{4\pi} \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) R^2 d\Omega dt'$ . Отсюда для скорости потери энергии  $-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \frac{d^2W}{dt' d\Omega}$  получим значение (5.67).

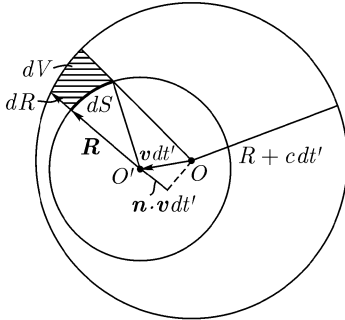


Рис. 5.9

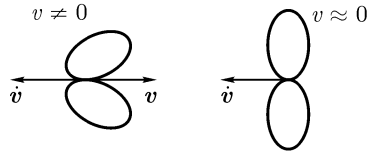


Рис. 5.10

**5.72.** Чисто продольное ускорение реализуется при  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{H} = 0$ . При этом

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right)_{\parallel} = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3}$$

не зависит от самой энергии. Если  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{H} \neq 0$ , то ускорение перпендикулярно скорости и

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right)_{\perp} = \frac{2e^4 \gamma^2 H^2 v^2}{3m^2 c^5}.$$

При одинаковых напряженностях поля ( $E = H$ ) отношение

$$\frac{(d\mathcal{E}/dt')_{\perp}}{(d\mathcal{E}/dt')_{\parallel}} = \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}$$

велико для ультрарелятивистской частицы. Это показывает, что при произвольном ультрарелятивистском движении частицы главную роль играет ее излучение за счет поперечной составляющей силы.

$$5.73. \quad \frac{dI(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 = \frac{e^2 \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \vartheta)^6},$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением скорости  $\mathbf{v}$  и направлением излучения  $\mathbf{n}$ ,  $\beta = v/c$ . Угловая диаграмма излучения приведена на рис. 5.10. Когда скорость  $v$  частицы мала, излучение вперед и назад имеет одинаковую интенсивность. Когда  $v$  сравнимо с  $c$ , преобладает излучение вперед тем в большей степени, чем ближе  $v$  к  $c$ . Максимум излучения наблюдается в направлении  $\vartheta_0$ , определяемом уравнением

$$\cos \vartheta_0 = \frac{1}{4\beta} (\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1).$$

При  $\beta \rightarrow 0$   $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ ; при  $\beta \rightarrow 1$   $\vartheta_0 \rightarrow 0$ . Таким образом, в ультррелятивистском пределе излучение происходит в основном под малыми углами к направлению скорости частицы. Полагая  $\vartheta \ll 1$ , представим  $\frac{dI}{d\Omega}$  в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2 \vartheta^2}{2\pi c^3 \left[ \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \vartheta^2 \right]^6}.$$

Из этой формулы видно, что ультррелятивистская частица излучает главным образом внутри конуса с углом раствора  $\psi = \frac{mc^2}{\mathcal{E}}$ .

Полная интенсивность излучения:

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3} \frac{1 + \beta^2/5}{(1 - \beta^2)^4}.$$

Полная скорость потери энергии:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{\dot{v}^2}{(1 - \beta^2)^3}.$$

5.74. Полное тормозное излучение в направлении  $d\Omega$  за все время полета частицы:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta W}{d\Omega} &= \int \frac{dI}{d\Omega} dt = \int \left( -\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dt'} \right) dt' = \\ &= \frac{e^2 v_0^2}{16\pi c^3 \tau} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \left[ \frac{1}{\left( 1 - \frac{v_0}{c} \cos \vartheta \right)^4} - 1 \right], \end{aligned}$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением скорости частицы и направлением излучения  $\mathbf{n}$ .

Наблюдаемая длительность импульса зависит от угла  $\vartheta$  между скоростью частицы и направлением излучения:

$$\Delta t = \tau \left[ 1 - \frac{v_0}{2c} \cos \vartheta \right].$$

$$5.75. \quad -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4 H^2 p^2}{3m^4 c^5}.$$

$$5.76. \quad -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4 H^2 \sin^2 \theta}{3m^2 c(1 - \beta^2)}. \text{ При } \theta \gg \sqrt{1 - v^2/c^2} \text{ неподвижный на-}$$

блюдатель, находящийся далеко от электрона, регистрирует отдельные импульсы излучения, испущенные в те моменты времени, когда скорость электрона направлена на наблюдателя (в пределах конуса с углом раствора  $\psi \approx \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , см. задачу 5.73). Время между импульсами (рис. 5.11)

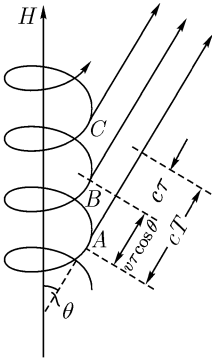


Рис. 5.11

$$\tau = T \left( 1 - \frac{v_{\parallel} \cos \theta}{c} \right) \approx T \sin^2 \theta,$$

где  $T = 2\pi\mathcal{E}/ecH$  — период циклотронного вращения,  $\mathcal{E}$  — энергия частицы,  $v_{\parallel} = v \cos \theta$  — проекция скорости на направление поля. Таким образом, вследствие поступательного движения электрона со скоростью  $v_{\parallel}$  излучение, испускаемое за время  $T$ , пройдет через неподвижную сферу за время  $\tau$ . Отсюда

$$I = -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} \frac{T}{\tau} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c(1 - v^2/c^2)}.$$

При  $\theta \leq \psi \ll 1$  будем иметь

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c(1 - v^2/c^2)} \frac{\theta^2}{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2 \right]}.$$

$$5.77. \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6}, \text{ где } \beta = \frac{v}{c}.$$



Полярная ось направлена вдоль скорости, азимут  $\alpha$  отсчитывается от направления ускорения. Угловое распределение излучения приведено на рис. 5.12. Излучения не происходит в направлениях, определяемых уравнением  $\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) = \sin \vartheta |\cos \alpha|$ . В частности, при  $\alpha = 0, \pi$  (рис. 5.12 а), излучения нет в направлении  $\vartheta = \arccos \frac{v}{c}$ . При  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  (рис. 5.12 б), интенсивность излучения отлична от 0 при всех  $\vartheta$ .

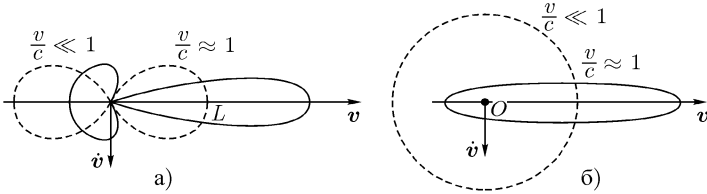


Рис. 5.12

## 5.78.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dI}}{d\Omega} &= -\frac{\overline{d\mathcal{E}}}{d\Omega dt'} = \frac{e^4 H^2 \beta^2}{8\pi^2 m^2 c^3} (1 - \beta^2) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \beta^2) \cos^2 \vartheta + (\beta - \sin \vartheta \cos \alpha)^2}{(1 - \beta \sin \vartheta \cos \alpha)^5} d\alpha = \\ &= \frac{e^4 H^2 \beta^2 (1 - \beta^2)}{8\pi m^2 c^3} \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta - \frac{1}{4} \beta^2 (1 + 3\beta^2) \sin^4 \vartheta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{7/2}}, \end{aligned}$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Начало отсчета азимутального угла  $\alpha$ , входящего в подынтегральное выражение, выбрано так, чтобы направление вектора  $\mathbf{n}$  характеризовалось полярными углами  $\vartheta, \frac{\pi}{2}$ . В ультрарелятивистском случае  $v \approx c$  излучение сосредоточивается вблизи плоскости орбиты в интервале углов  $\Delta\vartheta \approx \sqrt{1 - \beta^2}$ .

5.79.

$$(1) \quad \begin{cases} A_{n\vartheta} = \frac{e\beta e^{ikR_0}}{2\pi R_0} \cos \vartheta \int_0^{2\pi} \cos \alpha' e^{i(n\alpha' - n\beta \sin \vartheta \sin \alpha')} d\alpha', \\ A_{n\alpha} = \frac{e\beta e^{ikR_0}}{2\pi R_0} \int_0^{2\pi} \sin \alpha' e^{i(n\alpha' - n\beta \sin \vartheta \sin \alpha')} d\alpha', \end{cases}$$

где волновой вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{\omega}{c}$ , начало координат — в центре орбиты, ось  $z$  перпендикулярна плоскости орбиты, направление  $\mathbf{k}$  характеризуется полярными углами  $\vartheta, \frac{\pi}{2}$ ;  $R_0$  — расстояние от центра орбиты до точки наблюдения. Отсюда

$$(2) \quad \begin{cases} H_{n\alpha} = i \frac{\omega}{c} n A_{n\vartheta} \approx i \frac{\beta e n e^{ikR_0}}{a R_0} \operatorname{ctg} \vartheta J_n(n\beta \sin \vartheta), \\ H_{n\vartheta} = -i \frac{\omega}{c} n A_{n\alpha} = \frac{e\beta^2 n e^{ikR_0}}{a R_0} J'_n(n\beta \sin \vartheta). \end{cases}$$

Поляризация излучения оказывается, вообще говоря, эллиптической, с главными осями в направлениях  $e_\alpha$  и  $e_\vartheta$  и отношением полуосей  $H_{n\vartheta}$  и  $H_{n\alpha}$ , равным  $\beta \operatorname{tg} \vartheta \frac{J'_n(n\beta \sin \vartheta)}{J_n(n\beta \sin \vartheta)}$ . Направление обхода эллипса определяется знаком этого отношения. При  $\vartheta = 0$  поляризация круговая, при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  — линейная. При достаточно больших  $n$  и  $\beta$  линейная поляризация получается также в тех направлениях, которым соответствуют нули или полюсы функции  $\frac{J'_n}{J_n}$ .

**5.80.** Наличие высших гармоник в спектре поля объясняется тем, что время распространения поля между равными точками орбиты конечно и сравнимо, вообще говоря, с периодом обращения заряда по орбите, если скорость заряда сравнима со скоростью света  $c$ . Вследствие этого, время прохождения через точку наблюдения поля, излучаемого частицей в течение полупериода, когда частица приближалась к этой точке, меньше, чем время прохождения через нее поля, излученного в течение второго полупериода. Простой гармонической зависимости координат частицы от времени соответствует, следовательно, некоторая сложная периодическая зависимость поля от времени, изображаемая суперпозицией ряда гармоник Фурье.

Следует ожидать, что при  $\beta \rightarrow 0$  высшие гармоники исчезнут. Действительно, при  $x \approx 0$ ,  $n > 0$  имеем (см. приложение 3):  $J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}$ ,  $J'_n(x) \approx \frac{x^{n-1}}{2^n (n-1)!}$ . Из этих формул видно, что, когда  $\beta \rightarrow 0$ , существенны лишь гармоники с наименьшим возможным значением  $|n| = 1$ . При этом (ср. с ответом к задаче 5.21):

$$H_\alpha = H_{1\alpha} + H_{-1\alpha} = -\frac{e\beta^2}{a} \cdot \frac{\cos \vartheta \sin(kR_0)}{R_0},$$

$$H_\vartheta = H_{1\vartheta} + H_{-1\vartheta} = \frac{e\beta^2}{a} \cdot \frac{\cos(kR_0)}{R_0}.$$

**5.81.**

$$\frac{dI_n}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 = \frac{cn^2 e^2 \beta^2}{2\pi a^2} [\text{ctg}^2 \vartheta J_n^2(n\beta \sin \vartheta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta \sin \vartheta)].$$

Если движение по окружности происходит под действием постоянного однородного магнитного поля  $H$ , то

$$a = \frac{mc^2 \beta}{eH\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$I_n = \frac{cn e^2 \beta}{a^2} \left\{ 2\beta^2 J_{2n}'(2n\beta) - (1-\beta^2) \int_0^{2n\beta} J_{2n}(x) dx \right\}.$$

**5.82.** Суммирование гармоник приводит к угловому распределению излучения  $\overline{dI/d\Omega}$ , усредненному по времени и вычисленному ранее другим способом (см. задачу 5.78). В сильно релятивистском случае ( $\gamma \gg 1$ ) возникает резкая анизотропия излучения, которое концентрируется в плоскости орбиты: отношение

$$\frac{(\overline{dI/d\Omega})_{\vartheta=\pi/2}}{(\overline{dI/d\Omega})_{\vartheta=0}} \approx \frac{7}{8} \gamma^5 \gg 1.$$

Введя угол  $\theta = \pi/2 - \vartheta \ll 1$  между направлением наблюдения и плоскостью орбиты, запишем угловое распределение в виде

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{e^4 H^2 \gamma^3 (7 + 12\gamma^2 \theta^2)}{16\pi m^2 c^3 (1 + \gamma^2 \theta^2)^{7/2}}.$$

**5.83.** Используем формулу (5.77), выбрав систему координат так, чтобы орбита частицы располагалась в плоскости  $xy$ , а луч зрения — в плоскости  $xz$  (рис. 5.3). Частица при  $\tau = 0$  находится в начале координат. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\tau) &= \mathbf{e}_x \rho \sin(v\tau/a) - \mathbf{e}_y [\cos(v\tau/a) - 1], \\ \mathbf{v}(\tau) &= \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \mathbf{e}_x v \cos(v\tau/a) + \mathbf{e}_y v \sin(v\tau/a), \end{aligned}$$

где  $a = cp/eH$  — лармеров радиус (см. раздел 4.2). С самого начала учитываем релятивистский эффект излучения вперед, в пределах угла  $\theta_0 \approx \gamma^{-1} \ll 1$ , и оставляем степени угла  $\theta$  между лучом зрения  $\mathbf{n}$  и осью  $Ox$  не выше второй. В этом приближении имеем

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{v}(\tau) &= \mathbf{e}^{(1)} v \theta \cos(v\tau/a) + \mathbf{e}^{(2)} v \sin(v\tau/a), \\ \omega\tau - \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}(\tau) &= \omega\tau - \frac{\omega a}{c} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin(v\tau/a). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{n}$  — образуют тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов.

Поскольку диаграмма направленности излучения очень узкая, волновой пакет, излучаемый в направлении  $\mathbf{n}$ , собирается с малой дуги окружности порядка  $a/\gamma$ , проходимой частицей за время  $\Delta\tau \approx a/v\gamma$ . По этой причине основной вклад в интегралы по времени дают времена порядка  $\Delta\tau$ , и можно произвести разложение тригонометрических функций в равенствах (1) в ряд. В предэкспоненте достаточно учесть первые неисчезающие члены, но в показателе экспоненты следует учесть в разложении синуса и кубический член. Кроме того, нужно провести разложение по  $\gamma^{-2} \ll 1$ . После указанных разложений интегралы по времени сводятся к интегралам, указанным в условии задачи, путем замены переменных

$$(2) \quad x = \frac{c\tau}{a(\gamma^{-2} + \theta^2)^{1/2}}, \quad \xi = \frac{\omega a}{3c} (\gamma^{-2} + \theta^2)^{3/2}.$$

В итоге получим из (5.77) спектрально-угловое распределение излучения:

$$(3) \quad \frac{d^2 I'_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{a\omega}{c}\right)^2 (\gamma^{-2} + \theta^2)^2 \left[ K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right].$$

Найденная величина представляет собой спектральную плотность излучения частицы с малого элемента траектории, на котором формируется импульс излучения в заданном направлении  $\mathbf{n}$ . Она имеет размерность энергия  $\times$  время. Более удобной измеряемой величиной является спектральная мощность излучения, усредненного по времени, которая получается

путем деления найденной спектральной плотности на период  $T$  обращения частицы по окружности (т. е. на время между короткими вспышками, которые видит наблюдатель):

$$(4) \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\gamma}{\omega_c} = \frac{2\pi mc\gamma}{eH}$$

(см. задачу 4.52. Период  $T$  записан здесь через использованные в указанной задаче угловые скорости  $\omega_H = eH/mc$  и  $\Omega = \omega_H/\gamma$ . Первая из них обозначалась там через  $\omega_c$  и называлась циклотронной частотой.) Таким путем получаем

$$(5) \quad \frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega_H}{6\pi^3 c\gamma} \left(\frac{a\omega}{c}\right)^2 (\gamma^{-2} + \theta^2)^2 \left[ K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right].$$

Эта довольно сложная функция упрощается в предельных случаях. В частности, при  $\xi \gg 1$  с помощью (1.170) находим:

$$(6) \quad \frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega}{4\pi^2 c} (\gamma^{-2} + \theta^2)^{1/2} \left(1 + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2}\right) \exp\left[-\frac{2a\omega}{3c} (\gamma^{-2} + \theta^2)^{3/2}\right].$$

При  $\xi \rightarrow 0$  спектральная мощность стремится к нулю, наибольшего значения она достигает при  $\xi \approx 1$ . Полагая в последнем условии  $\theta = 0$ , найдем значение критической частоты, за которым происходит экспоненциальный завал спектра:

$$(7) \quad \omega_c = \frac{3eH}{mc} \gamma^2.$$

Разумеется, это значение определяется лишь по порядку величины. Оно находится в согласии с оценкой (5.78). Поскольку угловая скорость вращения частицы (основная частота)  $\omega_0 = \Omega = ecH/\mathcal{E} = eH/mc\gamma$  (см. задачу 4.52), то полученному выше значению критической частоты отвечает гармоника Фурье с номером

$$(8) \quad n_c = \frac{\omega_c}{\omega_0} = 3\gamma^3 \gg 1.$$

**5.84.**  $\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}e^2 \omega_H}{2\pi c} \frac{2\omega}{\omega_c} \int_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx$ . С помощью асимптотических формул (1.168), (1.170) находим спектральное распределение синхро-

тронного излучения в предельных случаях:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \begin{cases} \frac{3^{3/2}}{2\pi} \Gamma(5/3) \frac{e^2 \omega_H}{c} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/3}, & \omega \ll \omega_c; \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \omega_H}{c} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2\omega}{\omega_c}\right), & \omega \gg \omega_c. \end{cases}$$

**5.85.** Ультрарелятивистская частица, движущаяся по спирали, будет испускать излучение вдоль образующей конуса с углом раствора  $\pi - 2\alpha$  в пределах угла излучения  $\gamma^{-1}$ . Повторяя в измененной геометрии расчет, аналогичный тому, который был произведен в задаче 5.83, получим спектральную мощность излучения в определенном направлении:

$$(1) \quad \frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{6\pi^3} \frac{e^2 \omega_H}{\gamma c \cos^2 \alpha} \left(\frac{a\omega}{c \cos \alpha}\right)^2 (\gamma^{-2} + \theta^2)^2 \cdot \left[ K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right].$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением наблюдения и образующей конуса излучения, причем  $\pi/2 - \alpha \gg \theta$ ,  $\xi = (a\omega/3c \cos \alpha)(\gamma^{-2} + \theta^2)^{3/2}$ . Период между импульсами излучения был определен в задаче 5.76:

$$(2) \quad T = \frac{2\pi c}{e c H} \cos^2 \alpha = \frac{2\pi \gamma}{\omega_H} \cos^2 \alpha.$$

Он использован при вычислении (1). Критическая частота определяется из условия  $\xi = 1$  при  $\theta = 0$ :

$$(3) \quad \omega_c = \frac{3c\gamma^3 \cos \alpha}{a}.$$

**5.86.** Спектральная мощность излучения облака электронов записывается в виде интеграла от произведения функции распределения на спектральную функцию одного электрона, найденную в задаче 5.85:

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \int \frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} f(p) d^3 p.$$

Фактически интегрировать нужно только по направлениям импульсов электронов, что эквивалентно интегрированию по углу  $\theta$  и может быть произведено таким же образом, как в задаче 5.84, с помощью приведенных

в условии той задачи формул. При интегрировании следует считать угол  $\alpha$  постоянным и заменить его в соответствии с условием задачи на  $\pi/2 - \Theta$ . В результате будем иметь

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi^2} \frac{N_0 e^2 \omega_H}{c \sin^2 \Theta} \frac{2\omega}{\omega_c} \int_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx,$$

где  $\omega_c = 3eH\gamma_0^2 \sin \Theta / mc$ . Предельные случаи малых и больших частот приведены в ответе к задаче 5.84.

**5.87.** Спектральную мощность излучения моноэнергичного облака электронов предыдущей задачи следует проинтегрировать по энергиям  $d\mathcal{E} = mc^2 d\gamma$  электронов с соответствующей функцией распределения:

$$(1) \quad \frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi^2} (\nu - 1) N_0 \gamma_*^{\nu-1} \frac{e^2 \omega_H}{c \sin^2 \Theta} \int_{\gamma_*}^{\infty} \frac{d\gamma}{\gamma^\nu} \frac{2\omega}{\omega_c} \int_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx.$$

Переходя от интегрирования по энергиям к интегрированию по переменной  $d\eta = d(2\omega/\omega_c) = -2\eta d\gamma/\gamma$ , имеем

$$(2) \quad \int_{\gamma_*}^{\infty} \frac{d\gamma}{\gamma^\nu} \eta \int_{\eta}^{\infty} K_{5/3}(x) dx = \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{3\omega_H \sin \Theta}{2\omega} \right)^{(\nu-1)/2} \int_0^{\eta_*} \eta^{(\nu-1)/2} d\eta \int_{\eta}^{\infty} K_{5/3}(x) dx.$$

Интеграл сводится к табличному при  $\eta_* \gg 1$ , т.е. при частотах  $\omega \gg \gg \gamma_*^2 \omega_H \sin \Theta$ . В этом случае предел  $\eta_*$  заменяем на  $\infty$  и после интегрирования по частям используем формулу 11.4.22 в [Абрамовиц и Стиган (1979)] В результате получим

$$(3) \quad \frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{3^\nu (\nu - 1)}{8\pi^2 (\nu + 1)} \Gamma \left( \frac{3\nu + 19}{12} \right) \Gamma \left( \frac{3\nu - 1}{12} \right) N_0 \gamma_*^{\nu-1} \cdot (\sin \Theta)^{(\nu-5)/2} \frac{e^2 \omega_H}{c} \left( \frac{\omega_H}{\omega} \right)^{(\nu-1)/2}.$$

При наблюдении космических радиоисточников часто удается определить спектральный индекс радиоизлучения  $\alpha$ :  $dP_\omega/d\omega \propto \omega^{-\alpha}$ . Из сравнения с (3) это позволяет найти спектральный индекс излучающих электронов:

$$(4) \quad \nu = 2\alpha + 1, \quad \alpha = \frac{\nu - 1}{2}.$$

**5.88.**  $\nu \approx 1,6$  при  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_*$  и  $\nu \approx 3,0$  при  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_*$ . Энергию излома спектра можно оценить, имея в виду, что максимум излучения электрона с энергией  $\mathcal{E}$  приходится на частоту  $\omega \approx 3\omega_H(\mathcal{E}/mc^2)^2$  (точнее, на  $0,45\omega_H(\mathcal{E}/mc^2)^2$ , согласно численному расчету). Для оценки можно считать, что каждый электрон создает дискретную линию излучения с такой частотой. Тогда  $\omega_* \approx 0,45\omega_H\gamma_*^2$ . Подставляя численные значения, находим  $\mathcal{E}_* \approx 5 \times 10^{11}$  эВ.

**5.89.** Для расчета излучения

$$(1) \quad \frac{d^2 \mathcal{E}^{rad}}{dt' d\Omega} = -\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]]^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^5}$$

(использованы формулы (5.67) и (5.60)) необходимо вычислить  $\mathbf{v}(t)$  и  $\dot{\mathbf{v}}(t)$ . Используя уравнение движения релятивистской частицы (4.58), записанное через скорость (см., например, ответ к задаче 4.41), будем иметь

$$(2) \quad \begin{cases} m\gamma\dot{\mathbf{v}}_\perp + m\gamma^3(\mathbf{v}_\perp/c^2)(v_\parallel\dot{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp \cdot \dot{\mathbf{v}}_\perp) = e\mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t, \\ m\gamma\dot{v}_\parallel + m\gamma^3(v_\parallel/c^2)(v_\parallel\dot{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp \cdot \dot{\mathbf{v}}_\perp) = 0, \end{cases}$$

где обе части уравнения движения спроецированы на направления, перпендикулярное и параллельное первоначальной скорости частицы  $\mathbf{v}_0$ . В дальнейшем предполагаем  $v_\perp \ll v_\parallel$ ,  $v_\parallel \approx v_0 \approx c$ ,  $\gamma = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$ . Из второго уравнения (2) следует  $\dot{v}_\parallel \approx -\mathbf{v}_\perp \cdot \dot{\mathbf{v}}_\perp/c$ , т. е.  $\dot{v}_\parallel \approx v_\perp \dot{v}_\perp/c \ll \dot{v}_\perp$ . Из первого уравнения (2) теперь с точностью до членов  $(v_\perp/c)^2 \ll 1$  получаем

$$(3) \quad \mathbf{v}_\perp(t) = \mathbf{u} \sin \omega_0 t, \quad \mathbf{u} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0\gamma}.$$

Подстановка полученных значений  $\mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}$  в (1) дает

$$(4) \quad \frac{d^2 \mathcal{E}^{rad}}{dt' d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t'}{4\pi c^3} \cdot \frac{u^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^2 + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) - \gamma^{-2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^5}.$$



Угловое распределение полного излучения получится в результате интегрирования (4) по  $dt'$  в пределах  $[0, L/c]$ , где  $L/c \gg 2\pi/\omega_0$  — время движения частицы в ондуляторе. Это приведет к замене  $\cos^2 \omega_0 t'$  на  $1/2$  и умножению (4) на  $L/c$ . Выбираем ось  $Oz$  декартовой системы координат вдоль длины ондулятора и отсчитываем полярный угол  $\theta$  вектора  $\mathbf{n}$  от оси  $Oz$ , а его азимутальный угол  $\varphi$  от направления  $\mathbf{E}_0$ . Это позволяет записать  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v_0 \cos \theta$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = u \sin \theta \cos \varphi$  и

$$(5) \quad \frac{d\mathcal{E}^{grad}}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2 L}{8\pi c^4 m^2 \gamma^2} \frac{(1 - \beta_0 \cos \theta)^2 - \gamma^{-2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta_0 \cos \theta)^5}.$$

В релятивистском случае характерные углы  $\theta \approx \gamma^{-1} \ll 1$ , поэтому угловое распределение можно упростить:

$$(5) \quad \frac{d\mathcal{E}^{grad}}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2 L}{\pi c^4 m^2 \gamma^2} \frac{1}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^3}.$$

Интегрирование (5) по  $d\Omega = 2\pi\theta d\theta$  дает полное излучение:

$$(6) \quad \mathcal{E}^{grad} = \frac{e^4 E_0^2 L}{2c^4 m^2} \gamma^2.$$

Характерные частоты, на которых происходит ондуляторное излучение, можно оценить из следующих соображений. Преобразовав с помощью формул (4.70) исходное поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t$  в систему отсчета, движущуюся вдоль оси ондулятора с невозмущенной скоростью частицы  $\mathbf{v}_0$ , получим

$$(7) \quad \mathbf{E}' = \gamma \mathbf{E}_0 \cos(\omega' \tau + k' \zeta), \quad \mathbf{H}' = -\frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{E}',$$

где  $\omega' = \gamma \omega_0$ ,  $k' = \omega' v_0 / c^2$  — частота и волновой вектор преобразованного поля,  $\tau$  и  $\zeta$  — время и координата в сопутствующей системе, в которой движение частицы нерелятивистское. В этой системе с точностью до членов порядка  $\gamma^{-2} \ll 1$  выполняются соотношения, свойственные плоским монохроматическим волнам в вакууме: закон дисперсии  $\omega'^2 - c^2 k'^2 \approx 0$ , связь между напряженностями  $\mathbf{E}' \perp \mathbf{H}'$ ,  $E' \approx H'$ . Это означает, что в сопутствующей частице системе на нее воздействует поле плоской монохроматической волны (или на квантовом языке «эквивалентные фотоны», см. раздел 6.3). Излучение частицы можно интерпретировать как рассеяние этой волны.

Частота волны  $\omega'$ , испускаемой частицей в сопутствующей системе, при переходе в лабораторную систему испытывает еще один доплеровский

сдвиг (см. формулу, приведенную в условии задачи 3.35) и приобретает величину

$$(8) \quad \omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - v_0 \cos \theta/c)} \approx \frac{2\omega_0}{\gamma^{-2} + \theta^2} \approx \omega_0 \gamma^2.$$

При  $\mathcal{E} = 5$  ГэВ релятивистский фактор электрона  $\gamma \approx 10^4$ , излучаемые частоты  $\omega \approx 2\pi c/\lambda_0 \gamma^2 \approx 6 \times 10^{18} \text{ с}^{-1}$ , или длины волн  $\lambda \approx \lambda_0/\gamma^2 = 3 \times 10^{-8} \text{ см}$  — рентгеновский диапазон.

**5.90.** Система уравнений движения с указанными в условии задачи начальными условиями легко решается и дает

$$s(t) = a(e_x \cos \omega_0 t - e_y \sin \omega_0 t) + \beta_{\parallel} c t e_z.$$

Траектория представляет собой спираль, скорость электрона составляет с осью ондулятора угол  $\Theta = \beta_{\perp} \ll 1$ . Характер излучения зависит от соотношения между  $\Theta$  и характерным углом  $\theta$  между скоростью частицы и направлением излучения. При  $1 \gg \Theta \gg \theta \approx \gamma^{-1}$  излучение, как и в задаче 5.85, направлено вдоль образующей конуса, определяемого скоростью электрона, в пределах угла  $\gamma^{-1}$ . Наблюдатель будет видеть короткие вспышки длительностью  $a/c\beta_{\perp}\gamma$ . Расчет спектрально-углового распределения мощности излучения можно произвести таким же образом, как в задачах 5.83, 5.85, предполагая в силу условия  $L \gg \lambda_0$  ондулятор бесконечно длинным. Затем следует произвести интегрирование по телесному углу (как в задаче 5.84) и умножить результат на время движения электрона через ондулятор  $L/c$ . В результате будем иметь

$$\frac{d\mathcal{E}^{rad}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}e^2\omega_0 L}{2\pi c^2\beta_{\perp}^2} \frac{2\omega}{\omega_c} \int_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx,$$

где  $\omega_c = 3\omega_0\gamma^3\beta_{\perp}$ .

При  $\Theta \approx \gamma^{-1}$  излучение заполняет весь конус, и использованный метод расчета спектра теряет силу.

**5.91.** При решении задачи 5.79 были получены выражения (2) для  $n$ -й гармоники поля излучения от одного заряда. Выражения этих гармоник для разных зарядов, очевидно, отличаются друг от друга только начальными фазами. Обозначив через  $\psi_l$  сдвиг фазы поля  $l$ -го электрона относительно поля того электрона, которому приписан первый номер, запишем результирующее поле в вещественной форме:

$$H_{n\vartheta} = \frac{e\beta^2 n}{aR_0} J'_n(n\beta \sin \vartheta) \sum_{l=1}^N \cos n\left(\omega t - \frac{\omega R_0}{c} + \psi_l\right).$$

Выражение для  $H_{n\alpha}$  аналогично. Среднее значение интенсивности излучения за период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  равно:

$$dI_{nN} = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (H_{n\vartheta}^2 + H_{n\alpha}^2) dt R_0^2 d\Omega = S_N dI_n,$$

где  $dI_n$  — интенсивность излучения от одного электрона, найденная в предыдущей задаче, а  $S_N$  — коэффициент, учитывающий интерференцию полей электронов («фактор когерентности»):

$$S_N = N + \sum_{\substack{l, l'=1 \\ (l \neq l')}}^N \cos n(\psi_l - \psi_{l'}).$$

Рассмотрим частные случаи:

а) при совершенно беспорядочном расположении электронов на орбите

$$\sum \cos n(\psi_l - \psi_{l'}) = 0;$$

б) при равномерном расположении электронов на орбите

$$\psi_l = \frac{2\pi}{N}(l-1)$$

и

$$\begin{aligned} S_N &= N \sum_{l=2}^N \cos 2\pi(l-1) \frac{n}{N} = \frac{N}{2} \left[ \sum_{l=1}^N e^{2\pi(l-1) \frac{n}{N} i} + \sum_{l=1}^N e^{-2\pi(l-1) \frac{n}{N} i} \right] = \\ &= N(-1)^n \frac{\sin n\pi}{\operatorname{tg} \frac{n\pi}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{n}{N} \text{ — не целое число,} \\ N^2, & \text{если } \frac{n}{N} \text{ — целое число;} \end{cases} \end{aligned}$$

Появление множителя  $N^2$  не является, вообще говоря, безусловным признаком большой интенсивности излучения, так как при этом возрастает и номер гармоники. Пусть  $n = kN$ , где  $k$  — целое число. В нерелятивистском случае, при  $2kN\beta \ll 1$ , пользуясь асимптотическими формулами (1.155) для функций Бесселя, получаем даже при  $k = 1$

$$I_{NN} = \frac{2e^2 c N(N+1)(\beta N)^{N+2}}{a^2 (2N+1)(2N)!},$$

что дает

$$I_{11} = \frac{2e^2c\beta^4}{3a^2}, \quad I_{22} = \frac{8e^2c\beta^6}{5a^2}, \quad I_{33} = \frac{243e^2c\beta^8}{70a^2},$$

т. е. добавление каждого электрона увеличивает мультипольность излучения и добавляет малый множитель  $\beta^2$ .

В противоположном, сильно релятивистском случае надо воспользоваться результатами задач 5.83, 5.84, заменив  $\omega \rightarrow n\omega_0$ ,  $I_n = \omega_0 dI_\omega/d\omega$ . При  $n = N$  (т. е.  $k = 1$ ) будем иметь

$$I_{NN} = \frac{e^2c}{\pi\sqrt{3}a^2\gamma^2} N^3 \int_{x_N}^{\infty} K_{5/3}(x) dx,$$

где  $x_N = 2N/3\gamma^3$ . В предельных случаях имеем

$$I_{NN} \approx \begin{cases} \frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{\pi} \frac{e^2c}{a^2} N^{7/3}, & N \ll 3\gamma^3/2; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2c}{a^2\gamma^{1/2}} N^{5/2} \exp\left(-\frac{2N}{3\gamma^3}\right), & N \gg 3\gamma^3/2. \end{cases}$$

Сравнивая эти результаты со случаем беспорядочного расположения электронов на орбите, приходим к выводу, что при  $N \approx \gamma^3$  фактор когерентного усиления излучения имеет порядок величины  $\gamma^2$ .

**5.92.** Если электроны образуют сгусток, представим фактор когерентности в виде

$$S_N = N + \sum_{l=1}^N \left\{ \cos n\psi_l \sum_{l'=1}^{N'} \cos n\psi_{l'} + \sin n\psi_l \sum_{l'=1}^{N'} \sin n\psi_{l'} \right\},$$

где штрих у суммы означает отсутствие члена с  $l' = l$ . При симметричном распределении электронов в сгустке относительно нулевого азимута среднее от синуса равно нулю, и фактор когерентности преобразуется в

$$S_N = N + N(N-1) (\overline{\cos n\psi})^2 \approx N + N^2 (\overline{\cos n\psi})^2,$$

где первое слагаемое соответствует некогерентному излучению, а второе — когерентному. Производя усреднение, будем иметь

$$I_{nN} = NI_n + N^2 I_n \times \begin{cases} \frac{\sin^2(n\varphi/2)}{(n\varphi/2)^2}, \\ \exp(-(n\varphi)^2/2). \end{cases}$$

Здесь верхняя строка соответствует равномерному, а нижняя — гауссову распределению электронов в сгустке.  $I_n$  — интенсивность излучения одного электрона.

**5.93.**

$$\mathcal{E}^{rad} = \frac{2\sqrt{2}q^2}{3m^{3/2}c^3} \int_{r_{min}}^{\infty} \left( \frac{dU}{dr} \right)^2 \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - U(r)}},$$

где  $U(r_{min}) = \mathcal{E}$ .

**5.94.**  $\frac{\mathcal{E}^{rad}}{\mathcal{E}} = \frac{16q}{45Ze} \left( \frac{v}{c} \right)^3.$

**5.95.** Выберем начало координат в центре инерции системы зарядов. Тогда электрический дипольный момент системы

$$(1) \quad \mathbf{p} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \mu \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

Поскольку отношения  $e/m$  зарядов различны, то  $\mathbf{p} \neq 0$  и система будет излучать в основном как электрический диполь ( $\frac{v}{c} \ll 1$ ). Мгновенная интенсивность

$$I(t) = \frac{2\dot{\mathbf{p}}^2}{3c^3} = \frac{2\mu^2}{3c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2(t').$$

Согласно уравнению движения зарядов,  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}$ , так что  $I = \frac{2e_1^2 e_2^2}{3c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^4}$ . При вычислении средней по времени интенсивности излучения  $\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt'$  заменим интегрирование по  $t'$  интегрирова-

нием по углу  $\alpha$  согласно уравнению  $dt' = \frac{\mu r^2 d\alpha}{K}$  ( $K$  — момент импульса системы) и воспользуемся уравнением траектории. В результате получим:

$$\bar{I} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mu^{\frac{5}{2}} |e_1 e_2|^3 |\mathcal{E}|^{\frac{3}{2}}}{K^5} \left( 3 - \frac{2|\mathcal{E}|K^2}{\mu e_1^2 e_2^2} \right).$$

$$5.96. \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\frac{2^{\frac{7}{2}}\mu^{\frac{3}{2}}|\mathcal{E}|^{\frac{3}{2}}}{3c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mathbf{K}}{K^3}.$$

5.97. Поступая так же, как при решении задачи 5.95, запишем вторую производную дипольного момента в виде:

$$(1) \quad \ddot{\mathbf{p}} = \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}.$$

Вычисление  $A$  не вызывает затруднений. Для вычисления  $B$  нужно знать  $\ddot{p}_z$  — проекцию  $\ddot{\mathbf{p}}$  на направление первоначального движения рассеиваемых частиц — в виде функции координат  $r$ ,  $\alpha$  (полярные координаты в плоскости относительного движения частиц). При этом следует учитывать, что в уравнении траектории относительного движения  $-1 + \varepsilon \cos \alpha = a(\varepsilon^2 - 1)/r$ , угол  $\alpha$  отсчитывается от оси симметрии (ось  $z'$ ) траектории. Таким образом,  $y' = r \sin \alpha$ ,  $z' = r \cos \alpha$ . Угол между осями  $z$  и  $z'$  равен  $\pi - \alpha_0$  ( $\cos \alpha_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ ), поэтому  $z = -z' \cos \alpha_0 - y' \sin \alpha_0 = -r \left( \frac{1}{\varepsilon} \cos \alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} \sin \alpha \right)$ . Используя (1) и заметив, что  $\sin \alpha$  — нечетная функция, получим:

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{p}_z^2 dt s ds = e_1^2 e_2^2 \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 \alpha + (\varepsilon^2 - 1) \sin^2 \alpha}{\varepsilon^2 r^4} dt s ds.$$

С помощью уравнения траектории выразим  $\cos^2 \alpha$  и  $\sin^2 \alpha$  через  $r$  и  $\varepsilon$  и сделаем подстановку  $\varepsilon^2 = u$ ,  $s ds = \frac{a^2}{2} du$ . После этого выписанный интеграл преобразуется к виду:

$$\frac{a}{v_0} \int_{2a}^{\infty} \frac{dr}{r^3} \int_1^{\left(\frac{r}{a}-1\right)^2} \left[ -\frac{a^2}{r^2} u + \left( 4\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} + 1 \right) + \left( -5\frac{a^2}{r^2} + 6\frac{a}{r} - 2 \right) \frac{1}{u} + 2\left( \frac{a}{r} - 1 \right)^2 \frac{1}{u^2} \right] \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}-1\right)^2 - u}}.$$

При вычислении интеграла по  $du$  возникает логарифмический член, который преобразуется интегрированием по частям. Для вычисления внешнего

интеграла по  $dr$  целесообразно сделать подстановку  $x = \frac{2a}{r}$ , которая приводит этот интеграл к сумме нескольких  $B$ -функций:  $B(k, l) = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l-1} dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}$ .

Окончательно получаем:

$$A = \frac{8\pi}{9} e_1 e_2 \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \mu v_0, \quad B = 0.$$

**5.98.** В рассматриваемом приближении  $v = \text{const}$ , а траектория частицы представляет собой прямую. Пусть движение частицы происходит в плоскости  $xz$  параллельно оси  $z$ . В этих координатах

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (n_x, n_y, n_z), \quad \text{где } n_x = \sin \vartheta \cos \alpha, \quad n_y = \sin \vartheta \sin \alpha, \\ n_z &= \cos \vartheta, \quad \mathbf{r} = (s, 0, vt'), \quad r = \sqrt{s^2 + v^2 t'^2}, \\ \mathbf{v} &= (0, 0, v). \end{aligned}$$

Из известной формулы  $\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}$ , где  $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ , получим  $\dot{\mathbf{v}} = \frac{c^2 \dot{\mathbf{p}}}{\mathcal{E}} - \frac{c^2 \mathbf{p} \dot{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}^2}$ . Согласно уравнению движения частицы,  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}$ . Закон сохранения энергии требует, чтобы  $\mathcal{E} + \frac{e_1 e_2}{r} = \text{const}$ . Дифференцируя последнее равенство по  $t'$ , получим:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{e_1 e_2 \dot{r}}{r^2} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r^3},$$

так что

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e_1 e_2 c^2}{\mathcal{E}} \left[ \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{\mathcal{E}} \right] = \frac{e_1 e_2 c^2}{\mathcal{E} r^3} [s \mathbf{e}_x + vt'(1-\beta^2) \mathbf{e}_z].$$

Подставив найденные выражения в (5.60), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega} &= \frac{e_1^4 e_2^2 c^4}{4\pi c^3 \mathcal{E}^2 (1-\beta n_z)^5} \left\{ s^2 [(1-\beta n_z)^2 - n_x^2 (1-\beta^2)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{(s^2 + v^2 t'^2)} + c^2 \beta^2 (1-\beta^2)^2 (1-n_z)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t'^2 dt'}{(s^2 + v^2 t'^2)^3} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование дает:

$$(1) \quad \frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2 (1 - \beta^2)}{32m^2 c^3 s^3 v (1 - \beta n_z)^5} [4 - 3n_x^2 - n_z^2 - 6\beta n_z + \beta^2(-2 + 3n_x^2 + 5n_z^2) + \beta^4(1 - n_z^2)].$$

В нерелятивистском пределе  $\beta \rightarrow 0$  и

$$\frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2}{32m^2 c^4 s^3 v} (4 - 3n_x^2 - n_z^2).$$

В ультрарелятивистском случае  $\beta \approx 1$  и

$$\frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega} = \frac{3e_1^4 e_2^2 (1 - \beta)}{2^9 m^2 c^4 s^3 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}.$$

При  $\vartheta \leq \sqrt{1 - \beta}$  последняя формула несправедлива, и нужно пользоваться точным выражением (1).

$$5.99. \quad \Delta W = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12m^2 c^3 s^3 v} \cdot \frac{4 - \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad \Delta \mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \Delta W}{c^2}.$$

$$5.100. \quad \frac{d\Delta W_{\omega}}{d\omega} = \frac{8e_1^4 e_2^2 \omega^2 c}{3\pi v^4} \left[ K_1^2 \left( \frac{\omega s}{v} \right) + K_0^2 \left( \frac{\omega s}{v} \right) \right].$$

5.101. Формулу (5.81) для дифференциального эффективного излучения можно записать в виде:

$$(1) \quad \frac{d\kappa_{\mathbf{n}}}{d\Omega} = 2\pi \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI}{d\Omega} dt ds.$$

Интенсивность излучения  $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2$ , где  $\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}$ . В формуле (1) усреднение интенсивности излучения должно быть произведено по всем направлениям в плоскости, перпендикулярной к направлению потока падающих частиц. Для выполнения усреднения удобно представить векторное произведение, входящее в выражение  $\mathbf{H}$ , в форме  $H_{\alpha} = \frac{1}{c} e_{\alpha\beta\gamma} \dot{A}_{\beta} n_{\gamma}$ ,



где  $e_{\alpha\beta\gamma}$  — антисимметричный единичный псевдотензор, по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Компоненты векторного потенциала  $A_\beta$  выражаются через компоненты квадрупольного момента  $Q_{\beta\varepsilon}$ .

$$A_\beta = \frac{1}{2c^2 r} \ddot{Q}_{\beta\varepsilon} n_\varepsilon.$$

Таким образом,

$$H_\alpha = \frac{1}{2c^3 r} e_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}_{\beta\varepsilon} n_\gamma n_\varepsilon$$

и

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi c^5} \ddot{Q}_{\beta\varepsilon} \ddot{Q}_{\beta'\varepsilon'} e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta'\gamma'} \overline{n_\gamma n_\varepsilon n_{\gamma'} n_{\varepsilon'}}.$$

Вспользуемся полярной системой координат с полярной осью направленной вдоль падающего потока и с полюсом в точке, где находится частица с зарядом  $e_2$  и массой  $m_2$ . Усреднение должно выполняться при фиксированном значении составляющей  $n_z \equiv n_3 = \cos \vartheta$  ( $\vartheta$  — направление излучения). Легко убедиться, что

$$(2) \quad \begin{cases} \overline{n_i n_k} = \frac{1}{2} \delta_{ik} (1 - n_3^2), \\ \overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{8} (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) (1 - n_3^2)^2, \\ \overline{n_i} = \overline{n_i n_k n_l} = 0, \end{cases}$$

где индексы  $i, k, l$  принимают значения 1, 2.

Вспользовавшись (2), а также формулой

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta'\gamma'} = \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\gamma\beta'},$$

получим

$$(3) \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi c^5} \left\{ \left( \ddot{Q}_{\beta 3}^2 - \ddot{Q}_{33}^2 \right) \cos^4 \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - 3\ddot{Q}_{\beta 3}^2 + 6\ddot{Q}_{33}^2 - 2\ddot{Q}_{33} \ddot{Q}_{\beta\beta} \right) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left[ 2\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - \left( \ddot{Q}_{\beta\beta} \right)^2 - 3\ddot{Q}_{33}^2 + 2\ddot{Q}_{33} \ddot{Q}_{\beta\beta} \right] \sin^4 \vartheta \right\}.$$

Подставляя (3) в (1), найдем окончательно:

$$(4) \quad \frac{d\kappa \mathbf{n}}{d\Omega} = A + BP_2(\cos \vartheta) + CP_4(\cos \vartheta),$$

где  $P_2, P_4$  — полиномы Лежандра,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{120c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [3\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - (\ddot{Q}_{\beta\beta})^2] s ds dt, \\ B = \frac{1}{168c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [-3\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 + 2(\ddot{Q}_{\beta\beta})^2 + 9\ddot{Q}_{\beta 3}^2 - 6\ddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}] s ds dt, \\ C = \frac{1}{280c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [-2\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 + 2\ddot{Q}_{\beta 3}^2 - (\ddot{Q}_{\beta\beta})^2 - \\ - 35\ddot{Q}_{33}^2 + 10\ddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}] s ds dt. \end{array} \right.$$

### 5.102. Полное эффективное излучение

$$\kappa = \int \frac{d\kappa \mathbf{n}}{d\Omega} d\Omega.$$

Используя формулы (4) и (5), полученные в предыдущей задаче, можно написать

$$(1) \quad \kappa = 4\pi A = \frac{\pi}{30c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [3\ddot{Q}_{\alpha\beta}^2 - \ddot{Q}_{\beta\beta}^2] s ds dt.$$

Обозначим через  $x_\alpha$  декартовы компоненты относительного радиуса-вектора частиц, а через  $v_\alpha = \dot{x}_\alpha$  — декартовы компоненты относительной скорости частиц. Тогда, учитывая уравнение относительного движения частиц, найдем

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{2e^2 x_\alpha}{mr^3}, \quad \ddot{x}_\alpha = \frac{2e^2}{m} \cdot \frac{rx_\alpha - 3x_\alpha v_r}{r^6},$$

где

$$v_r = \dot{r}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (1) и вводя азимутальную компоненту относительной скорости частиц  $v_\alpha$  ( $v^2 = v_\alpha^2 + v_r^2$ ), получим:

$$(2) \quad \kappa = \frac{4\pi e^6}{15m^2 c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{v^2 + 11v_\alpha^2}{r^4} s \, ds \, dt.$$

Вследствие сохранения энергии и момента импульса,  $v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}$  и  $v_\alpha = \frac{v_0 s}{r}$ . Выполняя в (2) интегрирование (при этом следует заменить интегрирование по  $dt$  интегрированием по  $dr$ , согласно формуле  $dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v^2 - v_\alpha^2}}$ , причем интегрировать можно в любом порядке), получим окончательно:

$$\kappa = \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{e^4 v_0^3}{mc^5}.$$

**5.103.** Условие (5.88) выполняется при всех частотах  $\omega$ , так как время столкновения  $\tau = 0$ . При рассеивании на твердой сфере угол падения равен углу отражения, поэтому  $|v_2 - v_1|^2 = 2v \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ , где  $\vartheta$  — угол рассеяния. Угол  $\vartheta$  связан с прицельным расстоянием  $s$  соотношением:  $s = a \sin \frac{\vartheta}{2}$  при  $s \leq a$ . При  $s > a$  частица не испытывает рассеяния. Отсюда получаем:

$$d\kappa_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} 4v^2 \int_0^a \sin^2 \frac{\vartheta}{2} 2\pi s \, ds \, d\omega = \frac{4e^2 a^2 v^2}{3c^3} d\omega.$$

Найденное дифференциальное эффективное излучение не зависит от частоты. Поэтому полное эффективное излучение

$$\kappa = \int_0^{\infty} d\kappa_\omega = \infty.$$

Эта расходимость объясняется тем что сфера считалась абсолютно твердой. На самом деле абсолютно твердых тел не существует,  $\tau \neq 0$  и при больших значениях  $\omega$  найденное для  $d\kappa_\omega$  выражение незаконно.

К тому же при расчете не учитывалось уменьшение энергии частиц за счет излучения. Фактически излученная энергия не может превысить начальной кинетической энергии частицы.

Сечение генерации фотонов получается путем деления эффективного излучения  $d\kappa_\omega/d\omega$  на энергию фотона  $\hbar\omega$  и еще на  $\hbar$  (чтобы отнести его к интервалу энергий):

$$\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)} = \frac{1}{\hbar^2\omega} \frac{d\kappa_\omega}{d\omega} = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{4a^2}{3\hbar\omega}.$$

**5.104.**

$$\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)} = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right) \frac{2a^2}{\hbar\omega}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

**5.105.**

$$I_n = \frac{64e^4 n^2}{3e_1^2 e_2^2 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left[ J_n'^2(n\epsilon) + \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} J_n^2(n\epsilon) \right].$$

**5.106.**

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{p}_2}{r} \Theta(\tau) + \frac{\mathbf{p}_1}{r} \Theta(-\tau), \quad \tau = t - \frac{r}{c}; \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\Delta \mathbf{p} \times \mathbf{r}}{c r^3} \left\{ \delta(\tau) + \frac{r}{c} \delta'(\tau) \right\}; \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \begin{cases} r^{-3}(\mathbf{n}(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}_1), & \tau < 0; \\ \mathbf{H} \times \mathbf{n}, & \tau = 0, \\ r^{-3}(\mathbf{n}(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}_2), & \tau > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Результаты как нельзя лучше иллюстрируют конечность скорости распространения электромагнитных возмущений. При внезапном изменении дипольного момента распространяется сферическая волна бесконечно малой толщины с радиусом  $ct$ . Магнитное поле отлично от нуля (и сингулярно) только на этой сфере. Электрическое поле на световой сфере также сингулярно и связано с магнитным обычным соотношением (5.18) для волновой зоны. Но, в отличие от магнитного, существует и статическое электрическое поле. В области  $r > ct$ , куда не дошло возмущение, сохраняется статическое электрическое поле диполя с моментом  $\mathbf{p}_1$ . В области  $r < ct$  установилось статическое поле диполя с моментом  $\mathbf{p}_2$ .

**5.107.** а) При  $r > ct$  — статическое электрическое поле точечного заряда с радиальными силовыми линиями (рис. 5.13а). При  $r < ct$  —

поле движущегося со скоростью  $v = \text{const}$  заряда, вычисленное в задачах 4.34, 4.35. б) Указанные выше два поля меняются местами (рис. 5.13 б). В тонком слое в окрестности  $r = ct$  происходит перестройка электрического поля и имеется сингулярное переменное магнитное поле (см. предыдущую задачу).

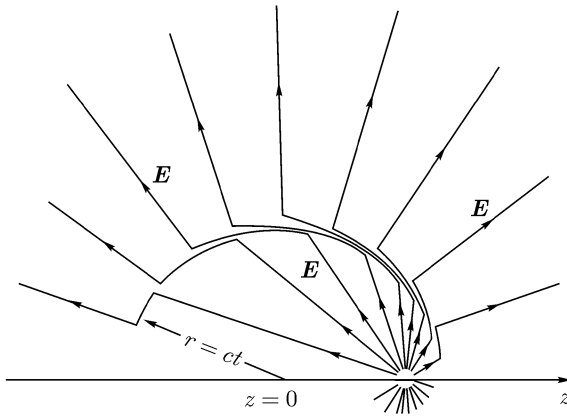


Рис. 5.13 а

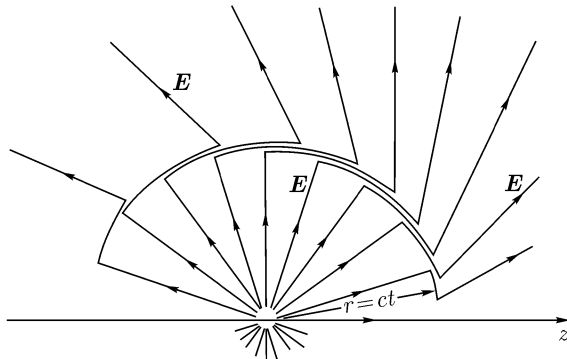


Рис. 5.13 б

**5.108.** Используем формулу (5.77), полагая в ней  $v(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ ,  $v(\tau) = v = \text{const}$ ,  $s(\tau) = v\tau$ , где скорость  $v$  определяется энергией и на-

правлением вылета бета-электрона. Получаем

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} = \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}, \quad I_\omega = \frac{e^2}{\pi c} \left( \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right).$$

Здесь  $\theta$  — направление излучения относительно скорости электрона. Бесконечно осциллирующую экспоненту  $\exp i\omega(1 - \beta \cos \theta)\tau|_{\tau \rightarrow \infty}$  следует считать равной нулю, так как ее усреднение по любому малому интервалу  $\Delta\omega$  спектра дает нуль.

Число квантов  $N_\omega$  в расчете на единичный интервал их энергии определяется соотношением  $N_\omega \hbar\omega d(\hbar\omega) = I_\omega d\omega$ , т. е.

$$N_\omega = \frac{e^2}{\pi c \hbar^2 \omega} \left( \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right).$$

Число квантов растет неограниченно при  $\omega \rightarrow 0$  («инфракрасная катастрофа»), но их суммарная энергия остается конечной. Наибольшая энергия кванта, допускаемая законом сохранения энергии, равна энергии бета-перехода ядра  $E_0$  за вычетом энергии покоя электрона (и энергии покоя нейтрино, если она отлична от нуля):  $\hbar\omega_{max} = E_0 - mc^2$ .

**5.109.** По правилу преобразования дипольных моментов (задача 4.37) имеем в лабораторной системе

$$(1) \quad \mathbf{m} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\gamma}, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu},$$

где  $\boldsymbol{\mu}$  — магнитный момент в системе покоя электрона. Магнитный и электрический дипольные моменты создают векторы магнитной и электрической поляризации:

$$(2) \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\mu} \Theta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}), \quad \mathbf{P} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu} \Theta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}).$$

С помощью формул (5.41), (5.44) находим ток, созданный движущимся электроном:

$$(3) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \left\{ e\mathbf{v} - \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\mu} \times \nabla - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})(\mathbf{v} \cdot \nabla) \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}) \Theta(t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu} \delta(t) \delta(\mathbf{r}).$$

Первое слагаемое в фигурных скобках — ток, созданный зарядом электрона. Далее вычисляем векторный потенциал в волновой зоне. Для этого используем формулу (5.4), записав ее для фурье-образа,

$$(4) \quad \mathbf{A}_\omega = \frac{1}{c} \int G_\omega(R) e^{i\omega t'} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt', \quad G_\omega(R) = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'.$$

Путем интегрирования по частям переносим производные с дельта-функции на гладкую функцию  $G_\omega(R)$  и дифференцируем только экспоненту. В итоге получим

$$(5) \quad \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{i c \omega (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} / c)} \left\{ e \mathbf{v} - \frac{i \omega}{\gamma} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n} - \frac{i \omega}{c^2} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \right\} \cdot \left( \frac{e^{i k r}}{r} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu} \frac{e^{i k r}}{r} \right).$$

Если считать  $\boldsymbol{\mu}$  обычным вектором, параллельным скорости, то  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu} = 0$ . В этой модели

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3 (1 - \beta \cos \theta)^2} \left\{ e^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{v})^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2} (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n})^2 \right\}, \quad (6)$$

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \left( \frac{e^2}{\pi c} + \frac{\omega^2 \mu^2}{\pi c^3 \beta^2 \gamma^2} \right) \left[ \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right]. \quad (7)$$

Второй член в круглых скобках, дающий вклад в излучение от магнитного момента, пропорционален квадрату частоты. Подставляя  $\mu = \mu_B = e\hbar/m_e c$  — магнетон Бора, получаем отношение двух слагаемых  $(\hbar\omega/2m_e c)^2 (c/v\gamma)^2$ . Роль магнитного момента становится заметной при  $\hbar\omega \sim m_e c^2$ .

Надо, однако, иметь в виду, что спин электрона представляет собой квантовое явление. Поэтому даже в классической электродинамике нужно трактовать магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  как оператор  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu_B \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , где  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  — матричный вектор Паули (см. Дополнение 3), и в конечном результате произвести квантовомеханическое усреднение интенсивности излучения по спиновым состояниям электрона. Обозначая такое усреднение угловыми скобками, получим

$$(8) \quad \langle [\hat{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{v}]^2 \rangle = \mu_B^2 \langle [\hat{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{v}]^2 \rangle = \mu_B^2 \langle [v^2 \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 - (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v})^2] \rangle = 2(\mu_B v)^2.$$

Здесь использованы соотношения  $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 1$ ,  $\hat{\sigma}_\alpha \hat{\sigma}_\beta + \hat{\sigma}_\beta \hat{\sigma}_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}$ . Как следует из (8), квантовомеханическое среднее не совпадает с классическим средним, которое даст  $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v} = 0$  при  $\boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{v}$ . Это объясняется тем, что квантовый магнитный момент не имеет определенного направления в пространстве. Аналогичным образом будем иметь  $\langle [\hat{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}]^2 \rangle = 2\mu_B^2$ . В итоге выражения (6), (7) пополнятся членами, содержащими электрический дипольный момент.

**5.110.** Если энергия, переданная электрону, значительно превышает энергию связи электрона в атоме, то электрон до конверсионного перехода можно считать неподвижным. В этом приближении

$$N_{\omega} = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\beta^2}{\hbar\omega}.$$

**5.111.**

$$(1) \quad N_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{a\omega_0}{c} \right)^2 \frac{\omega^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} + \left( \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \right)^2 \right] \frac{1}{\hbar\omega}.$$

Для сравнения полученного результата с опытными данными Джексон (1975) отождествляет  $\omega_0$  с частотой перехода  $2p \rightarrow 1s$  (так как вращение по круговой орбите возможно только при ненулевом орбитальном моменте) и пользуется соотношениями для водородоподобного атома: расстояние между уровнями  $\hbar\omega_0 = 3Z^2 e^2 / 8a_B$ ,  $a = a_B / Z$ ,  $a_B = \hbar^2 / m_e e^2$ . Кроме того, он вводит поправочный фактор, учитывающий уменьшение энергии нейтрино с ростом энергии испущенного кванта:  $(1 - \hbar\omega/E_0)^2$ , где  $E_0$  — энергия ядерного перехода (равная энергии нейтрино при  $\hbar\omega = 0$ ). Последний фактор существен только для жестких квантов, испускание которых возможно за счет магнитного момента (второе слагаемое в (1)). В итоге рабочая формула принимает вид

$$(2) \quad N_{\omega} = \frac{3}{32\pi} Z^2 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \left[ \frac{\omega^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] \frac{1}{\hbar\omega} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar\omega}{(m_e c^2)^2} \left( 1 - \frac{\hbar\omega}{E_0} \right)^2.$$

**5.112.**  $\hbar\omega_{\max} \approx 17$  МэВ.

$$N_{\omega} = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\beta^2}{\hbar\omega} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar\omega}{(m_{\mu} c^2)^2}.$$

**5.113.**

$$\frac{d^2 I_{\omega}}{d\omega d\Omega} = \frac{2e^2}{\pi^2 c} \frac{T_-}{m_{\pi} c^2} \sin^2 \theta, \quad N_{\omega} = \frac{16}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{T_-}{m_{\pi} c^2 \hbar\omega},$$

где  $T_- = m_{\pi} v^2 / 2$  — кинетическая энергия отрицательного пиона,  $\theta$  — угол между направлениями его импульса и вылета кванта.



## 5.114. Импульс поля движущейся частицы

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dV,$$

где  $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , а интеграл берется по всему пространству. Магнитное поле движущейся частицы  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$ , так как в системе покоя частицы ( $S'$ ) магнитное поле отсутствует. Отсюда

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{v}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})].$$

С помощью преобразований Лоренца (4.69) находим

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

(ось  $x$  направлена вдоль  $\mathbf{v}$ ). Элемент объема  $dV = dV' \sqrt{1 - \beta^2}$  (вследствие лоренцева сокращения). Таким образом,

$$(1) \quad \mathbf{G} = \frac{\mathbf{v}}{4\pi c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \int (E_y'^2 + E_z'^2) dV' = \frac{\mathbf{v}}{4\pi c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{2}{3} \int E'^2 dV'.$$

Последнее преобразование следует из сферической симметрии поля в системе  $S'$ .

Если принять, что масса покоя частицы имеет чисто электромагнитное происхождение, т. е. представляет собой массу ее электрического поля, определяемую соотношением Эйнштейна  $W' = m_0 c^2$ , то она должна равняться

$$(2) \quad m_0 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{8\pi} \int E'^2 dV'.$$

При этом импульс поля должен бы быть равен  $\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , однако из формулы (1) видно, что это не так<sup>5</sup>. Импульс поля зависит от скорости  $\mathbf{v}$  точно так же, как это должно быть в случае частицы:

$$(3) \quad \mathbf{G} = \frac{m'_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

---

<sup>5</sup>Энергия поля при таком предположении должна бы быть равна  $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , но как показано в следующей задаче это также не имеет места.

Но «масса»  $m'_0 = \frac{4}{3}m_0 \neq m_0$  не совпадает с массой покоя частицы  $m_0$ , определяемой формулой (2).

Наличие коэффициента  $\frac{4}{3}$  в выражении  $G$  означает, что энергия и импульс электромагнитного поля частицы не образуют 4-вектора и не могут быть отождествлены с ее энергией и импульсом.

Отметим, что определяемая формулой (2) электромагнитная масса обращается в бесконечность в случае точечной частицы.

**5.115.**  $W_m = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{m'_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , где величина  $m'_0$  определена в решении предыдущей задачи.

Полная энергия электромагнитного поля частицы

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV = m'_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{4} \sqrt{1-\beta^2} \right)$$

не обнаруживает зависимости от скорости  $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , которая должна иметь место для энергии частицы (ср. с задачей 5.114).

**5.116.** Отбросим члены порядка  $\frac{v}{c}$  и выше, и рассмотрим действие некоторого элемента  $de_1$  на другой элемент  $de_2$ . Кулонова часть электрического поля сферически симметрична и не дает вклада в силу самодействия; квазистационарное магнитное поле тоже не дает вклада. Таким образом, достаточно рассмотреть только ту часть напряженности  $d\mathbf{E}$  электрического поля элемента  $de_1$ , которая зависит от ускорения. На элемент  $de_2$  действует сила

$$d\mathbf{F} = -de_2 d\mathbf{E} = \frac{de_1 de_2}{c^2 \mathbf{r}} [\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{r}_0 (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{v}})],$$

где  $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, направленный от элемента  $de_1$  к элементу  $de_2$ . На частицу в целом действует сила

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{W_0}{c^2} \dot{\mathbf{v}},$$

где  $W_0 = \frac{1}{2} \int \frac{de_1 de_2}{r}$  — энергия электромагнитного поля покоящейся частицы; множитель  $4/3$  получается при интегрировании по направлениям  $\mathbf{r}_0$ .

Определив массу покоя частицы как  $m'_0 = \frac{4W_0}{3c^2}$  (см. задачу 5.114), получим для силы самодействия выражение:

$$\mathbf{F} = -m'_0 \dot{\mathbf{v}}.$$

Таким образом, сила самодействия частицы, если пренебречь запаздыванием, совпадает с силой инерции.

**5.117.** Сила, действующая на элемент заряда  $de_2$  со стороны элемента  $de_1$ , определяется ускорением  $\dot{\mathbf{v}}$  последнего в момент времени  $t'$ :

$$d\mathbf{F}(t) = -\frac{de_1 de_2}{c^2 r} [\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{v}})] \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

Разлагая ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$  по степеням  $t' - t = -\frac{r}{c}$ , получим:

$$\dot{\mathbf{v}}(t') = \dot{\mathbf{v}}(t) + (t' - t)\ddot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) - \frac{r}{c}\ddot{\mathbf{v}}(t).$$

Интегрирование по элементам  $de_1$ ,  $de_2$  даст (см. предыдущую задачу) искомую силу самодействия:

$$\mathbf{F} = -m'_0 \dot{\mathbf{v}} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

Второй член в правой части представляет собой силу лучистого трения. Он не зависит от структуры частицы и в предельном случае точечной частицы не изменяет своего вида. Собственная энергия  $W_0$  и, следовательно, электромагнитная масса  $m_0$  в этом предельном случае обращаются в бесконечность. Неучтенные члены порядка  $(t' - t)^n$ , где  $n \geq 2$ , очевидно, пропорциональны  $r_0^{n-1}$  ( $r_0$  — радиус частицы) и в пределе точечной частицы исчезают.

**5.118.** Используем симметричный тензор (4.126) энергии-импульса электромагнитного поля. Интеграл

$$(1) \quad p^i = \frac{1}{c} \int T^{ik} d^3 S_k, \quad \text{где} \quad d^3 S_k = n_k d^3 S$$

— ковариантный элемент трехмерной гиперповерхности, представляет собой 4-вектор. Компоненты тензора  $T^{\alpha 0}$  и  $T^{0\alpha}/c$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) образуют соответственно плотность энергии (4.127) и плотность импульса (4.128) электромагнитного поля. Пусть в системе покоя  $S'$  частицы интеграл (1)

превращается в интеграл по трехмерному объему  $dV'$ , т. е. по гиперповерхности  $t' = \text{const}$ . В этой системе  $E'$  — кулоновское поле частицы,  $H' = 0$ ,  $d^3S_k = n'_k dV'$ , где единичный 4-вектор нормали  $n'_k = (1, 0, 0, 0)$ . Поэтому интеграл (1) дает значения энергии и импульса частицы в ее системе покоя:

$$(2) \quad p'^0 = \frac{1}{8\pi c} \int E'^2 dV' = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad p'^\alpha = (p_0)^\alpha = 0.$$

В произвольной инерциальной системе  $S$  поле выражается согласно (4.69), (4.70), в частности,

$$(3) \quad \mathbf{H} = (\gamma/c)\mathbf{v} \times \mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c, \quad \text{так как} \quad \mathbf{E}_\perp = \gamma \mathbf{E}'_\perp.$$

Орт нормали  $n_k$  выражается через  $n'_k$  с помощью преобразований Лоренца:  $n_k = (\gamma, -\gamma\mathbf{v}/c)$ . Инвариантный элемент гиперповерхности согласно (3.13) можно записать в виде  $d^3S = dV' = \gamma d^3x$ , где  $d^3x$  — элемент трехмерного объема в системе  $S$ . Используя эти результаты, а также (4.127), (4.128), находим

$$(4) \quad \frac{1}{c} T^{0k} n_k = \frac{\gamma}{c} (T^{00} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) = \frac{\gamma}{8\pi c} \left[ E^2 + H^2 - 2 \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{H} \right] = \\ = \frac{\gamma}{8\pi c} [E^2 - H^2].$$

Таким образом,

$$(5) \quad p^0 = \frac{\gamma}{8\pi c} \int (E^2 - H^2) d^3S = \gamma m c,$$

откуда электромагнитная масса частицы

$$(6) \quad m = \frac{1}{8\pi c^2} \int (E^2 - H^2) d^3S = \frac{\gamma}{8\pi c^2} \int (E^2 - H^2) d^3x$$

— релятивистский инвариант. Аналогичным путем находим

$$(7) \quad \frac{1}{c} T^{\alpha k} n_k = \frac{\gamma v^\alpha}{8\pi c^2} (E^2 - H^2)$$

и получаем правильное выражение для импульса частицы  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ . Приведенное рассмотрение позволяет вычислить инвариантную электромагнитную массу частицы, но не дает настоящего решения проблемы: для точечной

частицы масса оказывается расходящейся величиной (см. (5.108)), а внутренняя структура протяженной частицы должна описываться квантовой механикой.

$$5.119. T = \frac{m^2 c^3 a_0^3}{4e^4} \approx 10^{-11} \text{ сек.}$$

Сделанные предположения о характере движения электрона выполняются, если потеря энергии за период  $\tau$  обращения по орбите мала по сравнению с полной энергией электрона, т. е.  $\tau \left| \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right| \ll |\mathcal{E}|$ , откуда  $a \frac{c}{v} \gg r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  ( $r_0$  — классический радиус электрона). Это условие начинает нарушаться только на очень малых расстояниях порядка  $10^{-13}$  см, на которых вообще неприменима классическая электродинамика, так как она в этой области внутренне противоречива.

Следовательно, результат задачи — очень малое время жизни атома — определено указывает на неправильность классических представлений о движении электрона в атоме (представление о траектории и т. п.). В процессе преодоления этой и других фундаментальных трудностей классической физики и была создана квантовая механика.

$$5.120. \mathcal{E}(t) = mc^2 \operatorname{cth} \left[ \frac{2e^4 H^2}{3m^3 c^5} t + \frac{1}{2} \ln \frac{\mathcal{E}_0 + mc^2}{\mathcal{E}_0 - mc^2} \right].$$

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{E}(t) \rightarrow mc^2$ , т. е. частица останавливается. Радиус орбиты можно выразить через  $\mathcal{E}(t)$  по формуле

$$r(t) = \frac{cp}{eH} = \frac{1}{eH} \sqrt{\mathcal{E}^2(t) - m^2 c^4}.$$

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $r(t) \rightarrow 0$ , т. е. частица движется по закручивающейся спирали.

$$5.121. \mathcal{E}_{\text{кр}} = mc^2 \sqrt[3]{\frac{3a^2 \omega}{2cr_0}}, \text{ где } r_0 = \frac{e^2}{mc^2}.$$

5.122. Уравнение движения гармонического осциллятора при учете силы лучистого трения имеет вид

$$(1) \quad \ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{mc^3} \ddot{\dot{r}}.$$

Уравнению (1) соответствует кубическое характеристическое уравнение

$$(2) \quad k^2 + \omega_0^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{mc^3} k^3.$$

Условие малости силы лучистого трения по сравнению с квазиупругой силой позволяет решить (2) последовательными приближениями, отбросив в нулевом приближении правую часть; при этом  $k \approx k_0 = \pm i\omega_0$ . В первом приближении, подставив в правую часть (2) вместо  $k$  значение  $k_0$  и введя обозначение

$$(3) \quad \gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3},$$

получим  $k \approx k_1 = \pm i\omega_0 - \frac{\gamma}{2}$ . Можно ограничиться одним из решений, например, тем, которому соответствует знак «—»:

$$(4) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cdot e^{-i\omega_0 t} \quad (t > 0).$$

Это решение справедливо при  $\gamma \ll \omega_0$  и имеет характер затухающих колебаний.

Энергия осциллятора убывает как квадрат модуля его амплитуды:

$$(5) \quad W = W_0 e^{-\gamma t}.$$

Величину  $\frac{1}{\gamma}$  естественно называть временем жизни возбужденного состояния осциллятора.

Напряженность электрического поля излучения пропорциональна  $\mathbf{r}$ , так что

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega = \begin{cases} \mathbf{E}_0 e^{-(i\omega_0 + \gamma/2)t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

и

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\gamma/2 + i\omega_0)t + i\omega t} dt = \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi \left[ i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2} \right]}.$$

Отсюда находим спектральное распределение интенсивности излучения:

$$(6) \quad \frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I_0 \gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4},$$

где  $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dI_\omega$  — полная интенсивность излучения. Спектральное распределение (6) имеет характер резонансной кривой (рис. 5.14).

Ширина спектральной линии характеризуется величиной  $\Delta\omega = \gamma$ .

Естественная ширина линии очень мала (на графике длин волн она равнялась бы  $\Delta\lambda = \Delta\frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi}{3}r_0 = 1,17 \cdot 10^{-12}$  см).

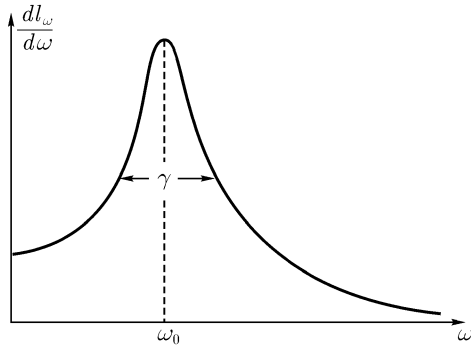


Рис. 5.14

Если считать, что излучение происходит не непрерывно, а дискретными порциями (это предположение, очевидно, выходит за рамки классической электродинамики), то неопределенность энергии фотонов  $\Delta\mathcal{E} = \hbar\Delta\omega = \hbar\gamma$  связана со временем жизни возбужденного состояния  $\tau = \frac{1}{\gamma}$  соотношением

$$(7) \quad \Delta\mathcal{E} \cdot \tau = \hbar.$$

Это — частный случай весьма общего квантовомеханического соотношения неопределенности для энергии-времени.

$$5.123. \quad \frac{dI_\omega}{d\omega} = I_0 e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_D}\right)^2},$$

где  $\gamma_D = \sqrt{\frac{2T\omega_0^2}{mc^2}}$  — доплерова ширина спектральной линии, а через  $I_0$  обозначена интенсивность при  $\omega = \omega_0$ . Ширина линии зависит от температуры и может служить мерой температуры газа.

$$5.124. \quad \frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

где  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} dI_\omega$ .

5.125. Если волна поляризована вдоль оси  $x$ , то

$$(1) \quad x_\omega = \frac{eE_x\omega}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}.$$

Энергия, поглощенная осциллирующим электроном,

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_x(t)\dot{x}(t) dt = \frac{2\pi e^2}{m} \int_0^\infty |E_x\omega|^2 \frac{2\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} d\omega,^6$$

так как  $(\dot{x})_\omega = -i\omega x_\omega$ . Подынтегральная функция в последнем выражении описывает спектральное распределение интенсивности поглощения. Из вида этой функции следует, что мерой ширины линии поглощения является величина  $\gamma$ , как и в случае испускания. Так как, по условию, ширина спектрального распределения группы велика по сравнению с естественной шириной линии  $\gamma$ , то

$$\Delta W = \frac{2\pi e^2}{m} |E_x\omega_0|^2 2\omega_0^2\gamma \int_{-\omega_0}^\infty \frac{d\xi}{(2\omega_0\xi)^2 + \omega_0^2\gamma^2},$$

где  $\xi = \omega - \omega_0$ . Нижний предел можно заменить на  $-\infty$ , так как  $\gamma \ll \omega_0$ . В результате интегрирования получим окончательно:

$$\Delta W = \frac{2\pi^2 e^2}{m} |E_x\omega_0|^2 = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0},$$

где  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  — классический радиус электрона. Результат не зависит от  $\gamma$ . Зависимость от частоты только косвенная: величина  $\Delta W$  пропорциональна спектральной плотности  $S_{\omega_0}$  при резонансной частоте  $\omega_0$  осциллятора.



Из вывода ясно, что тот же результат мы получили бы и в случае падения на изотропный осциллятор неполяризованной и неплоской группы волн. В этом случае  $S_\omega$  представляла бы собой сумму интенсивностей всех поляризованных волн частоты  $\omega$ , входящих в эту группу.

$$5.126. \text{ а) } \Delta W = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \cos^2 \vartheta;$$

$$\text{ б) } \Delta W = \pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \sin^2 \theta;$$

$$\text{ в) } \Delta W = \frac{2}{3} \pi^2 r_0 c S_{\omega_0}.$$

5.127. Уравнение движения гармонического осциллятора в данном случае принимает вид:

$$(1) \quad \ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

если пренебречь неоднородностью электрического поля в области, занятой осциллятором, и действием магнитной силы — эффектами порядка  $\frac{v}{c}$ .

Решение уравнения (1), соответствующее вынужденным колебаниям, выражается формулой:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \cdot \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Отсюда для усредненной по времени интенсивности света, рассеянного в данном направлении, найдем:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} |\overline{e\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}}|^2 = \frac{cE_0^2 r_0^2}{8\pi} \cdot \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2},$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением  $\mathbf{n}$  распространения рассеянного излучения и направлением поляризации падающей волны. Плотность потока энергии (усредненная по времени) в падающей волне  $\bar{\gamma}_0 = \frac{cE_0^2}{8\pi}$ . Дифференциальное сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\bar{\gamma}_0} \frac{dI}{d\Omega} = r^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

<sup>6</sup>Как легко проверить,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot B(t) dt = 2\pi \int_0^{\infty} (A_\omega B_\omega^* + A_\omega^* B_\omega) d\omega.$$

Полное сечение рассеяния получается отсюда интегрированием по углам:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

В случае сильно связанного электрона, когда  $\omega_0 \gg \omega$ ,

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{r_0^2 \omega^4}{\omega_0^4}.$$

Характерна зависимость сечения от частоты:  $\sigma \sim \omega^4$ .

В случае слабо связанного электрона при малом лучистом трении  $\gamma \approx 0$ ,  $\omega_0 \approx 0$  и

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3}.$$

**5.128.**  $\mathbf{H} = -\frac{Ae^2}{mc^2 r} (e_\alpha \cos \vartheta - ie_\vartheta) e^{-i(\omega t' - \alpha)}$ , где  $\vartheta$ ,  $\alpha$  — полярные углы направления  $\mathbf{n}$  распространения рассеянной волны (направление распространения падающей волны вдоль оси  $z$ ),  $A$  — амплитуда падающей волны.

Из выражения  $\mathbf{H}$  видно, что рассеянная волна оказывается, вообще говоря, эллиптически поляризованной. Волны, рассеянные вперед и назад, поляризованы по кругу. Волна, рассеянная в плоскости  $xy$ , поляризована линейно. Дифференциальное и полное сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{(1 + \cos^2 \vartheta)}{2}, \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

**5.129.**  $\rho = \cos^2 \vartheta$ .

**5.130.** В случае линейно поляризованной волны:

$$d\sigma_{\text{пол}} = r_0^2 \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta)^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6} [(1 - \beta \cos \vartheta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha],$$

где  $\vartheta$ ,  $\alpha$  — полярные углы направления распространения рассеянной волны, ось  $z$  параллельна скорости  $\mathbf{v}$  заряда,  $\beta = \frac{v}{c}$ , азимутальный угол  $\alpha$  отсчитывается от направления вектора  $\mathbf{E}$  в падающей волне.

В случае неполяризованной волны:

$$d\sigma_{\text{непол}} = r_0^2 \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta)^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6} \left[ \frac{1 + \beta^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) - 2\beta \cos \vartheta \right].$$

**5.131.** Решая уравнение движения осциллятора в магнитном поле  $\mathbf{H} \parallel z$  так, как это делалось в задаче 4.52, получим при

$$\omega_0 \gg \frac{eH}{2mc} = \omega_L,$$

$$\mathbf{r} = A_1(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{-i(\omega_0 - \omega_L)t} + A_2(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{-i(\omega_0 + \omega_L)t} + A_3\mathbf{e}_ze^{-i\omega t},$$

где  $A_1, A_2, A_3$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Из выражения  $\mathbf{r}$  видно, что осциллятор, помещенный в магнитное поле, становится анизотропным, частота его колебаний расщепляется на 3 частоты:  $\omega_0$  и  $\omega_0 \pm \omega_L$ . При наблюдении излучения в любом направлении поляризация каждой из монохроматических компонент оказывается, вообще говоря, эллиптической. В частности, вдоль оси  $z$  (вдоль поля  $\mathbf{H}$ ) наблюдаются две спектральные линии, поляризованные по кругу в противоположные стороны. В перпендикулярном к полю направлении наблюдаются все три монохроматические компоненты, поляризованные линейно. При этом вектор электрического поля несмещенной спектральной линии колеблется в направлении магнитного поля, вектора же электрического поля у обеих смещенных линий колеблется в перпендикулярном направлении.

**5.132.** Условие малости амплитуды вдали от резонансной частоты ( $|\omega - \omega_0| \sim \omega_0$ ) означает, что поле волны в области колебаний отдельного осциллятора можно считать однородным. При резонансе ( $\omega \approx \omega_0$ ) требуется более жесткое условие  $eE_0/mc\gamma \ll 1$ , где  $\gamma$  — не лоренц-фактор частицы, а ширина резонансной линии (см. задачи 5.122–5.124). Если эти условия выполняются, то поле, действующее на  $j$ -ю частицу, можно записать в виде  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j - \omega t)$ , а ее радиус-вектор  $\mathbf{s}_j(t)$ , отсчитываемый от положения равновесия, определится из уравнения движения в пренебрежении магнитной силой ( $v/c \ll 1$ ):  $\mathbf{s}_j = \mathbf{a} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j - \omega t)$ , где амплитуда колебаний

$$(1) \quad \mathbf{a} = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}.$$

Вычисляя поле рассеянных волн в волновой зоне по принципу суперпозиции с помощью формул для электрического дипольного излучения (см.

раздел 5.2), находим

(2)

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^N \frac{e s_j (t - R_j/c) \times \mathbf{n}'}{c^2 R_j} \approx - \frac{\exp[-i\omega(t - r/c)] \omega^2 \mathbf{p} \times \mathbf{n}'}{r c^2} \sum_j e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j}.$$

Здесь  $R_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \approx r - \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{p} = e\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, который отсчитывается от некоторого начала координат внутри области, занятой частицами. Вектор  $\mathbf{q} = \omega \mathbf{n}'/c - \mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  представляет собой изменение волнового вектора волны при рассеянии. Вычисляя дифференциальное сечение рассеяния по формуле (5.119), находим

$$(3) \quad \frac{d\Sigma}{d\Omega} = F(\mathbf{q}) \frac{d\sigma}{d\Omega},$$

где

$$(4) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^4 (\mathbf{n}' \times \mathbf{p})^2}{c^4 |\mathbf{E}_0|^2}$$

— сечение рассеяния отдельным осциллятором либо свободным электроном (при  $\omega_0 = \gamma = 0$ ), которое было вычислено ранее (см. задачи 5.127–5.129). Множитель

$$(5) \quad F(\mathbf{q}) = \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j} \right|^2$$

представляет собой фактор когерентности, показывающий, в какой мере рассеяние системой зарядов отличается от рассеяния на отдельной частице. Он сильно зависит от соотношения между обратным переданным рассеивателю волновым вектором  $q^{-1}$  и размерами области, в которой движутся частицы. Предельные случаи:

1. Переданный волновой вектор мал, для всех  $j$  имеем  $|\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j| \ll 1$ . Заменяя в (5) экспоненты единицами, имеем  $F = N^2$ , где  $N$  — полное число рассеивателей. Это — случай полностью когерентного рассеяния, когда поля от отдельных частиц складываются в одной фазе (сравнимый со случаем когерентного излучения сгустком частиц, задача 5.92). Сечение пропорционально квадрату числа рассеивателей:

$$(6) \quad \frac{d\Sigma}{d\Omega} = N^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Если рассеиваются длинные волны,  $\lambda \gg r_j$ , то формула (6) справедлива при всех углах рассеяния. Если же  $\lambda \leq r_j$ , то (6) справедливо только при рассеянии на малые углы, при которых  $qr_j \ll 1$ , несмотря на то, что  $kr_j \geq 1$ . Поскольку  $q = 2k \sin(\theta/2)$ , где  $\theta$  — угол рассеяния, то область углов когерентного рассеяния дается неравенством

$$(7) \quad \theta \ll \theta_c \approx \frac{1}{kl},$$

где  $l$  — размер рассеивающей системы.

2. Переданный волновой вектор велик,  $|\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j| \gg 1$ . Запишем (5) в виде

$$F = \sum_{j=1}^N \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j)] + \sum_{j \neq m} \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)].$$

Первая сумма, очевидно, равна  $N$ . Значения же второй суммы зависят, вообще говоря, от расположения зарядов. Если оно случайно, то при достаточно большом  $N$  произойдет взаимное гашение осциллирующих слагаемых, и  $F = N$ . Поэтому будем иметь

$$(8) \quad \frac{d\Sigma}{d\Omega} = N \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Здесь складываются не амплитуды, а интенсивности волн, рассеянных отдельными частицами, эффект пропорционален числу рассеивателей, а не их квадрату.

Следует иметь в виду, что мы не учитывали вторичного рассеяния уже рассеянных волн. Это означает, что пробег волн (или фотонов) между рассеяниями должен превосходить размер рассеивающей системы. Другими словами, ее «оптическая толщина» должна быть малой.

**5.133.** Сила определяется импульсом, передаваемым частице падающей волной в единицу времени. Из соображений симметрии ясно, что сила, как и передаваемый импульс, ориентированы вдоль направления распространения  $\mathbf{k}/k$  первичной волны. Передаваемый импульс равен разности проекций на  $\mathbf{k}$  импульсов первичной волны и всех рассеянных волн, интенсивность которых определяется падающей волной и сечением рассеяния. В итоге будем иметь общую формулу для силы, усредненной по периоду волны:

$$(1) \quad \overline{\mathcal{F}} = \frac{\overline{\gamma}_0}{c} \int (1 - \cos\theta) \left( \frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} \right) d\Omega.$$

Хотя дифференциальное сечение рассеяния зависит от поляризации первичной волны и для волн с линейной, круговой поляризациями и неполяризованной волны принимает соответственно вид

$$(2) \quad \frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} = r_0^2(1 - \sin^2\theta \cos^2\alpha), \quad \frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2\theta),$$

$$\frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2\theta),$$

где  $r_0$  — классический радиус частицы,  $\theta, \alpha$  — углы, определяющие направление распространения рассеянной волны, сила нечувствительна к поляризации и для всех трех случаев будем иметь

$$(3) \quad \mathcal{F} = w_0\sigma_T,$$

где  $w_0 = \bar{\gamma}_0/c = (1/8\pi)|E_0|^2$  — плотность энергии в первичной волне,

$$(4) \quad \sigma_T = 8\pi r_0^2/3$$

— томсоновское сечение рассеяния волны свободным зарядом.

$$5.134. \quad F = w\sigma_T \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) \left\{ \mathbf{n} - \gamma^2 \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) \frac{\mathbf{v}}{c} \right\}.$$

Это выражение для силы справедливо и для немонахроматического излучения, распространяющегося в направлении  $\mathbf{n}$ .

5.135. Из соображений симметрии ясно, что результирующая сила, действующая на электрон, будет направлена по нормали к поверхности. Усредняя по всем возможным направлениям излучения силу, найденную в предыдущей задаче, получим

$$\langle F_n \rangle = \frac{3}{4}w\sigma_T\gamma^2 \left(1 + \beta^2 - \frac{32}{15}\beta\right).$$

Сила положительна при  $\beta < \beta_*$  и отрицательна при  $\beta > \beta_*$ , где  $\beta_*$  — корень уравнения

$$\beta^2 - \frac{32}{15}\beta + 1 = 0,$$

удовлетворяющий условию  $0 \leq \beta_* \leq 1$ , т. е.  $\beta_* \approx 0,7$ . Частица ускоряется до приобретения скорости  $v_* \approx 0,7c$ , после чего движется с этой скоростью, больше не ускоряясь. Это объясняется тем, что по мере роста скорости частицы все большее число фотонов в системе покоя частицы участвует во встречных столкновениях с ней. Из-за этого ускоряющая сила уменьшается и при  $v = v_*$  обращается в нуль. При  $v > v_*$  встречные столкновения преобладают над догоняющими, и частица замедляется. Изменение направления движения квантов связано с преобразованием углов (аберрация света).

**5.136.** К электрону, находящемуся на расстоянии  $z$  от пятна, приходит излучение, распространяющееся внутри телесного угла  $\Omega_0 = 2\pi(1 - \mu_0)$ , где  $\mu_0 = \cos \theta_0 = (1 + a^2/z^2)^{-1/2}$  (см. рис. 5.15). При изотропном испускании из каждой точки пятна распределение излучения по углам

$$(1) \quad \psi(\mu) d\Omega = \frac{\Theta(\mu - \mu_0) d\mu}{1 - \mu_0}$$

зависит от координаты  $z$ . Плотность энергии излучения также зависит от координаты по закону

$$(2) \quad w(z) = w_0 \frac{\Omega(z)}{\Omega(0)} = w_0(1 - \mu_0(z)).$$

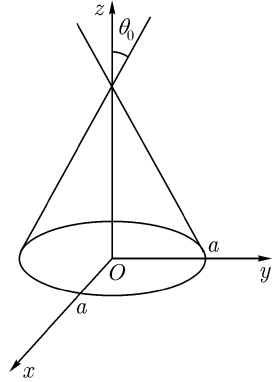


Рис. 5.15

В выражение силы, найденной в задаче 5.133, следует подставить (2) и упростить ее с функции распределения (1). Это даст

$$(3) \quad f(\gamma, z) = \langle F_z \rangle = \frac{1}{6} \gamma^2 w_0 \sigma_T (1 - \mu_0) [\beta^2 (1 + \mu_0 - 2\mu_0^2) - 6\beta + 3(1 + \mu_0)].$$

Составив уравнение, описывающее изменение энергии частицы, и перейдя к дифференцированию по  $dz = v dt$ , получим

$$(4) \quad \frac{d\gamma}{dz} = \frac{f(\gamma, z)}{mc^2}.$$

В этом уравнении переменные не разделяются, но можно исследовать знак производной  $d\gamma/dz$  и асимптотику. На больших расстояниях от пятна,  $z \gg z_0 \gg a$ , уравнение (4) может быть решено в аналитической форме. Максимальный возможный лоренц-фактор определяется из трансцендентного уравнения

$$\gamma \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} - \arcsin \frac{1}{\gamma} \right) = \gamma_0 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_0^2}} - \arcsin \frac{1}{\gamma_0} \right) + \frac{w_0 \sigma_T a^2}{2mc^2 z_0},$$

где  $\gamma_0$  — лоренц-фактор при  $z = z_0$ , который нужно определять из численного решения уравнения (4). Он существенно зависит от плотности  $w_0$  излучения.

**5.137.** Используем результат задачи 5.133. Плотность энергии излучения убывает с расстоянием от центра звезды обратно пропорционально  $r^2$ :  $w(r) = L/4\pi cr^2$ . Сила светового давления, действующая на электрон:

$$F_r = \sigma_T w(r) = \frac{2e^4 L}{3m_e^2 c^5} \frac{1}{r^2}.$$

На протон действует сила, которая меньше в  $(m_e/m_p)^2$  раз. Гравитационная сила в основном действует на протон и имеет ту же зависимость от расстояния:  $F_g = GMm_e/r^2$ , где  $G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса звезды. Вследствие кулоновского взаимодействия между протонами и электронами обе силы действуют на квазинейтральную плазму в целом. Из равенства сил находим

$$L_c = \frac{4\pi c m_p G M}{\sigma_T} \approx 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ эрг/с},$$

где  $M_\odot \approx 2 \times 10^{33} \text{ г}$  — масса Солнца.

**5.138.** Исходим из уравнения Дирака–Лоренца (5.110), записанного через импульс и ускорение:

$$(1) \quad \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{e}{mc} F_{ik} p^k + \frac{2e^2}{3mc^3} \left\{ \frac{d^2 p_i}{d\tau^2} + \frac{1}{c^2} p_i (w_k w^k) \right\}.$$

Тензор  $F_{ik}$  должен содержать как поле волны, так и поляризационное поле  $E_z$ , препятствующее продольному движению электрона. Исследуем стационарное состояние, в котором энергия частицы  $\mathcal{E} = mc^2 \gamma = \text{const}$ , а трехмерный импульс вращается в плоскости  $xy$  с частотой волны  $\omega$ :

$$(2) \quad \mathbf{p}(t) = p[e_x \cos(\omega t - \varphi) - e_y \sin(\omega t - \varphi)], \quad p_z = 0,$$

где  $t$  — координатное время,  $\varphi$  — сдвиг фазы вращения электрона относительно электрического поля волны.

Компонента  $i = 0$  уравнения (1) при подстановке в него приведенных выше величин дает уравнение баланса энергии:

$$(3) \quad e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \equiv eE_0 v \sin \varphi = \frac{2e^2 \omega^2}{3c} \beta^2 \gamma^4.$$

Здесь в левой части равенства присутствует мощность, получаемая электроном от волны; правая часть в точности равна потере энергии (5.72) на



излучение частицей, вращающейся по окружности с заданной частотой. В компонентах  $i = 1, 2, 3$  переходим к дифференцированию по координатному времени  $d\tau = \gamma^{-1} dt$  и выделяем проекцию на направление ускорения частицы, умножая обе части уравнения (1) скалярно на соответствующий орт  $e(t) = e_x \sin(\omega t - \varphi) + e_y \cos(\omega t - \varphi)$ . Это позволяет выразить импульс через амплитуду волны и сдвиг фазы:

$$(4) \quad \omega p = eE_0 \cos \varphi.$$

Последнее уравнение выражает собой баланс центробежной и электрической сил без участия радиационной силы, так как угловое распределение излучения симметрично относительно плоскости круговой орбиты. Наконец, проекция уравнения (1) на ось  $Oz$  позволяет выразить продольное электрическое поле  $E_z$  через поле волны:

$$(5) \quad E_z = E_0 \beta \sin \varphi.$$

Уравнения (3) и (4) позволяют вычислить зависимость сечения от амплитуды волны и проанализировать предельные случаи. Для этого введем безразмерные параметры [Зельдович (1975)]  $b = eE_0/mc\omega$ ,  $\kappa = 3c/r_0\omega$  и исключим фазу  $\varphi$  из указанных уравнений:

$$(6) \quad (\gamma^2 - 1) \left( \frac{\gamma^6}{\kappa^2} + 1 \right) = b^2.$$

Полученное алгебраическое уравнение определяет энергию частицы  $\mathcal{E} = mc^2\gamma$  как функцию параметров  $b$ ,  $\kappa$ . В области применимости классической электродинамики  $\kappa \gg 1$ . Это неравенство нарушается только при энергиях квантов  $\hbar\omega > 137mc^2 \approx 70$  МэВ, т. е. в далекой квантовой области. Полное сечение рассеяния согласно (5.119) определяется отношением излучаемой в единицу времени энергии, которая определяется правой частью равенства (3), к плотности потока энергии в падающей волне  $\gamma_0 = cE_0^2/4\pi$ :

$$(7) \quad \sigma = \frac{8\pi e^2 \omega^2}{3c^2 E_0^2} \beta^2 \gamma^4 = \sigma_T \frac{\gamma^2 \kappa^2}{\gamma^6 + \kappa^2}.$$

Предельные случаи: а)  $\gamma \ll \kappa^{1/3}$ ; из (6) получаем  $\gamma^2 \approx 1 + b^2$  и, следовательно,  $b \ll \kappa^{1/3}$ . Это — случай, когда реакция излучения в (1) играет малую роль. Имеем из(7)

$$(8) \quad \sigma \approx \sigma_T \quad \text{при } b \ll 1, \quad \sigma \approx \sigma_T b^2 \quad \text{при } b \gg 1.$$

б)  $\gamma \gg \kappa^{1/3}$ ; при этом  $\gamma \approx (\kappa b)^{1/4}$  и  $b \gg \kappa^{1/3}$ . Этим неравенствам отвечает превышение реакции излучения над внешней силой. Оценка сечения:

$$(9) \quad \sigma \approx \sigma_T \frac{\kappa}{b}.$$

Наибольшего значения сечение достигает при  $b \approx \kappa^{1/3}$ :

$$(10) \quad \sigma_{\max} \approx \sigma_T \kappa^{2/3} \approx \sigma_T \left( \frac{\lambda}{2\pi r_0} \right)^{2/3}.$$

Классическая теория применима, если характерная энергия кванта составляет малую долю от энергии электрона:  $\hbar\omega_c \ll mc^2\gamma$ . Под характерной энергией следует понимать энергию квантов в максимуме излучения, т. е. при частотах  $\omega_c \approx \omega\gamma^3$  (см. формулу (8) из решения задачи 5.83, в которой следует заменить  $\omega_0 \rightarrow \omega$ ). Из полученных выше неравенств находим границу, разделяющую классическую и квантовую области:  $E_0 \approx e/\Lambda_C^2$ , где  $\Lambda_C$  — комптоновская длина волны электрона.

**5.139.** Общая схема решения такая же, как в предыдущей задаче. Уравнение (3) сохраняет свой вид, уравнение движения (4) из предыдущей задачи превращается в

$$\omega p = \pm eH\beta + eE_0 \cos \varphi,$$

где знак плюс относится к необыкновенной волне, для которой знаки  $\omega_H = eH/mc$  и  $\omega$  совпадают, знак минус — к обыкновенной волне с противоположными знаками частот. В необыкновенной волне направления вращения электрона волной и магнитным полем совпадают. В обозначениях предыдущей задачи будем иметь из уравнений движения

$$\gamma\beta = \pm \frac{\omega_H}{\omega} \beta + b \cos \varphi, \quad \kappa b \beta \sin \varphi = \beta^2 \gamma^4, \quad \sigma = \sigma_T \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 1)}{b^2}.$$

Вычисление сечения и энергии электрона в зависимости от входных параметров ( $\omega_H$ ,  $\omega$ ,  $E_0$ ) в общем случае можно произвести только численным путем. Анализ предельных случаев см. в оригинальной работе [Зельдович и Илларионов (1971)].

**5.140.** Движение электрона в плоской волне произвольной силы и с произвольной поляризацией без учета реакции излучения было исследовано в задачах 4.57, 4.58. Излучение частицы, совершающей заданное

движение, вычисляется по формулам раздела 5.3. См. оригинальную работу [Сарачик и Шепперт (1970)].

**5.141.**

$$\frac{d^2 \mathcal{E}^{rad}}{d\omega d\Omega} = \frac{m^2 c \omega^2}{4\pi^2 E^2} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \gamma_{\perp}^2 - 1 \right] R_{\nu}^2(z) + \gamma_{\perp}^2 R_{\nu}'^2(z) \right\},$$

где

$$\gamma_{\perp} = \frac{\sqrt{m^2 c^2 + p_{\perp}^2}}{mc}, \quad \nu = \frac{cp_{\perp} k_{\perp}}{eE} \cos \varphi, \quad z = \frac{mc}{eE} k_{\perp} \gamma_{\perp}.$$

Индекс  $\perp$  обозначает компоненту, перпендикулярную постоянному электрическому полю  $\mathbf{E} = \text{const}$ ,  $\varphi$  — угол между  $\mathbf{p}_{\perp}$  и  $\mathbf{k}_{\perp}$ . Ход расчета, анализ частных случаев и обсуждение физических аспектов проблемы см. в оригинальной статье [Никишов и Ритус (1969)].

**5.142.** Решая одномерное уравнение с учетом радиационной силы

$$(1) \quad m\dot{v} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v} + eE_0 \delta(t/T_0),$$

находим ускорение частицы

$$(2) \quad \dot{v}(t) = w(t) = \left( w_0 - \frac{eE_0 T_0}{m\tau_0} \Theta(t/T_0) \right) e^{t/\tau_0},$$

где  $w_0$  — постоянная интегрирования,  $\tau_0$  дается формулой (5.96). Накладывая начальное условие  $w = 0$  при  $t < 0$ , т. е. до начала действия силы, получаем  $w_0 = 0$  и самоускорение

$$(3) \quad w(t) = -\frac{eE_0 T_0}{m\tau_0} e^{t/\tau_0},$$

т. е. физически бессмысленный результат при  $t > 0$ . Но если наложить «конечное условие», т. е. потребовать обращения в нуль ускорения после окончания действия силы,  $w(t) = 0$  при  $t > 0$ , то  $w_0 = \frac{eE_0 T_0}{m\tau_0}$  и решение принимает вид

$$(4) \quad w(t) = w_0 e^{t/\tau_0} \quad \text{при } t < 0, \quad v(t) = \begin{cases} v_0 + \tau_0 w_0 e^{t/\tau_0}, & t < 0; \\ v_0 + \tau_0 w_0, & t > 0. \end{cases}$$

В полученном решении отсутствует самоускорение, но имеется другой недостаток: нарушен принцип причинности, частица начинает «чувствовать»

действие силы до ее включения. Этот результат можно интерпретировать как «несжимаемость» частицы размером  $r_0$ , благодаря чему возмущение передается на такое расстояние мгновенно, как только «передний край» частицы его почувствует. Полное излучение, вычисленное с ускорением частицы (4), имеет значение

$$(5) \quad \mathcal{E}^{rad} = \frac{e^2 \omega_0^2 \tau_0}{3c^3}.$$

Трудности, проиллюстрированные выше, показывают, что радиационная сила не вполне корректным образом учитывает реакцию излучения. По-видимому, трудностей не возникает в тех случаях, когда эта сила мала по сравнению с внешней силой в системе покоя частицы. Корни этих трудностей связаны с появлением бесконечной собственной энергии и других расходимостей в существующих теориях.

$$5.143. \quad \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2 k^2}, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -\frac{i e \mathbf{k}}{2\pi^2 k^2}.$$

5.144. Так как объемная плотность  $\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ , то

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{e}{(2\pi)^4} \iint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3r dt = \\ &= \frac{e}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t} dt = \frac{e}{8\pi^3} \delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega). \end{aligned}$$

Отсюда с помощью результатов предыдущей задачи находим

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Таким же образом можно получить, что

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2 c} \cdot \frac{\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Используя выражения компонент напряженностей поля, получим:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = i \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left( -\mathbf{k} + \frac{\mathbf{v}\omega}{c^2} \right),$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} = i \frac{e}{2\pi^2 c} (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Во всех компонентах поля присутствует множитель  $\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)$ , обязанный дисперсионному уравнению  $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ . Благодаря этому, все разложения Фурье электромагнитного поля в данном случае фактически являются не четырех, а трехмерными. Например, в случае потенциала  $\varphi$ :

$$\varphi = \int_{(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 k d\omega = \int \varphi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 k,$$

где

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t}}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

**5.146.** Рассмотрим вычисление скалярного потенциала. Согласно уравнениям из решения задачи 2.126

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

Компонента Фурье плотности заряда:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}\omega} &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int [\mathbf{p} \cdot \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)] e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 r dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int [\mathbf{p} \cdot \text{grad} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) d^3 r dt = -i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение  $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  имеет тот же вид, что и в случае поля равномерно движущегося точечного заряда (см. задачу 5.144). Поступая при вычислении  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  в соответствии с указанием к задаче 5.145,

получим:

$$(1) \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{p} \cdot \text{grad} \frac{1}{r^*} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{r^{*3}},$$

где  $\mathbf{r}_0 = \left(x - vt, \frac{y}{\gamma^2}, \frac{z}{\gamma^2}\right)$ ,  $r^* = \sqrt{(x - vt)^2 + \frac{1}{\gamma^2}(y^2 + z^2)}$ .

Аналогичные вычисления дают для векторного потенциала

$$(2) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}^*}{r^{*3}} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0)}{cr^{*3}}.$$

$$5.147. \text{ а) } \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{r}^*}{\gamma r^{*3}}, \varphi = 0;$$

$$\text{б) } \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{r}^*}{r^{*3}}, \varphi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c}.$$

5.149.

$$(1) \quad \ddot{q}_{\mathbf{k}\lambda}(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}\lambda}(t) = F_{\mathbf{k}\lambda}(t),$$

где

$$(2) \quad F_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \frac{ec}{2\pi^2} [\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}^* \cdot \mathbf{v}(t)] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0(t)},$$

а  $\mathbf{r}_0(t)$  — радиус-вектор частицы в момент времени  $t$ ,  $\mathbf{v}$  — ее скорость в этот же момент времени. В нерелятивистском случае

$$(3) \quad m\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F} + e\mathbf{E}(\mathbf{r}_0),$$

где  $m$  — масса частицы,  $\mathbf{F}$  — действующая на частицу сила неэлектромагнитного происхождения,

$$(4) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int e_{\mathbf{k}\lambda} \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} d^3k$$

— напряженность поля излучения в той точке, где находится частица. Мы не учитываем силу, действующую на частицу со стороны магнитного поля, так как предполагается, что  $v \ll c$ . Уравнение (1) представляет собой уравнение вынужденных колебаний осциллятора под действием внешней силы  $F_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ . Движение частицы и электромагнитного поля, взаимодействующих между собой, описывается системой уравнений (1), (3).

**5.150.** Изменение энергии одного осциллятора:

$$\frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} = \frac{1}{2}(F_{\mathbf{k}\lambda}\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}^* + F_{\mathbf{k}\lambda}^*\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}).$$

Скорость изменения энергии поля:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \int (F_{\mathbf{k}\lambda}\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}^* + F_{\mathbf{k}\lambda}^*\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda})(d\mathbf{k}).$$

**5.151.** Сила  $F_{\mathbf{k}\lambda}(t)$  в данном случае принимает вид

$$F_{\mathbf{k}\lambda}(t) = b_{\mathbf{k}\lambda} \cos \omega_0 t, \quad \text{где} \quad b_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{e}{\pi\sqrt{2}}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}), \quad \mathbf{v}_0 = \omega_0 \mathbf{r}_0$$

(для простоты рассматриваем линейно поляризованные осцилляторы поля, так что орты  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$  — вещественны). Интегрируя уравнение (1) задачи 5.149, получаем

$$q_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{b_{\mathbf{k}\lambda}}{\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega_{\mathbf{k}} t),$$

если в начальный момент времени  $t = 0$  осцилляторы поля не были возбуждены. Это значение  $q_{\mathbf{k}\lambda}$  подставим в выражение для скорости изменения энергии поля излучения  $\frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{dt}$ , найденное в задаче 5.150,

$$\frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} = \frac{b_{\mathbf{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_0^2} (\omega_{\mathbf{k}} \cos \omega_0 t \sin \omega_{\mathbf{k}} t - \omega_0 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t).$$

Интегрируя последнее выражение по  $t$  от 0 до  $t$ , получим количество энергии, переданное частицей за время  $t$  осциллятору поля  $(\mathbf{k}, \lambda)$ :

$$W_{\mathbf{k}\lambda} = \int_0^t \frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} dt = \frac{b_{\mathbf{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_0^2} \left[ \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0)t}{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0} - \frac{\omega_0}{4} \cdot \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{\omega_0} \right].$$

При  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_0$  и  $t \rightarrow \infty$  второй член в скобках очень велик по сравнению с первым и третьим членами. Возбуждение осцилляторов происходит, следовательно, резонансным образом: в первую очередь возбуждаются те осцилляторы поля, частота которых близка к частоте вынуждающей силы  $F_{\mathbf{k}\lambda}$ .

Оставим поэтому только резонансный член и просуммируем энергии, полученные осцилляторами поля, у которых частоты не сильно отличаются от  $\omega_0$ , направление  $\mathbf{k}$  заключено внутри телесного угла  $d\Omega$ , а орт поляризации  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$  ( $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ ) имеет одно и то же направление:

$$dW = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} W_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{d\Omega}{2c^3} \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} \sum_{\lambda} \frac{\omega_k^3 b_{\mathbf{k}\lambda}^2}{\omega_k + \omega_0} \cdot \frac{1 - \cos(\omega_k - \omega_0)t}{(\omega_k - \omega_0)^2} d\omega_{\mathbf{k}}.$$

Подынтегральная функция в последнем выражении имеет резкий максимум при  $\omega_k = \omega_0$ . Этот максимум тем уже, чем больше  $t$ . При достаточно больших  $t$  можно вынести плавно меняющийся множитель  $\sum_{\lambda} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^3 b_{\mathbf{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0}$  за знак интеграла, положив в нем  $\omega_k = \omega_0$ . В оставшемся интеграле можно устремить  $\delta$  к  $\infty$ . Тогда он примет вид (см. формулу 1.218):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{\alpha^2} d\alpha = \pi t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Мы получим, таким образом:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\pi(b_{\mathbf{k}1}^2 + b_{\mathbf{k}2}^2)\omega_0^2}{2c^3} t.$$

Отсюда для интенсивности излучения в данном направлении находим хорошо известный результат:

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{1}{t} \frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^2 \overline{v^2} \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3},$$

где через  $\overline{v^2} = \frac{v_0^2}{2}$  обозначена средняя скорость колеблющейся частицы, через  $\vartheta$  — угол между направлением  $\mathbf{v}_0$  и направлением  $\mathbf{k}$ . При выводе последней формулы мы воспользовались легко получаемым соотношением

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}1})^2 + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}2})^2 = v_0^2 \sin^2 \vartheta.$$

Интегрированием по углам находим полную интенсивность излучения

$$\overline{I} = \frac{2e^2 \omega_0^2 \overline{v^2}}{3}.$$



**5.153.** Будем приближенно решать систему уравнений (1) и (3) задачи 5.149. Пренебрегая реакцией излучения, подставим в уравнение (3) напряженность поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$  падающей волны. Его решение, соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид:

$$(1) \quad \mathbf{r}(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{\cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Движение частицы под действием падающей волны будет возбуждать осцилляторы поля излучения согласно уравнению (1) задачи 5.149, в котором нужно силу  $F_{\mathbf{k}\lambda}$  выразить через  $\mathbf{r}(t)$ :

$$F_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{e^2 \omega}{m\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{E}_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega t.$$

Орты поляризации выбраны вещественными. Решая уравнения (1) задачи 5.149 с начальным условием  $q_{\mathbf{k}\lambda}(0) = 0$ , получим:

$$q_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \frac{e^2}{m\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda})}{(\omega_k^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2)} (\sin \omega t - \sin \omega_k t).$$

Поступая далее так же, как в задаче 5.151, найдем интенсивность излучения в направлении  $\mathbf{k}$  с поляризацией, характеризуемой ортом  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ :

$$(2) \quad \frac{dI_{\mathbf{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{1}{t} \frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \cdot \frac{\omega^4 (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda})^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}.$$

Из (2) видно, что рассеянное излучение линейно поляризовано в плоскости, проходящей через  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{k}$ . Вводя угол  $\vartheta$  между векторами  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{k}$ , получим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi}{cE_0^2} \frac{dI}{d\Omega} = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \vartheta,$$

что находится в полном согласии с результатом задачи 5.127. Интегрированием по углам находим полное сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

---

---

## ГЛАВА 6

# Квантовая теория излучения и рассеяния фотонов

Современное понимание строения материи неотъемлемо от осознания того факта, что основа всех явлений природы квантовая из-за квантового характера законов микромира, являющегося фундаментом мироздания. Мы ограничимся в этой главе некоторыми типичными задачами квантовой электродинамики в узком смысле слова, т. е. теорией свободного квантованного электромагнитного поля и его взаимодействия с веществом. Эта «узкая» область достаточно обширна и очень важна с точки зрения ее многочисленных физических и технических приложений. Вещество будет рассматриваться главным образом в полурелятивистском приближении Паули (раздел 6.2), но в разделе 6.3 будет затронуто и несколько сравнительно простых релятивистских задач.

Предполагается, что пользователь книги знаком с основами квантовой механики. Тем не менее, для удобства читателя и большей автономности этой книги в Дополнении 3 авторы сделали попытку кратко изложить без доказательств основные положения квантовой теории. В этом дополнении приведены также некоторые узловые формулы, на которые имеются ссылки в тексте книги.

### 6.1. Квантовая теория свободного электромагнитного поля

**Осцилляторы поля.** Будем исходить из гамильтоновой формы уравнений электромагнитного поля в вакууме, рассмотренной в конце раздела 2.3. Там было показано, что поле можно представить в виде эквивалентной механической системы — набора бесконечного числа невзаимодействующих гармонических осцилляторов. Каждому осциллятору соответствует собственное колебание поля в виде плоской волны с определенным волновым вектором  $\mathbf{k}$ , поляризацией  $\sigma$  и частотой  $\omega_{\mathbf{k}} = c\mathbf{k}$ . Значения волновых векторов согласно (2.145) получаются дискретными, если на векторы поля наложены периодические граничные условия. В дальнейшем для краткости будем обозначать через  $s = (\mathbf{k}, \sigma)$  индекс, характеризующий тип собственного колебания (моды). Энергия  $\mathcal{H}$  и импульс  $\mathbf{P}$  поля в объеме  $V$  выра-

жаются через действительные канонические переменные — координаты  $Q_s$  и импульсы  $P_s$  осцилляторов поля — по формулам (2.160), (4.128), (4.130):

$$\mathcal{H} = \sum_s \mathcal{H}_s, \quad \mathbf{P} = \sum_s \frac{\mathbf{k}_s \mathcal{H}_s}{\omega_s}, \quad \text{где } \mathcal{H}_s = \frac{1}{2}(P_s^2 + \omega_s^2 Q_s^2) \quad (6.1)$$

— функция Гамильтона отдельного осциллятора поля. Квантование электромагнитного поля — это применение квантовой механики к эквивалентной системе невзаимодействующих осцилляторов (впервые квантовую теорию электромагнитного поля развил Дирак (1927), см. [Дирак (1990)])

**Фотоны.** Решим методами квантовой механики задачу о стационарных состояниях электромагнитного поля, т. е. вычислим возможные значения энергии поля и соответствующие им волновые функции (векторы состояний)<sup>1</sup>. По принципу соответствия составляем на основе классической функции Гамильтона (6.1) квантовомеханический оператор (гамильтониан) электромагнитного поля:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_s \widehat{\mathcal{H}}_s, \quad \widehat{\mathcal{H}}_s = \frac{1}{2}(\widehat{P}_s^2 + \omega_s^2 \widehat{Q}_s^2), \quad (6.2)$$

где операторы  $\widehat{Q}_s, \widehat{P}_s$  должны удовлетворять перестановочным соотношениям Гейзенберга для координаты и импульса:  $[\widehat{Q}_s, \widehat{P}_s] = i\hbar$ . Поскольку осцилляторы разных мод поля независимы, то полная волновая функция будет представлять собой произведение волновых функций всех осцилляторов:  $\Phi = \prod_s \Phi_s$ , и задача сводится к решению стационарного уравнения

Шредингера

$$\widehat{\mathcal{H}}_s \Phi_s = \mathcal{E}_s \Phi_s \quad (6.3)$$

для одного осциллятора. Это решение получено в Дополнении 3. Уровни энергии осциллятора даются выражением (Д3.61)

$$\mathcal{E}_s = \hbar\omega_s \left( N_s + \frac{1}{2} \right), \quad N_s = 0, 1, \dots, \quad (6.4)$$

а волновые функции в координатном представлении выражаются через полиномы Эрмита согласно (Д3.65), где надо положить  $n = N_s$ ,  $\xi = \sqrt{\omega_s/\hbar} Q_s$ .

Полная энергия электромагнитного поля в объеме  $V$  представляет собой сумму энергий всех осцилляторов:

$$\mathcal{E}_{\{s\}} = \sum_s \hbar\omega_s \left( N_s + \frac{1}{2} \right). \quad (6.5)$$

<sup>1</sup>Состояния, о которых идет речь, часто называют фоковскими по имени выдающегося советского физика-теоретика В. А. Фока (1898–1974), глубоко исследовавшего свойства гильбертова пространства этих состояний.

Оператор импульса поля  $\widehat{\mathbf{P}} = \sum_s \mathbf{k}_s \widehat{\mathcal{H}}_s / \omega_s$  коммутирует с его гамильтонианом, и импульс поля можно определить одновременно с энергией:

$$\mathbf{P}_{\{s\}} = \sum_s \hbar \mathbf{k}_s \left( N_s + \frac{1}{2} \right) = \sum_s \hbar \mathbf{k}_s N_s \quad (6.6)$$

(последнее равенство следует из изотропии в распределении векторов  $\mathbf{k}_s$ ). Таким образом, энергия и импульс каждой моды поля разделены на отдельные порции, соответственно  $\hbar\omega_s$  и  $\hbar\mathbf{k}_s = \hbar\omega_s \mathbf{n}_s / c$ , величина которых определяется частотой. Эти порции проявляют себя в процессах взаимодействия с другими объектами как частицы с нулевой массой, движущиеся со скоростью света. Впервые они были введены в рассмотрение Планком<sup>2</sup> (1900) для объяснения спектра равновесного электромагнитного излучения, а термин «фотон» для них ввел Эйнштейн (1905).

Основному состоянию поля соответствует отсутствие фотонов во всех модах,  $N_s = 0$ . При этом импульс поля обращается в нуль,  $\mathbf{P}_0 = 0$ , но энергия основного состояния (нулевых колебаний осцилляторов) остается конечной,

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \sum_s \hbar\omega_s, \quad (6.7)$$

и, более того, бесконечно большой, так как мод поля бесконечно много и их частоты ничем не ограничены. Появление в теории этой бесконечности — еще одна трудность квантовой электродинамики (первая бесконечность, отмеченная в разделах 2.1, 5.4 — бесконечная собственная энергия точечной частицы — тоже сохраняется на квантовом уровне). Наличие нулевых колебаний осцилляторов не вызывает сомнений. Они наблюдаются, в частности, у атомов-осцилляторов в кристаллах при низких температурах. Вакуумные колебания электромагнитного поля приводят к сдвигам атомных уровней энергии (лэмбовский сдвиг, см. задачу 6.18). Наконец, в последнее время появились данные космологического характера о существенном вкладе энергии вакуума в наблюдаемую плотность материи во Вселенной. Поэтому наличие энергии вакуума, по-видимому, можно считать установленным фактом. Но бесконечное значение плотности энергии вакуума несомненно является следствием несовершенства существующей теории. К счастью, эта трудность не проявляется, когда речь идет об изменениях энергии электромагнитного поля (например, при испускании и поглощении фотонов).

<sup>2</sup>Макс Планк (1858–1957) — выдающийся немецкий физик-теоретик, нобелевский лауреат, основоположник квантовой теории.

**Представление чисел заполнения и операторы электромагнитного поля.** В классической теории векторы электромагнитного поля  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  согласно (2.151), (2.153)–(2.154) были представлены в виде разложений по базисным функциям — плоским монохроматическим волнам с определенной поляризацией:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \{b_s(t)\mathcal{A}_s(\mathbf{r}) + b_s^*(t)\mathcal{A}_s^*(\mathbf{r})\}, \quad \text{где } \mathcal{A}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_s \sqrt{\frac{4\pi c^2}{\mathcal{V}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_s \frac{\omega_s}{c} \{b_s(t)\mathcal{A}_s(\mathbf{r}) - b_s^*(t)\mathcal{A}_s^*(\mathbf{r})\}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = i \sum_s \mathbf{k} \times \{b_s(t)\mathcal{A}_s(\mathbf{r}) - b_s^*(t)\mathcal{A}_s^*(\mathbf{r})\}. \quad (6.10)$$

Здесь комплексные амплитуды

$$b_s = \frac{1}{2} \left( Q_s + \frac{i}{\omega_s} P_s \right), \quad b_s^* = \frac{1}{2} \left( Q_s - \frac{i}{\omega_s} P_s \right), \quad (6.11)$$

выражаются через действительные канонические переменные  $Q_s$ ,  $P_s$  соотношениями (2.157). В результате квантования канонические переменные и комплексные амплитуды превратились в операторы, действующие на обобщенные координаты поля  $Q_s$ . Операторы комплексных амплитуд удобно выразить через операторы понижения и повышения, введенные равенствами (Д3.54):

$$b_s(t) \rightarrow \hat{b}_s = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_s}} \hat{a}_s, \quad b_s^*(t) \rightarrow \hat{b}_s^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_s}} \hat{a}_s^\dagger, \quad [\hat{a}_s, \hat{a}_s^\dagger] = 1. \quad (6.12)$$

При этом векторы электромагнитного поля (6.8)–(6.10) также становятся операторами, действующими на обобщенные координаты  $Q_s$  поля:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_s \{ \hat{a}_s \mathbf{A}_s(\mathbf{r}) + \hat{a}_s^\dagger \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) \}, \quad (6.13)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i \sum_s \frac{\omega_s}{c} \{ \hat{a}_s \mathbf{A}_s(\mathbf{r}) - \hat{a}_s^\dagger \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) \}, \quad (6.14)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = i \sum_s \mathbf{k} \times \{ \hat{a}_s \mathbf{A}_s(\mathbf{r}) - \hat{a}_s^\dagger \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) \}. \quad (6.15)$$

Пространственные же координаты  $\mathbf{r}$  выполняют теперь роль параметров, нумерующих точки трехмерного пространства. В представлении Шредингера зависимость комплексных амплитуд от времени после замены их операторами согласно (6.12) исчезает. Базисные функции мод поля (волновые функции фотонов) изменили нормировку и приняли вид

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_s}} \mathcal{A}_s(\mathbf{r}) = e_s \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathcal{V}\omega_s}} e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}}. \quad (6.16)$$

Операторы  $\hat{a}_s^\dagger$ ,  $\hat{a}_s$  согласно (Д3.63) повышают и понижают на единицу уровень возбуждения осциллятора поля, т. е. (на языке фотонов) рождают и уничтожают один фотон моды  $s$ . Поэтому в квантовой электродинамике естественно называть их **операторами рождения и уничтожения** фотонов. При использовании этих операторов более удобно выбирать в качестве обобщенных координат поля не осцилляторные координаты  $Q_s$ , а **числа заполнения** мод поля фотонами  $N_s$ . Если квантовые состояния фотонов  $s$  зафиксированы, то задание чисел заполнения определяет фоковское состояние электромагнитного поля с исчерпывающей полнотой:

$$\Phi_{\{N_s\}} \equiv |\{N_s\}\rangle = \prod_s |N_s\rangle. \quad (6.17)$$

Числа заполнения являются собственными значениями оператора числа фотонов

$$\hat{N}_s = \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s. \quad (6.18)$$

Пользуясь (Д3.63), находим:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s^\dagger |N_s\rangle &= \sqrt{N_s + 1} |N_s + 1\rangle, \\ \hat{a}_s |N_s\rangle &= \sqrt{N_s} |N_s - 1\rangle, \\ \hat{N}_s |N_s\rangle &= N_s |N_s\rangle. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Сами же векторы состояний мод в представлении чисел заполнения можно записать в виде

$$|N_s\rangle = \Phi_{N_s}(N'_s) = \delta_{N_s N'_s}. \quad (6.20)$$

Здесь  $N_s$  — фиксированное собственное значение числа заполнения моды  $s$ , а  $N'_s$  — аргумент волновой функции, т. е. произвольное число заполнения этой моды, которое также имеет смысл числа фотонов, но является величиной переменной.

**Пример 6.1.** Показать, что операторы напряженностей электромагнитного поля (6.14), (6.15) не коммутируют с гамильтонианом и, следовательно, напряженности поля не имеют определенных значений в фоковских состояниях, в том числе и в вакуумном.

**Решение.** Гамильтониан поля выражается через операторы чисел фотонов с помощью (Д3.55) и (6.18):

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_s \hbar\omega_s \left( \widehat{N}_s + \frac{1}{2} \right). \quad (6.21)$$

Оператор  $\widehat{N}_s$  не коммутирует с  $\widehat{a}_s$ ,  $\widehat{a}_s^\dagger$  той же моды (все операторы разных мод коммутируют друг с другом). Поэтому операторы  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{E}$ ,  $\widehat{H}$  не коммутируют с гамильтонианом. Это означает, что напряженности  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  не имеют определенных значений в состояниях с определенными числами фотонов и испытывают, в частности, **вакуумные флуктуации**. ■

**Пример 6.2.** Записать одномодовые операторы  $\widehat{\mathcal{H}}_s$ ,  $\widehat{N}_s$ ,  $\widehat{a}_s$ ,  $\widehat{a}_s^\dagger$  в представлении чисел заполнения.

**Решение.** Числа заполнения дискретны, поэтому искомые операторы примут форму матриц:

$$\begin{aligned} N_{N'N} &= \langle N' | \widehat{N} | N \rangle = N \delta_{N'N}; & \mathcal{H}_{N'N} &= \mathcal{E}_N \delta_{N'N}; \\ a_{N'n} &= \sqrt{N} \delta_{N',N-1}; & a_{n'n}^\dagger &= \sqrt{N+1} \delta_{N',N+1}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где  $\mathcal{E}_N$  дается равенством (6.4). Индекс  $s$  моды опущен. ■

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика], [Берестецкий и др. (1989)], [Дирак (1990)], [Коэн-Таннуджи и др. (1992)], [Гайтлер (1956)], [Фейнман (2000)], [Ициксон и Зюбер (1984)].

## Задачи

**6.1.** Выразить гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}$  электромагнитного поля через операторы  $\widehat{a}^\dagger$ ,  $\widehat{a}$  рождения и уничтожения фотонов, исходя из классического выражения (2.148) для энергии поля и используя операторы  $\widehat{E}$ ,  $\widehat{H}$ .

**6.2\*.** Проверить выполнение канонических уравнений Гамильтона для операторов  $\widehat{Q}_s$ ,  $\widehat{P}_s$  в представлениях Шредингера и Гейзенберга, пользуясь гамильтонианом (6.2) и формулами для производной от оператора по времени (Д3.34) и (Д3.35).

**6.3\*.** Показать, что гейзенберговские операторы рождения и уничтожения фотонов зависят от времени по закону

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}, \quad \hat{a}(t) = \hat{a} e^{-i\omega t}, \quad (6.23)$$

где в правых частях равенств стоят те же операторы в представлении Шредингера.

**6.4.** Найти зависимость от времени гейзенберговских операторов  $\hat{Q}(t)$ ,  $\hat{P}(t)$  гармонического осциллятора.

**6.5.** Найти следующие средние значения в  $n$ -м стационарном состоянии какой-либо из мод поля: а)  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}^\dagger$ ; б)  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ ; в)  $\bar{a}^2$ ,  $\overline{(a^\dagger)^2}$ ; г)  $\overline{\Delta Q^2} \cdot \overline{\Delta P^2}$ .

**6.6.** Решить задачу об энергетическом спектре и стационарных одно-модовых состояниях электромагнитного поля в  $P$ -представлении.

**6.7\*.** Найти средние значения неопределенностей  $Q$  и  $P$  в  $n$ -м состоянии некоторой моды и проверить выполнение соотношения неопределенностей Гейзенберга (ДЗ.23).

**6.8.** Найти коммутаторы  $[\hat{a}^n, \hat{a}^\dagger]$ ,  $[\hat{a}^{\dagger n}, \hat{a}]$ , где  $n$  — любое натуральное число.

**6.9.** Доказать операторные соотношения (ДЗ.69). Дифференцирование выполняется формально, как если бы операторы были  $c$ -числами (не операторами), но с сохранением порядка некоммутирующих операторов  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ .

**6.10\*.** Доказать, что

$$[\hat{a}^n, \hat{f}] = \left( \left( \hat{a} + \frac{\partial}{\partial \hat{a}^\dagger} \right)^n - \hat{a}^n \right) \hat{f}, \quad [\hat{f}, \hat{a}^{\dagger n}] = \left( \left( \hat{a}^\dagger + \frac{\partial}{\partial \hat{a}} \right)^n - \hat{a}^{\dagger n} \right) \hat{f},$$

где  $\hat{f}$  — операторная функция из предыдущей задачи. Рассмотреть, в частности, случай  $\hat{f} = \hat{a}^\dagger$ .

**6.11\*.** Записать операторы векторов поля (6.13)–(6.15) в представлении Гейзенберга. Показать, что уравнения движения для операторов  $\hat{E}$ ,  $\hat{H}$  сводятся к уравнениям Максвелла.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат задачи 6.4 и формулу (ДЗ.35).

**6.12\*.** Записать коммутационные соотношения для операторов компонент электромагнитного поля в представлении Гейзенберга

$$[\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{E}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)], \quad [\hat{H}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{H}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)], \quad [\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{H}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)].$$



Какие выводы можно сделать из полученных соотношений о возможности одновременного наблюдения электромагнитного поля в разных пространственно-временных точках?

УКАЗАНИЕ. Для суммирования по поляризациям использовать формулу (2.165).

**6.13.** Показать, что гейзенберговские операторы  $\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1)$  и  $\hat{A}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)$  не коммутируют, даже если точки 1 и 2 разделены пространственноподобным интервалом. Согласуется ли это с принципом причинности?

**6.14.** Выразить оператор  $\hat{P}$  импульса электромагнитного поля через операторы уничтожения и рождения фотонов, исходя из его классического выражения (4.130) через напряженности  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .

**6.15.** Вычислить среднеквадратичные флуктуации напряженностей поля  $\Delta E^2$ ,  $\Delta H^2$  в вакуумном состоянии.

**6.16\***. Пусть прибор, измеряющий вакуумные флуктуации электромагнитного поля, регистрирует их из ограниченной пространственно-временной области, усредняя сигналы по этой области с весовой функцией  $g(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющей условиям

$$g(\mathbf{r}, t) \geq 0, \quad \int g(\mathbf{r}, t) d^3r dt = 1.$$

Интегрирование производится по бесконечному четырехмерному пространству. Вычислить среднеквадратичные вакуумные флуктуации электрического и магнитного полей, которые измерит такой прибор, приняв в качестве усредняющей функции  $g(\mathbf{r}, t) = C e^{-r^2/2l^2} \delta(t)$ ,  $C$  — постоянная нормировки,  $l = \text{const}$ .

**6.17\***. Параллельные незаряженные металлические пластинки размером  $L \times L$  находятся в вакууме на расстоянии  $z$  друг от друга. Оценить по порядку величины силу, действующую между ними, исходя из представления, что она вызвана вакуумными флуктуациями электромагнитного поля в пространстве между пластинами (эффект Казимира). Основная роль должна принадлежать флуктуациям с длинами волн порядка расстояния между пластинами.

**6.18\*\*.** Оценить по порядку величины сдвиг между  $2s$ - и  $2p$ -уровнями в атоме водорода (лэмбовский сдвиг), рассматривая его как результат возмущения электронных состояний вакуумными флуктуациями электромагнитного поля.

**6.19\*.** Произвести разделение полного момента импульса свободного электромагнитного поля  $\mathbf{J}$  на две части: на орбитальный момент  $\mathbf{L}$  относительно точки с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$  и спиновый момент  $\mathbf{S}$ , не зависящий

от выбора начала координат. Записать операторы орбитального и спинного моментов через операторы векторного потенциала и электрического поля.

**6.20\***. Выразить оператор спинного момента  $\hat{S}$  свободного электромагнитного поля через операторы рождения и уничтожения фотонов. Для каких квантовых состояний с определенным числом фотонов спиновый оператор диагонализует? Записать для этих состояний спин поля через числа фотонов.

**6.21\***. Выразить интенсивность излучения  $I_\sigma(\omega, \mathbf{n})$ , имеющего частоту  $\omega$ , поляризацию  $\sigma$  и направление  $\mathbf{n}$ , через число квантов  $N_{k\sigma}$ , где  $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}/c$ .

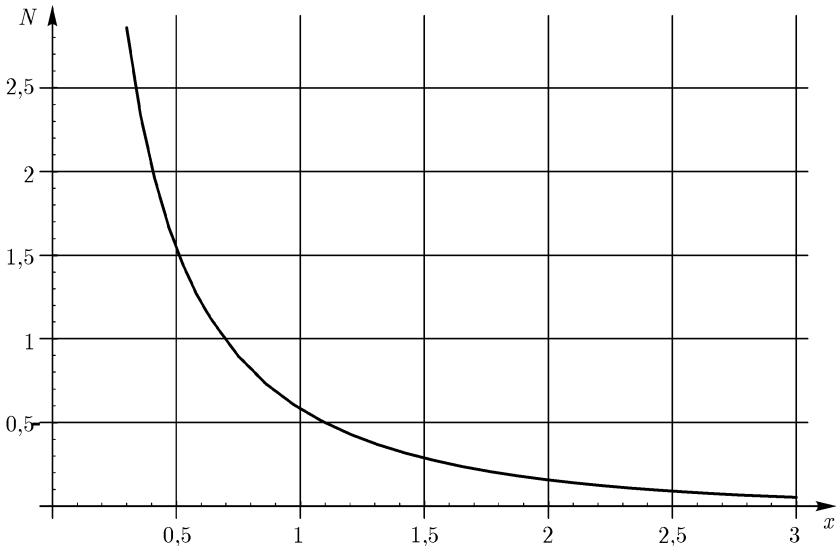


Рис. 6.1

**Состояния статистического равновесия** электромагнитного поля возникают, если излучение находится в динамическом равновесии с равновесным веществом (например, с непроницаемыми для излучения стенками полости, имеющими некоторую определенную температуру  $T$ ). При этом устанавливаются некоторые средние значения чисел заполнения  $N_s$  фокковских состояний мод электромагнитного поля.

**Пример 6.3.** Вывести распределение Планка, т. е. найти средние по ансамблю Гиббса числа заполнения мод  $s = (\mathbf{k}, \sigma)$  электромагнитного поля фотонами<sup>3</sup>.

**Решение.** Отдельные моды (осцилляторы) электромагнитного поля не взаимодействуют между собой, поэтому каждую из мод можно рассматривать как независимую термодинамическую систему, взаимодействующую лишь с термостатом при температуре  $T$ . Роль термостата играет равновесное вещество, излучающее, поглощающее и рассеивающее фотоны. Применяя распределение Гиббса (Д3.44), записываем вероятность наличия  $N_s$  фотонов в данной моде:

$$(1) \quad w_{N_s} = \frac{1}{Z_s} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_s}{T}\right), \quad \text{где } \mathcal{E}_s = \hbar\omega \left(N_s + \frac{1}{2}\right)$$

— энергия моды согласно (6.4). Статистическая сумма моды согласно (Д3.45) имеет значение

$$(2) \quad Z_s = \sum_{N_s=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_s}{T}\right) = e^{-\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} = \frac{e^{-\alpha/2}}{1 - e^{-\alpha}}, \quad \text{где } \alpha = \frac{\hbar\omega_s}{T}$$

(напомним, что температура  $T$  измеряется в энергетических единицах).

С помощью вероятности (1) находим среднее число фотонов, приходящееся на рассматриваемый осциллятор поля:

$$(3) \quad \bar{N}_s = \sum_{N_s=0}^{\infty} N_s w_{N_s} = (1 - e^{-\alpha}) \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} = \frac{1}{e^{\alpha} - 1}.$$

Итак, **распределение Планка** средних чисел фотонов по частотам имеет вид

$$\bar{N}_s = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_s/T) - 1} \quad (6.24)$$

(см. рис. 6.1; по горизонтальной оси отложена безразмерная величина  $x = \hbar\omega/T$ ). Число квантов при заданной температуре растет с уменьшением

<sup>3</sup>Спектр равновесного электромагнитного излучения, т. е. распределение энергии излучения по частотам, был подробно исследован опытным путем в конце 19-го века (форма спектра вычисляется в задаче 6.23 ниже). Этот спектр совершенно не поддавался описанию методами классической электродинамики и классической статистической физики. Трудности в объяснении свойств равновесного электромагнитного излучения и побудили М. Планка ввести в 1900 г. понятие кванта действия  $\hbar$  и кванта электромагнитного поля с энергией  $\hbar\omega$ . Этот год можно считать годом рождения всей квантовой физики, в том числе и квантовой электродинамики.

частоты неограниченно при  $\omega \rightarrow 0$ , но энергия, приходящаяся на любой конечный интервал  $\Delta\omega$ , остается конечной (см. задачу 6.22). Распределение Планка является частным случаем распределения Бозе–Эйнштейна для невзаимодействующих частиц с целыми спинами.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика], [Румер и Рывкин (1977)].

## Задачи

**6.22.** Вычислить среднюю энергию, приходящуюся на один осциллятор поля равновесного электромагнитного излучения.

**6.23\*.** Вычислить спектральное распределение интенсивности и плотности энергии равновесного излучения, основываясь на распределении Планка. Произвести анализ частных случаев. Объяснить природу «ультрафиолетовой катастрофы» — невозможность получить спектральную плотность излучения при высоких частотах исходя из классических представлений.

**6.24.** Показать, что полная интенсивность излучения с единицы площади поверхности абсолютно черного тела (испускающего равновесное электромагнитное излучение) выражается **формулой Стефана–Больцмана**

$$I = \int I(\omega) \cos \theta d\Omega d\omega = \sigma T^4, \quad \text{где} \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^3} \approx 5,67 \times 10^{-5} \text{ г/(с}^3\text{К}^4) \quad (6.25)$$

— постоянная Стефана–Больцмана,  $T$  — температура в кельвинах, угол  $\theta$  отсчитывается от нормали к поверхности и интегрирование по телесному углу ведется в пределах полусферы. Полная энергия излучения в объеме  $\mathcal{V}$  (т. е. внутренняя энергия) дается выражением

$$\mathcal{E} = \frac{4\sigma}{c} T^4 \mathcal{V}. \quad (6.26)$$

УКАЗАНИЕ. Использовать табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

**6.25.** Для равновесного излучения найти распределение  $\rho(\lambda)$  плотности энергии излучения по длинам волн  $\lambda$  и сформулировать закон смещения Вина для такого распределения, т. е. найти связь между температурой и длиной волны, на которую приходится максимум излучения.

**6.26.** Построить функцию распределения Планка, полученную при решении задачи 6.23, в зависимости от отношений  $\lambda/\lambda_m$  и  $\lambda/\lambda'_m$ , где  $\lambda_m, \lambda'_m$  — длины волны, отвечающие максимуму функции распределения по частотам и по длинам волн. Найти  $\lambda_m, \lambda'_m$  для следующих космических объектов: а) реликтовое излучение ( $T = 3$  К), б) поверхность Земли (300 К),  $\mu$ -Цфея, так называемая «гранатовая звезда» (2000 К), поверхность Солнца (6000 К), поверхность Сириуса (11 000 К), поверхность звезды  $\beta$ -Центавра (22 500 К), центральная звезда планетарной туманности Лирь (75 000 К), поверхность нейтронной звезды (250 000 К), внутренние области обычных звезд типа Солнца ( $25 \times 10^6$  К).

**6.27.** Определить свободную энергию  $F$ , давление  $P$ , энтропию  $S$  и теплоемкость  $C_V$  при постоянном объеме равновесного излучения в объеме  $\mathcal{V}$  при температуре  $T$ .

УКАЗАНИЕ. Необходимые термодинамические соотношения имеются в приложении 3 (формулы (Д3.46), (Д3.46')).

**Когерентные состояния.** При теоретическом описании электромагнитного поля важное значение имеет выбор базиса состояний. Для описания процессов, происходящих с участием небольшого числа фотонов и могущих быть описанными методами теории возмущений, наиболее удобен базис фоковских состояний, которым соответствует задание определенного числа фотонов  $N_s$  в каждой моде. При этом фазы отдельных состояний остаются неопределенными. Такие явления, как когерентность, в которых большую роль играют фазовые соотношения между модами, удобнее описывать, используя **когерентные (или глауберовские) состояния** (см. [Глаубер (1972)], хотя впервые такие состояния рассматривались еще Шредингером в 1926 г.). В этом случае наиболее прост переход к квазиклассическому описанию интенсивных лазерных пучков.

Когерентные состояния данной моды  $s$ , обозначаемые в дальнейшем как  $|z_s\rangle$ , по определению являются собственными состояниями неэрмитова оператора уничтожения фотона  $\hat{a}_s$ :

$$\hat{a}_s|z_s\rangle = z_s|z_s\rangle. \quad (6.27)$$

Собственным значением  $z_s$  неэрмитова оператора может быть любое комплексное число. Когерентными состояниями можно описывать не только

электромагнитное поле, но и другие квантовые системы (см., например, [Малкин и Манько (1979)]). Ниже на нескольких примерах и в задачах мы проиллюстрируем их основные свойства и некоторые применения.

**Пример 6.4.** *Найти собственные состояния оператора уничтожения фотона (т. е. когерентные состояния) в виде разложения их по  $n$ -фотонным фоковским состояниям. Нормировать их на единицу. Какова вероятность зафиксировать  $n$  фотонов в данной моде, находящейся в когерентном состоянии?*

**Решение.** Умножим скалярно обе части уравнения (6.27) на  $\langle n|$ , опустив для краткости индекс моды  $s$ :

$$\langle n|\hat{a}|z\rangle = \langle z|\hat{a}^\dagger|n\rangle^* = \sqrt{n+1}\langle n+1|z\rangle = z\langle n|z\rangle.$$

Последнее равенство имеет характер рекуррентного соотношения, позволяющего выразить все  $\langle n|z\rangle$  через  $\langle 0|z\rangle$ :

$$\langle n|z\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|z\rangle. \quad (6.28)$$

Из условия нормировки  $\langle z|z\rangle = 1$  и предыдущего равенства находим

$$\langle z|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle z|n\rangle\langle n|z\rangle = |\langle 0|z\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*z)^n}{n!} = |\langle 0|z\rangle|^2 e^{|z|^2} = 1.$$

Отсюда с точностью до фазового множителя получаем  $\langle 0|z\rangle = \exp(-|z|^2/2)$  и находим нормированный на единицу собственный вектор когерентного состояния:

$$|z\rangle = \exp(-|z|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \quad (6.29)$$

Формула (6.29) позволяет вычислить вероятность регистрации  $n$  фотонов при измерении поля, находящегося в когерентном состоянии. В соответствии с правилами квантовой механики эта вероятность равна квадрату модуля коэффициента разложения функции когерентного состояния по фоковским волновым функциям, т. е.

$$w(n) = |\langle n|z\rangle|^2 = \frac{|z|^{2n}}{n!} \exp(-|z|^2) \quad (6.30)$$

Это — **распределение Пуассона** со средним значением числа фотонов

$$\langle n\rangle = |z|^2, \quad (6.31)$$

приходящихся на данную моду. ■

**Пример 6.5.** Записать вектор  $|n\rangle$  фоковского состояния в виде разложения по когерентным состояниям  $|z\rangle$ , рассматривая  $z$  как комплексный параметр с непрерывным спектром.

**Решение.** Умножим обе части (6.29) на  $z^{*m} \exp(-|z|^2/2)/(\pi\sqrt{m!})$  и проинтегрируем по всем значениям  $z$ , т. е. по  $d^2z = dz' dz'' = r dr d\varphi$ , где  $z'$ ,  $z''$  — действительная и мнимая части комплексного числа  $z$ ,  $r$  и  $\varphi$  — его модуль и аргумент (фаза). В результате в правой части (6.29) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi\sqrt{m!n!}} |n\rangle \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} r^{m+n} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n-m)\varphi} = |m\rangle$$

и, таким образом,

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} |z\rangle d^2z. \quad (6.32)$$

■

**6.28.** Показать, что векторы когерентных состояний неортогональны при  $z \neq z'$ :

$$\langle z|z'\rangle = e^{z^*z' - |z|^2/2 - |z'|^2/2}, \quad (6.33)$$

$$|\langle z|z'\rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2}. \quad (6.34)$$

Показать также, что вместо условия полноты (Д3.25) векторы когерентных состояний удовлетворяют условию «переполненности», т. е. возникает множитель  $\pi > 1$ :

$$\sum_z |z\rangle\langle z| \equiv \int |z\rangle\langle z| d^2z = \pi \sum_n |n\rangle\langle n| = \pi \cdot \hat{1}. \quad (6.35)$$

**6.29.** Показать, что не существует нормированных собственных функций  $|\beta\rangle$  оператора рождения  $\hat{a}^\dagger$ , соответствующих конечным собственным значениям  $\beta$ .

**6.30.** Исследовать временную эволюцию когерентных состояний. Показать, что с течением времени когерентное состояние остается когерентным, а соответствующая комплексная амплитуда описывает в комплексной плоскости окружность. Период вращения совпадает с частотой моды.

**6.31.** Найти вид волновой функции когерентного состояния в координатном представлении. Показать, что когерентное состояние представляет собой волновой пакет гауссовой формы, совершающий периодическое движение, напоминающее движение классической частицы в потенциале гармонического осциллятора.

**6.32.** Показать, что когерентные состояния могут быть получены при действии оператора сдвига

$$\widehat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \widehat{a}^\dagger - \alpha^* \widehat{a}) \quad (6.36)$$

на вакуумное состояние  $|vac\rangle \equiv |0\rangle$ , т. е. на состояние с числом заполнения фотонов равным нулю.

**6.33.** Показать, что когерентное состояние характеризуется минимальной неопределенностью значений координаты и импульса осциллятора поля, а именно, что  $\langle \Delta Q^2 \rangle \langle \Delta P^2 \rangle = \hbar^2/4$ , причем для безразмерных квадратных<sup>4</sup> компонент

$$\widehat{X}_1 = \sqrt{\omega/\hbar} \widehat{Q} \equiv \xi \quad \widehat{X}_2 = 1/\sqrt{\hbar\omega} \widehat{P} = -i\partial/\partial\xi \quad (6.37)$$

выполняется более простое соотношение  $\langle \Delta X_1 \rangle^2 = \langle \Delta X_2 \rangle^2 = 1/2$ .

**6.34.** Вычислить дисперсии координаты и импульса свободного осциллятора поля некоторой моды излучения для произвольного начального состояния. Показать, что дисперсии  $D_1(t), D_2(t)$  безразмерных переменных (квадратурных компонент, определенных в условии предыдущей задачи) в общем случае осциллируют в противофазе с частотой, равной удвоенной частоте моды, а их сумма является интегралом движения. Показать, что для фоковских и когерентных состояний амплитуда осцилляций равна нулю.

УКАЗАНИЕ. Использовать операторы координаты и импульса осциллятора в гейзенберговском представлении (см. ответ к задаче 6.4).

**6.35.** Определить дисперсию числа фотонов в когерентном состоянии отдельной моды электромагнитного поля.

**Разложение векторов состояний и операторов по когерентным состояниям.** Выше было показано, что волновые функции когерентных состояний образуют полную (и даже переполненную) систему, которую можно

<sup>4</sup>Квадратурные компоненты характеризуются тем, что при колебаниях разность их фаз составляет  $\pi/2$ .



использовать для разложения по ней векторов состояний и операторов:

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi} \int \langle \alpha | f \rangle |\alpha\rangle d^2\alpha, \quad (6.38)$$

$$\widehat{O} = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\alpha d^2\beta \langle \alpha | \widehat{O} | \beta \rangle |\alpha\rangle \langle \beta|. \quad (6.39)$$

Аналогичное разложение можно получить и для оператора плотности, но более удобным является диагональное представление матрицы плотности

$$\widehat{\rho} = \int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (6.40)$$

Оно получило название представления Глаубера – Сударшана. Условие нормировки  $S_p(\widehat{\rho}) = 1$  и эрмитовости оператора плотности приводят к тому, что функция  $\mathcal{P}$  действительна и нормирована на единицу:

$$\int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) = 1, \quad \mathcal{P}(\alpha)^* = \mathcal{P}(\alpha). \quad (6.41)$$

Однако, величина  $\mathcal{P}(\alpha)$  может принимать отрицательные значения, к тому же она может быть гораздо более сингулярной, чем, например, дельта-функция Дирака. По этой причине она не может рассматриваться как вероятность в классическом понимании и ее называют квазивероятностью. По своим свойствам эта величина сходна с матрицей плотности в представлении Вигнера, см. [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика], § 5. С ее помощью легко вычислять средние от любых нормально упорядоченных операторов (в которых все операторы рождения каждой моды стоят левее операторов уничтожения фотонов), например

$$S_p(\widehat{\rho} \widehat{a}^{+n} \widehat{a}^m) = \int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) \alpha^{*n} \alpha^m.$$

При записи этого соотношения было использовано равенство  $\widehat{a}^n |\alpha\rangle = \alpha^n |\alpha\rangle$  и сопряженное равенство  $\langle \alpha | \widehat{a}^{\dagger n} = \langle \alpha | \alpha^{*n}$ .

Квазивероятность  $\mathcal{P}(\alpha)$  не может быть измерена в эксперименте, поскольку вещественная и мнимая части комплексной амплитуды  $\alpha$  являются средними значениями некоммутирующих операторов  $(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger)/2$  и  $(\widehat{a} - \widehat{a}^\dagger)/2i$ , и не имеют одновременно определенных значений. Но во многих конкретных случаях удается сопоставить оператору плотности соответствующую квазивероятность и построить для него разложение (6.40).

**Пример 6.6.** Воспользовавшись соотношением (6.33) для когерентных состояний, показать, что формулу обращения соотношения (6.40), позволяющую построить для заданного оператора плотности  $\hat{\rho}$  квазивероятность Глаубера–Сударшана, можно записать в виде

$$\mathcal{P}(z)e^{-|z|^2} = \frac{1}{\pi^2} \int e^{|u|^2} \langle -u | \hat{\rho} | u \rangle e^{uz^* - uz} d^2u. \quad (6.42)$$

**Решение.** Умножив равенство (6.40) слева на  $\langle -u |$  и справа на  $|u \rangle$ , получим

$$(1) \quad \langle -u | \hat{\rho} | u \rangle = \int \mathcal{P}(z) \langle -u | z \rangle \langle z | u \rangle d^2z.$$

Используя под интегралом для матричных элементов когерентных состояний формулу (6.33), находим

$$(2) \quad \langle -u | \hat{\rho} | u \rangle = e^{-|u|^2} \int \mathcal{P}(z) e^{-|z|^2} e^{uz^* - u^*z} d^2z.$$

Последнее равенство можно рассматривать как двумерное преобразование Фурье, что становится очевидным, если комплексные переменные  $u, z$  выразить через действительные переменные:  $u = p + iq, z = P + iQ, uz^* - u^*z = 2i(qP - pQ), d^2z = dP dQ$ . Обращая преобразование Фурье, получаем (6.42). Во многих случаях сходимость интеграла (6.42) в классическом смысле отсутствует. Тогда его нужно рассматривать как обобщенную функцию  $z$  (например, он может представлять производную некоторого порядка от дельта-функции). ■

Вместо сингулярных в общем случае квазивероятностей, можно рассматривать их двумерный фурье-образ

$$\theta[\kappa, \kappa^*] = Sp(\hat{\rho} \exp(\kappa \hat{a}^\dagger) \exp(-\kappa^* \hat{a})) = \int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) \exp(\kappa \alpha^* - \kappa^* \alpha), \quad (6.43)$$

который называется нормальной характеристической функцией и является обычной (необобщенной) функцией комплексных параметров  $\kappa$  и  $\kappa^*$ .

**6.36.** Найти функцию распределения квазивероятности Глаубера–Сударшана  $\mathcal{P}(\alpha)$  для случая, когда оператор плотности может быть представлен в виде  $\hat{\rho} = \sum_{n,m} C_{n,m} \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger m}$ .

**6.37\*.** Пользуясь изложенным в примере 6.6 методом определения квазивероятности, вычислить  $\mathcal{P}(z)$  для некоторой моды равновесного электромагнитного излучения. Показать, что квазивероятность в данном случае

описывается распределением Гаусса с полушириной, определяемой средним числом  $\bar{n}$  фотонов в моде и с нулевым средним значением  $z$ :

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{\pi\bar{n}} e^{-|z|^2/\bar{n}}. \quad (6.44)$$

**6.38\***. Определить нормальную характеристическую функцию (6.43) и матрицу плотности в фоковском представлении для состояния, описываемого квазивероятностью  $\mathcal{P}(\alpha) = \delta(|\alpha| - |\alpha_0|)/2\pi|\alpha|$  (состояние с фиксированной амплитудой и однородным распределением по фазе — модель идеального лазерного излучения).

**6.39.** Определить нормальную характеристическую функцию и квазивероятность  $\mathcal{P}(\alpha)$  для состояния, представляющего суперпозицию независимых гауссова (хаотического) и когерентного полей  $|\alpha_0\rangle$ .

**6.40.** Доказать, что  $m$ -квантовый переход в поле одномодового равновесного теплового излучения в  $m!$  раз более вероятен, чем в когерентном одномодовом поле с тем же средним числом фотонов в моде.

УКАЗАНИЕ. Вероятность  $m$ -фотонного процесса пропорциональна нормально упорядоченной корреляционной функции  $G^{m,m} = \langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^m \rangle$ .

**Сжатые состояния.** Рассмотренное выше когерентное излучение характеризуется минимальной неопределенностью координаты и импульса осциллятора поля (см. соотношение неопределенностей (ДЗ.32)). Причем, как следует из решения задачи 6.34 дисперсии координаты и импульса не изменяются с течением времени и равны соответственно  $\langle \Delta Q^2 \rangle = \hbar/2\omega$  и  $\langle \Delta P^2 \rangle = \hbar\omega/2$ . В последнее время большой интерес вызывают **сжатые состояния**, которые характеризуются тем, что дисперсия одной из величин — координаты или импульса меньше приведенных выше величин. При этом, разумеется, неопределенность другой величины должна соответственно увеличиться. Если произведение дисперсий равно  $\hbar^2/16$  (оно, в силу соотношения неопределенностей, разумеется, не может стать меньше), то такие состояния называют идеальными сжатыми состояниями.

Сжатые состояния (обозначим их  $|\mu, \nu, \beta\rangle$ ) определяются как собственные состояния оператора

$$\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger. \quad (6.45)$$

Будем считать, что комплексные параметры  $\mu$  и  $\nu$  удовлетворяют соотношению  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ . Это приводит к коммутационному соотношению  $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$  для операторов.

Покажем, что для сжатых состояний флуктуации квадратурных компонент неодинаковы и можно добиться подавления флуктуаций одной из них при возрастании другой. Используем операторы  $\widehat{X}_1$  и  $\widehat{X}_2$ , введенные равенствами (6.37) и совпадающие с точностью до множителей с операторами координаты и импульса осциллятора:

$$\widehat{X}_1 = (\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger)/2, \quad \widehat{X}_2 = (\widehat{a} - \widehat{a}^\dagger)/2i. \quad (6.46)$$

Вследствие коммутационного соотношения  $[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] = i/2$  выполняется следующее соотношение неопределенностей:

$$\langle \Delta \widehat{X}_1^2 \rangle \langle \Delta \widehat{X}_2^2 \rangle \geq 1/16. \quad (6.47)$$

В то же время дисперсии каждой из квадратурных компонент имеют вид

$$\langle \Delta \widehat{X}_1^2 \rangle \equiv \langle \mu, \nu, \beta | \Delta \widehat{X}_1^2 | \mu, \nu, \beta \rangle = \frac{|\mu - \nu|}{4}, \quad (6.48)$$

$$\langle \Delta \widehat{X}_2^2 \rangle \equiv \langle \mu, \nu, \beta | \Delta \widehat{X}_2^2 | \mu, \nu, \beta \rangle = \frac{|\mu + \nu|}{4}, \quad (6.49)$$

откуда видно, что при выполнении условия  $|\mu - \nu| < 1$  флуктуации первой квадратурной компоненты подавлены, а второй усилены — из-за требования  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ . При другом выборе фаз комплексных чисел  $\mu$  и  $\nu$  можно добиться подавления флуктуаций другой компоненты.

Сжатые состояния не обладают классическим аналогом. Для них, например, нельзя ввести квазивероятность  $\mathcal{P}$ , которая была бы всюду положительно определенной величиной.

**Пример 6.7.** Доказать последнее утверждение: для сжатого состояния квазивероятность  $\mathcal{P}(\alpha)$  при некоторых значениях  $\alpha$  отрицательна.

**Решение.** Чтобы в этом убедиться, достаточно написать среднее  $\langle \mu, \nu, \beta | \Delta \widehat{X}_1^2 | \mu, \nu, \beta \rangle$ , выраженное через когерентные состояния, сведя его к среднему от нормально упорядоченных операторов:

$$\begin{aligned} \langle \mu, \nu, \beta | \Delta \widehat{X}_1^2 | \mu, \nu, \beta \rangle &= \langle \mu, \nu, \beta | \widehat{\mathcal{N}}(\Delta \widehat{X}_{1(2)})^2 | \mu, \nu, \beta \rangle + 1/4, \\ \langle \mu, \nu, \beta | \widehat{\mathcal{N}}(\Delta \widehat{X}_{1(2)})^2 | \mu, \nu, \beta \rangle &= (\pm(\langle \widehat{a}^2 \rangle - \langle \widehat{a} \rangle^2) + \langle \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \rangle - \langle \widehat{a}^\dagger \rangle \langle \widehat{a} \rangle + \text{к. с.})/4, \end{aligned}$$

где  $\widehat{\mathcal{N}}$ –оператор нормального упорядочения, к. с. обозначает комплексно сопряженную величину.

Для поля в когерентном состоянии средние нормально упорядоченных операторов флуктуаций квадратурных компонент равны нулю, а для сжатых состояний одно из средних отрицательно. Это означает, что для сжатой  $i$ -й компоненты выполняется неравенство

$$\langle \mu, \nu, \beta | \widehat{\mathcal{N}} (\Delta \widehat{X}_i)^2 | \mu, \nu, \beta \rangle = \int \mathcal{P}(\alpha) (\alpha + \alpha^* - \langle \alpha \rangle - \langle \alpha^* \rangle)^2 d^2 \alpha < 0.$$

Это неравенство может быть выполнено, если только в некоторой области комплексной  $\alpha$ -плоскости квазивероятность  $\mathcal{P}$  отрицательна. ■

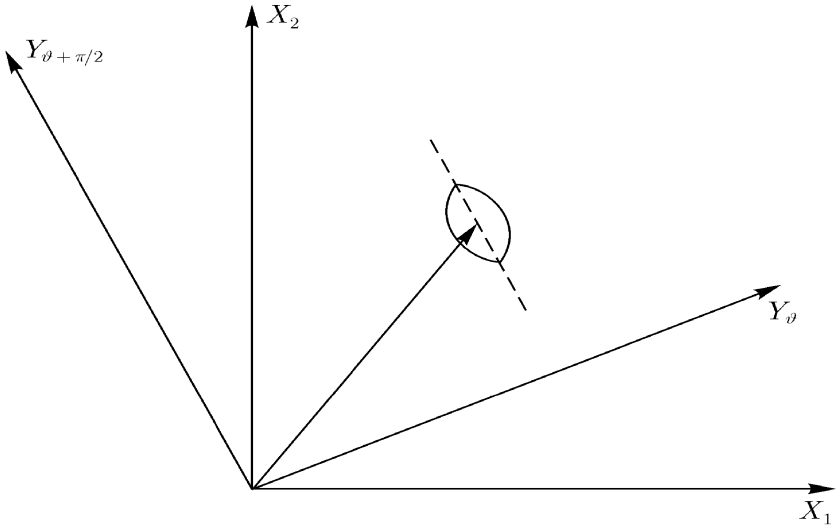


Рис. 6.2

Рассмотрим более подробно вопрос о влиянии фаз комплексных чисел  $\mu$  и  $\nu$  на характер сжатия. Введем понятие фазы сжатия. Для этого представим параметры  $\mu$  и  $\nu$  в виде

$$\mu = \coth r; \quad \nu = \text{sh } r \exp(2i\vartheta), \quad (6.50)$$

а сжатое состояние будем обозначать для краткости следующим образом:  $|\gamma\beta\rangle \equiv |\text{ch } r, \text{sh } r e^{2i\vartheta}, \beta\rangle$ , где введен параметр сжатия  $\gamma = r e^{2i\vartheta}$ . При такой параметризации условие  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$  выполняется автоматически, дисперсия квадратурной компоненты  $X_1$  будет подавлена, если  $r \rightarrow \infty$

при  $\exp(i\vartheta) = 1$ , а  $X_2$  при  $\exp(i\vartheta) = -1$ . Если фаза  $\vartheta$  не удовлетворяет ни одному из этих условий, то вместо квадратурных компонент  $X_1$  и  $X_2$  можно ввести две другие компоненты,

$$Y_{\vartheta} = (\widehat{a}e^{-i\vartheta} + \widehat{a}^{\dagger}e^{i\vartheta})/2, \quad Y_{\vartheta+\pi/2} = (\widehat{a}e^{-i\vartheta} - \widehat{a}^{\dagger}e^{i\vartheta})/2, \quad (6.51)$$

дисперсии которых будут удовлетворять следующим соотношениям:

$$\langle \Delta \widehat{Y}_{\vartheta}^2 \rangle = \frac{\exp(-2r)}{4}, \quad \langle \Delta \widehat{Y}_{\vartheta+\pi/2}^2 \rangle = \frac{\exp(2r)}{4}. \quad (6.52)$$

Модуль параметра сжатия  $\gamma$  определяет степень подавления флуктуаций одной из компонент (и усиление другой), а фаза — ориентацию осей, которым соответствует максимальное сжатие. Последнее проиллюстрировано на рисунке 6.2.

На этом рисунке условно изображена область комплексной  $\alpha$  плоскости, в которой плотность распределения  $\langle \alpha | \widehat{\rho} | \alpha \rangle$  существенно отлична от нуля, т.е. представляет собой область неопределенности комплексной амплитуды. Размер области неопределенности не зависит от амплитуды поля — явление сжатия может наблюдаться как для слабых, так и для сильных полей. Заметим, что когерентному состоянию на такой плоскости будет соответствовать круг неопределенности с центром в точке  $\alpha$ , радиус которого от величины  $\alpha$  не зависит. Когерентное состояние может рассматриваться как частный случай идеальных сжатых состояний: полученные в этом параграфе формулы при  $\nu = 1$  и  $\mu = 0$  переходят в соответствующие формулы для когерентных состояний.

Рассмотренный рисунок позволяет качественно проанализировать возможности подавления флуктуаций при регистрации сжатого света. Физически очевидно (это можно показать в рамках аккуратного расчета), что в измерениях, в которых регистрируется интенсивность света, существенное влияние на точность оказывают флуктуации модуля комплексной амплитуды. Поэтому для эллипсов сжатия, малая полуось которых ориентирована в радиальном направлении, эти флуктуации будут подавлены. Для фазовых измерений, например, с помощью интерферометров более предпочтительной является ситуация, когда эллипс вытянут в радиальном направлении.

В связи с возможностью понижать шумы при измерениях, сжатые состояния обладают огромной потенциальной областью практического применения. Сложности связаны с возможностью создания источников такого света, но и в этом направлении уже сделаны обнадеживающие шаги.

**6.41.** Показать, что сжатые состояния могут быть получены из вакуумного состояния в результате последовательного действия операторов

сдвига (см. (6.36)) и сжатия:

$$|\mu, \nu, \beta\rangle = |r, \vartheta, \beta\rangle = |\gamma, \beta\rangle = \widehat{S} \widehat{D} |vac\rangle,$$

где  $\widehat{D} = \widehat{D}(\beta) = \exp(\beta \widehat{a}^\dagger - \beta^* \widehat{a})$  — оператор сдвига (смещения), определенный в задаче 6.32, а  $\widehat{S} = \widehat{S}(\gamma) = \exp(\gamma \widehat{a}^{*2}/2 - \gamma \widehat{a}^{\dagger 2}/2)$  — оператор сжатия;  $\gamma = r e^{2i\vartheta}$  (см. (6.50)). Найти связь комплексных параметров  $\mu$  и  $\nu$ , характеризующих сжатое состояние в общем случае, с парой вещественных параметров  $r, \vartheta$  и комплексным параметром  $\gamma$ .<sup>5</sup>

**6.42.** Получить разложение сжатых состояний по базису когерентных состояний. Показать, что в частном случае сжатых состояний с  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$  коэффициенты разложения могут быть найдены по формуле

$$\langle \alpha | \mu, \nu, \beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} - \frac{\nu \alpha^{*2}}{2\mu} + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu} + \frac{\alpha^* \beta}{\mu}\right).$$

**6.43.** Получить разложение сжатых состояний по базису фоковских  $n$ -фотонных состояний. Показать, что коэффициенты разложения могут быть найдены по формуле

$$\langle n | \mu, \nu, \beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{n! \mu}} \left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu}\right) H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)$$

где  $H_n(x)$  — полиномы Эрмита.

**6.44.** Показать, что нормальную характеристическую функцию идеального сжатого одномодового излучения (6.43) можно вычислить по следующей формуле

$$\theta[\kappa, \kappa^*] = \exp\left(\kappa \alpha^* - \kappa^* \alpha - \kappa \kappa^* \text{sh}^2 r - \frac{\kappa^2}{4} e^{-2i\vartheta} \text{sh} 2r - \frac{\kappa^{*2}}{4} e^{2i\vartheta} \text{sh} 2r\right).$$

При этом сжатое состояние описывается следующими параметрами:  $\mu = \text{ch} r$ ,  $\nu = e^{2i\vartheta} \text{sh} r$  и  $\gamma = r e^{2i\vartheta}$ , — а амплитуда  $\beta$  связана с амплитудой  $\alpha$  соотношением  $\beta = \mu \alpha + \nu \alpha^*$ .

<sup>5</sup>Состояния такого типа впервые ввел Yuen в 1976 г. и назвал их двухфотонными когерентными состояниями. Наряду с ними можно ввести состояния  $\widehat{D}\widehat{S}|vac\rangle$  (Caves, 1981), которые формально не совпадают с двухфотонными когерентными в силу некоммутативности операторов  $\widehat{D}$  и  $\widehat{S}$ . Последние состояния получили название идеальных сжатых состояний. Однако, по своим статистическим свойствам (форма области неопределенностей) оба класса состояний одинаковы. В современной литературе как правило их не разделяют, называя единым термином «сжатые состояния».

**6.45.** Показать, что для равновесного теплового излучения плотности распределения координатной и импульсной квадратур являются гауссовыми с нулевыми собственными значениями и дисперсиями следующего вида

$$\langle \Delta \widehat{X}_1^2 \rangle = \langle \Delta \widehat{X}_2^2 \rangle = \frac{1}{2} \coth(\hbar\omega/2T)$$

**6.46.** Доказать, что электромагнитное поле в когерентном состоянии может быть создано классическим нефлуктуирующим током.

УКАЗАНИЕ. Сравнить оператор эволюции вакуумного состояния под действием классического тока с оператором сдвига (6.36), создающим когерентное состояние.

Рекомендуемая литература: [Мандель и Вольф (2000)], [Быков (1993)], [Клышко (1986)], [Клышко (1980)], [Клышко (1994)], [Клышко (1996)], [Глаубер (1966)], [Глаубер (1972)].

## Дополнение к разделу 6.1. Перепутанные состояния

После появления известной работы Эйнштейна–Подольского–Розена [Эйнштейн и др. (1935)] проблема нелокальности квантовой теории привлекала большое внимание многих авторов. Исходя из принципа причинности и существования скрытых параметров, Беллом (см., например, обзор [Белинский и Клышко (1993)] и цитированную в нем литературу) были сформулированы некоторые неравенства, которым должны удовлетворять корреляционные функции результатов измерений в точках, разделенных пространственноподобным интервалом. Нарушение этих неравенств означает ошибочность теории скрытых параметров и существование нелокальных эффектов в квантовой теории. Одним из способов экспериментальной проверки нарушения неравенств Белла являются опыты по наблюдению корреляции актов фотодетектирования света, находящегося в перепутанном состоянии<sup>6</sup>.

Рассмотрим пример поляризационно перепутанного света

$$(1) \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle_1|y\rangle_2 - |y\rangle_1|x\rangle_2).$$

<sup>6</sup>Перепутанными называются состояния, в которых у микрообъекта могут быть зарегистрированы разные значения одного и того же квантового числа. В приводимом примере каждый фотон может находиться в состоянии с  $\sigma = 1$  (поляризация вдоль  $Ox$ ) или в состоянии с  $\sigma = 2$  (поляризация вдоль  $Oy$ ). Подробнее о перепутанных состояниях см., например, в обзоре [Баргагин и др.(2001)].



Это волновая функция системы, состоящей из двух фотонов, распространяющихся в направлении оси  $Oz$ . Волновая функция  $|x\rangle$  описывает фотон, поляризованных вдоль оси  $Ox$ , а функция  $|y\rangle$  — фотон, поляризованный вдоль  $Oy$ . Индексы 1 и 2 относятся к первому и второму фотону соответственно. Поля в таких состояниях могут быть получены либо при каскадных переходах в атомах, либо в нелинейных излучательных процессах в кристаллах.

Рассмотрим результат регистрации фотонов детекторами, перед которыми поставлены поляризационные анализаторы. Пусть оптические оси анализаторов составляют углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с осью  $x$  для первого и второго детекторов соответственно.

Будем считать квантовую эффективность обоих фотодетекторов равной единице. При этом вероятность регистрации (она определяется вероятностью прохождения анализатора) в соответствии с теорией фотодетектирования Глаубера может быть вычислена как среднее

$$(2) \quad W_i = \langle \psi | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \psi \rangle.$$

Здесь  $\hat{a}_i^\dagger$  и  $\hat{a}_i$  — операторы рождения и уничтожения фотона, падающего на соответствующий детектор. Согласно Манделю и Вольфу (2000), эти операторы связаны с соответствующими операторами перед анализаторами следующими соотношениями:

$$(3) \quad \hat{a}_i = \hat{a}_{ix} \cos \varphi_i + \hat{a}_{iy} \sin \varphi_i, \quad i = 1, 2,$$

где  $\hat{a}_{ix}$  и  $\hat{a}_{iy}$  — операторы уничтожения фотонов линейно поляризованных вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Подставляя (1) и (3) в (2), найдем, что для обоих детекторов  $W_i = 1/2$  — независимо от ориентации анализаторов. Это означает, что свет, падающий на каждый анализатор, является неполяризованным. В то же время существует сильная взаимная корреляция фотоотчетов обоих детекторов. Действительно,  $W_i$  — вероятность регистрации фотона данным детектором независимо от результата, который зафиксирует другой детектор. Теория фотодетектирования позволяет также вычислить вероятность того, что оба фотодетектора зарегистрируют фотоны:

$$(4) \quad W_{12} = \langle \psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 | \psi \rangle = \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 - 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) = \frac{1}{2} \sin^2 (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Эта вероятность зависит от угла относительной ориентации анализаторов — если  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$ , то  $W_{12} = 1/2$ , если оси анализаторов параллельны  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , то вероятность одновременной регистрации равна нулю.

Это обстоятельство связано с сильной взаимной корреляцией поляризации фотонов перепутанной пары.

На основе (4) можно вычислить условную вероятность фототоотсчета одного из детекторов, например, вероятность фототоотсчета второго детектора при условии, что фотон зарегистрирован первым детектором:

$$(5) \quad W_{\text{усл}}(2 | 1) = W_{12}/W_1 = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом, результат одного измерения зависит от результата другого измерения, проведенного в удаленной области пространства, причем в условиях, когда между участвующими в измерении приборами нет какого-либо непосредственного взаимодействия. С другой стороны, наличие такой нелокальности не противоречит принципу причинности, поскольку у экспериментатора нет возможности повлиять на результат измерения. Действительно,  $W_{12}$  — вероятность зарегистрировать фотоны обоими фотоприемниками. Но в силу (2) никакими способами невозможно изменить вероятность регистрации **данным** детектором — она не зависит от ориентации анализатора.

Эксперименты описанного выше типа неоднократно проводились в последнее время. В этих экспериментах с достоверностью обнаружены эффекты нелокальности и нарушение неравенств Белла.

В заключение этого раздела отметим, что мы рассмотрели пример поляризационно перепутанного света. Очевидно, это не единственный возможный тип таких состояний. Вместо функций  $|x\rangle$  и  $|y\rangle$  в (1) могут входить, например, функции  $|\phi\rangle$  и  $|\nu\rangle$ , описывающие фотоны разных частот. При этом корреляции могут наблюдаться при спектральных измерениях.

## 6.2. Квантовая теория излучения, поглощения и рассеяния фотонов атомными системами

Большинство задач о взаимодействии заряженных частиц с фотонами может быть решено приближенно с помощью теории возмущений. Это связано с тем, что безразмерный параметр разложения

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (6.53)$$

(**постоянная тонкой структуры**) весьма мал, поэтому уже первое исчезающее приближение при вычислениях вероятностей квантовоэлектродинамических процессов часто дает достаточную точность. Но, разумеется, существует множество задач, в которых требуется использование более точных методов.

**Взаимодействие квантованного электромагнитного поля с нерелятивистской системой.** Динамику систем заряженных частиц будем описывать уравнением Шредингера в формулировке Паули, учитывающей взаимодействие частиц друг с другом и с внешним полем, а также наличие у них спина. Уравнение Паули будет получено из релятивистского уравнения Дирака далее, в примере 6.14. Для одной частицы гамильтониан, отвечающий уравнению Паули, имеет вид

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \left( \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \widehat{\mathbf{A}} \right)^2 + e\varphi - \widehat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}, \quad (6.54)$$

где  $\widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  — оператор импульса,  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$  — оператор спинового магнитного момента,  $\varphi(\mathbf{r})$  — скалярный потенциал внешнего электростатического поля. Эти операторы действуют на координаты и спиновую переменную частицы. Операторы  $\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  действуют не только на координаты частицы (как операторы умножения), но и на переменные электромагнитного поля, в качестве которых мы выбираем, как и при рассмотрении фоковских состояний в разделе 6.1, числа заполнения  $N_s$ , причем  $s$  обозначает совокупность четырех квантовых чисел, характеризующих состояние фотона.

При наличии нескольких заряженных частиц оператор Гамильтона (6.54) должен содержать сумму слагаемых по всем частицам, а электростатический потенциал должен учитывать взаимодействие между частицами:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{a=1}^N \left\{ \frac{1}{2m_a} \left( \widehat{\mathbf{p}}_a - \frac{e_a}{c} \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_a) \right)^2 + e_a \varphi(\mathbf{r}_a) - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_a \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_a) \right\}. \quad (6.55)$$

Но для сокращения письма мы будем в дальнейшем производить рассмотрение для одной частицы.

Оператор векторного потенциала

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_s \{ \widehat{a} \mathbf{A}_s(\mathbf{r}) + \widehat{a}^\dagger \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) \}, \quad (6.56)$$

как и другие операторы, берется во временном представлении Шредингера, т. е. не зависит от времени.

Записав (6.54) в виде  $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{V}$  и выделив в оператор взаимодействия  $\widehat{V}$  все слагаемые, содержащие  $\widehat{\mathbf{A}}$ , находим

$$\widehat{V} = -\frac{e}{mc} \widehat{\mathbf{p}} \cdot \widehat{\mathbf{A}} + \frac{e^2}{2mc^2} \widehat{\mathbf{A}}^2 - \widehat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}. \quad (6.57)$$

Здесь использована поперечность волновых функций фотонов, в силу которой  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ . Первый и третий члены в правой части (6.57) описывают процессы излучения и поглощения одного фотона в каждой моде, тогда как слагаемое с  $\hat{\mathbf{A}}^2$  описывает двухфотонные процессы.

В тех случаях, когда возможны те и другие процессы, вклад двухфотонных переходов как правило мал. Оценим по порядку величины отношения отдельных слагаемых в (6.57), заменяя операторы характерными значениями соответствующих физических величин. Имеем

$$R_A \approx \frac{(e^2/2mc^2)A^2}{(e/mc)pA} \approx \frac{eA}{pc} \approx \frac{eE\lambda}{pc} \approx \frac{v}{c} \frac{eE\lambda}{\mathcal{E}_{kin}},$$

где  $p$  и  $\mathcal{E}_{kin}$  — характерные значения импульса и кинетической энергии излучающей частицы. В атомах  $v/c \approx 10^{-2}$ ,  $\mathcal{E}_{kin} \approx 5$  эВ,  $\lambda \approx 10^{-5}$  см для видимой части спектра. Поэтому  $R_A$  достигает единицы при значении электрического поля  $E > 10^7$  В/см. Такие поля можно создать только мощными лазерами. Для атомных ядер всегда  $R_A \ll 1$  ввиду отсутствия лазеров на частотах гамма-квантов.

Для слагаемого, содержащего оператор магнитного момента, получим

$$R_\mu \approx \frac{\mu k A}{(e/mc)pA} \approx \frac{v}{c} \frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}_{kin}}.$$

При переходах с испусканием и поглощением фотонов их энергия порядка расстояний между уровнями излучающей системы, поэтому  $\hbar\omega \approx \mathcal{E}_{kin}$ , а  $v/c \ll 1$  в нерелятивистских системах, таких, как электронные оболочки атомов и молекул либо атомные ядра. Поэтому  $R_\mu < v/c \ll 1$ . Но следует иметь в виду, что эти оценки получены при «нормальном» значении вклада от основного слагаемого  $(e/mc)\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ . Если по каким-либо причинам этот вклад оказывается аномально малым, то оставшиеся слагаемые становятся существенными. Интересуясь однофотонными процессами, мы можем взять оператор взаимодействия без квадратичного слагаемого:

$$\hat{V} = -\frac{e}{mc} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot [\nabla \times \hat{\mathbf{A}}]. \quad (6.58)$$

**Спонтанное и индуцированное излучение. Коэффициенты Эйнштейна.** Вычислим вероятность испускания кванта с заданными волновым вектором и поляризацией  $s = (\mathbf{k}, \sigma)$  в результате взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным полем. Начальное состояние поля задается числами заполнения  $\{N_s\}$  всех мод. В конечном состоянии поля число заполнения моды  $s$  становится равным  $N_s + 1$ , остальные  $N_{s'}, s' \neq s$

остаются прежними. Частица совершает переход между состояниями  $|i\rangle$  и  $|f\rangle$ , относящимися к дискретному спектру. В первом приближении теории возмущений вероятность перехода в единицу времени вычисляется по формуле [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]

$$dw^{rad} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \widehat{V} | i \rangle|^2 \delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f - \hbar\omega) \frac{\mathcal{V} k^2 dk d\Omega_k}{(2\pi)^3}. \quad (6.59)$$

Эта вероятность является дифференциальной величиной, так как испущенный фотон находится в непрерывном спектре и величина  $d\nu = \mathcal{V} \omega^2 d\omega d\Omega_k / (2\pi c)^3$  представляет собой число квантовых состояний фотонов с заданной поляризацией, приходящихся на интервал волновых векторов  $d^3k$ .

Векторы начального и конечного состояний рассматриваемой системы в целом представляют собой произведения волновых функций частицы и электромагнитного поля:

$$|i\rangle = \psi_i \Phi_{\{N_s\}}, \quad |f\rangle = \psi_f \Phi_{\{N_s+1\}}. \quad (6.60)$$

В виде индекса указаны числа заполнения только той моды поля, в которую происходит излучение. Используя (6.60), запишем матричный элемент в виде

$$\langle f | \widehat{V} | i \rangle = \langle \Phi_{\{N_s+1\}} \left| \int d^3r \left\{ -\frac{e}{mc} (\psi_f, \widehat{\mathbf{p}}\psi_i) \cdot \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) - (\psi_f, \widehat{\boldsymbol{\mu}}\psi_i) \cdot [\nabla \times \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] \right\} \Phi_{\{N_s\}} \right\rangle. \quad (6.61)$$

Здесь  $d^3r$  — элемент объема обычного пространства, круглыми скобками обозначена операция суммирования по спиновой переменной.

Путем интегрирования по частям с учетом обращения в нуль волновых функций частицы на бесконечности внутренний интеграл преобразуется к виду

$$-\frac{1}{c} \int \mathbf{j}_{fi} \cdot \widehat{\mathbf{A}}^*(\mathbf{r}) d^3r, \quad (6.62)$$

$$\text{где } \mathbf{j}_{fi} = -\frac{ie\hbar}{2m} ((\psi_f, \nabla\psi_i) - (\nabla\psi_f, \psi_i)) + e\nabla \times (\psi_f, \widehat{\boldsymbol{\mu}}\psi_i)$$

называется **током перехода**. При  $\psi_f = \psi_i = \psi$  ток перехода превращается в электрический ток, создаваемый заряженной частицей с магнитным

моментом в состоянии  $\psi$ . При вычислении матричного элемента от оператора  $\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  по переменным поля воспользуемся формулами (6.56) и (Д3.63), из которых следует

$$\langle \Phi_{\{N_s+1\}} | \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) | \Phi_{\{N_s\}} \rangle = \sqrt{N_s+1} \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}). \quad (6.63)$$

Из всей бесконечной суммы (6.56) срабатывает только один член с оператором рождения фотона. В итоге получаем из (6.61)

$$\langle f | \widehat{V} | i \rangle = -\frac{1}{c} \sqrt{N_s+1} \int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) d^3r. \quad (6.64)$$

Вычисляя вероятность перехода в единицу времени согласно (6.59) и произведя интегрирование по частоте фотона, находим вероятность излучения

$$dw^{rad} = \frac{(N_s+1)\omega^2}{4\pi^2\hbar^2c^5} \left| \int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) d^3r \right|^2 d\Omega_k, \quad (6.65)$$

где  $\omega = (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f)/\hbar$ . Вероятность излучения состоит из двух слагаемых:  $dw^{rad} = dw^{ind} + dw^{sp}$ . Одно из них,  $dw^{ind} = N_s dw^{sp}$ , пропорционально числу квантов  $N_s$  в рассматриваемой моде и называется вероятностью **индуцированного излучения**, другое слагаемое отлично от нуля и в отсутствие квантов в начальном состоянии. Это излучение называется **спонтанным** [Эйнштейн (1916a)]:

$$dw^{sp} = \frac{\omega^2}{4\pi^2\hbar^2c^5} \left| \int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) d^3r \right|^2 d\Omega_k, \quad (6.66)$$

В обычных источниках света (газосветные лампы, лампы накаливания, Солнце) главную роль играет спонтанное излучение атомов, возбуждаемых при столкновениях. Принимая для этих источников света температуру  $T = (3 \div 6) \times 10^3 K$ , находим с помощью распределения Планка (6.23)  $N_s \approx (10^{-3} \div 10^{-2})$ , что свидетельствует о малой роли индуцированных процессов. В лазерах огромные интенсивности в узкой полосе частот достигаются за счет индуцированного излучения.

Вероятность поглощения фотона квантовой системой с переходом между теми же состояниями  $f \rightarrow i$  (но в обратном направлении) дается той же формулой (6.59), но при другой последовательности состояний:

$$dw^{abs} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f' | \widehat{V} | i' \rangle|^2 \delta(\mathcal{E}_{i'} - \mathcal{E}_{f'} + \hbar\omega) \frac{\mathcal{V}\omega^2 d\omega d\Omega_k}{(2\pi c)^3}, \quad (6.67)$$

где  $|i'\rangle = \psi_f \Phi_{\{N_s\}}$ ,  $|f'\rangle = \psi_i \Phi_{\{N_s-1\}}$  и величина  $d\nu$  относится к непрерывному спектру состояний поглощаемого фотона. Пользуясь значением матричного элемента

$$\langle \Phi_{\{N_s-1\}} | \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) | \Phi_{\{N_s\}} \rangle = \sqrt{N_s} \mathbf{A}_s(\mathbf{r}),$$

получаем

$$\langle f' | \widehat{V} | i' \rangle = -\frac{1}{c} \sqrt{N_s} \int \mathbf{j}_{if}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_s(\mathbf{r}) d^3r = -\frac{1}{c} \sqrt{N_s} \left[ \int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) d^3r \right]^*,$$

где в силу эрмитовости оператора тока  $\mathbf{j}_{if} = \mathbf{j}_{fi}^*$ . В результате имеем

$$dw^{abs} = \frac{N_s \omega^2}{4\pi^2 \hbar^2 c^5} \left| \int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) d^3r \right|^2 d\Omega_k = dw^{ind} = N_s dw^{sp}, \quad (6.68)$$

где по-прежнему  $\omega = (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f)/\hbar$ . Как следует из (6.65) и (6.67), дифференциальные вероятности излучения и поглощения связаны соотношением

$$\frac{dw^{rad}}{dw^{abs}} = \frac{N_s + 1}{N_s}. \quad (6.69)$$

Число квантов  $N_s$ , где  $s = (\mathbf{k}, \sigma)$ , можно выразить через интенсивность падающего на квантовую систему излучения (см. задачу 6.21):

$$N_s = \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar \omega^3} I_\sigma(\omega, \mathbf{n}). \quad (6.70)$$

Если излучение неполяризовано ( $I_1(\omega) = I_2(\omega)$ ) и изотропно (нет зависимости от  $\mathbf{n}$ ), то суммарная по всем направлениям интенсивность излучения данной частоты  $I(\omega) = \int (I_1(\omega) + I_2(\omega)) d\Omega_k = 8\pi I_\sigma(\omega)$  и число квантов  $N_s \equiv N_\omega = (\pi^2 c^2 / \hbar \omega^3) I(\omega)$  зависят только от частоты. Подставив последнее выражение в (6.68), просуммировав по поляризациям и проинтегрировав по  $d\Omega_k$ , получим связь между полными вероятностями:

$$w^{abs} = w^{ind} = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar \omega^3} I(\omega) w^{sp}, \quad (6.71)$$

где  $w^{abs} = \sum_\sigma \int dw^{abs}$  и т. д. Величины

$$A_{if} = w^{sp}, \quad B_{if} = \frac{c}{I(\omega)} w^{ind}, \quad B_{fi} = \frac{c}{I(\omega)} w^{abs} \quad (6.72)$$

называются **коэффициентами Эйнштейна** [Эйнштейн (19166)] для спонтанного излучения, вынужденного излучения и поглощения соответственно. Из (6.71) вытекает связь между ними:

$$B_{fi} = B_{if} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} A_{if}. \quad (6.73)$$

Такая связь, однако, справедлива только в отсутствие вырождения уровней энергии  $\mathcal{E}_i$  и  $\mathcal{E}_f$  излучающей квантовой системы. Если эти уровни вырождены с кратностями соответственно  $g_i$  и  $g_f$ , то при вычислении вероятностей необходимо произвести усреднение по начальным и суммирование по конечным состояниям.

**Пример 6.8.** Показать, что при наличии вырождения коэффициенты Эйнштейна связаны соотношениями

$$g_f B_{fi} = g_i B_{if} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} g_i A_{if}. \quad (6.74)$$

**Решение.** Обозначив чертой вероятности, усредненные по начальным и просуммированные по конечным состояниям, будем иметь

$$\bar{w}^{abs} = \frac{1}{g_f} \sum w^{abs}, \quad \bar{w}^{ind} = \frac{1}{g_i} \sum w^{ind}, \quad \bar{w}^{sp} = \frac{1}{g_i} \sum w^{sp}.$$

С другой стороны, суммируя равенства (6.73) по состояниям и выражая их через вероятности с чертой, получим (6.74), где коэффициенты Эйнштейна выражены по формулам (6.72) через усредненные вероятности. ■

**Электрическое дипольное излучение. Пример 6.9.** Размер области локализации частицы удовлетворяет условию  $ka \ll 1$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор излученного кванта. Выразить вероятность спонтанного излучения фотона с заданным волновым вектором и поляризацией через матричный элемент электрического дипольного момента. Произвести суммирование по возможным поляризациям кванта и получить интенсивность излучения на заданной частоте в данном направлении  $\mathbf{n}$ . Сравнить полученный результат с классическими формулами (5.30), (5.31).

**Решение.** При вычислении матричного элемента (6.64) используем приближение  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \approx 1$  и подставляем в интеграл  $\mathbf{A}_s^* = \sqrt{2\pi\hbar c/\mathcal{V}\omega} \mathbf{e}_s^*$ . Слагаемое со спиновым магнитным моментом при интегрировании дает нуль, и матричный элемент приводится к виду

$$\int \mathbf{j}_{fi} \cdot \mathbf{A}_s^* d^3r = e \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathcal{V}\omega}} \mathbf{e}_s^* \cdot \int \left( (\psi_f, \left( -\frac{i\hbar\nabla}{m} \right) \psi_i \right) d^3r.$$



Оператор  $-i\hbar\nabla/m$  изображает скорость частицы. Для преобразования интеграла используем квантовомеханические формулы

$$\widehat{\mathbf{v}} = \widehat{\mathbf{r}} = \frac{i}{\hbar} \left[ \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathbf{r}} \right] \quad \text{и} \quad \widehat{\mathcal{H}}_0 \psi_{i,f} = \mathcal{E}_{i,f} \psi_{i,f},$$

где  $\widehat{\mathcal{H}}_0$  — гамильтониан частицы. Используя также эрмитовость гамильтониана

$$\int (\psi_f, \widehat{\mathcal{H}}_0 \mathbf{r} \psi_i) d^3r = \int (\widehat{\mathcal{H}}_0 \psi_f, \mathbf{r} \psi_i) d^3r = \mathcal{E}_f \int (\psi_f, \mathbf{r} \psi_i) d^3r,$$

приводим интеграл к виду

$$\int \mathbf{j}_{fi} \cdot \mathbf{A}_s^* d^3r = -\frac{i}{\hbar} (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f) \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{\mathcal{V}\omega}} e_s^* \cdot \mathbf{p}_{fi}.$$

Здесь  $(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f)/\hbar$  — частота излученного кванта, а

$$\mathbf{p}_{fi} = e \int (\psi_f, \mathbf{r} \psi_i) d^3r \quad (6.75)$$

представляет собой **дипольный момент перехода**. Если излучает система  $N$  частиц, то в (6.72) нужно сделать замену  $e\mathbf{r} \rightarrow \sum_{a=1}^N e_a \mathbf{r}_a$ , а волновые функции будут зависеть от координат всех частиц.

В итоге получим вероятность перехода

$$dw^{sp} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} |e_s^* \cdot \mathbf{p}_{fi}|^2 d\Omega_k. \quad (6.76)$$

Эта выражение дает вероятность испускания кванта с заданной поляризацией. Суммирование по поляризациям производится с помощью формулы 2.165 (задача 2.152), что дает

$$dw^{sp} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} |\mathbf{n} \times \mathbf{p}_{fi}|^2 d\Omega_k. \quad (6.77)$$

Интенсивность излучения в данном направлении получится в результате умножения вероятности (6.77) перехода в единицу времени на энергию кванта  $\hbar\omega$ . В обозначениях предыдущей главы (см. формулы (5.30), (5.31))

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{2\pi c^3} |\mathbf{n} \times \mathbf{p}_{fi}|^2. \quad (6.78)$$

После интегрирования по телесному углу находим интенсивность суммарного по всем направлениям излучения

$$I = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{p}_{fi}|^2. \quad (6.79)$$

Квантовомеханический результат для интенсивности излучения получается из классических формул (5.30) (5.31), усредненных по гармоническим колебаниям, путем замены  $\overline{\dot{\mathbf{p}}^2} \rightarrow 4\omega^4 |\mathbf{p}_{fi}|^2$ . ■

### Электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучение.

Если электрический дипольный момент перехода между рассматриваемыми состояниями обращается в нуль, то излучение определяется членами более высокого порядка разложения экспоненты. Следующий член разложения даст матричный элемент

$$-\frac{1}{c} \int \mathbf{j}_{fi} \cdot \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) d^3r = \frac{i\omega}{c^2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathcal{V}\omega}} \mathbf{e}_s^* \cdot \int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) d^3r.$$

Дальнейшие преобразования повторяют те, которые уже были выполнены в классической теории (см. пример 5.6 из раздела 5.2). После их выполнения получим

$$-\frac{1}{c} \int \mathbf{j}_{fi} \cdot \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) d^3r = \frac{i\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathcal{V}\omega}} \mathbf{e}_s^* \cdot \left\{ \frac{1}{2c} \left[ \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) d^3r \right] \times \right. \\ \left. \times \mathbf{n} - \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) d^3r \right\}.$$

Первый интеграл в фигурных скобках представляет собой магнитный момент перехода:

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (6.80)$$

Во втором интеграле используем уравнение непрерывности  $\nabla \cdot \mathbf{j}_{fi} = -i\omega\rho_{fi}$  и вводим квадрупольный момент перехода:

$$(Q_{fi})_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho_{fi}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (6.81)$$

В итоге будем иметь

$$-\frac{1}{c} \int \mathbf{j}_{fi} \cdot \mathbf{A}_s^*(\mathbf{r}) d^3r = \frac{i\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathcal{V}\omega}} \mathbf{e}_s^* \cdot \left\{ [\boldsymbol{\mu}_{fi} \times \mathbf{n}] - \frac{i\omega}{6c} \mathbf{Q}_{fi} \right\},$$

где  $(Q_{fi})_\alpha = (Q_{fi})_{\alpha\beta}n_\beta$ . После подстановки этого выражения в (6.59) получим вероятность испускания кванта с определенной поляризацией и волновым вектором:

$$dw^{sp} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} \left| \mathbf{e}_s^* \cdot \left[ \boldsymbol{\mu}_{fi} \times \mathbf{n} - \frac{i\omega}{6c} \mathbf{Q}_{fi} \right] \right|^2 d\Omega_k. \quad (6.82)$$

Суммирование по поляризациям с использованием формулы (2.165) и умножение на  $\hbar\omega$  дает интенсивность излучения в данном направлении:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{2\pi c^3} \left\{ |\boldsymbol{\mu}_{fi} \times \mathbf{n}|^2 + \frac{\omega^2}{36c^2} |\mathbf{Q}_{fi} \times \mathbf{n}|^2 + \frac{i\omega}{6c} [\mathbf{Q}_{fi}^* \cdot [\boldsymbol{\mu}_{fi} \times \mathbf{n}] - \mathbf{Q}_{fi} \cdot [\boldsymbol{\mu}_{fi}^* \times \mathbf{n}]] \right\}. \quad (6.83)$$

Сходство с классическим выражением (5.38) очевидно. Интегрирование по телесному углу позволяет получить суммарную по всем направлениям интенсивность излучения на частоте перехода между квантовыми уровнями:

$$I = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2 + \frac{\omega^6}{90c^5} |(Q_{fi})_{\alpha\beta}|^2. \quad (6.84)$$

Рекомендуемая литература: [Берестецкий и др. (1989)], [Бете и Солпитер (1960)], [Гайтлер (1956)], [Фейнман (2000)], [Ахиезер и Берестецкий (1981)].

## Задачи

**6.47\*.** Начальное состояние электрона в центрально-симметричном поле определяется набором четырех квантовых чисел: главного  $n = 1, 2, \dots$ , орбитального  $l = 0, 1, \dots, n - 1$  и двух магнитных,  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ ,  $m_s = \pm 1/2$ , определяющих проекции орбитального и спинового моментов на ось квантования. Показать, что после электрического дипольного излучения фотона возможны конечные состояния с квантовыми числами

$$m'_s = m_s; \quad l' = l \pm 1 \quad (l' = 1 \text{ при } l = 0); \quad m'_l = m_l, \quad m_l \pm 1; \quad (6.85)$$

$n'$  — любое, совместимое с предыдущими условиями и неравенством  $\mathcal{E}_f < \mathcal{E}_i$  (правила отбора для электрического дипольного излучения). Поскольку  $\Delta l = \pm 1$ , то при электрическом дипольном переходе изменяется четность волновой функции электрона (см. пример 1.20).

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться разложением Клебша–Гордана (см. [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика], глава 14)

$$Y_{l_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) = \sum_{LM} \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2L + 1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{L0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} Y_{LM}(\vartheta, \varphi),$$

где коэффициенты Клебша–Гордана  $C$  отличны от нуля только при выполнении неравенств треугольника  $l_1 + l_2 \geq L \geq |l_1 - l_2|$  и подчиняются целому ряду соотношений симметрии, в частности,  $C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} = (-1)^{l_1 + l_2 + L} C_{l_1, -m_1 l_2, -m_2}^{L, -M}$ .

**6.48.** Электрон в атоме водорода находится в возбужденном состоянии  $2p$ . Вычислить вероятности спонтанных переходов в единицу времени в основное состояние  $1s$  из состояний с разными значениями магнитного квантового числа  $m_l = 0, \pm 1$ , которые сопровождаются испусканием одного линейно поляризованного фотона в заданном направлении  $\mathbf{n}$ . Сравнить угловые распределения для различных переходов. Записать, в частности, угловое распределение излучения, просуммированное по поляризациям фотонов и угловое распределение излучения от неполяризованных атомов.

**6.49.** Для случая, рассмотренного в задаче 5.23, произвести квантово-механический расчет и найти суммарную по всем направлениям интенсивность излучения атома водорода.

**6.50\*.** Вычислить среднее время жизни  $\tau$  атома водорода в возбужденном состоянии  $2p$  относительно спонтанного излучения фотонов.

**6.51.** Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии  $1s$ . Возможно ли перевести его в возбужденное состояние  $2p$ ,  $m_l = +1$ , облучая атом поляризованными фотонами? При какой поляризации фотонов будет заселяться только состояние  $m_l = -1$ ? состояние  $m_l = 0$ ?

УКАЗАНИЕ. Полезно использовать результат решения задачи 6.20.

**6.52.** Спектральная линия Лаймана в атоме водорода возникает как результат электрических дипольных переходов из состояний  $2p, 3p, \dots$  в основное состояние  $1s$ . Вычислить и сравнить интенсивности  $I$  двух первых спектральных линий этой серии  $Ly_\alpha$  (переход  $2p \rightarrow 1s$ ) и  $Ly_\beta$  (переход  $3p \rightarrow 1s$ ) при спонтанном излучении.

УКАЗАНИЕ. Радиальная волновая функция  $3p$ -состояния имеет вид

$$R_{31}(r) = \frac{8}{27\sqrt{6}a_B^{3/2}} e^{-r/3a_B}.$$

Другие волновые функции приведены при решении задачи 6.47.

**6.53\***. Взаимодействие электрона с нулевыми флуктуациями электромагнитного поля приводит к расщеплению уровней  $2s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  (лэмбовский сдвиг,  $\Delta\mathcal{E} \approx 1058$  МГц  $\approx 4,4 \times 10^{-6}$  эВ, см. задачу 6.18). Индекс  $1/2$  обозначает квантовое число  $j = 1/2$  полного момента электрона. Выразить через атомные постоянные и получить численное значение (в обратных секундах) вероятности спонтанного перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$ .

УКАЗАНИЕ. Согласно принципу суперпозиции и правилам сложения угловых моментов в квантовой механике спин-угловую волновую функцию, описывающую состояние электрона с определенными  $j$ ,  $m_j$ ,  $l$ , можно записать в виде суперпозиции (разложение Клебша–Гордана, ср. с задачей 6.46)

$$\Phi_{jm_j} = \sum_{m, \mu} C_{lm \ 1/2, \mu}^{jm_j} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \chi_{\mu}.$$

Здесь  $\chi_{\mu}$  — спинор, описывающий состояние с проекцией спина  $\mu = \pm 1/2$  на ось квантования, коэффициенты разложения обеспечивают неравенство треугольника  $l + 1/2 \geq j \geq |l - 1/2|$  и правило сложения проекций моментов  $m_j = m + \mu$ .

**6.54\***. За счет взаимодействия между магнитными моментами электрона и протона энергетический уровень атома водорода расщепляется на два подуровня (сверхтонкое расщепление), расстояние между которыми  $\Delta\mathcal{E} \approx 1420$  МГц  $\approx 5,9 \times 10^{-6}$  эВ. Верхний уровень — триплетный, полный момент атома  $S = 1$ , нижний — синглетный,  $S = 0$ . Вычислить вероятность электромагнитного перехода между указанными компонентами сверхтонкой структуры.

**6.55\***. Атом водорода, находящийся в основном состоянии, облучается направленным пучком фотонов с частотой  $\omega$ . Энергия фотонов удовлетворяет условию  $\hbar\omega \gg I_0$ , где  $I_0$  — энергия связи (ионизационный потенциал) атома. Вычислить сечение фотоионизации атома поляризованным излучением с вылетом электрона в заданном направлении, а также суммарное по всем направлениям сечение фотоионизации неполяризованным излучением, считая электрон в конечном состоянии свободным.

**6.56.** Вычислить полное сечение фоторекомбинации атома водорода (процесс, обратный фотоионизации). Электрон в начальном состоянии считать свободным, атом образуется в основном состоянии.

**6.57\***. Записать магнитный дипольный момент перехода (6.80) через матричный элемент полного магнитного момента  $\widehat{M}$  излучающей частицы:

$$\mu_{fi} = \int \psi_f^* \widehat{M} \psi_i d^3r, \quad \widehat{M} = \frac{e\hbar}{2mc} (\widehat{l} + g\widehat{s}), \quad (6.86)$$

где согласно (4.76), (4.79) и принципу соответствия  $\widehat{l}$ ,  $\widehat{s}$  — безразмерные операторы орбитального и спинного моментов частицы, для электрона фактор  $g \approx 2$ .

**Теория возмущений для матрицы плотности.** Ниже мы рассмотрим некоторые специальные приемы решения электродинамических задач, широко используемые в современной литературе. Они базируются на изложенной выше общей теории и могут относиться к любой нерелятивистской системе заряженных частиц (атом, молекула, твердое тело, атомное ядро). Для упрощения письма будем использовать название «атом» для любой такой системы.

Используем уравнения (6.21), (6.55) и запишем полный гамильтониан системы зарядов, взаимодействующих с квантованным электромагнитным полем, в виде суммы

$$\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_f + \widehat{\mathcal{H}}_a + \widehat{V}, \quad (6.87)$$

где  $\widehat{\mathcal{H}}_f$  — оператор свободного поля излучения (6.21),  $\widehat{\mathcal{H}}_a$  — гамильтониан атома, не взаимодействующего с полем излучения (но он может находиться во внешних статических электрическом и магнитном полях),  $\widehat{V}$  — оператор взаимодействия атома с квантованным полем,

$$\widehat{V} = \sum_a \left\{ -\frac{e_a}{m_a c} \widehat{\mathbf{p}}_a \cdot \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_a) - \boldsymbol{\mu}_a \cdot \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}_a) + \frac{e_a^2}{2m_a c^2} \widehat{\mathbf{A}}^2(\mathbf{r}_a) \right\}. \quad (6.88)$$

Первые два слагаемых линейны, а последнее квадратично относительно операторов поля.

**Пример 6.10.** Пусть в начальный момент времени  $t_0$  состояние полной системы атом + поле было известно и описывалось оператором плотности  $\widehat{\rho}(t_0) = \widehat{\rho}_a(t_0)\widehat{\rho}_f(t_0)$ , действующим на переменные атомной системы и поля. Вычислить во втором порядке по взаимодействию  $\widehat{V}$  оператор плотности для времен  $t > t_0$ .

**Решение.** Оператор плотности полной системы удовлетворяет уравнению Лиувилля–Шредингера (Д3.42)

$$(1) \quad \frac{d\widehat{\rho}(t)}{dt} + \frac{i}{\hbar} [\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\rho}(t)] = 0,$$

где  $\widehat{\mathcal{H}}$  — полный оператор Гамильтона системы (6.87). Формальное решение этого уравнения в отсутствие зависимости  $\widehat{\mathcal{H}}$  от времени имеет вид

$$(2) \quad \widehat{\rho}(t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}(t - t_0) \right\} \widehat{\rho}(t_0) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}(t - t_0) \right\}.$$

Но это решение мало полезно для практических расчетов, поскольку найти простое замкнутое выражение для оператора плотности в экспоненциальных «обкладках» (правая часть (2)) очень нелегко. Более удобно найти приближенное решение методом последовательных приближений, которым можно пользоваться на ограниченных временах. Сделаем в (1) подстановку

$$(3) \quad \widehat{\rho}(t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}_0(t - t_0) \right\} \widehat{\rho}_I(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}_0(t - t_0) \right\},$$

где

$$(4) \quad \widehat{\mathcal{H}}_0 = \widehat{\mathcal{H}}_f + \widehat{\mathcal{H}}_a$$

— гамильтониан системы атом + поле излучения **в отсутствие взаимодействия** между ними. Величина

$$\widehat{\rho}_I(t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}_0(t - t_0) \right\} \widehat{\rho}(t) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}_0(t - t_0) \right\} \quad (6.89)$$

представляет собой оператор плотности **в представлении взаимодействия**. Зависимость  $\widehat{\rho}_I$  от времени вызвана только наличием взаимодействия. При  $\widehat{V} = 0$ ,  $\widehat{\rho}_I(t) = \widehat{\rho}(t_0)$  не зависит от времени.

Для оператора плотности в представлении взаимодействия из (1) и (6.89) получаем уравнение

$$(5) \quad \frac{d\widehat{\rho}_I(t)}{dt} + \frac{i}{\hbar} [\widehat{V}_I(t), \widehat{\rho}_I(t)] = 0,$$

где

$$\widehat{V}_I(t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}_0(t - t_0) \right\} \widehat{V} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}_0(t - t_0) \right\} \quad (6.90)$$

— оператор взаимодействия в представлении взаимодействия. Уравнение (5) можно записать в интегральной форме

$$(6) \quad \widehat{\rho}_I(t) = \widehat{\rho}_I(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t [\widehat{V}_I(\tau), \widehat{\rho}_I(\tau)] d\tau$$

и решать методом последовательных приближений, выбрав в качестве нулевого приближения значение оператора плотности в начальный момент:  $\widehat{\rho}_I^{(0)}(t) = \widehat{\rho}_I(t_0) = \widehat{\rho}(t_0)$ . Тогда из (6) получаем оператор плотности

с учетом члена первого порядка

$$(7) \quad \hat{\rho}_I^{(1)}(t) = \hat{\rho}(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t [\hat{V}_I(\tau), \hat{\rho}(t_0)] d\tau$$

и с учетом члена второго порядка

$$(8) \quad \hat{\rho}_I^{(2)}(t) = \hat{\rho}(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t [\hat{V}_I(\tau), \hat{\rho}(t_0)] d\tau + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 [\hat{V}_I(\tau_1), [\hat{V}_I(\tau_2), \hat{\rho}(t_0)]] .$$

Пусть мы интересуемся вероятностью перехода полной системы в состояние  $|f\rangle$ , в котором атом и поле находятся каждый в одном из своих стационарных состояний. Вероятность такого перехода можно вычислить по формуле (ДЗ.39),

$$(9) \quad W(t) = \langle f | \hat{\rho}(t) | f \rangle = \langle f | \hat{\rho}_I(t) | f \rangle,$$

так как экспоненциальные операторы, действуя на  $|f\rangle$ , превращаются в обычные экспоненты и сокращаются. В (9) следует подставить выражение (8). Если состояние  $|f\rangle$  ортогонально начальному состоянию (например, из-за разного числа фотонов в этих состояниях), то  $\hat{\rho}(t_0)|f\rangle = 0$ ,  $\langle f | \hat{\rho}(t_0) = 0$ , первые два члена в (8) и часть слагаемых третьего члена при вычислении вероятности дают нуль, и мы получаем из (8) и (9)

$$W(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \langle f | \hat{V}_I(\tau_1) \hat{\rho}(t_0) \hat{V}_I(\tau_2) + \hat{V}_I(\tau_2) \hat{\rho}(t_0) \hat{V}_I(\tau_1) | f \rangle. \quad (6.91)$$

Заметим, что

$$\hat{V}_I(\tau_2) \hat{\rho}(t_0) \hat{V}_I(\tau_1) = \left( \hat{V}_I(\tau_1) \hat{\rho}(t_0) \hat{V}_I(\tau_2) \right)^\dagger,$$

поэтому два слагаемых в (6.91) взаимно комплексно сопряжены. ■



**Другая формулировка дипольного приближения.** В том случае, когда нерелятивистская система взаимодействует с той частью мод полевого континуума, длина волны которых существенно превосходит размер системы, оператору взаимодействия можно придать другую форму, отличную от (6.58) и аналогичную энергии взаимодействия (2.35) диполя со статическим полем (см., например, [Коэн-Таннуджи и др. (1992)]). Предполагая, что система зарядов мала и находится вблизи начала координат, заменим оператор  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  на  $\hat{\mathbf{A}}(0)$ . Далее произведем унитарное преобразование с помощью оператора

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar c} \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(0)\right) = \exp\left[\sum_j (\hat{\lambda}_j^\dagger \hat{a}_j - \hat{\lambda}_j \hat{a}_j^\dagger)\right], \quad (6.92)$$

где  $\hat{\mathbf{d}}$  — оператор дипольного момента

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a \quad (6.93)$$

(мы изменили обозначение для дипольного момента, чтобы не путать его с оператором импульса). Индекс  $j = k\alpha$  характеризует пространственную поляризационную моду. Оператор  $\hat{\lambda}_j$  соответственно имеет вид

$$\hat{\lambda}_j = i \left( \frac{2\pi}{V \hbar \omega_j} \right)^{1/2} \mathbf{e}_j^* \cdot \hat{\mathbf{d}} \quad (6.94)$$

Поскольку в оператор унитарного преобразования (6.93) входят канонические переменные и частиц, и поля, то все они модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_a &= \hat{U} \mathbf{r}_a \hat{U}^\dagger = \mathbf{r}_a, \\ \hat{\mathbf{p}}'_a &= \hat{U} \hat{\mathbf{p}}_a \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{p}}_a + \frac{e_a}{c} \hat{\mathbf{A}}_\perp(0), \\ \hat{a}'_j &= \hat{U} \hat{a}_j \hat{U}^\dagger = \hat{a}_j + \hat{\lambda}_j, \\ \hat{a}'^\dagger_j &= \hat{U} \hat{a}_j^\dagger \hat{U}^\dagger = \hat{a}_j^\dagger + \hat{\lambda}_j^\dagger. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Эти соотношения следуют из формулы (Д3.67.1) операторной алгебры.

Почувительно также преобразовать операторы поля. Для векторного потенциала имеем

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{A}}'(\mathbf{r}) &= \widehat{U}\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\widehat{U}^\dagger = \\
 &= \sum_j \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_j \mathcal{V}} \right)^{1/2} \left[ \mathbf{e}_j(\widehat{a}_j + \widehat{\lambda}_j)e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{e}_j^*(\widehat{a}_j^\dagger + \widehat{\lambda}_j^\dagger)e^{-i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} \right] = \\
 &= \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) + i \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\pi c}{\mathcal{V}\omega(\mathbf{k})k^2} \left[ \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \widehat{\mathbf{d}})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \widehat{\mathbf{d}})e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] = \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}).
 \end{aligned} \tag{6.96}$$

Здесь использованы соотношения (6.95) и формула суммирования ортов поляризации (2.165), в одной из сумм по  $\mathbf{k}$  сделана замена  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ . Таким образом, оператор векторного потенциала инвариантен относительно рассматриваемого унитарного преобразования. Аналогичным свойством обладает оператор магнитного поля:  $\widehat{\mathbf{H}}'(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$ . Однако оператор электрического поля преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{E}}'(\mathbf{r}) &= \widehat{U}\widehat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r})\widehat{U}^\dagger = \\
 &= \sum_j \left( \frac{2\pi\hbar\omega_j}{\mathcal{V}} \right)^{1/2} \left[ i\mathbf{e}_j(\widehat{a}_j + \widehat{\lambda}_j)e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} - i\mathbf{e}_j^*(\widehat{a}_j^\dagger + \widehat{\lambda}_j^\dagger)e^{-i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} \right] = \\
 &= \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - 4\pi\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}),
 \end{aligned} \tag{6.97}$$

где

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{1}{\mathcal{V}} \mathbf{e}_j(\mathbf{e}_j^* \cdot \widehat{\mathbf{d}})e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}}. \tag{6.98}$$

Для выяснения физического смысла последней величины произведем в (6.98) суммирование по поляризациям и интегрирование по волновым векторам, используя формулы (2.165) и (2.164) (в последней следует устранить множитель 2). В результате простого интегрирования получим

$$\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{d}}\delta(\mathbf{r}) + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \widehat{\mathbf{d}})}{4\pi r^5} - \frac{\widehat{\mathbf{d}}}{4\pi r^3}. \tag{6.99}$$

Первое слагаемое в правой части можно интерпретировать как оператор вектора поляризации, который создан точечным диполем, находящимся в начале координат. Оставшиеся два члена дают оператор электрического поля, созданного статическим диполем (см. дипольное слагаемое в формуле (2.21)).

Таким образом, унитарное преобразование добавило к поперечному полю излучения поле статического диполя и его вектор поляризации. Обе эти величины расходятся при  $r \rightarrow 0$ .

Построим теперь преобразованный гамильтониан полной системы. Интересуясь в дальнейшем только электрическим дипольным излучением, опустим из гамильтониана спиновое слагаемое Паули  $\sum_a \hat{\boldsymbol{\mu}}_a \cdot \hat{\mathbf{H}}_a$ . Кроме того, как уже было сказано, заменим  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  на  $\hat{\mathbf{A}}(0)$ , но не будем пренебрегать квадратичным по векторному потенциалу слагаемым. Используя (6.21) и (6.55), будем иметь

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}' &= \widehat{U} \left\{ \sum_j \hbar \omega_j \left( \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a=1}^N \left\{ \frac{1}{2m_a} \left( \hat{\mathbf{p}}_a - \frac{e_a}{c} \hat{\mathbf{A}}(0) \right)^2 + e_a \varphi(\mathbf{r}_a) \right\} \right\} \widehat{U}^\dagger = \\ &= \sum_j \hbar \omega_j \left( \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) + \sum_a \left\{ \frac{\hat{\mathbf{p}}_a^2}{2m_a} + e_a \varphi(\mathbf{r}_a) \right\} - \\ &\quad - \hat{\mathbf{d}} \sum_j \left( \frac{2\pi \hbar \omega_j}{\mathcal{V}} \right)^{1/2} \left[ i e_j a_j - i e_j^* a_j^\dagger \right] + \sum_j \frac{2\pi}{\mathcal{V}} (e_j^* \hat{\mathbf{d}})(e_j \hat{\mathbf{d}}). \end{aligned} \quad (6.100)$$

Предпоследняя строка этой цепочки равенств содержит сумму гамильтонианов свободного электромагнитного поля и атома; операторы в последней строке описывают эффекты взаимодействия. Пользуясь соотношениями (6.97) и (6.98), запишем их в виде

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}'_I &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(0) + 2\pi \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{P}(0) = \\ &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(0) + 2\pi \left[ \hat{\mathbf{d}}^2 \delta(\mathbf{r}) + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}})^2}{4\pi r^5} - \frac{\hat{\mathbf{d}}^2}{4\pi r^3} \right]_{r \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Первое слагаемое аналогично энергии взаимодействия статического диполя с внешним полем (см. дипольный член в формуле (2.35)). Оно содержит динамические переменные поля и ответственно за процессы испускания и поглощения фотонов. Второе расходящееся слагаемое представляет собой энергию самодействия точечного диполя, не связанную с полем излучения. Оно возникло из-за сделанных приближений (пренебрежение размером атома) и должно быть исключено. В итоге оператор взаимодействия неподвиж-

ного атома, находящегося в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{R}$ , с квантованным полем принимает окончательный вид

$$\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) \quad (6.102)$$

(в предыдущем рассмотрении для сокращения письма мы полагали  $\mathbf{R} = 0$ ).

В приложениях часто рассматривается взаимодействие с излучением, квазирезонансным какому-либо переходу в атоме. Для произвольного перехода, характеризуемого набором нижних энергетических состояний  $|m\rangle$  и верхних состояний  $|n\rangle$ , оператор дипольного момента может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_{mn} (d_{nm}|n\rangle\langle m| + d_{mn}|m\rangle\langle n|) = \hat{\mathbf{d}}_+ + \hat{\mathbf{d}}_- \quad (6.103)$$

Предположим, что данному атомному переходу соответствует частота  $\omega_0$  и атом взаимодействует с квазирезонансным излучением частоты  $\omega$ , так что  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ . В этих условиях в разложениях теории возмущений, основанных на операторе взаимодействия (6.102), главными оказываются резонансные вклады, т. е. вклады, экспоненциальные факторы которых осциллируют на разностной частоте. Если ограничиться рассмотрением только резонансных вкладов, то вместо (6.102) достаточно рассматривать оператор взаимодействия в виде

$$\hat{V} \approx - \sum_j \left( \frac{2\pi\hbar\omega_j}{\gamma} \right)^{1/2} \left[ i(e_j\hat{\mathbf{d}}_+)a_j - i(e_j^*\hat{\mathbf{d}}_-)a_j^\dagger \right], \quad (6.104)$$

если атом расположен в начале координат. Для атома, расположенного в произвольной пространственной точке  $\mathbf{R}$ , соответственно имеем

$$\hat{V} \approx - \sum_j \left( \frac{2\pi\hbar\omega_j}{\gamma} \right)^{1/2} \left[ i(e_j\hat{\mathbf{d}}_+)a_j e^{i\mathbf{k}_j\mathbf{R}} - i(e_j^*\hat{\mathbf{d}}_-)a_j^\dagger e^{-i\mathbf{k}_j\mathbf{R}} \right]. \quad (6.105)$$

Приближение (6.104), (6.105) известно как **приближение вращающейся волны**. Принципиальным для приближения вращающейся волны является то, что даже для виртуальных промежуточных переходов, рассматриваемых в высших порядках теории возмущений, учитываются только такие переходы в возбужденное состояние, которые сопровождаются поглощением фотона, а в основное состояние его излучением. Отметим, что приближение вращающейся волны является наиболее распространенным при проведении практических расчетов, не основанных на приближениях теории возмущений.

Рекомендуемая литература: [Перина (1987)], [Андреев и др. (1988)], [Козн-Таннуджи и др. (1992)], [Мандель и Вольф (2000)], [Килин (1990)], [Клышко (1996)], [Ахманов и Никитин (1998)].

**Пример 6.11.** До сих пор мы рассматривали все состояния атома как строго стационарные, квадрат модуля волновой функции которых не зависит от времени (см. (Д3.37)). Но в результате взаимодействия электронов с электромагнитным полем происходят переходы из возбужденных состояний в основное (и в ниже лежащие возбужденные), вследствие чего время жизни возбужденных состояний оказывается конечным. Это неизбежно приведет к тому, что волновая функция реального возбужденного состояния будет представлять собой суперпозицию волновых функций с разными энергиями (квазистационарное состояние), а испускаемые при переходе из возбужденного в основное состояние фотоны будут иметь разные энергии. Вычислить для двухуровневого атома распределение фотонов по энергиям для заданного перехода в вакууме, предполагая, что время жизни возбужденного состояния велико по сравнению с обратной частотой перехода (форма спектральной линии).

**Решение.** Ищем решение для волновой функции системы двухуровневый атом + поле в виде (1)

$$|\psi(t)\rangle = \sum_s a_{1s}(t)|1\rangle|1_s\rangle \exp[i(\omega_s - \mathcal{E}/\hbar)t] + a_{20}(t)|2\rangle|vac\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t\right).$$

Здесь учитываются только вакуумное состояние поля и однофотонные состояния. В начальном состоянии отсутствуют кванты и имеется возбужденный атом,  $a_{20}(0) = 1$ ,  $a_{1s}(0) = 0$ . В конечном состоянии, при  $t \rightarrow \infty$ , атом переходит в свое основное состояние и излучается квант с некоторой частотой  $\omega$ . В формуле (1) выделены временные множители невозмущенных волновых функций атома и фотона,  $s$  представляет собой индекс моды, в которую излучается квант. Распределение излучаемых квантов по частотам можно вычислить по формуле

$$(2) \quad dw(\omega) = \int \sum \frac{|a_{1s}(\infty)|^2 \mathcal{V} \omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi c)^3},$$

где производится интегрирование только по направлениям вылета кванта (не по частотам) и суммирование по его поляризациям.

Подставив (1) в уравнение Шредингера (Д3.29), находим систему уравнений для коэффициентов разложения:

$$(3) \quad i\hbar\dot{a}_{1q} = \langle 1q|\widehat{V}|20\rangle a_{20}(t) \exp[i(\omega_q - \omega_0)t],$$

$$(4) \quad i\hbar\dot{a}_{20} = \sum_s \langle 20|\widehat{V}|1s\rangle a_{1s}(t) \exp[i(\omega_0 - \omega_s)t].$$

Здесь через  $\omega_0$  обозначена частота перехода  $(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/\hbar$ . Чтобы найти приближенное решение системы (3)–(4), выразим его через неизвестную постоянную затухания  $\gamma$  возбужденного уровня:

$$(5) \quad a_{20}(t) = e^{-\gamma t/2}.$$

Из уравнения (2) находим решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$(6) \quad a_{1q}(t) = -\langle 1q|\widehat{V}|20\rangle \frac{\exp[i(\omega_q - \omega_0 + i\gamma/2)t] - 1}{\hbar(\omega_q - \omega_0 + i\gamma/2)}.$$

Подстановка этого решения в (4) дает трансцендентное уравнение для определения  $\gamma$ :

$$(7) \quad -\frac{i\hbar\gamma}{2} = \sum_s \frac{|\langle 1s|\widehat{V}|20\rangle|^2}{\hbar(\omega_0 - \omega_s - i\gamma/2)} \{1 - \exp[i(\omega_0 - \omega_s - i\gamma/2)t]\}.$$

Это приближенное уравнение можно считать корректным, если при больших временах правая часть перестает зависеть от  $t$ . В правильности последнего утверждения можно убедиться, решая указанное уравнение методом последовательных приближений в предположении малости  $\gamma$ . В нулевом приближении полагаем в правой части  $\gamma = 0$  (см. Гайтлер (1956)) и переходим к пределу больших времен (см. формулы (1.216), (1.224а)):

$$(8) \quad \left. \frac{1 - \exp[i(\omega_0 - \omega_s)t]}{\omega_0 - \omega_s} \right|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\mathcal{P}}{\omega_0 - \omega_s} - i\pi\delta(\omega_0 - \omega_s).$$

После подстановки (8) в (7) и перехода от суммирования по модам к интегрированию по частотам и направлениям вылета фотона (а также суммированию по его поляризациям) находим, что постоянная затухания  $\gamma = \gamma' + i\gamma''$  имеет действительную и мнимую части. Действительная часть имеет вид

$$(9) \quad \gamma' = \sum_{\sigma} \mathcal{P} \int \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle 1s|\widehat{V}|20\rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega) \frac{\mathcal{V}\omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi c)^3}$$

и представляет собой полную вероятность спонтанного излучения атома (см. формулы (6.59) и далее). Для разрешенных переходов в атомах  $\gamma' \approx 10^8 - 10^9 \text{ c}^{-1}$  (см., например, задачу 6.50), тогда как частоты оптических переходов порядка  $10^{16} \text{ c}^{-1}$ . Поэтому условие  $\gamma' \ll \omega_0$  выполняется с большим запасом.

Мнимая часть постоянной затухания дает сдвиг атомного уровня за счет взаимодействия электрона с нулевыми колебаниями поля (лэмбовский сдвиг, рассмотренный на оценочном уровне в задаче 6.18):

$$(10) \quad \gamma'' = \frac{1}{4\pi^3 c^3 \hbar^2} \sum_{\sigma} \int |\langle 1s | \hat{V} | 20 \rangle|^2 \frac{\mathcal{V} \omega^2 d\omega d\Omega}{\omega_0 - \omega}.$$

Интеграл по частотам в (10) расходится, и получение корректного значения малого радиационного сдвига требует специальных методов (см. монографии и учебники Ахиезера и Берестецкого (1981), Берестецкого и др. (1989), Боголюбова и Ширкова (1980)).

Вероятность излучения квантов разных частот (форму спектральной линии) найдем с помощью (2) и (6):

$$(11) \quad dw(\omega) = \sum \int \frac{|\langle 1s | \hat{V} | 20 \rangle|^2}{\hbar^2 [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]} \frac{\mathcal{V} \omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi c)^3}$$

Теперь мы пренебрегаем малым радиационным сдвигом и понимаем под  $\gamma$  действительную величину  $\gamma'$ . Ввиду малой ширины спектральной линии можно всюду в (11), кроме знаменателя и дифференциала, заменить  $\omega$  на  $\omega_0$ . Сравнивая правую часть (11) с (9), находим

$$(12) \quad dw(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}.$$

Мы снова получили лоренцев контур, как и в классическом случае (см. задачу 5.122, формула (6)). Но радиационная ширина  $\gamma$  спектральной линии теперь определяется вероятностью квантового перехода между атомными уровнями. ■

## Задачи

**6.58°.** Записать операторы свободного электромагнитного поля в представлении взаимодействия, которое определено формулами (6.89), (6.90).

**6.59°.** Записать в представлении взаимодействия оператор (6.102) взаимодействия атома с квантованным полем.

**6.60\***. Выразить волновую функцию  $\Psi_I(t)$  в представлении взаимодействия через волновую функцию  $\Psi_S(t)$  в представлении Шредингера. Записать уравнение Шредингера для  $\Psi_I(t)$ .

**6.61.** Силами осцилляторов атомных электронов называются величины

$$f_{ln} = \frac{2m}{\hbar e^2} \omega_{ln} |(d_z)_{ln}|^2,$$

где  $l, n$  — полные наборы квантовых чисел, характеризующих состояния атомной системы,  $\omega_{ln}$  — частота перехода,  $(d_z)_{ln}$  — матричный элемент одной из декартовых компонент электрического дипольного момента атома. Доказать правило сумм:  $\sum_l f_{ln} = N$ . Здесь  $N$  — полное число электронов в системе, сумма берется по полному набору атомных состояний.

**6.62.** Вычислить поляризуемость  $\alpha_{\mu\nu}$  основного состояния квантовой системы частиц в постоянном электрическом поле, выразив ее через матричные элементы дипольного момента. По определению тензор поляризуемости связывает вектор дипольного момента, индуцированного слабым внешним полем, с вектором напряженности поля.

**6.63.** Определить в дипольном приближении скорость вынужденного перехода (вероятность перехода в единицу времени) для двухуровневой атомной системы, взаимодействующей с хаотическим стационарным электромагнитным полем. Матрица плотности  $\rho_{nn}$  поля диагональна в представлении фоковских состояний и не зависит от времени.

**6.64\***. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния света атомом. Ограничиться нерезонансным случаем, когда энергии падающего и рассеянного фотонов не равны разностям энергий атомных уровней<sup>7</sup>.

**6.65\***. Вычислить дифференциальное сечение нерезонансного рассеяния фотонов атомом, используя потенциал взаимодействия в дипольном приближении (см. формулу (6.102)). Сравнить с результатом предыдущей задачи и показать, что разные формы потенциала взаимодействия приведут к одинаковым выражениям для сечения.

**6.66.** Проанализировать предельные случаи формулы (2), полученной в предыдущей задаче:

1. Рассмотреть рассеяние без изменения частоты (релеевское рассеяние), когда  $\omega_2 = \omega_1 = \omega \ll \omega_{li}$  для всех промежуточных состояний. Показать, что в этом случае получается результат, близкий к формулам задачи 5.127 о рассеянии электромагнитной волны классическим осциллятором.

<sup>7</sup>В этой и следующих задачах мы говорим об атомах, хотя большинство полученных ниже формул справедливо и для более сложных объектов — молекул, твердых тел и т. д.



2. Показать, что если энергия рассеиваемых квантов велика по сравнению с энергией связи электронов (но много меньше  $mc^2$ ), то сечение рассеяния переходит в формулу Томсона (см. задачи 5.127, 5.133).

**6.67\***. Вычислить в первом исчезающем порядке теории возмущений вероятности двухфотонного поглощения и излучения света атомами, выразив их через матричные элементы соответствующих переходов. Проанализировать правила отбора для этих процессов. Расчет провести в рамках дипольного приближения.

**6.68.** Вычислить вероятность параметрической генерации света — процесса, при котором происходит поглощение одного фотона  $\{\omega_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{e}_1\}$  и рождение пары фотонов  $\{\omega_2, \mathbf{k}_2, \mathbf{e}_2\}$  и  $\{\omega_3, \mathbf{k}_3, \mathbf{e}_3\}$ , причем частоты трех квантов связаны соотношением  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ , а энергии начального и конечного состояния рассеивающей системы одинаковы (когерентный процесс).

**6.69.** Два близко расположенных двухуровневых атома находятся в состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi_1 = (|1\rangle_a|2\rangle_b + |2\rangle_a|1\rangle_b)/\sqrt{2}$ . Определить в низшем порядке теории возмущений вероятность испускания фотона. Показать, что скорость спонтанного распада такой системы в два раза больше, чем для каждого атома в отдельности (явление сверхизлучения). Сравнить со случаем, когда начальное состояние описывается волновой функцией  $\Psi_2 = (|1\rangle_a|2\rangle_b - |2\rangle_a|1\rangle_b)/\sqrt{2}$

**6.70.** Рассмотреть кооперативный эффект когерентного взаимодействия классических осцилляторов (см. задачу 5.122) на следующей упрощенной модели.  $N$  одинаковых осцилляторов с собственной частотой  $\omega$  и постоянной радиационного затухания  $\gamma = 2e^2\omega_0^2/3mc^2$  находятся в малой области пространства размером много меньше длины волны  $\lambda$  их излучения. Поскольку все осцилляторы одинаковы, затухание колебаний данного осциллятора будет вызываться не только его полем излучения, но и полями других осцилляторов. Поэтому уравнение движения  $a$ -го осциллятора примет вид

$$\ddot{r}_a + 2\gamma\dot{r}_a + \omega_0^2 r_a = - \sum_{b \neq a} 2\gamma\dot{r}_b,$$

где  $a, b = 1, 2, \dots, N$ . В начальный момент времени осцилляторы начинают колебаться с одинаковыми амплитудами  $r_0$  и в одной фазе. Вычислить форму спектра излучения, амплитуду электромагнитного импульса и постоянную затухания. Сравнить их с соответствующими величинами для системы независимых осцилляторов.

### 6.3. Взаимодействие релятивистских частиц с фотонами

В этом разделе будет рассмотрено несколько простых примеров и задач с релятивистскими частицами. Мы проиллюстрируем основные физические идеи простейшими способами, не претендуя на изложение строгой теоретической схемы квантовой электродинамики в релятивистски ковариантной формулировке и многочисленных конкретных задач, которые можно найти в книгах Ахиезера и Берестецкого (1981), Берестецкого и др. (1989), Боголюбова и Ширкова (1980)).

**Релятивистское уравнение Дирака для фермионов.** Уравнение Шредингера (Д3.29) с оператором Гамильтона

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}, t) \quad (6.106)$$

неприменимо для описания релятивистских частиц, так как оно приводит к нерелятивистскому соотношению между энергией и импульсом свободной частицы: полагая  $U = 0$  и подставив в (Д3.29)  $\Psi(\mathbf{r}, t) = A \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathcal{E}t)/\hbar]$ , находим

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (6.107)$$

Кроме того, однокомпонентная волновая функция  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  никак не отражает наличия у частицы спиновой степени свободы. Для описания релятивистских электронов необходимо обеспечить релятивистскую связь энергии частицы  $\mathcal{E}$  с ее трехмерным импульсом  $\mathbf{p}$ ,

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}, \quad (6.108)$$

и включить в теорию описание внутреннего момента (спина). Релятивистское волновое уравнение для частиц со спином  $s = 1/2$  было открыто Дираком в 1928 г. Оно может быть записано в форме уравнения Шредингера (Д3.29)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}} \Psi, \quad (6.109)$$

в котором волновая функция

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (6.110)$$

должна представлять собой четырехкомпонентную величину, а дираковский гамильтониан свободной частицы

$$\widehat{\mathcal{H}} = c(\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \widehat{\mathbf{p}}) + \widehat{\beta} m c^2 \quad (6.111)$$

содержит четырехрядные матрицы Дирака

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}. \quad (6.112)$$

Здесь использована сокращенная двухрядная форма записи, при которой каждый элемент в четырехрядной матрице представляет собой двухрядную матрицу:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.113)$$

Аналогичная запись использована для четырехкомпонентной волновой функции (биспинора). Величина  $m$  в (6.111) представляет собой массу частицы, оператор  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$  соответствует ее трехмерному импульсу. Матрицы Паули  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{1}$  составляют полный набор двухрядных эрмитовых матриц, которые можно использовать для представления произвольной двухрядной матрицы. Матрицы Дирака в четырехрядной записи имеют вид

$$\hat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.114)$$

$$\hat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Все матрицы Дирака эрмитовы и удовлетворяют соотношениям антикоммутации

$$\{\hat{\alpha}_\mu, \hat{\alpha}_\nu\} \equiv \hat{\alpha}_\mu \hat{\alpha}_\nu + \hat{\alpha}_\nu \hat{\alpha}_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \hat{1}, \quad \{\hat{\alpha}, \hat{\beta}\} = 0, \quad \hat{\beta}^2 = \hat{1}, \quad \mu, \nu = x, y, z. \quad (6.115)$$

Уравнения (6.109), (6.111) представляют собой лишь одну из возможных форм записи уравнения Дирака для свободной частицы («стандартное представление»). Другие формы уравнения можно получить, производя унитарное преобразование волновой функции и матриц Дирака.

**Пример 6.12.** Пусть решение уравнения Дирака для свободной частицы описывает состояние с определенным импульсом  $\mathbf{p}$  и энергией  $\mathcal{E}$ . Эти величины существуют одновременно, так как их операторы коммутируют. Найти зависимость  $\mathcal{E}(p)$ , следующую из уравнения.

**Решение.** Для состояний с определенными  $p$  и  $\mathcal{E}$  имеем

$$\widehat{p}\Psi_p = p\Psi_p, \quad \widehat{\mathcal{H}}\Psi_p = \mathcal{E}\Psi_p,$$

где  $\widehat{\mathcal{H}}$  дается формулой (6.111), а  $\Psi_p$  — четырехкомпонентная волновая функция (биспинор). Из написанных равенств имеем

$$(1) \quad [c(\widehat{\alpha} \cdot p) + \widehat{\beta}mc^2]\Psi_p = \mathcal{E}\Psi_p.$$

Умножив обе части последнего равенства на  $[c(\widehat{\alpha} \cdot p) + \widehat{\beta}mc^2]$  и воспользовавшись равенствами (6.115), получим искомую зависимость:

$$(2) \quad c^2p^2 + m^2c^4 = \mathcal{E}^2.$$

Из этого равенства следует, что каждому значению абсолютной величины импульса соответствует два значения энергии частицы:

$$(3) \quad \mathcal{E}(p) = \pm \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}.$$

В отличие от классической релятивистской механики, в данном случае невозможно просто исключить решения с отрицательной энергией как не имеющие физического смысла, так как без этих решений система волновых функций дираковского гамильтониана потеряет свойство полноты. Без этого свойства теряет силу вся традиционная вероятностная интерпретация волновой функции и других квантовомеханических величин. В то же время очевидно, что данные опыта не содержат никаких указаний, в том числе и в квантовой области, на существование частиц с отрицательными энергиями. В этом случае, в частности, были бы возможны спонтанные переходы из состояний с положительной энергией в лежащие ниже по шкале энергий состояния с отрицательной энергией.

Первая интерпретация электронов с отрицательной энергией принадлежит Дираку. Он предположил, что в основном состоянии электронной системы все одноэлектронные состояния с отрицательной энергией заполнены, а состояния с положительной энергией свободны. Согласно принципу Паули, переходы в заполненные состояния невозможны. Но пришлось также предположить, что заполненный отрицательный «фон» не создает электрического поля и не дает вклада в энергию и импульс системы.

Если вакуумное состояние всей системы электронейтрально, то незаполненное состояние («дырка») в дираковском фоне будет воспринято наблюдателем как частица с положительной энергией и зарядом, противоположном по знаку заряду электрона. Поглощение фотона с энергией  $\hbar\omega > 2mc^2$  электроном с отрицательной энергией и переход его в свободное состояние с  $\mathcal{E} > mc^2$  можно интерпретировать как рождение двух

частиц с одинаковыми положительными массами  $m > 0$  и зарядами  $\pm e$  противоположных знаков. Таким образом, теория Дирака и необходимость интерпретации состояний с отрицательной энергией привели к предсказанию существования **античастиц** — так именуется частицы с положительными энергиями, но противоположными по знаку (по отношению к «частицам») электрическими зарядами и спиновыми магнитными моментами. Первой античастицей, открытой экспериментально в космических лучах Андерсоном в 1932 г., был положительный электрон — позитрон. Затем были открыты мюоны и пионы с обоими знаками зарядов и в 50-х годах прошлого века — антипротон и антинейтрон. Сейчас не вызывает сомнений тот факт, что каждая частица имеет свою античастицу (электронейтральные частицы, не имеющие магнитного момента, в некоторых случаях совпадают со своими античастицами. Пример такой частицы — фотон). В настоящее время «дырочная» интерпретация Дирака сохранила лишь историческое значение, но теория Дирака и его уравнение получили многочисленные подтверждения и лежат в основе релятивистской квантовой механики. ■

Если на релятивистский фермион действует внешнее электромагнитное поле, то оно может быть учтено, как и в нерелятивистском случае, путем замены в (6.111)  $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - (e/c)\hat{A}$  и добавлением к гамильтониану слагаемого  $e\hat{\varphi}$ , где  $\hat{\varphi}$  — оператор скалярного потенциала (в координатном представлении оператор умножения на функцию координат). В итоге гамильтониан примет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = c\hat{\alpha} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\hat{A} \right) + \hat{\beta}mc^2 + e\varphi(\mathbf{r}). \quad (6.116)$$

Оператор  $\hat{A}$  может включать в себя как классическое внешнее магнитное поле, так и квантованный поперечный векторный потенциал, описывающий рождение и уничтожение фотонов.

**Пример 6.13.** Вывести из уравнения Дирака с гамильтонианом (6.116) уравнение непрерывности для плотности и тока вероятности релятивистской частицы. Построить плотность вероятности заданного значения координат частицы как неотрицательную величину  $\rho(\mathbf{r}, t) \geq 0$ , удовлетворяющую закону сохранения вероятности  $\int \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = \text{const}$ , где интеграл распространен на все трехмерное пространство.

**Решение.** Запишем уравнение Дирака для  $\Psi$  и эрмитовски сопряженной волновой функции  $\Psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ ,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ c\hat{\alpha} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\hat{A} \right) + \hat{\beta}mc^2 + e\varphi(\mathbf{r}) \right\} \Psi, \quad (6.117)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi^\dagger \left\{ -c\hat{\alpha} \cdot \left( \hat{p} + \frac{e}{c}\hat{A} \right) + \hat{\beta}mc^2 + e\varphi(\mathbf{r}) \right\}, \quad (6.118)$$

где во втором уравнении дифференциальный оператор  $\hat{p}$  действует на функцию  $\Psi^\dagger$ , стоящую слева от него. Составим билинейную величину

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^4 |\psi_\lambda|^2 = \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (6.119)$$

и продифференцируем ее по времени с помощью соотношений (6.118). Получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \Psi + \Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{c}{i\hbar} [(\hat{p}\Psi^\dagger) \cdot \hat{\alpha}\Psi + \Psi^\dagger \hat{\alpha} \cdot \hat{p}\Psi] = -\nabla \cdot \mathbf{j},$$

где плотность тока вероятности

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = c\Psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\alpha}\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (6.120)$$

— действительный вектор. Полная вероятность сохраняется,  $\int \Psi^\dagger \Psi d^3r = \text{const}$ , если плотность тока убывает быстрее, чем  $r^{-2}$ . Плотность электрического тока выражается как произведение заряда частицы на плотность тока вероятности:  $\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . ■

**Пример 6.14.** Выполнить предельный переход от уравнения Дирака во внешнем поле с гамильтонианом (6.116) к уравнению Паули, в котором учитывается первая релятивистская поправка порядка  $1/c$ .

**Решение.** Чтобы устранить энергию покоя частицы из уравнения движения, выполним подстановку

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar},$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и  $\chi(\mathbf{r}, t)$  — двухкомпонентные функции (спиноры). Подставив  $\Psi$  в уравнение (6.109) с гамильтонианом (6.116) и используя представление (6.112) матриц Дирака, получим систему уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} - U\varphi &= c\hat{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \chi, \\ i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} + (2mc^2 - U)\chi &= c\hat{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \varphi. \end{aligned}$$

Здесь мы рассматриваем  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  как обычную функцию координат и времени (оператор умножения), а скалярный потенциал электрического поля включен в потенциальную энергию  $U$ .

В нерелятивистском случае имеем неравенство  $|U| \ll mc^2$ . Кроме того, оператор  $i\hbar\partial/\partial t$ , будучи применен к волновым функциям  $\varphi, \chi$ , дает множитель порядка  $|\mathcal{E} - mc^2| \ll mc^2$ . Поэтому во втором уравнении (1) в левой части можно оставить самое большое слагаемое  $2mc^2\chi$  и получить

$$(2) \quad \chi = \frac{1}{2mc} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left( \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi,$$

что дает оценку  $|\chi/\varphi| \approx p/mc \ll 1$ . Подставляем (2) в первое уравнение (1) и преобразуем квадрат оператора:

$$(3) \quad \left[ \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left( \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] = \widehat{\sigma}_\mu \widehat{\sigma}_\nu \left( \widehat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left( \widehat{p}_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) = \\ = (\delta_{\mu\nu} + ie_{\mu\nu\kappa} \widehat{\sigma}_\kappa) \left( \widehat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left( \widehat{p}_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) = \left( \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{H}.$$

Здесь использованы соотношения  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$  и

$$\widehat{\sigma}_\mu \widehat{\sigma}_\nu + \widehat{\sigma}_\nu \widehat{\sigma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad [\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \times \widehat{\boldsymbol{\sigma}}] = i\widehat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \widehat{\sigma}_\mu \widehat{\sigma}_\nu = \delta_{\mu\nu} + ie_{\mu\nu\kappa} \widehat{\sigma}_\kappa \quad (6.121)$$

для двухрядных матриц Паули.

После подстановки (3) в первое уравнение (1) получим уравнение Паули

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}} \varphi, \quad \widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \left( \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + U - \frac{e\hbar}{2mc} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{H}. \quad (6.122)$$

Слагаемое  $-(e\hbar/2mc)\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{H} = -\widehat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}$  описывает взаимодействие спинового магнитного момента электрона с внешним магнитным полем. ■

**Пример 6.15.** На основе результатов двух предыдущих примеров записать в приближении Паули плотность вероятности и плотность тока вероятности через спинор  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .

**Решение.** С помощью (6.119) находим

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 |\varphi_\lambda|^2 = \varphi^\dagger(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t), \quad (6.123)$$

так как малый спинор  $\chi$  дает поправку порядка  $1/c^2$ . В том же приближении имеем

$$(1) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = c(\varphi^\dagger \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \chi + \chi^\dagger \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \varphi).$$

Подставим в (1) выражение для  $\chi$  в виде формулы (2) из предыдущего примера, а также

$$(2) \quad \chi = \frac{1}{2mc} \left( i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \varphi^\dagger \hat{\sigma}.$$

После приведения подобных членов с использованием (6.121) находим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}(\varphi^\dagger\nabla\varphi - (\nabla\varphi^\dagger)\varphi) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}\varphi^\dagger\varphi + \frac{\hbar}{2m}\nabla \times (\varphi^\dagger\hat{\sigma}\varphi), \quad (6.124)$$

что находится в согласии с результатом задачи 4.130 (но в той задаче не учитывался спин и поэтому отсутствует спиновое слагаемое). ■

**Пример 6.16.** Пусть движение релятивистской частицы описывается уравнением Дирака. Показать, что в потенциальном поле с центральной симметрией орбитальный момент частицы  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  относительно центра поля не сохраняется. Показать также, что физическая величина  $\mathbf{J}$ , оператор которой выражается в виде

$$\hat{\mathbf{J}} = -i\mathbf{r} \times \nabla + \frac{1}{2}\hat{\Sigma}, \quad \hat{\Sigma} = -\frac{i}{2}\hat{\alpha} \times \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} \quad (6.125)$$

представляет собой интеграл движения, и ее можно интерпретировать, следовательно, как полный момент импульса, сохраняющийся ввиду изотропии пространства. Таким образом, оператор  $(1/2)\hat{\Sigma}$  можно приписать внутреннему моменту импульса (спину) частицы.

**Решение.** Оба оператора,  $\hat{\mathbf{l}} = -i\mathbf{r} \times \nabla$  и  $\hat{\Sigma}$ , не зависят в представлении Шредингера от времени, поэтому условием сохранения соответствующих физических величин является их коммутативность с дираковским гамильтонианом

$$(1) \quad \hat{\mathcal{H}} = c(\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta}mc^2 + U(\mathbf{r}).$$

Вычисляем коммутаторы. Оба оператора коммутируют с  $U$  и с диагональной матрицей  $\hat{\beta}$ , поэтому

$$(2) \quad [\hat{\mathcal{H}}, \hat{l}_\mu] = \frac{c}{\hbar} \epsilon_{\mu\nu\kappa} \hat{\alpha}_\lambda (\hat{p}_\lambda x_\nu - x_\nu \hat{p}_\lambda) \hat{p}_\kappa = -ice_{\mu\lambda\kappa} \hat{\alpha}_\lambda \hat{p}_\kappa = -ic[\hat{\alpha} \times \hat{\mathbf{p}}]_\mu \neq 0,$$

где использованы перестановочные соотношения Гейзенберга (Д3.23). Таким образом, орбитальный момент не сохраняется.



Далее, используя представление (6.125)  $\widehat{\Sigma}$  через матрицы  $\widehat{\alpha}$ , находим

$$(3) \quad \frac{1}{2} [\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\Sigma}_\mu] = \frac{ic}{4} \widehat{p}_\lambda e_{\mu\nu\kappa} (\widehat{\alpha}_\nu \widehat{\alpha}_\kappa \widehat{\alpha}_\lambda - \widehat{\alpha}_\lambda \widehat{\alpha}_\nu \widehat{\alpha}_\kappa) = \\ = \frac{ic}{2} \widehat{p}_\lambda e_{\mu\nu\kappa} (\widehat{\alpha}_\nu \delta_{\kappa\lambda} - \widehat{\alpha}_\kappa \delta_{\lambda\nu}) = ic [\widehat{\alpha} \times \widehat{\mathbf{p}}]_\mu \neq 0.$$

Спин релятивистской частицы в центральном поле тоже не сохраняется. Но оператор полного момента  $\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{l}} + (1/2)\widehat{\Sigma}$  коммутирует с гамильтонианом, полный момент представляет собой интеграл движения (хотя его проекции одновременно не имеют определенных значений). ■

**Пример 6.17.** *Получить все решения уравнения Дирака для свободной частицы, отвечающие заданному импульсу  $\mathbf{p}$ , но разным знакам энергии и разным значениям проекции спина. Какие значения проекции спина возможны при заданных импульсе и энергии?*

**Решение.** Ищем решение уравнения Дирака для свободной частицы в виде

$$\Psi_{\mathbf{p}} = uA \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathcal{E}t)/\hbar] = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} A \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathcal{E}t)/\hbar],$$

где  $A$  — нормировочный множитель координатной волновой функции,  $u$  — не зависящий от координат и времени четырехкомпонентный биспинор, на который наложим условие нормировки

$$(2) \quad u^\dagger u = 1.$$

Множитель  $A = (2\pi\hbar)^{-3/2}$ , если нормировка произведена на  $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ , и  $A = \mathcal{V}^{-1/2}$ , если использованы условия периодичности, как для фотонов в разделе 6.1.

Подставив (1) в уравнение Дирака, получим условие, которому должен удовлетворять биспинор  $u$ :

$$(3) \quad (c\widehat{\alpha} \cdot \widehat{\mathbf{p}} + \widehat{\beta}mc^2 - \mathcal{E})u = 0,$$

или, если использовать представление матриц Дирака через матрицы Паули (6.112),

$$(4) \quad \begin{cases} c(\widehat{\sigma} \cdot \widehat{\mathbf{p}})\chi + (mc^2 - \mathcal{E})\varphi = 0, \\ c(\widehat{\sigma} \cdot \widehat{\mathbf{p}})\varphi + (mc^2 + \mathcal{E})\chi = 0. \end{cases}$$

Из (4) следуют равенства

$$(5) \quad \varphi = \frac{c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\chi}{\mathcal{E} - mc^2}, \quad \chi = \frac{c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\varphi}{\mathcal{E} + mc^2}$$

или

$$\frac{c^2(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})^2}{\mathcal{E}^2 - m^2c^4} = \frac{c^2p^2}{\mathcal{E}^2 - m^2c^4} = 1,$$

откуда находим возможные значения энергии:

$$(6) \quad \mathcal{E}(p) = \pm \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}.$$

Вопрос об интерпретации отрицательных значений энергии уже обсуждался в примере 6.12.

Уравнение Дирака позволило только установить связь между спинорами  $\chi$  и  $\varphi$ . Для их вычисления нужно потребовать, чтобы в рассматриваемом состоянии имела определенное значение проекция спина на некоторое направление  $\boldsymbol{n}$ . С помощью оператора спина (см. пример 6.16) записываем соответствующее уравнение  $(1/2)(\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}})u = \mu u$  или систему уравнений для двух спиноров

$$(7) \quad (1/2)(\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\varphi = \mu\varphi, \quad (1/2)(\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\chi = \mu\chi,$$

где  $\mu$  — собственное значение проекции спина. Сравнивая (7) и (4), приходим к выводу, что при заданном значении вектора импульса  $\boldsymbol{p}$  спин может иметь определенное значение проекции только на направление импульса  $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/p$ , так как проекции оператора спина  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  на разные оси не коммутируют и уравнения (4), (7) при произвольном  $\boldsymbol{n}$  не могут удовлетворяться одновременно.

Уравнения (7) одинаковы. Явный вид оператора  $(\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$  легко записать с помощью формул (6.113):

$$(8) \quad (\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

где углы  $\theta$ ,  $\phi$  определяют направление оси квантования (импульса) в некоторой инерциальной системе координат  $(x, y, z)$ . Решая уравнение

$$(9) \quad (1/2)(\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})w_\mu = \mu w_\mu, \quad w_\mu = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

находим собственные значения проекций спина  $\mu = \pm 1/2$  и собственные спиноры

$$(10) \quad w_{1/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad w_{-1/2} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что любая волновая функция в квантовой механике определена с точностью до фазового множителя вида  $e^{i\alpha}$ ,  $\alpha$  — действительная постоянная. Если ось  $Oz$  совмещена с направлением импульса  $\mathbf{n}$ , то  $\theta = 0$  и спиноры можно записать в виде

$$(11) \quad w_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

опустив фазовые множители  $e^{\pm i\phi/2}$ .

Собирая воедино полученные результаты, приходим к выводу, что заданному импульсу  $\mathbf{p}$  соответствует 4 разных биспинора, описывающих разные физические состояния релятивистской частицы. Нумеруя их индексом  $\lambda$ , имеем

$\lambda$	1	2	3	4
состояние	$+, 1/2$	$+, -1/2$	$-, 1/2$	$-, -1/2$

Четыре пары величин во второй строке указывают знак энергии и значение проекции спина. Биспиноры имеют вид

$$(12) \quad u_\lambda(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} w_\mu \\ \frac{2\mu c p}{\mathcal{E} + mc^2} w_\mu \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} \geq mc^2, \quad \lambda = 1, 2;$$

$$u_\lambda(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{2\mu c p}{\mathcal{E} - mc^2} w_\mu \\ w_\mu \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} \leq -mc^2, \quad \lambda = 3, 4.$$

Здесь  $w_\mu$  дается выражениями (10) или (11), множитель

$$N = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{mc^2}{2\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}}}$$

обеспечивает условие нормировки (2). Отметим, что все 4 биспинора соответствуют разным собственным значениям эрмитовых операторов — га-

мильтониана и проекции спина на импульс. Поэтому они все взаимно ортогональны и удовлетворяют условию полноты:

$$(13) \quad u_{\lambda'}^\dagger u_\lambda = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda=1}^4 u_{\lambda'j}^* u_{\lambda k} = \delta_{jk},$$

где индексы  $j, k = 1, 2, 3, 4$  нумеруют компоненты биспинора. В дираковских обозначениях

$$(14) \quad \langle \lambda' | \lambda \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda=1}^4 |\lambda\rangle \langle \lambda| = \hat{1}.$$

### Оператор взаимодействия релятивистской частицы с фотонами.

Как и в случае нерелятивистской системы (см. раздел 6.2), нужно выделить из дираковского гамильтониана (6.116), учитывающего взаимодействие с внешним полем, слагаемые, связывающие частицу с фотонной подсистемой. Оператор (6.116) содержит единственное такое слагаемое

$$\hat{V} = -e\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}), \quad (6.126)$$

где  $\hat{\alpha}$  — матрица Дирака (6.112),  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  — оператор векторного потенциала (6.13). При наличии системы дираковских частиц нужно взять сумму выражений (6.126) по всем частицам:

$$\hat{V} = -\sum_{a=1}^N e_a \hat{\alpha}_a \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_a). \quad (6.127)$$

Невозмущенная волновая функция, как и в нерелятивистском случае, представляет собой произведение векторов состояний частиц и электромагнитного поля.

**Пример 6.18.** *Фотон с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  и поляризацией  $\mathbf{e}_0$  рассеивается на свободном электроне, который первоначально имел пренебрежимо малый (нулевой) импульс. Вычислить вероятность в единицу времени и дифференциальное сечение процесса, в результате которого фотон перейдет в состояние с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\mathbf{e}$ . Провести усреднение по поляризациям начального фотона и по спиновым состояниям электрона. Проанализировать различные соотношения между  $\hbar\omega_0$  и  $mc^2$  (эффект Комптона).*

**Решение.** Процесс с двумя фотонными состояниями рассчитывается во втором порядке теории возмущений. Задача сходна с рассмотренными ранее случаями рассеяния фотонов связанными (атомными) электронами. Вероятность перехода в единицу времени дается формулой (1) из решения задачи 6.67, в которой надо использовать оператор возмущения (6.126):

$$(1) \quad dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_l \frac{\langle f | \widehat{V} | l \rangle \langle l | \widehat{V} | i \rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l} \right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f) \frac{\mathcal{V} k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3},$$

где индексами  $i, l, f$  обозначены начальное, промежуточное и конечное состояния всей системы (электрон + фотоны).

При решении задачи 6.64 уже обсуждались два типа промежуточных состояний:

1. При первом переходе  $i \rightarrow l$  электрон поглощает первичный фотон, а на втором этапе  $l \rightarrow f$  испускает рассеянный фотон.
2. При первом переходе  $i \rightarrow l$  электрон испускает рассеянный фотон, а на втором переходе  $l \rightarrow f$  поглощает первичный фотон.

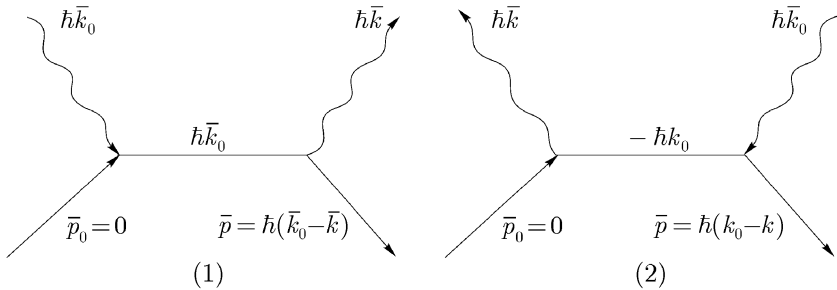


Рис. 6.3

Во всех трех состояниях электрон является свободным, и его можно описывать волновыми функциями типа плоской волны (см. пример 6.17). При этом структура матричных элементов  $\langle f | \widehat{V} | l \rangle$ ,  $\langle l | \widehat{V} | i \rangle$  такова, что интегрирование по координатам производится от произведения трех экспонент и обеспечивает закон сохранения импульса при каждом переходе:

$$(2) \quad \langle l | \widehat{V} | i \rangle \propto \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_l \mp \hbar \mathbf{k} - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{r} \right\} d^3 r = \mathcal{V} \delta_{\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_i \pm \hbar \mathbf{k}},$$

где знак минус соответствует поглощению фотона, а знак плюс — его испусканию. С учетом сохранения импульса переходы типа 1 и 2 можно изобра-

зить графически (**диаграммы Фейнмана** на рис. 6.3). Сплошными линиями изображены состояния электрона, волнистыми — фотонов, с указанием их импульсов. Каждой вершине, в которой сходятся три линии, нужно сопоставить матричный элемент оператора  $\widehat{V}$ . В каждой вершине выполняется закон сохранения импульса, но не энергии. Энергия сохраняется лишь для всего процесса в целом.

Вычислим значения величин, входящих в (1). Очевидно, что начальная энергия системы  $\epsilon_i = mc^2 + \hbar\omega_0$ . Введем обозначение  $\epsilon'$  для энергии промежуточного состояния, соответствующей диаграмме 1, и  $\epsilon''$  для диаграммы 2. Тогда

$$(3) \quad \begin{aligned} \epsilon' &= \mathcal{E}', & \epsilon'' &= \mathcal{E}'' + \hbar\omega_0 + \hbar\omega, \\ \text{где } \mathcal{E}' &= \pm\sqrt{m^2c^4 + (\hbar\omega_0)^2}, & \mathcal{E}'' &= \pm\sqrt{m^2c^4 + (\hbar\omega)^2} \end{aligned}$$

— энергии электрона в промежуточных состояниях. Они могут иметь оба знака. Наконец, для разностей энергий в знаменателях (1) получаем

$$(4) \quad \epsilon_i - \epsilon' = mc^2 + \hbar\omega_0 - \mathcal{E}', \quad \epsilon_i - \epsilon'' = mc^2 - \hbar\omega - \mathcal{E}''.$$

Далее вычисляем матричные элементы, обозначив для краткости через  $F$  сумму по  $l$  в формуле (1):

$$\begin{aligned} F &= \sum_l \frac{\langle f | \widehat{V} | l \rangle \langle l | \widehat{V} | i \rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l} = \\ &= \frac{2\pi\hbar c^2 e^2}{\mathcal{V}\sqrt{\omega\omega_0}} \sum_{\lambda=1}^4 \left\{ \frac{\langle u | \widehat{\alpha} \cdot \mathbf{e}^* | u'_\lambda \rangle \langle u'_\lambda | \widehat{\alpha} \cdot \mathbf{e}_0 | u_0 \rangle}{mc^2 + \hbar\omega_0 - \mathcal{E}'_\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle u | \widehat{\alpha} \cdot \mathbf{e}_0 | u''_\lambda \rangle \langle u''_\lambda | \widehat{\alpha} \cdot \mathbf{e}^* | u_0 \rangle}{mc^2 - \hbar\omega - \mathcal{E}''_\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь суммирование по  $\lambda$  означает учет двух знаков энергии и двух спиновых состояния для каждого биспинора  $u'$ ,  $u''$ . Указанное суммирование удобно выполнить, переведя всю зависимость от  $\lambda$  в числитель. Воспользуемся дираковским гамильтонианом (6.111) и запишем

$$(6) \quad (c\hbar\widehat{\alpha} \cdot \mathbf{k}_0 + \widehat{\beta}mc^2)u'_\lambda = \mathcal{E}'_\lambda u'_\lambda, \quad (-c\hbar\widehat{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \widehat{\beta}mc^2)u''_\lambda = \mathcal{E}''_\lambda u''_\lambda.$$

Умножив в (5) числитель и знаменатель первой дроби на  $mc^2 + \hbar\omega_0 + \mathcal{E}'_\lambda$ ,

а второй дроби на  $mc^2 - \hbar\omega + \mathcal{E}'_\lambda$ , и воспользовавшись (6), будем иметь

$$(7) \quad F = \frac{2\pi\hbar c^2 e^2}{\psi\sqrt{\omega\omega_0}} \sum_{\lambda=1}^4 \left\{ \frac{\langle u|\hat{\alpha}\cdot e^*(mc^2 + \hbar\omega_0 + c\hbar\hat{\alpha}\cdot\mathbf{k}_0 + \hat{\beta}mc^2)|u'_\lambda\rangle\langle u'_\lambda|\hat{\alpha}\cdot e_0|u_0\rangle}{(mc^2 + \hbar\omega_0)^2 - \mathcal{E}'^2} + \right. \\ \left. + \frac{\langle u|\hat{\alpha}\cdot e_0(mc^2 - \hbar\omega - c\hbar\hat{\alpha}\cdot\mathbf{k} + \hat{\beta}mc^2)|u''_\lambda\rangle\langle u''_\lambda|\hat{\alpha}\cdot e^*|u_0\rangle}{(mc^2 - \hbar\omega)^2 - \mathcal{E}''^2} \right\}.$$

Для упрощения этих выражений используем условие полноты биспиноров (уравнение (14) примера 6.17), а также соотношения (6) для начального состояния электрона, которые дают  $\hat{\beta}u_0 = u_0$ , и правило антикоммутиации матриц Дирака (6.115). В итоге получаем

$$(8) \quad F = \frac{\pi\hbar e^2}{\psi m\sqrt{\omega\omega_0}} \{2(e_0 \cdot e^*)\langle u|u_0\rangle + \langle u|(\hat{\alpha}\cdot e^*)(\hat{\alpha}\cdot \mathbf{n}_0)(\hat{\alpha}\cdot e_0) + \\ + (\hat{\alpha}\cdot e_0)(\hat{\alpha}\cdot \mathbf{n})(\hat{\alpha}\cdot e^*)|u_0\rangle\},$$

где единичные векторы  $\mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{n}$  указывают направление импульсов первичного и рассеянного фотонов.

Если направления спина электрона в начальном и конечном состояниях не фиксируются, то квадрат модуля матричного элемента (8) нужно усреднить по начальным и просуммировать по конечным состояниям. Очевидно, что начальная энергия электрона  $\mathcal{E}_0 = mc^2$  и его конечная энергия  $\mathcal{E} = mc^2 + \hbar(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$  положительны. Поэтому усредненный квадрат модуля

$$|F|^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi\hbar e^2}{\psi m\sqrt{\omega\omega_0}} \right)^2 \sum_{\lambda_0=1}^2 \sum_{\lambda=1}^2 |\langle u|\hat{B}|u_0\rangle|^2,$$

$$\text{где } \hat{B} = 2(e_0 \cdot e^*)\hat{1} + (\hat{\alpha}\cdot e^*)(\hat{\alpha}\cdot \mathbf{n}_0)(\hat{\alpha}\cdot e_0) + (\hat{\alpha}\cdot e_0)(\hat{\alpha}\cdot \mathbf{n})(\hat{\alpha}\cdot e^*)$$

— оператор, входящий в (8). Суммирование производится только по двум состояниям, относящимся к положительным энергиям. Чтобы снова воспользоваться полнотой системы биспиноров, удобно ввести операторы проецирования на состояния с положительной энергией

$$(10) \quad \hat{P}_0 = \frac{\mathcal{E}_0 + \hat{\mathcal{H}}_0}{2\mathcal{E}_0}, \quad \hat{P} = \frac{\mathcal{E} + \hat{\mathcal{H}}}{2\mathcal{E}},$$

$$\text{где } \hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\beta}mc^2, \quad \hat{\mathcal{H}} = c\hbar\hat{\alpha}\cdot(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) + \hat{\beta}mc^2$$

— гамильтонианы начального и конечного состояний электрона в импульсном представлении. Имеем для состояний с положительной энерги-

ей  $\widehat{P}_0 u_0 = u_0$ ,  $\widehat{P}u = u$ , тогда как для состояний с отрицательной энергией  $\widehat{P}_0 u_0 = \widehat{P}u = 0$ . С использованием операторов проецирования распространяем суммирование в (9) на все четыре состояния и получаем

$$(11) \quad \overline{|F|^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2 e^4}{2\mathcal{V}^2 m^2 \omega \omega_0} \sum_{\lambda_0=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 \langle \lambda | \widehat{B} \widehat{P}_0 | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_0 | \widehat{B}^\dagger \widehat{P} | \lambda \rangle = \\ = \frac{\pi^2 \hbar^2 e^4}{2\mathcal{V}^2 m^2 \omega \omega_0} Sp\{\widehat{B} \widehat{P}_0 \widehat{B}^\dagger \widehat{P}\}.$$

Используем значение шпура, вычисленного в задаче 6.77<sup>•</sup> для квантов с линейной поляризацией:

$$(12) \quad Sp\{\widehat{B} \widehat{P}_0 \widehat{B}^\dagger \widehat{P}\} = \frac{8mc^2}{\mathcal{E}} (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e})^2 + \frac{2\hbar(\omega_0 - \omega)}{\mathcal{E}} (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0).$$

Вычислим дифференциальное сечение рассеяния фотона на свободном электроне, для чего необходимо разделить (1) на плотность потока падающих фотонов  $c/\mathcal{V}$  и проинтегрировать по энергиям рассеянного фотона с использованием дельта-функции:

$$(13) \quad d\sigma = \frac{\mathcal{V}}{c} \int d\overline{w_{fi}}.$$

Чертой обозначено выполненное ранее усреднение по начальным и суммирование по конечным поляризациям электрона. Из закона сохранения импульса будем иметь

$$(14) \quad \epsilon_i - \epsilon_f = mc^2 + \hbar(\omega_0 - \omega) - \sqrt{m^2 c^4 + \hbar^2(\omega_0^2 + \omega^2 - 2\omega_0\omega \cos \theta)} = 0,$$

где  $\theta$  — угол рассеяния кванта. При фиксированном угле рассеяния получаем

$$(15) \quad \frac{d(\epsilon_i - \epsilon_f)}{d(\hbar\omega)} = \frac{mc^2 + \hbar\omega_0(1 - \cos \theta)}{\mathcal{E}} = \frac{mc^2\omega_0}{\mathcal{E}\omega},$$

что позволяет записать с помощью соотношения (1.209)

$$(16) \quad \delta(\epsilon_i - \epsilon_f) = \frac{\mathcal{E}\omega}{mc^2\omega_0} \delta(\hbar\omega_{sc} - \hbar\omega).$$



Здесь

$$(17) \quad \omega_{sc} = \frac{\hbar\omega_0}{1 + \frac{\hbar\omega_0}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

— частота рассеянного фотона, выраженная через частоту первичного фотона и угол рассеяния (см. ответ к задаче 6.73). Используя последовательно формулы (1), (5)–(12) и (16), получим искомое сечение (**формулу Клейна–Нишины–Тамма**):

$$d\sigma = \frac{1}{4} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[ \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} - 2 + 4(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e})^2 \right] d\Omega. \quad (6.128)$$

Здесь  $\omega$  — частота рассеянного кванта, которая дается правой частью равенства (17). ■

### Метод эквивалентных фотонов.

**Пример 6.19.** Частица с зарядом  $q$  и релятивистским фактором  $\gamma = \mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$  совершает классическое движение по прямолинейной траектории. Показать, что ее электромагнитное поле совпадает с набором плоских монохроматических волн в свободном пространстве тем точнее, чем больше ее релятивистский фактор. Представить поле частицы в виде набора «эквивалентных фотонов» и найти их плотность  $n(\omega)$  в расчете на единичный интервал частот.

**Решение.** Рассмотрим свойства гармоник Фурье (см. задачу 5.144) в сильно релятивистском случае:

$$(1) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = -i8\pi^2 q \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \omega^2/c^2} \left( \mathbf{k} - \frac{\omega\mathbf{v}}{c^2} \right), \quad \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}.$$

Наличие дельта-функции в (1) дает дисперсионное соотношение  $\omega(\mathbf{k}) = kv \cos\theta$ . Знаменатель  $k^2 - \omega^2/c^2 = k^2[1 - (v^2/c^2) \cos^2\theta]$  показывает, что наибольшую величину имеют гармоники с волновыми векторами, направленными вдоль скорости  $\mathbf{v}$  в пределах угла  $\theta_c \approx 1/\gamma \ll 1$ . При заданном  $\mathbf{k}$  находим отличие частоты гармоник Фурье рассматриваемого поля от частоты фотона:

$$(2) \quad \omega_{ph}(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}) = \omega_{ph}[1 - (v/c) \cos\theta] \approx \omega_{ph}/\gamma^2.$$

Это отличие мало в существенной области углов при  $\gamma \gg 1$ . Сравним также составляющие электрического поля, продольную и поперечную относительно скорости частицы. Имеем

$$(3) \quad \left| \frac{\mathbf{E}_{k\omega}^{\parallel}}{\mathbf{E}_{k\omega}^{\perp}} \right| \approx \frac{1}{\gamma^2 \theta_c} \approx \frac{1}{\gamma} \ll 1$$

при характерных углах. Следовательно, при  $\gamma \gg 1$  обе напряженности поля обладают свойством поперечности, подобно волнам в вакууме.

Для вычисления плотности числа эквивалентных фотонов воспользуемся координатным представлением полей в плоскости  $z = 0$ , перпендикулярной скорости частицы (см. задачи 4.34, 5.145):

$$(4) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp}, t) = -\frac{q(\mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{v}t)}{(v^2 t^2 + r_{\perp}^2/\gamma^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{q\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{v}}{(v^2 t^2 + r_{\perp}^2/\gamma^2)^{3/2}}.$$

Произведем разложение напряженностей поля на монохроматические компоненты:

$$(5) \quad \mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp}, t) e^{i\omega t} dt =$$

$$= -\frac{2q}{\gamma v^2 r_{\perp}} \left[ |\omega| r_{\perp} K_1 \left( \frac{|\omega| r_{\perp}}{\gamma v} \right) + i \frac{\omega \mathbf{v}}{|\omega|} K_0 \left( \frac{|\omega| r_{\perp}}{\gamma v} \right) \right],$$

$$(6) \quad \mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}_{\perp}) = \frac{2q|\omega|}{\gamma v^2 c r_{\perp}} [\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{v}] K_1 \left( \frac{|\omega| r_{\perp}}{\gamma v} \right).$$

Здесь мы использовали интегральные представления модифицированных функций Бесселя [Абрамовиц и Стиган (1979)] и рекуррентные соотношения между ними.

Плотность числа фотонов  $n(r_{\perp}, \omega)$ , приходящихся на единичный интервал частоты и движущихся с прицельным параметром  $r_{\perp}$  (т.е. на расстоянии  $r_{\perp}$  от классической траектории частицы) можно определить из равенства

$$(7) \quad \frac{c}{4\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^{\infty} n(r_{\perp}, \omega) \hbar \omega d\omega.$$

Вычисляя левую часть с помощью формул (5), (6), находим

$$(8) \quad n(r_{\perp}, \omega) = \frac{q^2}{\pi^2 c^3 \gamma^2 \hbar} \omega K_1^2 \left( \frac{|\omega| r_{\perp}}{\gamma v} \right), \quad \omega > 0.$$

Понятие прицельного параметра фотона имеет смысл только при условии малости его волнового пакета по сравнению с самим прицельным параметром, т. е. при  $\lambda = 2\pi c/\omega \ll r_{\perp}$ , или при  $\omega \gg 2\pi c/r_{\perp}$ . Спектр фотонов (8) обрезается при  $\omega \gg \gamma c/r_{\perp}$ .

Поскольку классическое описание движения частицы является приближенным, прицельный параметр  $r_{\perp}$  не может быть сколь угодно малым. Предельно локализации частицы является ее комптоновская длина волны  $\Lambda_C$ , в противном случае задача становится многочастичной. Поэтому в формуле (8) следует считать

$$(9) \quad r_{\perp} \geq r_{\min} = \kappa \Lambda_C = \kappa \hbar / M c,$$

где  $\kappa$  — безразмерная величина порядка единицы. При этом спектр фотонов обрезается на энергиях  $\hbar \omega_{\max} \approx \mathcal{E}/\kappa$  порядка энергии частицы.

Полное число эквивалентных фотонов данной частоты (независимо от параметра удара) получим путем интегрирования (8) по плоскости, перпендикулярной скорости частицы:

$$(10) \quad n(\omega) = \int_{r_{\min}}^{\infty} n(r_{\perp}, \omega) 2\pi r_{\perp} dr_{\perp} = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{\hbar c \omega} \left\{ z_m K_0(z_m) K_1(z_m) + \frac{1}{2} z_m^2 K_0^2(z_m) - \frac{1}{2} z_m^2 K_1^2(z_m) \right\}, \\ z_m = \kappa \frac{\hbar \omega}{\mathcal{E}}.$$

Интегрирование выполнено с помощью рекуррентных соотношений между функциями Макдональда. Низкочастотная асимптотика распределения фотонов имеет вид

$$n(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{\hbar c} \frac{1}{\omega} \ln \left( \frac{\mathcal{E}}{\hbar \omega} \right). \quad (6.129)$$

Здесь опущены члены порядка 1 по сравнению с  $\ln(\mathcal{E}/\hbar \omega) \gg 1$ . ■

Метод эквивалентных фотонов позволяет рассматривать различные радиационные процессы с участием ультррелятивистских частиц как результат комптоновского (или томсоновского) рассеяния на них псевдофотонов

с образованием реальных фотонов. При этом для расчета сечений в некоторых случаях необходимо перейти в систему отсчета, сопутствующую излучающей частице (см. задачи 6.81 и далее).

Рекомендуемая литература: [Гайтлер (1956)], [Мак-Коннел (1962)], [Ахиезер и Берестецкий (1981)], [Берестецкий и др. (1989)], [Фейнман (2000)], [Ицикзон и Зюбер (1984)], [Дирак (1990)], [Боголюбов и Ширков (1980)], [Джексон (1975)].

## Задачи

**6.71.** Указать плотность лагранжевой функции (см. раздел 4.3), которая приводит к уравнениям Дирака (6.117), (6.118). Построить гамильтониан (6.116) из лагранжиана.

**6.72.** Построить оператор скорости свободной релятивистской частицы с гамильтонианом (6.111) и определить его собственные значения. Дать им физическую интерпретацию.

**6.73.** Пользуясь законами сохранения энергии и импульса, выразить частоту рассеянного фотона  $\omega$  в эффекте Комптона через частоту первичного фотона  $\omega_0$  и угол рассеяния  $\theta$ . Определить возможные значения энергии рассеянного фотона. Выразить также изменение длины волны фотона через комптоновскую длину волны электрона  $\Lambda_C$  и угол рассеяния. Электрон первоначально покоился.

**6.74.** Показать, что

$$\begin{aligned} Sp(\hat{\alpha}_\mu) &= Sp(\hat{\alpha}_\mu \hat{\beta}) = Sp(\hat{\alpha}_\mu \hat{\alpha}_\nu) = Sp(\hat{\alpha}_\mu \hat{\alpha}_\nu \hat{\beta}) = \\ &= Sp(\hat{\alpha}_\mu \hat{\alpha}_\nu \hat{\alpha}_\lambda) = Sp(\hat{\alpha}_\mu \hat{\alpha}_\nu \hat{\alpha}_\lambda \hat{\beta}) = 0, \end{aligned} \quad (6.130)$$

где  $\hat{\alpha}_\mu, \hat{\beta}$  — матрицы Дирака, причем  $\mu \neq \nu \neq \lambda$ .

УКАЗАНИЕ. Использовать циклическую перестановку сомножителей под знаком шпура и представить каждое из приведенных выражений (кроме первого) в виде некоторого коммутатора.

**6.75.** Доказать равенства

$$(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{e})(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{n}) = -(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{n})(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{e}), \quad (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{a})(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2, \quad Sp(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{a})(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{b}) = 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (6.130)$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — произвольные неоператорные векторы,  $\mathbf{e}, \mathbf{n}$  — взаимно перпендикулярные векторы.

**6.76.** Вычислить шпуры

$$Sp(\hat{\alpha}_\mu \hat{\alpha}_\nu) = 4\delta_{\mu\nu}, \quad Sp(\hat{\alpha}_\mu \hat{\alpha}_\nu \hat{\alpha}_\lambda \hat{\alpha}_\sigma) = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\lambda\nu} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}). \quad (6.131)$$

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться правилами коммутации матриц Дирака и их трансформационными свойствами как компонент трехмерных векторов.

**6.77\*.** Вычислить  $Sp(\hat{B}\hat{P}_0\hat{B}^\dagger\hat{P})$  (см. пример 6.18) для случая линейно поляризованных фотонов, когда орты поляризации действительны.

УКАЗАНИЕ. Использовать формулы (6.130)–(6.131).

**6.78\*.** Произвести анализ формулы Клейна–Нишины–Тамма (6.128).

1. Записать сечения  $d\sigma_{\parallel}$ ,  $d\sigma_{\perp}$  рассеяния линейно поляризованного фотона для случаев, когда рассеянный фотон поляризован в плоскости ( $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{e}_0$ ) и перпендикулярно этой плоскости, а также для случая, когда поляризация рассеянного фотона не фиксируется.

2. Показать, что сечение рассеяния неполяризованных фотонов  $d\bar{\sigma}$  имеет вид

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{2}r_0^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[ \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} - \sin^2\theta \right] d\Omega. \quad (6.132)$$

3. Произвести предельный переход к нерелятивистскому случаю  $\bar{\omega}_0 \ll mc^2$  и сравнить результат с формулой Томсона (см. задачи 5.128, 5.129).

4. Рассмотреть ультрарелятивистский случай  $\bar{\omega}_0 \gg mc^2$  и проанализировать области больших и малых углов рассеяния по отдельности.

**6.79.** Проинтегрировать сечение рассеяния неполяризованных фотонов на электроне по углу рассеяния и найти полное сечение  $\sigma_C$  комптоновского рассеяния. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и релятивистский предельные случаи. Построить график зависимости от параметра  $x = \hbar\omega_0/mc^2$  его отношения  $\sigma_C/\sigma_T$  к томсоновскому сечению (см. задачу 5.129).

**6.80.** Записать дифференциальное сечение комптоновского рассеяния неполяризованных фотонов (6.132) в расчете на единичный интервал энергии рассеянного кванта  $\hbar\omega$ .

**6.81.** Тяжелая ультрарелятивистская частица налетает на нерелятивистский электрон. Пользуясь методом эквивалентных фотонов, вычислить суммарное по всем направлениям эффективное дифференциальное сечение излучения фотонов заданной энергии.

**6.82\***. Ультрарелятивистский электрон сталкивается с неподвижным атомным ядром, имеющим заряд  $Ze$ . Пользуясь методом эквивалентных фотонов, вычислить эффективное дифференциальное сечение тормозного излучения квантов заданной частоты.

**6.83.** Ультрарелятивистский электрон сталкивается с первоначально неподвижным электроном. Пользуясь методом эквивалентных фотонов, вычислить эффективное дифференциальное сечение тормозного излучения квантов заданной частоты.

## 6.4. Ответы и решения

**6.3.** Применим операторное разложение (Д3.67) к гейзенберговскому оператору

$$(1) \quad \widehat{a}_H(t) = \exp(\alpha \widehat{\mathcal{H}}) \widehat{a} \exp(-\alpha \widehat{\mathcal{H}}),$$

где  $\alpha = it/\hbar$ ,  $\mathcal{H} = \hbar\omega(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + 1/2)$ . Имеем  $[\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{a}] = -\hbar\omega\widehat{a}$ ,  $[\widehat{\mathcal{H}}, [\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{a}]] = (-\hbar\omega)^2\widehat{a}$  и т. д. В итоге получаем  $\widehat{a}_H(t) = \widehat{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\omega t)^n/n! = \widehat{a} \exp(-i\omega t)$

и аналогичным образом  $\widehat{a}_H^\dagger(t) = \widehat{a}^\dagger \exp(i\omega t)$ .

Но можно поступить проще. Продифференцируем обычным образом операторное выражение (1) по неоператорному аргументу  $t$ . Получим

$$\frac{d\widehat{a}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} \exp(i\widehat{\mathcal{H}}/\hbar) [\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{a}] \exp(-i\widehat{\mathcal{H}}/\hbar) = -i\omega\widehat{a}_H.$$

Из вида производной следует экспоненциальная зависимость  $\widehat{a}_H$  от времени.

$$\begin{aligned} \widehat{Q}(t) &= \widehat{Q}(0) \cos \omega t + (\widehat{P}(0)/\omega) \sin \omega t, \\ \widehat{P}(t) &= \widehat{P}(0) (\cos \omega t - \omega \widehat{Q}(0) \sin \omega t). \end{aligned}$$

$$\mathbf{6.5.} \quad \text{а) } \overline{a} = \overline{a^\dagger} = 0; \quad \text{б) } \overline{P} = \overline{Q} = 0; \quad \text{в) } \overline{a^2} = \overline{a^{\dagger 2}} = 0; \quad \text{г) } \overline{\Delta Q^2} \cdot \overline{\Delta P^2} = \hbar^2(n + 1/2)^2.$$

$$\mathbf{6.6.} \quad \mathcal{E}_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad \Phi_n(\eta) = A_n e^{-\eta^2/2} H_n(\eta), \quad \eta = P/\sqrt{\hbar\omega}, \quad A_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}, \quad H_n - \text{полином Эрмита.}$$

$$\mathbf{6.7.} \quad \Delta Q \Delta P = \hbar(n + 1/2) \geq \hbar/2.$$

**6.8.** Воспользуемся первым тождеством (Д3.66):  $\widehat{A}_n = [\widehat{a}^n, \widehat{a}^+] = [\widehat{a}^{n-1}\widehat{a}, \widehat{a}^+] = \widehat{a}^{n-1}[\widehat{a}, \widehat{a}^+] + \widehat{A}_{n-1}\widehat{a} = 2\widehat{a} + \widehat{A}_{n-2}\widehat{a}^2 = \dots = n\widehat{a}^{n-1}$ . Аналогичным образом получаем  $[\widehat{a}^{+n}, \widehat{a}] = -n(\widehat{a}^+)^{n-1}$ .

**6.9.** Согласно условию,  $\hat{f} = A_{00} + A_{10}\hat{a} + A_{01}\hat{a}^+ + A_{20}\hat{a}^2 + \dots$ , где  $A$  – постоянные. Трудный вопрос о сходимости ряда после его действия на волновую функцию не обсуждается. Докажем, например, первое соотношение. Возьмем типичный член вида  $A\hat{a}^k\hat{a}^+\hat{a}^m\hat{a}^+{}^n$  и преобразуем его коммутатор с  $\hat{a}^+$  с помощью первого тождества (Д3.66) и результата предыдущей задачи:  $[\hat{a}^k\hat{a}^+\hat{a}^m\hat{a}^+{}^n, \hat{a}^+] = [\hat{a}^k\hat{a}^+\hat{a}^m, \hat{a}^+]\hat{a}^+{}^n + \hat{a}^k\hat{a}^+\hat{a}^m[\hat{a}^+{}^n, \hat{a}^+] = = [\hat{a}^k, \hat{a}^+]\hat{a}^+\hat{a}^m\hat{a}^+{}^n + \hat{a}^k\hat{a}^+[\hat{a}^m, \hat{a}^+]\hat{a}^+{}^n = k\hat{a}^{k-1}\hat{a}^+\hat{a}^m\hat{a}^+{}^n + \hat{a}^k\hat{a}^+m\hat{a}^{m-1}\hat{a}^+{}^n$ . С другой стороны, тот же результат получится и при формальном дифференцировании по  $\hat{a}$ , при котором  $\hat{a}^+$  считается постоянным и сохраняется изначально заданный порядок операторов.

**6.11.** Операторы поля в представлении Гейзенберга получаются из (6.13)–(6.15) путем замены в этих выражениях  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{a}$  на зависящие от времени и полученные в задаче 6.4 гейзенберговские операторы  $\hat{a}^+(t)$ ,  $\hat{a}(t)$ .

### 6.12.

$$\begin{aligned} [\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{E}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)] &= [\hat{H}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{H}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)] = \\ &= i\hbar \left( \frac{\delta_{\alpha\beta}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{1\alpha} \partial x_{2\beta}} \right) G^-(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2); \end{aligned}$$

$$[\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{H}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)] = -i\hbar e_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial^2}{\partial c t_1 \partial x_{1\mu}} G^-(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2).$$

Здесь

$$G^-(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{R} [\delta(\tau + R/c) - \delta(\tau - R/c)]$$

– функция, определенная в задаче 5.9. Компоненты полей можно одновременно измерить сколь угодно точно только в таких точках четырехмерного пространства, которые не могут быть связаны световым сигналом. Подробнее об этом см. в [Гайтлер (1956)].

### 6.13.

$$\begin{aligned} [\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{A}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)] &= \\ &= \frac{i\hbar c}{2\pi^2} \int d^3k \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \exp i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cos \omega(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Коммутатор отличен от нуля и для точек, разделенных пространственно-подобными интервалами, например для  $t_1 = t_2$ ,  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ . Но векторный потенциал  $\mathbf{A}$  не является наблюдаемой величиной, поэтому соображения о взаимной обусловленности наблюдаемых событий к нему неприменимы.

**6.14.** В квантовой теории оператор физической величины должен быть эрмитовым. Поскольку операторы  $\widehat{\mathbf{E}}$  и  $\widehat{\mathbf{H}}$  не коммутируют (см. задачу 6.12), оператор  $\widehat{\mathbf{P}}$ , построенный по принципу соответствия, необходимо симметризовать:

$$(1) \quad \widehat{\mathbf{P}} = \frac{1}{8\pi c} \int_V [\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) - \widehat{\mathbf{H}}(t) \times \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] dV.$$

При подстановке в (1) операторов поля (6.14), (6.15) получаем оператор импульса, выраженный через операторы рождения и уничтожения фотонов:

$$(2) \quad \widehat{\mathbf{P}} = \sum_s \hbar \mathbf{k} (\widehat{a}_s^+ \widehat{a}_s + 1/2).$$

**6.15.** Обозначив вектор состояния поля (с учетом всех мод) через  $|0\rangle$  и вычисляя средние значения напряженностей поля, получим  $\overline{\mathbf{E}} = \langle 0 | \widehat{\mathbf{E}} | 0 \rangle = 0$ ,  $\overline{\mathbf{H}} = 0$ ,

$$\overline{\Delta E^2} = \overline{E^2} = \langle 0 | \widehat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r}) | 0 \rangle = \sum_s \frac{2\pi\hbar\omega_s}{V} = \frac{2\hbar}{\pi c^3} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \rightarrow \infty.$$

Аналогичным образом получим  $\overline{\Delta H^2} = \overline{H^2} \rightarrow \infty$ . Эти две бесконечности имеют ту же природу, что и бесконечная энергия вакуума.

**6.16.** Оператор электрического поля в гейзенберговском представлении был построен в задаче 6.12 и может быть записан с помощью формулы (6.14) в виде

$$(1) \quad \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \{ \widehat{a}_s \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \text{э. с.} \}, \quad \text{где} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i e_s \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Операторы  $\widehat{a}$ ,  $\widehat{a}^+$  в последнем равенстве не зависят от времени, э. с. означает эрмитовски сопряженное выражение. Усредняем гейзенберговский оператор поля, зависящий от  $\mathbf{r}$  и  $t$  как от параметров, по пространственно-временной области с весовой функцией:

$$(2) \quad \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \int \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') g(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'.$$



С помощью (1) находим

$$(3) \quad \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \{ \widehat{a}_s \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) G(\mathbf{k}) + \text{э. с.} \},$$

где

$$(4) \quad G(\mathbf{k}) = \int g(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t} d^3r dt, \quad \omega = ck.$$

С помощью усредненного оператора поля находим вакуумные средние:

$$(5) \quad \overline{\mathbf{E}} = \langle 0 | \widehat{\mathbf{E}} | 0 \rangle = 0, \quad \overline{\Delta E^2} = \overline{E^2} = \langle 0 | \widehat{E^2}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2\pi} \int G(\mathbf{k}) \omega d^3k,$$

где в последнем равенстве мы перешли от суммирования по дискретным модам к интегрированию по волновым векторам и учли две поляризации каждой моды. Аналогичный расчет нужно проделать с магнитным полем. Фурье-образ весовой функции вычисляется без затруднений и в функции частоты с учетом нормировки имеет вид  $G(\omega) = \exp(-\omega^2 l^2 / 2c^2)$ . В итоге получаем конечное значение вакуумных флуктуаций поля

$$(6) \quad \overline{\Delta E^2} = \overline{\Delta H^2} = \frac{\hbar c}{l^4}.$$

Высокочастотные моды, приводящие к расходимости вакуумных флуктуаций, были устранены в результате усреднения.

**6.17.** В предположении  $L \gg z$  вычисляем разность энергий  $\Delta U$  вакуумных флуктуаций в пространстве между пластинами при наличии пластин и в их отсутствие. Тем самым мы избежим от расходимости энергии нулевых колебаний. В первом из этих случаев интегрирование по  $k$  следует ограничить снизу значением  $k_{\min} \approx 2\pi/z$ , так как в области размером  $z$  не может быть флуктуаций с длинами волн, превышающими  $z$ . Используя результат задачи 6.15, найдем в расчете на единицу площади пластин

$$\Delta U \approx \frac{\hbar c}{2\pi^2 z} \left\{ \int_{k_{\min}}^{\infty} k^3 dk - \int_0^{\infty} k^3 dk \right\} = -\frac{\hbar c}{2\pi^2 z} \int_0^{k_{\min}} k^3 dk = -\frac{2\pi^2 \hbar c}{z^3}.$$

Сила вычисляется путем дифференцирования по  $z$ :

$$\mathcal{F} = -\frac{d}{dz} \Delta U \approx -\frac{6\pi^2 \hbar c}{z^4}.$$

Пластины притягиваются с силой, быстро убывающей с расстоянием. Точный расчет [Лифшиц и Питаевский (1978)] дает для этого случая другой численный коэффициент:  $\pi^2/240$  вместо нашего  $6\pi^2$ . Ввиду высокой (четвертой) степени зависимости от  $k_{\min}$  результат чувствителен к этому параметру, известному только по порядку величины.

**6.18.** На электрон атома действует не только поле ядра и других электронов, но и нулевые колебания электромагнитного поля. Эти колебания приводят к «дрожанию» электрона на его квантовой орбите, вследствие чего изменяется действующее на него поле и положения энергетических уровней электронов испытывают некоторые смещения (лэмбовский сдвиг). Количественно изменение потенциальной энергии выразится следующим образом:

$$(1) \quad \delta U = U(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = \Delta U \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \delta x_\alpha \delta x_\beta + \dots$$

Усреднив эту величину по нулевым колебаниям, получим в первом неисчезающем приближении следующую добавочную потенциальную энергию за счет нулевых колебаний:

$$(2) \quad V(\mathbf{r}) = \langle \delta U \rangle = \frac{1}{6} \langle \nabla^2 U(\mathbf{r}) \rangle \langle \delta \mathbf{r}^2 \rangle.$$

Здесь учтено, что нулевые колебания изотропны, поэтому  $\langle \delta \mathbf{r} \rangle = 0$ ,  $\langle \delta x_\alpha \delta x_\beta \rangle = (1/3) \langle \delta \mathbf{r}^2 \rangle \delta_{\alpha\beta}$ .

Оценим средний квадрат смещения электрона по порядку величины, считая его отклонения от равновесной орбиты квазиклассическими. Если частота «дрожания» существенно превышает атомные частоты, то уравнение движения осциллятора под действием поля моды  $s$  можно записать в виде

$$(3) \quad m \delta \ddot{\mathbf{r}}_s = e \mathbf{E}_s \cos \omega_s t \quad (k \delta r \ll 1).$$

Решение этого уравнения,  $\delta \mathbf{r}_s = -e \mathbf{E}_s(t) / m \omega_s^2$ , возводим в квадрат и усредняем по вакуумному состоянию электромагнитного поля с помощью результата, полученного в задаче 6.15, заменяя  $\langle \mathbf{E}_s^2(t) \rangle \rightarrow \langle 0 | \hat{\mathbf{E}}_s^2 | 0 \rangle = 2\pi \hbar \omega_s / V$ . Получаем

$$(4) \quad \langle \delta \mathbf{r}_s^2 \rangle = \frac{2\pi e^2 \hbar}{m^2 \omega_s^3 V}.$$

Суммирование по модам с переходом к интегрированию по частотам дает

$$(5) \quad \langle \delta \mathbf{r}^2 \rangle = \sum_s \langle \delta \mathbf{r}_s^2 \rangle = \frac{2e^2 \hbar}{\pi m^2 c^3} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Интеграл расходится логарифмически, и его нужно обрезать на верхнем и нижнем пределах. Нижний предел должен быть порядка атомной частоты  $\omega_0$  в соответствии со сделанным ранее предположением. Верхний предел оценивается из соображения, согласно которому в нерелятивистской системе (атоме) существенны частоты  $\hbar\omega \leq mc^2$ , где  $m$  — масса электрона. Таким образом, полагаем  $\omega_{\min} = \omega_0$ ,  $\omega_{\max} = mc^2/\hbar$  и получаем в итоге

$$(5) \quad \langle \delta \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{2e^2 \hbar}{\pi m^2 c^3} \ln \left( \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \right).$$

Теперь значение энергии возмущения (2) известно, и можно найти поправку к энергии электрона в атоме, вызванную этим возмущением, пользуясь стационарной теорией возмущений [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]:

$$(6) \quad \Delta \mathcal{E} = \langle \psi | \widehat{V} | \psi \rangle,$$

где  $\psi$  — волновая функция того состояния, к энергии которого ищется поправка. В атоме водорода, считая ядро точечным, имеем  $U(\mathbf{r}) = -e^2/r$ ,  $\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 4\pi e^2 \delta(\mathbf{r})$ . Используя этот результат, а также (2) и (5), находим сдвиг уровня энергии:

$$(7) \quad \Delta \mathcal{E} = \frac{4e^4 \hbar}{3m^2 c^3} |\psi(0)|^2 \ln \left( \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \right).$$

В рассматриваемом приближении испытывают сдвиг только уровни энергии тех состояний, у которых  $\psi(0) \neq 0$ . Таким свойством обладают лишь состояния с орбитальным моментом  $l = 0$  ( $s$ -состояния). Волновая функция  $2s$ -состояния атома водорода  $|\psi_{200}(0)|^2 = 1/8\pi a_B^3$ , где  $a_B = \hbar^2/mc^2$  — боровский радиус. В качестве величины  $\hbar\omega_0$  используем атомную единицу энергии  $\hbar\omega_0 = me^4/\hbar^2$ . Подставляя в (7) все указанные величины, получим

$$(8) \quad \Delta \mathcal{E}_{201/2} = \frac{1}{6\pi} mc^2 \alpha^5 \ln \left( \frac{1}{\alpha^2} \right), \quad \Delta \mathcal{E}_{211/2} = 0, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Здесь в виде индексов у энергетических сдвигов указаны главное квантовое число, орбитальный момент и полный момент электрона ( $j = 1/2$  в обоих

случаях). Если поправка, связанная с нулевыми колебаниями, не учитывается, то рассматриваемые два уровня энергии совпадают. При учете нулевых колебаний они расщепляются. Наш оценочный расчет дал величину расщепления  $\Delta \mathcal{E}_{201/2} = 0,52mc^2\alpha^5$ . Точный расчет [?] дает значение  $0,41mc^2\alpha^5$ . Этому значению соответствует частота перехода 1050 МГц.

**6.19.** Полный момент поля относительно точки с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$  в классической теории вычисляем по формуле

$$(1) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) = \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathcal{P} dV = \mathbf{J}(0) - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{P}, \quad \mathcal{P} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

— плотность импульса. Сделаем подстановку  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$  и преобразуем выражение для  $\mathbf{J}$  путем интегрирования по частям в предположении отсутствия поля на бесконечности (полезно использовать соотношения (1.23а) и тождество (б) из задачи 1.28, а также уравнение Максвелла  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ). В итоге получим два слагаемых:  $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{L}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{S}$ , где

$$(2) \quad \mathbf{L}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi c} \int E_\alpha [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla] A_\alpha dV$$

— орбитальный момент поля, **зависящий** от выбора начала отсчета;

$$(3) \quad \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E} \times \mathbf{A}] dV$$

— спиновый (внутренний) момент поля, **не зависящий** от выбора начала отсчета координат. Соответствующие операторы получаются из (4), (5) по принципу соответствия путем «эрмитизации» классических выражений, как это было сделано для импульса поля (см. решение задачи (6.14):

$$(4) \quad \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{8\pi c} \int \{ \hat{E}_\alpha [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla] \hat{A}_\alpha + \hat{A}_\alpha [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla] \hat{E}_\alpha \} dV,$$

$$(5) \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{8\pi c} \int [\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{E}}] dV.$$

**6.20.** Пользуясь формулой (5) из решения предыдущей задачи и подставляя в нее операторы (6.13), (6.14), а также базисные функции (6.16), находим

$$\hat{\mathbf{S}} = i\hbar \sum_{\mathbf{k}, \sigma, \sigma'} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \delta_{\sigma\sigma'} \right) (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma'}^*).$$

При линейной поляризации фотонов орты действительны, векторное произведение отлично от нуля только при  $\sigma \neq \sigma'$ :  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}^* = \mathbf{k}/k$ . Спиновый оператор принимает вид

$$\widehat{S} = i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \mathbf{k}/k) \left( \widehat{a}_{\mathbf{k}2}^\dagger \widehat{a}_{\mathbf{k}1} - \widehat{a}_{\mathbf{k}1}^\dagger \widehat{a}_{\mathbf{k}2} \right)$$

и при усреднении по состояниям с определенным числом фотонов дает нуль.

Циркулярно поляризованные фотоны имеют орты  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \pm \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}}{\sqrt{2}}$  (см. задачу 2.133). Их векторное произведение отлично от нуля только при  $\sigma = \sigma'$  и дает  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1}^* = \mp i \mathbf{k}/k$ . Спиновый момент каждой моды с заданным  $\mathbf{k}$  направлен вдоль  $\mathbf{k}$  и равен квантовой постоянной  $\hbar$ , умноженной на разность чисел фотонов с правой и левой спиральностями:

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \mathbf{k}/k) (N_{\mathbf{k},+1} - N_{\mathbf{k},-1}).$$

$$6.21. I_\sigma(\omega, \mathbf{n}) = \frac{\hbar \omega^3}{8\pi^3 c^2} N_{\mathbf{k}\sigma}.$$

$$6.22. \bar{\mathcal{E}}_s = \hbar \omega_s \left( \bar{N}_s + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar \omega_s}{2T}.$$

6.23. Равновесное электромагнитное излучение распределено изотропно в пространстве, поэтому спектральная интенсивность излучения  $I(\omega)$  (плотность потока энергии излучения в заданном направлении, приходящаяся на единичный интервал частот) связана со спектральной плотностью излучения  $\rho(\omega)$  соотношением  $\rho(\omega) = 4\pi I(\omega)/c$ . Умножая энергию одного кванта  $\hbar\omega$  на среднее число (6.23) квантов одного осциллятора поля и на число осцилляторов (2.164), приходящихся на объем  $\mathcal{V}$ , интервал частот  $d\omega$  и телесный угол  $d\Omega_{\mathbf{k}}$ , находим соответствующую энергию

$$(1) \quad d\mathcal{E}(\omega) = \hbar \omega_s \bar{N} \frac{2\mathcal{V}}{(2\pi c)^3} \omega^3 d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}.$$

Чтобы получить спектральную плотность энергии, следует проинтегрировать (1) по телесному углу, поделить на объем  $\mathcal{V}$  и на интервал  $d\omega$ :

$$(2) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$$

(формула Планка для спектральной плотности равновесного излучения).

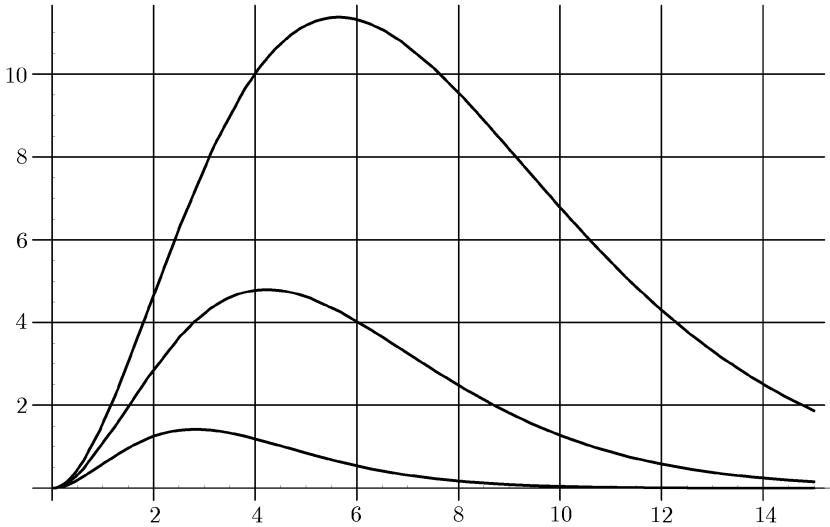


Рис. 6.4

График спектрального распределения Планка приведен на рис. 6.4. По вертикальной оси отложена спектральная плотность, по горизонтальной — частота (обе в произвольных единицах). Температуры для трех изображенных кривых относятся как 1 : 1,5 : 2. Максимум приходится на частоту

$$(3) \quad \omega_m \approx 2,822 \frac{T}{\hbar}, \quad \lambda_m = \frac{2\pi c \hbar}{2822T} \approx \frac{0,511}{T} \text{ см},$$

где в последнем выражении температуру  $T$  следует брать в кельвинах. Зависимость  $\omega_m \propto T$  называется **законом смещения Вина**. Из этого закона следует, что максимум излучения с ростом температуры смещается в сторону более высоких частот (коротких длин волн). Так, поверхность (фотосфера) желтого Солнца нагрета до  $\approx 6000^\circ$ , белого Сириуса до  $\approx 10\,000^\circ$ , голубой Веги — до  $\approx 20\,000^\circ$  и т. д.

Имеется две области частот, в которых формула Планка упрощается. При низких частотах  $T/\hbar\omega \gg 1$  и

$$(4) \quad \rho(\omega) \approx \frac{T}{\pi^2 c^3} \omega^2 \propto \omega^2$$

— **формула Релея–Джинса**. Именно такой закон дает **при всех частотах** классическая физика. Он получается путем умножения средней энер-

гии  $T$  одного осциллятора на плотность числа осцилляторов, пропорциональную  $\omega^2$ . Спектральная плотность возрастает неограниченно с ростом частоты («ультрафиолетовая катастрофа»).

При высоких частотах  $T/\hbar\omega \ll 1$ , и из формулы Планка следует экспоненциальный спад плотности излучения — **закон Вина**:

$$(5) \quad \rho(\omega) \approx \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \omega^3 e^{-\hbar\omega/T}.$$

Экспоненциальный спад спектральной плотности объясняется дискретностью энергии осциллятора при заданной частоте. Если  $\hbar\omega > T$ , то тепловой энергии атомов порядка  $T$  не хватает для переброса осциллятора поля на следующий уровень, и испускание квантов такой энергии затруднено.

Формула Планка (1) описывает всю область частот при любых температурах с высокой точностью.

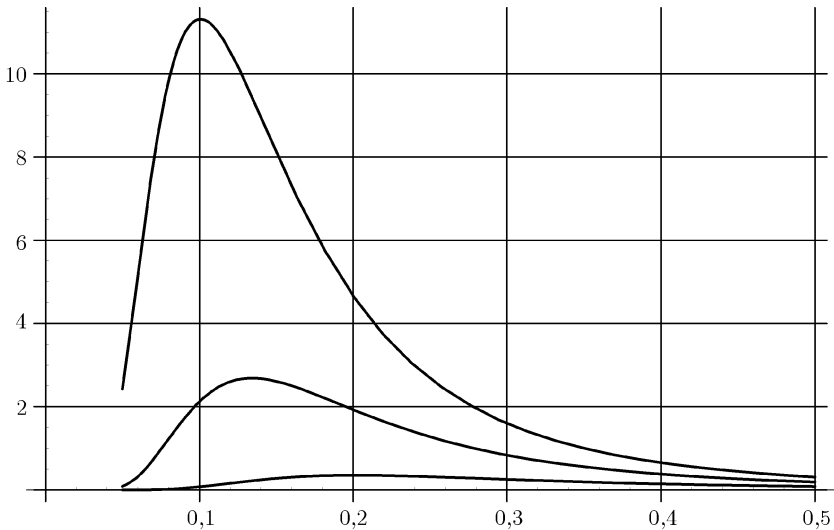


Рис. 6.5

$$6.25. \quad \rho'(\lambda) = \frac{16\pi^2 c \hbar}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(2\pi c \hbar / \lambda T) - 1}$$

(см. 6.5 — то же, что на рис. 6.4, но по горизонтальной оси отложена длина волны  $\lambda$  в произвольных единицах). Это распределение убывает при  $\lambda \rightarrow 0$

по экспоненциальному закону, а при  $\lambda \rightarrow \infty$  по степенному закону и имеет максимум при

$$\lambda = \lambda'_m = \frac{2\pi\hbar c}{4,99T} = \frac{0,289}{T} \text{ см.}$$

Здесь в последнем равенстве температура в кельвинах. Численный коэффициент 4,99 получается из решения трансцендентного уравнения  $e^{-x} = 1 - x/5$ .

Максимум распределения  $\rho'(\lambda)$  смещается при увеличении температуры в сторону меньших длин волн,  $\lambda'_m \propto 1/T$ . В этом проявляется закон смещения Вина по длинам волн. Надо отметить, что значение  $\lambda'_m$  и соответствующее значение частоты  $\omega'_m = 2\pi c/\lambda'_m$  не совпадают с  $\lambda_m$ ,  $\omega_m$ , отвечающими максимуму распределения по частотам (см. уравнение (3) из решения задачи 6.23). А именно,  $\lambda'_m = 0,565\lambda_m < \lambda_m$ ,  $\omega'_m = 1,77\omega_m$ , и это различие весьма заметно. Например, в случае излучения Солнца при  $T = 6000^\circ$  максимум распределения по частоте соответствует  $\lambda_m = 8,5 \times 10^{-5}$  см (это — ближний инфракрасный диапазон), тогда как при распределении по длинам волн максимуму отвечает  $\lambda'_m = 4,82 \times 10^{-5}$  см (синий диапазон!) Наблюдаемый же визуально желто-белый цвет Солнца находится между  $\lambda_m$  и  $\lambda'_m$ .

### 6.26.

Название	$T$ (К)	$\lambda_m$ (см)	$\lambda'_m$ (см)	Видимый цвет
а реликтовое излучение	3	0,17	0,095	СВЧ
б поверхность Земли	300	$1,7 \times 10^{-3}$	$0,95 \times 10^{-3}$	ИК
в $\mu$ -Цефея	2000	$2,55 \times 10^{-4}$	$1,43 \times 10^{-4}$	темно-красный
г Солнце	6000	$8,5 \times 10^{-5}$	$4,82 \times 10^{-5}$	желто-белый
д Сириус	11 000	$4,6 \times 10^{-5}$	$2,57 \times 10^{-5}$	белый
е $\beta$ -Центавра	22 500	$2,27 \times 10^{-5}$	$1,29 \times 10^{-5}$	голубой
ж туманность Лиры	75 000	$0,68 \times 10^{-5}$	$038 \times 10^{-5}$	УФ
з нейтронная звезда	250 000	$2 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{-6}$	рентген
и внутренние области звезд	$2,5 \times 10^7$	$2 \times 10^{-8}$	$1,1 \times 10^{-8}$	рентген

$$6.27. F = -T \ln Z = -\frac{1}{3}\mathcal{E}, S = \frac{16\sigma}{3c}t^3\psi, C_V = \frac{16\sigma}{c}T^3\psi, \mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}}{3\psi},$$

где  $\sigma$ ,  $\mathcal{E}$  — постоянная Стефана–Больцмана и внутренняя энергия, определенные в условии задачи 6.24.

6.28. Фоковские состояния  $|n\rangle$  представляют собой бесконечное счетное множество и образуют полный набор, по которому может быть разложен вектор произвольного состояния данной моды. Когерентные состояния  $|z\rangle$ ,



где  $z$  — любое комплексное число, образуют континуальное множество и содержат, таким образом, большее число функций (переполненный набор). Достаточно использовать лишь часть их для представления произвольного вектора состояния моды.

**6.29.** Предположим, что существуют нормированные состояния, такие что

$$(1) \quad \widehat{a}^\dagger |\beta\rangle = \beta |\beta\rangle, \quad \langle \beta | \widehat{a} = \langle \beta | \beta^*.$$

Разложим вектор  $|\beta\rangle$  по базису фоковских состояний, как это делалось в примере 6.4:

$$(2) \quad |\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \beta \rangle |n\rangle.$$

Для коэффициентов разложения имеем рекуррентное соотношение

$$(3) \quad \langle n | \beta \rangle = \frac{\sqrt{n}}{\beta} \langle n-1 | \beta \rangle.$$

В результате  $n$ -кратного применения данного соотношения получаем

$$(4) \quad \langle n | \beta \rangle = \frac{\sqrt{n!}}{\beta^n} \langle 0 | \beta \rangle.$$

Норма вектора  $|\beta\rangle$  при этом равна

$$(5) \quad \langle \beta | \beta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{|\beta|^{2n}}.$$

Ряд (5) расходится при любых конечных  $\beta$ , что и доказывает утверждение, содержащееся в условии задачи.

**6.30.** Эволюция когерентного состояния описывается нестационарным уравнением Шредингера

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial |\alpha(t)\rangle}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}} |\alpha(t)\rangle,$$

где  $\widehat{\mathcal{H}} = \hbar\omega(\widehat{a}^\dagger \widehat{a} + 1/2)$ . Решение этого уравнения при начальном условии  $|\alpha(t)\rangle|_{t=0} = |\alpha_0\rangle$  имеет вид

$$(2) \quad |\alpha(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}} t\right) |\alpha_0\rangle.$$

Разлагая начальное когерентное состояние по базису фокковских состояний и учитывая, что последние являются собственными состояниями оператора Гамильтона, получим

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= \exp(-|\alpha_0|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i\omega(n+1/2)t) \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \\ &= \exp(-i\omega t/2) \exp(-|\alpha_0 \exp(-i\omega t)|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0 \exp(-i\omega t))^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \\ &= \exp(-i\omega t/2) |\alpha_0 \exp(-i\omega t)\rangle. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Из последней формулы видно, что с течением времени когерентное состояние остается когерентным, его амплитуда меняется по закону  $\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-i\omega t)$ , т. е. совершает вращение в комплексной плоскости с частотой  $\omega$ . Фазовый множитель  $\exp(-i\omega t/2)$  одинаков для всех когерентных состояний и обусловлен энергией нулевых колебаний вакуума. Его присутствие никак не проявляется при вычислении средних значений наблюдаемых величин.

**6.31.** Согласно определению,

$$(1) \quad \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Запишем это уравнение в координатном представлении, учитывая, что для полевого осциллятора в этом представлении оператор уничтожения имеет вид (Д3.54):

$$(2) \quad \left( \xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \langle \xi | \alpha \rangle = \sqrt{2} \alpha \langle \xi | \alpha \rangle.$$

Здесь  $\langle \xi | \alpha \rangle = \psi_\alpha(\xi)$  — волновая функция когерентного состояния, зависящая от безразмерной координаты. Дифференциальное уравнение первого порядка (2) имеет решение

$$(3) \quad \langle \xi | \alpha \rangle = C(\alpha) \exp(-(\xi - \sqrt{2}\alpha)^2/2).$$

Нормировочная постоянная, выбранная вещественной, равна

$$(4) \quad C(\alpha) = (1/\pi)^{1/4} \exp(-2(\text{Im } \alpha)^2).$$

Формула (3) задает распределение Гаусса со средним значением  $\langle \xi \rangle = \sqrt{2}\alpha$  и дисперсией  $\langle \Delta \xi^2 \rangle = 1/2$ . Зависимость от времени этого состояния

можно найти, если учесть, что для свободного поля в когерентном состоянии  $\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-i\omega t)$  (см. предыдущую задачу). Обозначая  $\alpha_0 = \xi_0/\sqrt{2}$ , получим следующее выражение для распределения плотности вероятности безразмерной координаты гармонического осциллятора:

$$(5) \quad \rho(\xi) = \pi^{-1/2} \exp(-(\xi - \xi_0 \cos \omega t)^2).$$

Из полученного распределения, в частности, следует, что среднее значение координаты полевого осциллятора меняется со временем точно так же, как и для классического гармонического осциллятора.

**6.32.** Воспользуемся разложением когерентного состояния по базису фоковских состояний

$$(1) \quad |\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Учитывая, что  $|n\rangle = \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle / \sqrt{n!}$ , можем переписать разложение (1) в виде

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^{\dagger})^n}{n!} |0\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha \hat{a}^{\dagger}) |0\rangle.$$

Данное соотношение можно представить в более симметричной форме, введя дополнительный оператор  $\exp(-\alpha^* \hat{a})$  перед кет-вектором вакуумного состояния, поскольку

$$\exp(-\alpha^* \hat{a}) |0\rangle = |0\rangle$$

В силу теоремы Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа (Д3.70),

$$\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha \hat{a}^{\dagger}) \exp(-\alpha^* \hat{a}) = \exp(\alpha \hat{a}^{\dagger} - \alpha^* \hat{a}),$$

что представляет собой оператор сдвига, определенный в условии задачи.

**6.33.** Требуемые величины могут быть вычислены, если выразить операторы координаты и импульса через операторы рождения и уничтожения. Для координатной квадратурной компоненты, в соответствии с определением, получим

$$\begin{aligned} \langle \Delta X_1^2 \rangle &= \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \langle (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + 1)/2 \rangle - \langle (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}) \rangle^2 / 2 = \\ &= (1/2)(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1) - (1/2)(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2) = 1/2. \end{aligned}$$

Аналогично может быть вычислена дисперсия импульсной квадратурной компоненты  $\langle \Delta X_2^2 \rangle = 1/2$ . Для размерных переменных соответственно получим  $\langle \Delta Q^2 \rangle = \hbar/(2\omega)$  и  $\langle \Delta P^2 \rangle = \hbar\omega/2$ .

### 6.34.

$$\begin{aligned} D_1(t) &= D_1(0) \cos^2(\omega t) + D_2(0) \sin^2(\omega t) + \\ &\quad + \left[ \langle \widehat{X}_1 \widehat{X}_2 + \widehat{X}_2 \widehat{X}_1 \rangle - 2\langle \widehat{X}_1 \rangle^2 \langle \widehat{X}_2 \rangle^2 \right] \cos(\omega t) \sin(\omega t), \\ D_2(t) &= D_2(0) \cos^2(\omega t) + D_1(0) \sin^2(\omega t) - \\ &\quad - \left[ \langle \widehat{X}_1 \widehat{X}_2 + \widehat{X}_2 \widehat{X}_1 \rangle - 2\langle \widehat{X}_1 \rangle^2 \langle \widehat{X}_2 \rangle^2 \right] \cos(\omega t) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Обе величины осциллируют на удвоенной частоте своей моды, а их сумма  $D_1(t) + D_2(t) = D_1(0) + D_2(0)$  не зависит от времени и выполняется соотношение  $D_1(t) = D_2(t - \pi/(2\omega))$  — сдвиг по фазе на  $\pi/2$ .

Для фоковских и когерентных состояний  $\langle \widehat{X}_1 \widehat{X}_2 + \widehat{X}_2 \widehat{X}_1 \rangle - 2\langle \widehat{X}_1 \rangle^2 \langle \widehat{X}_2 \rangle^2 = 0$  (для фоковских каждое слагаемое равно нулю, а для когерентных среднее от произведения равно произведению средних), кроме этого  $D_1(0) = D_2(0)$ . Таким образом, для этих состояний дисперсии квадратурных компонент не меняются с течением времени.

**6.35.** Используя распределение Пуассона (6.30), находим дисперсию числа квантов  $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \bar{n} = |z|^2$ .

**6.36.** Воспользовавшись свойством полноты когерентных состояний, имеем

$$\widehat{\rho} = \sum_{n,m} C_{n,m} \frac{1}{\pi} \int \widehat{a}^n |\alpha\rangle \langle \alpha| \widehat{a}^{\dagger m} d^2\alpha = \int \sum_{n,m} \frac{1}{\pi} C_{n,m} \alpha^n \alpha^{*m} |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha.$$

Таким образом, из сравнения с (6.38) имеем

$$\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi} C_{n,m} \alpha^n \alpha^{*m}.$$

Обратим внимание на то, что эта функция одновременно зависит от  $\alpha$  и  $\alpha^*$ , т. е. не является аналитической функцией  $\alpha$ .

**6.37.** Записываем матрицу плотности для одной моды через векторы фоковских состояний

$$(1) \quad \widehat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn} |n\rangle \langle n|, \quad \text{где} \quad \rho_{nn} = (1 - e^{-\alpha}) e^{-\alpha n}, \quad \alpha = \frac{\hbar\omega}{T}.$$

Значение  $\rho_{nn}$  определяется формулой (1) из решения примера 6.3, где оно обозначалось посредством  $W_N$ . Вводим в эти соотношения среднее число фотонов (6.24),

$$(2) \quad \hat{\rho} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle\langle n|,$$

и составляем в соответствии с (6.42) матричный элемент (3)

$$\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n \langle -u|n\rangle\langle n|u\rangle = \frac{1}{1 + \bar{n}} \exp\left(-\frac{2\bar{n} + 1}{1 + \bar{n}}|u|^2\right).$$

Здесь мы использовали результат (6.28) и разложение экспоненты в степенной ряд. Подставив выражение (3) под интеграл в (6.42) и выполнив интегрирование, получим (6.44).

**6.38.** Матрица плотности в фоковском представлении может быть найдена как результат непосредственного вычисления ее матричных элементов

$$\begin{aligned} \rho_{nm} &= \frac{1}{\pi} \int \mathcal{P}(\alpha) \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|m\rangle d^2\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \mathcal{P}(\alpha) \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n! m!}} \exp(-|\alpha|^2) d^2\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha| d|\alpha| \int_0^{2\pi} d\varphi \mathcal{P}(\alpha) \frac{|\alpha|^{n+m}}{\sqrt{n! m!}} \exp(i(n-m)\varphi) \exp(-|\alpha|^2). \end{aligned}$$

Интеграл по фазе комплексной амплитуды  $\varphi$  даст символ Кронекера  $\delta_{nm}$ , интеграл по модулю  $|\alpha|$  вычисляется на основе известных свойств дельта-функции. В результате находим

$$\rho_{nm} = \frac{|\alpha_0|^{2n}}{n!} \exp(-|\alpha_0|^2) \delta_{nm}.$$

Диагональные элементы совпадают с диагональными элементами когерентного состояния, а недиагональные равны нулю. Подчеркнем, что именно отсутствие недиагональных компонент матрицы плотности отличает это состояние от когерентного.

Нормальная характеристическая функция может быть найдена в соответствии с ее определением:

$$\theta[\kappa, \kappa^*] = Sp(\hat{\rho} \exp(\kappa \hat{a}^\dagger) \exp(-\kappa^* \hat{a})) = \quad (6.134)$$

$$= \sum_n \rho_{nn} \langle n | \exp(\kappa \hat{a}^\dagger) \exp(-\kappa^* \hat{a}) | n \rangle. \quad (6.135)$$

Воспользуемся разложением функции от оператора в ряд Тейлора,

$$\exp(-\kappa^* \hat{a}) | n \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-\kappa^* \hat{a})^m | n \rangle,$$

а также свойством оператора уничтожения

$$\hat{a}^m | n \rangle = \sqrt{n * (n-1) * \dots * (n-m)} | n-m \rangle,$$

если  $n \geq m$  и  $\hat{a}^m | n \rangle = 0$ , если  $n < m$ . Тогда

$$\begin{aligned} \theta[\kappa, \kappa^*] &= \sum_n \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^n \rho_{nn} \kappa^l \frac{\sqrt{n!}}{l! \sqrt{(n-l)!}} (-\kappa^*)^m \frac{\sqrt{n!}}{m! \sqrt{(n-m)!}} \\ \langle n-l | n-m \rangle &= \sum_n \sum_{l=0}^n \rho_{nn} (-|\kappa|^2)^l \frac{n!}{(l!)^2 (n-l)!}. \end{aligned}$$

Сумма по  $l$  может быть представлена многочленами Лагерра, в соответствии с их определением (см. [Абрамовиц и Стиган (1979)])

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{n!}{l!^2 (n-l)!} x^l = L_n(x)$$

что приводит к следующему разложению:

$$\theta[\kappa, \kappa^*] = \sum_n \rho_{nn} L_n(|\kappa|^2).$$

Подставляя в это разложение матричные элементы, найденные выше, и учитывая тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} L_n(x) = e^y J_0(2\sqrt{xy}),$$

получим следующее представление для производящей функции через функцию Бесселя нулевого порядка:

$$\theta[\kappa, \kappa^*] = J_0(2|\kappa||\alpha_0|),$$

где в правой части при проведении дифференцирований по  $\kappa$  либо  $\kappa^*$  следует использовать равенство:  $|\kappa| = \sqrt{\kappa\kappa^*}$ .

В заключение заметим, что поле, описанное в рассмотренной задаче, может быть сформировано, например, случайным классическим током  $I(t) = |\alpha_0| \exp(i(\omega_0 t + \varphi))$ , где  $\alpha_0$  и  $\omega_0$  — постоянные амплитуда и частота тока, а  $\varphi$  — случайная начальная фаза, равномерно распределенная в интервале от 0 до  $2\pi$ .

**6.39.** Воспользуемся тем, что характеристическая функция суперпозиции двух независимых случайных процессов равна произведению их характеристических функций

$$\theta[\kappa, \kappa^*] = \theta_1[\kappa, \kappa^*]\theta_2[\kappa, \kappa^*] = \exp(\kappa\alpha_0^* - \kappa^*\alpha_0) \exp(-\bar{n}\kappa\kappa^*).$$

Первое равенство в этом соотношении фактически является определением понятия суперпозиции, поскольку, как можно убедиться, при этом обеспечивается следующее разбиение основных статистических моментов по соответствующим моментам формирующих случайных процессов

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \langle a \rangle_1 + \langle a \rangle_2 \\ \langle a^\dagger a \rangle &= \langle a^\dagger a \rangle_1 + \langle a^\dagger a \rangle_2 + \langle a^\dagger \rangle_1 \langle a \rangle_2 + \langle a^\dagger \rangle_2 \langle a \rangle_1 \end{aligned}$$

и т. д. Параметр  $\bar{n}$  характеризует среднее число фотонов в некогерентном гауссовом излучении. Функция квазивероятности Глаубера–Сударшана в соответствии с (6.43) связана преобразованием Фурье с нормальной характеристической функцией (6.39). Предоставляем читателю убедиться самостоятельно, что квазивероятность, в этом случае, определяется сверткой квазивероятностей составляющих случайных процессов

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\alpha) &= \int \mathcal{P}_1(\beta) \mathcal{P}_2(\alpha - \beta) d^2\beta = \\ &= \frac{1}{\pi\bar{n}} \int \delta(\beta - \alpha_0) \exp\left(-\frac{|\alpha - \beta|^2}{\bar{n}}\right) d^2\beta = \frac{1}{\pi\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha - \alpha_0|^2}{\bar{n}}\right). \end{aligned}$$

Полученный результат имеет прозрачный физический смысл. Возникающее в результате суперпозиции квантовое состояние представляет колоколообразное распределение сосредоточенное в окрестности среднего значения  $\alpha_0$

и «размытое» в пределах радиуса неопределенности  $\sqrt{\bar{n}}$ . В пределе  $\bar{n} \rightarrow 0$  данное распределение переходит в  $\delta$ -функцию, характерную для когерентного состояния. В противоположном случае  $\alpha_0 = 0$  переходит в распределение Гаусса, характерное для некогерентного излучения.

**6.40.** Вычисляя корреляционную функцию с помощью квазивероятности Глаубера–Сударшана, находим

$$G^{m,m} = \int \mathcal{P}(\alpha) \alpha^{*m} \alpha^m d^2\alpha = \int \frac{1}{\pi\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right) \alpha^{*m} \alpha^m d^2\alpha = m! \bar{n}$$

— для равновесного теплового источника и

$$G^{m,m} = \int \mathcal{P}(\alpha) \alpha^{*m} \alpha^m d^2\alpha = \int \delta(\alpha - \alpha_0) \alpha^{*m} \alpha^m d^2\alpha = |\alpha_0|^2 = \bar{n}$$

— для когерентного одномодового поля.

**6.41.** По определению сжатые состояния определяются как собственные функции из уравнения

$$(1) \quad (\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger)|\gamma, \beta\rangle = \beta|\gamma, \beta\rangle,$$

где  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ . Оператор  $\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger$  может быть представлен как результат унитарного преобразования оператора уничтожения под действием оператора сжатия

$$(2) \quad \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger = \hat{S}(\gamma)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\gamma),$$

в чем можно убедиться, если применить операторное тождество

$$\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

для случая  $\hat{B} = \hat{a}$  и  $\hat{A} = \gamma^*\hat{a}^2/2 - \gamma\hat{a}^{\dagger 2}/2$ . При этом  $\mu = \text{ch } r$ ,  $\nu = e^{2i\theta} \text{sh } r$ .

Таким образом, уравнение (1) может быть преобразовано к следующему виду:

$$(3) \quad \hat{S}(\gamma)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\gamma)|\gamma, \beta\rangle = \beta|\gamma, \beta\rangle,$$

или

$$(4) \quad \hat{a}\hat{S}^\dagger(\gamma)|\gamma, \beta\rangle = \beta\hat{S}^\dagger(\gamma)|\gamma, \beta\rangle.$$



Последнее соотношение показывает, что функция  $\widehat{S}^\dagger(\gamma)|\gamma, \beta\rangle$  описывает когерентное состояние, соответствующее собственному значению  $\beta$ , т. е.  $|\beta\rangle = \widehat{S}^\dagger(\gamma)|\gamma, \beta\rangle$ . Следовательно,

$$|\gamma, \beta\rangle = \widehat{S}(\gamma)|\beta\rangle = \widehat{S}(\gamma)\widehat{D}(\beta)|vac\rangle$$

Отметим, что в процессе решения задачи установлено, что, с учетом общей фазовой неопределенности в определении волновой функции, комплексные параметры  $\mu$  и  $\nu$  могут рассматриваться как функции двух вещественных параметров  $r$  и  $\vartheta$ . Последние, в свою очередь, могут быть объединены в единый комплексный параметр  $\gamma$ .

#### 6.42. Воспользуемся определением сжатых состояний

$$(1) \quad (\mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^\dagger)|\mu, \nu, \beta\rangle = \beta|\mu, \nu, \beta\rangle.$$

Умножим это равенство слева на бра-вектор произвольного когерентного состояния  $\langle\alpha|$

$$(2) \quad \langle\alpha|\mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^\dagger|\mu, \nu, \beta\rangle = \beta\langle\alpha|\mu, \nu, \beta\rangle.$$

Используем одно из возможных представлений когерентного состояния (см. решение задачи 6.32)

$$(3) \quad |\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha\widehat{a}^\dagger)|vac\rangle,$$

тогда левая часть равенства (2) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} (4) \quad \langle\alpha|\mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^\dagger|\mu, \nu, \beta\rangle &= \mu\langle\alpha|\widehat{a}|\mu, \nu, \beta\rangle + \nu\langle\alpha|\widehat{a}^\dagger|\mu, \nu, \beta\rangle = \\ &= \mu\langle vac|\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha^*\widehat{a})\widehat{a}|\mu, \nu, \beta\rangle + \nu\alpha^*\langle\alpha|\mu, \nu, \beta\rangle = \\ &= \mu(\partial/\partial\alpha^* + \alpha/2)\langle vac|\exp\left(-\frac{\alpha\alpha^*}{2}\right) \exp(\alpha^*\widehat{a})|\mu, \nu, \beta\rangle + \\ &\quad + \nu\alpha^*\langle\alpha|\mu, \nu, \beta\rangle. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в последнем равенстве  $\alpha$  и  $\alpha^*$  рассматриваются как независимые параметры, которые понимаются как взаимно сопряженные только после проведения дифференцирования. Соотношение (2)

может быть представлено как дифференциальное уравнение первого порядка относительно искомого коэффициента разложения сжатого состояния по векторам  $|\alpha\rangle$  когерентных состояний:

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \langle \alpha | \mu, \nu, \beta \rangle = \left( \frac{\beta}{\mu} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\nu \alpha^*}{\mu} \right) \langle \alpha | \mu, \nu, \beta \rangle.$$

Непосредственным интегрированием находим

$$(6) \quad \langle \alpha | \mu, \nu, \beta \rangle = C \exp \left( \frac{\beta \alpha^*}{\mu} - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\nu \alpha^{*2}}{2\mu} \right).$$

Постоянную интегрирования найдем из условия нормировки

$$\langle \mu, \nu, \beta | \mu \nu, \beta \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha |\langle \mu, \nu, \beta | \alpha \rangle|^2 = 1.$$

Для наиболее важного, с практической точки зрения, случая  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$  возникающий нормировочный интеграл может быть вычислен явно:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha \left| \exp \left( \frac{\beta \alpha^*}{\mu} - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\nu \alpha^{*2}}{\mu} \right) \right|^2 = |\mu| \exp \left( |\beta|^2 - \frac{\beta^{*2} \nu}{2\mu^*} - \frac{\beta^2 \nu^*}{2\mu} \right).$$

В результате с точностью до произвольного фазового множителя получаем следующее представление для матричного элемента перекрывания сжатого и когерентного состояний:

$$(7) \quad \langle \alpha | \mu, \nu, \beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \exp \left( -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} - \frac{\nu \alpha^{*2}}{2\mu} + \frac{\nu^* \beta^2}{2\mu} + \frac{\alpha^* \beta}{\mu} \right).$$

Отметим, что в частном случае  $\alpha = 0$  (вакуумное состояние) и  $\beta = 0$  (так называемое состояние «сжатого вакуума») матричный элемент перекрывания стремится к нулю  $1/\sqrt{\mu} \rightarrow 0$ , если  $\mu \rightarrow \infty$ . Такой результат понятен из общих геометрических соображений: перекрывание гауссова круга неопределенности на плоскости  $\alpha$ , характерного для когерентного состояния, с эллипсом неопределенности, характерным для сжатого состояния, уменьшается с увеличением степени сжатия.

#### 6.43. Воспользуемся разложением

$$(1) \quad \langle \alpha | \mu, \nu, \beta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \mu, \nu, \beta \rangle.$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение, полученное в предыдущей задаче, а в правую — известное значение скалярного произведения векторов фоковского и когерентного состояний —

$$\langle \alpha | n \rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}$$

— приходим к следующему соотношению:

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{\nu\alpha^{*2}}{2\mu} + \frac{\beta\alpha^*}{\mu}\right) = \exp\left(\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{\beta^2\nu^*}{2\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n | \mu, \nu, \beta \rangle.$$

Это соотношение можно рассматривать как разложение выражения, стоящего в левой части, в ряд по степеням  $\alpha^*$ . С другой стороны, левую часть можно рассматривать как производящую функцию для полиномов Эрмита. Действительно, производящая функция определяется соотношением [Абрамовиц и Стиган (1979)]

$$(3) \quad \exp(-x^2 + ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} H_n\left(\frac{a}{2}\right)$$

и в случае  $x = \sqrt{\nu/2\mu}\alpha^*$  и  $a = \beta\sqrt{2/\mu\nu}$  совпадает с экспоненциальным множителем в левой части разложения (2). Последнее принимает вид

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{n!} H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right) \left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{n/2} = \\ = \exp\left(\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{\beta^2\nu^*}{2\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n | \mu, \nu, \beta \rangle.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\alpha^*$ , находим искомый матричный элемент

$$(5) \quad \langle n | \mu, \nu, \beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}\mu} \left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2} + \frac{\nu^*\beta^2}{2\mu}\right) H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right).$$

Обратим внимание на то, что в случае разложения состояния «сжатого вакуума» ( $\beta \rightarrow 0$ ) по базису фоковских состояний в пределе  $\mu \rightarrow \infty$  становятся существенными проекции на состояния с большими  $n$ . Это означает, что

геометрическая интерпретация «сжатого вакуума» в виде деформированного вакуумного состояния на плоскости  $\alpha$ , в значительной степени условна, ибо сжатое состояние, в действительности, является многочастичным, с участием большого количества фотонов.

**6.44.** Воспользуемся определением нормальной характеристической функции и результатом предыдущей задачи:

$$(1) \quad \theta[\kappa, \kappa^*] = \langle \gamma, \beta | \exp(\kappa \hat{a}^\dagger) \exp(-\kappa^* \hat{a}) | \gamma, \beta \rangle = \\ = \langle vac | D^\dagger(\beta) S^\dagger(\gamma) e^{\kappa a^\dagger} S(\gamma) D(\beta) D^\dagger(\beta) S^\dagger(\gamma) e^{-\kappa^* a} S(\gamma) D(\beta) | vac \rangle.$$

Используем также закон преобразования операторов

$$(2) \quad \hat{S}(\gamma) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\gamma) = \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^\dagger, \quad \hat{S}(\gamma) \hat{a}^\dagger \hat{S}^\dagger(\gamma) = \mu \hat{a}^\dagger + \nu^* \hat{a}, \\ \hat{D}(\beta) \hat{a} \hat{D}^\dagger(\beta) = \hat{a} - \beta, \quad \hat{D}(\beta) \hat{a}^\dagger \hat{D}^\dagger(\beta) = \hat{a}^\dagger - \beta^*.$$

Учитывая свойство операторов сжатия и сдвига  $\hat{S}^\dagger(\gamma) = \hat{S}(-\gamma)$  и  $\hat{D}^\dagger(\beta) = \hat{D}(-\beta)$ , соотношение (1) может быть преобразовано к виду

$$(3) \quad \theta[\kappa, \kappa^*] = \exp[\kappa(\mu\beta^* - \nu^*\beta) - \kappa^*(\mu\beta - \nu\beta^*)] \times \\ \times \langle vac | \exp[\kappa(\mu \hat{a}^\dagger - \nu^* \hat{a})] \exp[-\kappa^*(\mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger)] | vac \rangle.$$

Разлагая операторные функции в ряды Тейлора и удерживая только вклады, неисчезающие после усреднения по вакуумному состоянию, получим

$$(4) \quad \theta[\kappa, \kappa^*] = \exp[\kappa(\mu\beta^* - \nu^*\beta) - \kappa^*(\mu\beta - \nu\beta^*)] \times \\ \times \exp\left(-\kappa\kappa^* \operatorname{sh}^2 r - \frac{\kappa^2}{4} e^{-2i\vartheta} \operatorname{sh} 2r - \frac{\kappa^{*2}}{4} e^{2i\vartheta} \operatorname{sh} 2r\right),$$

что совпадает с ответом, приведенным в условии задачи.

Данное состояние описывает поле, характеризующееся средней комплексной амплитудой  $\langle \hat{a} \rangle = \alpha$  и поведение поля в среднем напоминает поведение когерентного состояния той же амплитуды. Однако в отличие от когерентного состояния неопределенности квадратурных компонент ведут себя иначе. Предположим для простоты, что параметр  $\beta$  — вещественен, а фаза  $\vartheta \rightarrow 0$ . В соответствии с определением квадратурных компонент (см. задачу 6.33)

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}),$$

$$\hat{X}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Используя производящую функцию (4), находим

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \rangle - (\langle \hat{a} \rangle^2 + \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2 + 2\langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} [1 - 2e^{-r} \operatorname{sh} r] \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \\
 (5) \quad \langle \Delta \hat{X}_2^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle -\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \rangle + (\langle \hat{a} \rangle^2 + \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2 - 2\langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} [1 + 2e^r \operatorname{sh} r] \rightarrow \infty \quad \text{при } r \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Таким образом неопределенность координатной квадратуры уменьшается, а неопределенность импульсной квадратуры неограниченно нарастает. При этом для произведения  $\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle \langle \Delta \hat{X}_2^2 \rangle = 1/4$  сохраняется то же значение, что и для когерентного состояния. Именно свойство (5) и определяет эти состояния как сжатые. Предоставляем читателю самостоятельно исследовать, как изменится результат в общем случае комплексной амплитуды  $\beta$  и произвольной фазы  $\vartheta$ .

**6.45.** Средние от нормально упорядоченных произведений операторов рождения и уничтожения можно вычислить с помощью квазивероятности Глаубера–Сударшана (6.41), которая для равновесного теплового излучения имеет гауссов вид (6.44):

$$(1) \quad \mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right).$$

Отсюда заключаем, что и для квадратурных компонент (см. задачи 6.37, 6.44), рассматриваемых по отдельности, распределения сохраняют гауссов вид.

Выразим дисперсию координатной квадратуры через операторы рождения и уничтожения

$$(2) \quad \langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[ \langle \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \rangle - (\langle \hat{a} \rangle^2 + \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2 + 2\langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle) \right].$$

Дисперсия координатной квадратуры может быть вычислена как усреднение выражения (2) с помощью квазивероятности (1):

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle &= \int d^2\alpha \frac{1}{2\pi\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right) (\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1) = \\
 &= \bar{n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \coth(\hbar\omega/2T).
 \end{aligned}$$

В последнем равенстве использована формула для среднего числа фотонов в моде в случае теплового излучения, характеризуемого температурой  $T$ . Дисперсия импульсной квадратурной компоненты  $\langle \Delta \hat{X}_2^2 \rangle$  вычисляется аналогично.

**6.46.** Покажем, что оператор эволюции поля, обусловленный взаимодействием с классическим током, совпадает с оператором смещения (сдвига) амплитуды  $\hat{D}(\alpha)$  (см. формулу (6.36)). Оператор взаимодействия классического тока с электромагнитным полем имеет вид

$$(1) \quad \hat{V}(t) = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \hat{\mathbf{A}} d^3r,$$

где предполагается, что  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  — заданная числовая функция координат и времени, а  $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  — оператор поперечной (квантованной) компоненты векторного потенциала.

Рассмотрим эволюцию электромагнитного поля из вакуумного состояния для достаточно малого временного промежутка  $\delta t$ . Используя представление взаимодействия (см. пример 6.10), введем оператор эволюции

$$(2) \quad S(t + \delta t, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{V}_I(t) \delta t\right),$$

где  $\hat{V}_I(t)$  представляет собой оператор (1), записанный в представлении взаимодействия. В развернутой форме, используя явный вид оператора  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ , см. формулу (6.13), получим

$$(3) \quad S(t + \delta t, t) = \exp\left\{\delta t \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(-\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} u_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger u_{\mathbf{k}\lambda}(t)\right)\right\},$$

где использовано обозначение

$$u_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r$$

Соотношение (3) для оператора эволюции может быть представлено в виде произведения

$$(4) \quad S(t + \delta t, t) = \prod_{\mathbf{k}\lambda} \exp\left\{\delta t \left(-\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} u_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger u_{\mathbf{k}\lambda}(t)\right)\right\} = \prod_{\mathbf{k}\lambda} \hat{D}_{\mathbf{k}\lambda}(\delta t u_{\mathbf{k}\lambda}(t)),$$

где в правой части введен для каждой моды оператор сдвига ее аргумента на малую величину.

Учитывая свойство оператора сдвига  $\widehat{D}(\alpha_1)\widehat{D}(\alpha_2) = \widehat{D}(\alpha_1 + \alpha_2)$ , если  $\arg(\alpha_1) = \arg(\alpha_2)$ , матрица плотности поля в произвольный момент времени может быть представлена следующим образом:

$$(5) \quad \rho(t) = \prod_{\mathbf{k}\lambda} \widehat{D}_{\mathbf{k}\lambda}(v_{\mathbf{k}\lambda}(t))\rho(0) \prod_{\mathbf{k}\lambda} \widehat{D}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(v_{\mathbf{k}\lambda}(t)),$$

где  $v_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \int_0^t u_{\mathbf{k}\lambda}(\tau) d\tau$ . Если начальное состояние — вакуумное,  $\rho(0) = |vac\rangle\langle vac|$ , то состояние  $\rho(t)$  оказывается многомодовым когерентным, см. задачу 6.32.

**6.48.** Переходы из состояния с  $l = 1$  в состояние с  $l = 0$  разрешены правилами отбора (6.88) для электрического дипольного излучения, поэтому соответствующие вероятности можно вычислить с помощью формулы (6.73). Спиновое состояние электрона при переходе не изменяется. Координатные волновые функции начального и конечного состояний имеют вид [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]

$$(1) \quad \psi_i = R_{21}(r)Y_{1m_l}(\vartheta, \varphi), \quad \psi_f = R_{10}(r)Y_{00},$$

где  $R_{10}(r) = \frac{2}{a_B^{3/2}}e^{-r/a_B}$ ,  $R_{21}(r) = \frac{r}{2\sqrt{6}a_B^{5/2}}e^{-r/2a_B}$

— радиальные волновые функции атома водорода,  $a_B = \hbar^2/m_e e^2$  — боровский радиус,

$$(2) \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \quad Y_{1, \pm 1}(\vartheta, \varphi) = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$$

— угловые функции (сферические функции Лежандра, см. ответ к задаче 1.118). Разложим радиус-вектор по циклическим компонентам (см. задачу 1.17)

$$(3) \quad \mathbf{r} = \sum_{\mu=-1}^{+1} (-1)^\mu e_\mu x_\mu^*, \quad x_\mu = r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (-1)^\mu Y_{1\mu}(\vartheta, \varphi),$$

$$e_\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm i e_y), \quad e_0 = e_z.$$

Выбрав ось  $Ox$  в плоскости, определяемой осью квантования ( $Oz$ ) и волновым вектором испущенного фотона, и вычислив дипольный момент перехода (6.72), будем иметь

$$(4) \quad \frac{dw^{sp}}{d\Omega_k} = \frac{2^{16} \omega^3 (ea_B)^2}{3^9 \cdot 2\pi \hbar c^3} |\mathbf{e}_\sigma^* \cdot \mathbf{e}_{m_l}|^2.$$

Действительные орты линейной поляризации кванта выберем так, чтобы  $\mathbf{e}_1$  лежал в плоскости  $xz$  и имел проекции  $\cos \theta$ ,  $0$ ,  $-\sin \theta$  на декартовы оси; при этом  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$ . В этих обозначениях угловая зависимость излучения будет описываться функцией  $F_{\sigma, m_l}(\theta) = |\mathbf{e}_\sigma^* \cdot \mathbf{e}_{m_l}|^2$ , значения которой приведены ниже в таблице.

$m_l$	+1	0	-1
$\sigma = 1$	$\frac{1}{2} \cos^2 \theta$	$\sin^2 \theta$	$\frac{1}{2} \cos^2 \theta$
$\sigma = 2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\sum_{\sigma} F_{\sigma, m_l}(\theta)$	$\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$	$\sin^2 \theta$	$\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$

В последней строке таблицы приведено угловое распределение излучения, просуммированного по поляризациям. Для неполяризованного атома угловая функция  $\sum_{m_l} F_{\sigma, m_l}(\theta) = 2/3$  изотропна ввиду отсутствия выделенного направления в источнике излучения.

**6.49.** Интенсивность излучения вычисляется как произведение энергии кванта  $\hbar\omega = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f$  на суммарную по всем направлениям вероятность перехода в единицу времени. Из выражения эффективной плотности заряда, приведенного в условии задачи 5.23, следует, что рассматривается переход из состояния  $2p$ ,  $m_l = 0$  в основное состояние  $1s$ ,  $m_l = 0$ . С помощью результатов предыдущей задачи получим формулу, в точности совпадающую с ответом задачи 5.23, который можно записать в другой форме:

$$I = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \frac{\alpha^3 m_e e^4}{\hbar^3} \hbar\omega.$$

Здесь  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры (6.51).

**6.50.** Независимо от магнитного квантового числа  $m_l$  время жизни атома в возбужденном состоянии  $2p$

$$\tau = \frac{1}{w^{sp}} = \left(\frac{3}{2}\right)^8 \alpha^{-3} \frac{\hbar^3}{m_e e^4} \approx 1,6 \times 10^{-9} \text{ с.}$$



**6.51.** Согласно результатам задачи 6.20, фотон с правой циркулярной поляризацией имеет проекцию спина  $+\hbar$  на ось, направленную вдоль его волнового вектора  $\mathbf{k}$ . При поглощении его электроном по закону сохранения момент фотона будет передан электрону, который перейдет в состояние с  $m_l = +1$ . Аналогично, фотон с левой круговой поляризацией переведет электрон в состояние с  $m_l = -1$ , а линейно поляризованный фотон — в состояние с  $m_l = 0$ .

**6.52.** Интенсивность  $I_\alpha$  линии  $Ly_\alpha$  уже была вычислена в задаче 6.48. Вычислив аналогичным образом  $I_\beta$ , получим  $I_\alpha/I_\beta \approx 3,2$ .

**6.53.** После интегрирования дифференциального выражения (6.76) для вероятности электрического дипольного излучения по направлениям вылета фотона получим

$$(1) \quad w^{sp} = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\mathbf{p}_{fi}|^2.$$

Матричный элемент дипольного момента должен вычисляться с волновыми функциями

$$(2) \quad \Psi_i = R_{20}(r)Y_{00}\chi_\mu, \quad \Psi_f = R_{21}(r)\Phi_{1/2 m_j}.$$

Выразив радиус-вектор через сферические функции Лежандра (см. уравнение (3) из решения задачи 6.47) и используя условие ортонормированности спиноров  $(\chi_{\mu'}, \chi_\mu) = \delta_{\mu\mu'}$ , получим

$$(3) \quad \mathbf{p}_{fi} = e\sqrt{\frac{4\pi}{3}} C_{1, m_j - \mu}^{1/2 m_j} \mathbf{e}_{\mu - m_j} \int_0^\infty R_{20}(r)R_{21}(r)r^3 dr.$$

Полная вероятность перехода должна быть просуммирована по конечным состояниям полного момента  $m_j = \pm 1/2$  и усреднена по начальным спиновым состояниям  $\mu = \pm 1/2$ :  $w = (1/2) \sum_{\mu, m_j} w^{sp}$ . Выделив множители, зависящие от магнитных квантовых чисел, будем иметь

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m_j} \sum_{\mu} C_{1, m_j - \mu}^{1/2 m_j} C_{1, m_j - \mu}^{1/2 m_j} (\mathbf{e}_{\mu - m_j}^* \cdot \mathbf{e}_{\mu - m_j}) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m_j} \sum_{\mu} C_{1, m_j - \mu}^{1/2 m_j} C_{1, m_j - \mu}^{1/2 m_j} = 1. \end{aligned}$$

Последнее равенство является следствием ортонормированности спин-угловых функций  $\Phi_{jm_j}$ . Пользуясь их определением, данным в условии задачи, находим

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & (\Phi_{j'm'_j}, \Phi_{jm_j}) = \\
 & = \sum_{m', \mu'} \sum_{m, \mu} C_{l'm', 1/2\mu'}^{j' m'_j} C_{lm, 1/2\mu}^{jm_j} (\chi_{\mu'}, \chi_{\mu}) \int Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \\
 & = \sum_{m, \mu} C_{lm, 1/2\mu}^{j' m'_j} C_{lm, 1/2\mu}^{jm_j} = \delta_{jj'} \delta_{m_j m'_j}.
 \end{aligned}$$

Это значение суммы коэффициентов Клебша–Гордана и использовано при получении результата (4). Таким образом, вычисляя простой интеграл в (3) и собирая найденные величины, приходим к выражению

$$w = \frac{12e^2 a_B^2 \omega^3}{\hbar c^3} \approx 0,8 \times 10^{-9} \text{ с.}$$

**6.54.** Считая протон неподвижным, запишем волновые функции атома в начальном и конечном состояниях:

$$(1) \quad \psi_i = R_{10} Y_{00} \Phi_{1M}, \quad \psi_f = R_{10} Y_{00} \Phi_{00}.$$

Здесь  $R_{10}$ ,  $Y_{00}$  — радиальная и угловая функции электрона,  $\Phi_{SM}$  — спинные волновые функции электрона ( $e$ ) и протона ( $p$ ), соответствующие синглетному и триплетному состояниям:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \Phi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{1/2}(e) \chi_{-1/2}(p) - \chi_{1/2}(p) \chi_{-1/2}(e)], \\
 & \Phi_{1M} = \begin{cases} \chi_{1/2}(e) \chi_{1/2}(p), & M = 1; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{1/2}(e) \chi_{-1/2}(p) - \chi_{1/2}(p) \chi_{-1/2}(e)], & M = 0; \\ \chi_{-1/2}(e) \chi_{-1/2}(p), & M = -1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Радиационный переход сопровождается изменением спинового состояния двух частиц и вызывается взаимодействием спина электрона с полем излучения. Взаимодействие протона с полем меньше в  $m_p/m_e$  раз и может не учитываться. В операторе взаимодействия (6.57) достаточно учесть только спиновую часть,

$$(3) \quad \widehat{V} = -\mu_B \widehat{\sigma} \cdot \widehat{H},$$

так как остальные слагаемые дадут нулевой вклад из-за ортогональности спиновых функций синглетного и триплетного состояний. В (3)  $\hat{\sigma}$  — матричный вектор Паули,  $\mu_B$  — магнетон Бора. Вычисляя матричный элемент от оператора  $\hat{\sigma}$  с волновыми функциями (2), находим  $(\Phi_{00}, \hat{\sigma} \Phi_{10}) = e_z$ . Для  $M = \pm 1$  получим соответственно  $\pm e_z / \sqrt{2}$ . Для вычисления вероятности перехода в единицу времени используем формулы (6.10) и (6.59). Полная вероятность, усредненная по начальным состояниям  $M = 0, \pm 1$  и просуммированная по поляризациям кванта, запишется в виде

$$(4) \quad w = \frac{2}{9} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\Delta \mathcal{E}^3}{\hbar m_e^2 c^4} \approx 2 \times 10^{-15} \text{ с.}$$

Рассмотренный переход между подуровнями сверхтонкой структуры атомов водорода соответствует длине волны порядка 21 см и широко используется в радиоастрономии для исследования распределения нейтрального (неионизованного) водорода во Вселенной. Любопытно сравнить времена жизни триплетного подуровня и уровня  $2p$  водорода (см. задачу 6.49): в первом случае имеем  $\tau = 1/w \approx 10^7$  лет, тогда как для перехода  $2p \rightarrow 1s$  в ультрафиолетовом диапазоне получаем  $\tau \approx 1,6 \times 10^{-9}$  с. Столь большая разница в основном обязана сильной зависимости,  $\tau \propto \omega^{-3}$ , от частоты излучаемого фотона.

**6.55.** Применяем общую формулу (6.57) теории возмущений,

$$(1) \quad dw^{abs} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f + \hbar\omega) d\nu,$$

где

$$(2) \quad \hat{V} = -(e/mc) \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}},$$

а векторы начального и конечного состояний имеют вид

$$(3) \quad |i\rangle = \psi_{100}(r) |N_s\rangle, \quad |f\rangle = \psi_p(\mathbf{r}) |N_s - 1\rangle, \quad \psi_p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

— волновая функция свободного электрона в конечном состоянии. При такой нормировке число состояний в непрерывном спектре следует записать в виде

$$(4) \quad d\nu = p^2 dp d\Omega_p = 2^{1/2} m^{3/2} \mathcal{E}_p^{1/2} d\mathcal{E}_p d\Omega_p.$$

Спиновое состояние электрона не изменяется под действием оператора (2), поэтому спиновую волновую функцию можно не выписывать.

Для получения сечения рассеяния нужно поделить (1) на плотность потока  $j_0 = N_s c / \mathcal{V}$  падающих на атом фотонов. При интегрировании в матричном элементе по координатам следует учесть, что волновой вектор кванта мал по сравнению с волновым вектором электрона,  $k \ll p\hbar$ . После проведения вычислений получим дифференциальное сечение фотоионизации атома поляризованными фотонами:

$$(5) \quad d\sigma_{ph} = 64 \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{I_0}{\hbar\omega} \right)^{7/2} a_B^2 |e_s \cdot \mathbf{n}|^2 d\Omega_p,$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$  — направление вылета электрона,  $I_0$  — энергия связи (ионизационный потенциал) электрона в основном состоянии атома водорода. После усреднения по поляризациям кванта и интегрированию по направлениям вылета электрона получим полное сечение фотоионизации

$$(6) \quad \sigma_{ph} = \frac{256\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{I_0}{\hbar\omega} \right)^{7/2} a_B^2.$$

Пределы применимости результата:  $I_0 \ll \hbar\omega \ll mc^2$ .

**6.56.** По сравнению с предыдущей задачей волновые функции начального и конечного состояний меняются местами, поэтому квадрат модуля матричного элемента остается тем же. Вместо усреднения по поляризациям кванта нужно произвести суммирование по ним, что дает дополнительный множитель 2. Число конечных состояний  $dv = \mathcal{V}\omega^2 d\Omega_k / (2\pi c)^3$  относится теперь к фотону. Наконец, вместо плотности потока фотонов нужно использовать плотность потока рекомбинирующих электронов  $j_0 = v / (2\pi\hbar)^3$ . В итоге, собирая нужные множители, находим полное сечение рекомбинации

$$\sigma_{rec} = \frac{128\pi}{3} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \left( \frac{I_0}{\mathcal{E}_p} \right)^{5/2} a_B^2.$$

В области применимости расчета,  $I_0 \ll \mathcal{E}_p \ll mc^2$ , оно мало по сравнению с сечением фотоионизации.

**6.58.** Для свободного поля представление взаимодействия совпадает с гейзенберговским представлением, так как взаимодействие с атомными системами отсутствует. Поэтому искомое представление получится, если в равенствах (6.13)–(6.15) заменить операторы рождения и уничтожения фотонов на зависящие от времени (гейзенберговские) операторы согласно (6.23). В частности,

$$\widehat{E}_I(\mathbf{r}, t) = i \sum_j \left( \frac{2\pi\hbar\omega_j}{\mathcal{V}} \right)^{1/2} \left[ (e_j a_j e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} - (e_j^* a_j^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)}) \right].$$

6.59.  $\widehat{V}_I(t) = -\widehat{\mathbf{d}}_I(t) \cdot \widehat{\mathbf{E}}_I(t)$ , где

$$\widehat{\mathbf{d}}_I(t) = \sum_{mn} (d_{nm} e^{i\omega_{nm}t} |n\rangle\langle m| + d_{mn} e^{i\omega_{mn}t} |m\rangle\langle n|),$$

$d_{mn}$  — прежние не зависящие от времени матричные элементы.

6.60.  $\Psi_I(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}_0\right) \Psi_S(t)$ ;  $i\hbar \frac{\partial \Psi_I}{\partial t} = \widehat{V}_I(t) \Psi_I$ ,

где  $\widehat{V}_I(t)$  — оператор взаимодействия в представлении взаимодействия.

6.61. Преобразуем рассматриваемый матричный элемент следующим образом:

$$\begin{aligned} (1) \quad \omega_{ln} \langle l | d_z | n \rangle &= \frac{e}{\hbar} (\mathcal{E}_l - \mathcal{E}_n) \sum_{a=1}^N \langle l | z_a | n \rangle = \\ &= \frac{e}{\hbar} \sum_{a=1}^N \langle l | [\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{z}_a] | n \rangle = -\frac{ie}{m} \sum_{a=1}^N \langle l | \widehat{p}_{za} | n \rangle. \end{aligned}$$

Здесь  $N$  — полное число электронов,  $\widehat{\mathcal{H}}$  — точный гамильтониан атомной системы. Далее применяем соотношения  $\langle l | z | n \rangle = \langle n | z | l \rangle^*$ ,  $\omega_{ln} = -\omega_{nl}$  и получаем

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_l \omega_{ln} |\langle l | d_z | n \rangle|^2 &= \\ &= \frac{ie^2}{2m} \sum_{a=1}^N \sum_l \{ \langle n | \widehat{p}_{za} | l \rangle \langle l | z_a | n \rangle - \langle n | z_a | l \rangle \langle l | \widehat{p}_{za} | n \rangle \} = \\ &= \frac{ie^2}{2m} \sum_{a=1}^N \langle n | [\widehat{p}_{za}, \widehat{z}_a] | n \rangle = \frac{\hbar e^2}{2m} N. \end{aligned}$$

Использована полнота атомных состояний:  $\sum_l |l\rangle\langle l| = 1$ .

6.62. Рассматриваем оператор взаимодействия  $\widehat{V} = -\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$  системы с внешним постоянным электрическим полем как малое возмущение. По теории возмущений вычисляем с учетом членов первого порядка поправку к волновой функции [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]:

$$(1) \quad |\psi\rangle = |0\rangle + \sum_n' \frac{\langle n | \widehat{V} | 0 \rangle}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_n} |n\rangle.$$

Штрих у суммы означает отсутствие члена с  $n = 0$ ;  $\mathcal{E}_n$  — невозмущенные уровни энергии системы частиц. Символ  $|0\rangle$  обозначает волновую функцию основного состояния. С помощью  $|\psi\rangle$  вычисляем среднее квантовомеханическое значение дипольного момента системы, оставляя лишь члены не выше первого порядка по возмущению:

$$(2) \quad \langle \psi | \hat{\mathbf{d}} | \psi \rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{d}} | 0 \rangle + \sum_n \frac{1}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_n} \left\{ \langle n | \hat{V} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\mathbf{d}} | n \rangle + \langle 0 | \hat{V} | n \rangle \langle n | \hat{\mathbf{d}} | 0 \rangle \right\}.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой электрический дипольный момент системы частиц в невозмущенном основном состоянии (если таковой отличен от нуля)<sup>8</sup>. Сумма по  $n$ , пропорциональная приложенному полю, представляет собой индуцированный дипольный момент. Выделив коэффициенты пропорциональности, получим

$$(2) \quad \alpha_{\mu\nu} = \sum_n \frac{1}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_0} \left\{ \langle 0 | \hat{d}_\mu | n \rangle \langle n | \hat{d}_\nu | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{d}_\nu | n \rangle \langle n | \hat{d}_\mu | 0 \rangle \right\}.$$

**6.63.** Используем представление взаимодействия, в котором волновая функция объединенной системы атом + поле удовлетворяет уравнению (см. задачу 6.60; индекс  $I$  опускаем)

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{V}(t)\psi,$$

где оператор взаимодействия в дипольном приближении имеет вид

$$(2) \quad \hat{V}(t) = -\hat{\mathbf{d}}_{21}(t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) |2\rangle \langle 1| - \hat{\mathbf{d}}_{12}(t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) |1\rangle \langle 2|.$$

Оператор дипольного момента зависит от времени,  $d_{21}^\alpha(t) = d_{21}^\alpha \exp(i\omega_{21}t)$ , где  $d_{21}^\alpha$  — не зависящий от времени матричный элемент,  $\omega_{21}$  — частота перехода между состояниями атома. Вид зависящих от времени операторов напряженности поля в представлении взаимодействия приведен в задаче 6.58. Для простоты мы ограничились резонансным приближением (6.105) (его еще называют приближением вращающейся волны), оставив в первом слагаемом (6.63) только положительно-частотную часть оператора электромагнитного поля, ответственную за поглощение фотонов.

<sup>8</sup>Для этого необходимо, чтобы основное состояние не имело определенной четности.

Волновая функция начального состояния системы, соответствующая невзаимодействующим атому и полю, может быть представлена в виде произведения  $\psi_0 = |1\rangle\{|N_s\rangle\}$ , где для определенности мы рассматриваем случай, когда исходное состояние атома было основным, а поле находилось в одном из фоковских состояний.

В первом порядке теории возмущений волновая функция в момент времени  $t$  равна

$$(3) \quad \psi(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \widehat{V}(\tau) d\tau |1\rangle\{|N_s\rangle\}.$$

Вероятность  $\widetilde{W}(t)$  найти атомную систему к моменту времени  $t$  в возбужденном состоянии  $|2\rangle$  равна квадрату модуля  $|\langle 2|\psi(t)\rangle|^2$ , просуммированному по всем возможным конечным состояниям  $|f\rangle$  поля:

$$(4) \quad \widetilde{W}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_f d_{21}^\alpha d_{12}^\beta \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 \langle f|E_\alpha^{(+)}(r, \tau_1)|\{N_s\rangle\rangle \langle\{N_s\}|E_\beta^{(-)}(r, \tau_2)|f\rangle \exp(i\omega_{21}(\tau_1 - \tau_2)).$$

Используя условие полноты полевых состояний  $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$ , будем иметь

$$(5) \quad \widetilde{W}(t) = \frac{1}{\hbar^2} d_{21}^\alpha d_{12}^\beta \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 \langle\{N_s\}|E_\beta^{(-)}(r, \tau_2)E_\alpha^{(+)}(r, \tau_1)|\{N_s\rangle\rangle \exp(i\omega_{21}(\tau_1 - \tau_2)).$$

Для получения окончательного результата нужно еще усреднить найденную вероятность по начальным состояниям поля с заданной в условии задачи матрицей плотности. Введем корреляционную функцию напряженностей поля, взятых в разные моменты времени:

$$(6) \quad \mathcal{G}_{\alpha\beta} = Sp \left( \widehat{\rho} \widehat{E}_\beta^{(-)}(\mathbf{r}, \tau_2) \widehat{E}_\alpha^{(+)}(\mathbf{r}, \tau_1) \right) = \sum_{\{N_j\}} \rho_{\{N_j\}} \langle\{N_j\}|E_\beta^{(-)}(\mathbf{r}, \tau_2)E_\alpha^{(+)}(\mathbf{r}, \tau_1)|\{N_j\}\rangle.$$

Здесь оператор плотности разложен по полной системе фоковских состояний и использована его диагональность в этом базисе. Используя явный

вид операторов поля (задача 6.58), находим

$$(7) \quad \mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1 - \tau_2) = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{V}} \sum_s e_s^\alpha e_s^{*\beta} \omega_s \langle N_s \rangle e^{-i\omega_s(\tau_1 - \tau_2)} = \\ = \int G_{\alpha\beta}(\omega) e^{-i\omega(\tau_1 - \tau_2)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Спектральная плотность поля  $G_{\alpha\beta}(\omega)$  определяется значениями средних чисел заполнения  $\langle N_s \rangle$  рассматриваемого поля.

Обозначив усредненную с оператором плотности вероятность через  $W(t)$ , запишем ее через спектральную плотность поля:

$$(8) \quad W(t) = \frac{1}{\hbar^2} d_{21}^\alpha d_{12}^\beta \int_0^t \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} d\tau_1 d\tau_2 G_{\beta\alpha}(\omega) \exp(i(\omega_{21} - \omega)(\tau_1 - \tau_2)).$$

Интегралы по времени дают

$$(9) \quad \frac{|\exp(i(\omega_{21} - \omega)t) - 1|^2}{(\omega_{21} - \omega)^2} = \frac{4 \sin^2((\omega_{21} - \omega)t/2)}{(\omega_{21} - \omega)^2};$$

при больших  $t$  можно воспользоваться асимптотическим выражением

$$(10) \quad \frac{\sin^2(\omega_{21} - \omega)t/2}{(\omega_{21} - \omega)^2 t/2} \longrightarrow \pi \delta(\omega_{21} - \omega).$$

Таким образом, окончательно находим

$$(11) \quad W(t)/t = \frac{1}{\hbar^2} d_{21}^\alpha d_{12}^\beta G_{\beta\alpha}(\omega_{21})$$

— вероятность перехода в единицу времени для случайного поля определяется спектральной плотностью этого поля на частоте перехода.

**6.64.** С формальной точки зрения, основанной на теории возмущений, рассеяние — это процесс перехода системы из начального состояния  $|i\rangle = \psi_i \Phi_{\{N_s\}}$  в конечное  $|f\rangle = \psi_f \Phi_{\{N'_s\}}$ , где  $\psi_i$  и  $\psi_f$  волновые функции начального и конечного состояний атома, а  $\Phi_{\{N_s\}}$  и  $\Phi_{\{N'_s\}}$  — волновые



функции поля. Дифференциальное сечение рассеяния — это отношение интенсивности излучения, рассеянного в телесный угол  $d\Omega$ , к плотности потока падающего на рассеиватель излучения:

$$(1) \quad d\sigma = \frac{1}{J_{\text{пад}}} \int_f dw_{fi}.$$

Конечные состояния, по которым необходимо проводить суммирование (интегрирование) в этом выражении, определяются условиями наблюдения рассеянного света. Так, если при регистрации используются поляризационные анализаторы, то по поляризациям суммирование проводить не надо. При спектральном анализе рассеянного излучения интегрирование по частотам производится в пределах полосы пропускания соответствующего фильтра.

Обозначим индексом 1 моду, в которой уменьшается число фотонов, а индексом 2 — моду, в которой в результате рассеяния число фотонов увеличивается. Процесс рассеяния является двухфотонным, поэтому для его описания необходимо учитывать как первое слагаемое в (6.57) (во втором порядке теории возмущений), так и второе, описывающее двухфотонные процессы уже в первом порядке. Последнее слагаемое, содержащее взаимодействие спинового магнитного момента атома с магнитным полем, можно опустить, если ограничиться рассмотрением систем, размеры которых много меньше длины волны излучения (электрическое дипольное приближение). Таким образом, оператор взаимодействия представим в виде

$$(2) \quad \hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2; \quad \hat{V}_1 = -\frac{e}{mc} \hat{p} \cdot \hat{A}; \quad \hat{V}_2 = \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2.$$

Вероятность рассеяния в единицу времени в первом неисчезающем порядке можно вычислить по теории возмущений с суммированием по промежуточным состояниям:

$$(3) \quad dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | \hat{V}_2 | i \rangle + \sum_l \frac{\langle f | \hat{V}_1 | l \rangle \langle l | \hat{V}_1 | i \rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l} \right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f) \frac{\mathcal{V} k_2^2 dk_2 d\Omega_2}{(2\pi)^3},$$

где  $\epsilon_l$  — полная энергия системы атом + поле в состоянии  $|l\rangle$ . Индекс 2 у волнового вектора обозначает, что соответствующие величины относятся к рассеянному фотону. Заметим, что мы рассматриваем нерезонансное рассеяние, поэтому можем полностью игнорировать конечную ширину уровней атома.

Рассмотрим матричные элементы операторов  $\widehat{V}_1$  и  $\widehat{V}_2$  по отдельности.

$$\begin{aligned} \langle f|\widehat{V}_2|i\rangle &= \frac{e^2}{2mc^2} \langle f|\widehat{A}^2|i\rangle = \\ &= \frac{e^2}{2mc^2} \sqrt{N_1(N_2+1)} \left( \int \psi_{f_a}^* (A_1(r) \cdot A_2^*(r)) \psi_i d^3r + \right. \\ &\quad \left. + \int \psi_f^* (A_2^*(r) \cdot A_1(r)) \psi_i d^3r \right) = \\ &= \frac{e^2}{2m} \sqrt{N_1(N_2+1)} \frac{4\pi\hbar}{\mathcal{V}\sqrt{\omega_1\omega_2}} \int \psi_f^* e_1 \cdot e_2^* \exp(i(k_1 - k_2) \cdot r) \psi_i d^3r. \end{aligned}$$

Здесь  $N_1$  и  $N_2$ —числа заполнения мод 1 и 2 в начальном состоянии системы.

В дипольном приближении  $\exp(i(k_1 - k_2)r) \approx 1$  и предыдущее выражение можно упростить:

$$(4) \quad \langle f|\widehat{V}_2|i\rangle = \frac{2e^2\pi\hbar\sqrt{N_1(N_2+1)}}{\mathcal{V}m\sqrt{\omega_1\omega_2}} e_1 \cdot e_2^* \delta_{if}.$$

Таким образом, квадратичное по полю слагаемое в операторе взаимодействия влияет только на вероятность процессов рассеяния, происходящих без изменения атомного состояния (такие процессы принято называть когерентными, или упругими).

Матричные элементы оператора  $\widehat{V}_1$  уже вычислялись в примере 6.9:

$$(5) \quad \sum_l \frac{\langle f|\widehat{V}_1|l\rangle\langle l|\widehat{V}_1|i\rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l} = \frac{e^2}{m^2} \frac{2\pi\hbar\sqrt{N_1(N_2+1)}}{\mathcal{V}\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cdot \sum_l \left( \frac{\langle f|\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_2^*|l\rangle\langle l|\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_1|i\rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle f|\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_1|l\rangle\langle l|\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_2^*|i\rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_2} \right).$$

Отметим важное для нерезонансного рассеяния обстоятельство. В сумме по  $l$  в (3) входят слагаемые двух типов — одни описывают процесс, при котором на первом этапе уничтожается фотон падающей волны, а на втором рождается фотон в рассеянной волне. Этим слагаемым соответствует знаменатели вида  $\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1$ . Слагаемые второго типа содержат знаменатели  $\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_2$  и связаны с переходами через промежуточные состояния, в которых рассеянный фотон появляется раньше, чем атомная система поглощает падающий фотон.

Подставляя (4) и (5) в определение сечения (1) и учитывая, что плотность потока фотонов в падающей волне равна  $N_1 c / \mathcal{V}$ , получим

$$(6) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4(N_2 + 1)\omega_2}{m^2 c^4 \omega_1} \left| \mathbf{e}_1 e_2^* \delta_{if} + \frac{1}{m} \sum_l \left( \frac{\langle f | \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_2^* | l \rangle \langle l | \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_1 | i \rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle f | \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_1 | l \rangle \langle l | \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_2^* | i \rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_2} \right) \right|^2.$$

Здесь  $d\Omega$  — телесный угол, в котором распространяется рассеянный фотон, а частоты  $\omega_1, \omega_2$  связаны законом сохранения энергии  $\hbar\omega_1 + \mathcal{E}_i = \hbar\omega_2 + \mathcal{E}_f$ , который формально следует из наличия дельта-функции в (3). Формула (6) содержит множитель  $(N_2 + 1)$ , и можно выделить два вклада в дифференциальное сечение. Один из них пропорционален числу фотонов  $N_2$  в моде рассеянной волны и описывает процесс стимулированного рассеяния, второй не зависит от  $N_2$  и соответствует спонтанному рассеянию. Заметим, что для наблюдения вынужденного рассеяния необходимо «подсвечивать» рассеивающий атом излучением определенной частоты и направления распространения (и, возможно, поляризации), отличным от излучения, рассеяние которого исследуется и плотность потока которого входит в определение дифференциального сечения.

Обратим внимание на то, что соотношение (6) существенно отличается от результата, получаемого в классической электродинамике, когда атомные электроны рассматриваются как заряженные классические осцилляторы (задача 5.127). Конечное состояние атома может отличаться от начального. В этом случае частота рассеянного фотона отличается от частоты падающего. Такое рассеяние получило название **рамановского** или **комбинационного**. При комбинационном рассеянии можно наблюдать как уменьшение частоты (стоксова компонента), так и увеличение (антистоксова компонента). Разумеется, возможно рассеяние, при котором  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_f$  и  $\omega_1 = \omega_2$ . Это случай релеевского или когерентного рассеяния (классическая электродинамика может описать только этот случай).

Отметим еще одну важную особенность двухфотонных процессов, к которым помимо рассеяния относятся также двухфотонное поглощение и излучение. Эти процессы проходят через промежуточные состояния. Взаимодействующие промежуточные состояния могут различаться знаком и взаимно подавлять (либо усиливать) друг друга. О таком взаимном влиянии различных каналов перехода говорят как о квантовой интерференции состояний.

**6.65.** В дипольном приближении оператор взаимодействия

$$(1) \quad \widehat{V} = -\widehat{\mathbf{d}} \cdot \widehat{\mathbf{E}}.$$

Во втором порядке теории возмущений результат может быть получен полностью аналогично тому, как это сделано в предыдущей задаче:

$$(2) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(N_2 + 1)\omega_1\omega_2^3}{c^4} \left| \sum_l \left( \frac{\langle f|\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2^*|l\rangle \langle l|\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1|i\rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle f|\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1|l\rangle \langle l|\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2^*|i\rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_2} \right) \right|^2.$$

Покажем, что это выражение совпадает с результатом предыдущей задачи. Воспользуемся известным из квантовой механики соотношением между матричными элементами операторов импульса и координаты

$$(3) \quad \langle n'|\widehat{\mathbf{p}}|n\rangle = -i \frac{m\omega_{n'n}}{e} \langle n'|\widehat{\mathbf{d}}|n\rangle,$$

где  $\omega_{n'n}$  — частота перехода. Рассмотрим сначала релеевское рассеяние. Второе слагаемое в формуле (6) предыдущей задачи преобразуем следующим образом:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_l \left( \frac{\langle i|\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_2^*|l\rangle \langle l|\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_1|i\rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle i|\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_1|l\rangle \langle l|\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_2^*|i\rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_1} \right) = \\ = \frac{(\mathbf{e}_1)_\alpha (\mathbf{e}_2)_\beta^* m}{e^2 \hbar} \sum_l \left( (\omega_{il} - \omega_1) \langle i|\widehat{d}_\beta|l\rangle \langle l|\widehat{d}_\alpha|i\rangle + \right. \\ \left. + (\omega_{il} + \omega_1) \langle i|\widehat{d}_\alpha|l\rangle \langle l|\widehat{d}_\beta|i\rangle \right) + \\ + \frac{m}{e^2} \sum_l \omega_1^2 \left( \frac{\langle i|\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2^*|l\rangle \langle l|\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1|i\rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle i|\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1|l\rangle \langle l|\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2^*|i\rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_1} \right). \end{aligned}$$

Сумма  $\sum_l \left( (\omega_{il} - \omega_1) \langle i|\widehat{d}_\beta|l\rangle \langle l|\widehat{d}_\alpha|i\rangle + (\omega_{il} + \omega_1) \langle i|\widehat{d}_\alpha|l\rangle \langle l|\widehat{d}_\beta|i\rangle \right)$ , последнего выражения равна первому слагаемому в равенстве (6) предыдущей задачи. Действительно, в силу условия полноты атомных состояний  $\sum_l \langle i|\widehat{d}_\alpha|l\rangle \langle l|\widehat{d}_\beta|i\rangle = \langle i|\widehat{d}_\alpha \widehat{d}_\beta|i\rangle = \langle i|\widehat{d}_\beta \widehat{d}_\alpha|i\rangle$ , поэтому слагаемые, содер-

жащие множитель  $\omega_1$  под знаком суммы, взаимно сокращаются. Оставшиеся слагаемые можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \sum_l \omega_{il} \langle i | \hat{d}_\beta | l \rangle \langle l | \hat{d}_\alpha | i \rangle + \omega_{il} \langle i | \hat{d}_\alpha | l \rangle \langle l | \hat{d}_\beta | i \rangle &= \\
 &= \frac{e^2 i}{m} \sum_l \langle i | \hat{r}_\beta | l \rangle \langle l | \hat{p}_\alpha | i \rangle - \langle i | \hat{p}_\alpha | l \rangle \langle l | \hat{r}_\beta | i \rangle = \\
 &= \frac{e^2 i}{m} (\langle i | \hat{r}_\beta \hat{p}_\alpha - \hat{p}_\alpha \hat{r}_\beta | i \rangle) = -\frac{e^2 \hbar}{m} \delta_{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (4), мы убеждаемся, что сечение релеевского рассеяния, полученные с помощью оператора взаимодействия в дипольном приближении, совпадает с тем, что дает формула (6).

В случае рамановского рассеяния для доказательства необходимо использовать очевидные соотношения  $\omega_2 = \omega_1 - \omega_{f1}$  и  $\omega_{f1} = \omega_{il} + \omega_{f1}$ , где  $\omega_{21}$  — частота перехода между начальным и конечным состояниями атома. При этом

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{1}{m} \sum_l \left( \frac{\langle f | \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_2^* | l \rangle \langle l | \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_1 | i \rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle f | \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_1 | l \rangle \langle l | \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_2^* | i \rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_2} \right) &= \\
 &= \frac{(e_1)_\alpha (e_2^*)_\beta m \hbar}{e^2} \sum_l \left( (\omega_{il} - \omega_1 + \omega_{f1}) \langle f | \hat{d}_\beta | l \rangle \langle l | \hat{d}_\alpha | i \rangle + \right. \\
 &\quad \left. + (\omega_{il} + \omega_2 + \omega_{f1}) \langle f | \hat{d}_\alpha | l \rangle \langle l | \hat{d}_\beta | i \rangle \right) + \\
 &+ \sum_l \omega_1 \omega_2 \left( \frac{\langle f | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2^* | l \rangle \langle l | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1 | i \rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle f | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1 | l \rangle \langle l | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2^* | i \rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_2} \right).
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю и, таким образом, опять приходим к формуле, полученной в предыдущей задаче.

**6.66.** 1. Случай  $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_{li}$  для всех промежуточных состояний  $l$ , атом при рассеянии возвращается в исходное состояние, которое будем считать основным и обозначать индексом 0 (напомним, что классическая электродинамика не описывает комбинационного рассеяния). При этом  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  и формулу (2) предыдущей задачи можно упростить:

$$(1) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(N_2 + 1)\omega^4}{\hbar c^4} \left| \sum_l \frac{(\mathbf{d}_{0l} \cdot \mathbf{e}_2^*)(\mathbf{d}_{l0} \cdot \mathbf{e}_1) + (\mathbf{d}_{0l} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{d}_{l0} \cdot \mathbf{e}_2^*)}{\omega_{l0}} \right|^2.$$

Введем тензор статической поляризуемости (см. задачу 6.62)

$$(2) \quad \alpha_{ik} = \sum_l \frac{(d_i)_{0l}(d_k)_{l0} + (d_k)_{0l}(d_i)_{l0}}{\omega_{l0}}.$$

Выберем векторы поляризации вещественными. При этом легко выразить сечение через тензор поляризации:

$$(3) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(N_2 + 1)\omega^4}{\hbar^2 c^4} \left| \sum_{i,k} \alpha_{ik} (e_{2i} e_{1k}) \right|^2.$$

Свойства поляризационного тензора зависят от свойств рассеивающего объекта — атома или молекулы. Для изотропного рассеивателя, например, атома в  $^1S_0$  состоянии имеем  $\alpha_{ik} = \alpha_0 \delta_{ik}$  и

$$(4) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(N_2 + 1)\omega^4}{\hbar^2 c^4} \alpha_0 (e_2 \cdot e_1)^2.$$

Полученное соотношение справедливо для случая, когда поляризации падающего и рассеянного света линейные и фиксированы. Если при регистрации рассеянного света поляризация не измеряется, необходимо просуммировать по возможным значениям  $e_2$ :

$$(5) \quad \sum_{\alpha=1,2} (e_2^{(\alpha)} \cdot e_1)^2 = \sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением вылета рассеянного и вектором поляризации исходного кванта.

Чтобы привести выражение для дифференциального сечения к виду, близкому тому, который дает классическая электродинамика, преобразуем  $\alpha_0$  следующим образом

$$(6) \quad \alpha_0 = \sum_l \frac{2|(d_z)_{0l}|^2}{\omega_{l0}} \equiv \frac{\hbar e^2}{m} \sum_l \frac{2m f_{l0}}{\hbar e^2 \omega_{l0}^2}.$$

Здесь величины  $f_{l0}$  — силы осцилляторов для переходов  $l \leftrightarrow 0$ :

$$(7) \quad f_{l0} = \frac{2m}{\hbar e^2} \omega_{n0} |(d_z)_{l0}|^2.$$

При этом

$$(8) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2(N_2 + 1) \left( \sum_l f_{l0} \frac{\omega^2}{\omega_{l0}^2} \right)^2 (1 - \cos^2 \vartheta),$$

где  $r_0 = e^2/mc^2$ —классический радиус электрона.

Интегрирование по возможным углам рассеяния при  $N_2 = 0$  дает

$$(9) \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left( \sum_l f_{l0} \frac{\omega^2}{\omega_{l0}^2} \right)^2.$$

Заметим, что полученное выражение хорошо согласуется с классическим выражением, если учесть, что для сил осцилляторов выполняется правило сумм

$$(10) \quad \sum_l f_{l0} = 1,$$

откуда следует, что

$$(11) \quad \sum_l \frac{f_{l0}}{\omega_{l0}^2} \simeq \frac{1}{\omega_0^2},$$

где  $\omega_0$  — некоторая средняя частота атомного осциллятора.

Принимая во внимание эти соотношения, получим

$$(12) \quad \sigma \simeq \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4.$$

При сравнении этого результата с формулами, полученными при решении задачи 5.127, нужно в них положить  $\gamma = 0$  и  $\omega \ll \omega_0$ .

2. Если энергия кванта света много больше энергии связи электрона в атоме, то для получения классического предела удобнее воспользоваться соотношением (6) из задачи (6.64), в котором следует оставить только первое слагаемое под знаком модуля. Считая поляризации линейными, получаем

$$(13) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2(N_2 + 1) \cos^2 \theta.$$

Здесь  $\theta$  — угол между векторами поляризации падающей и рассеянной волн. Полученный результат соответствует классической формуле Томсона, описывающей рассеяние на свободном электроне (см. задачи 5.127, 5.133), но учитывает стимулированное рассеяние через слагаемое, содержащее  $N_2$ .

**6.67.** Для расчета двухфотонного процесса в первом неисчезающем приближении нужно использовать второй порядок теории возмущений. Вероятность перехода в единицу времени в этом порядке можно вычислить следующим образом:

$$(1) \quad dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_l \frac{\langle f | \widehat{V} | l \rangle \langle l | \widehat{V} | i \rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l} \right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f) d\nu,$$

где  $\widehat{V} = -\mathbf{d} \cdot \widehat{\mathbf{E}}$  — оператор взаимодействия в дипольном приближении;  $\epsilon_l$  — энергия  $l$ -го состояния системы атом + поле;  $d\nu$  — плотность конечных или начальных состояний в зависимости от того, рассматривается ли процесс излучения или поглощения.

Так же как и в задаче рассеяния, промежуточные состояния для двухфотонного излучения (поглощения) могут быть двух типов в зависимости от того, какой из фотонов излучается (поглощается) на первом этапе. Рассматривая для простоты случай линейных поляризаций, получим

$$(2) \quad dw_{fi} = \frac{(2\pi)^2 \omega_1 \omega_2}{\nu^2} f(N_1, N_2) |M_{\alpha\beta} e_{1\alpha} e_{2\beta}|^2 \delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f \pm \hbar\omega_1 \pm \hbar\omega_2) d\nu,$$

$$(3) \quad M_{\alpha\beta} = \sum_l \left( \frac{\langle f | d_\beta | l \rangle \langle l | d_\alpha | i \rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l \pm \hbar\omega_1} + \frac{\langle f | d_\alpha | l \rangle \langle l | d_\beta | i \rangle}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l \pm \hbar\omega_2} \right).$$

В этих формулах верхний знак соответствует поглощению, нижний — излучению. Функция  $f(N_1, N_2)$ , зависящая от чисел заполнения мод, равна  $N_1 N_2$  для двухфотонного поглощения и  $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$  для излучения. Таким образом, возможны три типа двухфотонного излучения: спонтанное (вероятность не зависит от чисел заполнения), спонтанно-вынужденное (пропорциональное сумме  $N_1 + N_2$ ) и вынужденное (пропорциональное произведению  $N_1 N_2$ ).

Правила отбора для двухфотонных переходов могут быть получены на основе анализа выражения для матрицы  $M_{\alpha\beta}$ . Согласно (3) двухфотонный переход возможен, если возможны два однофотонных перехода  $i \rightarrow l$  и  $l \rightarrow f$ . Поскольку для однофотонных переходов в дипольном приближении справедливы соотношения  $\Delta l = \pm 1$  и  $\Delta m = 0, \pm 1$ , то двухфотонные переходы возможны между состояниями отличающимися по орбитальному моменту на 0 и  $\pm 2$ :  $\Delta l = 0, \pm 2$ . Магнитное квантовое число может меняться не более чем на две единицы:  $\Delta m = 0, \pm 1, \pm 2$ . При однофотонных переходах четности начального и конечного состояния противоположны. Двухфотонные переходы, следовательно, возможны между состояниями



одинаковой четности. Таким образом, двухфотонная спектроскопия позволяет изучать атомные состояния, недоступные однофотонной или линейной спектроскопии.

**6.68.** Как и всякий трехквантовый процесс, параметрическая генерация в первом неисчезающем приближении должна рассчитываться с использованием третьего порядка теории возмущений. В этом порядке вероятность перехода в единицу времени выражается следующим образом:

$$(1) \quad dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_l \sum_n \frac{\langle f | \widehat{V} | n \rangle \langle n | \widehat{V} | l \rangle \langle l | \widehat{V} | i \rangle}{(\epsilon_i - \epsilon_l)(\epsilon_i - \epsilon_n)} \right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f) d\nu.$$

В зависимости от порядка следования однофотонных процессов в выражении (1) можно выделить шесть слагаемых:

$$\begin{aligned} dw_{fi} = & \frac{(2\pi)^4 \hbar}{\mathcal{V}^3} \omega_1 \omega_2 \omega_3 N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d\nu \times \\ & \times \sum_l \sum_n \left\{ \frac{\langle f | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_3^* | n \rangle \langle n | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_2^* | l \rangle \langle l | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_1 | i \rangle}{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_n + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2)} + \right. \\ & + \frac{\langle f | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_2^* | n \rangle \langle n | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_3^* | l \rangle \langle l | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_1 | i \rangle}{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l + \hbar\omega_1)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_n + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_3)} + \\ & + \frac{\langle f | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_3^* | n \rangle \langle n | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_1 | l \rangle \langle l | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_2^* | i \rangle}{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_2)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_n + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2)} + \\ & + \frac{\langle f | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_1 | n \rangle \langle n | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_3^* | l \rangle \langle l | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_2^* | i \rangle}{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_2)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_n - \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3)} + \\ & + \frac{\langle f | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_2^* | n \rangle \langle n | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_1 | l \rangle \langle l | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_3^* | i \rangle}{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_3)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_n + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_3)} + \\ & \left. + \frac{\langle f | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_1 | n \rangle \langle n | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_2^* | l \rangle \langle l | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_3^* | i_a \rangle}{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_l - \hbar\omega_3)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_n - \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3)} \right\}. \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче к непрерывному спектру относится и начальное и конечное состояния системы, поэтому

$$(2) \quad d\nu = \frac{\mathcal{V} k_1^2 dk_1 d\Omega_1}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{V} k_2^2 dk_2 d\Omega_2}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{V} k_3^2 dk_3 d\Omega_3}{(2\pi)^3}.$$

Если в процессе регистрации света параметрической генерации не фиксируются поляризации рождающихся фотонов, то вероятность необходимо просуммировать по всем возможным значениям векторов  $e_2$  и  $e_3$ .

Как и процесс двухфотонного испускания, параметрическая генерация может быть спонтанной, спонтанно-вынужденной и вынужденной — в зависимости от того, есть ли в облучающей системе свете фотоны рассеянных мод.

В заключение заметим, что аналогично могут быть рассчитаны вероятности и других трехфотонных процессов, причем не обязательно когерентных.

**6.69.** Рассмотрим спонтанный распад в рамках дипольного резонансного приближения. Вероятность перехода равна

$$(1) \quad dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | \widehat{V} | i \rangle \right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f) \frac{\mathcal{V} k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3}$$

Здесь  $|i\rangle = \Psi|vac\rangle$ ;  $\widehat{V} = -\mathbf{d}_{21}(t) \cdot \widehat{\mathbf{E}}^{(+)}(t)|2\rangle\langle 1| + h.c. \equiv \widehat{V}^{(+)}(t) + \widehat{V}^{(-)}(t)$ ; конечное состояние  $|f\rangle = |1\rangle_a|1\rangle_b|s\rangle$ , где  $|s\rangle$  — состояние поля с одним фотоном в моде  $s$ . Мы предполагаем, что расстояние между атомами много меньше характерной длины волны излучения, так что можно опустить пространственный аргумент у волновых функций и оператора поля.

Вычисление матричного элемента полностью аналогично случаю одного атома. В итоге для вероятности излучения одного фотона в единицу времени, просуммированной по всем возможным его поляризациям, частотам и направлениям вылета, получим

$$(2) \quad W = \frac{2}{3} \frac{|d_{21}|^2 \omega_{21}^3}{c^3 \hbar}$$

— для начального состояния  $\Psi_1$  и  $W = 0$  — для состояния  $\Psi_2$ .

Таким образом, система в первом состоянии излучает в два раза быстрее, чем для одного атома, а во втором не излучает вовсе, хотя суммарное начальное возбуждение систем в обоих случаях одинаково (энергия начального состояния на  $\hbar\omega_{21}$  больше энергии основного состояния системы).

**6.70.** Суммируя обе части уравнения, приведенного в условии задачи, по всем осцилляторам, находим для коллективной переменной  $\mathbf{R}(t) = \sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a(t)$  уравнение

$$\ddot{\mathbf{R}} + 2\beta\dot{\mathbf{R}} + \omega_0^2\mathbf{R} = 0, \quad t > 0, \quad \beta = N\gamma.$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию  $\mathbf{R}(0) = N\mathbf{r}_0$ , имеет вид  $\mathbf{R}(t) = N\mathbf{r}_0\Theta(t)e^{-\beta t} \cos \Omega t$ ,  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - N^2\gamma^2}$ ,  $\Theta$  – ступенчатая функция. Спектр излучения записываем с помощью результата задачи 5.122:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I_N\beta}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \Omega)^2 + \beta^2/4}.$$

Полная интенсивность излучения  $I_N = N^2I_0$  в  $N^2$  раз больше интенсивности  $I_0$  излучения отдельного осциллятора и в  $N$  раз больше интенсивности  $N$  независимых осцилляторов. Постоянная затухания тоже в  $N$  раз больше постоянной затухания отдельного независимого осциллятора.

Рассмотренные эффекты являются классическим аналогом эффекта **сверхизлучения** Дике. Более подробное изложение см. в [Андреев и др. (1988)], [Мандель и Вольф (2000)].

**6.71.** Лагранжиан представляет собой обобщение выражения (4.100):

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} \left( \Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \Psi \right) + \frac{i\hbar}{2} (\Psi^\dagger c\hat{\alpha} \cdot \nabla \Psi - (\nabla \Psi^\dagger) \cdot c\hat{\alpha} \Psi) + \Psi^\dagger [e\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{A}} - \hat{\beta}mc^2 - U] \Psi.$$

Плотность гамильтоновой функции строится по формуле (4.97) и для дираковского поля имеет вид

$$(2) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} (\Psi^\dagger c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Psi - (\hat{\mathbf{p}} \Psi^\dagger) \cdot c\hat{\alpha} \Psi) + \Psi^\dagger [-e\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{A}} + \hat{\beta}mc^2 + U] \Psi.$$

Квантовомеханический оператор Гамильтона можно получить из (2), если полную энергию поля  $\mathcal{E}$  путем интегрирования по частям представить в форме

$$(3) \quad \mathcal{E} \equiv \int \mathcal{H} d^3r = \int \Psi^\dagger \hat{\mathcal{H}} \Psi d^3r.$$

Из (2) и (3) получим (6.116):

$$(4) \quad \hat{\mathcal{H}} = c\hat{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}}) + \hat{\beta}mc^2 + e\varphi(\mathbf{r}).$$

**6.72.** Вычислив оператор  $\hat{v} = \hat{\mathbf{r}}$  по формуле (Д3.34) с дираковским гамильтонианом (6.111), получим  $\hat{v} = c\hat{\alpha}$ . Находя собственные значения

оператора  $\widehat{v}_x = c\widehat{\alpha}_x$  (матрицы), будем иметь  $v_x = \pm c$ . Те же самые собственные значения получаются для любой другой пространственной оси. Появление предельной скорости  $c$  можно понять как результат определения координаты в близкие моменты времени с высокой точностью. В силу соотношения неопределенностей при этом возникает большая неопределенность импульса  $\Delta p_x \gg mc$ , которая и приводит к предельной скорости частицы  $c$ .

$$6.73. \quad \omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar\omega_0}{mc^2}(1 - \cos\theta)}, \quad \lambda - \lambda_0 = 2\pi\Lambda_C(1 - \cos\theta).$$

$$6.77. \quad Sp\{\widehat{B}\widehat{P}_0\widehat{B}^\dagger\widehat{P}\} = \frac{8mc^2}{\mathcal{E}}(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e})^2 + \frac{2\hbar(\omega_0 - \omega)}{\mathcal{E}}(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0).$$

6.78.

$$1. \quad d\sigma_{\parallel} = \frac{1}{4}r_0^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[ \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} + 2 - 4\sin^2\theta \cos^2\phi \right] d\Omega,$$

$$d\sigma_{\perp} = \frac{1}{4}r_0^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[ \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} - 2 \right] d\Omega,$$

$$d\sigma = d\sigma_{\parallel} + d\sigma_{\perp} = \frac{1}{2}r_0^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[ \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} - 2\sin^2\theta \cos^2\phi \right] d\Omega,$$

где  $r_0$  — классический радиус электрона,  $\theta, \phi$  — углы вектора  $\mathbf{k}$  в декартовой системе, ось  $Oz$  которой направлена вдоль  $\mathbf{k}_0$ , а ось  $Ox$  — вдоль  $\mathbf{e}_0$ .

$$3. \quad d\sigma_{\parallel} = r_0^2(1 - \sin^2\theta \cos^2\phi) d\Omega, \quad d\sigma_{\perp} = 0, \quad d\bar{\sigma} = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2\theta) d\Omega.$$

Последнее сечение совпадает с сечением Томсона, полученным при классическом расчете (см. задачу 5.129).

4. В ультрарелятивистском случае  $\hbar\omega_0 \gg mc^2$  при больших углах рассеяния ( $\hbar\omega_0(1 - \cos\theta) \gg mc^2$ ) имеем

$$d\sigma_{\parallel} = d\sigma_{\perp} = \frac{1}{4}r_0^2 \frac{mc^2 d\Omega}{\hbar\omega_0(1 - \cos\theta)}.$$

При малых углах рассеяния,  $\hbar\omega_0(1 - \cos\theta) \approx \hbar\omega_0\theta^2/2 \ll mc^2$ , получаем

$$d\sigma_{\perp} = 0, \quad d\sigma_{\parallel} = r_0^2 d\Omega.$$

6.79.

$$\sigma = \pi r_0^2 \left\{ \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{2(1+x)}{x^2} \right) \ln(1+2x) + \frac{2(1+x)}{(1+2x)^2} + \frac{4}{x^2} \right\}, \quad x = \frac{\hbar\omega_0}{mc^2}.$$

В нерелятивистском случае,  $x \ll 1$ , имеем сечение Томсона  $\sigma = \sigma_T = 8\pi r_0^2/3$ . В ультрарелятивистском случае

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \ln \left( \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2} \right).$$

С ростом энергии фотона сечение рассеяния убывает.

**6.80.**

$$\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)} = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{(\hbar\omega_0)^2} \left[ \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} + \left( \frac{mc^2}{\hbar\omega} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{mc^2}{\hbar\omega} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \right) \right],$$

где  $\hbar\omega_0 \geq \hbar\omega \geq \frac{\hbar\omega_0}{1 + 2\hbar\omega_0/mc^2}$ .

**6.81.** Излучение фотонов электроном под действием пролетающей ультрарелятивистской частицы можно рассматривать как результат рассеяния псевдофотонов на электроне с образованием реальных рассеянных фотонов. Излучение фотонов тяжелой частицей сильно подавлено ввиду зависимости сечения излучения от массы по закону  $M^{-2}$ . Сечение излучения  $d\sigma_r(\omega)$  можно вычислить по формуле

$$(1) \quad d\sigma_r(\omega) = \int_{\omega_{0\min}}^{\omega_{0\max}} d\omega_0 n(\omega_0) d\sigma_C(\omega_0, \omega),$$

где  $n(\omega_0)$  — спектр эквивалентных фотонов (6.129),  $d\sigma_C$  — сечение комптоновского рассеяния, полученное в задаче 6.80. Пределы интегрирования находятся из законов сохранения (задача 6.73):

$$(2) \quad \hbar\omega_0 = \frac{\hbar\omega}{1 - (\hbar\omega/mc^2)(1 - \cos\theta)}.$$

Следует различать два интервала изменения частоты рассеянного кванта.

$$(3) \quad 1. \quad 0 < \hbar\omega \leq \frac{1}{2}mc^2, \quad \omega_{0\min} = \omega, \quad \omega_{0\max} = \frac{\omega}{1 - 2\hbar\omega/mc^2}.$$

$$(4) \quad 2. \quad \frac{1}{2}mc^2 \leq \hbar\omega < \mathcal{E} - Mc^2, \quad \omega_{0\min} = \omega, \quad \omega_{0\max} \rightarrow \infty.$$

При интегрировании частот выносим медленно изменяющийся множитель  $\ln(\mathcal{E}/\hbar\omega_0)$  за знак интеграла в точке  $\omega_0 = \omega$ . После приведения подобных членов получим

$$(5) \quad d\sigma_r(\omega < mc^2/2) = \frac{16}{3} \frac{q^2}{\hbar c} r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln\left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega}\right) \left\{ 1 - \frac{\hbar\omega}{mc^2} + \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2 \right\}.$$

Это сечение расходится при  $\omega \rightarrow 0$  («инфракрасная катастрофа»), но полная излученная энергия конечна.

$$(6) \quad d\sigma_r(\omega > mc^2/2) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{\hbar c} r_0^2 \frac{mc^2 d\omega}{\omega^2} \ln\left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega}\right) \left\{ 4 - \frac{mc^2}{\hbar\omega} + \left(\frac{mc^2}{2\hbar\omega}\right)^2 \right\}.$$

Последней формулой можно пользоваться только при частотах  $\ln \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega} \gg 1$ . Метод эквивалентных фотонов неприменим при расчете испускаемая квантов предельно высоких энергий  $\hbar\omega \approx \mathcal{E}$ .

**6.82.** В системе  $S'$  покоя электрона процесс излучения можно рассматривать как комптоновское рассеяние псевдофотонов. В этой системе сечение излучения  $d\sigma'_r(\omega')$  можно вычислить по формуле (1) предыдущей задачи. Но входящие в эту формулу величины нужно преобразовать в лабораторную систему  $S$ . Для этого следует учесть, что сечения  $d\sigma_r$  в системе ядра и  $d\sigma'_r$  в системе электрона одинаковы и следует преобразовывать только частоты. Обозначив через  $\theta'$  угол рассеяния в системе  $S'$  (он отсчитывается от направления скорости ядра в системе электрона), получим с помощью преобразования Лоренца связь между частотами рассеянного кванта в двух системах:

$$(1) \quad \omega = \omega' \gamma \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta' \right) \approx \omega' \gamma (1 - \cos \theta').$$

В последнем приближенном равенстве мы пренебрегли членами порядка  $\gamma^{-2}$  по сравнению с единицей. Кроме этого имеем из законов сохранения связь между частотами  $\omega'$ ,  $\omega'_0$ :

$$(2) \quad 1 - \cos \theta' = \frac{mc^2}{\hbar\omega'} - \frac{mc^2}{\hbar\omega'_0}.$$

Пользуясь законом сохранения энергии в лабораторной системе  $\hbar\omega = \mathcal{E} - \mathcal{E}'$ , где  $\mathcal{E} = \gamma mc^2$  — начальная энергия электрона,  $\mathcal{E}'$  — его энергия после испускания кванта, находим из равенств (1), (2) связь между энергиями квантов

в системе электрона и энергиями электрона в лабораторной системе:

$$(3) \quad \hbar\omega' = \hbar\omega'_0 \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}}.$$

Из этих же равенств получаем пределы интегрирования по частоте  $\omega'_0$  при фиксированных значениях начальной энергии электрона  $\mathcal{E}$  и энергии испущенного кванта  $\hbar\omega$ :

$$(4) \quad \omega'_{0 \min} = \omega \frac{mc^2}{2\mathcal{E}'}, \quad \omega'_{0 \max} = \omega \frac{2\gamma\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$$

После подстановки этих величин в формулу (1) предыдущей задачи сечение тормозного излучения ультрарелятивистского электрона приобретает вид

$$(5) \quad d\sigma_r(\omega) = 2r_0^2 \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \int_{\omega'_{0 \min}}^{\omega'_{0 \max}} \frac{d\omega'_0}{\omega'^2_0} \ln \left( \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega'_0} \right) \left\{ \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} + \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} + \left( \frac{mc^2}{\mathcal{E}'} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega'^2_0} - \frac{2mc^2\omega}{\mathcal{E}\omega'_0} \right\} d\omega.$$

Интегрирование следует производить с той же точностью, с которой определен спектр эквивалентных фотонов. Для этого достаточно вынести логарифм в (5) за знак интеграла, взяв его при  $\omega'_0 = \omega'_{0 \min}$ , и заменить верхний предел интегрирования на бесконечность. После интегрирования получим

$$(6) \quad d\sigma_r(\omega) = 4r_0^2 \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} \frac{d\omega}{\omega} \ln \left( \frac{2\mathcal{E}\mathcal{E}'}{mc^2\hbar\omega} \right) \left\{ \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} + \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} - \frac{2}{3} \right\}.$$

Условия применимости результата:

$$(7) \quad \gamma = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \gg 1, \quad \ln \left( \frac{2\mathcal{E}\mathcal{E}'}{mc^2\hbar\omega} \right) \gg 1.$$

Результат расчета по теории возмущений в первом борновском приближении отличается от (6) заменой логарифмического множителя на величину

$$\ln \left( \frac{2\mathcal{E}\mathcal{E}'}{mc^2\hbar\omega} \right) - \frac{1}{2}$$

(см. Берестецкий и др. (1989), & 93).

**6.83.** Полное излучение фотонов создается излучением налетающего ультрарелятивистского электрона и излучением электрона отдачи. Первый процесс характеризуется сечением, полученным в задаче 6.82\* (при  $Z = 1$ ). Второе сечение было вычислено для двух интервалов частот в задаче 6.81 (при  $q = e$ ).



# Дополнение 1

## Перевод электрических и магнитных величин из системы СИ в гауссову и обратно

Формулы и уравнения

Таблица Д1.1

Наименование	Гауссова система	Система СИ
Скорость света	$c$	$(\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$
Напряженность электрического поля скалярный потенциал	$E, \varphi$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} (E, \varphi)$
Электрическая индукция	$\mathbf{D}, \vec{\mathcal{D}}$	$\sqrt{4\pi/\epsilon_0} (\mathbf{D}, \vec{\mathcal{D}})$
Заряд, плотность заряда, ток, плотность тока, поляризация, электрический дипольный момент	$q, \rho, J, j, \mathbf{P}, \mathbf{p}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} (q, \rho, J, j, \mathbf{P}, \mathbf{p})$
Магнитная индукция, магнитный поток, векторный потенциал	$\mathbf{B}, \Phi, \mathbf{A}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} (\mathbf{B}, \Phi, \mathbf{A})$
Напряженность магнитного поля	$\mathbf{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H}$
Магнитный момент, намагниченность	$\mathbf{m}, \mathbf{M}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} (\mathbf{m}, \mathbf{M})$
Электрическая проницаемость, магнитная проницаемость (относительные)	$\epsilon, \mu$	$\epsilon, \mu$
Электрическая поляризуемость, магнитная восприимчивость	$\chi, \kappa$	$\frac{1}{4\pi} (\chi, \kappa)$
Удельная электропроводность	$\sigma$	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
Сопротивление	$R$	$4\pi\epsilon_0 R$
Емкость	$C$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} C$
Индуктивность	$L$	$\frac{4\pi}{\mu_0} L$
Сила Лоренца, действующая на единичный заряд	$E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$E + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Таблица Д1.1 (Окончание)

Наименование	Гауссова система	Система СИ
Плотность энергии электромагнитного поля в недиспергирующей среде	$\frac{1}{8\pi}(\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)$	$\frac{1}{2}(\epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu\mu_0 \mathbf{H}^2)$
Вектор Пойнтинга	$\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{E} \times \mathbf{H}$
Уравнения Максвелла	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
Материальные уравнения	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$

## Численные значения

Таблица Д1.2

Наименование	Обозначения	Система СИ	Гауссова система
Длина	$l$	1 м (метр)	$10^2$ см
Масса	$m$	1 кг (килограмм)	$10^3$ г
Время	$t$	1 с (секунда)	1 с
Сила	$F$	1 Н (ньютон)	$10^5$ дин
Энергия	$\mathcal{E}, W$	1 Дж (джоуль)	$10^7$ эрг
Интенсивность излучения (мощность)	$I$	1 Вт (ватт)	$10^7$ эрг/с
Давление	$p$	1 Па (паскаль)	$10$ дин/см <sup>2</sup>
Сила тока	$J$	1 А (Ампер)	$3 \cdot 10^9$ см <sup>3/2</sup> · г <sup>1/2</sup> /с <sup>2</sup>
Электрический заряд	$e, q$	1 Кл (кулон)	$3 \cdot 10^9$ см <sup>3/2</sup> · г <sup>1/2</sup> /с
Напряженность электрического поля	$\mathbf{E}$	1 В/м (вольт на метр)	$1/3 \cdot 10^{-4}$ г <sup>1/2</sup> /см <sup>1/2</sup> · с
Скалярный потенциал	$\varphi$	1 В (вольт)	$1/3 \cdot 10^{-2}$ см <sup>1/2</sup> · г <sup>1/2</sup> /с
Поляризация	$\mathbf{P}$	1 Кл/м <sup>2</sup> (кулон на квадратный метр)	$3 \cdot 10^5$ г <sup>1/2</sup> /см <sup>1/2</sup> · с
Электрическая индукция	$\mathbf{D}$	1 Кл/м <sup>2</sup> (кулон на квадратный метр)	$12 \cdot 10^5$ г <sup>1/2</sup> /см <sup>1/2</sup> · с
Электрическая емкость	$C$	1 Ф (фарада)	$9 \cdot 10^{11}$ см
Электрическое сопротивление	$R$	1 Ом (ом)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ с/см

Таблица Д1.2 (окончание)

Наименование	Обозначения	Система СИ	Гауссова система
Удельная электропроводность	$\lambda$	1 См/м (сиemens на метр)	$9 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$
Магнитный поток	$\Phi$	1 Вб (вебер)	$10^8 \text{ Мкс}$
Магнитная индукция	$B$	1 Т (тесла)	$10^4 \text{ Гс}$
Напряженность магнитного поля	$H$	1 А/м (ампер на метр)	$4 \cdot 10^{-3} \text{ Э}$
Намагниченность	$M$	1 А/м (ампер на метр)	$\frac{1}{4} \cdot 10^4 \text{ Гс}$
Индуктивность	$L$	1 Г (генри)	$10^9 \text{ см}$

---

---

## Дополнение 2

### Вариационный принцип для непрерывных систем

Классическая механика, основы которой были сформулированы Ньютоном, явилась первой физической научной теорией в современном понимании. Она послужила основой для развития других областей теоретической физики: электродинамики, квантовой механики, статистической физики, теории элементарных частиц и т. д. Математические методы и многие понятия, разработанные в классической механике, широко используются в других разделах теоретической физики. Вариационный принцип является одной из наиболее глубоких идей, внесенных классической механикой в классическую и квантовую теорию поля. Поэтому естественный путь введения его в классическую теорию поля — это предельный переход от механики дискретных точечных масс к механике непрерывной системы.

**Колебания упругой среды как предел колебаний дискретных точечных масс.** Рассмотрим линейную цепочку точечных масс  $m$ , соединенных пружинами одинаковой жесткости  $k$  (рис. Д2.1). Вспомним описание дви-

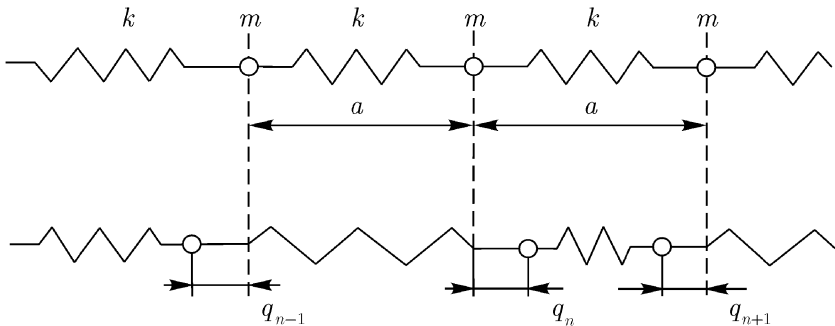


Рис. Д2.1

жения такой системы в классической механике. Вводятся обобщенные координаты  $q_n(t)$  — отклонения точечных масс от равновесных положений.

Кинетическая  $T$  и потенциальная  $U$  энергии системы даются выражениями:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m \dot{q}_n^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N k(q_{n+1} - q_n)^2. \quad (\text{Д2.1})$$

Будем считать крайние массы закрепленными в равновесных положениях, так что  $q_1 = q_N = 0$  при всех  $t$ .

Уравнения движения системы можно получить из условия стационарности действия  $\delta S = 0$ , где  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_n, \dot{q}_n) dt$ ,

$$L(q_n, \dot{q}_n) = T - U = \frac{1}{2} \sum_n [m \dot{q}_n^2 - k(q_{n+1} - q_n)^2]. \quad (\text{Д2.2})$$

Условие  $\delta S = 0$  приводит к уравнениям движения в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \quad (\text{Д2.3})$$

которые при подстановке (Д2.2) принимают вид

$$m \ddot{q}_n - k(q_{n+1} - q_n) + k(q_n - q_{n-1}) = 0. \quad (\text{Д2.4})$$

Будем рассматривать нашу механическую систему как дискретную модель упругого стержня. Чтобы наша модель стала адекватна тому, что принято в механике сплошной среды называть упругим стержнем, необходимо выполнить предельный переход к непрерывной системе (число масс будет стремиться к бесконечности, а равновесное расстояние  $a$  между ними — к нулю). Нас будет особенно интересовать, как модифицируются при таком предельном переходе функция Лагранжа и вариационный принцип. Но мы начнем рассмотрение с предельного перехода в уравнениях движения.

Поделим обе части (Д2.4) на равновесную длину одного звена  $a$  и перепишем это равенство в виде

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_n - ka \left( \frac{q_{n+1} - q_n}{a^2} \right) + ka \left( \frac{q_n - q_{n-1}}{a^2} \right). \quad (\text{Д2.5})$$

Отношение  $m/a = \mu$  представляет собой массу, приходящуюся на единицу длины стержня. Эта масса должна рассматриваться как постоянная. Произведение  $ka$  входит в выражение силы, действующей между соседними

массами:  $F = k(q_{n+1} - q_n) = ka \frac{q_{n+1} - q_n}{a}$ . Отношение  $\xi = \frac{q_{n+1} - q_n}{a}$  представляет собой относительное удлинение одного звена; вспомним, что по закону Гука  $F = E\xi$ , где  $\xi$  — относительное удлинение,  $E$  — модуль Юнга — одна из упругих постоянных вещества. Таким образом,  $ka = E$  имеет смысл модуля Юнга и должна считаться постоянной при предельном переходе.

Введем, далее, равновесную координату  $n$ -го узла:  $x_n = na$ . Для дискретной системы она меняется скачками, но при предельном переходе  $a \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  величина  $x$  становится непрерывной переменной (декартовой координатой). Рассматривая  $a$  как малое приращение координаты  $x$ , имеем

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{a} = \frac{q(x+a) - q(x)}{a} \approx \frac{\partial q(x)}{\partial x};$$

аналогичным образом

$$\frac{q_n - q_{n-1}}{a} \approx \frac{\partial q(x-a)}{\partial x};$$

следует помнить, что  $q$  зависит также и от  $t$ .

С учетом введенных обозначений уравнение (Д2.5) приобретает вид

$$\mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{E}{a} \left[ \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)_x - \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)_{x-a} \right] = 0.$$

Наконец, разность первых производных в близких точках, деленную на  $a$ , заменяем вторую производной по координатам и получаем уравнение движения упругого стержня

$$\mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{Д2.6})$$

Это — волновое уравнение, которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{Д2.7})$$

де  $c_l = \sqrt{E/\mu}$  — скорость продольных волн.

Теперь обратимся к функции Лагранжа (Д2.2) и выполним предельный переход также и в ней:

$$L = \frac{1}{2} \sum_n \left[ \frac{m}{a} \dot{q}_n^2 - ka \left( \frac{q_{n+1} - q_n}{a} \right)^2 \right] a \rightarrow \frac{1}{2} \int \left[ \mu \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - E \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (\text{Д2.8})$$

Сумма по всем частицам при таком предельном переходе превращается в интеграл по координате. Функция, стоящая под знаком интеграла, называется *плотностью функции Лагранжа* или *лагранжианом*:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial q}{\partial t} - E \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right) \right]. \quad (\text{Д2.9})$$

Итак, мы получили следующее правило перехода от механики материальных точек к механике непрерывных систем:

1. Номер частицы  $n$  переходит в координату  $x$ .
2. Обобщенная координата  $q_n(t)$  становится функцией координаты и времени:  $q(x, t)$  или, в случае движения по всем трем измерениям,  $q(r, t)$ . Число обобщенных координат, задающих состояние непрерывной среды, может быть произвольным. Например, при трехмерном движении упругой среды вектор деформации имеет три составляющие,  $q_\alpha(r, t)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Электромагнитное поле описывается в каждой точке четырьмя обобщенными координатами — компонентами 4-потенциала  $A_i(r, t)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , и т. д.

3. Функция Лагранжа выражается в виде интеграла по координатам от лагранжиана, который в рассмотренном выше примере зависит от первых производных обобщенных координат (полевых функций). В общем же случае он может зависеть также от самих обобщенных координат  $q^i(r, t)$ , а также от пространственных координат  $r$  и времени  $t$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( q^i, \frac{\partial q^i}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial q^i}{\partial t}, r, t \right). \quad (\text{Д2.10})$$

4. Поскольку функция Лагранжа  $L$  становится интегралом по пространству, действие  $S$  выражается в виде интеграла по четырехмерному многообразию:

$$S = \int \mathcal{L} \left( q^i, \frac{\partial q^i}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial q^i}{\partial t}, r, t \right) d^3x dt. \quad (\text{Д2.11})$$

Мы используем в (Д2.10) и (Д2.11) верхние индексы. Но они в данном случае не обязательно нумеруют контравариантные компоненты какого-либо 4-вектора.

**Лагранжева форма уравнений движения непрерывной среды.** Выясним теперь вопрос о том, как следует формулировать вариационный принцип для непрерывных систем, с тем чтобы из него следовали уравнения движения. Это будет сделано на основе аналогии с механикой материальной точки, выясненной в деталях выше.

Роль обобщенных координат для непрерывной системы играют полевые функции  $q^i(r, t)$ . Индексом  $i$  и пространственными координатами  $r$  нумеруются теперь степени свободы системы, которые составляют континуальное множество. При варьировании действия обобщенные координаты  $q^i(r, t)$  должны получать малые независимые приращения  $\delta q^i(r, t)$ , не связанные с изменением координат и времени, подобно как в механике материальных точек вводится вариация  $\delta q_n(t)$  в фиксированный момент времени и для фиксированной степени свободы  $n$ . На границе области интегрирования в (Д2.11), т. е. на трехмерной гиперповерхности  $\Sigma$ , обобщенные координаты должны иметь заданное значение и их вариации обращаются в нуль:

$$\delta q^i(r, t) \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (\text{Д2.12})$$

Имея в виду эти замечания, призванные подчеркнуть аналогию с механикой системы материальных точек, мы можем теперь сформулировать вариационный принцип для непрерывной системы следующим образом.

Реальная эволюция непрерывной системы в пространстве и во времени при заданных значениях ее обобщенных координат на границе 4-мерной области происходит таким образом, что действие  $S$  имеет стационарное значение, т. е. его первая вариация обращается в нуль:

$$\delta S = 0. \quad (\text{Д2.13})$$

Переходя к вычислению первой вариации действия, используем здесь сокращенные обозначения для производных:

$$\frac{\partial q^i}{\partial x_\alpha} \equiv q^i_{,\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3); \quad \frac{\partial q^i}{\partial t} \equiv q^i_{,t}.$$

Это позволит упростить запись получаемых соотношений.

Рассматриваем действие как функционал от обобщенных координат и вычисляем в первом порядке по  $\delta q^i$  разность

$$\begin{aligned} \delta S &= S[q^i(r, t) + \delta q^i(r, t)] - S[q^i(r, t)] = \\ &= \sum_i \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,t}} \delta q^i_{,t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \delta q^i_{,\alpha} \right\} d^3x dt. \end{aligned} \quad (\text{Д2.14})$$

Здесь входит записанная явно сумма по всем значениям индекса  $i$  (т. е. по всем компонентам полевых функций), а в последнем слагаемом под интегралом — не выписанная в явном виде сумма от 1 до 3 по декартовым координатам  $x_\alpha$ .



Пользуясь тем, что операция варьирования  $\delta$  совершается при постоянных  $r$  и  $t$  и, следовательно, перестановочна с операцией дифференцирования, записываем

$$\delta q^i_{,t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta q^i, \quad \delta q^i_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \delta q^i$$

и интегрируем соответствующие члены в (Д2.14) по частям:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,t}} \delta q^i_{,t} d^3x dt = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,t}} \delta q^i(r, t) \Big|_\Sigma - \int \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,t}} \right) \delta q^i(r, t) d^3x dt. \quad (\text{Д2.15})$$

Аналогичным образом

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \delta q^i_{,\alpha} d^3x dt = \int d^2S_\alpha dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \delta q^i(r, t) \Big|_\Sigma - \int \left( \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \right) \delta q^i(r, t) d^3x dt. \quad (\text{Д2.16})$$

Здесь  $d^2S_\alpha$  — проекция элемента двумерной поверхности на ось  $x_\alpha$ .

Выделившиеся члены, которые должны интегрироваться по трехмерной гиперповерхности, обращаются в нуль в силу (Д2.12). Уравнения (Д2.13) с учетом (Д2.14)–(Д2.16) принимает вид

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,t}} - \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \right\} \delta q^i(r, t) d^3x dt = 0. \quad (\text{Д2.17})$$

Поскольку как область интегрирования, так и вариации  $\delta q^i$  произвольны, то из (Д2.17) получаются следующие уравнения движения непрерывной среды в лагранжевой форме<sup>9</sup>:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,t}} - \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} = 0, \quad (\text{Д2.18})$$

где  $i$  принимает весь набор возможных значений (суммирование по  $\alpha$ !).

<sup>9</sup>В уравнениях (Д2.15)–(Д2.18) мы пишем, как это принято, прямые производные  $d/dt$  и  $d/dx_\alpha$ . Это означает, что в лагранжиане  $\mathcal{L}$  должна учитываться как явная зависимость от  $x_\alpha$  и  $t$ , так и зависимость от этих переменных через посредство  $q^i$  и их производных. Но  $x_\alpha$  и  $t$  для непрерывной системы, в отличие от механики материальной точки, всегда независимые переменные, поэтому, например,

$$\frac{d}{dt} q^i \equiv \frac{\partial q(x_\alpha, t)}{\partial t}.$$

Рассмотрим два примера вывода конкретных уравнений эволюции волновых полей из уравнений Лагранжа (Д2.18).

1. Возьмем лагранжиан (Д.9). Находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} = \mu \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} = -E \frac{\partial q}{\partial x}$$

и уравнение движения

$$\mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0,$$

которое совпадает, как и следовало ожидать, с (Д2.6).

2. Рассмотрим комплексное скалярное поле  $\psi(r, t) = q^1(r, t) + iq^2(r, t)$ . Зададим лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\alpha} + U \psi \psi^*, \quad (\text{Д2.19})$$

где  $m, \hbar$  — постоянные,  $U(r, t)$  — заданная действительная функция координат и времени. Лагранжиан (Д2.19) и действие  $S$  действительны, несмотря на то, что  $\psi$  — комплексная величина. Комплексная  $\psi$  эквивалентна двум действительным полям,  $q^1$  и  $q^2$ . Вместо того, чтобы считать независимыми вариациями  $\delta q^1$  и  $\delta q^2$ , более удобно выбрать в качестве таковых их линейные комбинации:

$$\delta q^1 + i\delta q^2 = \delta \psi \quad \text{и} \quad \delta q^1 - i\delta q^2 = \delta \psi^*.$$

Уравнение (Д2.18) при варьировании действия по  $\psi^*$  примет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,t}} - \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,\alpha}} = 0. \quad (\text{Д2.20})$$

Вычисляя

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = -\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + U \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,t}} = \frac{i\hbar}{2} \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,\beta}} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta},$$

находим уравнение поля

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi.$$

Это — уравнение Шрёдингера для волновой функции нерелятивистской частицы в потенциальном поле  $U(r, t)$ , если  $\hbar$  и  $m$  — постоянная Планка и масса частицы.

Когда лагранжев метод применяется в теории поля, вид лагранжиана не выводится путем предельного перехода из функции Лагранжа какой-либо механической системы, как мы это делали в случае лагранжиана (Д2.9), так как электромагнитное и другие поля не могут быть сведены к механическим моделям. Вид лагранжиана обычно постулируется на основе тех или иных соображений. Примеры такого подхода читатель имел выше (где, однако, лагранжиан был записан без всяких аргументов) и найдет в разделе 4.3, где подробно обсуждается выбор лагранжиана электромагнитного поля.

---

---

## Дополнение 3

### Общая схема квантовой теории

Настоящее дополнение носит справочный характер и предназначено для читателей, уже знакомых с основами квантовой механики. Оно не может заменить подробных учебников по квантовой теории разного уровня и стиля (см. [Дирак (1960)], [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика], [Фок (1976)], [Давыдов (1973)], [Мессиа (1978)], [Блохинцев (1961)], [Галицкий и др. (1992)], [Шифф (1957)] и др.) Проблемы измерений в квантовой физике и ряд принципиальных вопросов квантовой теории обсуждаются в книгах и обзорах [Мандельштам (1972)], [Блохинцев (1966)], [Блохинцев (1982)] [Менский (2001а)], [Менский (2001б)], [Липкин (2001)].

**Спектр физической величины и волновая функция.** Из эксперимента известно, что физические величины  $q_i$  («наблюдаемые», по Дираку (1960)), присущие квантовой системе, могут принимать лишь вполне определенные, характерные для нее собственные значения, совокупность  $\{q_i\}$  которых называется **спектром** величины  $q_i$ .<sup>10</sup> Спектры бывают дискретными (тогда значения  $q_i$  могут быть пронумерованы:  $q_i = q_n^i$ , где  $n$  — целое или иное дискретное **квантовое число**), непрерывными и смешанными.

Если система имеет  $s$  степеней свободы, часть из которых проявляется на классическом, другая же (например, спин) на более глубоком квантовом уровне описания, то можно ввести  $s$  **одновременно измеримых** (с коммутирующими операторами) величин  $q = (q_1, \dots, q_s)$ , которые можно рассматривать как **обобщенные координаты** системы. Совокупность собственных значений (по одному на каждую величину  $q_i$ ) образует точку  $s$ -мерного спектра, а множество всех таких спектральных точек составляет **конфигурационное пространство** квантовой системы. Обобщенные координаты можно ввести различными способами.

Всякое чистое<sup>11</sup> состояние системы описывается заданием **волновой функции**  $\psi(q, t)$ , в общем случае комплексной, зависящей от точки конфи-

---

<sup>10</sup>Мы будем обозначать единым символом как физическую величину в абстрактном смысле, так и ее конкретные значения, а также соответствующий этой величине оператор. В последнем случае будем снабжать символ шляпкой.

<sup>11</sup>Об описании более общих — смешанных — состояний см. ниже.

гурационного пространства и от времени. Волновая функция имеет **вероятностный смысл**, т. е.

$$w_q(t) = |\psi(q, t)|^2 \quad (\text{Д3.1})$$

представляет собой вероятность наблюдения значений  $q = (q_1, \dots, q_s)$  (конкретной точки дискретного спектра) при одновременном измерении совокупности наблюдаемых. В этом контексте  $\psi(q, t)$  называют амплитудой вероятности. Если спектр непрерывный, то можно лишь ставить вопрос о вероятности наблюдения системы в элементе объема  $d^s q$  конфигурационного пространства около точки  $q$ , и формулу (Д3.1) надо заменить на

$$dw_q(t) = \rho(q, t) d^s q = |\psi(q, t)|^2 d^s q, \quad (\text{Д3.2})$$

где  $\rho(q, t) = |\psi(q, t)|^2$  является **плотностью вероятности** для точек  $q$  спектра. Распределение вероятностей в промежуточных случаях очевидным образом комбинируется из (Д3.1) и (Д3.2). Для получения распределения одной из координат  $q_i$  надо просуммировать (Д3.1) или (Д3.2) по всем значениям всех лишних координат. При суммировании же (Д3.1) или (Д3.2) по всему конфигурационному пространству получится полная вероятность:

$$\sum_q w_q(t) = \sum_q |\psi(q, t)|^2 = \sum_q \psi^*(q, t) \psi(q, t). \quad (\text{Д3.3})$$

Сумма по  $q$  здесь понимается в обобщенном смысле, т. е. как конечная сумма или сходящийся ряд, если спектр дискретен, и как интеграл, если спектр непрерывен. В случае сходимости ряда или интеграла вероятность нормируют на единицу. Если интеграл расходится, то производят нормировку на дельта-функцию<sup>12</sup>.

**Вектор состояния.** Совокупность  $\{\psi(q, t)\}$  значений  $\psi(q, t)$  во всех точках конфигурационного пространства можно рассматривать как вектор  $|\psi(t)\rangle = \{\psi(q, t)\}$  в функциональном гильбертовом пространстве состояний системы («**вектор состояния**»). По отношению к вектору  $|\psi(t)\rangle$  волновую функцию  $\psi(q, t)$  в точке  $q$  можно рассматривать как компоненту вектора состояния «вдоль оси  $q$ » гильбертова пространства. Говорят при этом, что абстрактный вектор  $|\psi(t)\rangle$  чистого состояния задан в  $q$ -представлении как  $\{\psi(q, t)\}$ .

Совокупность  $\{\psi^*(q, t)\}$  тоже удобно рассматривать как вектор  $\langle\psi(t)| \equiv \psi^\dagger(t)$ , сопряженный вектору  $|\psi(t)\rangle$ . По «скобочной» терминологии Дирака векторы  $|\psi\rangle$  называются кет-векторами,  $\langle\psi|$  — бра-векторами

<sup>12</sup>Подробности см., например, в [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика].

(от английского bra(c)ket — скобка). Между векторами  $|\psi(t)\rangle$  и  $\langle\varphi|$  определено действие скалярного умножения, сопоставляющее этим двум векторам (комплексное) число  $S$  по правилу

$$S = (\varphi, \psi) \equiv \varphi^+ \psi \equiv \langle\varphi|\psi\rangle = \sum_q \varphi^*(q) \psi(q). \quad (\text{ДЗ.4})$$

Здесь приведены употребительные обозначения для скалярного произведения. В первом определении в (ДЗ.4) комплексное сопряжение компонент первого сомножителя подразумевается, но не отмечается явно. Скалярное произведение обладает очевидными свойствами

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\psi\rangle &= \langle\psi|\varphi\rangle^*, \quad \langle\varphi|c_1\psi_1 + c_2\psi_2\rangle = \\ &= c_1\langle\varphi|\psi_1\rangle + c_2\langle\varphi|\psi_2\rangle, \quad \langle c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2|\psi\rangle = c_1^*\langle\varphi_1|\psi\rangle + c_2^*\langle\varphi_2|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (\text{ДЗ.5})$$

Понятие вектора состояния особенно наглядно в случае дискретного спектра. Например, для частицы со спином  $1/2$  спиновая координата  $s_z = \pm 1/2$  принимает всего два значения, спиновый вектор состояния — столбец

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi(1/2) \\ \psi(-1/2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

сопряженный вектор — строка  $\langle\psi| = (\psi^*(1/2), \psi^*(-1/2)) \equiv (c_1^*, c_2^*)$ . Скалярное произведение, выражающее собой условие нормировки, составляется по правилу матричного умножения «строка на столбец»:  $\langle\psi|\psi\rangle = c_1^*c_1 + c_2^*c_2 = 1$ .

Поскольку через волновые функции (векторы состояний) выражаются измеримые на опыте величины (вероятности, токи, наблюдаемые и их средние значения и др.), волновые функции состояний, реализуемых на опыте, должны обладать рядом математических свойств, которые обеспечивали бы непротиворечивость квантовой теории. К числу общих свойств такого рода относятся **ограниченность** волновых функций во всех точках конфигурационного пространства, их **однозначность** (каждой точке соответствует одно значение функции) и **непрерывность векторов состояний вместе с их первыми производными**, когда в качестве аргументов выступают динамические переменные с непрерывным спектром (например, декартовы или сферические координаты). Эти требования следует иметь в виду при решении дифференциальных уравнений, определяющих собственные векторы и собственные значения физических величин, либо уравнений, описывающих эволюцию состояний во времени.

**Неразличимость тождественных частиц.** Если квантовая система состоит из тождественных частиц (в нерелятивистской теории тождественность означает одинаковость внутренних квантовых чисел — масс, электрических зарядов и спинов частиц), то ввиду волнового характера движения и вероятностного смысла волновой функции частицы выступают как полностью неразличимые. Из этого физического свойства — неразличимости тождественных частиц — вытекает важное математическое свойство векторов состояния, описывающих системы тождественных частиц. Все частицы, элементарные и составные, делятся на два класса — фермионов<sup>13</sup> (частиц с полуцелыми спинами) и бозонов<sup>14</sup> (частиц с целыми спинами). Вектор состояния системы фермионов антисимметричен, т. е. меняет знак при перемене местами аргументов, относящихся к двум тождественным частицам,  $i$ -й и  $k$ -й:

$$\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_k, \dots, t) = -\psi(q_1, \dots, q_k, \dots, q_i, \dots, t). \quad (\text{ДЗ.6})$$

Здесь под  $q_i$  понимается совокупность четырех динамических переменных (координат конфигурационного пространства), относящихся к  $i$ -й частице.

Векторы состояний системы бозонов симметричны, т. е. не изменяются при перемене местами аргументов тождественных частиц:

$$\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_k, \dots, t) = \psi(q_1, \dots, q_k, \dots, q_i, \dots, t). \quad (\text{ДЗ.7})$$

Физический смысл перестановки аргументов состоит в перемене местами двух частиц (в соответствующем конфигурационном пространстве). Ввиду их неразличимости такая операция не влечет за собой изменения состояния системы, что и приводит к необходимости перестановочной симметрии волновых функций типа (ДЗ.6) или (ДЗ.7).

Если взаимодействием между частицами можно пренебречь и приписать каждой из частиц определенный набор четырех квантовых чисел (квантовое состояние), то свойства антисимметрии (ДЗ.6) и симметрии (ДЗ.7) волновых функций приводят к тому, что в одном квантовом состоянии может находиться не более одного фермиона (**принцип запрета Паули**<sup>15</sup>). Число бозонов в одном квантовом состоянии ничем не ограничено.

**Операторы и их свойства.** Основными задачами квантовой теории являются нахождение спектров наблюдаемых конкретных квантовых систем, их вероятностей в различных состояниях, их средних значений и дисперсий. Для решения этих задач наблюдаемым ( $g$ ) сопоставляют некоторые

<sup>13</sup> по имени выдающегося итальянского физика Энрико Ферми (1901–1954).

<sup>14</sup> по имени индийского физика Шатъендраната Бозе (1894–1974).

<sup>15</sup> Вольфганг Паули (1900–1958) — выдающийся физик-теоретик, Нобелевский лауреат, работавший в Германии, Швейцарии и США.

линейные операторы ( $\widehat{g}$ ), действующие в гильбертовом пространстве системы. Если данная наблюдаемая имеет смысл и при классическом описании системы, то ее оператор выражается через операторы канонических переменных (координат и импульсов) теми же формулами, которые связывают соответствующие классические величины (**принцип соответствия**)<sup>16</sup>.

Спектр  $\{g\}$  величины  $g$  находится путем решения задачи на собственные значения и принадлежащие им собственные векторы  $\psi_k$

$$\widehat{g}\psi_k = g_k\psi_k, \quad (\text{Д3.8})$$

с надлежащими граничными условиями, роль которых играют общие требования к волновым функциям (конечность, непрерывность, однозначность), уже сформулированные выше. Характерное свойство собственного состояния  $\psi_k$ : при измерении величины  $g$  в этом состоянии (точным прибором) с достоверностью получится значение  $g_k$ , т. е. для этой величины неопределенность  $\Delta g = 0$ .

Операторы  $\widehat{q}_1, \dots, \widehat{q}_s$  одновременно измеримых величин коммутируют между собой,

$$[\widehat{q}_i, \widehat{q}_j] \equiv \widehat{q}_i\widehat{q}_j - \widehat{q}_j\widehat{q}_i = 0, \quad (\text{Д3.9})$$

и если они, к тому же, независимы, то образуют полный набор физических величин, определяющих состояние квантовой системы с наибольшей возможной в квантовой механике полнотой. Общие собственные векторы системы уравнений

$$\widehat{q}_j\psi_q = q_j\psi_q, \quad j = 1, \dots, s, \quad q = (q_1, \dots, q_s) \quad (\text{Д3.10})$$

образуют полный ортонормированный базис. Это означает, что они удовлетворяют условию

$$(\psi'_q, \psi_q) \equiv \langle q'_1 \dots q'_s | q_1 \dots q_s \rangle = \delta_{q_1 q'_1} \dots \delta_{q_s q'_s} \quad (\text{Д3.11})$$

и что всякий вектор состояния  $\Phi$  системы можно разложить в обобщенную сумму вида

$$\Phi = \sum_q C_q \psi_q \equiv \sum_q C_q |q\rangle \quad (\text{Д3.12})$$

(**принцип суперпозиции состояний** в квантовой механике). В (Д3.11)  $\delta_{qq'}$  является символом Кронекера  $\delta_{q_n q'_n}$  в случае дискретного спектра и дельта-функцией Дирака  $\delta(q - q')$  в случае непрерывного спектра. Коэффициенты  $C_q \equiv \varphi(q_1 \dots q_s)$  в суперпозиции (Д3.12) представляют собой волновую

<sup>16</sup>В общем случае операторы не коммутируют, поэтому при их построении кроме принципа соответствия требуются дополнительные соображения, например, самосопряженность — см. ниже.



функцию состояния  $\Phi$  в  $q$ -представлении, определяют распределение вероятностей по  $q$  согласно (Д3.1) и (Д3.2) и могут быть найдены с помощью условия ортонормированности (Д3.11) как скалярные произведения

$$C_q \equiv \varphi(q) = (\psi_q, \Phi) = \langle q | \Phi \rangle. \quad (\text{Д3.13})$$

Среднее значение величины  $F$ , оператор которой  $\widehat{F}$ , в состоянии  $\Phi$  определяется в общем случае как

$$\overline{F}_\Phi \equiv \langle F \rangle_\Phi = (\Phi, \widehat{F}\Phi) \equiv \langle \Phi | \widehat{F} | \Phi \rangle. \quad (\text{Д3.14})$$

Если существует  $q$ -представление с непрерывным спектром, то

$$\overline{F}_\Phi = \int \varphi^*(q) \widehat{F}_q \varphi(q) dq, \quad (\text{Д3.15})$$

где  $\widehat{F}_q$  и  $\varphi(q)$  — оператор и волновая функция в  $q$ -представлении. В произвольном  $g$ -представлении можно записать среднее как обобщенную сумму

$$\overline{F}_\Phi = \sum_{g g'} C_{g'}^* F_{g'g} C_g, \quad (\text{Д3.16})$$

где  $C_g = \langle g | \Phi \rangle$  — коэффициент в суперпозиции типа (Д3.12). Понимая совокупность  $\{C_g\} = |\Phi\rangle$  как вектор-столбик, а совокупность  $\{C_{g'}^*\} = \langle \Phi |$  как вектор-строку, следует понимать оператор  $\widehat{F}$  в  $g$ -представлении как квадратную матрицу  $\widehat{F} = \{F_{g'g}\}$  с матричными элементами

$$F_{g'g} = \langle g' | \widehat{F} | g \rangle. \quad (\text{Д3.17})$$

Формула (Д3.17) записана в общей (абстрактной) форме. При переходе к непрерывному  $q$ -представлению она примет вид

$$F_{g'g} = \int \varphi_{g'}^*(q) \widehat{F}_q \varphi_g(q) dq. \quad (\text{Д3.18})$$

Линейный оператор  $\widehat{F}^\dagger$  называется сопряженным к  $\widehat{F}$ , если для всяких векторов состояний  $\varphi$  и  $\psi$

$$(\varphi, \widehat{F}\psi) = (\widehat{F}^\dagger\varphi, \psi) \quad \text{или} \quad \langle \varphi | \widehat{F} | \psi \rangle = \langle \widehat{F}^\dagger \varphi | \psi \rangle. \quad (\text{Д3.19})$$

Оператор называется **самосопряженным** (эрмитовым<sup>17</sup>), если  $\widehat{F}^\dagger = \widehat{F}$ . Условие самосопряженности оператора в матричной форме и в непрерывном  $q$ -представлении записывается соответственно как

$$F_{gg'} = F_{g'g}^* \quad \text{и} \quad \int \varphi^*(q) \widehat{F}_q \psi(q) dq = \int (\widehat{F}_q \varphi(q))^* \psi(q) dq. \quad (\text{Д3.20})$$

Важнейшим свойством эрмитовых операторов является то, что их собственные значения, а также средние значения соответствующей величины в любом квантовом состоянии действительны. Поэтому все физические величины (наблюдаемые) должны изображаться эрмитовыми операторами.

Мера неопределенности величины  $F$  в произвольном состоянии определяется как

$$\Delta F = \sqrt{(F - \overline{F})^2} = \sqrt{(F^2) - (\overline{F})^2}, \quad (\text{Д3.21})$$

где усреднение производится с волновой функцией рассматриваемого состояния. Если эрмитовы операторы  $F$  и  $G$  двух физических величин не коммутируют,  $[\widehat{F}, \widehat{G}] = i\widehat{M}$ , где  $\widehat{M}$  — тоже эрмитов оператор, то в любом квантовом состоянии имеет место следующее соотношение неопределенностей для этих величин:

$$\Delta F \Delta G \geq \frac{1}{2} |\overline{M}|. \quad (\text{Д3.22})$$

Здесь усреднение производится с волновой функцией рассматриваемого состояния. В частности, для декартовых координат и сопряженных с ними импульсов в любом представлении имеют место перестановочные соотношения Гейзенберга<sup>18</sup> и соотношения неопределенностей

$$[\widehat{x}_\alpha, \widehat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}, \quad [\widehat{x}_\alpha, \widehat{x}_\beta] = 0, \quad [\widehat{p}_\alpha, \widehat{p}_\beta] = 0, \quad \Delta x_\alpha \Delta p_\beta \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{Д3.23})$$

где  $\hbar$  — уже встречавшаяся ранее постоянная Планка. Из (Д3.23) следует, что компонента импульса и одноименная координата не имеют одновременно определенных значений и не могут быть точно измерены. Однако, три координаты или три составляющие импульса можно измерить сколь угодно точно.

**Оператор проецирования** на состояние  $\psi_{q_0} \equiv |q_0\rangle$  можно записать в дираковских обозначениях в виде

$$\widehat{P}_{q_0} = |q_0\rangle\langle q_0|, \quad (\text{Д3.24})$$

<sup>17</sup>По имени французского математика Ш. Эрмита (1822–1901).

<sup>18</sup>Вернер Гейзенберг (1901–1976) — немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой механики.

так как, действуя на суперпозицию (Д3.12), этот оператор выделяет из полного вектора состояния компоненту, соответствующую орту  $|q_0\rangle$ :

$$\widehat{P}_{q_0}\Phi = \sum_q C_q |q_0\rangle \langle q_0|q\rangle = C_{q_0} |q_0\rangle$$

Условие полноты системы собственных функций можно записать через оператор проецирования в форме равенства

$$\sum_q \widehat{P}_q \equiv \sum_q |q\rangle \langle q| = \widehat{1}, \quad (\text{Д3.25})$$

где  $\widehat{1}$  — оператор тождественного преобразования (дельта-символ Кронекера либо дельта-функция Дирака). Частными случаями условия (Д3.25) являются полученные ранее равенства (1.239) и (1.242). Равенство (Д3.25) приводит к удобной записи любого оператора

$$\widehat{F} = \widehat{1} \cdot \widehat{F} \cdot \widehat{1} = \sum_{qq'} |q\rangle F_{qq'} \langle q'| \quad (\text{Д3.26})$$

и позволяет легко переходить от одного представления к другому.

Пусть некоторое квантовое состояние описывается волновой функцией  $\Phi(x)$  в  $x$ -представлении; произведя разложение

$$\Phi(x) = \sum_q \varphi(q) \psi_q(x),$$

получим  $\varphi(q) = \int \psi_q^*(x) \Phi(x) dx \equiv \langle q|\Phi\rangle$  — волновую функцию исходного состояния в  $q$ -представлении; наконец, записав

$$\chi(Q) = \langle Q|\widehat{1} \cdot \Phi\rangle = \sum_q \langle Q|q\rangle \langle q|\Phi\rangle = \widehat{U}\varphi(q),$$

получаем связь между волновыми функциями в  $q$ - и  $Q$ -представлениях. Здесь  $\widehat{U} = \{\langle Q|q\rangle\}$  — оператор унитарного преобразования от  $q$ - к  $Q$ -представлению. Оператор обратного преобразования  $\widehat{U}^{-1} = \{\langle q|Q\rangle\}$ , так что  $\varphi(q) = \widehat{U}^{-1}\chi(Q)$ . Оператор  $\widehat{U}$  можно рассматривать как матрицу, строки которой перенумерованы точками собственных значений наблюдаемых в  $Q$ -пространстве, а столбцы — точками  $q$ -пространства. В операторе  $\widehat{U}^{-1}$  строки и столбцы меняются местами, причем  $\langle q|Q\rangle = \langle Q|q\rangle^*$ . Поэтому оператор унитарного преобразования обладает важными свойствами

$$\widehat{U}^+ = \widehat{U}^{-1}, \quad \widehat{U}\widehat{U}^+ = \widehat{U}^+\widehat{U} = \widehat{1}, \quad (\text{Д3.27})$$

обеспечивающими сохранение нормировки волновых функций. Аналогично преобразуются операторы физических величин, например,

$$\widehat{F}_Q = \widehat{U} \widehat{F}_q \widehat{U}^{-1} \quad (3.28)$$

при переходе  $q \rightarrow Q$ .

**Развитие квантовой системы во времени** описывается в одном из трех эквивалентных временных представлений (не путать с выбором обобщенных координат!) В **представлении Шредингера**<sup>19</sup> операторы наблюдаемых не зависят от времени  $t$  (за исключением возможной зависимости от  $t$  оператора взаимодействия  $\widehat{V}(t)$  системы с внешним потенциальным полем), зависимость от времени содержится в волновых функциях и определяется из динамического **уравнения Шредингера**

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi(t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} \quad (Д3.29)$$

с начальным условием  $\Psi(t_0) = \Psi_0$ , где  $\Psi_0$  — начальный вектор состояния,  $\widehat{\mathcal{H}}$  — **оператор Гамильтона (гамильтониан)** системы, явный вид которого может быть подсказан принципом соответствия.

В представлении Гейзенберга зависимость от времени переносится целиком на операторы, а вектор состояния не зависит от времени:

$$\Phi(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}t\right) \Psi(t) = \Psi_0 \quad (Д3.30)$$

(здесь и далее предполагается, что гамильтониан не зависит явно от времени и  $t_0 = 0$ ). Операторы величины  $F$  в представлении Гейзенберга ( $H$ ) и Шредингера ( $S$ ) связаны соотношением

$$\widehat{F}_H(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}t\right) \widehat{F}_S \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}t\right) = \widehat{U}^+(t) \widehat{F}_S \widehat{U}(t), \quad (Д3.31)$$

где

$$\widehat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \widehat{\mathcal{H}}t\right), \quad \widehat{U}^+(t) = \widehat{U}^{-1}(t) \quad (Д3.32)$$

— унитарный оператор преобразования. Гамильтониан системы одинаков в представлениях Гейзенберга и Шредингера:  $\widehat{\mathcal{H}}_H = \widehat{\mathcal{H}}_S = \widehat{\mathcal{H}}$ . Имеется еще представление взаимодействия, о котором речь пойдет в разделе 6.2

<sup>19</sup>Эрвин Шредингер (1887–1961) — выдающийся австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики.

при рассмотрении взаимодействия квантовых систем. Все предыдущие формулы верны в любом представлении.

Оператором  $\widehat{F}$  производной по времени от физической величины  $F$  называется такой оператор, который во всяком состоянии  $\psi$  удовлетворяет соотношению для средних

$$\frac{d\overline{F}}{dt} = \langle \psi | \widehat{F} | \psi \rangle. \quad (\text{Д3.33})$$

В представлении Шредингера имеем

$$\widehat{F}_S = \frac{\partial \widehat{F}_S}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{F}_S], \quad (\text{Д3.34})$$

где первой слагаемое в правой части — производная по явной зависимости оператора от времени (если она имеется). В представлении Гейзенберга

$$\widehat{F}_H = \widehat{U}^+(t) \frac{\partial \widehat{F}_S}{\partial t} \widehat{U}(t) + \frac{i}{\hbar} [\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{F}_H]. \quad (\text{Д3.35})$$

Интегралами движения в квантовой механике называются такие наблюдаемые, средние значения которых в любом состоянии системы не зависят от времени, т. е. операторы производных по времени равны нулю. Если оператор наблюдаемой не зависит явно от времени, то согласно (Д3.34), (Д3.35) условием ее сохранения является коммутация ее оператора с гамильтонианом:  $[\widehat{F}_{H,S}, \widehat{\mathcal{H}}] = 0$ .

Особую роль среди всех состояний системы играют **стационарные состояния**, являющиеся решениями **стационарного уравнения Шредингера**

$$\widehat{\mathcal{H}}\psi_E = E\psi_E. \quad (\text{Д3.36})$$

Стационарные состояния существуют лишь при условии, что гамильтониан системы не зависит от времени явно. Векторы стационарных состояний в представлении Шредингера зависят от времени по закону

$$\Psi_E(x, t) = \psi_E(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right), \quad (\text{Д3.37})$$

где  $x$  — совокупность обобщенных координат. В гейзенберговском представлении векторы состояний от времени не зависят. Средние значения и распределения вероятностей в стационарных состояниях не зависят от времени

для любых величин, операторы  $\widehat{F}_S$  которых (в представлении Шредингера!) не зависят явно от времени.

**Смешанные состояния** квантовой системы не могут быть описаны волновыми функциями (в отличие от чистых состояний, которым сопоставляются векторы состояний и о которых шла речь выше). Смешанные состояния возникают, если квантовая система взаимодействовала в прошлом (или продолжает взаимодействовать) с другой системой, имеющей свои степени свободы. В этом случае системе нельзя сопоставить какую-либо волновую функцию, которая бы зависела только от обобщенных координат рассматриваемой системы. Смешанное состояние можно понимать как статистическую (некогерентную) смесь чистых состояний, информация об относительных фазах которых отсутствует. Такие состояния описываются с помощью **операторов (матриц) плотности**

$$\widehat{\rho}(t) = \sum_{qq'} |q\rangle \rho_{qq'} \langle q'|, \quad (\text{Д3.38})$$

где  $q$ , как и раньше, обозначает полный набор наблюдаемых. Диагональные элементы матрицы плотности имеют смысл вероятностей наблюдения собственных значений  $q$

$$w_q = \rho_{qq} = \langle q | \widehat{\rho} | q \rangle, \quad (\text{Д3.39})$$

с условием нормировки

$$\sum_q \rho_{qq} \equiv \text{Tr} \widehat{\rho} = 1. \quad (\text{Д3.40})$$

Среднее значение наблюдаемой величины

$$\overline{F} = \text{Tr}(\widehat{F}\widehat{\rho}) = \text{Tr}(\widehat{F}\widehat{\rho}) = \sum_{qq'} F_{qq'} \rho_{q'q} \quad (\text{Д3.41})$$

(под знаком следа  $\text{Tr}$  можно делать циклическую перестановку сомножителей). Оператор плотности можно применять и для описания чистых состояний  $|\psi\rangle$ . В этом случае оператор плотности  $\widehat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  обладает характерным свойством  $\widehat{\rho}^2 = \widehat{\rho}$ .

Динамика системы, которая может находиться во внешнем поле, но не взаимодействует с другими динамическими системами, в смешанном состоянии описывается уравнением Лиувилля – Шредингера<sup>20</sup> (оно же уравнение

<sup>20</sup>Жозеф Лиувиль (1809–1882) — французский математик.

Ландау-фон Неймана<sup>21</sup>):

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\widehat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}]. \quad (\text{ДЗ.42})$$

Сюда входит производная по явной зависимости  $\hat{\rho}$  от времени и гамильтониан системы.

Важный пример смешанных состояний дают состояния термодинамического равновесия. Оператор плотности при фиксированном числе частиц в системе описывает каноническое **распределение Гиббса**

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\widehat{\mathcal{H}}}{T}\right). \quad (\text{ДЗ.43})$$

Вероятность наблюдения стационарного состояния  $\psi_n$  с энергией  $E_n$  дается диагональными элементами этого оператора

$$w_n = \rho_{nn} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right), \quad (\text{ДЗ.44})$$

где  $T$  — абсолютная температура в энергетических единицах,

$$Z = \text{Tr} \exp\left(-\frac{\widehat{\mathcal{H}}}{T}\right) = \sum_n e^{-E_n/T} \quad (\text{ДЗ.45})$$

— статистическая сумма (по всем квантовым состояниям системы). Через статистическую сумму выражаются термодинамические величины, например, свободная энергия Гельмгольца  $F$  и внутренняя энергия  $\mathcal{E}$ :

$$F = -T \ln Z, \quad \mathcal{E} = T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}. \quad (\text{ДЗ.46})$$

В свою очередь, через приведенные термодинамические потенциалы  $F$ ,  $\mathcal{E}$  можно вычислить другие термодинамические величины, в том числе важнейшую из них — энтропию  $S$ , а также давление  $\mathcal{P}$ , теплоемкость  $C_V$ , свободную энергию Гиббса  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, & \mathcal{P} &= \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \\ C_V &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_V, & \Phi &= F + \mathcal{P}V. \end{aligned} \quad (\text{ДЗ.46'})$$

<sup>21</sup>Джон (Янош) фон Нейман (1903–1957)— американский математик и физик, разрабатывал математические основы квантовой механики и многое другое.

Если в системе имеются частицы разных сортов и числа частиц  $N_a$  переменны, то состояние равновесия такой системы описывается оператором плотности

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(\frac{\sum_a \mu_a \hat{N}_a - \hat{\mathcal{H}}}{T}\right), \quad (\text{Д3.47})$$

где  $\hat{N}_a$  — оператор числа частиц  $a$ -го сорта,  $\mu_a$ -химический потенциал соответствующей компоненты (**большое каноническое распределение Гиббса**). В  $(N-E)$ -представлении имеем вероятности (диагональные матричные элементы) вида

$$w_{\{N_a\}n} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(\frac{\sum_a \mu_a N_a - E_{\{N_a\}n}}{T}\right), \quad (\text{Д3.48})$$

где обобщенная сумма по состояниям

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \text{Tr} \exp\left(\frac{\sum_a \mu_a \hat{N}_a - \hat{\mathcal{H}}}{T}\right) = \\ &= \sum_{\{N_a\}} \exp\left(\frac{\sum_a \mu_a N_a}{T}\right) \sum_n \exp\left(-\frac{E_{\{N_a\}n}}{T}\right). \end{aligned} \quad (\text{Д3.49})$$

Через нее выражается обобщенная свободная энергия

$$\Omega = -T \ln \mathcal{Z}, \quad (\text{Д3.50})$$

с помощью которой, в частности, можно вычислить среднее число частиц:

$$\overline{N_a} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_a}. \quad (\text{Д3.51})$$

На этом мы завершим общий обзор основных понятий квантовой теории. В качестве примера решения квантовомеханической задачи рассмотрим весьма важный для различных приложений линейный гармонический осциллятор.

**Пример.** *Найти собственные векторы стационарных состояний и спектр энергии отдельного линейного гармонического осциллятора с функцией Гамильтона (2.160). Построить также неэрмитовы операторы  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$ , соответствующие комплексным амплитудам  $q$ ,  $q^*$ . Найти правила действия этих операторов на векторы стационарных состояний осциллятора и выяснить их физический смысл.*



**Решение.** По принципу соответствия сопоставляем классической функции Гамильтона отдельного осциллятора (2.160) квантовомеханический оператор (индексы  $(\mathbf{k}, \sigma)$  опускаем):

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(\widehat{P}^2 + \omega^2 \widehat{Q}^2). \quad (\text{Д3.52})$$

Выбираем координатное представление, в котором эрмитов оператор действительной обобщенной координаты есть оператор умножения  $\widehat{Q} = Q = \sqrt{\hbar/\omega}\xi$ , эрмитов оператор обобщенного импульса  $\widehat{P} = -i\hbar d/dQ = -i\sqrt{\hbar\omega} d/d\xi$ ,  $\xi = \sqrt{\omega/\hbar}Q$  — безразмерная координата. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям Гейзенберга (Д3.23), в частности

$$[\widehat{Q}, \widehat{P}] = i\hbar. \quad (\text{Д3.53})$$

Определим также операторы, соответствующие безразмерным комплексным амплитудам. Согласно (2.152),

$$\begin{aligned} \widehat{a} &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left( \widehat{Q} + \frac{i}{\omega} \widehat{P} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi + \frac{d}{d\xi} \right), \\ \widehat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left( \widehat{Q} - \frac{i}{\omega} \widehat{P} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi - \frac{d}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (\text{Д3.54})$$

Эти операторы неэрмитовы,  $\widehat{a} \neq \widehat{a}^\dagger$ . Но через них просто выражается гамильтониан (Д3.52). Найдя произведение

$$\widehat{a}^\dagger \widehat{a} = \frac{1}{2\hbar\omega} (\widehat{P}^2 + \omega^2 \widehat{Q}^2) + \frac{i}{2\hbar} (\widehat{Q}\widehat{P} - \widehat{P}\widehat{Q})$$

и пользуясь (Д3.53), будем иметь из (Д3.52)

$$\widehat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left( \widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{Д3.55})$$

Перемножая

$$\widehat{a}\widehat{a}^\dagger = \frac{1}{2\hbar\omega} (\widehat{P}^2 + \omega^2 \widehat{Q}^2) - \frac{i}{2\hbar} (\widehat{Q}\widehat{P} - \widehat{P}\widehat{Q}),$$

находим соотношения коммутации для операторов  $\widehat{a}$ :

$$[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1, \quad [\widehat{a}, \widehat{a}] = 0, \quad [\widehat{a}^\dagger, \widehat{a}^\dagger] = 0. \quad (\text{Д3.56})$$

Заметим также, что  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  можно записать в другой форме, эквивалентной (Д3.54):

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\xi^2/2} \frac{d}{d\xi} e^{\xi^2/2}, \quad \hat{a}^\dagger = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\xi^2/2} \frac{d}{d\xi} e^{-\xi^2/2}. \quad (\text{Д3.57})$$

Теперь перейдем непосредственно к решению стационарного уравнения Шредингера, которое мы запишем через безразмерный гамильтониан, введя  $\hat{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{H}}/\hbar\omega - 1/2 = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ :

$$\hat{\mathcal{E}}\Phi_\mathcal{E} = \mathcal{E}\Phi_\mathcal{E}. \quad (\text{Д3.58})$$

Рассмотрим также другой собственный вектор,  $\hat{a}\Phi_\mathcal{E}$ . Имеем с помощью (Д3.56)  $\hat{\mathcal{E}}\hat{a}\Phi_\mathcal{E} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a})\Phi_\mathcal{E} = (\mathcal{E} - 1)\hat{a}\Phi_\mathcal{E}$ . Из этого равенства следует, что  $\hat{a}\Phi_\mathcal{E} = \alpha\Phi_{\mathcal{E}-1}$  — тоже собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\mathcal{E} - 1$ , а  $\alpha$  — постоянная нормировки. Аналогичным образом находим  $\hat{\mathcal{E}}\hat{a}^\dagger\Phi_\mathcal{E} = (\mathcal{E} + 1)\hat{a}^\dagger\Phi_\mathcal{E}$ , т. е.  $\hat{a}^\dagger\Phi_\mathcal{E} = \beta\Phi_{\mathcal{E}+1}$  — собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\mathcal{E} + 1$ . Таким образом, действие операторов  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  на волновую функцию некоторого состояния приводит к состояниям, энергии которых в безразмерной шкале на единицу ниже или выше энергии исходного состояния. Поэтому рассматриваемые операторы можно назвать соответственно понижающим и повышающим.

Поскольку среднее значение исходного гамильтониана (Д3.52)

$$\overline{\mathcal{H}} = \langle \Phi | \widehat{\mathcal{H}} | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\hbar^2}{2} \left| \frac{d\Phi}{dQ} \right|^2 + \omega^2 Q^2 |\Phi|^2 \right) dQ > 0$$

в любом состоянии, то спектр оператора  $\hat{\mathcal{E}}$  ограничен снизу. Обозначим его наименьшее собственное значение через  $\mathcal{E}_0$ . Состояние с наименьшей энергией называется основным. Поскольку состояния с  $\Phi_{\mathcal{E}_0-1}$  не существует, то действие понижающего оператора  $\hat{a}$  на основное состояние должно давать нуль:

$$\hat{a}\Phi_{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi + \frac{d}{d\xi} \right) \Phi_{\mathcal{E}_0} = 0. \quad (\text{Д3.59})$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка имеет единственное решение, определенное с точностью до нормировочной постоянной:

$$\Phi_0(\xi) = A_0 e^{-\xi^2/2}. \quad (\text{Д3.60})$$

Мы приписали волновой функции начального состояния индекс 0, так как  $\widehat{\mathcal{E}}\Phi_0 = 0$  и, следовательно, величина  $\mathcal{E}_0 = 0$ .

Действуя повышающим оператором  $\widehat{a}^\dagger$  на волновую функцию  $\Phi_0$  последовательно один, два и т. д. раз, будем получать волновые функции возбужденных состояний осциллятора, которым соответствуют безразмерные энергии  $\mathcal{E}_1 = 1, \mathcal{E}_2 = 2, \dots, \mathcal{E}_n = n \dots$ . Число их неограничено. Убедимся методом от противного, что этой последовательностью спектр стационарных состояний осциллятора исчерпывается. Пусть существует некоторое значение  $\mathcal{E}'$ , не входящее в найденную последовательность. Действуя на соответствующую волновую функцию некоторое число раз понижающим оператором, получим в конце концов для волновой функции основного состояния снова уравнение (Д3.59), из которого снова следует прежняя последовательность состояний. В итоге, возвращаясь к размерной энергии, можем записать спектр гармонического осциллятора в виде

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{где } n = 0, 1, \dots \quad (\text{Д3.61})$$

Отметим, что минимальная энергия квантового осциллятора конечна,  $E_0 = \hbar\omega/2$ , тогда как классический осциллятор может покоиться с  $E_0 = 0$ . Сравнивая спектр (Д3.61) с представлением (Д3.55) гамильтониана  $\widehat{\mathcal{E}}$ , заключаем, что эрмитов оператор

$$\widehat{n} = \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \quad (\text{Д3.62})$$

имеет целочисленные собственные значения  $n = 0, 1, \dots$ , которые нумеруют уровни возбуждения осциллятора.

Обратимся теперь к вычислению волновых функций. Из условия нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_0(Q)|^2 dQ = 1$ , подставляя в интеграл функцию (Д3.60) и пользуясь интегралом Пуассона  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$ , находим постоянную нормировки:  $|A_0| = (\omega/\pi\hbar)^{1/4}$ . Она определяется с точностью до фазового множителя, по модулю равного единице. Далее определяем введенные выше постоянные  $\alpha_n, \beta_n$  для понижающего и повышающего операторов. Записав скалярное произведение  $\widehat{a}\Phi_n | \widehat{a}\Phi_n = \alpha_n \Phi_n | \alpha_n \Phi_n = |\alpha_n|^2$ , преобразуем его, пользуясь определением сопряженного оператора и (Д3.62):  $\widehat{a}\Phi_n | \widehat{a}\Phi_n = \Phi_n | \widehat{a}^\dagger \widehat{a}\Phi = \Phi_n | \widehat{n}\Phi_n = n$ . Из сравнения двух представлений скалярного квадрата находим  $|\alpha_n| = \sqrt{n}$  и, выбирая фазовый множитель наиболее простым образом, принимаем  $\alpha_n = \sqrt{n}$ . Таким же способом находим  $\beta_n = \sqrt{n+1}$ . Теперь можно записать важные для

приложений соотношения

$$\widehat{a}^\dagger \Phi_n = \sqrt{n+1} \Phi_{n+1}, \quad \widehat{a} \Phi_n = \sqrt{n} \Phi_{n-1} \quad (\text{Д3.63})$$

и выразить  $\Phi_n$  через  $\Phi_0$ :

$$\Phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\widehat{a}^\dagger)^n \Phi_0(\xi). \quad (\text{Д3.64})$$

Другое представление волновой функции, сходное с формулой Родригеса для полиномов Лежандра (см. раздел 1.3), мы получим, применив для  $\widehat{a}^\dagger$  выражение (Д3.57):

$$\Phi_n(\xi) = A_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad \text{где} \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} \quad (\text{Д3.65})$$

— полином Эрмита порядка  $n$ ,  $A_n = \frac{\omega^{1/4}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$  — постоянная нормировки. ■

**Алгебра операторов.** В этом разделе собраны некоторые полезные формулы, позволяющие преобразовывать произведения некоммутирующих операторов и операторные функции. Некоторые из них уже использовались в настоящем дополнении, другие потребуются для решения задач из главы 6. Доказательства не приводятся.

$$[\widehat{f}\widehat{g}, \widehat{h}] = [\widehat{f}, \widehat{h}]\widehat{g} + \widehat{f}[\widehat{g}, \widehat{h}]; \quad [\widehat{f}, \widehat{g}\widehat{h}] = [\widehat{f}, \widehat{g}]\widehat{h} + \widehat{g}[\widehat{f}, \widehat{h}]. \quad (\text{Д3.66})$$

$$e^{\alpha\widehat{A}}\widehat{B}e^{-\alpha\widehat{A}} = \widehat{B} + \alpha[\widehat{A}, \widehat{B}] + \frac{\alpha^2}{2!}[\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] + \dots \quad (\text{Д3.67})$$

В частности, если  $[\widehat{A}, \widehat{B}] = C$  (неоператорная величина), то

$$e^{\alpha\widehat{A}}\widehat{B}e^{-\alpha\widehat{A}} = \widehat{B} + C\alpha; \quad (\text{Д3.67.1})$$

для операторов понижения и повышения  $\widehat{a}$ ,  $\widehat{a}^\dagger$ , а также  $\widehat{n} = \widehat{a}\widehat{a}^\dagger$  имеем

$$e^{\alpha\widehat{n}} \left\{ \begin{array}{c} \widehat{a} \\ \widehat{a}^\dagger \end{array} \right\} e^{-\alpha\widehat{n}} = \left\{ \begin{array}{c} \widehat{a}e^{-\alpha} \\ \widehat{a}^\dagger e^{\alpha} \end{array} \right\}; \quad (\text{Д3.67.2})$$

$$e^{-z\widehat{a}^\dagger + z^*\widehat{a}} \left\{ \begin{array}{c} \widehat{a} \\ \widehat{a}^\dagger \end{array} \right\} e^{z\widehat{a}^\dagger - z^*\widehat{a}} = \left\{ \begin{array}{c} \widehat{a} + z \\ \widehat{a}^\dagger + z^* \end{array} \right\}. \quad (\text{Д3.67.3})$$

$$\left( e^{\alpha\widehat{A}}\widehat{B}e^{-\alpha\widehat{A}} \right)^n = e^{\alpha\widehat{A}}\widehat{B}^n e^{-\alpha\widehat{A}}; \quad (\text{Д3.68.1})$$

$$e^{\alpha\widehat{A}} f(\widehat{B}) e^{-\alpha\widehat{A}} = f\left( e^{\alpha\widehat{A}}\widehat{B}e^{-\alpha\widehat{A}} \right), \quad (\text{Д3.68.2})$$

где  $f(\widehat{B})$  разложима в степенной ряд по  $\widehat{B}$ .

Если  $f(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger)$  разлагается в степенной ряд по  $\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger$ , то

$$\frac{\partial f}{\partial \widehat{a}} = -[\widehat{a}^\dagger, f(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger)], \quad \frac{\partial f}{\partial \widehat{a}^\dagger} = [\widehat{a}, f(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger)]. \quad (\text{Д3.69})$$

Теорема Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа:

если  $[\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] = [\widehat{B}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] = 0$ , то

$$e^{\alpha(\widehat{A}+\widehat{B})} = e^{\alpha\widehat{A}}e^{\alpha\widehat{B}}e^{-\alpha^2[\widehat{A}, \widehat{B}]/2} = e^{\alpha\widehat{B}}e^{\alpha\widehat{A}}e^{\alpha^2[\widehat{A}, \widehat{B}]/2}. \quad (\text{Д3.70})$$

---

---

## Литература

- [Абрамовиц и Стиган (1979)] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
- [Айзерман (1974)] Айзерман М. А. Классическая механика. — М.: Наука, 1974.
- [Алексеев (1977)] Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике. — М.: Наука, 1977.
- [Алферов и др. (1989)] Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Черенков П. А. Излучение релятивистских электронов в магнитном ондуляторе. УФН, т. 157, 1989, с. 389–436.
- [Альвен и Фельтхаммар (1967)] Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967.
- [Андреев и др. (1988)] Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А. Кооперативные явления в оптике. — М.: Наука, 1988.
- [Арфкен (1970)] Арфкен Г. Математические методы в физике. — М.: Атомиздат, 1970.
- [Ахиезер и Берестецкий (1969)] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1969.
- [Ахиезер и Берестецкий (1981)] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1981.
- [Ахманов и Никитин (1998)] Ахманов С. А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. — М.: Изд-во МГУ, 1998.
- [Байер и др. (1973)] Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. — М.: Атомиздат, 1973.
- [Баранова и Зельдович (1977)] Baranova N. B., Zel'dovich V. Ya. On the expansion of radiation intensity into  $a/\lambda$  power series in electrodynamics. Optic Communications, v. 22, 1977, p. 53.

- [Барашенков (1974)] Барашенков В. С. Частицы, движущиеся со скоростями больше скорости света. УФН, т. 114, 1974, с. 133–150.
- [Баргатин и др.(2001)] Баргатин И. В., Гришанин Б. А., Задков В. Н. Запутанные квантовые состояния атомных систем. УФН, т. 171, 2001, с. 625–647.
- [Батыгин и Топтыгин (1970)] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. — М.: Наука, 1970.
- [Бейтмен и Эрдейи (1969,1970)] Бейтмен Г. и Эрдейи А. при участии Магнуса В., Оберхеттингера Ф., Трикоми Ф. Таблицы интегральных преобразований. Том I. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — М.: Наука, 1969. Том II. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. — М.: Наука, 1970.
- [Белинский и Клышко (1993)] Белинский А. В., Клышко Д. Н. Интерференция света и теорема Белла. УФН, т. 163, 1993, с. 1–45.
- [Берестецкий и др. (1968)] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Часть I. — М.: Наука, 1968.
- [Берестецкий и др. (1989)] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Часть I. — М.: Наука, 1989.
- [Берке (1985)] Берке У. Пространство-время, геометрия, космология. — М.: Мир, 1985.
- [Бете и Солпитер (1960)] Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М.: ГИФМЛ, 1960.
- [Блохинцев (1961)] Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. — М.: Высшая школа, 1961
- [Блохинцев (1966)] Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики. — М.: Наука, 1966.
- [Блохинцев (1982)] Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. — М.: Наука, 1982.
- [Боголюбов и Митропольский (1958)] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1958.

- [Боголюбов и Ширков (1980)] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. — М.: Наука, 1980.
- [Болотовский и др. (1978)] Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. Е. Об излучении электромагнитных волн при мгновенном изменении состояния излучающей системы. УФН, т. 126, 1978, с. 311–321.
- [Болотовский (1985)] Болотовский Б. М. О видимой форме быстро движущихся тел. Эйнштейновский сборник 1980–1981, с. 142–168. М.: Наука, 1985.
- [Болотовский (1990)] Болотовский Б. М. О видимой форме движущегося тела. Эйнштейновский сборник 1986–1990, с. 279–328. М.: Наука, 1990.
- [Борисенко и Тарапов (1966)] Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высшая школа, 1966.
- [Борн (1977)] Борн М. Космические путешествия и парадокс часов. УФН, т. 69, 1959, в. 1, с. 105–
- [Борн и Вольф (1970)] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
- [Бредов и др. (1985)] Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика. — М.: Наука, 1985.
- [Быков (1993)] Быков В. П. Сжатый свет и неклассические движения в механике. УФН, т. 163, 1993, с. 89–99.
- [Бьеркен и Дрелл (1978)] Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория, т. 1. Релятивистская квантовая механика. — М.: Наука, 1978.
- [Бюклинг и Каянти (1975)] Бюклинг Е., Каянти К. Кинематика элементарных частиц. — М.: Мир, 1975.
- [Вайнштейн и Вакман (1983)] Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. — М.: Наука, 1983.
- [Вайскопф (1964)] Вайскопф В. Видимая форма быстро движущихся тел. УФН, т. 84, 1964, с. 183.
- [Вейнберг (1977)] Вейнберг С. Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. — М.: Мир, 1975.



- [Виленкин (1965)] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представления групп. — М.: Наука, 1965.
- [Владимиров (1976)] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976.
- [Волошин и Тер-Мартirosян (1984)] Волошин М. Б., Тер-Мартirosян К. А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
- [Гайтлер (1956)] Гайтлер В. Квантовая теория излучения. — М.: ИИЛ, 1956.
- [Галицкий и др. (1992)] Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике. — М.: Наука, 1992.
- [Гальцов и др. (1991)] Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Жуковский В. Ч. Классические поля. — М.: Издательство Московского университета, 1991.
- [Гельфанд и др. (1958)] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
- [Гинзбург (1975)] Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1975.
- [Гинзбург (1979)] Гинзбург В. Л. О теории относительности. — М.: Наука, 1979.
- [Гинзбург (1987)] Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1987.
- [Глаубер (1966)] Глаубер Р. В сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, с. 91–279. — М.: Мир, 1966.
- [Глаубер (1972)] Глаубер Р. Когерентность и детектирование квантов. В кн. «Когерентные состояния в квантовой теории. Сборник статей», с. 26–70. — М.: Мир, 1972.
- [Годунов и Михайлова (1998)] Годунов С. К., Михайлова Т. Ю. Представления группы вращений и сферические функции. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
- [Голдстейн (1957)] Голдстейн Г. Классическая механика. — М.: Гостехиздат, 1957.

- [Градштейн и Рыжик (1971)] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
- [Давыдов (1973)] Давыдов А. С. Квантовая механика. — М.: Наука, 1973.
- [Джексон (1965)] Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
- [Джексон (1975)] Jackson J. D. Classical Electrodynamics. — New York: John Wiley & Sons, 1975.
- [Зельдович и Мышкис (1972)] Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1972.
- [Дирак (1960)] Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. — М.: Физматгиз, 1960.
- [Дирак (1990)] Дирак П. А. М. К созданию квантовой теории поля. — М.: Наука, 1990.
- [Дюге (1973)] Дюге М. Свет, сфотографированный на лету. УФН, т. 109, 1973, с. 157–166.
- [Заславский и Сагдеев (1988)] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988.
- [Зельдович (1975)] Зельдович Я. Б. Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением. УФН, т. 115, 1975, с. 161–197.
- [Зельдович и Илларионов (1971)] Зельдович Я. Б., Илларионов А. Ф. Рассеяние сильной волны электроном в магнитном поле. ЖЭТФ, т. 61, 1971, с. 880–885.
- [Зоммерфельд (1953)] Зоммерфельд А. Оптика. — М.: ИЛ, 1953.
- [Зоммерфельд (1958)] Зоммерфельд А. Электродинамика. — М.: ИЛ, 1958.
- [Иваненко и Соколов (1951)] Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
- [Ильин и Позняк (1973)] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть II. — М.: Наука, 1973.
- [Ициксон и Зюбер (1984)] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля, т. 1 и 2. — М.: Мир, 1984.

- [Камке и Кремер (1980)] Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. — М.: Мир, 1980.
- [Килин (1990)] Килин С. Я. Квантовая оптика. Поля и их детектирование. — Минск: Наука и техника, 1990.
- [Клаудер и Сударшан (1970)] Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. — М.: Мир, 1970.
- [Клышко (1980)] Клышко Д. Н. Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980.
- [Клышко (1986)] Клышко Д. Н. Физические основы квантовой электроники. — М.: Наука, 1986.
- [Клышко (1994)] Клышко Д. Н. Квантовая оптика: квантовые, классические и метафизические аспекты. УФН, т. 164, 1994, с. 1187–1214.
- [Клышко (1996)] Клышко Д. Н. Неклассический свет. УФН, т. 166, 1996, с. 613–638.
- [Колоколов и др. (2000)] Колоколов И. В., Кузнецов Е. А., Мильштейн А. И., Подивилов Е. В., Черных А. И., Шапиро Д. А., Шапиро Е. Г. Задачи по математическим методам физики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [Коноплева и Попов (1980)] Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1980.
- [Коткин и Сербо (1977)] Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. — М.: Наука, 1977.
- [Кочин (1951)] Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Издательство АН СССР, 1951.
- [Коэн-Таннуджи и др. (1992)] Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G. Atom-Photon Interactions (Basic Processes and Applications). — NY: John Wiley and Sons, Inc., 1992.
- [Курбатова и Филиппов (1998)] Курбатова Г. И., Филиппов В. Б. Элементы тензорного исчисления. — СПб: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1998.
- [Лайтман и др. (1979)] Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. — М.: Мир, 1979.

- [Ландау (1960)] Ландау Л. Д. О фундаментальных проблемах. Собрание трудов, т. 2, с. 421–424. — М.: Наука, 1969.
- [Ландау и Лифшиц, Механика] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1988.
- [Ландау и Лифшиц, Теория поля] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
- [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1974.
- [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, часть 1. — М.: Наука, 1978.
- [Лебедев (1963)] Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.–Л.: Физматгиз, 1963.
- [Ли (1965)] Ли Цзун-дао. Математические методы в физике. — М.: Мир, 1965.
- [Линде (1990)] Линде А. Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. — М.: Наука, 1990.
- [Липкин (2001)] Липкин А. И. Существует ли явление «редукции волновой функции» при измерении в квантовой механике? УФН, т. 171, 2001, с. 437–441.
- [Лифшиц и Питаевский (1978)] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Часть 2. — М.: Наука, 1978.
- [Лоренц (1956)] Лорентц Г. А. Теория электронов. — М.: ГИТТЛ, 1956.
- [Мак-Коннел (1962)] Мак-Коннел Дж. Квантовая динамика частиц. — М.: ИИЛ, 1962.
- [Малкин и Манько (1979)] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
- [Мандель и Вольф (2000)] Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000.
- [Мандельштам (1955)] Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов, т. V. Лекции по теории относительности. — М.: Изд-во АН СССР, 1950.
- [Мандельштам (1972)] Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М.: Наука, 1972.

- [Матышев (2000)] Матышев А. А. Изотраекторная корпускулярная оптика. — СПб: Наука, 2000.
- [Медведев (1977)] Медведев Б. В. Начала теоретической физики. — М.: Наука, 1977.
- [Меллер (1975)] Меллер К. Теория относительности. — М.: Атомиздат, 1975.
- [Менский (2001a)] Менский М. Б. Квантовые измерения и декогеренция. — М.: Физматлит, 2001.
- [Менский (2001б)] Менский М. Б. Квантовое измерение: декогеренция и сознание. УФН, т. 171, 2001, с. 459–462.
- [Мессиа (1978)] Мессиа А. Квантовая механика, том 1 — М.: Наука, 1978; том 2 — М.: Наука, 1979.
- [Минковский (1959)] Минковский Г. Пространство и время. УФН, т. 69, 1959, в. 2, с. 303–
- [Монополю Дирака (1970)] Монополю Дирака. — М.: Мир, 1970.
- [Морозов и Соловьев (1963)] Морозов А. И., Соловьев Л. С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Вопросы теории плазмы, в. 2, с. 177–261. — М.: Госатомиздат, 1963.
- [Морс и Фешбах (1958)] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том I. — М.: ИЛ, 1958.
- [Морс и Фешбах (1960)] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том II. — М.: ИЛ, 1960.
- [Мэтьюз и Уокер (1972)] Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. — М.: Атомиздат, 1972.
- [Никитин и др. (1992)] Никитин Ю. П., Протасов В. П., Топоркова Э. П., Фесенко А. И., Котов Ю. Д. Сборник задач по физике элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1992.
- [Никифоров и Уваров (1984)] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1984.
- [Никишов и Ритус (1969)] Никишов А. И., Ритус В. И. Спектр излучения электрона, движущегося в постоянном электрическом поле. ЖЭТФ, т. 56, 1969, с. 2035–2042.

- [Новожилов и Яппа (1978)] Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А. Электродинамика. — М.: Наука, 1978.
- [Окунь (1988)] Окунь Л. Б. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1988.
- [Окунь (1989)] Окунь Л. Б. Понятие массы (масса, энергия, относительность). УФН, т. 158, 1989, с. 511–530.
- [Окунь (2000)] Окунь Л. Б. О письме Р. И. Храпко «Что есть масса?». УФН, т. 170, 2000, с. 1366–1371.
- [Пановский и Филипс (1963)] Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. — М.: ГИФМЛ, 1963.
- [Паули (1947)] Паули В. Теория относительности. — М., Л.: ГИТТЛ, 1947.
- [Перина (1987)] Перина Я. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. — М.: Мир, 1987.
- [Померанский и др. (2000)] Померанский А. А., Сеньков Р. А., Хриплович И. Б. Релятивистские частицы с внутренним моментом во внешних полях. УФН, т. 170, 2000, с. 1129–1141.
- [Принцип относительности (1973)] Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. / Составитель А. А. Тяпкин. — М.: Атомиздат, 1973.
- [Рашевский (1953)] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: ГИТТЛ, 1953.
- [Рубаков (1999)] Рубаков В. А. Классические калибровочные поля. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
- [Румер и Рывкин (1977)] Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1977.
- [Сарачик и Шепперт (1970)] Sarachik E. S. and Schappert G. T. Classical theory of the scattering of intense laser radiation by free electrons. Phys. Rev. D, v.1, 1970, p. 2734–2751.
- [Сена (1988)] Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. — М.: Наука, 1988.
- [Сивухин (1963)] Сивухин Д. В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях. Вопросы теории плазмы, в. 1, с. 7–97. — М.: Госатомиздат, 1963.

- [Сивухин (1977)] Сивухин Д. В. Общий курс физики, том III. Электричество. — М.: Наука, 1977.
- [Сивухин (1980)] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Оптика. — М.: Наука, 1980.
- [Смайт (1954)] Смайт В. Электростатика и электродинамика. — М.: ИЛ, 1954.
- [Смородинский (1972)] Смородинский Я. А. Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна. Эйнштейновский сборник 1971, с. 272–301. — М.: Наука, 1972.
- [Соколов и Тернов (1983)] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. — М.: Наука, 1983.
- [Соколов и др. (1986)] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Калибровочные поля. — М.: Издательство Московского университета, 1986.
- [Стрэттон (1948)] Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948.
- [Тамм (1976)] Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
- [Тейлор и Уилер (1971)] Тейлор Э. Ф., Уилер Дж. А. Физика пространства-времени. — М.: Мир, 1971.
- [Тернов и Бордовицын (1980)] Тернов И. М., Бордовицын В. А. О современной интерпретации классической теории спина Я.И.Френкеля. УФН, т. 132, в. 2, с. 345–352, 1980.
- [Тернов и Михайлин (1986)] Тернов И. М., Михайлин В. В. Синхротронное излучение. Теория и эксперимент. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
- [Толмен (1974)] Толмен Р. Относительность термодинамика и космология. — М.: Наука, 1974.
- [Толстов (1951)] Толстов Г. П. Ряды Фурье. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
- [Топтыгин (1983)] Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. — М.: Наука, 1983.
- [Угаров (1977)] Угаров В. А. Специальная теория относительности. — М.: Наука, 1977.

- [Фейнберг (1974)] Фейнберг Дж. О возможности существования частиц, движущихся быстрее света. Эйнштейновский сборник 1973, с. 134–177. — М.: Наука, 1974.
- [Фейнман и др.] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, в. 1, 2, 3, 4, 1965; в. 5, 6, 7, 8, 1966; в. 9, 1967; задачи и упражнения с ответами и решениями, 1969.
- [Фейнман (2000)] Фейнман Р. Квантовая электродинамика. — Новокузнецк: ИО НФМИ, 2000.
- [Флюгге (1974)] Флюгге З. Задачи по квантовой механике, т. 1 и 2. — М.: Мир, 1974.
- [Фок (1955)] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. — М.: ГИТТЛ, 1955.
- [Фок (1976)] Фок В. А. Начала квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
- [Френкель (1956)] Френкель Я. И. Электродинамика, т. I. Общая теория электричества. — Л. — М.: ГОНТИ, 1934; Собрание избранных трудов, т. I. — Л. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
- [Френкель (1935)] Френкель Я. И. Электродинамика, т. II. Макроскопическая электродинамика материальных тел. — Л. — М.: ГОНТИ, 1935.
- [Ходжаев и др. (1982)] Ходжаев К. Ш., Чирков А. Г., Шаталов С. Д. Журн. техн. физ., т. 52, с. 1493, 1982.
- [Чирков (2001)] Чирков А. Г. Асимптотическая теория взаимодействия заряженных частиц и квантовых систем с внешними электромагнитными полями. — СПб: СПбГУ, 2001.
- [Шимони (1964)] Шимони К. Теоретическая электротехника. — М.: Мир, 1964.
- [Шифф (1957)] Шифф Л. Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1957.
- [Эйнштейн (1905)] Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. Собрание научных трудов, т. 1, с. 7. — М.: Наука, 1965.
- [Эйнштейн (1916а)] Эйнштейн А. Испускание и поглощение излучения по квантовой теории. Собрание научных трудов, т. 3, с. 386–392. — М.: Наука, 1966.



- 
- [Эйнштейн (1916б)] Эйнштейн А. К квантовой теории излучения. Собрание научных трудов, т. 3, с. 393–406. — М.: Наука, 1966.
- [Эйнштейн (1955)] Эйнштейн А. Сущность теории относительности. — М.: ИИЛ, 1955.
- [Эйнштейн и др. (1935)] Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, v. 47, 1935, p. 777–780 (*УФН*, т. 16, 1936, с. 440–445).

---

---

## Предметный указатель

- Амплитуда комплексная 159
- Античастицы 621
- Асимптотика модифицированных функций Бесселя 58
- сферических функций Бесселя 59
- цилиндрических функций 57
- Близкодействие 313
- Вакуумные флуктуации полей 575
- Вектор Герца 451
- волновой 159
- магнитной поляризации 452
- шаровой 446
- электрической поляризации 451
- Вектор Пойнтинга 153
- Векторы базисные 27
- Вероятностный смысл волновой функции 701
- Внутреннее тормозное излучение 472
- Волна плоская 159, 205
- Волновая зона 442
- Гамма-квант 240
- Гироманнитное отношение 331
- Граничные условия в магнитостатике 133
- для уравнений Максвелла 150
- периодические 168
- Дальнодействие 313
- Двойной электрический слой 115
- Действие механической системы 235
- Действие электромагнитного поля 355
- Дефект массы 241
- Диаграммы Фейнмана 630
- Дивергенция ковариантная 46
- Дипольный момент магнитный 136
- электрический 115
- Дипольный момент перехода 601
- Дисперсионные соотношения 166
- Дифференциальные операции в ортогональных координатах 48
- в сферических координатах 49
- в цилиндрических координатах 49
- Дрейф градиентный 336
- центробежный 342
- электрический 335
- Дуальные тензоры 306
- Евклидова геометрия трехмерного пространства 213
- Закон смещения Вина 646
- Закон сохранения электрического заряда 106, 130
- Запаздывающие потенциалы 440

- Заряд магнитный 346  
— электрический 104, 312  
— элементарный 105
- Излучение ондуляторное 478  
— пульсара 457  
— синхротронное 476  
— синхротронное космических электронов 477  
— спонтанное и индуцированное 598  
— тормозное 470
- Импульс релятивистский 237  
— четырехмерный 239
- Инвариантные кинематические параметры 242
- Инерциальная система отсчета 212
- Интегралы движения 709
- Интегральная форма уравнений магнитостатики 132  
— закона электромагнитной индукции 149  
— уравнений электростатики 108
- Интенсивность излучения 442
- Интервал 215  
— времениподобный 221  
— и причинность 221  
— нулевой (светоподобный) 221  
— пространственноподобный 221
- Калибровочное преобразование потенциалов 155, 321
- Квантовое число 700
- Классический радиус электрона 300
- Комбинационное (рамановское) рассеяние 675
- Комптоновская длина волны 300
- Конфигурационное пространство 700
- Коэффициент взаимной индукции 142  
— самоиндукции 143
- Коэффициенты Ламэ 47
- Критическая (эддингтоновская) светимость 494
- Ларморов радиус (гирорадиус) 384
- Лоренцевский контур 211
- Лоренцевское сокращение длины 220
- Лэмбовский сдвиг 577
- Магнетон Бора 193
- Магнитный момент орбитальный 330  
— спиновый 331
- Магнитный поток 140
- Макроскопически малый объем 106
- Максвелловский тензор натяжений 365
- Матрицы Дирака 619  
— Паули 623
- Мировая линия 221
- Момент импульса электромагнитного поля 430
- Монополь Дирака 346
- Направление вращения электрического вектора 205
- Напряженность магнитного поля 127  
— электрического поля 106
- Неравенство Бесселя 79

- Неразличимость тождественных частиц 703
- Обобщенные координаты квантовой системы 700
- Обобщенные токи Нетер 360
- Общие свойства волновых функций 702
- Однородность времени 213
- Однородность и изотропия пространства 213
- Ондулятор 478
- Оператор Гамильтона (набла) 30  
— Лапласа 39  
— плотности 710  
— проецирования 707  
— производной по времени 709  
— самосопряженный (эрмитов) 706  
— унитарный 707
- Операторы напряженностей поля 573  
— рождения и уничтожения 574
- Орбитальный момент поля 428
- Ортогональность функций Бесселя 61
- Ортонормированная система функций 77
- Особые точки фазовой плоскости 338
- Осцилляторы поля (главные координаты) 168
- Перенормировка массы 486
- Плотность заряда объемная 105  
— заряда поверхностная 110
- потока электромагнитной энергии 153  
— электрического тока 127
- энергии электромагнитного поля 153
- Плотность вероятности 622, 701
- Поверхность эквипотенциальная 32
- Полиномы Лежандра 62  
— присоединенные 65  
— формула Родригеса 64
- Полнота системы функций 79
- Полный момент поля 429
- Поляризация плоской монохроматической волны 160
- Поляризуемость электростатическая 616
- Поперечность электромагнитных волн 159
- Постоянная Планка 240
- Постоянная тонкой структуры 594
- Потенциал векторный 131  
— скалярный 154  
— скалярный магнитного поля 139  
— электростатический 108
- Потенциальная функция 141
- Правила отбора 603
- Правило сумм для сил осцилляторов 616
- Предельная скорость 215
- Представление взаимодействия 607
- Представления Шредингера и Гейзенберга 708
- Преобразование Фурье 83
- Преобразования Галилея 213  
— Гильберта 166

- Лоренца 217
- Принцип взаимности 452
- относительности Эйнштейна 215
- относительности классической механики 213
- постоянства скорости света 215
- суперпозиции полей 107, 150
- Принцип запрета Паули 703
- Принцип соответствия 704
- Принцип суперпозиции состояний 704
- Причинности принцип 440
- Производная ковариантная 43
- от дельта-функции 71
- Псевдоевклидова геометрия 221
  
- Равенство Парсеваля 79
- Радиационная ширина спектральной линии 613
- Разложение по мультиполям 115, 116
- Разложение Клебша-Гордана 604
- Распределение Гиббса большое каноническое 712
- Гиббса каноническое 711
- Планка 579
- Пуассона 582
- Релятивистский фактор (лоренц-фактор) 240
- Релятивистское движение в кулоновском поле 399
  
- Сверхизлучение 683
- Сверхтонкое расщепление 605
- Сепаратриса 339
- Сила радиационного трения 487
- Сила Лоренца 311
- Силы осцилляторов 616
- Символ Кристоффеля I рода 44
- Кристоффеля II рода 43
- Симметрия и антисимметрия волновых функций 703
- Система координат бисферическая 52
- вытянутая сфероидальная 51
- сплюснутая сфероидальная 50
- тороидальная 53
- эллипсоидальная 50
- Система отсчета центра инерции 241
- Сложение релятивистских скоростей 220
- Смешанные состояния 710
- Собственное время 219
- Соотношения неопределенностей Гейзенберга 706
- Состояния когерентные 581
- сжатые 587
- смешанные 710
- стационарные 709
- фоковские 571
- чистые 700
- Спектр физической величины 700
- Спин поля 429
- Спин элементарных частиц 193
- Статистическая сумма 711
- Стационарное уравнение Шредингера 709
- Степень деполяризации 162
- поляризации 162
- Сферические функции Бесселя и Ханкеля 59

- Тензор метрический 26
- поляризации 161
  - электромагнитного поля 315
  - энергии-импульса канонический 363
- Тензор энергии-импульса электромагнитного поля 364
- Теорема Гаусса электростатическая 109
- Ирншоу 126
  - Лармора 343
  - Остроградского–Гаусса 36
  - Остроградского–Гаусса обобщенная 95
  - Стокса 38
  - Стокса обобщенная 42
  - вириала 391
  - сложения сферических функций 67
- Теорема единственности решения уравнений Максвелла 154
- Тождества Грина 42
- Ток проводимости 149
- смещения 149
- Ток вероятности 622
- Ток перехода 597
- Томсоновское сечение рассеяния 558
- Убегающие электроны 398
- Уравнение Бесселя 56
- Гельмгольца 42
  - Даламбера неоднородное 155
  - Дирака 618
  - Дирака-Лоренца 486
  - Лежандра 65
- Паули 623
  - Пуассона 108
  - Шредингера 708
  - волновое (Даламбера) 158
  - для матрицы плотности 711
  - непрерывности 130
- Уравнение Гамильтона-Якоби 319
- Уравнение Клейна-Гордона-Фока 421
- Уравнения Максвелла в четырехмерной форме 357
- Условие полноты (замкнутости) 80
- Фаза плоской монохроматической волны 159
- Формула Вина 647
- Клейна-Нишины-Тамма 633
  - Планка 645
  - Релея-Джинса 646
- Формула Брейта 405
- Формула Лармора 449
- Формула Резерфорда 392
- Формулы Сохоцкого 75
- Фотон 240
- Функция Бесселя 53
- Бесселя модифицированная 58
  - Лежандра сферическая 66
  - Неймана, Вебера, Ханкеля 57
  - производящая полиномы Лежандра 61
  - производящая функции Бесселя 54
  - ступенчатая Хевисайда 71
- Функция Бесселя интегральное представление 56

- рекуррентные соотношения 55
- Функция Гамильтона 318
- осцилляторов поля 170
- Функция Грина запаздывающая 439
- опережающая 444
- Функция Лагранжа нерелятивистской частицы 236
- релятивистской частицы 237
- релятивистской частицы в электромагнитном поле 314
- системы частиц 314
- Фурье-образ функции 83
- Циркуляция вектора 32
- Частица ультрарелятивистская 240
- Частота круговая 159
- Четырехвектор плотности тока 356, 376
- Четырехмерная сила 316, 317
- Четырехмерное пространство-время 215
- Четырехмерный вектор 223
- Четырехмерный псевдотензор 305
- Числа заполнения 574
- Эквивалентные фотоны 633
- Электрический квадрупольный момент 115
- Электродвижущая сила индукции 148
- Электромагнитные потенциалы 154
- Энергетический выход реакции 241
- Энергия кинетическая 238
  - покоя 238
  - полная релятивистская 238
  - релятивистская полная 237
- Эффект Доплера 230
- Эффект Казимира 577
- Эффект Комптона 628

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

**subscribe@rcd.ru**

**Внимание:** дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

**http://shop.rcd.ru**

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307,  
тел.: 332-48-92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж).
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

**Топтыгин Игорь Николаевич**

## СОВРЕМЕННАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Дизайнер М. В. Ботя*

*Технический редактор А. В. Ширококов*

*Корректор М. А. Ложкина*

---

Подписано в печать 03.02.03. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 42,78. Уч. изд. л. 43,12.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.

Тираж 1000 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

---