

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ

В настоящей книге излагается курс лекций по теории устойчивости, прочитанный автором в Уральском государственном университете им. А. М. Горького. Первая глава посвящена методу функций Ляпунова. Особое место уделено развитию теории устойчивости при любых начальных возмущениях. Рассмотрены также методы построения функций Ляпунова для нелинейных систем. Во второй главе рассмотрены методы стабилизации систем, параметры которых могут изменяться в широких пределах. Здесь изложены вопросы устойчивости систем с переменной структурой. Третья глава посвящена исследованию устойчивости решений уравнений, заданных в функциональных пространствах. Изложены новейшие достижения в этой области, полученные как автором книги, так и другими учеными. Особое место уделяется вопросам устойчивости при импульсных возмущениях, задаче о накоплении возмущений, а также вопросам теории программного регулирования.

Для понимания материала книги необходимо знать курс математики в объеме вузовской программы. В случае необходимости привлечения математической конструкции, выходящей за пределы указанной программы, автор дает полное описание этой конструкции со ссылкой на первоисточник.

Книга может быть рекомендована студентам, аспирантам, научным работникам и инженерам, которые занимаются прикладными вопросами математики и желают расширить свои знания по теории устойчивости.

Содержание

Предисловие	5
Глава I. Метод функций Ляпунова	9
§ 1. Оценка изменения решений	19
§ 2. Определение устойчивости. Вывод уравнений возмущенного движения	15
§ 3. Функции Ляпунова	17
§ 4. Теоремы Ляпунова об устойчивости	20
§ 5. Теорема об асимптотической устойчивости	23
§ 6. Теоремы о неустойчивости	26
§ 7. Примеры	28
§ 8. Линейные системы	31
§ 9. Построение функций Ляпунова в виде квадратичных форм для линейных систем дифференциальных уравнений	35
§ 10. Оценка решений линейных систем	38
§ 11. Теоремы об устойчивости по первому приближению	40
§ 12. Устойчивость в целом	45
§ 13. Проблема Айзермана	47
§ 14. Примеры	50
Глава II. Устойчивость систем регулирования с переменной структурой	59
§ 1. Предварительные замечания. Постановка задачи	59

§ 2. Стабилизация системы второго порядка	65
§ 3. Стабилизация системы третьего порядка. Условия существования скольжения	71
§ 4. Стабилизация системы третьего порядка. Устойчивость системы	74
§ 5. Стабилизация системы n-го порядка	83
§ 6. Стабилизация системы с ограничителем в критическом случае одного нулевого корня	87
§ 7. Нелинейные системы с переменной структурой. Регулирование по координате x	92
§ 8. Нелинейные системы с переменной структурой. Регулирование по координате x и ее производным	102
§ 9. Исследование системы третьего порядка с разрывной поверхностью переключения	108
§ 10. Система с форсированным скользящим режимом	123
§ 11. Пример системы третьего порядка с форсированным скользящим режимом	132
Глава III. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве	140
§ 1. Банахово пространство	140
§ 2. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве	147
§ 3. Примеры дифференциальных уравнений в банаховых пространствах	156
§ 4. Задача о накоплении возмущений на конечном интервале времени	162
§ 5. Задача о накоплении возмущений на бесконечном интервале времени. Теоремы об устойчивости нулевого решения однородного линейного уравнения	164
§ 6. Теоремы об устойчивости решений нелинейных уравнений	182
§ 7. Устойчивость по отношению к импульсным воздействиям	194
§ 8. Задача осуществления движения по заданной траектории	201
Литература	215

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данной книги положены лекции, прочитанные автором в Уральском государственном университете им. А. М. Горького для студентов-математиков старших курсов. Эти лекции посещали также научные работники и инженеры, интересующиеся применением методов теории устойчивости. Указанное обстоятельство явилось причиной ряда специфических особенностей предлагаемого курса. С одной стороны, автором руководило стремление дать слушателям-математикам представление о современном уровне развития теории устойчивости, показать связь этой теории с другими областями математики, познакомить с новейшими методами исследования, наконец, изложить результаты самого автора и его учеников. С другой стороны, автор понимал, что слушатели не должны были уходить с лекций, унося в голове только голые математические конструкции. Поэтому на лекциях каждый математический факт обсуждался с точки зрения его применимости и ценности в прикладных вопросах. К сожалению, мы не нашли возможным включить все такие обсуждения в эту книгу, однако специфика подбора материала отражает в достаточной степени указанную выше ситуацию.

В первой главе рассматриваются вопросы метода функций Ляпунова. Этот метод был развит в книге А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», вышедшей из печати в 1892 г. Дальнейшему развитию метода функций Ляпунова были посвящены известные монографии А. И. Лурье [22], Н. Г. Четаева [26], И. Г. Малкина [8], А. М. Летова [23], Н. Н. Красовского [7], В. И. Зубова [138] у нас в СССР и Ж. Ла-Салля, С. Лефшеца [11], В. Гана [137] за рубежом.

В нашей книге, далеко не претендующей на полноту, не изложены даже в полном объеме те теоремы, которые вошли в знаменитую монографию А. М. Ляпунова. Здесь нами рас-

смотрены только автономные системы. В линейном случае мы ограничились обзором функций Ляпунова только в виде квадратичных форм. В нелинейном случае не обсуждается вопрос об обратимости теорем об устойчивости и неустойчивости.

С другой стороны, в первой главе подробно обсуждаются вопросы устойчивости при любых начальных возмущениях. Как известно, эта теория возникла в 1950—1955 гг. Первые существенные результаты в этой области принадлежат Н. П. Еругину [133—135,16]. А. И. Лурье и И. Г. Малкину принадлежит заслуга привлечения к указанным вопросам метода функций Ляпунова. Значительную роль в развитии теории устойчивости в целом сыграли теоремы типа теорем 5.2, 6.3, 12.2, приведенных в первой главе. В этих теоремах свойство устойчивости обуславливается наличием функции Ляпунова, имеющей знакопостоянную, а не знакоопределенную, как это требуется в некоторых теоремах Ляпунова, производную по времени. Особая роль этих теорем объясняется тем, что почти любая попытка построения простых функций Ляпунова для нелинейных систем приводит к функциям с указанным свойством.

При изложении материала первой главы в любом удобном случае показывается методика построения функций Ляпунова. В конце главы даны примеры, каждый из которых представляет самостоятельный интерес.

Вторая глава посвящена вопросам устойчивости систем с переменной структурой. С математической точки зрения такие системы представляют весьма узкий класс систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Однако именно благодаря этому факту автору вместе с его сотрудниками удалось построить более или менее полную и стройную теорию для рассматриваемого класса систем. Следует отметить важность исследования устойчивости систем с переменной структурой, так как такие системы позволяют осуществлять стабилизацию объектов с существенно переменными параметрами. Часть результатов второй главы получена совместно с инженерами, которые осуществляли как разработку отдельных направлений теории, так и моделирование исследуемых систем.

Метод функций Ляпунова также нашел здесь свое применение, однако заинтересованный читатель может познакомиться с содержанием этой главы независимо от предыдущей.

В третьей главе обсуждаются вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Намерение включить эту главу в книгу появилось в силу следующих обстоятельств. Прежде всего, к моменту начала работы над этой главой не было монографий и фундаментальных работ, посвященных указанным вопросам, за исключением статей Л. Массера и Д. Шеффера [94, 95, 139, 140]. Автором руководило также желание продемонстрировать роль методов функционального анализа в теории устойчивости. Первый результат в этом направлении принадлежит М. Г. Крейну [99]. В дальнейшем Л. Массера и Д. Шеффер, опираясь, в частности, на метод М. Г. Крейна, значительно развили теорию устойчивости в функциональных пространствах. К моменту завершения работы над этой главой вышла из печати книга М. Г. Крейна [75]. Однако различие научных интересов автора указанной выше книги и автора данной книги привело к тому, что пересечение результатов имеет место только в общих вопросах.

Отметим особенности изложения материала в третьей главе нашей работы. Нами дана трактовка задачи о накоплении возмущений как задача отыскания нормы оператора, преобразующего входной сигнал в выходной. Далее, значительное место уделено теоремам Л. Массера и Д. Шеффера, причем снова эти теоремы рассматриваются с точки зрения накопления возмущений, но уже на полубесконечном интервале времени.

В настоящее время стала очень распространенной точка зрения на устойчивость, как на устойчивость по отношению к возмущению входного сигнала. Предположим, что некоторое звено системы автоматического регулирования преобразует входной сигнал в некоторый сигнал. Закон преобразования этих сигналов задается некоторым оператором. Устойчивость состоит в том, что малое возмущение входного сигнала вызывает малое возмущение выходного сигнала. С математической точки зрения указанное свойство соответствует свойству непрерывности рассматриваемого оператора. Представляет интерес дать внутреннюю характеристику таких операторов. Как правило, эта характеристика сводится к описанию асимптотического поведения матрицы Коши (переходных функций). Именно в таком плане мы и рассматриваем результаты § 5 и 6.

Следует заметить, что асимптотическое поведение матрицы Коши линейной системы полностью характеризуется поведе-

нием реакции звена на импульсное воздействие. Таким образом, теоремы § 5 и 6 можно рассматривать как теоремы, описывающие поведение реакции системы на импульсный сигнал в зависимости от поведения системы при действии возмущений других типов. Поэтому большое внимание уделено вопросам преобразования импульсных воздействий. Здесь на базе понятия функций ограниченной вариации и понятия интеграла Стильтьеса строится элементарная теория устойчивости по отношению к импульсным воздействиям. Указанный подход позволяет рассматривать вопросы устойчивости в смысле Ляпунова (т. е. вопросы устойчивости по отношению к начальным возмущениям) и вопросы устойчивости по отношению к постоянно действующим возмущениям с единой точки зрения.

Последний параграф третьей главы посвящен вопросам программного регулирования. Материал § 6 и 7 изложен так, чтобы применение его для решения задачи осуществления движения по заданной траектории не представляло затруднений. Единственное, что здесь потребовалось для развития теории, — это привлечение методов и результатов теории среднеквадратических приближений.

Следует отметить, что третья глава требует от читателя несколько большей математической подготовки. В этой главе мы используем основные понятия функционального анализа, с которыми можно познакомиться, например, по книге [71]. Однако для удобства читателя все основные определения и положения функционального анализа, которыми мы пользуемся в третьей главе, приведены в § 1 этой главы.

В конце книги приведена подробная библиография работ, имеющих отношение к вопросам, рассматриваемым в книге.

Автор благодарен Н. Н. Красовскому за ценные замечания и советы.

В. А. Табуева, Е. И. Геращенко, В. Л. Гасилов, С. Т. Завалишин, А. Ф. Клейменов, Л. В. Киселев указали мне ряд недочетов, допущенных при оформлении работы. Ю. К. Сергеев провел моделирование некоторых результатов второй главы. Всем указанным товарищам автор приносит свою глубокую благодарность.

ГЛАВА I

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

А. М. Ляпунов установил ряд общих достаточных условий устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения, описываемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Сводя вопрос устойчивости невозмущенного движения к вопросу устойчивости положения равновесия, А. М. Ляпунов связывал факт устойчивости или неустойчивости с наличием функции $v(x_1, \dots, x_n)$, производная которой по времени, взятая согласно системе дифференциальных уравнений, обладает определенными свойствами.

Однако значение функций Ляпунова далеко не исчерпывается проблемой установления факта устойчивости, как и неустойчивости. Знание функции Ляпунова для конкретной системы автоматического регулирования позволяет дать оценку изменения регулируемой величины, оценку времени протекания переходного процесса (времени регулирования), оценку качества регулирования.

С помощью функций Ляпунова можно оценить область притяжения, т. е. многообразие всех начальных возмущений, исчезающих во времени, можно оценить влияние постоянно действующих возмущений. Знание функции Ляпунова позволяет решить вопрос о наличии или отсутствии перерегулирования, с помощью этих функций можно решать задачи устойчивости «в большом», т. е. оценивать область начальных возмущений, не выходящих с течением времени за пределы заданной заранее области. В некоторых случаях знание функции Ляпунова позволяет также решить вопрос о наличии периодического решения.

Одним из наиболее трудных и интересных вопросов теории устойчивости был вопрос об обращении теорем Ляпунова. Необходимо было выяснить, являются ли достаточные

условия устойчивости и неустойчивости, указанные А. М. Ляпуновым, необходимыми условиями. Этот вопрос оказался важным не только в силу стремления к логической завершенности теории. Обращение теорем Ляпунова, осуществленное в работах К. П. Персидского [141], Л. Массера [4], Е. А. Барбашина [25], И. Г. Малкина [142], Н. Н. Красовского [7], обеспечило уверенность в силе метода функций Ляпунова, как универсального метода для решения задач устойчивости.

Однако методы построения функций Ляпунова, хорошо разработанные указанными авторами, хотя и позволили установить факт существования этих функций, но не были настолько эффективными, чтобы ими можно было пользоваться при исследовании конкретных систем.

Следует заметить, что для автономной линейной системы способ построения функций Ляпунова был указан еще самим А. М. Ляпуновым. Этот способ дает возможность получить также функцию Ляпунова в достаточно малой окрестности положения равновесия нелинейной системы. Значительно более трудной является проблема построения функции в заданной области фазового пространства нелинейной системы. В направлении решения этой проблемы работали многие математики и механики; ими создан достаточно богатый запас конкретных функций Ляпунова для нелинейных систем специального вида, но до настоящего времени не существует надежного, простого и хорошо разработанного алгоритма, позволяющего построить функцию Ляпунова для любой нелинейной системы.

В этой главе, наряду с изложением теорем об устойчивости и неустойчивости, мы даем примеры использования функций Ляпунова для решения задач оценки времени регулирования, оценки области допустимых возмущений, оценки области притяжения и т. д.

Кроме того, нами указаны наиболее распространенные приемы построения функций Ляпунова для нелинейных систем и приведены соответствующие примеры применения этих приемов.

§ 1. Оценка изменения решений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Предположим, что правые части системы (1.1), т. е. функции $X_i(x_1, \dots, x_n, t)$, непрерывны в некоторой открытой области D , которая может совпадать со всем пространством. Предположим, кроме того, что функции $X_i(x_1, \dots, x_n, t)$ удовлетворяют в любой замкнутой области G , лежащей в D , условиям Липшица по переменным x_1, \dots, x_n . Известная теорема гарантирует в этом случае существование единственного решения $x_i = x_i(t, x_1^0, \dots, x_n^0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющего начальным условиям $x_i(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) = x_i^0$.

Заметим, что решение $x = x_i(t, x_1^0, \dots, x_n^0)$ может существовать не для всех значений t , $-\infty < t < \infty$, а только на некотором конечном промежутке. Если же решение определено для любого значения t , то назовем это решение *продолжаемым*. Если решение не выходит за пределы некоторой ограниченной области, то оно будет продолжаемым [3]. Существуют и другие, более общие критерии продолжаемости; мы их приводим в третьей главе.

Правые части системы (1.1) мы будем трактовать в дальнейшем как проекции переменного вектора скорости $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$, а величину t будем истолковывать как время. Тогда система (1.1) задает закон движения начальной точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, t)$ $n+1$ -мерного фазового пространства по траектории

$$x_i = x_i(t, x_1^0, \dots, x_n^0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В дальнейшем систему (1.1) мы часто будем записывать в векторной форме, т. е. в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t). \quad (1.2)$$

Решением этой системы будем считать векторную функцию $x(t)$ с проекциями $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Через $\|x\|$ обозначим норму вектора x . В простейшем случае норма вектора может совпадать с евклидовой длиной вектора, т. е. определяться по формуле

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Норма может быть определена и другим способом; укажем

два других часто встречающихся способа задания нормы:

$$\|x\| = \max_i |x_i|$$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Очевидно, введение нормы в фазовом пространстве дает возможность ввести понятие близости точек пространства и, следовательно, понятие предельного перехода. Легко видеть, что если последовательность векторов x^m сходится к вектору x в смысле одной из указанных норм, то она сходится и в смысле любой из двух других норм. Принято говорить в этом случае, что указанные нормы *топологически эквивалентны*.

В дальнейшем нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 1.1. Пусть $u(t)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая при $t > t_0$ неравенству

$$0 < u(t) < \delta + \int_{t_0}^t (\eta + L u(t)) dt, \quad (1.3)$$

где δ , η , L — постоянные и $\delta \geq 0$, $\eta \geq 0$, $L > 0$. Тогда имеет место неравенство

$$u(t) < \frac{\eta}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) + \delta e^{L(t-t_0)}. \quad (1.4)$$

В самом деле, при $t = t_0$ неравенство (1.4) выполняется. В силу непрерывности функции $u(t)$ неравенство (1.4) будет справедливым и при $t > t_0$, если только разность $t - t_0$ достаточно мала. Пусть $t = \tau$ — ближайший момент времени, при котором неравенство (1.4) нарушится, т. е. превратится в равенство.

Рассматривая неравенство (1.3) при $t = \tau$ и помня, что на полуинтервале $t_0 \leq t < \tau$ неравенство (1.3) имеет место, получим

$$u(\tau) < \delta + \int_{t_0}^{\tau} \left(\eta + L \left[\frac{\eta}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) + \delta e^{L(t-t_0)} \right] \right) dt.$$

Проведя интегрирование и подставив пределы, получим неравенство

$$u(\tau) < \frac{\eta}{L} (e^{L(\tau - t_0)} - 1) + \delta e^{L(\tau - t_0)},$$

противоречащее выбору τ .

Используя доказанную сейчас лемму, дадим оценку изменения решений системы (1.2), соответствующего изменению начальных условий и правых частей системы.

Наряду с системой (1.2) рассмотрим систему:

$$\frac{dy}{dt} = X(y, t) + R(y, t). \quad (1.5)$$

Пусть в области D при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ выполняется неравенство

$$\|R(y, t)\| < \eta. \quad (1.6)$$

Рассмотрим решение $x = x(t, x^0)$ системы (1.2) и решение $y = y(t, y^0)$ системы (1.5). Предположим, что начальные условия, определяющие рассматриваемые решения, удовлетворяют условиям

$$\|y^0 - x^0\| < \delta. \quad (1.7)$$

Запишем теперь условия Липшица для системы (1.2) в виде неравенства

$$\|X(y, t) - X(x, t)\| < L \|y - x\|, \quad (1.8)$$

где L — некоторая постоянная.

Теорема 1.1 (об оценке отклонения решений). Пусть выполнены условия (1.6) — (1.8), тогда при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ имеет место оценка

$$\|y(t) - x(t)\| < \frac{\eta}{L} (e^{L(t - t_0)} - 1) + \delta e^{L(t - t_0)}. \quad (1.9)$$

Для доказательства оценки представим уравнения (1.2) и (1.5) в виде интегральных уравнений

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t X(x, t) dt,$$

$$y(t) = y^0 + \int_{t_0}^t [X(y, t) + R(y, t)] dt.$$

Имеем

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \|y^0 - x^0\| + \int_{t_0}^t \{ \|X(y, t) - X(x, t)\| + \|R(y, t)\| \} dt. \quad (1.10)$$

Используя неравенства (1.6) — (1.8), получим

$$\|y(t) - x(t)\| < \delta + \int_{t_0}^t \{ \eta + L \|y(t) - x(t)\| \} dt.$$

Нужная нам оценка непосредственно вытекает теперь из леммы 1.1.

Отметим частные случаи. Если возмущены только начальные условия, а правые части неизменны (случай действия мгновенных возмущений), то имеем $\eta = 0$ и оценка (1.9) имеет вид

$$\|y(t) - x(t)\| < \delta e^{L(t-t_0)}.$$

Отсюда, в частности, видно, что, выбирая δ достаточно малым на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, можно удовлетворить неравенству $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Это означает, что решение уравнения (1.2) является непрерывной функцией начальных данных. Отмеченный сейчас факт можно трактовать как свойство устойчивости решений системы (1.2) на конечном интервале времени. Таким образом, свойство устойчивости решений на конечном интервале времени присуще любой системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если же $\delta = 0$, а $\eta \neq 0$, то мы имеем случай постоянно действующих возмущений, и оценка (1.9) принимает вид

$$\|y(t) - x(t)\| < \frac{\eta}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1).$$

Очевидно, для заданного ε можно подобрать такое значение η , что на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ будем иметь

$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Этот последний факт есть выражение свойства непрерывности решения в некотором функциональном пространстве правых частей. В частности, если правые части системы (1.2) непре-

ривно зависят от некоторого параметра λ , то из полученных оценок следует непрерывность решения системы по данному параметру.

Если правые части системы (1.1) не зависят от времени t , то мы назовем эту систему *автономной*. Пусть теперь система (1.1) автономна и предположим, кроме того, что все решения системы (1.1) продолжаемы, т. е. определены для любого момента времени t .

Рассмотрим в фазовом пространстве автономной системы точку $p(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и обозначим точку

$$q(x_1(t, x_1^0, \dots, x_n^0), \dots, x_n(t, x_1^0, \dots, x_n^0))$$

через $f(p, t)$. Таким образом, через $f(p, t)$ обозначается положение точки p , которое она займет через промежуток времени t , двигаясь по траектории системы (1.1). Если t фиксировано, то функция $f(p, t)$ осуществляет отображение фазового пространства на себя. Это отображение, как следует из теоремы существования и единственности решений и из полученных нами оценок отклонения решений, будет взаимно однозначным и взаимно непрерывным. Кроме того, легко видеть, что функция $f(p, t)$ обладает свойством

$$f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2). \quad (1.11)$$

Из свойства (1.11) (которое мы будем называть *групповым свойством* динамической системы) следует, что совокупность отображений образует однопараметрическую группу отображений фазового пространства [3].

§ 2. Определение устойчивости. Вывод уравнений возмущенного движения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Y(y, t). \quad (2.1)$$

Выделим некоторое движение $y=f(t)$ системы (2.1) и назовем его *невозмущенным* движением.

Движение $y=f(t)$ назовем *устойчивым в смысле Ляпунова*, если для всякого $\epsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|y(t_0) - f(t_0)\| < \delta$ следует неравенство

$\|y(t) - f(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$. Здесь через $y(t)$ обозначено любое другое решение системы (2.1), определяемое начальными условиями $y(t_0)$. Движение $y = f(t)$ называется *асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова*, если оно устойчиво в смысле Ляпунова и если существует такое положительное число h , что при $\|y(t_0) - f(t_0)\| < h$ будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - f(t)\| = 0. \quad (2.2)$$

Если решение $y(t)$ стремится к $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по отношению к t_0 , то асимптотическая устойчивость называется *равномерной относительно t_0* . Если равномерность стремления к пределу имеет место по отношению к начальным условиям $y(t_0)$, то говорят, что решение $y = f(t)$ *равномерно асимптотически устойчиво по отношению к начальным условиям*. Если система (2.1) автономна, т. е. правые части не зависят от t , то асимптотическая устойчивость будет всегда равномерной относительно начальных данных. Этот факт был установлен в работе Массера [4].

Если движение $y = f(t)$ устойчиво по Ляпунову и соотношение (2.2) справедливо для решений $y(t)$, определяемых любыми начальными данными, то говорят, что движение $y = f(t)$ *асимптотически устойчиво при любых начальных данных (или асимптотически устойчиво в целом)*.

Проведем в системе (2.1) замену переменных $x = y - f(t)$. Новая система будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = Y(x + f(t), t) - Y(f(t), t);$$

вводя обозначение

$$X(x, t) = Y(x + f(t), t) - Y(f(t), t),$$

получим систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \quad (2.3)$$

где $X(0, t) = 0$ при $t \geq t_0$.

Система (2.3) определяет дифференциальные уравнения возмущенного движения. Движение $y = f(t)$ перешло при рассматриваемой замене переменных в положение равновесия $x = 0$ новой системы. Задача устойчивости движения $y = f(t)$

переходит, таким образом, в задачу устойчивости нулевого решения $x=0$ системы (2.3).

Сформулируем теперь определение устойчивости нулевого решения $x=0$ системы (2.3).

Решение $x=0$ системы (2.3) называется *устойчивым в смысле Ляпунова*, если для любого положительного числа ε можно указать положительное число δ такое, что из неравенства $\|x(t_0)\| < \delta$ следует при $t > t_0$ неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$. Если же, кроме того, всякое решение $x(t)$, начальные данные которого определяются условием $\|x(t_0)\| < h$, обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, то нулевое решение называется *асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова*. Аналогично вводятся понятия равномерной асимптотической устойчивости и устойчивости в целом.

§ 3. Функции Ляпунова

Рассмотрим функцию $v(x_1, \dots, x_n)$, определенную в фазовом пространстве переменных x_1, \dots, x_n , непрерывную в некоторой области D , включающей в себя начало координат. Предположим также, что функция $v(x_1, \dots, x_n)$ обладает в области D непрерывными частными производными.

Функцию $v(x_1, \dots, x_n)$ назовем *определенно положительной в области D* , если всюду в области D , кроме точки $O(0, \dots, 0)$, имеет место неравенство $v > 0$. Если же выполняется неравенство $v < 0$, то функция v называется *определенно отрицательной*. В том и другом случае функция может называться также *знакоопределенной*.

Если в области D имеет место всюду неравенство $v \geq 0$ или неравенство $v \leq 0$, то функция v называется *знакопостоянной*, причем в первом случае функция v может быть также названа *знакоположительной*, а во втором — *знакоотрицательной*.

Если функция v принимает в области D значения как положительного знака, так и отрицательного, то в этом случае v называют *знакопеременной функцией*. Например, функция $v = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ будет знакопеременной функцией в пространстве переменных x_1, x_2, x_3 , а функция $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ — определенно положительной в этом пространстве. Функция $v = x_1^2 + x_2^2$ будет, однако, знакопостоянной в

пространстве переменных x_1, x_2, x_3 (так как она обращается в нуль на оси Ox_3) и знакоопределенной в пространстве переменных x_1, x_2 .

Чаще всего мы будем иметь дело только с квадратичными формами переменных x_1, \dots, x_n . Очевидно, любую квадратичную форму можно записать в виде

$$v = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad \text{где } a_{ik} = a_{ki}.$$

Составим матрицу коэффициентов этой формы:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и рассмотрим определители

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Если имеют место неравенства $\Delta_k > 0$ при $k = 1, 2, \dots, n$, то форма v будет определена положительной.

Справедлива и обратная теорема, т. е. условия $\Delta_k > 0$, называемые критерием Сильвестра [5], являются необходимыми и достаточными для определенной положительности формы v . Из критерия Сильвестра легко выводится необходимое и достаточное условие определенной отрицательности формы v . Это условие записывается в виде неравенств

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \dots,$$

т. е. определители Δ_k должны последовательно чередовать знак, причем знак Δ_1 должен быть отрицательным.

В дальнейшем мы будем изучать поведение функции $v(x_1, \dots, x_n)$ вдоль траекторий изучаемой системы дифференциальных уравнений, и на основании этого изучения будем делать вывод о поведении траекторий рассматриваемой системы. Функции $v(x_1, \dots, x_n)$, имеющие указанное сейчас назначение, принято теперь называть *функциями Ляпунова*.

Сформулируем теорему о структуре поверхности уровня знакоопределенной функции Ляпунова.

Теорема 3.1. *Если функция $v(x_1, \dots, x_n)$ знакоопределенна, то существует такое положительное число h , что все поверхности уровня $v = c$, где $|c| < h$, являются замкнутыми относительно точки O поверхностями.*

Заметим, что мы называем поверхность $v = c$ замкнутой относительно точки O , если на любой непрерывной линии, соединяющей точку O с точкой границы области D , имеется по крайней мере одна точка, в которой $v = c$.

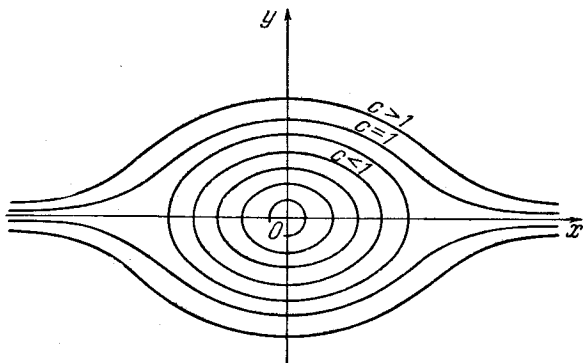


Рис. 1.

Для доказательства теоремы предположим для определенности $v > 0$ и рассмотрим шар J_R с центром в начале координат и радиусом, равным R . Предположим, что функция v определена на этом шаре (включая его границу S_R). Таким образом, в качестве области D мы возьмем шар $\bar{J}_R = J_R \cup S_R$. Так как функция v непрерывна, то на замкнутом ограниченном множестве S_R , границе шара, эта функция достигает своего минимального значения, которое обозначим через h .

Соединим теперь точку O с какой-либо точкой p , лежащей на границе S_R некоторой непрерывной линией $x = x(s)$. Так как в точке O функция v равна нулю, а $v(p) \geq h$, и так как функция v меняется непрерывно вдоль непрерывной кривой $x = x(s)$, то функция v необходимо в некоторой точке этой кривой примет значение $v = c$.

Таким образом, внутри шара \bar{J}_R лежит замкнутая часть поверхности $v = c$; не исключается возможность, что другие части этой поверхности расположены за пределами этого

шара. Такая возможность реализуется, например, для функции

$$v = \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{y^2}{(1+y^2)^2}.$$

С другой стороны, функция $v = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$ дает нам пример функции, линии уровня которой $\frac{x^2}{1+x^2} + y^2 = c$ при $c \geq 1$ неограничены, а при $0 < c < 1$ замкнуты и ограничены (рис. 1).

Однако заметим, что если определенно положительная функция v является неограниченно растущей при $x \rightarrow \infty$, т. е. для любого числа $A > 0$ можно указать сферу S_R , вне которой будем иметь $v > A$, то поверхности уровня этой функции будут ограничеными поверхностями.

§ 4. Теоремы Ляпунова об устойчивости

Дадим теперь ряд достаточных признаков устойчивости, в основе которых лежит понятие функции Ляпунова.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

правые части которой $X_i(x_1, \dots, x_n)$ непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица в некоторой области D фазового пространства, включающей точку $O(0, \dots, 0)$ вместе с ее некоторой окрестностью. Предположим выполненными условия $X_i(0, \dots, 0) = 0$, тогда точка O будет особой точкой системы (4.1) или, что то же, положением равновесия этой системы. Правые части системы (4.1) в рассматриваемом случае мы полагаем не зависящими явно от t , т. е. считаем систему автономной.

Теорема 4.1 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если для системы (4.1) существует в области D знакоопределенная функция v , производная которой по времени \dot{v} , взятая в силу системы (4.1), является знакопостоянной функцией знака, противоположного знаку функции v , то положение равновесия устойчиво в смысле Ляпунова.*

Докажем теорему. Будем обозначать через J_ϵ внутренность шара радиуса ϵ с центром в точке O , через S_ϵ — сферическую поверхность этого шара.

Пусть для определенности v будет определенно положительной функцией. Предположим ϵ таким, что J_ϵ лежит в области D , и пусть l — минимальное значение функции v на сфере S_ϵ . Выберем положительное число δ таким, чтобы в точках шара J_δ выполнялось неравенство $v < l$ и пусть p — произвольная точка из J_δ . Рассмотрим траекторию $f(p, t)$, выходящую из точки p , и допустим, что она пересечет сферу

S_ϵ в некоторой точке q . Так как $\dot{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \leq 0$, то

функция v не возрастает вдоль траектории и поэтому будем иметь $v(q) \leq v(p) < l$. С другой стороны, так как l — минимум функции v на S_ϵ , то должно выполняться неравенство $v(q) \geq l$. Полученное противоречие доказывает, что точка $f(p, t)$ не выйдет с ростом времени за пределы сферы S_ϵ . Теорема доказана.

Покажем теперь, как можно использовать схему доказательства теоремы для оценки области допустимых возмущений. *Областью допустимых возмущений* данной области G называется такая область E , что все траектории, выходящие из ее точек, не выходят за пределы области G . В данном случае, очевидно, область J_δ будет областью допустимых возмущений для области J_ϵ . Таким образом, для определения области допустимых возмущений необходимо найти минимум l функции v на границе области G , и в качестве области E взять область, в которой выполняется неравенство $v < l$.

Теорема 4.2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если для системы дифференциальных уравнений (4.1) существует знакоопределенная функция v , полная производная которой по времени, найденная в силу системы (4.1), будет также знакоопределенной, знака противоположного с v , то положение равновесия будет асимптотически устойчивым.*

Докажем теорему. Пусть для определенности функция v будет определенно положительной функцией. Пусть число R таково, что \bar{J}_R лежит в области D .

Так как из предыдущей теоремы следует, что положение равновесия будет устойчивым, то существует такое $r > 0$, что если точка p лежит в J_r , то точка $f(p, t)$ не выйдет из шара J_R . Пусть ϵ — положительное как угодно малое число. Согласно предыдущей теореме снова можем указать число $\delta > 0$, такое, что из $p \in J_\delta$ будет следовать $f(p, t) \in J_\epsilon$ при $t > 0$. Пусть точка p лежит в J_ϵ . Предположим, что точка $f(p, t)$ не попадет при $t > 0$ в шар J_δ . Тогда полутраектория $f(p, t)$ при $t > 0$ будет лежать в шаровом слое $J_R \setminus J_\delta$. Так как в этом шаровом слое имеем $\dot{v} < 0$ всюду, то существует постоянная $m > 0$, такая, что будем иметь $\dot{v} < -m$ во всех точках указанного слоя. Из равенства

$$v(f(p, t)) = v(p) + \int_0^t \dot{v} dt$$

мы немедленно выводим неравенство

$$v(f(p, t)) < v(p) - mt. \quad (4.2)$$

Если t растет неограниченно, то правая часть неравенства становится отрицательной, что и приводит нас к противоречию, так как в левой части этого неравенства стоит значение функции Ляпунова, которое не может стать отрицательным. Таким образом, чтобы уничтожить противоречие, мы должны допустить, что точка $f(p, t)$ попадет в некоторый момент в шар J_δ , но число δ выбрано так, что, попав в J_δ , точка $f(p, t)$ не сможет уже выйти за пределы J_ϵ . Так как ϵ было взято произвольным сколь угодно малым числом, то отсюда следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} v(f(p, t)) = 0$.

Теорема доказана.

Покажем теперь, как можно использовать схему доказательства последней теоремы для оценки времени переходного процесса. Временем переходного процесса назовем время $t(p, \epsilon)$, необходимое для того, чтобы точка p , двигаясь по траектории $f(p, t)$, попала в заданную окрестность J_ϵ точки O и при $t > t(p, \epsilon)$ там оставалась.

Пусть число l будет минимумом функции v на сфере S_δ . Если $f(p, t_0) \in J_\delta$, то при $t \geq t_0$ будем иметь $f(p, t) \in J_\epsilon$. Но, очевидно, число t_0 можно найти из равенства $v(p) - mt_0 = l$, так как при $t_0 = \frac{v(p) - l}{m}$ левая часть неравенства (4.2)

заведомо будет меньше l . Таким образом, получаем оценку

$$t(p, \varepsilon) < \frac{v(p) - l}{m}. \quad (4.3)$$

В теории регулирования время переходного процесса часто называют временем регулирования.

Как первая, так и вторая теоремы Ляпунова имеют простой геометрический смысл. Неравенство $\dot{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i < 0$ означает, что траектории системы (4.1) направлены в сторону убывания функции v , т. е. пересекают поверхности уровня этой функции в направлении, противоположном направлению вектора $\text{grad } v$.

§ 5. Теорема об асимптотической устойчивости

Рассмотрим сначала некоторые предельные свойства траекторий.

Определение 5.1. Точка q фазового пространства называется ω -предельной точкой точки p , если существует последовательность моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что $q = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p, t_n)$. Если же $t_n \rightarrow -\infty$, то точка $q = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p, t_n)$

называется α -предельной точкой точки p . Так, например, асимптотически устойчивое положение равновесия является ω -предельной точкой для всех точек, лежащих в достаточно малой окрестности этого положения. Точки предельного цикла, на который навиваются спиралевидные кривые (рис. 2), также являются ω -предельными для точек, принадлежащих этим кривым. В обоих примерах ω -предельные точки составляют целые траектории

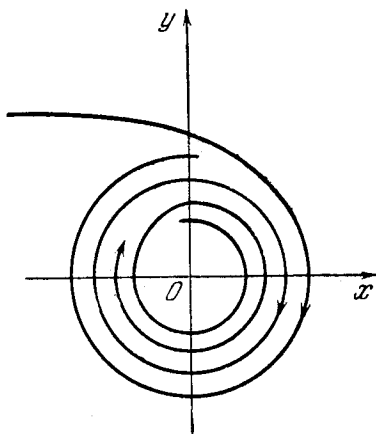


Рис. 2.

(в первом случае — особая точка, во втором — предельный цикл). Этот факт не случаен. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Множество ω -предельных (α -предельных) точек данной точки есть замкнутое множество, состоящее из целых траекторий.*

Прежде всего заметим, что замкнутость множества ω -предельных точек есть следствие одной известной теоремы из теории множеств. Эта теорема утверждает, что предельная точка для предельных точек множества снова является предельной точкой этого множества. Допустим теперь, что точка q является ω -предельной точкой для точки p , и покажем, что точка $f(q, \tau)$ (число τ может иметь как положительный, так и отрицательный знак) также является ω -предельной для точки p . В самом деле, если $q = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p, t_n)$, то из группо-

вого свойства динамических систем (см. § 1) и свойства непрерывности $f(p, t)$ как функции p , получим $f(q, \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f(p, t_n), \tau)$, а это и означает, что точка $f(q, \tau)$ явля-

ется ω -предельной точкой точки p , т. е. все точки траектории, выходящей из q , являются ω -предельными точками для p .

Множество, состоящее из целых траекторий, часто называют *инвариантным множеством*. Инвариантное множество A обладает тем свойством, что $f(A, t) = A$ при любом t . Если же $f(A, t) \subset A$ при $t > 0$, то множество A назовем *положительно инвариантным*.

Заметим, что если траектория $f(p, t)$ не выходит при $t > t_0$ из ограниченной части пространства, то множество ее ω -предельных точек не пусто.

Лемма 5.1. *Если существует функция Ляпунова v , ограниченная снизу (сверху) в положительно инвариантной области D , и если производная по времени \dot{v} этой функции знакоотрицательна (знакоположительна) в этой области, то все ω -предельные точки данной точки p лежат на одной и той же поверхности уровня функции v .*

В самом деле, пусть точка p лежит в области D и пусть точка $q = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p, t_n)$ является ω -предельной для p . Прежде

всего заметим, что функция $v(f(p, t))$ при $t \rightarrow \infty$ не возрастает и ограничена снизу, следовательно, существует предел

$v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(f(p, t))$. В силу непрерывности функции v имеем также $v(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(f(p, t_n))$, но так как $v(f(p, t))$ монотонно меняется, то имеем, очевидно, $v(q) = v_0$, что и доказывает лемму.

Теорема 5.2. Если существует определенно положительная функция v такая, что $\dot{v} < 0$ вне M и $\dot{v} \leq 0$ на M , где M — множество, не содержащее целых траекторий, кроме точки O , то положение равновесия O асимптотически устойчиво.

Докажем теорему. Очевидно, положение равновесия — точка O устойчиво в смысле Ляпунова, так как выполняются условия теоремы 4.1. В силу устойчивости существует для заданного положительного числа ε положительное число δ такое, что если $p \in J_\delta$, то $f(p, t) \in J_\varepsilon$ при $t > 0$.

Так как траектория $f(p, t)$ не выходит при $t > 0$ за пределы шара J_ε , то множество Ω ω -предельных точек точки p не пусто. Если Ω совпадает с точкой O , то теорема доказана, так как будем иметь $\lim_{t \rightarrow \infty} f(p, t) = O$.

Допустим, что множество Ω содержит по крайней мере одну точку q , отличную от точки O . Из леммы 5.1 следует, что

$$v(q) = v(f(q, t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(f(p, t)) \neq 0.$$

Таким образом, все ω -предельные точки p лежат на одной и той же поверхности уровня $v = v(q)$. Из теоремы 5.1 следует, что множество Ω замкнуто и состоит из целых траекторий. Таким образом, так как v вдоль этих траекторий остается постоянной, то имеем $\dot{v} = 0$ на всем множестве Ω . По условию теоремы множество Ω должно содержаться в множестве M , но множество M не содержит целых траекторий. Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что из теоремы 5.2 следует справедливость теоремы 4.2, таким образом, теорема 5.2 является усилением теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теорема 5.2 позволяет решить вопрос об асимптотической устойчивости с помощью функции Ляпунова, имеющей знак постоянную производную. В конкретных примерах именно такие функции Ляпунова удается чаще всего построить для

нелинейных систем. Следует заметить, что требование теоремы об отсутствии на множестве M целых траекторий легко проверяется. В самом деле, если, например, уравнение $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ является уравнением поверхности M , то условие

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} X_i \neq 0$$

является, очевидно, достаточным условием отсутствия целых траекторий на множестве M , так как при выполнении этого условия интегральные кривые «прошивают» поверхность M .

§ 6. Теоремы о неустойчивости

Рассмотрим теперь теоремы о неустойчивости.

Теоремы 6.1 и 6.2 принадлежат А. М. Ляпунову, теорема 6.3 доказана Н. Н. Красовским [7].

Теорема 6.1. *Если существует функция v , имеющая знакоопределенную производную по времени, и такая, что в любой окрестности точки O функция v не является знакопостоянной, знака противоположного с \dot{v} , то нулевое решение системы (4.1) неустойчиво.*

Пусть в шаре J_δ выполнены условия теоремы. Полагая для определенности функцию \dot{v} определенно положительной, рассмотрим как угодно малую окрестность J_δ точки O . Покажем, что существует точка p , траектория которой при $t > 0$ выйдет за пределы J_δ . По условию теоремы в J_δ имеется точка p , в которой $v(p) = v_0 > 0$. В силу непрерывности функции v существует такое число η , что в J_η будем иметь $|v| < v_0$. Так как функция \dot{v} определенно положительна, то $v(f(p, t))$ растет с ростом t , и поэтому точка $f(p, t)$ не сможет попасть в J_η . Допустим, что точка $f(p, t)$ не выйдет за пределы J_δ . Так как \dot{v} имеет в области $\bar{J}_\delta \setminus J_\eta$ положительный минимум m , то будет справедливым неравенство

$$v(f(p, t)) = v(p) + \int_0^t \dot{v} dt > v(p) + mt. \quad (6.1)$$

Отсюда видим, что с ростом t функция $v(f(p, t))$ растет неограниченно, но, с другой стороны, функция v как непрерывная

функция должна быть ограниченной в шаровом слое $\bar{J}_\varepsilon \setminus J_\eta$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 6.2. *Если существует функция v такая, что ее производная по времени имеет вид*

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v + \omega, \quad (6.2)$$

где λ — положительная постоянная, а ω или тождественно обращается в нуль или является знакопостоянной, и если в последнем случае функция v не является в любой окрестности точки O знакопостоянной, знака противоположного с ω , то нулевое решение системы (4.1) неустойчиво.

Полагая для определенности $\omega \geq 0$, в произвольно малой окрестности J_δ выберем точку p , в которой $v(p) = v_0 > 0$, и покажем, что точка $f(p, t)$ с ростом t выйдет за пределы любой окрестности J_ε , в которой выполнены условия теоремы. Рассматривая функции $v(f(p, t))$ и $\omega(f(p, t))$ как функции времени, из дифференциального уравнения (6.2) можем определить $v(f(p, t))$ по известной формуле Коши:

$$v(f(p, t)) = e^{\lambda t} \left[\int_0^t e^{-\lambda t} \omega dt + v_0 \right].$$

Из условия $\omega \geq 0$ имеем

$$v(f(p, t)) \geq v_0 e^{\lambda t}.$$

Так как $\lambda > 0$, то с ростом t функция $v(f(p, t))$ растет неограниченно, а это значит, что точка $f(p, t)$ выйдет за пределы области J_ε .

Теорема 6.3. *Если существует функция v , не являющаяся знакоотрицательной в произвольной окрестности точки O , и такая, что*

$$\frac{dv}{dt} > 0 \text{ вне } M, \quad \frac{dv}{dt} \geq 0 \text{ на } M,$$

где M — множество, не содержащее целых траекторий (кроме точки O), то положение равновесия неустойчиво.

Так же как и в доказательстве теоремы 6.1, в произвольно малой окрестности J_δ выберем точку p , в которой $v(p) = v_0 > 0$, и выберем затем шар J_η , во всех точках которого имеет место неравенство $v < v_0$. Допустим теперь, что точка

$f(p, t)$ не выйдет за пределы некоторого шара \bar{J}_ε . Так как $f(p, t)$ не может попасть и в J_η , то точка $f(p, t)$ будет при всех $t > 0$ лежать в шаровом слое $\bar{J}_\varepsilon \setminus J_\eta$, следовательно, непустое множество Ω ω -предельных точек точки p также будет лежать в этом шаровом слое. Но по лемме 5.1 множество Ω лежит на поверхности $v=c$, а по теореме 5.1 множество Ω является замкнутым и состоит из целых траекторий. Таким образом, на Ω имеем $\dot{v}=0$, откуда следует, что $\Omega \subset M$, а это противоречит предположению теоремы, так как множество M не содержит целых траекторий.

В заключение отметим, что возможны различные обобщения рассмотренных теорем. Так, например, можно отказаться от требования выполнения условий Липшица для правых частей системы (4.1) или даже от требования непрерывности правых частей. Все теоремы § 4—6, безусловно, будут справедливы, если правые части системы (4.1) кусочно-непрерывны. Можно также снять требования непрерывности и дифференцируемости функции Ляпунова, заменив их другими требованиями, очевидным образом вытекающими из доказательств приведенных теорем. Более подробно эти вопросы разобраны в монографии Н. Н. Красовского [7]. В этой же монографии проведено фундаментальное исследование условий обратимости теорем Ляпунова, теорем 5.2 и 6.3, а также многих других теорем рассматриваемого метода.

§ 7. Примеры

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = ax^3 + by, \quad \dot{y} = -cx + dy^3 \quad (7.1)$$

и попытаемся найти для нее функцию Ляпунова в виде $v = F_1(x) + F_2(y)$. Будем иметь в этом случае $\dot{v} = F_1'(x) \times (ax^3 + by) - F_2'(y)(cx - dy^3)$. Потребуем снова, чтобы функция \dot{v} имела такую же функциональную структуру, что и функция v , т. е. потребуем, чтобы тождественно выполнялось $bF_1'(x)y - cF_2'(y)x = 0$. Деля переменные, получим

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{by}{F_2'(y)},$$

и, следовательно, каждая из этих дробей должна быть постоянной величиной, например, равной $1/2$.

Таким образом, получим $F_1(x) = cx^3$ и $F_2(y) = by^3$, т. е. $v = cx^3 + by^3$. Для производной \dot{v} получим выражение $\dot{v} = 2acx^4 + 2bdy^4$. Если $a < 0$, $d < 0$, $bc > 0$, то мы находимся в условиях применения теоремы 4.2 и положение равновесия будет асимптотически устойчивым. Если $a = 0$, $b > 0$, $d < 0$, $c > 0$, то нулевое решение будет устойчивым в смысле Ляпунова, как это следует из теоремы 4.1. Однако в данном случае из теоремы 5.2 следует и асимптотическая устойчивость. В самом деле, множеством M в данном случае служит множество $y = 0$, т. е. ось Ox . Но легко видеть, что на оси Ox нет целых траекторий системы (7.1). В самом деле, если бы такая траектория лежала на оси Ox , то мы имели бы тождественно вдоль нее $y = 0$, $\dot{y} = 0$ и из второго уравнения системы (7.1) вывели бы, что $x = 0$. Таким образом, на оси Ox находится только одна целая траектория — особая точка $O(0, 0)$. Если $bc < 0$, $ad < 0$ или $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то мы находимся в условиях применения теоремы 6.1 и нулевое решение будет неустойчивым. Неустойчивость будет также иметь место в силу теоремы (6.3) и в том случае, когда $a = 0$, $bc < 0$, $d \neq 0$.

Заметим, что метод построения функции Ляпунова, продемонстрированный сейчас, носит название метода деления переменных [18].

Пример 2. Рассмотрим теперь уравнение колебаний маятника

$$I\ddot{\varphi} + n\dot{\varphi} + Mgl \sin \varphi = L, \quad (7.2)$$

где I — момент инерции, $n\dot{\varphi}$ — момент силы трения, $Mgl \sin \varphi$ — момент силы тяжести, L — вращающий момент, M — масса, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от центра массы маятника до оси вращения, φ — угол отклонения маятника от вертикали.

Разделив на I и введя новые обозначения $a = \frac{n}{I}$, $b = \frac{Mgl}{I}$, $N = \frac{L}{I}$, запишем уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + b \sin \varphi = N, \quad (7.3)$$

или в виде системы

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = -b \sin \varphi - a\omega + N. \quad (7.4)$$

Очевидно, система (7.4) будет иметь положение равновесия, определяемое из уравнений

$$\omega = 0, \quad -b \sin \varphi - a\omega + N = 0,$$

откуда следует, что положение равновесия существует, если уравнение $\sin \varphi = N/b$ имеет решение φ_0 . Таким образом, для существования положения равновесия необходимо выполнение неравенства $|N| \leq b$. Вводя новую переменную $x = \varphi - \varphi_0$, сведем уравнение (7.3) к уравнению

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b(\sin(x + \varphi_0) - \sin \varphi_0) = 0, \quad (7.5)$$

для которого равновесным состоянием будет состояние $x = 0$, $\dot{x} = 0$. Система, эквивалентная уравнению (7.5), имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -b(\sin(x + \varphi_0) - \sin \varphi_0) - ay. \quad (7.6)$$

Заметим, что в случае отсутствия трения уравнение (7.2) обладает первым интегралом (интегралом энергии)

$$E = \frac{l\omega^2}{2} + Mgl(1 - \cos \varphi) - L\varphi = c. \quad (7.7)$$

Этот первый интеграл находится при $n=0$ из уравнения (7.3) подстановкой $\omega = \dot{\varphi}$. Физический смысл первого интеграла состоит в том, что он дает полную энергию маятника, причем эта энергия остается в процессе колебаний маятника постоянной, так как рассеивания энергии не происходит. Если же в рассматриваемой системе имеется трение (в точке подвеса маятника, сопротивление среды и т. д.), то происходит рассеивание энергии, и величина E уже не будет постоянной вдоль траектории, а будет убывать, т. е. будет вести себя как функция Ляпунова системы (7.6). Проведя в (7.7) замену переменных $x = \varphi - \varphi_0$, $y = \omega$, рассмотрим новую функцию: $v = \frac{ly^2}{2} + lb(\cos \varphi_0 - \cos(x + \varphi_0) - x \sin \varphi_0)$. Очевидно, v отличается от E на постоянную величину. В силу системы (7.6) получим $\dot{v} = -lay^2$. Если $\cos \varphi_0 > 0$, то при достаточно малых x функция v будет определено положительной.

В самом деле, из формулы Тейлора следует, что

$$F(x) = \cos \varphi - \cos(x + \varphi_0) - x \sin \varphi_0 = \frac{\cos(x^* + \varphi_0)}{2} x^2,$$

где $|x^*| \leq |x|$; очевидно, при x достаточно малом знак функции $F(x)$ совпадает со знаком $\cos \varphi_0$.

Заметим далее, что \dot{v} обращается в нуль только на оси Ox , таким образом, множеством M , фигурирующим в формулировке теоремы 5.1, будет линия $y=0$ или отрезок этой линии. Легко видеть, что на линии $y=0$ нет целых траекторий, кроме особых точек, абсциссы которых удовлетворяют уравнению

$$\sin(x + \varphi_0) - \sin \varphi_0 = 0.$$

Чтобы применить теорему 5.1, следует в качестве множества взять интервал оси Ox , заключенный между ближайшими к началу координат особыми точками. Область, заключенная внутри линии $v=c$, проходящей через ближайшую точку, будет, очевидно, обладать тем свойством, что все ее точки притягиваются к точке $(0, 0)$.

Очевидно, в случае $\cos \varphi_0 < 0$ точка $(0, 0)$ является неустойчивым положением равновесия.

§ 8. Лине́йные системы

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.1)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения системы (8.1), т. е. корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8.2)$$

Справедливы следующие утверждения [8]:

1. Если все корни уравнения (8.2) имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы (8.1) асимптотически устойчиво.

2. Если среди корней уравнения (8.2) есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы (8.1) неустойчиво.

3. Если уравнение (8.2) не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеется часть корней с нулевой вещественной частью, то может иметь место как устойчивость (не асимптотическая), так и неустойчивость.

Таким образом, вопрос об устойчивости нулевого решения системы (8.1) сводится к исследованию характера корней уравнения (8.2). Раскрывая определитель (8.2), получим уравнение

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (8.3)$$

Из коэффициентов полинома $f(\lambda)$ составим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

В записи этой матрицы полагаем $a_m = 0$, если $m > n$. Рассмотрим определители

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Для того чтобы все корни уравнения (8.3) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\Delta_k > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.4)$$

Это утверждение носит название теоремы Гурвица; доказательство теоремы Гурвица имеется, например, в монографии [26]. Условия (8.4) часто называют условиями Рауза—Гурвица.

Для уравнения второй степени

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

условия Рауза—Гурвица имеют вид $a_1 > 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, или, что то же самое, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Для уравнения третьей степени

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

условия Рауса—Гурвица запишутся в виде

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad a_2 \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

очевидно, эти условия эквивалентны условиям

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые простейшие сведения из линейной алгебры.

Рассмотрим квадратичную форму $v = \sum_{i, k=1}^n b_{ik} x_i x_k$, где $b_{ik} = b_{ki}$. Обозначая через B матрицу, составленную из коэффициентов b_{ik} , и через x вектор с проекциями x_1, \dots, x_n , можем записать

$$v = (x, Bx),$$

где (x, Bx) означает скалярное произведение векторов x и Bx .

Если вектор x является функцией времени t , то и форма v также будет функцией t и имеет место следующее правило дифференцирования:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, Bx \right) + \left(x, B \frac{dx}{dt} \right). \quad (8.5)$$

Если матрица B не симметрична, то для векторов x и y имеет место соотношение

$$(x, By) = (B^*x, y), \quad (8.6)$$

где B^* — транспонированная матрица.

Заметим еще следующий хорошо известный факт: если матрица T — неособая матрица, т. е. матрица, определитель которой отличен от нуля, то матрицы B и TBT^{-1} (подобные матрицы) имеют одинаковые собственные числа.

Запишем систему (8.1) в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (8.7)$$

и найдем производную квадратичной формы $v = (x, Bx)$ в силу этой системы. Имеем согласно (8.5)

$$\frac{dv}{dt} = (Ax, Bx) + (x, BAx).$$

Используя соотношение (8.6), получим

$$\frac{dv}{dt} = (x, [A^*B + BA] x). \quad (8.8)$$

Потребуем теперь, чтобы форма v удовлетворяла уравнению

$$\frac{dv}{dt} = w, \quad (8.9)$$

где $w = (x, Cx)$ — заданная квадратичная форма. Сравнивая (8.8) и (8.9), получим матричное уравнение для определения матрицы B

$$A^*B + BA = C. \quad (8.10)$$

Уравнение (8.10) позволяет найти матрицу формы v по заданной матрице формы w . Исследование уравнения (8.10) представляет большой интерес, так как это уравнение позволяет найти функцию Ляпунова в виде квадратичной формы по заданной производной. Уравнение (8.10) ставит в соответствие всякой матрице B матрицу C , причем это соответствие линейно. Таким образом, в пространстве квадратичных матриц n -го порядка может быть определен линейный оператор $F(B) = A^*B + BA$. Задача о разрешимости уравнения (8.10) сводится к задаче определения оператора, обратного оператору F , так как $B = F^{-1}C$. Так как оператор F действует в конечномерном пространстве (n^2 измерений), то для существования обратного оператора необходимо и достаточно, чтобы среди собственных чисел оператора F не было нулевого.

Теорема 8.1. Если корни характеристического уравнения системы (8.7) таковы, что сумма $\lambda_i + \lambda_k$ не обращается в нуль ни при каких i, k , то, какова бы ни была наперед заданная квадратичная форма w , существует единственная квадратичная форма v , удовлетворяющая уравнению (8.9).

Докажем теорему. По определению, собственным числом оператора F называется число μ , такое, что уравнение $F(B) =$

$= \mu B$ имеет в качестве решения ненулевую матрицу B . Это уравнение может быть переписано в виде $A^*B + BA = \mu B$; отсюда следует, что $(A^* - \mu E)B = -BA$.

Покажем, что матрицы $A^* - \mu E$ и $-A$ имеют по крайней мере одно общее собственное число. Если это не так, то характеристические полиномы $g(\lambda)$ и $f(\lambda)$ этих матриц не имеют общих делителей, поэтому можно указать полиномы $g_1(\lambda)$, $f_1(\lambda)$, такие, что имеет место соотношение $g_1(\lambda)g(\lambda) + f_1(\lambda)f(\lambda) = 1$. Пусть $h(\lambda) = g_1(\lambda)g(\lambda)$. По теореме Кэли—Гамильтона ([5], стр. 74) имеем $h(A^* - \mu E) = 0$ и $h(-A) = E$. С другой стороны, легко видеть, что имеет место соотношение $h(A^* - \mu E)B = Bh(-A)$, которое и приводит нас к противоречивому выводу, что $B = 0$.

Итак, среди собственных чисел $\lambda_i - \mu$ матрицы $A - \mu E$ существует по крайней мере одно, равное $-\lambda_k$ (здесь через λ_i , λ_k обозначены собственные числа матрицы A). Таким образом, $\mu = \lambda_i + \lambda_k$ и в силу условия теоремы $\mu \neq 0$. Отсюда делаем вывод, что оператор F обратим, и уравнение (8.10) имеет решение.

§ 9. Построение функций Ляпунова в виде квадратичных форм для линейных систем дифференциальных уравнений

Докажем теперь ряд теорем о существовании функций Ляпунова для линейных систем. Приводимые ниже результаты были получены А. М. Ляпуновым, который строил функции в виде однородных форм m -го порядка. Однако мы, ограничиваясь для простоты квадратичными формами, несколько усиливаем формулировки А. М. Ляпунова. Это усиление состоит в том, что, рассматривая уравнения (8.9), мы отказываемся от требования знакоопределенности функции w (Ю. И. Алимов [9]).

Теорема 9.1. *Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то, какова бы ни была наперед заданная знакоотрицательная квадратичная форма w , обращающаяся в нуль на множестве M , не содержащем целых траекторий, кроме точки O , существует одна и только одна квадратичная форма v , удовлетворяющая уравнению (8.9), и эта форма обязательно будет определено положительной.*

В самом деле, по теореме 8.1, так как величина $\lambda_i + \lambda_k$ не обращается в нуль, существует форма v , удовлетворяющая уравнению (8.9). Остается показать, что v является определенной положительной. Допустим, в некоторой точке $p(x_1^0, \dots, x_n^0)$ выполнено неравенство $v(x_1^0, \dots, x_n^0) < 0$. В силу однородности функции v мы будем иметь неравенство $v(kx_1^0, \dots, kx_n^0) < 0$ при любом положительном k ; это означает, что в любой окрестности точки O имеются точки, в которых v отрицательна. Множество M , где $w = 0$, не содержит целых траекторий. Из теоремы 6.3 (при замене v на $-v$ и w на $-w$) следует неустойчивость положения равновесия, что противоречит предположению, так как при условиях теоремы обеспечивается асимптотическая устойчивость. Допустим теперь, что в некоторой точке имеем $v(p) = 0$. Так как $\dot{v} \leq 0$, и вдоль траектории $f(p, t)$ не может выполняться тождественное равенство $\dot{v} = 0$, то найдется точка $q = f(p, t)$, в которой $v(q) < 0$, что снова приводит к противоречию. Таким образом, всюду, кроме точки O , имеем $v(p) > 0$, что и доказывает теорему.

Теорема 9.2. Если среди корней характеристического уравнения системы (8.1) имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, и если ни при каких l, k величина $\lambda_i + \lambda_k$ не обращается в нуль, то какова бы ни была знакоположительная форма w , обращающаяся в нуль на множестве M , не содержащем целых траекторий, существует одна и только одна квадратичная форма v , удовлетворяющая уравнению (8.9), причем эта форма не будет знакоотрицательной.

В самом деле, по теореме 8.1 форма v существует. Остается лишь доказать, что форма v принимает положительные значения. Допустим, что всюду, кроме точки O , выполнено неравенство $v < 0$, но в таком случае мы находимся в условиях применения теоремы 5.2 (снова заменяя v на $-v$ и w на $-w$), из которой следует, что нулевое решение системы (8.1) асимптотически устойчиво. Однако из предположения теоремы о корнях характеристического уравнения системы (8.1) мы имеем неустойчивость. Если же в какой-либо точке $v(p) = 0$, то, так как \dot{v} не может равняться нулю вдоль всей траектории точки p , приходим к заключению, что на этой траектории найдется точка q , в которой $v(q) > 0$, что согласуется с утверждением теоремы. Теорема доказана,

так как последняя возможность существования точек, в которых $v(q) > 0$, и является утверждением нашей теоремы.

Примечание. Покажем, что теорема 9.2 становится неверной, если не выполнено условие $\lambda_i + \lambda_k \neq 0$. Рассмотрим случай, когда среди корней уравнения (8.2) есть нулевой корень. В этом случае определитель $|A|$, составленный из коэффициентов системы (8.1), равен нулю, и система уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.1)$$

будет иметь ненулевое решение $x_k = x_k^0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Какова бы ни была функция v , получим в точке $Q(x_1^0, \dots, x_n^0)$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^0 = 0,$$

поэтому \dot{v} не будет знакоопределенной; более того, множество, где $\dot{v} = 0$, содержит целые траектории, так как точка Q является особой.

Теорема 9.3. *Если среди корней характеристического уравнения системы (8.1) существует хотя бы один с положительной вещественной частью, то, какова бы ни была знакоположительная квадратичная форма w , обращающаяся в нуль на множестве M , не содержащем целых траекторий, всегда найдется квадратичная форма v и положительное число α такие, что будет выполняться соотношение*

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v + w, \quad (9.2)$$

причем функция v не будет знакоотрицательной.

Для доказательства рассмотрим наряду с системой (8.7) систему

$$\frac{dx}{d\tau} = \left(A - \frac{\alpha}{2} E \right) x. \quad (9.3)$$

Характеристическое уравнение этой системы будет иметь вид

$$\left| A - \left(\frac{\alpha}{2} + \rho \right) E \right| = 0. \quad (9.4)$$

Очевидно, корни характеристического уравнения системы (8.7) и системы (9.3) связаны между собой соотношением $\lambda_i = \rho_i + \frac{\alpha}{2}$.

Выберем α настолько малым, чтобы выполнялись условия:

- 1) Из $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ следует $\operatorname{Re} \rho_i > 0$,
- 2) $\rho_i + \rho_k \neq 0$ ни при каких целых l и k .

Очевидно, первому условию легко удовлетворить, выбирая α достаточно малым. Замечая, что $\rho_i + \rho_k = \lambda_i + \lambda_k - \alpha$, мы можем выбрать α не совпадающим ни с одним из конечного множества чисел $\lambda_i + \lambda_k$, следовательно, можем удовлетворить и второму условию.

По теореме 9.2 существует функция v , принимающая положительные значения, и такая, что в силу системы (9.3)

$\frac{dv}{d\tau} = w$. Так как

$$\frac{dv}{d\tau} = \left(A - \frac{\alpha}{2} E \right) x \operatorname{grad} v = Ax \operatorname{grad} v - \frac{\alpha}{2} x \operatorname{grad} v,$$

и так как по теореме Эйлера об однородных функциях

$$x \operatorname{grad} v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} x_i = 2v,$$

то имеем

$$w = \frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dt} - \alpha v,$$

где через $\frac{dv}{dt}$ обозначена производная функции v , взятая в силу системы (8.7). Таким образом, соотношение (9.2) доказано.

§ 10. Оценка решений линейных систем

Введем сначала одно важное неравенство из теории квадратичных форм. Рассмотрим квадратичную форму $v = (x, Bx)$ и поставим задачу отыскания наименьшего и наибольшего

значений этой квадратичной формы на сфере $x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$.

Согласно известным правилам решения задач на относительный экстремум следует искать экстремум квадратичной формы $w = v - \lambda(x^2 - r^2)$.

В точках экстремума должно выполняться условие

$$\text{grad } w = \text{grad } v - 2\lambda x = 0.$$

Так как $\text{grad } v = 2Bx$, то необходимые условия экстремума приводят нас к уравнению

$$Bx = \lambda x. \quad (10.1)$$

Это уравнение имеет ненулевое решение только в том случае, когда λ является корнем уравнения

$$|B - \lambda E| = 0. \quad (10.2)$$

Так как матрица B является симметричной, то ее собственные значения вещественны. Обозначим через λ_1 наименьшее собственное число матрицы B , а через λ_n — наибольшее собственное число.

Умножая уравнение (10.1) слева и справа на x , получим $v = (Bx, x) = \lambda x^2$, т. е. $v = \lambda r^2$. Таким образом, беря в качестве λ наибольшее и наименьшее собственные числа, выводим неравенство

$$\lambda_1 r^2 \leq v \leq \lambda_n r^2, \quad (10.3)$$

справедливое для всех точек пространства.

Принимая $r^2 = 1$, приходим к выводу, что λ_1 есть минимальное значение функции v на единичной сфере, а λ_n — максимальное значение.

Перейдем теперь к задаче оценки решений системы линейных дифференциальных уравнений [10].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (10.4)$$

и предположим, что все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные числа. По теореме 9.1 существует определенно положительная квадратичная форма $v = (x, Bx)$, такая, что в силу системы (10.4) будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = -r^2, \quad \text{где } r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (10.5)$$

С другой стороны, из неравенства (10.3) следует неравенство

$$-\frac{v}{\lambda_n} \geq -r^2 \geq -\frac{v}{\lambda_1}, \quad (10.6)$$

где λ_1, λ_n — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа формы v . Таким образом, из соотношений (10.5) и (10.6) следует неравенство

$$-\frac{v}{\lambda_1} \leq \frac{dv}{dt} \leq -\frac{v}{\lambda_n},$$

которое можно записать в виде

$$-\frac{dt}{\lambda_1} \leq \frac{dv}{v} \leq -\frac{dt}{\lambda_n}. \quad (10.7)$$

Интегрируя (10.7) от нуля до t и обозначая через v_0 значение функции v в начальной точке траектории p , получим

$$v_0 e^{-t/\lambda_1} \leq v \leq v_0 e^{-t/\lambda_n}.$$

Используя неравенство (10.6), получаем окончательную оценку r^2 вдоль решения системы (10.4):

$$\frac{v_0}{\lambda_n} e^{-t/\lambda_1} \leq r^2 \leq \frac{v_0}{\lambda_1} e^{-t/\lambda_n}. \quad (10.8)$$

Неравенства (10.8) могут быть использованы для оценки времени переходного процесса. В самом деле, разрешая относительно t уравнение $\frac{v_0}{\lambda_1} e^{-t/\lambda_n} = \varepsilon^2$, получим $t = -\lambda_n \ln \frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{v_0}$.

Таким образом, время переходного процесса $t(p, \varepsilon)$, т. е. время, необходимое для того, чтобы величина r стала и оставалась в дальнейшем меньше ε , удовлетворяет неравенству $t(p, \varepsilon) \leq -\lambda_n \ln \frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{v_0}$.

§ 11. Теоремы об устойчивости по первому приближению

Наряду с системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + X_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.1)$$

рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.2)$$

Предположим, что $X_i(0, \dots, 0) = 0$ и

$$\sum_{i=1}^n X_i^2(x_1, \dots, x_n) \leq A^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1+\alpha}, \quad (11.3)$$

где $\alpha > 0$, A — положительная постоянная. Систему (11.2) будем называть *системой первого приближения*.

Поставим задачу выяснения условий, при выполнении которых из устойчивости или неустойчивости системы первого приближения вытекает соответственно устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы (11.1).

Лемма 11.1. Пусть ω — знакоопределенная квадратичная форма, v — произвольная квадратичная форма.

Функция $\omega + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i$ будет знакоопределенной, совпадающей по знаку с ω в некоторой окрестности начала координат.

Согласно (10.3) имеем

$$\rho_1 r^2 \leq \omega \leq \rho_n r^2,$$

где ρ_1 — наименьшее, ρ_n — наибольшее собственные числа формы ω , $r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$. Так как $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2$ — тоже квадратичная форма, то имеем

$$\Delta_1^2 r^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \leq \Delta_n^2 r^2,$$

где Δ_1^2 , Δ_n^2 — собственные числа указанной формы. Из неравенства Буняковского—Шварца и (11.3) следует

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2} \leq A \Delta_n r^{\alpha+2}.$$

Предположим, что ω — определено отрицательная форма. Имеем

$$\omega + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \leq (\rho_n + A \Delta_n r^\alpha) r^2.$$

Если выбрать такую окрестность, в которой

$$A\Delta_n r^\alpha < |\rho_n|,$$

то получим требуемое неравенство

$$\omega + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i < 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

Если $\omega > 0$, то получим

$$\omega + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i > (\rho_1 - A\Delta_n r^\alpha) r^2 > 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0,$$

если только $A\Delta_n r^\alpha < \rho_1$.

Теорема 11.1 (теорема об устойчивости по первому приближению). *Если корни характеристического уравнения системы первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы (11.1) асимптотически устойчиво.*

В самом деле, согласно теореме 9.1 существует определенно положительная квадратичная форма v , производная которой в силу системы (11.2) равна $-r^2$. Производная функции v в силу системы (11.1) имеет вид $\frac{dv}{dt} = -r^2 +$

$+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i$ и согласно лемме 11.1 будет также определенно отрицательной. Асимптотическая устойчивость теперь следует из теоремы 4.2.

Теорема 11.2 (теорема о неустойчивости по первому приближению). *Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы (11.1) неустойчиво.*

По теореме 9.3 существует квадратичная форма v , принимающая положительные значения и удовлетворяющая соотношению

$$\frac{dv}{d\tau} = r^2 + \alpha v, \quad \alpha > 0,$$

где $\frac{dv}{d\tau}$ означает производную функции v , взятую в силу системы (11.2). Беря производную функции v , в силу системы (11.1) получим

$$\frac{dv}{dt} = r^2 + \alpha v + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i,$$

но из леммы 11.1 следует, что $r^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i$ будет определено положительной функцией. Неустойчивость теперь вытекает из теоремы 6.2.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Рассмотрим уравнение колебаний маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = 0.$$

Ему соответствует система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -b \sin x - ay. \quad (11.4)$$

Особые точки этой системы имеют координаты $x = k\pi$ (k — любое целое число), $y = 0$. Используя разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

запишем систему первого приближения

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - ay, \quad (11.5)$$

характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Если $a > 0$, $b > 0$, то корни имеют отрицательные вещественные части, и нулевое положение равновесия будет устойчивым по первому приближению.

Исследуем теперь на устойчивость точку $(\pi, 0)$. Используя разложение

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \dots,$$

запишем систему первого приближения:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = b(x - \pi) - ay.$$

Переносим начало координат в точку $x = \pi$, $y = 0$, получим систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = bx - ay.$$

Характеристическое уравнение имеет в данном случае вид

$$\lambda^2 + a\lambda - b = 0.$$

При $a > 0$, $b > 0$ корни этого уравнения будут вещественными различных знаков, следовательно, точка $(\pi, 0)$ является неустойчивой точкой.

2. Рассмотрим теперь уравнение маятника, к которому приложен вращающий момент (см. § 7):

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = L. \quad (11.6)$$

Рассмотрим случай, когда $|L| < b$. В этом случае можно положить $L = b \sin x_0$, и уравнение (11.6) примет вид системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -b(\sin x - \sin x_0) - ay. \quad (11.7)$$

Особые точки определяются уравнениями $y = 0$, $\sin x = \sin x_0$, следовательно, координаты X_0 , Y_0 особых точек будут иметь вид

$$X_0 = (-1)^k x_0 + k\pi, \quad Y_0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Используя разложение $\sin x$ в ряд Тейлора в окрестности точки X_0 , запишем систему первого приближения:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -b \cos X_0 (x - X_0) - ay. \quad (11.8)$$

После переноса начала координат в точку $x = X_0$, $y = 0$ получим систему

$$\dot{X} = Y, \quad \dot{Y} = -b \cos X_0 X - aY.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + a\lambda + b \cos X_0 = 0$ этой системы имеет корни с отрицательными вещественными частями, если $a > 0$, $b \cos X_0 > 0$. Если обусловлено, что $a > 0$ и $b > 0$, то условие устойчивости будет иметь вид $\cos X_0 > 0$.

3. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y - xy^2, \quad \dot{y} = -x^3. \quad (11.9)$$

Система первого приближения имеет вид $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$, откуда следует $y = y_0$, $x = y_0 t + x_0$. Таким образом, нулевое решение системы первого приближения неустойчиво. Однако так как оба корня характеристического уравнения равны нулю,

то мы не можем на основании теоремы 11.2 сделать вывод о неустойчивости нулевого решения системы (11.9). Более того, нулевое решение полной системы будет даже асимптотически устойчивым. В самом деле, производная функции Ляпунова $v = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ в силу системы (11.9) имеет вид $\dot{v} = -x^4y^2$ и, следовательно, будет знакоотрицательной. Легко убедиться, что координатные оси $x=0$, $y=0$, на которых функция \dot{v} обращается в нуль, не содержат целых траекторий, за исключением нулевого положения равновесия. Таким образом, здесь можно применить теорему 5.2, из которой следует асимптотическая устойчивость.

§ 12. Устойчивость в целом

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (12.1)$$

при условии $X(0) = 0$.

Определение 12.1. Нулевое решение системы (12.1) называется *устойчивым в целом* (или *устойчивым при любых начальных возмущениях*), если оно устойчиво в смысле Ляпунова и если всякое другое решение $x(t)$ системы обладает свойством $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Функцию Ляпунова v назовем *бесконечно большой*, если для любого положительного числа A существует положительное число R такое, что вне сферы $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R$ имеет место неравенство $v > A$.

Так, например, определено положительная квадратичная форма будет бесконечно большой, так как будем в силу (10.3) иметь $\lambda_1 r^2 \leq v \leq \lambda_n r^2$, где $\lambda_1 > 0$, а r — радиус-вектор точки.

Функция $v = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$ определено положительная, но не является бесконечно большой, так как при $y=0$ и $x \rightarrow \infty$ функция v не стремится к бесконечности.

Поверхности уровня бесконечно большой функции являются ограниченными.

В самом деле, рассмотрим какую-либо поверхность уровня $v=c$. Для данного c можно указать шар радиуса R ,

вне которого будем иметь $v > c$ и, следовательно, поверхность $v = c$ будет лежать внутри этого шара.

Теорема 12.1 (об асимптотической устойчивости в целом). *Если существует определенно положительная бесконечно большая функция v , имеющая определенно отрицательную производную во всем пространстве, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.*

Эта теорема допускает обращение и является частным случаем следующей более общей теоремы [6].

Теорема 12.2. *Пусть существует бесконечно большая определенно положительная функция v такая, что $\frac{dv}{dt} < 0$ вне M и $\frac{dv}{dt} \leq 0$ на M , где множество M не содержит целых траекторий (кроме нулевого положения равновесия). Нулевое решение системы (12.1) будет устойчиво в целом.*

Докажем теорему. Пусть p — произвольная точка фазового пространства. Из точки p выпустим полутраекторию $f(p, t)$ ($t > 0$). Так как $\frac{dv}{dt} \leq 0$ по условию теоремы, то имеем $v(f(p, t)) \leq v_0$. Так как множество $v(p) \leq v_0$ является ограниченным, то полутраектория $f(p, t)$ лежит в ограниченной области и, следовательно, имеет ω -предельные точки. Из леммы 5.1 следует, что все ω -предельное множество лежит на одной поверхности уровня $v = v_\omega$.

Рассмотрим два случая. Если $v_\omega = 0$, то поверхность уровня $v = 0$ является началом координат. Следовательно, все ω -предельное множество траектории $f(p, t)$ совпадает с началом координат и мы имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Так как из неравен-

ства $\frac{dv}{dt} \leq 0$ следует обычная устойчивость в смысле Ляпунова (см. теорему 4.1), то и получаем асимптотическую устойчивость в целом.

Предположим теперь, что $v_\omega \neq 0$. На поверхности $v = v_\omega$ лежит ω -предельное множество Ω точки p , состоящее из целых траекторий. Вдоль этих траекторий, очевидно, будем иметь $\dot{v} = 0$, поэтому множество Ω лежит в M . Но по условию теоремы M не содержит целых траекторий, следовательно, предположение, что $v_\omega \neq 0$, приводит к противоречию.

Теорема доказана.

Заметим теперь, что если бы множество M содержало целые траектории, то из доказательства теоремы следует, что все траектории системы (12.1) притягиваются некоторым множеством, лежащим в M . Это множество является инвариантным, т. е. состоит из целых траекторий.

Последнее утверждение принадлежит Ж. Ла-Саллю [11].

Теорема 12.3 (об устойчивости в целом нулевого решения линейной системы). *Если нулевое решение линейной системы асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, то оно устойчиво в целом.*

В самом деле, нулевое решение будет асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова только тогда, когда все корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные вещественные части. По теореме 9.1 для любой определенно отрицательной квадратичной формы v можно указать определенно положительную форму w такую, что имеет место $\dot{v} = w$. Так как форма v является бесконечно большой, то мы находимся в условиях применения теоремы 12.1.

§ 13. Проблема Айзермана

Наряду с линейным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (13.1)$$

рассмотрим нелинейное уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0, \quad f(0) = 0. \quad (13.2)$$

Если $a > 0$ и $b > 0$, то нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво в целом. Условие $b > 0$ можно трактовать как условие расположения прямой $y = bx$ в первом и третьем квадранте координатной плоскости. Возникает следующий вопрос: если график однозначной функции $y = f(x)$ будет также расположен в первом и третьем квадранте, то будет ли нулевое решение уравнения (13.2) асимптотически устойчивым в целом? Иными словами, обеспечивают ли условия $a > 0$, $f(x)x > 0$ асимптотическую устойчивость в целом, либо нужны какие-либо дополнительные условия?

Чтобы решить этот вопрос, рассмотрим функцию Ляпунова $v = y^2 + 2 \int_0^x f(x) dx$. Производная функции v в силу

системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x) - ay$$

имеет вид $\dot{v} = -2ay^2$. Чтобы функция v была определено положительной, необходимо потребовать выполнения условия $f(x)x > 0$. Если $a > 0$, то \dot{v} будет знакоотрицательной. Очевидно, \dot{v} обращается в нуль на линии $y = 0$, не содержащей целых траекторий, кроме положения равновесия.

Таким образом, для применения теоремы 12.2 остается проследить, чтобы функция v была бесконечно большой. Для этого достаточно потребовать выполнения условия

$$\int_0^x f(x) dx \rightarrow \infty$$

при $|x| \rightarrow \infty$, либо выполнения более простого условия $\frac{f(x)}{x} > \epsilon > 0$ при $x \neq 0$.

Мы видим, что, вообще говоря, выполнения обобщенных условий Рауса—Гурвица $a > 0$, $f(x)x > 0$ недостаточно для вывода заключения о наличии свойства устойчивости в целом.

Рассмотрим теперь вопрос с более общей точки зрения. Наряду с линейной системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k + bx_1, \\ \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k, \quad i=2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

рассмотрим нелинейную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k + f(x_1), \\ \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k, \quad i=2, \dots, n, \quad f(0)=0. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Пусть нам известно, что нулевое решение системы (13.3) асимптотически устойчиво для всех b , удовлетворяющих условию

$$\alpha < b < \beta.$$

Будет ли нулевое решение системы (13.4) устойчивым в целом, если выполнено условие

$$\alpha < \frac{f(x_1)}{x_1} < \beta? \quad (13.5)$$

Иными словами, если график кривой $y=f(x)$ расположен между прямыми $y=\alpha x$ и $y=\beta x$ (рис. 3), то достаточно ли этого для обеспечения устойчивости в целом нулевого реше-

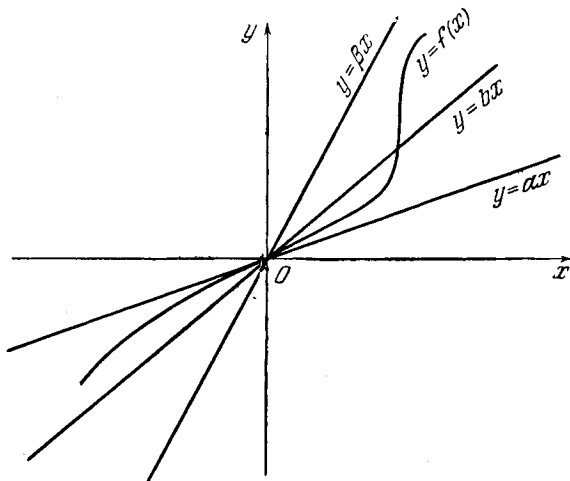


Рис. 3.

ния системы (13.4)? Эта проблема была сформулирована впервые М. А. Айзерманом [12] и явилась источником многочисленных исследований математиков и механиков.

Первый пример, показывающий, что выполнения обобщенного условия (13.5) недостаточно для наличия устойчивости в целом, в случае системы двух уравнений построил Н. Н. Красовский [13].

В. А. Плисс [14] провел глубокие исследования системы третьего порядка и показал, что выполнение условия (13.5) даже в более жесткой форме, т. е. в форме

$$\alpha_1 < \frac{f(x_1)}{x_1} < \beta_1, \quad \text{где } \alpha_1 > \alpha, \beta_1 < \beta,$$

может не обеспечить устойчивости в целом,

Ниже мы приводим примеры на исследование устойчивости в целом нелинейных систем. Эти примеры так или иначе связаны с проблемой Айзермана. Однако отметим, что наиболее интересным моментом при изложении примеров является демонстрация функций Ляпунова для нелинейных систем.

§ 14. Примеры

Пример 1 (И. Г. Малкин [15], Н. П. Еругин [16]). Наряду с системой

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy, \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + by, \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

Используя результаты § 9, построим для системы (14.1) функцию Ляпунова в виде квадратичной формы, исходя из условия

$$\dot{v} = -2(a + d)(bc - ad)x^2.$$

Полагая $v = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$, легко найдем неопределенные коэффициенты α , β , γ . В результате выкладок получим функцию

$$v = (dx - by)^2 + adx^2 - bcy^2. \quad (14.3)$$

Условия Рауса—Гурвица для системы (14.1) имеют вид $a + d < 0$, $ad - bc > 0$, очевидно, что эти условия обеспечивают знакоопределенность функции v и знакоотрицательность \dot{v} .

Беря за основу функцию (14.3), построим теперь функцию Ляпунова для системы (14.2). Система (14.2) отличается от системы (14.1) тем, что вместо функции ax стоит нелинейная функция $f(x)$. В выражении (14.3) коэффициент a комбинируется с x^2 . Если рассматривать выражение ax^2 как удвоенный интеграл $\int_0^x ax \, dx$, то естественной кажется мысль принять по аналогии в качестве функции Ляпунова для системы (14.2)

функцию

$$u = (dx - by)^2 + 2d \int_0^x f(x) dx - bcx^2. \quad (14.4)$$

Беря производную функции u , в силу системы (14.2) получим

$$\dot{u} = -2 \left(\frac{f(x)}{x} + d \right) \left(bc - \frac{f(x)}{x} d \right) x^2.$$

Так как $u = (dx - by)^2 + 2 \int_0^x (df(x) - bcx) dx$, то условие знакоопределенности функции u имеет вид

$$a) \quad d \frac{f(x)}{x} - bc > 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Условие (а) вместе с условием

$$b) \quad \frac{f(x)}{x} + d < 0 \text{ при } x \neq 0$$

обеспечивает знакоотрицательность \dot{u} . Очевидно, множество $x = 0$, где $\dot{u} = 0$, не содержит целых траекторий. Чтобы функция u была бесконечно большой, достаточно потребовать выполнения условия

$$c) \quad \int_0^x |df(x) - bcx| dx \rightarrow \infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Условия а), б), с) обеспечивают на основании теоремы 12.2 устойчивость в целом нулевого решения системы (14.2).

Красовский Н. Н. [13] показал, что невыполнение условия (с) может повести к потере свойства устойчивости при любых начальных возмущениях.

Наряду с системой (14.1) рассмотрим далее систему (Н. Н. Красовский [17])

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + by, \\ \dot{y} &= \varphi(x) + dy. \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

Беря функцию Ляпунова в виде

$$v = (dx - by)^2 + 2 \int_0^x [df(x) - b\varphi(x)] dx$$

и учитывая, что в силу системы (14.5) будем иметь

$$\dot{v} = -2 \left(\frac{f(x)}{x} + d \right) (b\varphi(x) - df(x)) x,$$

получим достаточные условия устойчивости в целом в виде

$$a) \quad (b\varphi(x) - df(x))x > 0 \text{ при } x \neq 0,$$

$$b) \quad \frac{f(x)}{x} + d < 0 \text{ при } x \neq 0,$$

$$c) \quad \int_0^x [df(x) - b\varphi(x)] dx \rightarrow \infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Пример 2 (Е. А. Барбашин [6]). Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + g(x)f(x) = 0, \quad (14.6)$$

эквивалентное системе

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(y)f(x) - \varphi(y). \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Используем для построения функции Ляпунова метод деления переменных [18]. Будем искать функцию v в виде $v = F(x) + \Phi(y)$. Имеем в силу системы (14.7)

$$\dot{v} = F'(x)y - \Phi'(y)[g(y)f(x) + \varphi(y)].$$

Потребуем теперь, чтобы \dot{v} имела такую же структуру, что и функция v , т. е. потребуем тождественного выполнения условия

$$F'(x)y - \Phi'(y)g(y)f(x) = 0.$$

Деля переменные, получим

$$\frac{F'(x)}{f(x)} = \frac{\Phi'(y)g(y)}{y},$$

что может иметь место, если каждое из выражений в обеих сторонах равенства является постоянным, например, равным 1. Отсюда сразу следует, что

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx, \quad \Phi(y) = \int_0^y \frac{y dy}{g(y)},$$

т. е.

$$v = \int_0^x f(x) dx + \int_0^y \frac{y dy}{g(y)} \text{ и } \dot{v} = -y \frac{\varphi(y)}{g(y)}.$$

Условия устойчивости нулевого решения запишутся в виде

a) $f(x)x > 0$ при $x \neq 0$,

b) $g(y) > 0$ при $y \neq 0$,

c) $\varphi(y)y > 0$ при $y \neq 0$,

d) $\int_0^x f(x) dx \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$,

e) $\int_0^y \frac{y dy}{g(y)} \rightarrow \infty$ при $|y| \rightarrow \infty$.

Пример 3. В уравнении

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + f(x) = 0,$$

проведя замену переменной (замену Лиэнара)

$$y = \dot{x} + \int_0^x \varphi(x) dx,$$

получим систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - \int_0^x \varphi(x) dx, \\ \dot{y} &= -f(x). \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

Используя функцию Ляпунова

$$v = y^2 + 2 \int_0^x f(x) dx$$

и принимая во внимание, что

$$\dot{v} = -2f(x) \int_0^x \varphi(x) dx,$$

получим следующие достаточные условия устойчивости в целом:

a) $f(x)x > 0$ при $x \neq 0$,

b) $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$,

c) $\int_0^x f(x) dx \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Пример 4 (Н. Н. Красовский [9]). Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}),$$

эквивалентное системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f(x, y).\end{aligned}$$

Беря функцию Ляпунова в виде

$$v = y^2 - 2 \int_0^x f(x, 0) dx,$$

получим

$$\dot{v} = 2[f(x, y) - f(x, 0)]y.$$

Условия устойчивости в целом имеют вид

- а) $f(x, 0)x < 0$ при $x \neq 0$,
 б) $[f(x, y) - f(x, 0)]y < 0$ при $y \neq 0$,
 в) $\int_0^x f(x, 0) dx \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Пример 5 (Е. А. Барбашин [20]). Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0, \quad (14.9)$$

где $\varphi(0) = f(0) = 0$, $a > 0$, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, а функция $\varphi(x)$ непрерывна при всех значениях аргумента. В дальнейшем введем в рассмотрение функцию

$$w(x, y) = aF(x) + f(x)y + \Phi(y),$$

где

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x f(x) dx, \\ \Phi(y) &= \int_0^y \varphi(y) dy.\end{aligned}$$

Вводя обозначения $y = \dot{x}$, $z = \dot{y} + ay$, уравнение (14.9) приведем к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z - ay, \quad \dot{z} = -\varphi(y) - f(x). \quad (14.10)$$

Рассмотрим функцию

$$v = aF(x) + f(x)y + \Phi(y) + \frac{1}{2}z^2 = w(x, y) + \frac{1}{2}z^2.$$

Имеем

$$\dot{v} = \left[f'(x) - a \frac{\varphi(y)}{y} \right] y^2.$$

Пусть выполнены условия

- a) $f(x)x > 0$ при $x \neq 0$,
 б) $a \frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0$ при $y \neq 0$,
 в) $\lim_{r \rightarrow \infty} w(x, y) = \infty$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Из условия (б) следует, что $\dot{v} < 0$ при $y \neq 0$ и $\dot{v} = 0$ при $y = 0$. Покажем, что на плоскости $y = 0$ нет целых траекторий, кроме нулевого положения равновесия. В самом деле, если такая траектория имела бы, то вдоль нее мы должны иметь $y \equiv \dot{y} \equiv 0$. Из второго уравнения системы (14.10) следовало бы $z \equiv 0$ и $\dot{z} \equiv 0$, из третьего уравнения следует тогда (так как $\varphi(y) = 0$) тождество $f(x) \equiv 0$. Условие (а) с учетом непрерывности $f(x)$ приводит нас к тождеству $x \equiv 0$. Таким образом, рассматриваемое движение может быть только нулевым.

Покажем теперь, что функция w является определенно положительной. Имеем

$$w(x, y) = \frac{(2\Phi(y) + yf(x))^2}{4\Phi(y)} + \frac{4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x)}{4\Phi(y)}.$$

Заметим, что $\Phi(y) > 0$ при $y \neq 0$. В самом деле, так как $f(x)$ меняет знак в точке $x = 0$, то $f'(x)$ принимает положительные значения для некоторых значений x ; эти значения, как видно из условия (б), не превышают нижней грани значений $\frac{\varphi(y)}{y}$, что и обеспечивает нам положительность $\frac{\varphi(y)}{y}$ или что то же самое, положительность $\Phi(y)$.

Покажем, далее, что функция

$$u(x, y) = 4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x)$$

положительна при $x \neq 0$, $y \neq 0$. В самом деле, имеем

$$u(x, y) = 4 \int_0^x \int_0^y f(x) \left[a \frac{\varphi(y)}{y} - f'(x)y \right] dy dx.$$

Условие (b) обеспечивает положительность внутреннего интеграла, а условие (a) — положительность функции $u(x, y)$. Итак, $w(x, y)$ является определенно положительной функцией аргументов x и y и, следовательно, функция $v(x, y, z) = w(x, y) + \frac{z^2}{2}$ является определенно положительной функцией аргументов x, y, z .

Таким образом, мы находимся в условиях применения теоремы 12.2, из которой следует, что условия а), б), с) обеспечивают устойчивость в целом нулевого решения системы (14.10).

Пример 6. (Е. И. Железнов [21]). Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + f(x)\dot{x} + cx = 0. \quad (14.11)$$

Вводя новые переменные

$$y = \dot{x} + a\dot{x} + \int_0^x f(x) dx,$$

$$z = \dot{x} + ax,$$

получим систему

$$\dot{x} = z - ax, \quad \dot{y} = -cx, \quad \dot{z} = y - F(x), \quad (14.12)$$

где

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx.$$

Рассмотрим функцию

$$v = \int_0^x F(x) dx - xy + \frac{a}{2c} y^2 + \frac{z^2}{2},$$

вычисляя производную функции v в силу системы (14.12), получим

$$\dot{v} = - \left[a \frac{F(x)}{x} - c \right] x^2.$$

Условия а) $a > 0$, $c > 0$, б) $af(x) > c + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$,

обеспечат нам устойчивость в целом нулевого решения системы (14.12).

В самом деле, из условия (b) по теореме о среднем значении следует, что

$$a \frac{F(x)}{x} - c > \varepsilon > 0;$$

отсюда получим знакоотрицательность производной \dot{v} .

Чтобы показать знакоопределенность функции v , представим ее в следующем виде:

$$v = \frac{(ay - cx)^2}{2ac} + \frac{\int_0^x \left(a \frac{F(x)}{x} - c \right) x dx}{a} + \frac{z^2}{2}.$$

Условие (b) очевидно обеспечивает положительность интеграла, входящего в запись функции v , а условие (a) обеспечивает положительность обоих слагаемых. Легко также доказывается, что на плоскости $x = 0$ нет целых траекторий.

Пример 7. (Е. А. Барбашин [18]). Построим функцию Ляпунова для системы

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n p_{ik} f_k(\sigma_k), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $f_k(\sigma_k) \sigma_k > 0$ при $\sigma_k \neq 0$, $\sigma_k = \sum_{m=1}^n a_{km} x_m$, $k = 1, 2, \dots, n$, a_{km} — постоянные, p_{ik} могут быть функциями координат, параметров и времени. Рассмотрим функцию

$$v = \sum_{i=1}^n \int_0^{\sigma} f_i(\sigma) d\sigma.$$

Очевидно, что эта функция будет определено положительной и, кроме того,

$$\dot{v} = 2 \sum_{m, k=1}^n b_{km} f_k(\sigma_k) f_m(\sigma_m),$$

где

$$b_{km} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{ki} p_{im} + a_{mi} p_{ik}).$$

Таким образом, \dot{v} будет определено отрицательной, или знакоотрицательной, если этим же свойством обладает форма

$$\sum_{m, k=1}^n b_{km} u_k u_m.$$

Как известно, критерий Сильвестра и критерий знакоотрицательности легко переносятся на случай квадратичных форм с переменными коэффициентами, и поэтому эти критерии с успехом могут быть здесь использованы.

Заметим, что перечень указанных интересных примеров может быть значительно продолжен. Подробные библиографические указания можно найти в докладе [18]. Существенным критерием ценности построенной функции Ляпунова может служить требование, чтобы достаточные условия устойчивости, вытекающие из рассмотрения полученной функции Ляпунова, были бы в линейном случае и необходимыми условиями.

Мы не останавливаемся здесь также на интересных проблемах абсолютной устойчивости нелинейных систем. Исчерпывающее изложение этих вопросов читатель найдёт в монографиях А. И. Лурье [22], А. М. Летова [23], М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [24].

Г Л А В А И I

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

§ 1. Предварительные замечания. Постановка задачи

В этой главе будут рассмотрены вопросы устойчивости систем автоматического регулирования с переменной структурой. В системах с переменной структурой устойчивость достигается путем скачкообразного изменения некоторых параметров системы. Характерной особенностью протекания переходного процесса в таких системах является вхождение системы, начиная с некоторого момента времени, в скользящий режим.

1. Прежде чем перейти к систематическому изложению материала, остановимся кратко на некоторых основных понятиях теории автоматического регулирования. В любой автоматической системе выделяют обычно управляемый объект и управляющее устройство или регулятор. Назначением регулятора является выработка управляющего сигнала, воздействующего на объект с целью обеспечения требуемых значений показателей регулируемого процесса. Так, например, на рис. 4 демонстрируется простейшая система регулирования уровня жидкости в баке.

Здесь регулируемой величиной является уровень h жидкости в баке. В зависимости от значения величины h в данный момент регулятор путем изменения площади сечения подающей жидкость трубы устанавливает количество жидкости x , попадающей в единицу времени в бак. По отношению к объекту, т. е. к баку, сигнал x является входным, а сигнал h — выходным сигналом. В данном случае выходной сигнал h поступает в управляющее устройство с целью определения величины управляющего сигнала x . Таким образом, рассматриваемая автоматическая система обладает обратной связью.

В принципе автоматическая система может решать следующие задачи:

1. Поддерживать выходной сигнал объекта на одном и том же постоянном уровне (стабилизирующая автоматическая система).
2. Изменять управляемый сигнал в соответствии с заранее заданной функцией времени (программная автоматическая система).
3. Изменять управляемый сигнал в зависимости от неизвестного заранее переменного задающего воздействия (следящая автоматическая система).

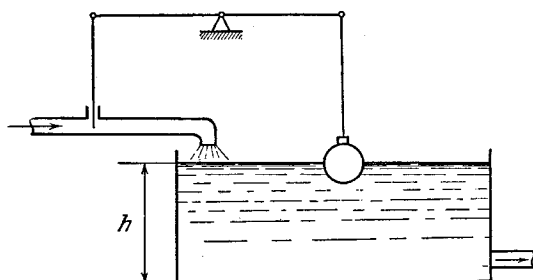


Рис. 4.

Автоматическая система может быть подразделена на звенья (объект, регулятор и т. д.), каждое из которых преобразует входной (по отношению к этому звену) сигнал x в выходной y . Математически соотношение между входной и выходной величиной может быть задано уравнением $y(t) = Ax(t)$, где A — некоторый оператор, определенный в пространстве входных сигналов x .

Чаще всего вид оператора A определяется некоторым дифференциальным уравнением. Например, в линейном случае соотношение между $y(t)$ и $x(t)$ может быть задано линейным дифференциальным уравнением

$$P(D)y(t) = Q(D)x(t),$$

где $P(D)$, $Q(D)$ — полиномиальные функции D , а D — оператор дифференцирования, т. е. $D = \frac{d}{dt}$.

Если исходить из нулевых начальных условий для $y(t)$, то для изображений по Лапласу функций $x(t)$, $y(t)$, т. е. для функций

$$X(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt, \quad Y(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt$$

справедливо соотношение

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} X(p).$$

Функция $L(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}$ обычно называется *передаточной функцией* звена. Очевидно, передаточная функция полностью определяет вид дифференциального уравнения, описывающего данное звено. Следовательно, если дополнительно учесть начальные условия для выходного сигнала $y(t)$, то можно, зная передаточную функцию звена, полностью определить оператор A .

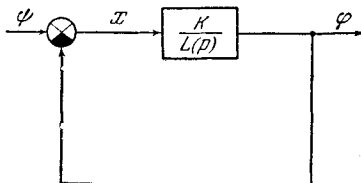


Рис. 5.

Обычно автоматическую систему задают с помощью структурной схемы (блок-схемы), причем на отдельных блоках такой схемы отмечаются соответствующие передаточные функции. Так, например, на рис. 5 изображена структурная схема простейшей следящей системы.

Через ψ на этой схеме обозначен задающий сигнал, через φ — выходной сигнал. Выходной сигнал φ поступает по линии обратной связи на вход системы, где вычитается из сигнала ψ . Сигнал $x = \psi - \varphi$ поступает на объект, передаточная функция которого равна $\frac{K}{L(p)}$. Назначением следящей системы в данном случае является отслеживание задающего сигнала ψ , т. е. сигнал на выходе φ должен в результате работы системы как можно менее отличаться от сигнала ψ . Таким образом, величина x должна быть возможно меньше.

Рассматривая передаточную функцию как оператор, получаем соотношение $\frac{K}{L(p)} x = \varphi$; отсюда следует, что

$$L(p) x = L(p) \psi - Kx. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, если символ p понимать как оператор дифференцирования.

Записав (1.1) в виде $x = \frac{L(p)}{L(p) + K} \psi$, можем сделать интуитивный вывод, что для уменьшения абсолютной величины сигнала x , т. е. для увеличения точности слежения, необходимо увеличивать параметр K , который обычно называют коэффициентом усиления системы.

2. Отметим теперь следующее обстоятельство. Следящая система, о которой шла речь, постоянно подвержена действию возмущений; эти возмущения отражаются на величине сигнала x . Допустим, новое значение x после действия возмущения равно $x_1 = x + \Delta x$. Величина x_1 также удовлетворяет уравнению (1.1), и мы имеем

$$L(p)x_1 = L(p)\psi - Kx_1,$$

так как задающее воздействие ψ останется одним и тем же. Легко видеть, что для величины отклонения x , т. е. для величины Δx , получим уравнение

$$L(p)\Delta x = -K\Delta x. \quad (1.2)$$

Если нулевое решение уравнения (1.2) асимптотически устойчиво по Ляпунову, то следящая система будет работать надежно, т. е. отклонение Δx с ростом времени будет асимптотически стремиться к нулю. Таким образом, исследование следящей системы сводится к исследованию стабилизирующей системы, заданной уравнением (1.2). Для того чтобы уравнение (1.2) обладало свойством асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения $L(\lambda) + K = 0$ имели отрицательные вещественные части.

Таким образом, обеспечение точности слежения требует выбора достаточно большого коэффициента K , а обеспечение помехоустойчивости системы ведет к требованию выполнения условий Рауза — Гурвица для полинома $L(\lambda) + K$. Покажем, что уже для системы третьего порядка эти требования противоречивы. В самом деле, пусть $L(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$. Условия Рауза — Гурвица для полинома $L(\lambda) + K$ имеют вид $c + K > 0$, $b > 0$, $ab > c + K$. Мы видим, что уже третье условие может нарушиться для достаточно большого значения K .

Возникает вопрос: не следует ли для уничтожения указанного противоречия сделать величину K достаточно большой, но переменной по знаку? Нельзя ли выбрать такой закон изменения знака величины α ($|\alpha| \leq 1$), чтобы уравнение

$$L(p)x = -\alpha Kx$$

обладало свойством устойчивости. В дальнейшем мы этот вопрос решим положительно. Оказывается, что следящие системы со знакопеременным α обладают тем свойством, что переходный процесс, начиная с некоторого момента времени, входит в скользящий режим, не зависящий от параметров системы и от величины K . Это ценное свойство системы, обычно называемое свойством грубости, вызывает большой интерес к системам указанного типа со стороны инженеров.

В дальнейшем все системы, работа которых основана на принципе скачкообразного изменения параметров, будем называть системами с переменной структурой.

Фундаментальные результаты по теории скользящих режимов принадлежат Ю. В. Долголенко [27], Ю. И. Неймарку [28] и И. Флюгге-Лотц [29]. На ряд преимуществ, которыми обладают системы с изменяемым коэффициентом усиления, обратил внимание в 1957 г. А. М. Летов [30].

Исследования по теории устойчивости систем с переменной структурой проводились под руководством Е. А. Барбашина в Свердловске [31—48] и под руководством С. В. Емельянова в Москве [49—61]. Несколько иной подход к указанным системам имеется в работе С. Дж. Гаррета [62].

3. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Предположим, что на некоторой поверхности S , заданной уравнением $s(x_1, \dots, x_n) = 0$, правые части системы (1.3) допускают разрывы первого рода. Это значит, что в любой точке (x_1^0, \dots, x_n^0) поверхности S для любой функции $X_i(x_1, \dots, x_n)$ существуют конечные пределы $\lim_{s \rightarrow +0} X_i$, $\lim_{s \rightarrow -0} X_i$, и эти пределы могут не совпадать. Пусть поверхность S делит фазовое пространство E системы (1.3) на две части, E_1 и E_2 . Рассмотрим вектор F с проекциями X_1, \dots, X_n и введем обозначения $F^+ = \lim_{s \rightarrow +0} F$, $F^- = \lim_{s \rightarrow -0} F$. Очевидно, векторы F^+ и F^-

определены в точках поверхности S , кроме того, имеем $\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} = F^+ N$ и $\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} = F^- N$, где через N обозначен вектор-градиент функции $s(x_1, \dots, x_n)$ в соответствующей точке поверхности S .

Точки поверхности S можно разделить на следующие три группы [63].

К первой группе отнесем те точки поверхности S , в которых $\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} \cdot \lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} > 0$. В этих точках векторы F^- и F^+

направлены в одну сторону от поверхности S . Если точка фазового пространства, двигаясь по траектории системы (1.3),

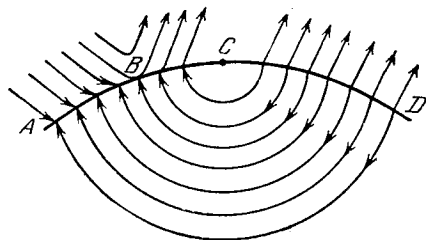


Рис. 6.

попадет в точку рассматриваемого типа, она немедленно сойдет с поверхности S и перейдет в другую часть пространства E . Здесь имеет место случай «прошивания» поверхности (рис. 6, участок BC).

Вторая группа точек поверхности S определяется неравенством $\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} > 0, \lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} < 0$. Точки второй группы должны немедленно сойти с поверхности S по одной из траекторий системы (1.3), выходящей из данной точки (см. рис. 6, участок CD). Вопрос о том, по какой именно траектории будет совершен уход с поверхности S , должен решаться дополнительно, так как в данном случае имеет место свойство неединственности. Часто считают, что уход будет совершаться в направлении того из векторов F^+ и F^- , который имеет наибольшую по абсолютной величине проекцию на нормаль N .

Наконец, точки третьего типа — это точки поверхности S , в которых $\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} \leq 0$ и $\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} \geq 0$. В этом случае траектории системы (1.3) либо втыкаются в поверхность S , либо идут вдоль этой поверхности. В случае попадания изображающей точки на поверхность S в конечный момент времени движение этой точки не заканчивается, начинается процесс скольже-

ния по поверхности S . Если же траектория втыкается в поверхность S , то движение этой точки не заканчивается, начинается процесс скольжения по поверхности S .

В случае попадания изображающей точки на поверхность S в конечный момент времени движение этой точки не заканчивается, начинается процесс скольжения по поверхности S .

ния изображающей точки по поверхности до тех пор, пока точка не выйдет за пределы области скольжения (участок AB на рис. 6).

Перечисленные три группы точек на поверхности переключения отделены друг от друга в общем случае некоторыми $n-2$ -мерными многообразиями, в точках которых либо $\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} = 0$, либо $\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} = 0$, либо выполняются оба равенства вместе.

Остановимся более подробно на точках третьего типа. Пусть точка M лежит в области скольжения на поверхности S . Рассмотрим векторы F^- и F^+ , выходящие из этой точки. Концы этих векторов соединим прямой линией и найдем точку пересечения P полученной прямой с касательной плоскостью, проведенной к поверхности S в точке M (рис. 7). Всюду в дальнейшем мы будем исходить из следующей гипотезы [63]. Вектор скорости скольжения в точке M совпадает с вектором \overrightarrow{MP} .

Указанное рабочее правило, подтвержденное на практике, даст нам в дальнейшем возможность выводить дифференциальные уравнения скольжения.

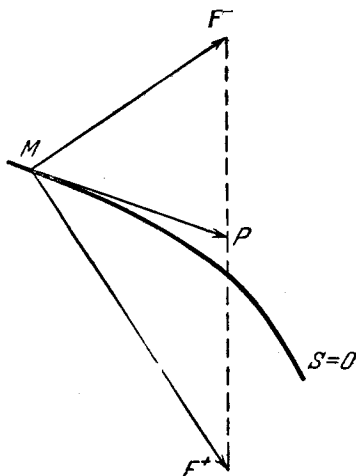


Рис. 7.

§ 2. Стабилизация системы второго порядка

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = -\alpha Kx. \quad (2.1)$$

Здесь a , b — произвольные постоянные, K — положительная постоянная, величина α удовлетворяет условию $|\alpha| \leq 1$. Найдем закон изменения величины α , обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (2.1).

Представив уравнение (2.1) в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - ay - \alpha Kx, \quad (2.2)$$

попытаемся отыскать α , исходя из следующих соображений. Пусть $v(x, y)$ — какая-либо функция переменных x, y . Такой функцией может служить, например, потенциал некоторого векторного поля в фазовом пространстве переменных x и y .

Подберем величину α так, чтобы обеспечить наибольшую скорость убывания функции v вдоль траекторий системы (2.2) [66,79]. Так как

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x} y - \frac{\partial v}{\partial y} (bx + ay) - \alpha K \frac{\partial v}{\partial y} x,$$

и так как от α зависит только последнее слагаемое, то $\min \dot{v}$ достигается, если положить

$$\alpha = \text{sign} \frac{\partial v}{\partial y} x. \quad (2.3)$$

Если, например, $v = \frac{1}{2} Bx^2 + Axy + \frac{1}{2} y^2$, то получим

$$\alpha = \text{sign} (Ax + y) x. \quad (2.4)$$

Итак, рассмотрим систему (2.2), считая, что величина α определяется соотношением (2.4). Система (2.2) может быть записана теперь в виде двух систем:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - ay - Kx, \quad (2.5)$$

при $x(Ax + y) > 0$, и

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - ay + Kx, \quad (2.6)$$

при $x(Ax + y) < 0$.

Фазовая плоскость делится прямыми $x = 0$ и $s = Ax + y = 0$ на четыре части, G_1, G_2, G_3, G_4 , заданные соответственно неравенствами (G_1): $x > 0, s > 0$; (G_2): $x < 0, s > 0$; (G_3): $x < 0, s < 0$ и (G_4): $x > 0, s < 0$.

Линии $x = 0$ и $Ax + y = 0$ являются линиями переключения, на них совершается переход с траекторий одной системы на траектории другой системы.

Так как при $x = 0$ имеем $\dot{x} > 0$, если $y > 0$, и $\dot{x} < 0$, если $y < 0$, в силу обеих систем (2.5) и (2.6), то линия $x = 0$ пересекается траекториями в направлении хода часовой стрелки, т. е. все точки линии $x = 0$ (кроме точки, где $y = 0$) являются

точками «прошивания». Исследуем теперь точки прямой $s = Ax + y = 0$, которую в дальнейшем будем называть прямой S . Чтобы найти условия, при выполнении которых прямая S будет прямой скольжения, найдем \dot{s} в силу системы (2.2) на этой прямой:

$$\dot{s} = -(A^2 - aA + b + \alpha K)x.$$

Имеем при $x > 0$

$$\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} = -(A^2 - aA + b + K)x,$$

$$\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} = -(A^2 - aA + b - K)x,$$

а при $x < 0$

$$\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} = -(A^2 - aA + b - K)x,$$

$$\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} = -(A^2 - aA + b + K)x.$$

Так как условия существования скольжения имеют вид

$$\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} \leq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} \geq 0,$$

то они в рассматриваемом случае эквивалентны условиям

$$A^2 - aA + b + K \geq 0, \quad A^2 - aA + b - K \leq 0, \quad (2.7)$$

которые можно записать в более компактной форме:

$$|A^2 - aA + b| \leq K. \quad (2.8)$$

Таким образом, условие (2.8) является необходимым и достаточным условием существования скользящего режима у системы (2.2). Очевидно, выполнение этого условия всегда можно обеспечить за счет выбора достаточно большого значения коэффициента усиления K .

Перейдем теперь к исследованию системы (2.2) в каждой из областей G_i , $i = 1, 2, 3, 4$. В областях G_1 и G_3 имеем $\alpha = 1$, здесь действует система (2.5). Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + b + K = 0. \quad (2.9)$$

При достаточно большом значении K корни этого уравнения будут комплексными, следовательно, интегральные кривые

будут спиралевидными кривыми, а начало координат будет особой точкой типа «фокус». Если $a > 0$, то изображающая точка будет приближаться по траектории к началу координат, которое будет в этом случае асимптотически устойчивым положением равновесия (рис. 8). Если же $a < 0$, то точки фазового пространства будут уходить от начала координат.

В областях G_2 и G_4 действует система (2.6); ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu^3 + a\mu + b - K = 0. \quad (2.10)$$

При достаточно большом значении K корни этого уравнения

$$\mu_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + K}, \quad \mu_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + K}$$

будут вещественными противоположных знаков. Начало координат в данном случае будет

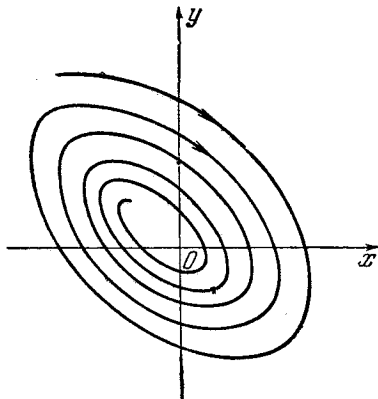


Рис. 8.

особой точкой типа «седло». Система (2.6) будет иметь среди своих интегральных кривых две интегральные прямые, $y = \mu_1 x$ и $y = \mu_2 x$. Это обстоятельство может быть установлено путем простой подстановки функций $y = \mu_1 x$, $y = \mu_2 x$ в уравнение $\frac{dy}{dx} = -b \frac{x}{y} - a + K \frac{x}{y}$, эквивалентное

системе (2.6). Указанные интегральные прямые выпол-

няют роль асимптот, к которым приближаются остальные интегральные кривые системы, имеющие гиперболический тип (рис. 9).

Отметим теперь следующий факт. Графиком функции $f(\mu) = \mu^3 + a\mu + b - K$ будет парабола, пересекающая ось μ в точках $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$ (рис. 10).

Если выполнено неравенство $\mu_2 \leq \mu \leq \mu_1$, то $f(\mu) \leq 0$. Пусть $A > 0$; полагая $\mu = -A \geq \mu_2$, получим $f(-A) = -A^3 - aA + b - K \leq 0$. Таким образом, второе неравенство условий (2.7) будет удовлетворено, если $-A \geq \mu_2$, т. е. если

угол между линией переключения S и осью x меньше угла между прямой $y = \mu_3 x$ и той же осью.

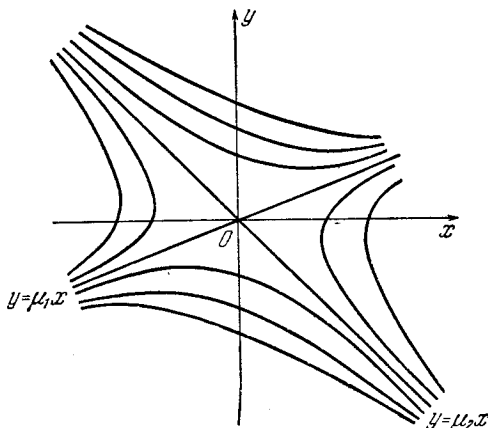


Рис. 9.

Первое из неравенств (2.7) всегда может быть удовлетворено за счет выбора достаточно большого значения K . Таким образом, выбирая достаточно большое значение K и выбирая A согласно условию $0 < A \leq -\mu_3$, обеспечим наличие скольжения во всех точках прямой S .

Из рис. 11, где приведен фазовый портрет системы (2.2), видно, что любая точка фазового пространства, двигаясь по траекториям системы (2.2), попадет на S . Попадая на S , изображающая точка начинает совершать скольжение по этой линии к началу координат.

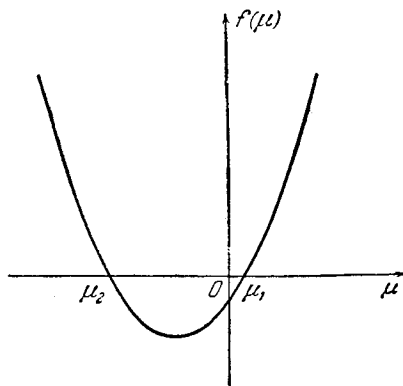


Рис. 10.

В самом деле, нетрудно показать, пользуясь правилом определения вектора скорости скольжения, данным в конце

предыдущего параграфа, что дифференциальное уравнение скольжения имеет вид $\dot{x} + Ax = 0$. Действительно, из этого

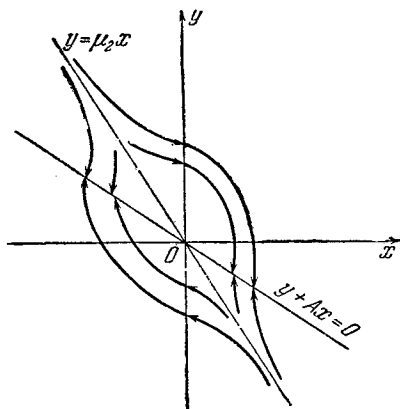


Рис. 11.

правила следует, что векторы F и F^+ , выходящие из точки M (см. рис. 7), имеют одинаковые проекции на ось Ox , равные ординате y точки M . Отсюда следует, что проекция вектора скорости скольжения \overline{MP} тоже равна y , таким образом, имеем уравнение $\dot{x} = y$. С другой стороны абсцисса x и ордината y точки M связаны соотношением $Ax + y = 0$. Отсюда и получается требуемое дифференциальное уравнение $\dot{x} + Ax = 0$, из

которого следует, что при $A > 0$ скольжение будет совершаться по направлению к началу координат по закону $x = x_0 e^{-A(t-t_0)}$.

Структурная схема системы, соответствующей уравнению (2.1), изображена на рис. 12.

Здесь, так как рассматривается система стабилизации, соответствующая некоторой следящей системе, полагаем $\psi = 0$ и $\varphi = -x$. Передаточная функция $L(p)$ имеет вид $L(p) = p^2 + ap + b$. В блоке F формируется по значениям величины x и ее производных величина a , в блоке N величина x умножается на a .

В заключение покажем, как в случае $a > 0$ можно применить к исследованию устойчивости рассмотренной системы метод функций Ляпунова. Сначала рассмотрим функцию $v =$

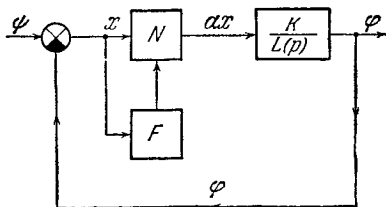


Рис. 12.

$= (b + K)x^2 + y^2$, производная которой, взятая в силу системы (2.2), имеет вид $\dot{v} = -2ay^2 + 2K(1 - \alpha)xy$.

В областях G_1 и G_3 имеем $\alpha = 1$ и, следовательно, $\dot{v} = -2ay^2$. В областях G_2 и G_4 имеем $\alpha = -1$, откуда получим $\dot{v} = -2ay^2 + 4Kxy$, но так как в этих областях $xy < 0$, то получаем $\dot{v} \leq 0$ всюду на рассматриваемой фазовой плоскости. Пусть $|b| < K$. Множество точек $y = 0$, в которых $\dot{v} = 0$ очевидно не содержит целых траекторий, поэтому можем применить теорему 12.2 первой главы, из которой следует асимптотическая устойчивость в целом нулевого положения равновесия. Анализ доказательства указанной теоремы позволяет игнорировать факт разрывности производной на прямой переключения S и факт неединственности в отрицательном направлении оси времени.

Теперь рассмотрим функцию $v = bx^2 + y^2 + \alpha Kx^2$. Эта функция имеет разрывы на прямой S ; если $0 \leq K < b$, то v будет определено положительно и бесконечно большой, если же $K \geq b$, то нетрудно видеть, что для сохранения этих свойств необходимо потребовать выполненным условие $A > \sqrt{K - b}$. Легко видеть, что в силу системы (2.2) получим, вне линии переключения S , $\dot{v} = -2ay^2$. С другой стороны, при переходе линии переключения траекторией системы функция v убывает скачком на величину $2Kx^2$. Снова проводя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 12.2 первой главы, придем к выводу, что любая точка фазового пространства либо попадает непосредственно в начало координат, либо попадает на линию S и совершает по ней скольжение к началу координат.

Возможные обобщения указанной выше теоремы 12.2 на системы с разрывными правыми частями получил Ю. И. Алимов [64].

§ 3. Стабилизация системы третьего порядка. Условия существования скольжения

Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} + cx = -\alpha Kx, \quad (3.1)$$

где a, b, c — произвольные постоянные, K — положительная постоянная и величина α удовлетворяет условию $|\alpha| \leq 1$.

Рассмотрим функцию $v = Cx^2 + Ey^2 + z^2 + 2Dxy + 2Axz + 2Byz$, и выберем закон изменения величины α так, чтобы обеспечить максимальную скорость убывания функции v вдоль траекторий системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -cx - by - az - \alpha Kx, \quad (3.2)$$

эквивалентной уравнению (3.1).

Так как

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x} y + \frac{\partial v}{\partial y} z - \frac{\partial v}{\partial z} (cx + by + az) - \alpha K \frac{\partial v}{\partial z} x,$$

и так как от α зависит только последнее слагаемое, то, очевидно, величина α должна определяться формулой $\alpha = \text{sign} \frac{\partial v}{\partial z} x$, или, что то же, формулой

$$\alpha = \text{sign} (Ax + By + z) x. \quad (3.3)$$

Структурная схема рассматриваемой стабилизирующей системы изображена на рис. 12. Полагаем в рассматриваемом случае задающий сигнал ϕ равным нулю и $L(p) = p^3 + ap^2 + bp + c$. Исследование следящей системы с переменной структурой в случае, когда сигнал ϕ отличен от нуля, проведено для системы второго порядка в работе [31] и для системы третьего порядка в работах [33, 34].

Выведем теперь условия, обеспечивающие существование скольжения в любой точке плоскости S , заданной уравнением

$$s = Ax + By + z = 0. \quad (3.4)$$

Теорема 3.1. Для того чтобы плоскость S была плоскостью скольжения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\left. \begin{aligned} A = B^2 - aB + b, \\ |(B - a)^3 + a(B - a)^2 + b(B - a) + c| \leq K. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Если положить $r = B - a$, то условия (3.5) могут быть переписаны в другом виде:

$$B = a + r, \quad A = Br + b, \quad |f(r)| \leq K,$$

где введено обозначение $f(r) = r^3 + ar^2 + br + c$. Перейдем к доказательству теоремы. В системе (3.2) проведем замену переменных, вводя координату $s = Ax + By + z$. Новая

система будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -Ax - By + s, \\ \dot{s} &= -(A(B-a) + c + \alpha K)x + \\ &\quad + (A - B^2 + aB - b)y + (B-a)s. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

На плоскости $s=0$ получим две линии:

$$(A(B-a) + c + K)x - (A - B^2 + aB - b)y = 0, \quad (3.7)$$

$$(A(B-a) + c - K)x - (A - B^2 + aB - b)y = 0, \quad (3.8)$$

разделяющие эту плоскость на области знакопостоянства двух величин: $R_1 = \dot{s}$ при $\alpha = 1$, и $R_2 = \dot{s}$ при $\alpha = -1$. Чтобы плоскость S была плоскостью скольжения, необходимо и достаточно, как это следует из § 1 данной главы, выполнение условий $\text{sign } R_1 = -\text{sign } x$ и $\text{sign } R_2 = \text{sign } x$. Так как знаки R_1 и R_2 зависят только от x , то необходимо, чтобы коэффициент при y в уравнениях (3.7) и (3.8) был равен нулю. Таким образом, необходимость первого из условий (3.5) доказана. Если условие (3.5) выполнено, то на плоскости $s=0$ получим

$$\dot{s} = -[f(B-a) + \alpha K]x. \quad (3.9)$$

Отсюда следует, что при наличии скольжения должны быть выполнены неравенства

$$f(B-a) + K \geq 0 \quad \text{и} \quad f(B-a) - K \leq 0,$$

эквивалентные одному неравенству $|f(B-a)| \leq K$.

Легко видеть, что условия (3.5), которые мы доказали как необходимые условия существования скольжения, являются и достаточными условиями.

Заметим следующее: если первое из условий (3.5), т. е. условие $A = B^2 - aB + b$, не выполнено, то на плоскости S около линии $x=0$ образуется сектор, ограниченный линиями (3.7) и (3.8). Легко видеть, что в точках этого сектора траектории системы (3.2) будут прошивать поверхность S . Однако, при достаточно большом значении K рассматриваемый сектор становится как угодно узким. Изображающая точка системы, совершая скольжение по плоскости S , доходит до границы сектора и затем отходит несколько от этой плоскости, с тем, чтобы через малый промежуток времени снова попасть на S .

и продолжать в дальнейшем скольжение до нового попадания на границу сектора. Можно показать [34], что свойство устойчивости при указанном нарушении условий скольжения в некотором смысле сохранится, однако подробное рассмотрение этих вопросов мы отнесем в § 7, где будет рассмотрен нелинейный случай.

Выведем теперь дифференциальные уравнения скольжения. Пользуясь правилом, данным в § 1 для определения вектора скорости скольжения, и замечая, что векторы $F^+(y, z, -cx - Kx - by - az)$ и $F^-(y, z, -cx + Kx - by - az)$ имеют одинаковые проекции на ось Ox и на ось Oy , приходим к выводу, что проекция вектора скорости скольжения на ось Ox равна y , а на ось Oy равна z . Таким образом, проекции вектора скорости определяются уравнениями $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$. Но так как на плоскости S имеем $z = -Ax - By$, то исключая z , получим соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Ax - By, \quad (3.10)$$

описывающую процесс скольжения.

Очевидно, что система (3.10) будет тогда и только тогда асимптотически устойчивой, когда выполнены условия $A > 0$, $B > 0$. Всюду в дальнейшем эти условия будем считать выполненными.

Следует, конечно, заметить, что система (3.10) описывает идеальный процесс скольжения: реальный процесс скольжения должен описываться значительно сложнее, так как в силу запаздываний переключений, наличия инерционностей и т. д. изображающая точка непрерывно колеблется около плоскости S при своем движении к началу координат [65].

§ 4. Стабилизация системы третьего порядка. Устойчивость системы

Учитывая условия (3.5), перепишем систему (3.6) в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -Ax - By + s, \\ \dot{s} &= -[f(B - a) + \alpha K]x + (B - a)s, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

и проведем замену переменных $t = \rho\tau$, $X = x$, $Y = \rho y$, $R = \rho^2 s$, где $\rho = K^{-1/2}$.

Новая система будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= Y, \\ \frac{dY}{d\tau} &= -A\rho^3 X - B\rho Y + R, \\ \frac{dR}{d\tau} &= -\alpha X - \rho^3 f(B-a)X + \rho(B-a)R. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Пусть K — достаточно большое положительное число, тогда величину ρ можно считать малым параметром.

Наряду с системой (4.2) рассмотрим упрощенную систему

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = R, \quad \frac{dR}{d\tau} = -\alpha X. \quad (4.3)$$

Исследуем движения системы (4.3) в области $R > 0$. Так как в этой области $\alpha = \text{sign } X$, то система (4.3) примет вид

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = R, \quad \frac{dR}{d\tau} = -|X|. \quad (4.4)$$

Исследуем свойства движений системы (4.4), рассматривая ее во всем фазовом пространстве переменных X, Y, R .

Лемма 4.1. Если начальная точка (X_0, Y_0, R_0) , где $R_0 > 0$, не лежит на прямой $X = -Y = R$, то решение системы (4.4), определяемое этой точкой, обладает свойством

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} Y(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = -\infty.$$

Если же выполнено условие $X_0 = -Y_0 = R_0$, то решение системы (4.4) обладает свойством

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} Y(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0.$$

В самом деле, из третьего уравнения системы (4.4) следует, что величина R убывает с ростом времени. Предположим, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = L$, и пусть $L > -\infty$. Если L отлично от нуля, то из первого и второго уравнений системы следует, что $|Y(\tau)| \rightarrow \infty$ и $|X(\tau)| \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, но тогда из последнего уравнения выводим, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = -\infty$, что приводит к противоречию. Если $L = 0$, то будем иметь

$R(\tau) > 0$, откуда следует, что $Y(\tau)$ возрастает. Предположим, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} Y(\tau) = L_1$. Если L_1 не равно нулю, то из первого уравнения системы (4.4) сразу следует, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} |X(\tau)| = \infty$, а из третьего уравнения получаем $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = -\infty$, что снова приводит к противоречию. Таким образом, имеем $L = L_1 = 0$. Но если $L_1 = 0$, то величина $Y(\tau)$ будет отрицательной и, следовательно, $X(\tau)$ убывает. Если $\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau) = L_2 \neq 0$, то снова получаем противоречие с предположением, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) \neq -\infty$.

Таким образом, имеют место два случая: либо $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = -\infty$, либо $\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} Y(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$. В первом случае имеем также $\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} Y(\tau) = -\infty$. Во втором случае решение системы (4.4) должно удовлетворять неравенствам

$$X(\tau) > 0, Y(\tau) < 0, R(\tau) > 0.$$

Нетрудно показать, что попадание изображающей точки в начало координат в этом случае может произойти только вдоль интегральной прямой

$$X = -Y = R \quad (4.5)$$

системы (4.3) при $\alpha = 1$. Других траекторий, по которым изображающая точка могла бы попасть непосредственно в начало координат, не попадая предварительно на плоскость $R = 0$, система (4.3) не имеет. В самом деле, при $\alpha = 1$ решение системы (4.3) имеет вид

$$X = c_0 e^{-\tau} + \varphi_1(\tau), \quad Y = -c_0 e^{-\tau} + \varphi_2(\tau), \quad R = c_0 e^{-\tau} + \varphi_3(\tau),$$

где $\varphi_i(\tau)$ — неограниченные функции. Подбором начальных данных эти неограниченные функции можно исключить из решения; в этом случае и получим единственное частное решение $X = c_0 e^{-\tau}$, $Y = -c_0 e^{-\tau}$, $R = c_0 e^{-\tau}$, соответствующее интегральной прямой (4.5).

Легко проверить, что система (4.3) при $\alpha = -1$ траекторий, проходящих в начало координат с сохранением знака X , не имеет. Лемма доказана.

Лемма 4.2. Если точка $M(\tau)$ движется из положения $M_0(X_0, Y_0, R_0)$ по траектории системы (4.4), то она не может находиться в области $|X| > \delta, R > 0$ более R_0/δ единиц времени.

В самом деле, из последнего уравнения системы (4.4) имеем $R < R_0 - \delta\tau$, где τ отсчитывается от того момента времени, начиная с которого выполняется неравенство $|X| \geq \delta$. Если $\tau_1 > R_0/\delta$, то $R(\tau_1)$ уже будет отрицательной величиной и точка $M(\tau_1)$ окажется вне рассматриваемой области. Таким образом, за промежуток времени $0 \leq \tau \leq \tau_1$ точка $M(\tau)$ попадет либо в область $|X| < \delta$, либо на плоскость $R=0$.

Заметим, что если начальная точка $M_0(X_0, Y_0, R_0)$ удовлетворяет условиям $X_0 > \delta, Y_0 > 0$, то точка $M(\tau)$ может попасть только на плоскость $R=0$.

Отсюда следует, что любая точка фазового пространства может заходить в область $|X| < \delta$ не более двух раз.

Лемма 4.3. Если выполнены условия $|X_0| < \delta, |Y_0| < \delta, 0 < R_0 < \delta$, то решение системы (4.4), определяемое начальной точкой $M_0(X_0, Y_0, R_0)$, удовлетворяет в области $R > 0$ неравенствам $-2\delta < X(\tau) < 5\delta, -\delta < Y(\tau) < 4\delta, 0 < R(\tau) < \delta$.

Очевидно, последнее из доказываемых неравенств непосредственно вытекает из третьего уравнения системы (4.4). Покажем теперь, что имеет место неравенство

$$-\delta < Y(\tau) < 4\delta. \quad (4.6)$$

Предположим, что $Y_0 > 0$. Так как $X(\tau)$ и $Y(\tau)$ могут только расти, то обозначим через τ_0 момент времени, когда $X(\tau_0) = \delta$, и через τ'_0 — момент времени, когда $Y(\tau'_0) = \delta$. Через τ_1 обозначим момент встречи точки $M(\tau)$ с плоскостью $R=0$.

В силу леммы 4.2, если $\tau_1 = \infty$, то $|X(\tau)| < \delta$ для всех положительных значений τ ; если при этом $\tau'_0 = \infty$, то неравенство (4.6) будет иметь место. Возможны два случая. В первом случае предположим, что $\tau_0 \leq \tau'_0$. Из второго уравнения системы (4.4) следует при $\tau \geq \tau'_0$ $Y(\tau) - Y(\tau'_0) \leq R_0(\tau - \tau'_0)$. Но так как в силу леммы 4.2 $\tau - \tau'_0 < \tau_1 - \tau'_0 < 1$, то получим $Y(\tau) < 2\delta$ при всех τ из промежутка $\tau'_0 \leq \tau \leq \tau_1$.

Во втором случае предположим, что $\tau'_0 < \tau_0$, и оценим разность $\tau_0 - \tau'_0$. Снова принимая во внимание второе

уравнение системы (4.4), получим

$$\delta < Y(\tau) < R_0(\tau - \tau'_0) + \delta \text{ при } \tau > \tau'_0. \quad (4.7)$$

Левая часть этого неравенства дает оценку

$$\delta(\tau_0 - \tau'_0) + X(\tau'_0) < X(\tau_0),$$

откуда следует, что $\tau_0 - \tau'_0 < 2$. Правая часть того же неравенства (4.7) дает оценку $Y(\tau) < \delta(\tau - \tau_0 + \tau_0 - \tau'_0) + \delta < 4\delta$, так как $\tau - \tau_0 < 1$ согласно лемме 4.2.

Теперь рассмотрим случай, когда $Y_0 < 0$. Если $Y(\tau)$ не меняет знак, то неравенство (4.6) выполнено. Если $Y(\tau)$ меняет знак в момент времени τ_3 , то возможны снова два случая. В случае $|X(\tau_3)| < \delta$, при $\tau > \tau_3$ точка $M(\tau)$ попадает в условия, которые рассмотрены выше. Если же $X(\tau_3) < -\delta$, то точка $M(\tau)$ не может, согласно лемме 4.2, находиться вне полосы $|X| < \delta$ более одной единицы времени, но за это время $Y(\tau)$ может вырасти не более чем на δ , поэтому точка $M(\tau)$ снова попадает в область $|X| < \delta$, $|Y| < \delta$, причем величина $Y(\tau)$ будет при этом уже положительной и, следовательно, будет удовлетворять оценке (4.6).

Покажем теперь, что до тех пор, пока точка $M(\tau)$ не попадет на плоскость $R=0$, имеет место неравенство

$$-2\delta < X(\tau) < 5\delta. \quad (4.8)$$

В самом деле, если точка $M(\tau)$ выйдет в область $X > \delta$, то она не вернется в полосу $|X| < \delta$ и должна попасть на плоскость $R=0$. Но в этом случае из первого уравнения системы (4.4) следует

$$X(\tau) - X(\tau_0) < Y(\tau)(\tau - \tau_0)$$

при $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$. Из леммы 4.2 следует, что $\tau - \tau_0 < 1$, а из неравенства (4.6) имеем $0 < Y(\tau) < 4\delta$. Таким образом, $-\delta < X(\tau) < 5\delta$ при $\tau > \tau_0$.

Если же точка $M(\tau)$ выйдет в область $X < -\delta$ в момент времени τ_4 , то либо она попадет на плоскость $R=0$, не возвращаясь в полосу $|X| < \delta$, либо вернется в эту полосу. В первом случае получим $-\delta(\tau - \tau_4) < X(\tau) - X(\tau_4)$, откуда следует $X(\tau) > -2\delta$. Во втором случае точка $M(\tau)$ возвратится в область $|X| < \delta$, $|Y| < \delta$, и будет иметь место уже рассмотренная ситуация. Заметим, что минимальное значение

$X(\tau_a)$ во втором случае удовлетворяет неравенству $X(\tau_a) > > -2\delta$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующий общий результат. Наряду с уравнением

$$\dot{x} = X(x, t) \quad (4.9)$$

рассмотрим уравнение

$$\dot{y} = X(y, t) + R(y, t), \quad (4.10)$$

где x, y n -мерные векторы $X(x, t)$ и $R(y, t)$ — векторные функции. Предположим, что в некоторой области D фазового пространства на интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ выполнены условия

$$\|X(y, t) - X(x, t)\| \leq L \|y - x\| \quad (4.11)$$

и

$$\|R(y, t)\| \leq M \|y\|. \quad (4.12)$$

Предположим, далее, что на рассматриваемом промежутке времени решение $x(t)$ системы (4.9) удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon.$$

Лемма 4.4. Пусть выполнены условия (4.11), (4.12); тогда на интервале времени $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ имеет место оценка

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \frac{M\varepsilon}{M+L} (e^{(M+L)(t-t_0)} - 1), \quad (4.13)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — соответственно решения уравнений (4.9) и (4.10), определяемые одинаковыми начальными условиями.

В самом деле, исходя из неравенства

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \int_{t_0}^t [\|X(y, t) - X(x, t)\| + \|R(y, t)\|] dt,$$

получим

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \int_{t_0}^t [L \|y(t) - x(t)\| + M \|y(t)\|] dt.$$

Так как $\|y(t)\| \leq \|y(t) - x(t)\| + \|x(t)\|$ и $\|x(t)\| \leq \varepsilon$,

то получим

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \int_{t_0}^t [M\varepsilon + (M+L)\|y(t) - x(t)\|] dt.$$

Неравенство (4.13) непосредственно следует теперь из леммы 1.1 первой главы.

Наряду с системой (4.4) рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= Y, \\ \frac{dY}{d\tau} &= R + \rho\varphi_1(X, Y), \\ \frac{dR}{d\tau} &= -|X| + \rho F_1(X, Y, R, \tau). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Пусть функции $\varphi_1(X, Y)$ и $F_1(X, Y, R, \tau)$ в области $|X| < \infty$, $|Y| < \infty$, $R > 0$, $\tau \geq 0$ удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} |\varphi_1(X, Y)| &\leq L_1(|X| + |Y|), \\ |F_1(X, Y, R)| &\leq L_2(|X| + |Y| + R), \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где L_1, L_2 — некоторые положительные постоянные.

Лемма 4.5. Всякое решение системы (4.14), определенное начальной точкой $M_0(X_0, Y_0, R_0)$, лежащей в области $|X| < \delta$, $|Y| < \delta$, $0 < R < \delta$, удовлетворяет в полупространстве R неравенствам

$$|X| < 5\delta + A_1\rho\delta, \quad |Y| < 4\delta + A_2\rho\delta, \quad R < \delta + A_3\rho\delta,$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные, зависящие от L_1 и L_2 .

Справедливость леммы 4.5 вытекает непосредственно из предыдущей леммы. В самом деле, из доказательства леммы 4.3 следует, что точка $M(\tau)$, двигаясь по траектории системы (4.4), находится вне области $|X| < \delta$, $|Y| < \delta$, $R > 0$ не более трех единиц времени, при этом точка $M(\tau)$ не выходит за пределы области

$$|X| < 5\delta, \quad |Y| < 4\delta, \quad 0 < R < \delta.$$

Отсюда следует, что норма вектора $P(0, \rho\varphi_1, \rho F_1)$, характеризующего отклонение систем (4.4) и (4.14), может быть с учетом (4.15) оценена следующим образом:

$$\|P\| \leq N_1\rho\|F\|,$$

где через F обозначен вектор с проекциями X , Y , R . Кроме того, согласно лемме 4.3, имеем $\|F\| \leq N_3 \delta$. Таким образом, полагая $M = N_{1\rho}$ и $\epsilon = N_3 \delta$, можем применить оценку леммы (4.4) и получим оценку отклонения решений систем (4.4) и (4.14). Из этой оценки и будет следовать требуемый результат.

Замечание 4.1. Заметим теперь, что легко сформулировать результаты, аналогичные результатам, приведенным в леммах 4.1, 4.2, 4.3 и 4.5 для системы

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = R, \quad \frac{dR}{d\tau} = |X|, \quad (4.16)$$

эквивалентной системе (4.3) в области $R < 0$.

Так, например, соображения о симметрии расположения траекторий систем (4.4) и (4.16) приводят к выводу, что если начальная точка не лежит на прямой $X = -Y = R$, то решение системы (4.16) обладает свойством $\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} Y(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = \infty$. Аналогичным образом могут быть перефразированы и остальные леммы.

Теорема 4.1. Пусть $A > 0$, $B > 0$ и, кроме того, выполнены условия (3.5). Можно указать такое положительное число K_0 , что при $K > K_0$ нулевое решение системы (3.2) будет асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Пусть для определенности начальная точка M_0 лежит в области $R > 0$ (если точка M_0 лежит в области $R < 0$, то всюду в дальнейших рассуждениях следует учитывать замечание 4.1). Из леммы 4.1 следует, что изображающая точка $M(\tau)$, движущаяся по траектории системы (4.3), либо попадает на плоскость $R = 0$ за конечный промежуток времени, либо будет асимптотически приближаться к началу координат по прямой (4.5).

Окружим теперь прямую (4.5) достаточно узкой трубкой. Если изображающая точка $M(\tau)$ лежит вне этой трубки, то для заданной ограниченной области начальных условий фазового пространства время попадания на плоскость $R = 0$ будет ограничено. Следовательно, по теореме 1.1 первой главы можно указать настолько малое значение ρ , что отклонение траекторий систем (4.2) и (4.3) за указанный промежуток времени будет меньше наперед заданного положительного

числа. Таким образом, приходим к выводу, что все точки, не лежащие внутри рассматриваемой трубки, попадут, двигаясь по траекториям системы (4.2), на плоскость $R=0$.

Если же начальная точка лежит внутри трубки, то она может при своем движении либо выйти из трубки и больше никогда в нее не попадать, либо попадать в трубку в как угодно большие моменты времени. В первом случае применимы только что приведенные рассуждения. Во втором случае приходим к выводу, что изображающая точка попадет неизбежно на плоскость $R=0$ или, что то же самое, на плоскость $s=0$.

Попав на плоскость $s=0$, изображающая точка будет совершать свое движение в силу системы (3.10), описывающей скольжение. Условия $A > 0$, $B > 0$ обеспечивают движение точки по плоскости S к началу координат.

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается показать, что имеет место устойчивость по Ляпунову. Таким образом, нужно доказать существование для любого заданного $\epsilon > 0$, такого числа δ , что из неравенств $|X_0| < \delta$, $|Y_0| < \delta$, $|R_0| < \delta$ следовали бы для решений системы (4.2) неравенства

$$|X(\tau)| < \epsilon, |Y(\tau)| < \epsilon, |R(\tau)| < \epsilon \text{ при } \tau > 0.$$

Однако такое число δ мы можем выбрать согласно лемме 4.5. Некоторое осложнение доставляют точки, лежащие на плоскости $R=0$, так как о них в лемме 4.5 ничего не говорится. Но так как эти точки скользят по плоскости $R=0$ в силу асимптотически устойчивой системы (3.10), то и для них требуемое свойство имеет место.

Сделаем следующее замечание. Характеристическое уравнение (3.10), описывающее процесс скольжения, имеет вид

$$\lambda^2 + B\lambda + A = 0. \quad (4.17)$$

Корни этого уравнения, с учетом первого из условий (3.5) существования скольжения, определяются формулой $\lambda_{1,2} = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}B^2 + aB - b}$. Отсюда видно, что для обеспечения высокой скорости скольжения необходимо значение B выбирать настолько большим, насколько позволяет второе из условий (3.5). При этом корни характеристического уравнения (4.17) могут стать комплексными, и режим

скольжения будет представлять собой затухающий колебательный процесс.

Если колебательный характер скольжения по какой-либо причине не является приемлемым, то следует нарушить (за счет увеличения B) условие $A = B^2 - aB + b$, с тем, чтобы корни характеристического уравнения (4.17) стали действительными. Можно показать [34], что свойство устойчивости в этом случае не исчезнет. Более подробно эти вопросы для нелинейного случая будут рассмотрены в § 7.

§ 5. Стабилизация системы n -го порядка

Рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = -\alpha K x, \quad (5.1)$$

где величина α определяется соотношением

$$\alpha = \text{sign}(c_{n-1}x_1 + \dots + c_0x_n) x_1, \quad (5.2)$$

где c_0, \dots, c_{n-1} — постоянные.

Уравнение (5.1) эквивалентно, очевидно, системе

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n - \alpha K x_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Рассмотрим гиперплоскость

$$s = c_{n-1}x_1 + \dots + c_0x_n = 0, \quad (5.4)$$

где $c_0 = 1$.

Теорема 5.1 (Емельянов С. В., Таран В. А. [50]). *Для того чтобы гиперплоскость $s = 0$ была гиперплоскостью скольжения, необходимо и достаточно выполнения условий:*

$$c_{i+1} = r c_i + a_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \quad (5.5)$$

$$|a_n + r c_{n-1}| \leq K, \quad (5.6)$$

где r — некоторый вещественный параметр.

Докажем необходимость условий. Введем вместо координаты x_n новую координату $s = c_{n-1}x_1 + \dots + c_0x_n$.

Система (5.3) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_{n-i} x_i + s, \\ \dot{s} &= - [(a_n + r c_{n-1}) + \alpha K] x_1 + (c_{n-1} - a_{n-1} + \\ &+ r c_{n-2}) x_2 + \dots + (c_2 - a_2 + r c_1) x_{n-1} + r s, \end{aligned} \right\} (5.7)$$

где введено обозначение $r = c_1 - a_1$.

Для того чтобы производная \dot{s} меняла знак на гиперплоскости $s = 0$ только тогда, когда меняет знак величина x_1 , как это требуется для выполнения условий скольжения (см. § 1)

$$x_1 \dot{s}|_{\alpha=1} \leq 0, \quad x_1 \dot{s}|_{\alpha=-1} \geq 0, \quad (5.8)$$

необходимо, чтобы все коэффициенты при x_2, \dots, x_{n-1} в последнем уравнении системы (5.7) обращались в нуль. Таким образом, получаем условия (5.5). Кроме того, чтобы удовлетворить условиям (5.8), необходимо, очевидно, считать выполненным неравенство (5.6), так как последнее уравнение системы (5.7) превращается при выполнении условий (5.5) в уравнение

$$\dot{s} = - [a_n + r c_{n-1} + \alpha K] x_1.$$

Достаточность условий теоремы доказывается аналогично. Рассмотрим теперь функцию

$$f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n.$$

Из условий (5.5) следует

$$f(r) = a_n + r c_{n-1}. \quad (5.9)$$

Таким образом, неравенство (5.6) может быть записано в форме

$$|f(r)| \leq K.$$

Перейдем теперь к исследованию вопросов устойчивости рассматриваемой системы.

Те же рассуждения, которые были проведены нами в § 3 при выводе системы (3.10), приводят нас к выводу, что процесс скольжения описывается в рассматриваемом случае

системой

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_{n-i} x_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Очевидно, система (5.10) может быть получена из системы (5.7), если взять из нее только первые $n-1$ уравнений и положить $s=0$.

Если выполнены условия существования скольжения (5.5) и (5.6), система (5.7) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_{n-i} x_i + s, \\ \dot{s} &= - [f(r) + \alpha K] x_1 + r s. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Рассмотрим теперь условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (5.10), описывающей процесс скольжения.

Теорема 5.2 (Е. И. Геращенко [37]). *Пусть выполнены условия (5.5) и (5.6) при данном фиксированном значении r . Для того чтобы нулевое решение системы (5.10) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = f(r), \quad (5.12)$$

помимо очевидного $\lambda=r$, лежали в левой полуплоскости комплексного переменного.

В самом деле, нетрудно видеть, что уравнение (5.12) является характеристическим уравнением системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_{n-i} x_i + s, \\ \dot{s} &= r s. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Действительно, при $\alpha = -1$ характеристическое уравнение системы (5.11), эквивалентной уравнению (5.1), имеет вид $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = K$. С другой стороны, система

(5.13) получается из системы (5.11), если в последней положить $\alpha = -1$ и $f(r) = K$.

Так как все корни уравнения (5.12), помимо очевидного $\lambda = r$, лежат в левой полуплоскости, и так как эти корни являются также корнями характеристического уравнения системы (5.10), то отсюда и следует истинность утверждения теоремы.

В частности, если уравнение $\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$ имеет только корни с отрицательной вещественной частью, то при $r = 0$ (или даже при $|r| < \varepsilon$, где ε — достаточно малая величина), условия теоремы 5.2 выполнены и нулевое решение системы (5.10) будет асимптотически устойчивым.

Перейдем теперь к формулировке и выводу условий устойчивости нулевого решения основной системы (5.11).

Теорема 5.3 (Е. И. Геращенко [39]). Если выполнены условия скольжения (5.5) и (5.6), и при этом все корни уравнения (5.12) имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы (5.11) будет асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Докажем теорему. Из условия теоремы следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (5.10). Кроме того, в рассматриваемом случае очевидный корень $\lambda = r$ уравнения (5.12) должен быть отрицательным.

В силу теоремы 9.1 первой главы существует определенно положительная квадратичная форма $v(x_1, \dots, x_n)$, такая, что ее производная, взятая в силу системы (5.10), будет равна функции $\omega = -x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2$. Рассмотрим функцию $v = v_1(x_1, \dots, x_{n-1}) + \frac{1}{2}As^2$, где $A > 0$. Производная по времени этой функции, взятая в силу системы (5.11), будет иметь вид

$$\dot{v} = \omega + \frac{\partial v_1}{\partial x_{n-1}}s + Ars^2 - A[f(r) + \alpha K]x_1s. \quad (5.14)$$

Очевидно, выражение $A[f(r) + \alpha K]x_1s$ в силу условий (5.2) и (5.6) всегда будет положительным, так как

$$A[f(r) + \alpha K]x_1s = A|x_1s| \left[\frac{f(r)}{\alpha} + K \right]$$

и выражение в квадратной скобке положительно.

С другой стороны, квадратичная форма $w + \frac{\partial v_1}{\partial x_{n-1}} s + + Ars^2$, как это следует из критерия Сильвестра, при достаточно большом значении A будет определено отрицательной формой переменных x_1, \dots, x_{n-1}, s . Таким образом, асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения системы (5.11) следует из теоремы 12.1 первой главы.

Мы уже видели, что требование отрицательности вещественных частей всех корней уравнения (5.12) эквивалентно требованию асимптотической устойчивости нулевого решения системы (5.10) при $r < 0$. Таким образом, теорема 5.3 может быть сформулирована следующим образом.

Пусть выполнено условие $r < 0$. Нулевое решение системы (5.11) будет асимптотически устойчивым в целом, если этим же свойством обладает нулевое решение системы (5.10).

§ 6. Стабилизация системы с ограничителем в критическом случае одного нулевого корня

1. Рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} = -\alpha \varphi(x), \quad (6.1)$$

где

$$\varphi(x) \neq 0 \text{ при } x \neq 0, |\alpha| \leq 1.$$

Предположим, что уравнение

$$\lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0 \quad (6.2)$$

имеет только корни с отрицательными вещественными частями. Уравнение (6.1) эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad x_1 = x, \\ \dot{x}_n &= -a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n - \alpha \varphi(x_1). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= -a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

В силу теоремы 9.1 первой главы существует определено положительная квадратичная форма $v_1(x_2, \dots, x_n)$,

производная которой, взятая в силу системы (6.4), будет равна $\dot{w} = -x_2^2 - \dots - x_n^2$.

Рассмотрим функцию

$$v(x_1, \dots, x_n) = v_1(x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{2}y^2,$$

где

$$y = a_{n-1}x_1 + a_{n-2}x_2 + \dots + a_1x_{n-1} + x_n.$$

Вычисляя производную функции v , в силу системы (6.3) получим

$$\dot{v} = \dot{w} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + y \right) \alpha \varphi(x_1), \quad (6.5)$$

так как производная величины y , взятая в силу системы (6.3), тождественно равна $-\alpha \varphi(x_1)$.

Мы видим, что если положить

$$\text{sign } \alpha = \text{sign} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + y \right) \varphi(x), \quad (6.6)$$

то будут выполнены все условия теоремы 12.1 первой главы; эти условия обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом нулевого решения системы (6.3).

Если величину α искать исходя из требования, чтобы скорость убывания функции v вдоль траекторий системы (6.3) была наибольшей [66, 67], то получим

$$\alpha = \text{sign} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + y \right) \varphi(x). \quad (6.7)$$

Наиболее типичным является случай, когда функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $\varphi(x)x > 0$ при $x \neq 0$; формулу (6.7) можно переписать тогда в виде

$$\alpha = \text{sign} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + y \right) x.$$

Это последнее условие обеспечивает устойчивость при любых начальных возмущениях для любой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей при $x \neq 0$ неравенству $\varphi(x)x > 0$. Обычно устойчивость указанного типа называют абсолютной устойчивостью.

Зададим теперь функцию $\varphi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = Kx \text{ при } |Kx| \leq H,$$

$$\varphi(x) = H \text{sign } x \text{ при } |Kx| > H,$$

где K и H — положительные постоянные. Уравнение (6.1) описывает в этом случае систему регулирования с ограничителем на входе регулируемого объекта. При $K = \infty$ получаем чисто релейную систему, при $H = \infty$ и K конечным получаем класс систем, изученных в предыдущем параграфе.

Важно отметить, что закон выбора величины a , указанный здесь, обеспечивает асимптотическую устойчивость при любом положительном значении K , в то время как ранее требовалось, чтобы величина K была достаточно большой.

2. Изучим теперь рассматриваемый вопрос с более общей точки зрения.

Пусть система регулирования описывается системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.8)$$

Предположим, что характеристическое уравнение системы (6.8) имеет один нулевой корень и $n - 1$ корней с отрицательными вещественными частями.

Поставим задачу описания возможных методов коррекции системы регулирования, обеспечивающих асимптотическую устойчивость при любых начальных возмущениях. Эта задача представляет интерес, так как в приложениях часто встречаются системы, у которых передаточная функция объекта регулирования имеет нуль в качестве простого полюса. С математической точки зрения метод рассуждения, приводимый нами, аналогичен рассуждениям, проводимым при исследовании вопросов устойчивости в критическом случае одного нулевого корня [1].

Для определенности предположим в дальнейшем, что среди неравных нулю миноров $n - 1$ -го порядка матрицы A , составленной из коэффициентов системы, имеется по крайней мере один, составленный из коэффициентов, входящих в первые $n - 1$ уравнений системы (6.8).

Наряду с системой (6.8) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - \alpha(x_1, \dots, x_n) \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \\ i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где функции $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ заданы, а функция $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ подлежит определению.

Как известно, существует неособое линейное преобразование

$$y = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$$

$$y_i = b_{i1} x_1 + \dots + b_{in} x_n \quad i = 1, \dots, n-1, \quad b_n \neq 0,$$

переводящее систему (6.8) в систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = 0,$$

$$\dot{y}_i = p_{i1} y_1 + \dots + p_{i, n-1} y_{n-1}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (6.10)$$

Указанное преобразование переведет систему (6.9) в систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= -\alpha (b_1 \varphi_1 + \dots + b_n \varphi_n), \\ \dot{y}_i &= p_{i1} y_1 + \dots + p_{i, n-1} y_{n-1} - \alpha (b_{i1} \varphi_1 + \dots + b_{in} \varphi_n), \\ & \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Так как корни характеристического уравнения матрицы P , составленной из коэффициентов p_{ik} , $i = 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, n-1$, имеют отрицательные вещественные части, то по теореме 9.1 первой главы для любой определенно отрицательной квадратичной формы $\omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ переменных y_1, \dots, y_{n-1} существует определенно положительная квадратичная форма $v_1(y_1, \dots, y_{n-1})$ этих же переменных такая, что в силу первых уравнений системы (6.10) получим

$$\frac{dv_1}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_1}{\partial y_i} (p_{i1} y_1 + \dots + p_{i, n-1} y_{n-1}) = \omega(y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$v(y_1, \dots, y_{n-1}, y) = v_1(y_1, \dots, y_{n-1}) + \frac{1}{2} y^2$$

и найдем ее производную в силу системы (6.11)

$$\frac{dv}{dt} = \omega(y_1, \dots, y_{n-1}) - \alpha \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_1}{\partial y_i} b_{ik} + b_k y \right) \varphi_k.$$

Наложим теперь дополнительное ограничение на функцию φ_k , а именно потребуем, чтобы при $y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 0$, $y \neq 0$ выполнялось неравенство $b_1 \varphi_1 + \dots + b_n \varphi_n \neq 0$. В этом

случае условие

$$\text{sign } \alpha = \text{sign} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_1}{\partial y_i} b_{ik} + b_{nk} y \right) \varphi_k$$

является, очевидно, достаточным условием асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (6.9). Так как в правой части в скобках стоит линейная форма переменных y_1, \dots, y_{n-1}, y , то это условие, возвращаясь к старым переменным, можно переписать в виде

$$\text{sign } \alpha = \text{sign} \sum_{k=1}^n (c_{k1} x_1 + \dots + c_{kn} x_n) \varphi_k.$$

Интересно рассмотреть случай, когда функция $\alpha(x_1, \dots, x_n)$, представляющая собой управление системы регулирования, принадлежит заранее заданному классу функций.

Пусть, например, функция α удовлетворяет условию $\|\alpha\| \leq 1$, и пусть, кроме того, $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_{n-1} = 0$, $\varphi_n = \varphi$. Если будем искать функцию α , обеспечивающую наиболее быстрое убывание функции Ляпунова v вдоль траекторий системы (6.9), то получим

$$\alpha = \text{sign} (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) \varphi (x_1, \dots, x_n).$$

Таким образом, α будет кусочно-постоянной функцией и при $\varphi = 1$ мы получим чисто релейную систему.

Если положим $\varphi = K x_n$ при $|K x_n| \leq H$, $\varphi = H \text{sign } x_n$ при $|K x_n| > H$, где K и H — положительные постоянные, то при $\alpha = \text{sign} (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) x_n$ получим устойчивую систему с ограничителем на входе.

3. Следуя А. М. Ляпунову [1], укажем сейчас способ построения линейного преобразования, переводящего систему (6.8) в систему (6.10). Определим сначала величину $y = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$ ($b_n = 1$) таким образом, чтобы в силу системы (6.8) имело место равенство

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_i a_{ik} x_k = 0. \quad (6.12)$$

Условие (6.12) приводит к системе уравнений

$$a_{1k} b_1 + \dots + a_{nk} b_n = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.13)$$

которая, очевидно, обладает требуемым решением, так как ранг матрицы A равен $n - 1$. Далее полагаем $y_i = x_i - d_i y$, $i = 1, \dots, n - 1$, и находим коэффициенты d_i из условия независимости \dot{y}_i от переменной y . Несложные выкладки приводят нас к системе

$$y_i = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} - a_{in}b_k) y_k + \left[\sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} - a_{in}b_k) d_k + a_{in} \right] y, \\ i = 1, \dots, n - 1.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при y , получаем для определения d_k систему

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} - a_{in}b_k) d_k + a_{in} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.14)$$

которая имеет решение, так как ее определитель отличен от нуля. В самом деле, переход от координат x_1, \dots, x_n к координатам y_1, \dots, y_{n-1}, y не меняет ранга матрицы, составленной из коэффициентов системы. Ранг матрицы, составленной из коэффициентов уравнения $\dot{y} = 0$ и системы (6.13) равен $n - 1$, причем $\det(a_{ik} - a_{in}b_k) \neq 0$, так как в противном случае характеристическое уравнение этой системы имело бы по крайней мере еще один нулевой корень.

Таким образом, искомое преобразование имеет вид

$$y = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n, \\ y_i = x_i - d_i (b_1 x_1 + \dots + b_n x_n),$$

где d_i и b_k определяются из систем (6.13) и (6.14).

§ 7. Нелинейные системы с переменной структурой. Регулирование по координате x

1. Здесь и в следующем параграфе мы рассмотрим вопросы устойчивости нелинейных систем третьего порядка. Теорема 7.1, приведенная ниже, обобщает в некотором смысле результаты работы [34], в которой рассмотрен линейный случай. Основные результаты по нелинейным системам опубликованы в работах [35, 36]. Характерным моментом исследований, проведенных в этих работах, является отказ от требования выполнения условий скольжения. На поверх-

ности переключения в этом случае получается некоторая полоса прошиваемости, однако эту полосу можно сделать как угодно узкой за счет увеличения коэффициента усиления K .

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) + Kx \operatorname{sign}[x(\ddot{x} - \varphi(x, \dot{x}))] = 0, \quad (7.1)$$

где K — положительная постоянная величина, функция $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$ непрерывна по всем своим аргументам в области $|x| < \infty, |\dot{x}| < \infty, |\ddot{x}| < \infty, 0 \leq t < \infty$, ограничена по t при фиксированных значениях x, \dot{x}, \ddot{x} и имеет непрерывные частные производные первого порядка по аргументам x, \dot{x}, \ddot{x}, t ; функция $\varphi(x, \dot{x})$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные частные производные первого и второго порядков по x, \dot{x} в области $|x| < \infty, |\dot{x}| < \infty$.

Уравнение (7.1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = z, \\ \dot{z} &= -F(x, y, z, t) - Kx \operatorname{sign}[x(z - \varphi(x, y))]. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Наложим следующие ограничения на функции $\varphi(x, y)$ и $F(x, y, z, t)$:

a) $|\rho^3 F(x, \rho^{-1}y, \rho^{-2}z, \rho t)| < A(x, y, z)$

и

$$|\rho \varphi(x, \rho^{-1}y)| < B(x, y)$$

для достаточно малых значений параметра ρ ; здесь $A(x, y, z)$ и $B(x, y)$ предполагаются непрерывными функциями своих аргументов для всех значений x, y, z ;

b) $\varphi(0, 0) = 0, \quad \varphi(x, 0)x < 0$ при $x \neq 0,$
 $[\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)]y < 0$ при $y \neq 0,$

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(x, 0) dx = \infty.$$

Заметим, что условие а) удовлетворяется в случае, когда функция $F(x, y, z, t)$ линейна относительно x, y, z и ограничена по t для $0 \leq t < \infty$. Любая линейная функция $\varphi(x, y) = cx + dy$, где c и d — постоянные, также удовлетворяет условию а); кроме того, она будет удовлетворять и условию б), если положить $c < 0$ и $d < 0$.

В общем случае уравнение (7.1) описывает систему регулирования нелинейного объекта, обрабатывающего входное воздействие произвольного вида.

К системам типа (7.2) приводят некоторые задачи об отыскании оптимального управления. В самом деле, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -F(x, y, z, t) - Ku(t)x,$$

и попытаемся найти функцию $u(t)$ таким образом, чтобы при $|u(t)| \leq 1$ некоторая функция $v(x, y, z)$ имела бы в силу этой системы наибольшую скорость убывания. Нетрудно видеть, что функция $u(t)$ должна в этом случае иметь вид $u(t) = \text{sign } x \frac{\partial v}{\partial z}$, а это при некоторых дополнительных предположениях о структуре функции v приводит к системе (7.2).

Теорема 7.1. Пусть выполнены условия а) и б) и пусть задано положительное число ε . Тогда для заданной ограниченной области G фазового пространства можно указать такое положительное число K_0 , что при $K \geq K_0$ любое решение системы (7.2), определяемое начальными условиями из области G , будет удовлетворять с некоторого момента времени условиям $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$, $|z(t)| < \varepsilon$.

2. Докажем теорему. Покажем сначала, что любая точка из области G — области возможных начальных положений, двигаясь в силу уравнений системы (7.2), попадает в некоторый момент времени на поверхность S , заданную уравнением $s = z - \varphi(x, y) = 0$.

Для этого в системе (7.2) проведем замену переменных

$$t = \rho\tau, \quad X = x, \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho^2 z. \quad (7.3)$$

Новая система запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= Y, \\ \frac{dY}{d\tau} &= Z, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -\alpha X - \rho^3 F(X, \rho^{-1}Y, \rho^{-2}Z, \rho\tau), \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

где

$$\alpha = \text{sign } [X(Z - \rho^3 \varphi(X, \rho^{-1}Y))].$$

Наряду с системой (7.4), эквивалентной системе (7.2), рассмотрим упрощенную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= Y, \\ \frac{dY}{d\tau} &= Z, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -|X| \operatorname{sign} R, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

где

$$R = Z - \rho^2 \varphi(X, \rho^{-1} Y).$$

Пусть в начальный момент времени $R > 0$. Система (7.4) имеет тогда следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= Y, \\ \frac{dY}{d\tau} &= Z, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -|X|. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Из леммы 4.1 следует, что решение системы (7.5) обладает свойством $X \rightarrow -\infty, Y \rightarrow -\infty, Z \rightarrow -\infty$, если только начальная точка не лежит на прямой $X = -Y = Z$. Из условия b) следует, что при $X < 0$ имеем $\varphi(X, 0) > 0$. Так как

$$Y\varphi(X, Y) < Y\varphi(X, 0),$$

то при $X < 0, Y < 0$ имеем $\varphi(X, Y) > 0$; отсюда получим

$$R = Z - \rho^2 \varphi(X, \rho^{-1} Y) < Z.$$

Так как $Z \rightarrow -\infty$, то величина R должна стать отрицательной, следовательно, любая точка M фазового пространства должна попасть из области $R > 0$ на поверхность $R = 0$. Аналогичный вывод делаем и для точек области $R < 0$.

Таким образом, нами доказано, что точка $M(\tau)$, лежащая в области G , двигаясь в силу уравнений упрощенной системы (7.5), либо попадает на поверхность S в конечный момент времени τ , либо асимптотически приближается к началу координат в случае, когда точка $M(0)$ принадлежит прямой $X = -Y = Z$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра, аналогичный вывод делаем

для системы (7.4), а значит, и для изучаемой системы (7.2); иначе говоря, доказано, что при значении K достаточно большим точка $M(t)$, лежащая в области G возможных начальных условий, двигаясь под действием уравнений системы (7.2), попадает на поверхность переключения S с ростом t .

3. Далее перейдем ко второй части доказательства теоремы — изучим поведение изображающей точки $M(t)$, попавшей под действием уравнений системы (7.2) на поверхность переключения S . Для этого перейдем к новой системе координат, где x и y остаются прежними и вводится координата $s = z - \varphi(x, y)$. Тогда система (7.2) преобразуется в эквивалентную систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= s + \varphi(x, y), \\ \dot{s} &= -\varphi'_y(x, y)s - F(x, y, s + \varphi(x, y), t) - \\ & - \varphi'_x(x, y)y - \varphi'_y(x, y)\varphi(x, y) - \alpha Kx, \end{aligned} \right\} (7.7)$$

$(\alpha = \text{sign } xs)$.

При таком преобразовании координат поверхность переключения $z = \varphi(x, y)$ переходит в плоскость переключения $s = 0$. Поэтому, исследовав судьбу изображающей точки, попавшей под действием уравнений (7.7) на плоскость $s = 0$, сможем сделать соответствующие выводы о поведении изображающей точки системы (7.2) на поверхности S .

На плоскости $s = 0$ величина \dot{s} запишется в виде

$$\dot{s} = -\alpha Kx - \Phi(x, y, t), \quad (7.8)$$

где введено обозначение

$$\Phi(x, y, t) = F(x, y, \varphi(x, y), t) + \varphi'_x(x, y)y + \varphi'_y(x, y)\varphi(x, y).$$

Обозначим через D область плоскости $s = 0$, порожденную концами дуг траекторий, выходящих из области G . Из предыдущей части доказательства следует, что область D является при $K \rightarrow \infty$ равномерно ограниченной областью. В самом деле, преобразование (7.3) переводит область G в область G_p , причем легко видеть, что при $\rho_1 > \rho_2$ будем иметь $G_{\rho_1} \supset G_{\rho_2}$. Точки областей G_{ρ_1} и G_{ρ_2} , двигаясь по траекториям системы (7.5), перейдут в точки областей D_{ρ_1} и D_{ρ_2} , лежащие на плоскости $s = 0$, причем $D_{\rho_1} \supset D_{\rho_2}$. Принимая во

внимание теореме о непрерывной зависимости решений от параметра, мы можем сделать вывод об ограниченности области, состоящей из точек поверхности S , пришедших из области G_ρ по траекториям системы (7.4). Возвращаясь к старым координатам, получаем ограниченность области D при $\rho \rightarrow 0$.

В силу сформулированных выше предположений относительно функций $F(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y)$ будем иметь в области D соотношение

$$|\Phi(x, y, t)| < m. \quad (7.9)$$

Из равенства (7.8) легко видеть, что прямые $x = \Delta x$ и $x = -\Delta x$, где $\Delta x = \frac{m}{k}$, выделяют на плоскости $s = 0$ полосу $|x| \leq \Delta x$, вне которой знак производной \dot{s} для системы (7.7) определен соотношением $\text{sign } \dot{s} = -a \text{ sign } x$. Анализ этой формулы показывает, что точки плоскости $s = 0$, расположенные вне указанной полосы, являются точками скольжения системы (7.7). Движение изображающей точки $M(t)$ из этой части плоскости $s = 0$ (вне полосы $|x| \leq \Delta x$) определяется предельным дифференциальным уравнением $\dot{x} = \varphi(x, \dot{x})$, которое эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \varphi(x, y). \quad (7.10)$$

Внутри полосы $|x| \leq \Delta x$ плоскости $s = 0$ знак производной \dot{s} не определен. Полоса содержит области «прошиваемости», ограниченные кривыми

$$\Phi(x, y, t) + aKx = 0, \quad (7.11)$$

где траектории системы (7.7) с ростом времени пересекают плоскость $s = 0$.

Таким образом, изображающая точка $M(t)$ системы (7.7), попав на плоскость $s = 0$, движется по ней в силу уравнений системы (7.10) до тех пор, пока не попадет в момент времени $t = t_0 > 0$ на границу области прошиваемости, т. е. на одну из кривых (7.11), в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$. Сам факт попадания обуславливается устойчивостью в целом нулевого решения системы (7.10). Эта устойчивость вытекает из выполнения условий б) для функции $\varphi(x, y)$ (см. пример 4 в § 14 первой главы). Затем с ростом t изображающая

точка $M(t)$ сойдет с плоскости $s=0$ и начнет двигаться под действием уравнений системы (7.7) либо в полупространстве $s > 0$ (при $\alpha = -1$), либо в полупространстве $s < 0$ (при $\alpha = 1$). Покажем, что при достаточно большом значении K точка $M(t)$ системы (7.7), побывав некоторое достаточно малое время вне плоскости $s=0$, вновь вернется в нее в точке, расположенной достаточно близко к оси Oy .

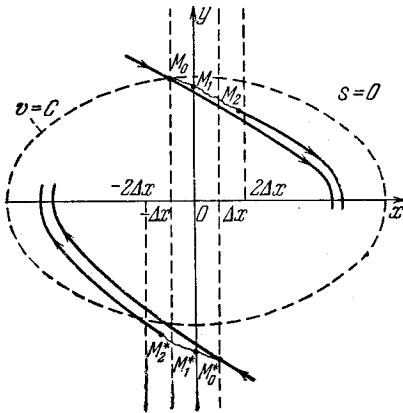


Рис. 13.

Пусть для определенности точка M_0 расположена во втором квадранте плоскости $s=0$, т. е. для ее координат выполняются соотношения

$-\Delta x \leq x_0 < 0$, $y_0 > 0$ (рис. 13). Кроме того, предположим, что выполняется также соотношение

$$y_0 \gg \Delta x. \quad (7.12)$$

Пользуясь уравнениями

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dy}{dx} &= s + \varphi(x, y), \\ y \frac{ds}{dx} &= -\varphi'_y s - F(x, y, s + \varphi(x, y), t) - \\ &\quad - \alpha Kx - \varphi'_x y - \varphi'_y \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

полученными из дифференциальных уравнений системы (7.7), найдем приближенное решение $y(x)$ и $s(x)$ системы (7.13), соответствующее траектории изображающей точки $M(t)$ с начальной точкой $M_0(x_0, y_0) = M(t_0)$. Так как для точки M_0 , по предположению, имеем $y_0 > 0$, то с ростом времени $t > t_0$ изображающая точка, сойдя с плоскости $s=0$, движется в сторону возрастания x , т. е. по направлению к плоскости $x=0$. С другой стороны, поскольку $|x_0| \leq \Delta x$, а величина $\Delta x = \frac{m}{K}$ может быть сделана за счет увеличения

значения K сколь угодно малой, то искомое решение будем рассматривать на интервале $[x_0, 0]$, а для нахождения соответствующего решения ограничимся его первым приближением

$$y(x) = y_0 + \frac{\varphi(x_0, y_0)}{y_0} (x - x_0),$$

$$s(x) = \alpha K x_0 - \frac{\Phi(x_0, y_0, t_0)}{y_0} (x - x_0).$$

Полученные формулы позволяют найти приближенное значение координат точки $M_1(x_1, y_1, s_1)$ — точки, в которой траектория пересекает при некотором значении $t = t_1 > t_0$ плоскость $x = 0$, а именно, получим равенства

$$x_1 = 0, \quad y_1 = y_0 - \frac{\varphi(x_0, y_0)}{y_0} x_0 \approx y_0, \quad s_1 \approx 0,$$

справедливые при достаточно больших значениях K , когда можно пренебречь слагаемыми одного порядка малости с величиной Δx .

Из точки M_1 изображающая точка $M(t)$ движется с ростом времени $t > t_1$ в полупространстве $x > 0$ до тех пор, пока ордината точки остается положительной. Так как ордината точки M_1 вследствие выполнения соотношения (7.12) снова положительна, то с ростом времени t изображающая точка $M(t)$ из точки M_1 движется вновь в сторону возрастания $x(t)$, по крайней мере для значений x положительных, достаточно малых, сравнимых по величине с числом Δx . Найдем решение $s(x)$ системы (7.13), соответствующее выходящей из точки M_1 траектории, в виде степенного ряда по степеням x , пренебрегая степенями x , начиная с x^3 . При этом примем во внимание ограниченность функций $F(x, y, z, t)$, $\varphi(x, y)$ и их производных, а также считаем значение K достаточно большим. Тогда будем иметь

$$s(x) = - \frac{\Phi(0, y_0, t_1)}{y_0} x - \alpha K \frac{x^2}{2y_0}, \quad (7.14)$$

откуда найдем значение x , при котором функция $s(x)$ обращается в нуль. Тем самым найдем значение абсциссы точки $M_2 = M(t_2)$ — точки возвращения при $t = t_2 > t_1$ изображающей точки на плоскость $s = 0$. Очевидно, для абсциссы точки M_2 получим равенство $x_2 = - \frac{2\Phi(0, y_0, t_1)}{\alpha K}$. Принимая

во внимание условие (7.9), получим соотношение $|x_2| \leq 2\Delta x$. Причем для рассматриваемой траектории, очевидно, $x_2 > 0$, так как значение ординаты точки M_2 отличается от ординаты начальной точки M_0 траектории на величину одного порядка малости с величиной Δx , т. е. на интервале $[-\Delta x, 2\Delta x]$ знак ординаты точки в нашем случае остается положительным.

Таким образом, мы показали, что при достаточно большом значении K изображающая точка $M(t)$ системы (7.7), сойдя с плоскости $s=0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, для координат которой справедливы соотношения $|x_0| \leq \Delta x$, $y_0 \gg \Delta x$, вновь возвращается на плоскость $s=0$ в точке $M_2(x_2, y_2)$, ордината которой по-прежнему положительна и сравнима по величине с числом y_0 , а абсцисса не превосходит числа $2\Delta x$ (см. рис. 13). Поскольку разность абсцисс точек M_0 и M_2 не больше числа $3\Delta x$, то время перехода изображающей точки из точки M_0 в точку M_2 при достаточно большом значении K будет малым.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для траектории системы (7.7), сходящей с плоскости $s=0$ в некоторой точке $M_0^*(x_0^*, y_0^*)$, где $y_0^* < 0$ и $0 < x_0^* \leq \Delta x$, если только выполняется соотношение $|y_0^*| \gg \Delta x$, т. е. и в этом случае может быть показано, что изображающая точка $M(t)$, покинув плоскость $s=0$ в точке M_0^* , пересечет плоскость $x=0$, затем, побывав некоторое малое время вне плоскости, вновь вернется в нее в области скольжения в точке $M_2^*(x_2^*, y_2^*)$, для координат которой имеют место соотношения $x_2^* < 0$, $|x_2^*| \leq 2\Delta x$.

Итак, наличие полосы $|x| \leq \Delta x$, содержащей внутри себя области прошиваемости системы (7.7), вызывает отклонение рассмотренных траекторий системы от плоскости $s=0$. Это отклонение происходит на полосе, не выходящей из полосы $|x| \leq 2\Delta x$. Так как $\Delta x = \frac{m}{K}$, где m — постоянная из соотношения (7.9), то всегда можно выбрать значение K настолько большим, что значение Δx станет сколь угодно малым. Одновременно с Δx станут сколь угодно малыми как максимальное отклонение функции $s(x)$ от нуля, так и время нахождения изображающей точки рассматриваемых траекторий вне плоскости $s=0$.

4. В первой части доказательства теоремы нами доказано, что из любой точки фазового пространства изображающая точка системы (7.2) попадает с ростом времени на поверхность $s=0$. Дальнейшее поведение изображающей точки определяется ее движением на самой поверхности S и отклонением от этой поверхности, определяемым существованием областей прошиваемости системы.

Рассмотрим теперь на плоскости $s=0$ наряду с системой (7.10) систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \varphi(x, y) + s(t), \quad (7.15)$$

образованную двумя первыми уравнениями системы (7.7). Здесь через $s(t)$ обозначено значение величины s в процессе изучаемого нами выше движения точки $M(t)$. Поэтому $s(t)=0$, если точка $M(t)$ скользит по плоскости $s=0$, и $s(t) \neq 0$, если точка $M(t)$ сходит с этой плоскости. Следовательно, система (7.15) описывает движение проекции точки $M(t)$ на плоскости $s=0$.

Выше показано, что при достаточно большом значении K функция $s(t)$ может быть сделана как угодно малой по абсолютной величине. Кроме того, вследствие выполнения условий (b) нулевое положение равновесия является для системы (7.10) асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях. Рассмотрим теперь функцию $v = y^2 -$

$- 2 \int_0^x \varphi(x, 0) dx$. Производная этой функции, взятая в силу

системы (7.15), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 2y[\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] - 2s(t)y = \\ &= 2y\varphi(0, y) + 2y[\varphi(x, y) - \varphi(0, y)] - 2y\varphi(x, 0) - 2ys(t). \end{aligned}$$

Но из (7.14) легко следует, что $|ys(t)| < \frac{m^2}{2K}$, где m — положительная постоянная. С другой стороны, если y_0 — произвольно малое положительное число, то, учитывая, что из условий (b) следует неравенство $y\varphi(0, y) < 0$, а также, что для лежащей в области D точки величина ее ординаты y является ограниченной, будем иметь при $|y| > y_0$ строгое неравенство $y\varphi(0, y) < -r_0$, где r_0 — некоторая положительная постоянная.

Далее, выбирая значение K достаточно большим, можем добиться в силу непрерывности функции $\varphi(x, y)$ для точек полосы $|x| \leq 2\Delta x$ (в пределах области D) выполнения неравенств $|y[\varphi(x, y) - \varphi(0, y)]| < \frac{r_0}{4}$ и $|y\varphi(x, 0)| < \frac{r_0}{4}$. Наконец, при $K > \frac{2m^2}{r_0}$ будем иметь также соотношение $|y\dot{s}(t)| < \frac{r_0}{4}$. Таким образом, в полосе $|x| \leq 2\Delta x$ при $|y| > y_0$ будем иметь для производной \dot{v} неравенство $\dot{v} < -\frac{1}{2}r_0 < 0$.

Кроме того, $\dot{v} \leq 0$ всюду в области D вне полосы $|x| \leq 2\Delta x$. Отсюда следует, что, выбирая значение K достаточно большим, мы можем добиться того, что производная \dot{v} станет отрицательной всюду в области D , за исключением как угодно малой окрестности начала координат и точек прямой $y=0$. Так как на прямой $y=0$ нет целых траекторий системы (7.10), то приходим к выводу, что любая траектория системы (7.15) попадает в ϵ -окрестность начала координат, если только величина K является достаточно большой.

§ 8. Нелинейные системы с переменной структурой. Регулирование по координате x и ее производным

1. Как и в предыдущем параграфе, здесь будут рассмотрены нелинейные системы третьего порядка. Так же как и ранее, точки фазового пространства переводятся сначала на некоторую поверхность, а затем в скользящем режиме совершают движение по этой поверхности к началу координат. Однако, в отличие от способа формирования управления, рассмотренного ранее, введение дополнительных изменяемых параметров управляющего устройства позволяет обеспечить для любого движения скользящий режим на всем протяжении времени, начиная с некоторого момента. Это последнее обстоятельство и позволяет получить свойство асимптотической устойчивости нулевого решения системы.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) + (K|x| + K_1|\dot{x}|) \operatorname{sign}(\ddot{x} - \varphi(x, \dot{x})) = 0. \quad (8.1)$$

Здесь K, K_1 — положительные параметры, $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$, $\varphi(x, \dot{x})$ — непрерывные функции своих аргументов при всех значениях x, \dot{x}, \ddot{x} и $t \geq 0$.

Уравнение (8.1) эквивалентно системе

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = z,$$

$$\dot{z} = -F(x, y, z, t) - [K|x| + K_1|y|] \operatorname{sign}(z - \varphi(x, y)). \quad (8.2)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

а) $|F(x, y, z, t)| \leq a|x| + b|y| + c|z|$ для любых значений $x, y, z, t \geq 0$. Здесь a, b, c — неотрицательные постоянные.

б) Функция $\varphi(x, y)$ всюду определена и непрерывно дифференцируема по x и y , причем существуют такие положительные числа M и N , что выполняются соотношения $|\varphi_x| \leq M, |\varphi_y| \leq N$ для всех x и y .

с) $x\varphi(x, 0) < 0$ при $x \neq 0, y[\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] < 0$ при $y \neq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) dx = \infty$.

Заметим, что условие а) обеспечивает продолжаемость движений системы (8.2), по крайней мере до того момента времени, пока точка не попадет на поверхность S , заданную уравнением $z = \varphi(x, y)$. Если все точки некоторой области G фазового пространства попадут при своем движении на поверхность S , а потом с ростом t будут двигаться по S к началу координат в силу системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \varphi(x, y), \quad (8.3)$$

то мы и получим требуемое свойство асимптотической устойчивости нулевого решения.

Теорема 8.1. Пусть функции $F(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условиям а), б), с), а параметр K_1 фиксирован и выбран согласно неравенству

$$K_1 \geq b + M + cN + N^2, \quad (8.4)$$

и пусть задана ограниченная область G фазового пространства. Можно указать такое положительное число K_0 , что при $K > K_0$ нулевое решение системы (8.2) будет асимптотически устойчивым, причем область G будет лежать в области притяжения начала координат.

Покажем сначала, что увеличивая K , можно получить скользкий режим на всей поверхности S . В самом деле, беря производную функции $s(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$ в силу системы (8.2), получим

$$\frac{ds}{dt} = \Phi(x, y, s, t) - (K|x| + K_1|y|) \operatorname{sign} s, \quad (8.5)$$

где $\Phi(x, y, s, t) = -F(x, y, s + \varphi(x, y), t) - \varphi'_x y - \varphi'_y (s + \varphi(x, y))$. Поскольку для функций $F(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y)$ выполнены соотношения а), б), то функция $\Phi(x, y, s, t)$ также удовлетворяет аналогичному а) неравенству:

$$|\Phi(x, y, s, t)| \leq A|x| + B|y| + C|s|, \quad (8.6)$$

где $A = a + cM + NM$, $B = b + M + cN + N^2$, $C = c + N$. Вычислим предельные значения производной \dot{s} при приближении изображающей точки системы (8.2) к поверхности S :

$$\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} = \Phi(x, y, 0, t) + K|x| + K_1|y| > \\ > (K - A)|x| + (K_1 - B)|y|$$

и

$$\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} = \Phi(x, y, 0, t) - K|x| - K_1|y| < \\ < (A - K)|x| + (B - K_1)|y|$$

при всех значениях x и y .

Для того чтобы обеспечить режим скольжения на всей поверхности $z = \varphi(x, y)$ достаточно, очевидно, потребовать выполнения неравенств $K \geq A$ и $K_1 \geq B$.

Покажем теперь, что для любой ограниченной области G фазового пространства можно подобрать такое значение K_0 , что при $K > K_0$ любая точка $M(t)$ области G , двигаясь с ростом t по траектории системы (8.2), попадет на поверхность S . Так же как и ранее, проведем в системе (8.2) замену переменных $t = \rho\tau$, $X = x$, $Y = \rho y$, $Z = \rho^2 z$, $\rho = K^{-1/2}$. Новая система будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = Z \quad (R = Z - \rho^2 \varphi(X, \rho^{-1} Y)), \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -|X| \operatorname{sign} R - \rho^2 K_1 |Y| \operatorname{sign} R - \\ &\quad - \rho^2 F(X, \rho^{-1} Y, \rho^{-2} Z, \rho\tau). \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

При большом значении K величина ρ играет роль малого параметра, поэтому упрощенная система при $\rho=0$ запишется в виде

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = Z, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -|X| \operatorname{sign} R. \quad (8.8)$$

Систему (8.8) мы уже изучали при доказательстве теоремы (7.1). Любая точка фазового пространства, двигаясь по траектории системы (8.8), попадет на поверхность S за конечный промежуток времени. Исключение составляют лишь точки фазового пространства, лежащие на интегральной прямой $X = -Y = Z$, они приближаются к началу координат асимптотически.

Из условия (а) следует ограниченность в области G величины $\rho^2 F(X, \rho^{-1} Y, \rho^{-2} Z, \rho\tau)$ при малых значениях ρ . Выбирая ρ достаточно малым и используя известные соображения, вытекающие из свойства непрерывности решений по параметру, приходим к выводу, что все точки области G , за исключением достаточно узкой трубки, описанной около прямой $X = -Y = Z$, двигаясь в силу системы (8.7), попадут на поверхность S за конечный промежуток времени, а точки указанной трубки либо выйдут с ростом времени из этой трубки и попадут на S , либо останутся в ней и, следовательно, тоже попадут на S за конечный или бесконечный промежуток времени.

Попав на поверхность S , изображающая точка будет двигаться по ней в силу системы (8.3). Из рассмотрения примера 4 в § 14 первой главы следует, что условия (с) обеспечивают асимптотическую устойчивость нулевого решения этой системы. Таким образом, показано, что любая точка области G будет асимптотически приближаться к началу координат. Чтобы завершить доказательство теоремы, остается лишь, ссылаясь на лемму 4.5, установить факт устойчивости по Ляпунову. Очевидно, рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 4.1, легко приводят нас к требуемому заключению.

Примечание 8.1. Пусть $x_0 > 0$, $y_0 \geq 0$, $z_0 \geq \varphi(x_0, y_0)$. Пользуясь результатом лемм 4.1, 4.2 и 4.3, нетрудно получить для системы (8.2) оценку времени попадания T точки $M(x_0, y_0, z_0)$ на поверхность скольжения S . Эта оценка

имеет вид

$$T \leq \frac{z_0 - \varphi(x_0, y_0)}{Kx_0} (1 + O(\rho)),$$

где через $O(\rho)$ обозначена величина порядка малости ρ . Если x_0, y_0, z_0 — числа произвольного знака, то общее время пребывания изображающей точки в области $|x| > \delta, z \neq \varphi(x, y)$ не превосходит величины

$$T_1 = 3 \frac{|z_0 - \varphi(x_0, y_0)|}{K\delta} (1 + O(\rho)).$$

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{x} + F(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \\ + (K|x| + K_1|\dot{x}| + K_2|\ddot{x}|) \operatorname{sign}(\ddot{x} - \varphi(x, \dot{x})) = 0, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где функции $F(x, \dot{x}, \ddot{x}), \varphi(x, \dot{x})$ удовлетворяют снова условиям а), б), с). В отличие от предыдущего случая, полагаем, однако, функцию $F(x, \dot{x}, \ddot{x})$ не зависящей явно от t .

Уравнение (8.9) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -F(x, y, z) - (K|x| + K_1|y| + K_2|z|) \times \\ &\quad \times \operatorname{sign}(z - \varphi(x, y)). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Теорема 8.2. Если функции $F(x, y, z)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условиям а), б), с), а параметры K, K_1, K_2 выбраны согласно неравенствам

$$K \geq a, \quad K_1 \geq b + 1 + M, \quad K_2 \geq c + N, \quad (8.11)$$

то нулевое решение системы (8.10) будет асимптотически устойчивым в целом.

Докажем теорему. Рассмотрим новую координату $s = z - \varphi(x, y)$, и перепишем систему (8.10) в новых координатах x, y, s :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= s + \varphi(x, y), \\ \dot{s} &= -F(x, y, s + \varphi(x, y)) - \\ &\quad - \varphi'_x y - \varphi'_y (s + \varphi(x, y)) - \\ &\quad - (K|x| + K_1|y| + K_2|s + \varphi(x, y)|) \operatorname{sign} s. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$v = s^2 + y^2 - 2 \int_0^x \varphi(x, 0) dx. \quad (8.13)$$

Из условия с) следует, что функция v является определено положительной и бесконечно большой.

Вычислив производную \dot{v} в силу системы (8.12), получим

$$\begin{aligned} \dot{v} = & 2y[\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] - 2|s| [K|x| + K_1|y| + \\ & + K_2|s + \varphi(x, y)|] + 2s[-F(x, y, s + \varphi(x, y)) - \varphi'_x y - \\ & - \varphi'_y(s + \varphi(x, y)) + y]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условия а), б), получим

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & 2y[\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] - 2|s| [(K - a)|x| + (K_1 - \\ & - b - M - 1)|y| + (K_2 - c - N)|s + \varphi(x, y)|]. \end{aligned}$$

Так как, по условиям теоремы, выполняются соотношения с) и (8.11), то из последнего неравенства следует, что производная функции v , взятая в силу системы (8.12), будет знакоотрицательной функцией, обращающейся в нуль на оси Ox . Очевидно, на оси Ox нет целых траекторий системы (8.2), за исключением особой точки $O(0, 0, 0)$; кроме того, функция v является бесконечно большой. Таким образом, можно применить теперь теорему (12.2) первой главы, что и заканчивает доказательство нашей теоремы.

Что касается соображений относительно качественного расположения траекторий системы (8.9), то легко видеть, что поверхность $Z = \varphi(x, y)$ является поверхностью скольжения во всех ее точках. Это проверяется вычислениями, подобными тем, которые проведены в доказательстве теоремы 8.1. Поэтому изображающая точка системы (8.9) при $t \rightarrow \infty$ либо непосредственно приближается асимптотически к началу координат, либо попадает предварительно через конечное время на поверхность скольжения, а затем, двигаясь по ней, также асимптотически приближается к началу координат.

§ 9. Исследование системы третьего порядка с разрывной поверхностью переключения

Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} + cx = -\alpha Kx, \quad (9.1)$$

эквивалентное системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -cx - by - az - \alpha Kx. \quad (9.2)$$

Предположим, что параметры a, b, c, K являются произвольными постоянными, причем коэффициент K — положителен.

Рассмотрим сначала задачу отыскания закона изменения α при условии $|\alpha| \leq 1$, обеспечивающего максимальное относительное быстродействие системы, т. е. попадание точек фазового пространства в достаточно малую окрестность начала координат за минимальное время.

Анализ этой задачи приводит к необходимости вводить слож-

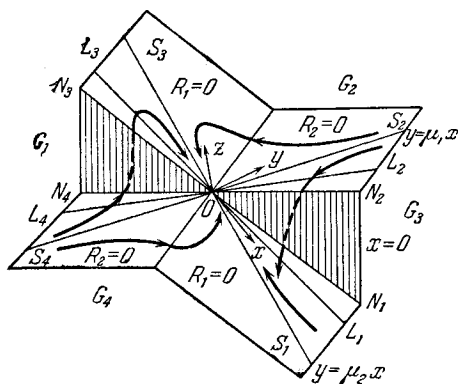


Рис. 14.

ный закон переключения величины α ; этот закон необходимо должен быть нелинейным, так как одна из поверхностей переключения должна быть необходимо нелинейной, хотя и содержащей в качестве своей части плоские многообразия. Учитывая, что нелинейный закон переключения является трудно реализуемым, можно искать решение на пути построения кусочно линейной поверхности переключения, такой, чтобы при движении точки фазового пространства по ней происходило изменение режима скольжения с целью повышения быстродействия.

Детальный анализ оптимальных задач приводит к мысли построения поверхности переключения из двух плоскостей. Такая поверхность (рис. 14), в отличие от поверхности, рассмотренной нами ранее, имеет разрыв на плоскости $x=0$ и

обеспечивает, в некотором смысле, первое приближение решения указанной выше оптимальной задачи.

Здесь ставится, однако, задача не оптимизации системы (9.2), а задача стабилизации системы. Это значит, что за счет упрощения структуры поверхности переключения переходный процесс, описываемый системой (9.2), будет несколько отличаться от оптимального. Необходимо также указать такой закон переключения, который осуществлял бы не только стабилизацию (вообще говоря, неустойчивой) системы, но и обеспечивал бы достаточно высокое качество регулирования. С этой целью определим закон изменения величины α следующим образом. Рассмотрим две плоскости:

$$\left. \begin{aligned} R_1(x, y, z) &= Ax + By + z = 0, \\ R_2(x, y, z) &= Ax + By + z - \theta(x + Ty) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

где A, B, θ, T — положительные постоянные, и разобьем трехмерное фазовое пространство на четыре области. Область G_1 определим как область, в которой выполнено $x > 0$ и одна из пар неравенств

а) $R_1 > 0, R_2 > 0$, б) $R_1 > 0, R_2 \leq 0$, в) $R_1 \leq 0, R_2 > 0$. Область G_2 определим неравенствами $x < 0, R_1 > 0, R_2 > 0$. Область, в которой $x < 0$ и выполняется одна из пар неравенств

а) $R_1 < 0, R_2 < 0$, б) $R_1 \geq 0, R_2 < 0$, в) $R_1 < 0, R_2 \geq 0$, обозначим через G_3 . Через G_4 , наконец, обозначим область, где $x > 0, R_1 < 0, R_2 < 0$. На рис. 14 области G_1 и G_2 расположены над поверхностью переключения, а области G_3 и G_4 — под поверхностью. Полагаем далее $\alpha = -1$ в областях G_2 и G_4 и $\alpha = 1$ в области G , являющейся объединением областей G_1 и G_3 с той частью плоскости $x = 0$, в которой $R_1 R_2 < 0$. Очевидно, закон изменения величины α при $x \neq 0$ может быть задан формулой

$$\alpha = \text{sign} [(R_1 + R_2) \text{sign } x + |R_1 - R_2|]. \quad (9.4)$$

Таким образом, рассматриваемая система является системой с двойным переключением.

При переходе через плоскость $x = 0$ величина α , очевидно, меняет свой знак, если $R_1 R_2 > 0$, и не меняет своего значения, если $R_1 R_2 < 0$. Поверхность переключения, изображенную на рис. 14, составленную из частей S_1 и S_2

плоскости $R_1=0$ и частей S_2, S_4 плоскости $R_2=0$, будем называть в дальнейшем поверхностью S .

На поверхности S около линий N_1N_3, N_2N_4 выделяются секторы $L_iON_i, i=1, 2, 3, 4$, в которых траектории системы (9.2) «прошивают» поверхность S , но легко показать, что углы этих секторов путем выбора достаточно большого K можно сделать как угодно малыми. Во всех остальных точках поверхность S является поверхностью скольжения. Плоскость $x=0$, как следует из первого уравнения системы (9.2), является «прошиваемой» плоскостью.

Пусть величины A и B будут заданы так, что выполняются условия

$$0 < A < B^2/4. \quad (9.5)$$

Определим величины θ и T из (9.3) неравенствами

$$A < \theta < -\mu_2 B, \quad \mu_1 \leq -T^{-1} \leq \mu_2, \quad (9.6)$$

где μ_1, μ_2 — корни уравнения

$$\mu^2 + B\mu + A = 0. \quad (9.7)$$

Ниже будет показано, что неравенства (9.6) всегда могут быть удовлетворены.

Теорема 9.1. Если выполнены условия (9.5) и (9.6), то можно выбрать такое число $K_0 > 0$, что при $K > K_0$ и при выполнении закона переключения (9.4) всякое решение системы (9.2) будет обладать свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Доказательство этой теоремы складывается из следующих этапов. Сначала показывается, что любая точка M фазового пространства попадает на поверхность S . Дальнейшее поведение этой точки зависит от того, на какую часть поверхности она попадет, т. е. на плоскость $R_1=0$ или на плоскость $R_2=0$. Если точка M попадет на плоскость $R_1=0$ (части S_1 или S_3 поверхности S ; см. рис. 14) в область скольжения, то ее дальнейшее движение будет определяться системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Ax - By, \quad (9.8)$$

в силу которой эта точка будет приближаться к началу координат вдоль некоторой прямой $y = \mu_2 x, R_1(x, y, z) = 0$

Если точка M попадет на плоскость $R_2=0$ (S_2 или S_4), то она будет двигаться по ней в силу системы

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-Ax-Bu+\theta(x+Tu), \quad (9.9)$$

и либо придет по сепаратрисе в начало координат, либо по кривой гиперболического типа дойдет до линии $R_1=0$, $x+Tu=0$ и перейдет на плоскость $R_1=0$, либо дойдет до сектора прошиваемости N_2OL_2 или N_4OL_4 . В последнем случае точка M , сойдя с поверхности S , обязательно снова попадет на нее, но уже на часть S_1 или S_3 плоскости $R_1=0$ и именно на ту часть, где существует скольжение, следовательно, точка M будет двигаться к началу координат. Доказательство всех этих положений дается ниже.

1. Покажем сначала, что параметры A , B , θ , T можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства (9.5) и (9.6). Действительно, возьмем произвольную пару положительных чисел A и B , удовлетворяющих неравенству (9.5). При этом имеем

$$(B/2 - A/B)^2 > B^2/4 - A > 0.$$

Отсюда

$$|B/2 - A/B| > (B^2/4 - A)^{1/2}. \quad (9.10)$$

Но $B/2 - A/B > A/B > 0$, а потому соотношение (9.10) можно переписать в виде

$$B/2 - A/B > (B^2/4 - A)^{1/2}, \text{ откуда } A < -\mu_2 B.$$

Значит, можно выбрать θ так, что

$$A < \theta < -\mu_2 B, \quad (9.11)$$

но так как $\mu_1 < \mu_2 < 0$, то неравенство

$$\mu_1 \leq -T^{-1} \leq \mu_2 \quad (9.12)$$

тоже выполнено, причем $T > 0$.

Поскольку неравенства (9.5) и (9.6) осуществимы, то в дальнейшем они всюду считаются выполненными.

2. Перейдем к доказательству попадания изображающей точки системы (9.2) на одну из частей S_i ($i=1, 2, 3, 4$) поверхности переключения,

Обозначения S_1 и S_3 применяются для частей плоскости $R_1=0$, принадлежащих поверхности переключения S и расположенных соответственно в полупространствах $x > 0$ и $x < 0$.

Части плоскости $R_2=0$, принадлежащие поверхности переключения S и лежащие в полупространствах $x < 0$ и $x > 0$, обозначены соответственно через S_2 и S_4 .

Каждая из областей G_1 и G_3 разбивается на две части плоскостью, составленной из интегральных кривых системы (9.2) при $\alpha = 1$.

Уравнение этой интегральной плоскости имеет вид

$$(\alpha^2 + \beta^2)x - 2\alpha y + z = 0, \quad (9.13)$$

где α и β — вещественная и мнимая части комплексных корней характеристического уравнения:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c + K = 0. \quad (9.14)$$

Наличие пары комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) и вещественного отрицательного корня $-\lambda$ ($\lambda > 0$) для уравнения (9.14) при достаточно больших K следует из формул Кардана. Из этих же формул следует, что при K , стремящемся к бесконечности, величины α , β и λ тоже стремятся к бесконечности.

Области G_2 и G_4 пересекаются интегральной плоскостью системы (9.2) при $\alpha = -1$.

Уравнение этой плоскости имеет вид

$$(\gamma^2 + \delta^2)x - 2\gamma y + z = 0, \quad (9.15)$$

где γ и δ — вещественная и мнимая части корней уравнения

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c - K = 0 \quad (9.16)$$

Наличие пары комплексных корней $\gamma \pm i\delta$ ($\gamma < 0$, $\delta > 0$) и вещественного положительного корня μ для уравнения (9.16) при достаточно больших K также следует из формул Кардана. Очевидно, при K , стремящемся к бесконечности, величины γ , δ , и μ также стремятся к бесконечности.

Рассмотрим в области G_3 точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, расположенную выше интегральной плоскости (9.15).

Решение, соответствующее взятой начальной точке, имеет следующий вид:

$$x = c_1 e^{\mu t} + \varphi_1(t), \quad y = c_1 \mu e^{\mu t} + \varphi_2(t), \quad z = c_1 \mu^2 e^{\mu t} + \varphi_3(t), \quad (9.17)$$

где

$$c_1 = [(\gamma^2 + \delta^2)x_0 - 2\gamma y_0 + z_0]((\mu - \gamma)^2 + \delta^2)^{-1},$$

$$x_0 = x(0), \quad y_0 = y(0), \quad z_0 = z(0),$$

$$\varphi_i(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как $c_1 > 0$ для рассматриваемой точки M_0 , то при $t \rightarrow \infty$ будем иметь $x(t) \rightarrow \infty$. Таким образом, точка $M(t)$, двигаясь с ростом t по траектории, либо попадет на часть S_2 поверхности переключения, либо выйдет на плоскость $x = 0$ в той ее части, где $y \geq 0$.

Если же точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит в области G_2 ниже интегральной плоскости (9.15), то для нее имеем $c_1 < 0$. В этом случае изображающая точка $M(t)$ не может выйти из области G_2 через плоскость $x = 0$.

Действительно, точка $M(t)$ может выйти из области G_2 через плоскость $x = 0$ лишь в той ее части, которая заключена между следами плоскостей $R_1 = 0$ и (9.15); уравнения этих прямых запишутся в виде $z + By = 0$ и $z = 2\gamma y$, где $B < -2\gamma$ при достаточно больших значениях K .

Легко видеть, что в указанной части плоскости $x = 0$ имеем $\dot{x} = y < 0$ и, следовательно, x не может перейти из области $x < 0$ в область $x > 0$.

Подсчитаем теперь изменение функции $R_1(x, y, z) = Ax + By + z$ вдоль траектории точки $M(t)$. Согласно формулам (9.17) можно записать

$$R_1(t) = c_2 e^{\mu t} (A + B\mu + \mu^2) \varphi(t),$$

где $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Так как $c_2 < 0$, $\mu > 0$ и $A + B\mu + \mu^2 > 0$, то значение $R_1(t)$ из области положительных значений ($R_1(0) > 0$) с ростом t перейдет в область отрицательных значений, а это означает, что точка $M(t)$ при некотором конечном значении t , не выходя из области G_2 , попадет либо на часть S_2 плоскости $R_2 = 0$, либо на часть S_3 плоскости $R_1 = 0$.

Если, наконец, начальная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит интегральной плоскости (9.15), то изображающая точка $M(t)$, двигаясь по спирали в плоскости (9.15), попадет при

некотором конечном значении t на часть S_3 поверхности переключения.

Итак, для начальных точек M_0 , лежащих в области G_2 ниже интегральной плоскости (9.15), изображающая точка $M(t)$ при некотором конечном значении t , не выходя из области G_2 , попадает на одну из частей S_2 или S_3 поверхности переключения.

Для начальных точек M_0 , лежащих в области G_2 на интегральной плоскости (9.15), изображающая точка $M(t)$ при некотором конечном значении t попадает на часть поверхности переключения S_3 .

Если же начальная точка M_0 лежит в области G_2 выше интегральной плоскости (9.15), то изображающая точка $M(t)$ с ростом t либо попадает на часть S_2 , либо выходит на плоскость $x=0$ в той ее части, где $y \geq 0$.

3. Пусть теперь начальная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит области G_1 . Если изображающая точка $M(t)$ с ростом t не покидает область G_1 , то соответствующее этой начальной точке решение может быть записано в виде

$$x(t) = a_1 e^{-\lambda t} + e^{\alpha t} (a_2 \cos \beta t + a_3 \sin \beta t). \quad (9.18)$$

Легко видеть, что при $a_2 \neq 0$, т. е. когда точка M_0 не принадлежит интегральной прямой $x = -y/\lambda = z/\lambda^2$ системы, действующей в области G_1 ; точки этой прямой при $t \rightarrow \infty$ стремятся к началу координат, изображающая точка $M(t)$ попадет при некотором значении t на плоскость $x=0$, если она до этого не попала ни на одну из частей S_1 и S_4 поверхности переключения.

Таким образом, остается рассмотреть только те точки M_0 , для которых изображающая точка $M(t)$ с ростом t может покинуть область G_1 , пересекая плоскость $x=0$.

Допустим, что точка $M(t)$ покидает область G_1 , пересекая плоскость $x=0$ между прямыми $z + (B - \theta T)y = 0$ и $z + By = 0$, т. е. попадает в область G_3 . Тогда она за конечное время попадет на часть S_3 поверхности переключения.

Действительно, пусть точка $M(t)$ попадает в область G_3 выше интегральной плоскости (9.13). Тогда в согласии с формулой (9.18), точка $M(t)$ за конечный промежуток времени должна покинуть область G_3 . Поскольку траектория точки

$M(t)$ при выходе из области G_3 не может пересечь ни плоскость $x=0$, ни интегральную плоскость (9.13), то она неизбежно при конечном значении t пересекает часть S_3 поверхности переключения.

В случае, когда точка $M(t)$ покидает область G_1 , пересекая плоскость $x=0$ между прямыми $z + By = 0$ и $z - 2\gamma y = 0$, по доказанному ранее, она, не выходя из области G_3 , попадет на одну из частей S_2 или S_3 поверхности S .

Если же изображающая точка $M(t)$, покидая область G_1 , попадает на плоскость $x=0$ между прямой $z - 2\gamma y = 0$ и осью z , то она может вернуться в область G_1 , пересекая плоскость $x=0$ при $y \geq 0$. Поэтому рассмотрим далее движение оси z вдоль траектории системы (9.2) при $\alpha=1$, действующей в области G_1 . Поскольку эта система линейна, то для любого момента t образ оси z является прямой линией. Если эта прямая не попадает ни на одну из частей S_1 и S_4 поверхности переключения, то она в некоторый момент t снова окажется в плоскости $x=0$ и займет положение $z = ky$, где $k < 0$.

Покажем, что при достаточно большом K имеет место неравенство $k > 2\gamma$, т. е. полупрямая $z = ky$ при $y < 0$ лежит ниже полупрямой $z = 2\gamma y$. Отсюда будет следовать, что любая точка плоскости $x=0$, у которой $y \geq 0$, переходя с ростом t с плоскости $x=0$ в область G_1 , либо попадет на одну из частей S_1 или S_4 поверхности переключения, либо выйдет из области G_1 , пересекая плоскость $x=0$ между прямыми $z + (B - \theta T)y = 0$ и $z - 2\gamma y = 0$, а тогда, согласно приведенным выше рассуждениям, она за конечное время попадет на одну из частей S_2 или S_3 поверхности переключения.

Для получения оценки для k найдем в выражении (9.18) значения произвольных постоянных a_1, a_2, a_3 , учитывая начальные условия $x(0)=0, y(0)=0, z(0)=z_0$. Очевидно, получим

$$a_1 = \frac{z_0}{\Delta}, \quad a_2 = -\frac{z_0}{\Delta}, \quad a_3 = \frac{\alpha + \lambda}{\beta \Delta} z_0, \quad (9.19)$$

где $\Delta = (\alpha + \lambda)^2 + \beta^2$. Значение момента T — времени встречи образа оси z с плоскостью $x=0$, является корнем уравнения

$$e^{-(\alpha + \lambda)T} - \cos \beta T + \frac{\alpha + \lambda}{\beta} \sin \beta T = 0. \quad (9.20)$$

Используя равенства (9.19), найдем значения $y = \dot{x}$ и $z = \ddot{x}$, как функции времени

$$y(t) = \frac{z_0}{\Delta} \left[-\lambda e^{-\lambda t} + e^{\alpha t} \left(\lambda \cos \beta t + \frac{\alpha^2 + \alpha\lambda + \beta^2}{\beta} \sin \beta t \right) \right],$$

$$z(t) = \frac{z_0}{\Delta} \left\{ \lambda^2 e^{-\lambda t} + e^{\alpha t} \left[(\alpha^2 + 2\alpha\lambda + \beta^2) \cos \beta t + \frac{\alpha^2(\alpha + \lambda) + \beta^2(\alpha - \lambda)}{\beta} \sin \beta t \right] \right\}.$$

Используя уравнение (9.20), получим $y(T) = \frac{z_0}{\beta} e^{\alpha T} \sin \beta T$ и

$$z(T) = \frac{z_0}{\beta} e^{\alpha T} [\beta \cos \beta T + (\alpha - \lambda) \sin \beta T],$$

откуда следует

$$k = \frac{z(T)}{y(T)} = \beta \operatorname{ctg} \beta T + \alpha - \lambda. \quad (9.21)$$

Введем обозначение $\beta T = r$, $\sigma = \frac{\alpha + \lambda}{\beta}$ и изучим функцию $F(r) = f_1(r) - f_2(r)$, где $f_1(r) = e^{-\sigma r}$ и $f_2(r) = \cos r - \sigma \sin r$. Нуль функции $F(r)$ соответствует значению r точки пересечения графиков функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$. Очевидно, имеем $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Значения производных этих функций при $r = 0$ совпадают, т. е. графики функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ имеют в этой точке общую касательную. Кроме того, поскольку $f_1''(r) = \sigma^2 e^{-\sigma r} > 0$ всюду, то график функции $f_1(r)$ вогнут и расположен для всех значений r выше касательной к графику в точке при $r = 0$. С другой стороны, имеем $\operatorname{sign} f_2''(r) = -\operatorname{sign} f_2(r)$ для всех r .

Поэтому для значений r из интервала $(0, r_1)$, где r_1 — нуль функции $f_2(r)$, график функции $f_2(r)$ является выпуклым и расположен ниже указанной касательной. Легко проверить, что следующий нуль функции $f_2(r)$, $r = r_2$ удовлетворяет неравенству $r_2 > \pi$, т. е. на интервале (r_1, r_2) эта функция принимает отрицательные значения, а ее график расположен ниже оси r . Поэтому, по крайней мере на интервале $(0, r_2)$, имеем $f_1(r) > f_2(r)$. Пересекутся же графики этих функций лишь на интервале $(r_2, \frac{3}{2}\pi)$, поскольку $f_2\left(\frac{3}{2}\pi\right) > f_1\left(\frac{3}{2}\pi\right)$. Итак, первый положительный нуль функции $F(r)$ лежит на интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, а это означает, что наименьший положитель-

ный корень уравнения (9.20) расположен в интервале $\pi/\beta < T < 3\pi/2\beta$. Но из (9.21) немедленно следует неравенство $k = \beta \operatorname{ctg} \beta T + \alpha - \lambda > \alpha - \lambda$. В силу формул Кардана получим

$$\alpha - \lambda = \frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{2}{3} a, \quad 2\gamma = -u_2 - v_2 - \frac{2}{3} a,$$

где

$$u_1 = (-q_1 + \sqrt{q_1^2 + p_1^3})^{1/3}, \quad v_1 = (-q_1 - \sqrt{q_1^2 + p_1^3})^{1/3},$$

$$u_2 = (-q_2 + \sqrt{q_2^2 + p_2^3})^{1/3}, \quad v_2 = (-q_2 - \sqrt{q_2^2 + p_2^3})^{1/3},$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c + K \right], \quad q_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c - K \right].$$

Очевидно, при $K \rightarrow \infty$ имеем $u_1 \rightarrow 0$, $v_1 \rightarrow -\infty$, $u_2 \rightarrow \infty$, $v_2 \rightarrow 0$, причем u_2 и v_2 имеют одинаковый порядок роста. Отсюда следует, что при достаточно большом значении K будет выполнено неравенство:

$$\frac{u_1 + v_1}{2} + u_2 + v_2 > 0,$$

которое и обеспечит нам требуемое соотношение $k > 2\gamma$.

Заметим теперь, что если начальная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ расположена в области G_1 ниже интегральной плоскости (9.13), то ее изображающая точка за конечное время, не выходя из области G_1 , попадает на часть S_1 поверхности переключения. Действительно, в этом случае точка $M(t)$, в согласии с формулой (9.18), должна выйти из области G_1 . Но, выходя из области G_1 , она не может пересечь ни плоскости $x=0$ (так как в момент попадания на плоскость $x=0$ для нее оказалось бы, что $\dot{x} = y > 0$), ни (в силу теоремы единственности) интегральной плоскости (9.13). Поэтому выйти из области G_1 точка $M(t)$ может только через часть S_1 поверхности S .

Можно показать, что на частях S_i ($i=1, 2, 3, 4$) поверхности переключения имеются секторы прошиваемости.

Если точка $M(t)$ попадет в сектор прошиваемости, принадлежащий части S_3 , то она прошьет поверхность переключения S и окажется в области G_3 ниже интегральной плоскости (9.15), а поэтому за конечное время попадет на одну из частей S_2 или S_3 , причем в случае попадания на часть S_3 точка оказывается в области скольжения.

4. Исследуя знак полной производной от функции $R_1(x, y, z)$, взятой в силу каждой из систем (9.2), убеждаемся в том, что при $A - B^2 + aB - b \neq 0$ (в случае равенства нулю указанного выражения плоскость $R_1 = 0$ является для системы (9.2) плоскостью скольжения) на частях S_1 и S_3 поверхности переключения имеются секторы прошиваемости, заключенные между плоскостью $x = 0$ и одной из плоскостей

$$(AB - aA + c \pm K)x = (A - B^2 + aB - b)y. \quad (9.22)$$

Поступив аналогичным образом с функцией $R_3(x, y, z)$, убедимся в том, что при $A - \theta - (B - \theta T)^2 + (B - \theta T)a - b \neq 0$ (т. е. когда для плоскости $R_3 \neq 0$ не выполнено условие скольжения; см. § 3) на частях S_3 и S_4 поверхности переключения имеются секторы прошиваемости, заключенные между плоскостью $x = 0$ и одной из плоскостей

$$\begin{aligned} [(A - \theta)(B - \theta T) - a(A - \theta) + c \pm K]x = \\ = [A - \theta - (B - \theta T)^2 + (B - \theta T)a - b]y. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Выбор знака K в уравнения плоскостей (9.22) и (9.23) зависит от знаков коэффициентов при y в этих уравнениях.

Углы секторов прошиваемости при достаточном увеличении можно сделать как угодно малыми.

Попав на какую-либо из частей S_1 или S_3 поверхности переключения в область скольжения, изображающая точка $M(t)$ движется по поверхности переключения S в силу уравнения

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = 0 \quad (9.24)$$

до тех пор, пока не попадет в сектор прошиваемости. Поведение интегральных кривых уравнения (9.24) на фазовой плоскости определяется корнями μ_1 и μ_2 характеристического уравнения (9.7). В силу неравенств $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$ начало координат для уравнения (9.24) суть особая точка узел. В силу тех же неравенств любая точка фазовой плоскости, двигаясь по своей траектории, при $t \rightarrow \infty$ стремится попасть в начало координат. При этом все траектории, за исключением интегральной прямой $y = \mu_1 x$, в начале координат касаются интегральной прямой $y = \mu_2 x$.

Попав на какую-либо из частей S_3 или S_4 поверхности переключения в область скольжения, изображающая точка $M(t)$ движется по поверхности переключения S в силу уравнения

$$\ddot{x} + (B - \theta T)\dot{x} + (A - \theta)x = 0 \quad (9.25)$$

до тех пор, пока не попадет в сектор прошиваемости. Поведение интегральных кривых уравнения (9.25) на фазовой плоскости определяется корнями характеристического уравнения

$$\lambda^3 + (B - \theta T)\lambda + A - \theta = 0. \quad (9.26)$$

В силу условий (9.5) и (9.6) имеем

$$\lambda_1 = -\frac{B - \theta T}{2} - \left(\frac{(B - \theta T)^2}{4} + \theta - A\right)^{1/2} < 0, \quad (9.27)$$

$$\lambda_2 = -\frac{B - \theta T}{2} + \left(\frac{(B - \theta T)^2}{4} + \theta - A\right)^{1/2} > 0. \quad (9.28)$$

Поэтому начало координат для уравнения (9.25) является особой точкой типа седло.

Если точка $M(t)$ движется по интегральной прямой $y = \lambda_1 x$, то при $t \rightarrow \infty$ она стремится попасть в начало координат. Если же точка $M(t)$ движется по интегральной прямой $y = \lambda_2 x$, то при $t \rightarrow \infty$ она уходит в бесконечность.

Из условий (9.5) и (9.6) следует, что

$$-T^{-1} \geq \lambda_1, \quad (9.29)$$

причем знак равенства в соотношении (9.29) достигается тогда и только тогда, когда он достигается справа или слева в системе неравенств

$$\mu_1 \leq -T^{-1} \leq \mu_2. \quad (9.30)$$

Опишем движение точки, попавшей в область скольжения на поверхности переключения.

Из равенств (9.28) и (9.29) следует, что интегральная прямая $y = \lambda_2 x$ уравнения (9.25) не принадлежит поверхности переключения. В силу неравенств (9.30) интегральная прямая $y = \mu_1 x$ уравнения (9.24) либо не принадлежит поверхности переключения, либо совпадает с прямой $x + Ty = 0$, принадлежащей этой поверхности.

Из того же неравенства (9.30) следует, что интегральная прямая $y = \mu_2 x$ уравнения (9.24) принадлежит поверхности переключения и может совпасть с прямой $x + Ty = 0$, принадлежащей этой поверхности.

Если точка $M(t)$ попала на какую-либо из частей S_2 или S_4 поверхности переключения в область скольжения между прямыми $x = 0$ и $y = \lambda_1 x$, то она за конечное время попадает в

сектор прошиваемости. Если же она попала на какую-либо из частей S_2 или S_4 между прямыми $y = \lambda_1 x$ и $Ty + x = 0$ (при $-T^{-1} > \lambda_1$), то она за конечное время попадает на прямую $Ty + x = 0$, прошивает ее и продолжает двигаться уже по части S_3 или S_1 , стремясь при $t \rightarrow \infty$ попасть в начало координат.

При попадании в область скольжения на какую-либо из частей S_1 или S_3 поверхности переключения, точка $M(t)$, не сходя с этой части, движется по S и при $t \rightarrow \infty$ стремится попасть в начало координат.

Б. Для исследования поведения точки $M(t)$, попавшей на сектор прошиваемости какой-либо из частей S_2 или S_4 поверхности переключения, в системе (9.2) произведем замену переменных

$$t = \rho\tau, \quad X = x, \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho^2 z, \quad (9.31)$$

где $\rho = K^{-1/3}$. Тогда получим систему

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = Z, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -aX + \rho(-aZ - \rho b Y - \rho^2 c X); \quad (9.32)$$

здесь ρ играет роль малого параметра, если считать значение K достаточно большим. При такой замене переменных плоскости $R_1 = 0$ и $R_2 = 0$ перейдут соответственно в плоскости

$$r_1 = A\rho^3 X + B\rho Y + Z = 0$$

и

$$r_2 = -(A - \theta)\rho^3 X + (B - \theta T)\rho Y + Z = 0.$$

При этом области G и G_i перейдут соответственно в области Q и Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$), причем в новых областях величины X , r_1 и r_2 удовлетворяют таким же неравенствам, что и x , R_1 и R_2 в прежних областях.

Пусть начальная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит сектору прошиваемости системы (9.2), расположенному на части S_2 поверхности переключения. При замене переменных (9.31) точка M_0 перейдет в точку $L_0(X_0, Y_0, Z_0)$, причем $X_0 < 0$, $Y_0 > 0$ и

$$Z_0 = (A - \theta)\rho^3 X_0 - (B - \theta T)\rho Y_0 < 0. \quad (9.33)$$

Уравнение (9.23) в новых координатах имеет вид

$$[(A - \theta)(B - \theta T)\rho^3 - a(A - \theta)\rho^3 + c\rho^3 \pm 1] X = \rho^3 [A - \theta - (B - \theta T)^2 + (B - \theta T)a - b] Y. \quad (9.34)$$

Из формулы (9.34) видно, что X_0/Y_0 есть малая величина порядка ρ^2 . Из соотношения (9.33) следует, что Z_0/Y_0 есть малая величина порядка ρ .

Для взятой начальной точки L_0 имеем:

$$qX(\tau) = re^{-\nu\tau} + e^{\sigma\tau} \{ [(\nu^2 + 2\sigma\nu)X_0 + 2\sigma Y_0 - Z_0] \cos \psi\tau + \\ + \psi^{-1} [\nu(\psi^2 - \sigma\nu - \sigma^2)X_0 + (\psi^2 - \nu^2 - \sigma^2)Y_0 + \\ + (\nu + \sigma)Z_0] \sin \psi\tau \},$$

$$qY(\tau) = -\nu re^{-\nu\tau} + e^{\sigma\tau} \{ [\nu(\sigma^2 + \psi^2)X_0 + \\ + (\sigma^2 + \psi^2 + \nu^2)Y_0 + \nu Z_0] \cos \psi\tau + \psi^{-1} [-\nu(\sigma + \nu)(\sigma^2 + \\ + \psi^2)X_0 + \sigma(-\psi^2 + \nu^2 - \sigma^2)Y_0 + (\sigma^2 + \psi^2 + \sigma\nu)Z_0] \sin \psi\tau \},$$

$$qZ(\tau) = \nu^2 re^{-\nu\tau} + e^{\sigma\tau} \{ [-\nu^2(\sigma^2 + \psi^2)X_0 + 2\sigma\nu^2 Y_0 + \\ + (\sigma^2 + \psi^2 + 2\sigma\nu)Z_0] \cos \psi\tau + \psi^{-1} [-\nu(\sigma^2 + \psi^2)(\sigma^2 + \psi^2 + \\ + \sigma\nu)X_0 + [-(\sigma^2 + \psi^2)^2 + \nu(\sigma^2 - \psi^2)]Y_0 + \\ + [(\sigma^2 - \psi^2)\nu + \nu(\nu^2 + \psi^2)]Z_0] \sin \psi\tau \}.$$

Здесь $q = (\sigma + \nu)^2 + \psi^2$, $r = (\sigma^2 + \psi^2)X_0 - 2\sigma Y_0 + Z_0$ и при $\rho \rightarrow 0$ имеем $\nu \rightarrow 1$, $\sigma \rightarrow 0,5$, $\varphi \rightarrow \sqrt{3}/2$.

Уравнение (9.22) в новых координатах имеет вид

$$\rho^2 m Y - (1 + \eta\rho^3) X = 0,$$

где $m > 0$ и η — постоянные. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$p(\tau) = \rho^2 m Y(\tau) - (1 + \eta\rho^3) X(\tau).$$

Уравнения

$$X(\tau) = 0,$$

$$r_1(\tau) = r_1(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) = 0,$$

$$r_2(\tau) = r_2(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) = 0,$$

$$p(\tau) = 0,$$

соответственно представим в виде

$$e^{-(\nu + \sigma)\tau} = p_0 \cos(\psi\tau - \varphi_0), \quad (9.35)$$

$$e^{-(\nu + \sigma)\tau} = p_1 \cos(\psi\tau + \varphi_1), \quad (9.36)$$

$$e^{-(\nu + \sigma)\tau} = p_2 \cos(\psi\tau + \varphi_2), \quad (9.37)$$

$$e^{-(\nu + \sigma)\tau} = p_3 \cos(\psi\tau - \varphi_3). \quad (9.38)$$

Здесь $p_i \rightarrow 2$, а $\varphi_i \rightarrow \pi/3$ при $\rho \rightarrow 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

Обозначим соответственно, через $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ наименьшие положительные нули уравнений (9.35) — (9.38).

Легко проверить, что $1 - p_0 \cos \varphi_0 > 0$ и $1 - p_3 \cos \varphi_3 > 0$ суть малые величины порядка ρ^2 , а $1 - p_1 \cos \varphi_1 < 0$ суть малая величина порядка ρ . Отсюда следует, что величины τ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) удовлетворяют неравенствам

$$0 < \tau_0 < \tau_3 < \tau_1 < \tau_2. \quad (9.39)$$

Возвращаясь к старым переменным, в согласии с неравенствами (9.39) заключаем, что траектория точки M_0 , принадлежащей сектору прошиваемости на части S_2 поверхности переключения, при $x_0 < 0$, не выходя из области G , в некоторый конечный момент t попадает в область скольжения на части S_1 поверхности S .

Если же $X_0 = 0$, то $p(\tau)$ обратится в нуль раньше, чем $r_1(\tau)$, а $r_1(\tau)$ обратится в нуль раньше, чем $X(\tau)$ и $r_2(\tau)$. Поэтому и в случае $x_0 = 0$ траектория точки M_0 за конечное время, не выходя из области G , пересечет часть S_1 поверхности переключения в области скольжения.

Отсюда следует, что траектории начальных точек M_0 области G_2 , выходящие из области G_2 в область G_1 ниже интегральной плоскости (9.13), за конечное время t , не выходя из области G_1 , попадают на часть S_1 поверхности S в область скольжения.

Итак, доказано, что для каждой начальной точки M_0 , принадлежащей замыканиям областей G_1 и G_2 , изображающая точка $M(t)$, двигаясь в силу уравнений системы (9.2), при $t \rightarrow \infty$ стремится попасть в начало координат.

Для областей G_3 и G_4 можно провести аналогичные рассуждения, а потому для любой начальной точки M_0 , взятой в трехмерном пространстве, изображающая точка $M(t)$, двигаясь в силу уравнений системы (9.2), при $t \rightarrow \infty$ стремится к началу координат. Теорема доказана.

Проверка задачи на модели МН-14 показала, что при $c = 0$ и положительных значениях b значение величины θ несущественно влияет на качество переходного процесса. Поэтому оказалось желательным искать другие пути улучшения динамических свойств рассматриваемых систем. Одним из таких путей оказался прием форсирования скользящих режимов в системах с переменной структурой.

§ 10. Система с форсированным скользящим режимом

Достаточно высокая скорость протекания переходного процесса в системах с переменной структурой обеспечивается отчасти за счет понижения размерности фазового пространства системы, так как переходу в скользящий режим соответствует переход движения точки фазового пространства в движение по некоторой поверхности скольжения, имеющей низшую размерность.

Естественной кажется мысль ускорить протекание процесса скольжения путем организации нового скольжения вдоль поверхности еще более низкой размерности. Таким образом, понижая последовательно размерность поверхности скольжения, мы должны на конечном этапе получить движение вдоль некоторой одномерной линии. К указанным соображениям приводит также рассмотрение оптимальных систем, так как характерным для протекания оптимального процесса является также последовательное понижение размерности многообразий, по которым движется точка фазового пространства.

Очевидно, процесс скольжения описывается системой дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Так как уравнение поверхности скольжения после обычного перехода от координат к производным переходит в дифференциальное уравнение, описывающее процесс скольжения, то отсюда следует, что для наличия скольжений более высоких порядков, основная ($n - 1$)-мерная поверхность скольжения должна быть разрывной.

Таким образом, организация чистого (идеального) скольжения более высокого порядка оказывается невозможной. Можно получить только неидеальное скольжение, характеризующее наличием быстрых движений точки фазового пространства в окрестности поверхности разрыва. Пренебрегая этими быстрыми колебаниями и фиксируя внимание на медленном движении точки фазового пространства, можем свести рассмотрение процесса неидеального скольжения к рассмотрению процесса идеального скольжения, описываемого уравнением более низкого порядка.

Таким образом, всякий режим неидеального скольжения рассматривается нами как режим идеального скольжения с точностью до быстрых движений. С этой точки зрения основную исследуемую систему дифференциальных уравнений

при $K \rightarrow \infty$. Коэффициенты c_{ik} при $k \neq 1$ предполагаются постоянными, причем $c_{k, n-k+1} = 1$, при $k = 1, \dots, n$. В некоторых случаях закон изменения c_{01} может быть упрощен, а цепочка соотношений (10.2) укорочена. Это делается путем выполнения требования $\sigma_r = x_1$ для некоторого r , $1 \leq r < n$. Полагаем в этом случае $c_{r1} = b_r(K) = 1$ и $c_{mk} = 0$ при $m = r + 1, \dots, n$.

Произведем в системе (10.1) замену времени $t = \mu\tau$, где $\mu = [b_0(K)]^{-1}$ играет роль малого параметра. Новая система будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= \mu x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{d\tau} &= -|x_1| \operatorname{sign} \sigma_1 - \mu \sum_{k=2}^n c_{0k} x_k. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

При $\mu = 0$ получим уравнение

$$\frac{dx_n}{d\tau} = -|x_1| \operatorname{sign} \sigma_1, \quad (10.4)$$

описывающее быстрое движение системы. Это уравнение в совокупности с условиями

$$x_i = x_i^0 = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (10.5)$$

выделяет в системе координату x_n , имеющую более быстрое изменение по сравнению с остальными координатами. Предположим сначала, что $x_1^0 \neq 0$. В силу уравнения (10.4) точка фазового пространства совершает быстрое движение по прямой (10.5) к точке, определяемой уравнением $\sigma_1 = 0$ или, что то же самое, уравнением

$$x_n = -c_{11}x_1^0 - \dots - c_{1, n-1}x_{n-1}^0. \quad (10.6)$$

Заметим, что здесь величина c_{11} , зависящая от x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 , является постоянной, поэтому уравнение (10.6) для данных начальных значений точно определяет предельную величину переменной x_n .

Не производя пока полного анализа движения изображающей точки в силу (10.1), можем сделать вывод, что медленное движение точки фазового пространства этой системы будет совершаться вблизи или на поверхности (10.6). Отсюда

следует, что уравнение

$$x_1^{(n-1)} + c_{1, n-1} x_1^{(n-2)} + \dots + c_{11} x_1 = 0, \quad (10.7)$$

эквивалентное системе

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{k=1}^{n-1} c_{1k} x_k, \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

приближенно описывает медленное движение системы (10.1).

Таким образом, при достаточно большом значении K систему (10.8) можно рассматривать как систему, описывающую скольжение первого порядка.

Рассматривая теперь систему (10.8) как исходную, и применяя к ней аналогичные рассуждения, в частности, заменяя время $t = \mu_1 \tau$, где $\mu_1^{-1} = b_1(K)$, получим систему, подобную системе (10.8):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-3, \\ \dot{x}_{n-2} &= - \sum_{k=1}^{n-2} c_{2k} x_k, \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

описывающую скольжение второго порядка.

Скольжение m -го порядка описывается системой

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-m-1, \\ \dot{x}_{n-m} &= - \sum_{k=1}^{n-m} c_{m, k} x_k. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

В частности, скольжение $n-1$ -го порядка определяется уравнением

$$\dot{x}_1 = -x_1. \quad (10.11)$$

Заметим еще раз, что переход от системы $(n-m+1)$ -го порядка к системе $(n-m)$ -го порядка, описывающей скольжение m -го порядка, происходит в результате некоторой идеализации движения, состоящей в рассмотрении движения с точностью до быстро меняющихся компонент.

2. Чтобы предыдущие рассуждения не были формальными, необходимо рассмотреть более подробно две проблемы. Нужно показать, что скользящий режим существует, и показать, что

система начиная с некоторого момента времени входит в скользкий режим. Остановимся сначала на вопросе существования скольжения.

Чтобы поверхность $\sigma_1 = 0$ (в точках, где $\sigma_2 \neq 0$) была поверхностью скольжения системы (10.1), необходимо выполнение в точках поверхности соотношений

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow +0} \dot{\sigma}_1 < 0, \quad \lim_{\sigma_1 \rightarrow -0} \dot{\sigma}_1 > 0. \quad (10.12)$$

Из уравнений (10.1) и (10.2) получим

$$\dot{\sigma}_1 = -c_{01}x_1 + (c_{11} - c_{02})x_2 + \dots + (c_{1, n-1} - c_{0n})x_n.$$

Чтобы условия (10.12) выполнялись, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$b_0(K) |x_1| > |(c_{11} - c_{02})x_2 + \dots + (c_{1, n-1} - c_{0n})x_n|.$$

Таким образом, скольжение отсутствует в той части поверхности $\sigma_1 = 0$, где выполнено неравенство:

$$b_0(K) |x_1| < |(c_{11} - c_{02})x_2 + \dots + (c_{1, n-1} - c_{0n})x_n|.$$

При достаточно большом K это будет узкий сектор, содержащий внутри себя многообразие $\sigma_1 = 0$, $x_1 = 0$, назовем его сектором прошиваемости. Дойдя до границы сектора прошиваемости, точка фазового пространства сходит с поверхности $\sigma_1 = 0$ с тем, чтобы быстро вернуться на нее. Таким образом, мы получаем здесь быстрое движение и, следуя нашей методике, можем им пренебречь. Дойдя до поверхности $\sigma_1 = 0$, точка фазового пространства снова начинает совершать быстрые движения от одной части поверхности $\sigma_1 = 0$ (при $c_{11} > 0$) к другой (при $c_{11} < 0$). Это будет скольжение второго порядка, которое детально рассмотрено ниже.

Рассуждение о существовании скользкого режима, проведенное для системы (10.1), разумеется, справедливо и для системы (10.10). Таким образом, доказываем существование у системы (10.1) скольжений всех порядков от первого до $(n - 1)$ -го включительно.

3. Задача доказательства попадания точки фазового пространства на поверхность $\sigma_i = 0$ осложняется тем обстоятельством, что коэффициенты, входящие в уравнения этих поверхностей, могут быть неположительными. Более того,

коэффициенты c_{i1} при $i = 1, \dots, n - 2$, являются знакопеременными.

Из уравнения (10.4) следует, что если $x_1^0 \neq 0$ и $\sigma_1 > 0$, то величина x_n убывает до тех пор, пока величина σ_1 не станет равной нулю. Если же $\sigma_1 < 0$, то величина x_n будет возрастать снова до тех пор, пока не получим равенство $\sigma_1 = 0$. Так как попадание изображающей точки на поверхность $\sigma_1 = 0$ происходит за конечный промежуток времени, то аналогичный вывод можно сделать и для полной системы (10.3), если только в процессе движения выполнено неравенство $|x_1^0| > \varepsilon$. Если же выполнено неравенство $|x_1^0| < \varepsilon$, где ε — достаточно малое число, то цель процесса регулирования следует считать достигнутой.

Аналогичное рассуждение можно провести и для любой из систем (10.10).

Более детальное обсуждение проблемы попадания изображающей точки на поверхность переключения будет проведено для системы третьего порядка в следующем параграфе.

4. Рассмотрим теперь более подробно движения системы (10.1), сопутствующие скольжению первого порядка. Ранее было показано, что эти движения описываются уравнением (10.4) в совокупности с условиями $x_i = x_i^0 = \text{const}$ при $i = 1, \dots, n - 1$. На оси переменной x_n рассмотрим точки

$$\sigma_1^+ = x_n + b_1(K) x_1^0 + c_{12} x_2^0 + \dots + c_{1,n-1} x_{n-1}^0 = 0,$$

$$\sigma_1^- = x_n - b_1(K) x_1^0 + c_{12} x_2^0 + \dots + c_{1,n-1} x_{n-1}^0 = 0.$$

Очевидно, что при достаточно большом K точки $\sigma_1^+ = 0$ и $\sigma_1^- = 0$ находятся по разные стороны от точки $x_n = 0$.

Величина $\sigma_2(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ при рассмотрении быстрых движений является постоянной величиной. Для определенности будем считать, что $x_1^0 > 0$ и $\sigma_2(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) > 0$. В точках оси x_n , где выполнено неравенство $\sigma_1^- > 0$, имеем также $\sigma_1^+ > 0$ и поэтому $\sigma_1 > 0$. В области $\sigma_1^+ < 0$ соответственно получим $\sigma_1 < 0$. Если же выполнены одновременно неравенства $\sigma_1^+ > 0$ и $\sigma_1^- < 0$, то, учитывая, что $\sigma_2 > 0$, из соотношений (10.2) получим $\sigma_1 = \sigma_1^+$ и, следовательно, в этой области $\sigma_1 > 0$. Таким образом, в области $\sigma_1^+ > 0$ действует уравнение

$$\frac{dx_n}{d\tau} = -x_1^0,$$

а в области $\sigma_1^+ < 0$ действует уравнение

$$\frac{dx_n}{d\tau} = x_1^0.$$

Из любого положения на прямой Ox_n точка M движется в силу уравнения (10.4) до положения $\sigma_1^+ = 0$, которое является в данном случае положением равновесия.

Если выполнено неравенство $\sigma_2(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) < 0$, то положением равновесия будет точка $\sigma_1^- = 0$. Если же $x_1^0 < 0$, то точки σ_1^- и σ_1^+ поменяют свое положение относительно начала координат и картина останется прежней.

Так как x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 в действительности медленно меняются, то медленно движется и положение равновесия, однако в момент, когда $\sigma_2(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ или x_1^0 меняет знак, положение равновесия мгновенно меняет свою координату, т. е. переходит из точки $\sigma_1^+ = 0$ в точку $\sigma_1^- = 0$ или наоборот. Изображающая точка при этом меняет свое направление движения от прежнего положения равновесия к новому. Таким образом, в заключительной стадии движения изображающая точка совершает колебания между положениями $\sigma_1^+ = 0$ и $\sigma_1^- = 0$. Заметим, что амплитуда рассматриваемых колебаний будет уменьшаться.

В самом деле, координата x_n положения равновесия линейно зависит от остальных медленно меняющихся координат x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 . Изменение этих координат описывается приближенно системой (10.8). Если система (10.8) устойчива, то и точки $\sigma_1^+ = 0, \sigma_1^- = 0$ будут медленно совершать движение к нулевой точке. Таким образом, из устойчивости системы (10.8) следует устойчивость системы (10.1).

Все проведенные здесь рассуждения справедливы для любой системы вида (10.10). Так как процесс, описываемый уравнением (10.11), устойчив, то, рассматривая последовательно системы возрастающего порядка, убедимся в устойчивости системы (10.1).

5. Ранее мы определили скольжение второго порядка как движение, описываемое системой (10.9). Система (10.9) была получена в результате игнорирования быстрых движений системы (10.8), описывающей скольжение первого порядка. Представляет интерес изучение скольжения второго порядка не косвенным образом, а непосредственно в фазовом пространстве системы (10.1) с учетом быстрых движений. С этой

целью проведем в системе (10.1) замену координат $y_i = x_i$, ($i = 1, \dots, n-1$), $y_n = \nu x_n$, $t = \nu \tau$, $\nu^{-2} = b_0(K)$. Новая система примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{d\tau} &= \nu y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \frac{dy_{n-1}}{d\tau} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{d\tau} &= -\nu c_{0n} y_n - \nu^2 \sum_{k=2}^{n-2} c_{0k} y_k - |y_1| \operatorname{sign} \sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Предположим далее, что $\lim_{K \rightarrow \infty} b_1^-(K) b_0^{-1}(K) = 0$. При $\nu = 0$ получаем систему второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_{n-1}}{d\tau} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{d\tau} &= -|y_1^0| \operatorname{sign} \sigma_1, \quad y_i = y_i^0 = \text{const} \quad \text{при } i = 1, \dots, n-2, \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

описывающую быстрые движения. Поверхность $\sigma_1 = 0$ изобразится на плоскости (y_{n-1}, y_n) линией, составленной из полупрямых

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^+ &= y_n + \nu c_{1,n} y_{n-1} + \nu \left(\sum_{k=2}^{n-2} c_{1k} y_k^0 + b_1(K) y_1^0 \right) = 0, \\ \sigma_1^- &= y_n + \nu c_{1,n} y_{n-1} + \nu \left(\sum_{k=2}^{n-2} c_{1k} y_k^0 - b_1(K) y_1^0 \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

При K достаточно большом прямые $\sigma_1^+ = 0$ и $\sigma_1^- = 0$ лежат по разные стороны от начала координат. Поверхности $\sigma_2 = 0$ будет соответствовать линия, составленная из отрезков прямых

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2^+ &= y_{n-1} + b_2(K) y_1^0 + \sum_{k=2}^{n-2} c_{2k} y_k^0 = 0, \\ \sigma_2^- &= y_{n-1} - b_2(K) y_1^0 + \sum_{k=2}^{n-2} c_{2k} y_k^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Очевидно, при K достаточно большом линии $\sigma_2^+ = 0$ и $\sigma_2^- = 0$ лежат по разные стороны от начала координат.

Пусть для определенности $y_1^0 > 0$. Величина $\sigma_3(y_1^0, \dots, y_{n-2}^0)$ постоянна и поэтому имеет определенный знак или равна нулю. Пусть $\sigma_3(y_1^0, \dots, y_{n-2}^0) > 0$. Из соотношений (10.2) следует, что в этом случае $\sigma_2(y_1^0, \dots, y_{n-1}) \equiv \equiv \sigma_2^+(y_1^0, \dots, y_{n-1})$.

Таким образом, имеем $\sigma_1 > 0$ в области $\sigma_1^- > 0$ и в области $\sigma_1^+ > 0$, $\sigma_2^+ > 0$. Следовательно, в этих областях действует система

$$\frac{dy_{n-1}}{d\tau} = y_n, \quad \frac{dy_n}{d\tau} = -y_1^0. \quad (10.17)$$

В области $\sigma_1^+ < 0$ и в области $\sigma_1^- < 0$, $\sigma_2^+ < 0$ действует система

$$\frac{dy_{n-1}}{d\tau} = y_n, \quad \frac{dy_n}{d\tau} = y_1^0.$$

Таким образом, линия переключения системы (10.4) является ломаной $ABCEF$ (рис. 15). Если $\sigma_3(y_1^0, \dots, y_{n-2}^0) < 0$, то линией переключения будет ломаная $ABDEF$.

На рис. 15 показан вид интегральной кривой системы (10.14) в случае $\sigma_3 > 0$, $y_1^0 > 0$, $c_{1,2}y_2^0 + \dots + c_{1,n-2}y_{n-2}^0 < < 0$.

Точка M , двигаясь по параболе в силу системы (10.16), попадает на прямую CF и скользит по ней до точки C . Из точки C движение далее происходит по параболе в силу системы (10.17) до точки r_1 , лежащей на прямой $\sigma_2^+ = 0$. В точке P_1 происходит переключение и в дальнейшем движение происходит по предельному циклу $P_1P_2CP_3$.

Мы описали сейчас быстрое движение системы. Диаметр рассматриваемого предельного цикла, очевидно, является величиной одинакового порядка малости с ν . Кроме того, с (медленным) убыванием величин y_1^0, \dots, y_{n-2}^0 вдоль траек-

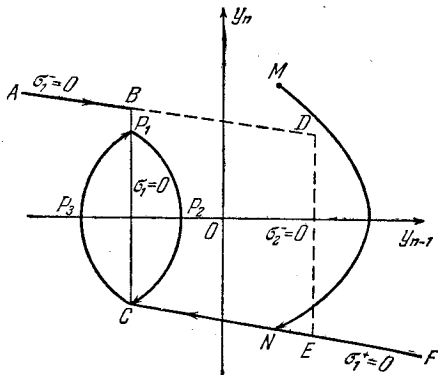


Рис. 15.

тории диаметр предельного цикла также убывает. Отсюда следует, что если система (10.9), описывающая скольжение второго порядка, устойчива, то будет устойчивой и система (10.1).

§ 11. Пример системы третьего порядка с форсированным скользящим режимом

1. Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} + cx = -\alpha Kx, \quad (11.1)$$

эквивалентное системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -cx - by - az - \alpha Kx. \quad (11.2)$$

Пусть параметры a , b , c , K будут произвольными постоянными, причем коэффициент K положителен.

Величину α определим по формуле

$$\alpha = \text{sign} [xA \text{sign} x (y + Dx) + By + z] x, \quad (11.3)$$

где A , B , D — положительные постоянные.

Таким образом, величина α может изменить знак на одной из плоскостей:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad T(x, y) = y + Dx = 0, \\ R_1(x, y, z) = Ax + By + z = 0, \\ R_2(x, y, z) = -Ax + By + z = 0. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Поверхность переключения составлена из плоскости $x = 0$, поверхности S , которая состоит из частей S_1 , S_3 плоскости $R_1 = 0$, частей S_2 и S_4 плоскости $R_2 = 0$, и частей T_1 и T_2 плоскости $T(x, y) = y + Dx = 0$ (рис. 16). Точки поверхности S , для которых $y + Dx \neq 0$, удовлетворяют, очевидно, уравнению

$$R(x, y, z) = Ax \text{sign} x (y + Dx) + By + z = 0. \quad (11.5)$$

Поверхность S и плоскость $x = 0$ делят фазовое пространство на четыре области, G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , определяемые соответственно неравенствами

$$\begin{aligned} \text{область } G_1: \quad & x > 0, \quad R > 0 \\ \text{область } G_2: \quad & x < 0, \quad R > 0, \\ \text{область } G_3: \quad & x < 0, \quad R < 0, \\ \text{область } G_4: \quad & x > 0, \quad R < 0. \end{aligned}$$

Очевидно, имеем $\alpha = 1$ в областях G_1 и G_3 и $\alpha = -1$ в областях G_2 и G_4 .

На поверхности S вблизи прямой N_1ON_3 , по которой пересекаются плоскости $R_1=0$, $R_2=0$ и $x=0$, выделяются секторы L_1OL_2 и L_3OL_4 , в которых траектории системы (11.2) «прошивают» поверхность S . Можно показать, что путем выбора достаточно большого K углы этих секторов можно сделать как угодно малыми. Во всех остальных точках поверхность S является поверхностью скольжения. Плоскость $x=0$ является «прошиваемой» плоскостью.

2. Теорема 11.1.
Если параметры A, B, D положительны и $K \geq K_0$, где K_0 — достаточно большое число, то все решения системы (11.2) обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Наибольший интерес представляет поведение траекторий в случае, когда выполнены неравенства

$$B^2 - 4A < 0, \quad D < 0,5(B + \sqrt{B^2 + 4A}). \quad (11.6)$$

Этот случай, являющийся наиболее трудным, мы и рассмотрим подробно в дальнейшем. Типичное поведение траектории при выполнении неравенств (11.6) описывается следующим образом. Произвольная точка фазового пространства либо попадает через конечный промежуток времени на поверхность S , либо за бесконечный промежуток времени непосредственно в начало координат. Если точка M попадет на части S_1 или S_3 поверхности S , то в дальнейшем она будет двигаться в силу системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Ax - By \quad (11.7)$$

по спиралевидной кривой, пока не дойдет до плоскости $T=0$. Пройдя плоскость $T=0$, точка M должна попасть, например,

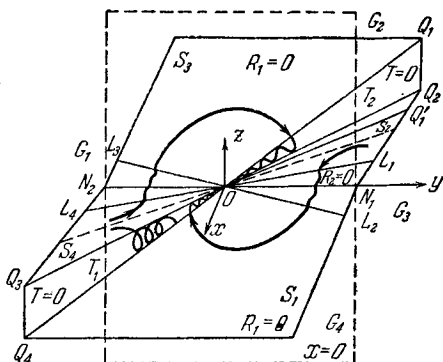


Рис. 16.

с части S_3 на часть S_2 , а с части S_1 на часть S_4 . На частях S_2 и S_4 плоскости $R_2=0$ действует система

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=Ax - By, \quad (11.8)$$

и если K достаточно велико, то точка M пойдет по кривой гиперболического типа снова к плоскости $T=0$. Однако, пройдя эту плоскость, точка снова попадет в область притяжения плоскости $R_1=0$. Таким образом, переходя с одной стороны плоскости $T=0$ на другую и колеблясь между плоскостями $R_1=0$ и $R_2=0$, точка M придет в начало координат, т. е. мы получаем неидеальный скользящий режим движения точки M по поверхности S . В плоскости $T=0$ существует прямая линия

$$y + Dx = 0, \quad z + Dy = 0, \quad (11.9)$$

которая, в некотором смысле, направляет движение изображающей точки к началу координат.

В некоторых случаях при выполнении неравенств (11.6) движение изображающей точки в заключительной стадии может происходить по-иному. Дойдя по поверхности S_3 до плоскости $T=0$, точка M сойдет с нее, но может не дойти до части S_2 , а повернуть вокруг линии (11.9) обратно к S_3 . В этом случае точка M , быстро вращаясь вокруг линии (11.9), будет асимптотически приближаться к началу координат.

Ниже дается подробное обоснование высказанных сейчас положений.

3. Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть для определенности точка M в начальный момент времени лежит в области G_1 . Покажем сначала, что с ростом t точка M попадет на поверхность S .

Из доказательства теоремы 9.1 второй главы следует, что с ростом времени точка M либо попадет на плоскость $R_1=0$, а следовательно, на часть S_1 или S_4 поверхности S , либо на плоскость $x=0$. В последнем случае точка M выйдет в область G_2 . Область G_2 пересекается интегральной плоскостью системы (11.2) при $\alpha=-1$ на две части. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$(\gamma^2 + \delta^2)x - 2\gamma y + z = 0, \quad (11.10)$$

где γ и δ — вещественная и мнимая части корней уравнения

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c - K = 0, \quad (11.11)$$

При K достаточно большом уравнение (11.11) имеет пару комплексных корней $\gamma \pm i\delta$ ($\gamma < 0$, $\delta > 0$) и вещественный положительный корень μ . Очевидно, с ростом K неограниченно растут и величины $|\gamma|$, δ , μ . Если точка M лежит выше интегральной плоскости (10.10), то с ростом t она выйдет на плоскость $x=0$ (при $y < 0$) или попадет на плоскость $R_2=0$, т. е. на части S_2 или S_4 поверхности S .

Если же точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит ниже плоскости (11.10), то нетрудно показать, что M не может выйти из области G_2 через плоскость $x=0$. Справедливость этих утверждений вытекает из доказательства теоремы 9.1.

С другой стороны, легко видеть, что вдоль траектории точки M имеем

$$R_2(x, y, z) = c_0 e^{\mu t} (\mu^2 + B\mu - A) + \varphi(t), \quad (11.12)$$

где $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и

$$c_0 = [(\gamma^2 + \delta^2)x_0 - 2\gamma y_0 + z_0][(\mu - \gamma)^2 + \delta^2]^{-1}.$$

Так как величина $\mu^2 + B\mu - A$ при K достаточно большом является положительной, то величина $R_2(x, y, z)$ необходимо должна перейти из области положительных значений ($R_2(x_0, y_0, z_0) > 0$) в область отрицательных значений. Таким образом, точка M либо попадет на часть S_2 или S_3 поверхности S , либо выйдет на плоскость $x=0$ при $y \geq 0$. Но в последнем случае в § 9 доказано, что точка M , попав в область G_1 , необходимо должна попасть на плоскость $R_1=0$, т. е. либо на части S_1 , S_4 поверхности S , либо на часть T_1 плоскости $T=0$.

Итак, любая точка фазового пространства необходимо попадает на поверхность S .

4. Рассмотрим далее движение точки M по поверхности S , предполагая выполненными неравенства (11.6).

Так как $B^2 - 4A < 0$, то точка O для системы (11.7) является особой точкой типа «фокус», а для системы (11.8) — особой точкой типа «седло».

Из второго неравенства (11.6) следует, что одна из сепаратрис системы (11.8) лежит на частях S_2 и S_4 поверхности S .

Таким образом, легко устанавливается характер движения точки по поверхности S до тех пор, пока точка не дойдет до плоскости $T=y + Dx=0$ или до секторов прошиваемости L_1OL_2 , L_3OL_4 . В последнем случае точка M ,

оторвавшись от поверхности S , снова попадает на нее по другую сторону сектора, причем величина отклонения точки от S с ростом K становится как угодно малой (см. § 7 второй главы).

Остается рассмотреть поведение точек, попавших на плоскость $T=0$, т. е. на одну из линий OQ_i ($i=1,2,3,4$; рис. 16). Допустим, для определенности, что точка M лежит на линии OQ_1 .

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (11.6) след плоскости $z + Dy = 0$ на плоскости $T=0$ лежит в секторе, образованном следами плоскостей $R_1=0$ и $R_3=0$. Поэтому вдоль траектории движения точки M величина \dot{T} меняет знак и движение является существенно криволинейным.

Опираясь на метод малого параметра, можно показать путем рассуждений, приведенных в § 10, что движение изображающей точки в заключительной стадии будет происходить по некоторой спиралевидной кривой, охватывающей прямую (11.9); это движение и будет скольжением второго порядка. Таким образом, скольжение второго порядка осложнено быстрыми движениями вокруг прямой (11.9). Игнорирование быстрых движений приведет к идеализации скольжения второго порядка, и мы получим уравнение $\dot{x} + Dx = 0$, описывающее идеальное скольжение второго порядка.

Б. Остановимся кратко на описании остальных случаев, когда хотя бы одно из неравенств (11.6) не выполняется. Если выполнено неравенство

$$B^2 - 4A \geq 0, \quad (11.13)$$

то начало координат для системы (11.7) будет особой точкой типа «узел». Если наряду с (11.13) выполнено неравенство

$$D < 0,5(B + \sqrt{B^2 + 4A}), \quad (11.14)$$

то часть точек S_1 и S_3 будет входить в начало координат вдоль прямой

$$y = -0,5(B - \sqrt{B^2 - 4A})x, \quad R_1 = 0, \quad (11.15)$$

а остальные точки снова будут попадать на плоскость $y + Dx = 0$ и совершать в дальнейшем к точке O скользящее движение точно такого же типа, какое мы рассматривали ранее.

Если наряду с (11.13) выполнено условие

$$D \geq 0,5(B + \sqrt{B^2 + 4A}), \quad (11.16)$$

то все точки поверхности S будут завершать свое движение к началу координат вдоль прямой (11.15).

Если наряду с (11.16) выполнено неравенство $B^2 - 4A < 0$, то «второе скольжение» не будет иметь места. В этом случае изображающая точка, попав, например, на часть S_3 , доходит до линии OQ_1 . Если K — достаточно большая величина, то линия OQ_1 целиком далее переходит в линию OQ'_1 , лежащую как угодно близко к линии OQ_2 . В самом деле, след плоскости $Dy + z = 0$ на плоскости $T = 0$ лежит в этом случае вне сектора, образованного следами плоскостей $R_1 = 0$, $R_2 = 0$. В области $T_1 \geq 0$, $R_2 > 0$, $x < 0$ действует неустойчивая система, так как $\alpha = -1$. Величина \dot{T} вдоль траектории движения не меняет знак. Поэтому при K достаточно большом переход точки M с линии OQ_1 на линию OQ'_1 можно считать совершающимся по некоторой прямой.

Попав на линию OQ'_1 , изображающая точка M будет скользить по части S_2 до тех пор, пока не дойдет до сектора прошиваемости L_1OL_2 . Попав на линию OL_1 , изображающая точка сойдет с поверхности S и через малый промежуток времени (сравнить с § 7) снова попадет на поверхность S , но уже на часть S_1 .

Заметим, что если бы проекция точки M на плоскости (x, y) двигалась в силу системы (11.7), то за время Δt она попала бы на линию $D_1x + y = 0$ (с точностью до малых $o(K^{-1})$). Этот факт подсказывает следующую интерпретацию движения по поверхности S : поверхность $R = 0$ непрерывна, $R = R_1(x, y, z)$ и знак A меняется не на плоскости $T = 0$, а на плоскости $T' = D_1x + y = 0$.

Если пренебречь в этом случае ошибкой одинакового порядка с K^{-2} , то движение точки по поверхности S можно описать системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -By - \alpha_1 Ax, \quad \alpha_1 = \text{sign } x(y + D_1x). \quad (11.17)$$

Производная по времени функции $v = Ax^2 + y^2$, взятая в силу системы (11.17), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -2By^2 + 2A(1 - \alpha_1)xy = \\ &= \begin{cases} -2By^2 & \text{при } (D_1x + y)x \geq 0, \\ -2By^2 - 4A|xy| & \text{при } (D_1x + y)x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, функция $v(x, y)$ удовлетворяет условиям

теоремы 12.2 первой главы, из которой следует асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения системы (11.17). Впрочем, справедливость нашей теоремы в данном случае вытекает из непосредственного качественного исследования поведения траекторий на поверхности S . Заметим, что в этом случае изображающая точка движется к точке O по спиралевидной кривой, отклоняющейся незначительно от S в секторах L_1OL_2 , L_3OL_4 .

Заметим, наконец, что доказанную теорему можно было бы трактовать как теорему об асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия. Ради математической строгости

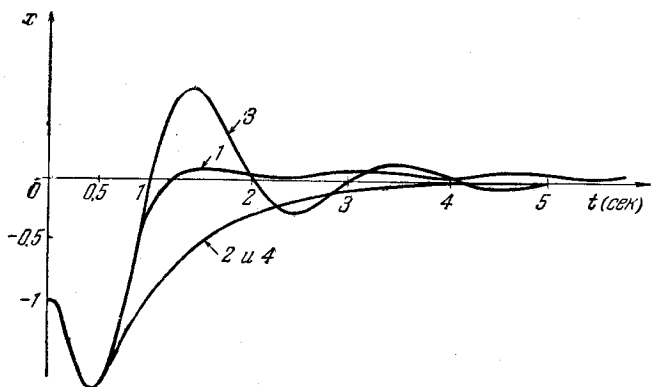


Рис. 17.

можно было бы в этом случае показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число δ такое, что из $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < \delta^2$ следовало бы при $t > 0$ $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leq \varepsilon^2$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — решение системы (11.2), определяемое начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$.

Однако доказательство этого факта мы опускаем, заметим только, что это доказательство можно было бы провести точно так же, как это сделано в § 8 второй главы.

На рис. 17 приводятся графики переходных процессов, полученные на модели МН-14, при следующих значениях параметров: $a=0$, $b=0$, $c=1$, $K=100$. Кривая (1) соответствует значениям параметров $A=12$, $B=2$, $D=2,34$. Очевидно, в этом случае выполняются оба неравенства (11.6). Кривая (2) соответствует случаю, когда выполняются нера-

венства (11.13) и (11.14); здесь принято $A=10$, $B=10$, $D=5$. Кривая (4) совпадает с кривой (2), так как она получена при $A=10$, $B=10$, $D=20$. Изменение D обеспечило в этом случае выполнение неравенств (11.13) и (11.16), однако не отразилось на протекании переходного процесса, что вполне соответствует выводам, приведенным выше, так как в обоих рассмотренных случаях движение завершается вдоль прямой (11.15).

Наконец, кривая (3) соответствует значениям $A=10$, $B=2$, $D=10$. В этом случае выполнены неравенства $B^2 - 4A < 0$ и (11.16), следовательно, скольжение второго порядка отсутствует.

Таким образом, только переходный процесс, изображенный кривой (1), соответствует процессу с наличием скольжения второго порядка. Из сравнения указанных кривых следует вывод о значительных преимуществах систем переменной структуры с форсированным скользящим режимом.

ГЛАВА III

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Банахово пространство

1. Рассмотрим некоторое множество E , в котором введены две операции: сложение элементов и умножение на число. Пусть эти операции удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения),
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения),
- 3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ } (дистрибутивность умножения относительно сложения),
- 4) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ }
- 5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативность умножения),
- 6) существует в E такой (нулевой) элемент 0 , что $0x = 0$,
- 7) $1 \cdot x = x$.

Предположим далее, что для каждого элемента x из E определено неотрицательное число $\|x\|$, называемое *нормой* элемента x . Пусть норма x удовлетворяет следующим условиям:

- a) $\|x\| = 0$ эквивалентно $x = 0$,
- b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность нормы),
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Если в множестве E введены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие условиям 1—7 и если, кроме того, определено в соответствии с условиями а, б, с понятие нормы, то множество E назовем *линейным нормированным* пространством.

Простейшим примером линейного нормированного пространства может служить пример конечномерного вектор-

ного пространства. Примеры введения нормы в этом пространстве были приведены в § 1 первой главы.

Нормированное линейное пространство E назовем *полным*, если из $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, ($m, n \rightarrow \infty$) следует сходимость по норме последовательности $\{x_n\}$ к некоторому элементу x_0 этого пространства. Полное линейное нормированное пространство будем называть *банаховым* пространством или *B-пространством*.

Рассмотрим два линейных нормированных пространства E_1 и E_2 . Пусть на некотором подмножестве X пространства E_1 определена некоторая функция $F(x)$ со значениями в пространстве E_2 , иначе говоря, пусть задано некоторое отображение $F(x)$ множества X в пространство E_2 . Отображение $F(x)$ будем называть в дальнейшем *оператором*. В частном случае пространства E_1 и E_2 могут совпадать. Оператор, отображающий E_1 на числовую ось, называется *функционалом*.

Оператор $F(x)$ называется *линейным*, если он является аддитивным и однородным, т. е. если выполняется соотношение

$$F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2),$$

где α, β — скалярные величины.

Оператор $F(x)$ называется *непрерывным*, если он каждую сходящуюся (по норме в E_1) последовательность элементов переводит также в сходящуюся (по норме в E_2) последовательность элементов. Оператор $F(x)$ называется *ограниченным*, если он переводит каждое ограниченное (по норме) множество в ограниченное множество.

Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен ([71]). Для линейного непрерывного оператора F можно указать такое положительное число K , что для всех элементов $x \in E_1$, на которых оператор F определен, имеет место неравенство

$$\|F(x)\| \leq K \|x\|. \quad (1.1)$$

Наименьшее из чисел K , при которых выполняется неравенство (1.1), называется *нормой* оператора F и обозначается через $\|F\|$. В дальнейшем для линейного оператора будет часто использоваться запись $F(x) = Fx$.

Легко видеть, что норма линейного ограниченного оператора может быть определена соотношением

$$\|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Fx\|. \quad (1.2)$$

2. Известно, что линейный оператор, действующий в конечномерном векторном пространстве E_n , может быть задан матрицей. Таким образом, соотношение (1.2) может служить определением нормы матрицы, эта норма согласована с некоторым заданным способом введения нормы в пространстве E_n . Рассмотрим примеры определения нормы матрицы A , преобразующей векторное пространство E_n в свою часть.

Пример 1. Пусть норма вектора в n -мерном векторном пространстве E_n определяется формулой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad (1.3)$$

и пусть A — квадратная $n \times n$ — матрица с элементами a_{ik} . Легко видеть, что

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right)^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} (A^*Ax, x).$$

В силу неравенства (10.3) первой главы величина $\|A\|^2$ равна в этом случае наибольшему собственному числу квадратичной формы (A^*Ax, x) . Заметим также, что для нормы матрицы A имеет место в рассматриваемом случае простая оценка

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Пример 2. Пусть норма вектора задается формулой

$$\|x\| = \max_i |x_i|. \quad (1.5)$$

Имеем, очевидно,

$$\|Ax\| = \sup_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \|x\| \sup_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| = L \|x\|.$$

Таким образом, $\|A\| \leq \sup_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| = L$.

Покажем теперь, что $\|A\| \geq L$. Рассмотрим такое i_0 , для которого $\sum_{k=1}^n |a_{i_0 k}| = L$, и рассмотрим вектор $x^0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, где $x_k^0 = \text{sign } a_{i_0 k}$. Легко видеть, что $\|x^0\| = 1$ и $\|A\| \geq \|Ax^0\| = \sum_{k=1}^n |a_{i_0 k}| = L$. Таким образом, имеем в этом случае

$$\|A\| = \sup_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|. \quad (1.6)$$

Пример 3. Зададим норму вектора формулой

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (1.7)$$

Покажем, что для нормы матрицы A справедливо соотношение:

$$\|A\| = \sup_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|. \quad (1.8)$$

В самом деле легко видеть, что

$$\|Ax\| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \|x\| \sup_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Таким образом, $\|A\| \leq \sup_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = M$.

Пусть k_0 — то значение индекса, для которого $M = \sum_{i=1}^n |a_{ik_0}|$. Рассмотрим вектор \bar{x} с проекциями $x_i = 0$ при $i \neq k_0$ и $x_{k_0} = 1$. Очевидно, имеем $\|\bar{x}\| = 1$ и, кроме того,

$$\|A\| \geq \|A\bar{x}\| = \sum_{i=1}^n |a_{ik_0}| = M.$$

3. Рассмотрим теперь случай, когда E — линейное нормированное пространство и B — банахово пространство. Рассмотрим совокупность всех линейных операторов, переводя-

ших пространство E в пространство B ; эту совокупность будем обозначать символом $[E \rightarrow B]$. Пусть F_1 и F_2 — операторы из $[E \rightarrow B]$. По определению, $F = F_1 + F_2$, если для любого $x \in E$ имеем $Fx = F_1x + F_2x$. Линейные операторы можно также умножать. Пусть E_1, E_2, E_3 — линейные нормированные пространства и пусть $F \in [E_1 \rightarrow E_2]$ и $\Phi \in [E_2 \rightarrow E_3]$. Под произведением операций F и Φ будем понимать оператор ΦF , переводящий E_1 в E_3 по правилу $\Phi F(x) = \Phi(F(x))$, где $x \in E_1$.

Легко видеть, что справедливо неравенство

$$\|\Phi F\| \leq \|\Phi\| \|F\|.$$

Если в пространстве $[E \rightarrow B]$ ввести норму согласно (1.2), то можно показать, что пространство $[E \rightarrow B]$ будет полным линейным нормированным пространством, т. е. банаховым пространством.

В дальнейшем нам понадобятся следующие теоремы:

Теорема 1.1 (Банаха—Штейнхауса) ([71]). *Если последовательность линейных ограниченных операций $\{F_n\}$, переводящих банахово пространство E_1 в линейное нормированное пространство E_2 , ограничена в каждой точке, т. е. если*

$$\sup_n \|F_n x\| < \infty,$$

то нормы этих операций ограничены в совокупности $\|F_n\| \leq M < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$).

Теорема 1.2 (принцип сжатых отображений ([72])). *Пусть оператор F переводит шар T банахова пространства в себя и пусть выполнено условие*

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\|,$$

где $0 < \alpha < 1$.

Уравнение $F(x) = x$ имеет в шаре T единственное решение x^ , которое может быть найдено методом последовательных приближений.*

4. Пусть на числовой оси задана функция $x(t)$ со значениями в банаховом пространстве E .

Следуя обычным правилам, можно дать определение производной и интеграла от функции $x(t)$.

Так, например, производная (по Фреше) функции $x(t)$ в точке t_0 может быть определена по правилу

$$\dot{x}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0},$$

если указанный предел (в смысле сходимости по норме) существует. Определенный интеграл (по Бохнеру) от функции $x(t)$ определим как предел интегральных сумм вида

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x(\tau_k)(t_{k+1} - t_k),$$

где $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$, $t_k \leq \tau_k \leq t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, при условии, что $n \rightarrow \infty$ и $\sup_k |t_{k+1} - t_k| \rightarrow 0$.

Если указанный предел существует и не зависит ни от способа деления отрезка $[\alpha, \beta]$ на частичные отрезки, ни от способа выбора точек τ_k на частичных отрезках, то будем говорить, что интеграл от функции $x(t)$ по отрезку $[\alpha, \beta]$ существует, и будем обозначать этот интеграл символом

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt.$$

Перейдем теперь к понятию полной вариации абстрактной функции $g(t)$, принимающей значения в E .

Рассмотрим снова промежуток $[\alpha, \beta]$ оси t и всевозможные разбиения этого промежутка $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ на конечное число частичных интервалов. По определению, величина

$$\sup \sum_{k=0}^{n-1} \|g(t_{k+1}) - g(t_k)\| = \bigvee_{\alpha}^{\beta} g(t),$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям отрезка $[\alpha, \beta]$, называется *полной вариацией функции* $g(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. В данном определении можно, конечно, полагать $\beta = \infty$. В этом случае будем считать, что функция $g(t)$ имеет ограниченное изменение на множестве $\alpha \leq t < \infty$, если $g(t)$ имеет ограниченное изменение в любой конечной части $[\alpha, t]$, и полные вариации $\bigvee_{\alpha}^t g(t)$ ограничены в их

совокупности. В этом случае полагаем

$$\bigvee_{\alpha}^{\infty} g(t) = \sup_{t \geq \alpha} \bigvee_{\alpha}^t g(s).$$

Известно ([73], стр. 73), что если E является банаховым пространством, то функция $g(t)$ с ограниченной вариацией может иметь не более счетного числа точек разрыва, и в любой точке промежутка $[\alpha, \beta]$ существуют ее односторонние пределы.

Дадим теперь определение интеграла Стильеса. Пусть $U(t)$ — непрерывный по t линейный оператор, переводящий элементы E в E , и пусть $g(t)$ — функция с ограниченной вариацией на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Составим интегральную сумму вида

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U(\tau_k) (g(t_{k+1}) - g(t_k)), \quad t_k \leq \tau_k \leq t_{k+1},$$

где точки t_k ($t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$) осуществляют разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$. Если существует предел S_n при $n \rightarrow \infty$, $\sup_k |t_{k+1} - t_k| \rightarrow 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ на частичные отрезки, то будем говорить, что этот предел является обобщенным интегралом Стильеса от оператора $U(t)$ по функции $g(t)$. Введем обозначение для таким образом введенного интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} U(t) dg$.

Нетрудно проверить, что имеет место неравенство

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dg \right\| \leq M \bigvee_{\alpha}^{\beta} g(t), \quad (1.9)$$

где $M = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|U(t)\|$.

Рассмотрим скалярную функцию $v(t) = \bigvee_{\alpha}^t g(t)$. Легко видеть, что имеет место также неравенство

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dg \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|U(t)\| dv, \quad (1.10)$$

где интеграл в правой части есть обычный интеграл Стильеса с интегрирующей функцией $v(t)$.

§ 2. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве

1. Пусть каждому вещественному значению t поставлен в соответствие оператор $X(x, t)$, переводящий пространство E в себя. В этом случае можно рассматривать дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = X(x, t), \quad (2.1)$$

где через \dot{x} обозначена, как обычно, производная абстрактной функции $x(t)$ по t .

Очевидно, что решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, должно быть также решением интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(x(t), t) dt. \quad (2.2)$$

Обозначим через D область $\|x - x_0\| \leq r$, $|t - t_0| \leq T$, и предположим, что в этой области операторная функция $X(x, t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица

$$\|X(x, t) - X(y, t)\| \leq L \|x - y\|. \quad (2.3)$$

В силу непрерывности $X(x, t)$ функция $\|X(x_0, t)\|$ будет ограниченной на отрезке $|t - t_0| \leq T$ и пусть $M_0 = \sup \|X(x_0, t)\|$ на этом отрезке. Из условия Липшица имеем

$$\|X(x, t)\| \leq \|X(x_0, t)\| + L \|x - x_0\| \leq M_0 + rL.$$

Таким образом, полагая $M = M_0 + rL$, получим в области D

$$\|X(x, t)\| \leq M. \quad (2.4)$$

Приведем теперь, опираясь на принцип сжатых отображений, простейший вариант теоремы существования и единственности решения уравнения (2.1).

Теорема 2.1. *Уравнение (2.1) при указанных выше условиях имеет единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$; это решение определено на интервале $|t - t_0| < rM^{-1}$.*

Для доказательства теоремы рассмотрим оператор

$$A(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t X(x(t), t) dt,$$

переводящий непрерывную функцию $x(t)$ также в непрерывную функцию. Пространство C непрерывных функций $x(t)$ с нормой

$$\|x(t)\|_C = \sup_{|t-t_0| \leq T} \|x(t)\|_E$$

будет, очевидно, банаховым пространством.

Из условия (2.3) следует

$$\|A(x(t)) - A(y(t))\|_C \leq L |t - t_0| \|x(t) - y(t)\|_C,$$

а из неравенства (2.4) получим

$$\|A(x(t)) - x_0\|_C \leq M(t - t_0).$$

Если положить $|t - t_0| < rM^{-1}$, то получим $\|A(x(t)) - x_0\|_C \leq r$ и, кроме того,

$$\|A(x(t)) - A(y(t))\|_C \leq \alpha \|x(t) - y(t)\|_C,$$

где $\alpha = rLM^{-1} = rL(M_0 + rL)^{-1} < 1$. Таким образом, оператор A переводит шар $\|x(t) - x_0\| \leq r$ банахова пространства в себя и удовлетворяет условиям теоремы 1.2.

Доказанная теорема утверждает существование решения лишь на интервале $|t - t_0| < d$, где $d = rM^{-1}$; беря конец интервала за исходную точку, можем продолжить решение и далее, однако, нет гарантии, что такое продолжение возможно на весь бесконечный промежуток времени. Очевидно, что в случае непродолжаемости траектория выходит при ограниченных значениях t за пределы любой ограниченной области пространства E .

Уточним последнее утверждение. Пусть решение $x(t)$ при $t \geq t_0$ не выходит из некоторой области G_1 , заданной неравенством $\|x - x_0\| < r_1$, где $r_1 < r$. Пусть в области G_1 , заданной неравенством $\|x - x_0\| < r$, выполнено при $t \geq t_0$ условие (2.3) и, кроме того, условие

$$\|X(x_0, t)\| \leq N < \infty. \quad (2.5)$$

Из условий (2.3) и (2.5) следует, что $\|X(x, t)\| \leq M$ при $t \geq t_0$, где $M = N + rL$.

Очевидно, в любой момент времени, пока траектория находится в области G_1 , ее можно продолжить снова на промежуток времени $d = rM^{-1}$, не зависящий от момента времени, в который мы осуществляем продолжение. Таким образом, в данном случае решение может быть продолжено на

промежуток времени $t_0 \leq t < \infty$. Итак, сейчас мы доказали следующее утверждение:

Теорема 2.2. Если в области $\|x - x_0\| \leq r < \infty$, $t \geq t_0$ выполнены условия (2.3) и (2.5), то всякая траектория, не выходящая из некоторой подобласти $\|x - x_0\| \leq r_1 < r$, продолжима на бесконечный интервал времени $t_0 \leq t < \infty$.

Приведем и другие признаки продолжаемости решений

Теорема 2.3. Пусть при $\|x\| < \infty$, $t \geq t_0$ выполнено условие

$$\|X(x, t)\| \leq L(\|x\|), \quad (2.6)$$

где $L(r)$ — непрерывная функция, обладающая свойством

$$\int_{t_0}^r \frac{dr}{L(r)} \rightarrow \infty \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Всякое решение уравнения (2.1) может быть продолжено на бесконечный интервал времени $t_0 \leq t < \infty$.

В самом деле, так как

$$\left\| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right\| \geq \left| \frac{\|x(t_2)\| - \|x(t_1)\|}{t_2 - t_1} \right|,$$

то имеем $\left\| \frac{dx}{dt} \right\| \geq \left| \frac{d\|x\|}{dt} \right|$. Отсюда следует, что $\left| \frac{d\|x\|}{dt} \right| \leq L(\|x\|)$. Беря интеграл вдоль кривой $x = x(t)$ от точки $x_0 = x(t_0)$ до точки x в сторону возрастания t , получим

$$t - t_0 \geq \int_{\|x_0\|}^{\|x\|} \frac{dr}{L(r)}. \quad (2.8)$$

Таким образом, если $\|x\| \rightarrow \infty$, то и $t \rightarrow \infty$, что означает продолжаемость решения. Если же величина $\|x\|$ остается ограниченной, то решение будет продолжаемым в силу теоремы 2.2.

Теорема 2.4 (М. А. Красносельский, С. Г. Крейн [74]). Пусть существует функционал $\Phi(x)$, обладающий свойством

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \Phi(x) = \infty, \quad \frac{d\Phi}{dt} \leq L(\Phi(x))$$

при $t \geq t_0$, где через $\frac{d\Phi}{dt}$ обозначена производная $\Phi(x)$ вдоль траекторий уравнения (2.1), а функция $L(r)$ удовлетворяет условию (2.7); тогда всякое решение уравнения (2.1) будет продолжаемым на интервале $t_0 \leq t < \infty$.

В самом деле, из условия (2.7) снова получаем (2.8). Если $\|x\| \rightarrow \infty$, то и $\Phi(x) \rightarrow \infty$, следовательно, имеем $t \rightarrow \infty$, что означает продолжаемость неограниченного решения.

Из теоремы 2.3, в частности, следует, что если в E выполнены условия (2.3) и (2.5) при $t \geq t_0$, то всякое решение уравнения (2.1) продолжаемо на полубесконечный интервал времени. Очевидно, для применения теоремы 2.3 в данном случае следует положить $L(r) = Lr + N$.

В заключение приведем теорему, которая значительно обобщает условия существования, данные в теореме 2.1.

Теорема 2.5 (М. А. Красносельский, С. Г. Крейн [74]). Пусть $X(x, t) = X_1(x, t) + X_2(x, t)$, где оператор $X_1(x, t)$ вполне непрерывен, т. е. переводит всякое ограниченное множество из D в компактное множество пространства E , а оператор $X_2(x, t)$ непрерывен в D и удовлетворяет условию

$$\|X_2(x, t) - X_2(y, t)\| \leq K(t) \|x - y\|.$$

Пусть $d > 0$, такое, что $\int_{t_0-d}^{t_0+d} K(t) dt < 1$ и

$$d [\sup_D \|X_1(x, t)\| + \sup_D \|X_2(x, t)\|] \leq r.$$

Тогда существует решение $x(t)$ уравнения (2.1), определенное на отрезке $t_0 - d \leq t \leq t_0 + d$, и такое, что $x(t_0) = x_0$.

Всюду в дальнейшем мы не будем специально оговаривать условия, обеспечивающие существование решений рассматриваемых дифференциальных уравнений, а будем всегда считать эти условия выполненными.

2. Следующая лемма является значительным обобщением леммы 1.1 первой главы.

Лемма 2.1. Пусть $u(t)$ и $f(t)$ — скалярные, неотрицательные, интегрируемые на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ функции. Пусть, кроме того, скалярная неотрицательная функция $K(t, s)$ ограничена при $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + T$.

Если имеет место неравенство

$$u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t K(t, s) u(s) ds, \quad (2.9)$$

то справедливо неравенство $u(t) \leq \psi(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, где $\psi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\psi(t) = f(t) + \int_{t_0}^t K(t, s) \psi(s) ds. \quad (2.10)$$

Лемму 2.1 докажем, следуя ([75], стр. 64), где рассмотрен случай непрерывных функций $u(t)$, $f(t)$, $K(t, s)$. Обозначив

$$Ku = \int_{t_0}^t K(t, s) u(s) ds,$$

получим из (2.9)

$$u \leq f + Kf + \dots + K^{n-1}f + K^n u. \quad (2.11)$$

Пусть $|K(t, s)| \leq M$ при $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + T$. Легко доказывается ([76], стр. 23), что

$$|K^n u| \leq \frac{M^n T^{n-1}}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t_0+T} |u(s)| ds.$$

Следовательно, $|K^n u| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и ряд $\Gamma f = f + Kf + \dots + K^{n-1}f + \dots$ сходится к решению интегрального уравнения (2.10).

Таким образом, из (2.11) имеем $u(t) \leq \psi(t)$.

Лемма 2.2 (Ю. М. Репин [77]). Пусть $u(t)$, $f(t)$ — неотрицательные интегрируемые на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ функции, L — положительная постоянная. Если выполнено неравенство

$$u(t) \leq f(t) + L \int_{t_0}^t u(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (2.12)$$

то имеет место неравенство

$$u(t) \leq f(t) + L \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} f(s) ds. \quad (2.13)$$

Справедливость леммы непосредственно вытекает из леммы 2.1. Непосредственной проверкой можно в данном случае убедиться, что функция

$$\psi(t) = f(t) + L \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} f(s) ds$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(t) = f(t) + L \int_{t_0}^t \psi(s) ds.$$

Лемма 2.3. Если при выполнении условий предыдущей леммы $f(t)$ является функцией ограниченной вариации на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, то из неравенства (2.12) следует

$$u(t) \leq f(t_0) e^{L(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} df(s), \quad (2.14)$$

где интеграл в правой части есть интеграл Стильеса. Если функция $f(t)$ дифференцируема, то справедливо неравенство

$$u(t) \leq f(t_0) e^{L(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} f'(s) ds. \quad (2.15)$$

Неравенство (2.14) вытекает непосредственно из неравенства (2.13), если воспользоваться для интеграла, стоящего в правой части этого неравенства, формулой интегрирования по частям, условия применимости которой в данном случае выполнены.

3. Рассмотрим теперь наряду с уравнением

$$\dot{x} = X(x, t) \quad (2.16)$$

уравнение

$$\dot{y} = X(y, t) + R(y, t). \quad (2.17)$$

Предположим, что в области $D: \|x\| \leq r, t_0 \leq t \leq t_0 + T$ выполнены условия

$$\|X(x, t) - X(y, t)\| \leq L \|x - y\|, \quad (2.18)$$

$$\|R(x, t)\| \leq \eta(t), \quad (2.19)$$

где $\eta(t)$ — непрерывная функция на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Пусть будут выполнены условия, которые обеспечивают в совокупности с условиями (2.18) и (2.19) существование решений уравнений (2.16) и (2.17) в рассматриваемой области. Такими условиями могут быть в силу теоремы (2.1) непрерывность операторов $X(x, t)$, $R(x, t)$ в области D и выполнение условия Липшица для $R(x, t)$, или, в силу теоремы 2.5, непрерывность $X(x, t)$ и полная непрерывность $R(x, t)$.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (2.16), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$ и $y(t)$ — решение уравнения (2.17), такое, что $y(t_0) = y_0$.

Теорема 2.6. *Справедлива оценка: при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \eta(s) ds. \quad (2.20)$$

Действительно, из интегральных уравнений

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(x, t) dt,$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t [X(y, t) + R(y, t)] dt,$$

соответствующих уравнениям (2.16) и (2.17), имеем

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t \{ \|X(x, t) - X(y, t)\| + \|R(y, t)\| \} dt.$$

Используя (2.18) и (2.19), получим

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t \eta(t) dt + L \int_{t_0}^t \|x(t) - y(t)\| dt.$$

Доказываемое неравенство следует теперь из неравенства (2.15).

Рассмотрим частные случаи:

а). Если $\eta(t) = 0$, то получаем оценку

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L(t-t_0)},$$

из которой следует факт непрерывности решения уравнения (2.16) по начальным данным.

b) Если $x_0 = y_0$ и $\eta_1(t) \leq \eta_0$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, то получаем оценку

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\eta_0}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1).$$

с) Полагая

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \eta_1(t) dt = \eta_{11},$$

получаем при $x_0 = y_0$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta_{11} \left(1 - \frac{1}{L^2} + \frac{1}{L^2} e^{L(t-t_0)}\right).$$

d) Пусть

$$\left(\int_{t_0}^{t_0+T} \eta_2^2(t) dt\right)^{1/2} = \eta_{12}.$$

Пользуясь неравенством Буняковского—Шварца, получим

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta_{12} \left(\frac{e^{2L(t-t_0)} - 1}{2L}\right)^{1/2}.$$

Полученные оценки говорят о непрерывности решения по отношению к изменению правой части уравнения (соответственно в метрике пространств C , L , L_2 ; см. § 4 данной главы).

4. Рассмотрим теперь линейное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (2.21)$$

Предположим, что оператор $A(t)$ при каждом фиксированном значении t является линейным ограниченным оператором, и операторная функция $A(t)$ непрерывна по t при $t \geq 0$.

Из теоремы 2.1 будет следовать в этом случае существование и единственность решений уравнения (2.1), а из теоремы 2.3 следует неограниченная продолжаемость всех решений этого уравнения на полубесконечный интервал времени.

Обозначим через \bar{E} пространство линейных ограниченных операторов, отображающих E в E . Известно ([71], стр. 146),

что \bar{E} будет также банаховым пространством.

Рассмотрим в \bar{E} уравнение

$$\dot{U} = A(t)U, \quad (2.22)$$

где $U(t)$ — операторная функция со значениями в \bar{E} . Пусть $U(t)$ — решение уравнения (2.22), удовлетворяющее условию $U(0) = I$. Покажем, что существует обратный оператор $U^{-1}(t)$.

Обозначим через $V(t)$ решение уравнения

$$\dot{V} = -VA(t), \quad (2.23)$$

также удовлетворяющее условию $V(0) = I$. Полагая $W_1(t) = V(t)U(t)$, находим

$$\dot{W}_1(t) = V(t)\dot{U}(t) + \dot{V}(t)U(t) = VAU - VAU = 0.$$

Следовательно, $W_1(t)$ — постоянный оператор и равен I . Пусть $W_2(t) = U(t)V(t)$; имеем

$$\dot{W}_2(t) = AUUV - UVA = AW_2 - W_2A.$$

Так как этому последнему уравнению удовлетворяет решение $W_2 = I$, то всякое другое решение, определяемое условием $W_2(0) = I$, должно в силу свойства единственности совпадать с этим решением. Таким образом, $W_2(t) = I$ и $UV = VU = I$, что и требовалось доказать.

Введем обозначение $W(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0)$. Операторную функцию $W(t, t_0)$ будем называть оператором Коши. Отметим одно важное свойство оператора Коши:

$$W(t, t_1)W(t_1, t_0) = W(t, t_0). \quad (2.24)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение уравнения (2.21), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, может быть записано в форме

$$x(t) = W(t, t_0)x_0. \quad (2.25)$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \quad (2.26)$$

где $u(t)$ — функция со значениями в E .

Решение этого уравнения можно получить по формуле Коши:

$$x(t) = W(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t, s)u(s)ds. \quad (2.27)$$

Справедливость формулы Коши также устанавливается непосредственной проверкой.

Заметим, что функция $u(t)$, как правило, в приложениях является разрывной или даже обобщенной функцией. В этих более сложных случаях формула Коши будет справедливой, если только дать более широкое толкование интегралу, стоящему в правой части формулы (2.27).

Отметим еще одно важное неравенство, которым мы воспользуемся в дальнейшем:

$$\| W(t, t_0) \| \leq \exp \int_{t_0}^t \| A(s) \| ds. \quad (2.28)$$

Справедливость этого неравенства устанавливается следующим образом. Так как имеем $\dot{W}(t, t_0) = A(t) W(t, t_0)$, и так как $\left| \frac{d}{dt} \| W(t, t_0) \| \right| \leq \left\| \frac{d}{dt} W(t, t_0) \right\|$, то получаем

$$\frac{d}{dt} \| W(t, t_0) \| \leq \| A(t) \| \| W(t, t_0) \|.$$

Решая последнее неравенство, получим (2.28).

Неравенство (2.28) показывает, что линейный оператор $W(t, t_0)$ является ограниченным оператором.

Заметим, что все предыдущие рассуждения остаются справедливыми, если вместо непрерывности по t операторной функции $A(t)$ потребовать интегрируемость $\| A(t) \|$ на любом конечном интервале.

Отметим также, что наиболее полное описание линейных систем в конечномерном случае дано в монографиях Н. П. Еругина [78,79].

§ 3. Примеры дифференциальных уравнений в банаховых пространствах

1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений в евклидовом пространстве. Пусть пространство E является конечномерным векторным пространством. Норма в этом пространстве может быть введена, например, одним из способов (1.3), (1.5), (1.7). В § 1 указывалось, как следует определять норму матрицы в соответствии с введенной нормой вектора.

Уравнению (2.26) соответствует в нашем случае линейная система

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k + u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Матричное уравнение (2.22) определяет фундаментальную матрицу $U(t)$, знание которой и позволяет найти решение по формуле Коши (2.27).

Легко видеть, что если коэффициенты $a_{ik}(t)$, входящие в систему (3.1), не зависят от t , то $U(t-t_0)$ также является решением уравнения (2.22). Но так как $U(t-t_0)$ и $W(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0)$ являются решениями уравнения (2.22) и обращаются в единичную матрицу при $t=t_0$, то в силу свойства единственности имеем $W(t, t_0) = U(t-t_0)$.

2. Счетные системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим пространство l^p , элементами которого являются все такие числовые последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$,

что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p$ сходится. В l^p можно рассматривать счетную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(t) x_k(t) + u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Решением системы (3.2) будет являться бесконечная последовательность функций $(x_1(t), x_2(t), \dots)$. Фундаментальному оператору Коши соответствует бесконечная матрица.

Счетную систему (3.2) можно рассматривать также в пространстве m с нормой $\|x\| = \sup_k |x_k|$. Многочисленные

исследования вопросов устойчивости решений счетных систем дифференциальных уравнений, а также уравнений, заданных в банаховом пространстве, проведены К. П. Персидским и его учениками [80, 81].

3. Интегро-дифференциальные уравнения. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b K(x, s, t) \varphi(s, t) ds + \lambda \varphi(x, t) + u(x, t), \quad (3.3)$$

где функции $K(x, s, t)$, $u(x, t)$ полагаем непрерывными

в области D : $\{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b, 0 \leq t < \infty\}$. Предположим, что в этой области выполнены неравенства $|K(x, s, t)| \leq M$, $|u(x, t)| \leq m$.

Исследованию уравнений типа (3.3) посвящен ряд работ [82—91]. Наиболее точные результаты, касающиеся вопросов устойчивости решений этого уравнения, приведены в работе [85], где широко использовалось представление решения уравнения (3.3) с помощью формулы Коши. В этой работе было показано, что любое решение $\varphi(x, t)$ уравнения (3.3), удовлетворяющее условию $\varphi(x, t_0) = \varphi_0(x)$, может быть представлено формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & e^{\lambda(t-t_0)} [\varphi_0(x) + \int_{t_0}^t \int_a^b R(x, s, t, \tau) \varphi_0(s) ds d\tau] + \\ & + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} [u(x, \tau) + \int_{\tau}^t \int_a^b R(x, s, t, \tau_1) u(s, \tau) ds d\tau_1] d\tau, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $R(x, s, t, \tau)$ — резольвента ядра $K(x, s, t)$, т. е. функция, определяемая соотношением

$$R(x, s, t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, s, t, \tau),$$

где

$$K_{n+1}(x, s, t, \tau) = \int_{\tau}^t \int_a^b K(x, s_1, \tau_1) K_n(s_1, s, \tau_1, \tau) ds_1 d\tau_1,$$

$$(n = 1, 2, \dots), \quad K_1(x, s, t, \tau) = K(x, s, \tau).$$

Можно показать, что $R(x, s, t, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R(x, s, t, \tau)}{\partial t} = \int_a^b K(x, s_1, t) R(s_1, s, t, \tau) ds_1, \quad (3.5)$$

которое соответствует уравнению (2.22).

Естественно рассматривать функцию $\varphi(x, t)$ при фиксированном $t = t_0$ как элемент пространства C непрерывных функций с метрикой $\|\varphi(x, t_0)\|_c = \sup_{a \leq x \leq b} |\varphi(x, t)|$. Решению $\varphi(x, t)$

уравнения (3.3) тогда будет соответствовать в \mathcal{C} некоторая траектория. Если нас интересует влияние на эту траекторию «внешнего возмущения» $u(x, t)$, то следует при решении вопроса пользоваться формулой (3.4); при этом не обязательно, конечно, считать $u(x, t_0)$ элементом пространства \mathcal{C} , это предположение значительно уменьшило бы ценность исследования. Можно считать, например, $u(x, t)$ принадлежащей пространству L_p , $1 \leq p \leq \infty$. В этом случае можно ставить вопрос о влиянии на решение $\varphi(x, t)$ возмущений, ограниченных в среднем в том или ином смысле.

4. Системы с неполной информацией. В n -мерном векторном пространстве \mathcal{R} рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (3.6)$$

где для данного значения t и фиксированного вектора x векторная функция $f(x, t)$ представляет собой не один вектор, а целое множество векторов из \mathcal{R} . Таким образом, функция $f(x, t)$ предполагается многозначной функцией. К системам вида (3.6) обычно приходят, когда нет полной информации о значениях некоторых параметров системы; известно только, что эти параметры могут принимать любое значение из некоторого заданного множества. Назовем подобные системы системами с неполной информацией.

Системы с неполной информацией могут, например, привлекаться для описания регулируемых систем, содержащих звенья с гистерезисными и релейными характеристиками [92,93].

Обозначим через S некоторое ограниченное замкнутое множество, лежащее в \mathcal{R} . Пусть γ — некоторое однозначное непрерывное отображение множества S в \mathcal{R} . Образ множества S , т. е. $\gamma(S)$, назовем S -множеством.

Рассмотрим пространство $\mathbf{E}(\mathcal{R})$ всех непрерывных отображений γ , определяя норму следующим образом:

$$\|\gamma\| = \sup_{x \in S} \|\gamma(x)\|_{\mathcal{R}}.$$

Легко видеть, что пространство $\mathbf{E}(\mathcal{R})$ является банаховым пространством и изометрично пространству соответствующих S -множеств $\gamma(S)$, с метрикой $\|\gamma(S)\| = \sup_{x \in S} \|\gamma(x)\|_{\mathcal{R}}$.

Поэтому в дальнейшем будем отождествлять элемент γ пространства $E(\mathbf{R})$ с S -множеством $\gamma(S)$ - лежащим в \mathbf{R} . Однако подчеркнем, что S -множество не следует рассматривать как простое подмножество пространства \mathbf{R} , а необходимо приписывать к S -множеству соответствующее отображение γ . Только в этом случае в пространстве S -множеств вводится естественным образом линейная операция. Очевидно, следует полагать $\gamma_1(S) + \gamma_2(S) = \gamma(S)$, если для всякого вектора $x \in S$ имеет место $\gamma_1(x) + \gamma_2(x) = \gamma(x)$.

Пусть теперь \mathbf{R}_m — некоторое m -мерное евклидово пространство, а $f(p)$ — многозначная функция, определенная на этом пространстве, значения которой представляют собою некоторые S -множества пространства \mathbf{R} . С многозначной функцией $f(p)$ свяжем однозначную функцию $F(p)$, значения которой лежат в $E(\mathbf{R})$ и определяются по правилу $F(p) = \gamma$, если $\gamma(S) = f(p)$. Такой подход позволяет нам перенести на многозначные функции все понятия дескриптивной теории функций. Так, например, многозначную функцию $f(p)$ назовем непрерывной, если соответствующая ей однозначная функция $F(p)$ непрерывна. Аналогично можно определить класс многозначных функций, множество точек непрерывности которых есть G_δ второй категории. Этим функциям соответствуют точечно разрывные функции $F(p)$, являющиеся пределом последовательности непрерывных функций.

Так, например, релейная характеристика $f(x) = \text{sign } x$, с дополнительным условием, что $f(0)$ есть множество чисел из отрезка $[-1, 1]$, оказывается как раз одной из таких функций.

Вернемся теперь к уравнению (3.6) и потребуем выполнения следующего условия.

Пусть X есть S -множество и пусть $f(X, t) = \bigcup_{x \in X} f(x, t)$; тогда $f(X, t)$ является при любом t тоже S -множеством.

В частности, так как всякий вектор x из \mathbf{R} есть S -множество, то, очевидно, $f(x, t)$ должно быть тоже S -множеством.

Наряду с уравнением (3.6) рассмотрим уравнение

$$\dot{X} = f(X, t), \quad (3.7)$$

решениями которого считаются многозначные функции $X(t)$

скалярного аргумента t со значениями, представляющими собой S -множества пространства R . Траектории системы (3.7), в отличие от траекторий системы (3.6), задаются в начальный момент не точками, а, вообще говоря, некоторыми S -множествами пространства R , и представляют собой трубки, расположенные в этом пространстве. Траектории — воронки уравнения (3.6) — включаются в число траекторий уравнения (3.7), поскольку точки пространства R являются, очевидно, S -множествами.

Если считать X и $f(X, t)$ не S -множествами пространства R , а элементами пространства $E(R)$, то дифференциальное уравнение (3.7) будет дифференциальным уравнением с однозначной правой частью в банаховом пространстве, и к этому уравнению может быть применена полностью вся теория, развиваемая в данной главе.

5. Системы со случайными параметрами. Рассмотрим в конечномерном евклидовом пространстве R дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x, t, \eta(t)), \quad (3.8)$$

где правая часть зависит от случайной функции $\eta(t)$. Очевидно, решение уравнения (3.8) также будет случайной функцией времени. Как известно, случайная величина может быть определена как измеримая функция, определенная на некотором пространстве выборок Ω (или пространстве элементарных событий). Если в линейном пространстве случайных величин определена каким-либо образом норма, то дифференциальное уравнение (3.8) превращается в дифференциальное уравнение, заданное в линейном нормированном пространстве E , элементы которого являются случайными векторными величинами. При этом в качестве начальных векторов при решении задачи Коши следует брать не только детерминированные векторы, но и любые другие случайные векторы из E . Интеграл и производную от случайной функции скалярного аргумента t следует понимать, как было показано в § 1 данной главы.

В частности, если в качестве квадрата нормы случайного вектора брать математическое ожидание квадрата длины вектора, то понятие производной и интеграла случайной величины совпадает с общепринятым.

§ 4. Задача о накоплении возмущений на конечном интервале времени

Ранее было показано, что решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \quad x(t_0) = 0 \quad (4.1)$$

может быть представлено формулой

$$x(t) = \int_{t_0}^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0, \quad (4.2)$$

где $W(t, \tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$ — оператор Коши.

Функцию $u(t)$ будем рассматривать как элемент некоторого банахова пространства B . Рассмотрим типичные способы задания нормы в этом пространстве. Обозначим через J множество чисел $0 \leq t < \infty$.

1. Пространство C определим как пространство ограниченных непрерывных на J функций с нормой

$$\|u\|_C = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|. \quad (4.3)$$

2. Пространство L_p — это пространство (измеримых по Бохнеру ([73], стр. 85) функций $u(t)$ с нормой

$$\|u\|_p = \left(\int_0^{\infty} \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty. \quad (4.4)$$

В первую очередь нас будут интересовать здесь случаи $p=1$, $p=2$.

3. Пространство M_p определим как пространство функций, для которых интеграл $\int_t^{t+1} \|u(\tau)\|^p d\tau$ существует и равномерно ограничен при любом $t \geq 0$. Норму в M_p зададим следующим образом:

$$\|u\|_{M_p} = \sup_{t \geq 0} \left(\int_t^{t+1} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}. \quad (4.5)$$

Наиболее интересный случай это снова случаи $p=1$ и $p=2$. В работах Л. Массера и Д. Шеффера [94, 95] подчеркнута особо важная роль пространства $M = M_1$, которую оно играет при изучении вопросов устойчивости в банаховых пространствах.

4. Пространство C_0 будем рассматривать как подпространство функций из C , обладающих свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0$.

5. Через L_∞ обозначим пространство (измеримых по Бохнеру) функций $u(t)$, существенно ограниченных на J . Норму определим по правилу *)

$$\|u(t)\|_\infty = \text{vrai sup}_{t \geq 0} \|u(t)\|. \quad (4.6)$$

Заметим, что при $1 \leq p \leq \infty$ имеет место соотношение

$$\|u(t)\|_M \leq \|u(t)\|_{M_p} \leq \|u\|_p \quad (4.7)$$

Для $p = \infty$ неравенство (4.7) очевидно, так как

$$\int_t^{t+1} \|u(\tau)\| d\tau \leq \|u(t)\|_\infty.$$

При $p < \infty$ справедливость неравенства (4.7) следует из неравенства Гёльдера ([71], стр. 64)

$$\int_t^{t+1} \|u(\tau)\| d\tau \leq \left(\int_t^{t+1} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} \leq \|u(t)\|_p.$$

Если вместо полуоси J взять отрезок $t_0 \leq t \leq t_1$, где $t_0 \geq 0$, то, определяя аналогичным образом норму, получим пространство $B(t_0, t_1)$ (например, $C(t_0, t_1)$, $L_p(t_0, t_1)$ и т. д.).

В дальнейшем будем считать, что функция $x(t)$, определенная соотношением (4.2), всегда принадлежит пространству C . В этом случае формула (4.2) задает линейный оператор Φ , переводящий пространство B в пространство C . Если вместо полуоси J рассматривать отрезок $t_0 \leq t \leq t_1$, то оператор Φ превращается в линейный оператор $\Phi(t_0, t_1)$, действующий на подпространстве $B(t_0, t_1)$.

Очевидно, что справедливо соотношение

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|x(t)\| \leq \|\Phi(t_0, t_1)\| \|u\|_{B(t_0, t_1)}. \quad (4.8)$$

Таким образом, зная величину нормы оператора $\Phi(t_0, t_1)$ или, в крайнем случае, зная оценку этой нормы, мы можем

*) Функция $u(t)$ называется существенно ограниченной на J , если можно указать постоянную величину $c > 0$ такую, что множество точек, где выполняется неравенство $\|u(t)\| > c$, имеет меру нуль; $\text{vrai sup}_{t \geq 0} \|u(t)\|$ есть точная нижняя граница таких чисел c .

оценить максимум отклонения $\|x(t)\|$ от нуля при действии функции $u(t)$, которую можно трактовать как внешнее возмущение, вызывающее возмущение выходного сигнала $x(t)$.

Сформулированная сейчас задача о накоплении возмущений была поставлена и решалась в конечномерном случае Б. В. Булгаковым [96]. Мы видим, что с точки зрения функционального анализа задача Б. В. Булгакова сводится к отысканию точного значения нормы оператора $\Phi(t_0, t_1)$. Однако вычисление точного значения нормы указанного оператора является обычно трудной задачей. Исключение составляет тот случай, когда функции пространства \mathbf{B} являются функциями с числовыми значениями, что соответствует в нашем случае одномерности фазового пространства \mathbf{E} .

Нетрудно, однако, получить оценки оператора $\Phi(t_0, t_1)$ в некоторых конкретных пространствах. Эти оценки имеют, например, следующий вид:

1. В пространстве $\mathbf{C}(t_0, t_1)$

$$\|\Phi(t_0, t_1)\| \leq \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \int_{t_0}^t \|W(t, \tau)\| d\tau. \quad (4.9)$$

2. В пространстве $\mathbf{L}(t_0, t_1)$

$$\|\Phi(t_0, t_1)\| \leq \sup_{t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1} \|W(t, \tau)\|. \quad (4.10)$$

3. В пространстве $\mathbf{L}_2(t_0, t_1)$

$$\|\Phi(t_0, t_1)\| \leq \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left(\int_{t_0}^t \|W(t, \tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2}. \quad (4.11)$$

§ 5. Задача о накоплении возмущений на бесконечном интервале времени. Теоремы об устойчивости нулевого решения однородного линейного уравнения

1. Рассмотрим теперь задачу о накоплении возмущений на бесконечном интервале времени J , т. е. на полуоси $0 \leq t < \infty$. Предположим, что внешнее возмущение $u(t)$ принадлежит пространству \mathbf{C} , тогда согласно (4.9) имеем неравенство

$$\|\Phi\| = \sup_{t \geq 0} \int_0^t \|W(t, \tau)\| d\tau, \quad (5.1)$$

где оператор Φ задается соотношением

$$\Phi u = \int_0^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau.$$

Таким образом, если величина

$$\Phi_0 = \sup_{t \geq 0} \int_0^t \|W(t, \tau)\| d\tau \quad (5.2)$$

является конечной величиной, то задача о накоплении возмущений имеет решение. Это означает, что всякой ограниченной по норме \mathbf{C} функции $u(t)$ соответствует ограниченное решение $x(t)$ задачи (4.1).

Оказывается, имеет место следующий более глубокий результат.

Лемма 5.1. Если оператор $\Phi u = \int_0^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau$ переводит банахово пространство \mathbf{B} функций $u(t)$ в пространство \mathbf{C} функций $x(t)$, то он ограничен. Это значит, что существует постоянная положительная величина K такая, что

$$\|x\|_{\mathbf{C}} \leq K \|u\|_{\mathbf{B}}.$$

В самом деле, определим оператор Φ_k , переводящий \mathbf{B} в пространство \mathbf{E} , соотношением $\Phi_k u = \int_0^{t_k} W(t_k, \tau) u(\tau) d\tau$, где $\{t_k\}$ — последовательность положительных рациональных чисел, перенумерованных в каком-либо порядке. Если $u \in \mathbf{B}$, то последовательность $\Phi_k u$ ограничена по предположению и, следовательно, по теореме 1.1 существует такое $K > 0$, что $\|\Phi_k u\| \leq K \|u\|_{\mathbf{B}}$.

Так как для любого вещественного числа $t \geq 0$ существует подпоследовательность рациональных чисел t_m , сходящаяся к t , то в силу последнего неравенства получим

$$\left\| \int_0^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau \right\| \leq K \|u\|_{\mathbf{B}},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5.2. Если \mathbf{E} — векторное конечномерное пространство и всякому ограниченному возмущению $u(t)$

соответствует ограниченное на J решение задачи (4.1), то величина Φ_0 , заданная соотношением (5.2), конечна.

Действительно, в этом случае оператор Коши $W(t, \tau)$ превращается в матрицу с элементами w_{ik} . Для определенности будем считать, что норма вектора и норма матрицы определены в соответствии с (1.5) и (1.6).

Рассмотрим векторную функцию $u^i(\tau)$, определяя ее следующим образом:

$$u_k^i(\tau) = \text{sign } w_{ik}(t, \tau),$$

где через $u_k^i(\tau)$ обозначена k -я проекция вектора $u^i(\tau)$.

В силу леммы 5.1 существует такая постоянная K , что

$$\left\| \int_0^t W(t, \tau) u^i(\tau) d\tau \right\| \leq K$$

при любом $t \geq 0$, где $u^i(\tau)$ рассматривается как элемент банахова пространства L_∞ .

Таким образом, для любого i имеем

$$\int_0^t \sum_{k=1}^n w_{ik} u_k^i d\tau = \int_0^t \sum_{k=1}^n |w_{ik}(t, \tau)| d\tau \leq K.$$

Но отсюда следует, что существует постоянная M (равная, например, nK , где n — размерность пространства E), такая, что

$$\int_0^t \|W(t, \tau)\| d\tau \leq M \quad \text{при любом } t.$$

Лемма 5.3. Если величина Φ_0 конечна и $\|A(t)\| \leq A_0 < \infty$ на полуоси J , то существует такая положительная постоянная W_0 , не зависящая от t и t_0 , что $\|W(t, \tau)\| \leq W_0$ при $0 \leq \tau \leq t < \infty$.

В самом деле, из соотношения

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau) U^{-1}(\tau) = U(\tau) \frac{dU^{-1}(\tau)}{d\tau} + \frac{dU(\tau)}{d\tau} U^{-1}(\tau) = 0$$

имеем

$$\frac{dU^{-1}(\tau)}{d\tau} = -U^{-1}(\tau) \frac{dU(\tau)}{d\tau} U^{-1}(\tau).$$

Так как $W(t, \tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$, где $U(t)$ — фундаментальный оператор, то

$$\frac{dW(t, \tau)}{d\tau} = -U(t)U^{-1}(\tau) \frac{dU(\tau)}{d\tau} U^{-1}(\tau).$$

По определению фундаментального оператора имеем $\frac{dU(\tau)}{d\tau} = A(\tau)U(\tau)$, откуда следует

$$\frac{dW(t, \tau)}{d\tau} = -W(t, \tau)A(\tau).$$

Интегрируя по τ последнее соотношение в пределах от t_0 до t , получим

$$W(t, \tau) - I = - \int_{t_0}^t W(t, \tau) A(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\|W(t, \tau) - I\| = \left\| \int_{t_0}^t W(t, \tau) A(\tau) d\tau \right\| \leq A_0 \Phi_0.$$

Отсюда следует, что $\|W(t, \tau)\| \leq A_0 \Phi_0 + 1$ и, следовательно, можно положить $W_0 = A_0 \Phi_0 + 1$.

Лемма 5.4. (Л. Массера, Д. Шеффер [94]). Пусть $\psi(t)$ — положительная функция, $\rho(t)$ — непрерывная положительная функция при $t \geq 0$. Если $\inf_{t \geq 0} \rho(t) < 1$ и для всех $t \geq t_0 \geq 0$ имеет место неравенство

$$\psi(t) \leq \rho(t - t_0) \psi(t_0), \quad (5.3)$$

то существуют положительные числа α, B , не зависящие от t_0 , такие, что при $t \geq t_0 \geq 0$ справедливо неравенство

$$\psi(t) \leq B e^{-\alpha(t - t_0)} \psi(t_0). \quad (5.4)$$

В самом деле, существует положительное число τ такое, что $\rho(\tau) = \gamma < 1$. Положим $\alpha = -\tau^{-1} \ln \gamma$ и $B = \max_{0 \leq t \leq \tau} e^{\alpha t} \rho(t)$.

Очевидно, что число B с указанным свойством существует в силу непрерывности $\rho(t)$. При $n = 0, 1, \dots$ имеем в силу (5.3)

$$\psi(t_0 + n\tau) \leq \gamma^n \psi(t_0). \quad (5.5)$$

Для любого $t \geq t_0 \geq 0$ имеет место при некотором целом и положительном n неравенство $t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n+1)\tau$.

Таким образом, получим согласно (5.3) и (5.5)

$$\psi(\tau) \leq \rho(t - t_0 - n\tau) \psi(t_0 + n\tau) \leq \rho(t - t_0 - n\tau) \gamma^n \psi(t_0).$$

Справедливо также неравенство

$$\psi(t) \leq e^{\alpha(t-t_0-n\tau)} \rho(t - t_0 - n\tau) \gamma^n e^{\alpha n\tau} e^{-\alpha(t-t_0)} \psi(t_0).$$

Так как $e^{\alpha\tau} = \gamma^{-1}$, то согласно выбору числа B получаем требуемое неравенство (5.4).

Лемма 5.5. *Если существуют положительные постоянные Φ_0 и W_0 такие, что*

$$\int_{t_0}^t \|W(t, \tau)\| d\tau \leq \Phi_0, \quad \|W(t, t_0)\| \leq W_0$$

при любых $0 \leq t_0 \leq t < \infty$, то можно указать положительные постоянные α и B такие, что

$$\|W(t, t_0)\| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (5.6)$$

при любых $0 \leq t_0 \leq t < \infty$.

Действительно, так как $W(t, t_0) = W(t, \tau) W(\tau, t_0)$, то имеем

$$\left\| \int_{t_0}^t W(t, \tau) W(\tau, t_0) d\tau \right\| = \|W(t, t_0)\| (t - t_0) \leq \Phi_0 W_0.$$

Используя дополнительно неравенство $\|W(t, t_0)\| \leq W_0$, получим

$$\|W(t, t_0)\| \leq \frac{W_0(1 + \Phi_0)}{1 + t - t_0} = \rho(t - t_0).$$

В общем случае имеем, очевидно,

$$\|W(t, t_0)\| \leq \|W(t, t_1)\| \|W(t_1, t_0)\| \leq \rho(t - t_1) \|W(t_1, t_0)\|$$

и мы можем применить лемму 5.4.

Определение. *Нулевое решение уравнения*

$$\dot{y} = A(t)y \quad (5.7)$$

назовем экспоненциально устойчивым, если существуют положительные постоянные α и B , не зависящие от t_0 и такие, что любое решение уравнения (5.7) удовлетворяет неравенству

$$\|y(t)\| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} \|y(t_0)\|. \quad (5.8)$$

Очевидно, что экспоненциально устойчивое нулевое решение будет равномерно асимптотически устойчивым решением при любых начальных возмущениях. Это значит, что нулевое решение будет устойчивым, и что для любых положительных чисел ε и δ можно указать такое число $T > 0$, что из $\|y(t_0)\| < \varepsilon$ следует $\|y(t)\| < \delta$ при $t \geq t_0 + T$.

Если операторная функция $A(t)$ не зависит от t , то экспоненциальная устойчивость имеет место тогда и только тогда, когда спектр оператора A лежит внутри левой полуплоскости ([75]).

Теорема 5.1. Пусть E — векторное конечномерное пространство и пусть $\|A(t)\|$ ограничена на J . Для того чтобы всякой ограниченной на J функции $u(t)$ соответствовало ограниченное (равномерно по t_0) решение задачи (4.1), необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (5.7) было экспоненциально устойчивым.

Необходимость условий теоремы вытекает из лемм 5.1 — 5.3 и 5.5.

Достаточность условий следует из формулы (4.2).

Так как из неравенства (5.8) и формулы (4.2) следует неравенство $\|W(t, t_0)\| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)}$, то имеем при $\|u(t)\| \leq c < \infty$

$$\|x(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|W(t, \tau)\| \|u(\tau)\| d\tau \leq \frac{Bc}{\alpha},$$

что и дает требуемый результат.

Необходимость условий теоремы 5.1 была установлена И. Г. Малкиным ([8], стр. 367) с помощью применения функций Ляпунова. Критерий (5.8) был впервые введен К. П. Персидским. В дальнейшем изложении этот критерий будет играть существенную роль.

Наряду с задачей (4.1) рассмотрим теперь более общую задачу

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.9)$$

Теорема 5.2 (Т. Ф. Бриджлэнд [97]). Пусть E — векторное конечномерное пространство и $\|A(t)\|$ интегрируема на любом конечном интервале полуоси J . Если всякой ограниченной на J функции $u(t)$ соответствует при любом x_0 ограниченное (равномерно по t_0) решение $x(t)$

задачи (5.9), то нулевое решение системы (5.7) будет экспоненциально устойчивым.

В самом деле, полагая $x_0 = 0$, получаем задачу (4.1) и, следовательно, в силу леммы (5.2) будет справедливо неравенство $\int_{t_0}^t \|W(t, \tau)\| d\tau \leq \Phi_0$. Полагая $u(t) \equiv 0$, получим ограниченную функцию $y(t) = x(t) = W(t, t_0)x_0$ и, следовательно, получим неравенство $\|W(t, t_0)\| \leq W_0$. Требуемый результат вытекает теперь из леммы 5.5.

Разумеется, справедлива и обратная

Теорема. Если всякое решение системы (5.7) удовлетворяет неравенству (5.8), то всякой ограниченной функции $u(t)$ и любой начальной точке будет соответствовать ограниченное решение задачи (5.9).

Проверка этого факта осуществляется точно так же, как при доказательстве предыдущей теоремы.

Теорема 5.2 интересна тем, что в ее формулировке не накладываются дополнительных ограничений на матрицу $A(t)$, кроме тех, которые обеспечивают существование решения задачи 4.1. Теорема 5.1 справедлива в случае, когда E — банахово пространство. Теорема 5.6, приводимая ниже, значительно усиливает результат, приведенный в теореме 5.1. Однако метод доказательства теоремы 5.1, а так же и результаты и простые методы доказательства предварительных лемм, представляют самостоятельный интерес с точки зрения задачи о накоплении возмущений.

2. Обозначим через L_p^a пространство функций $u(t)$, определенных на J со значениями в E и таких, что

$$\int_0^{\infty} \|u(t)\|^p e^{a\mu t} dt < \infty.$$

Через L_{∞}^a обозначим пространство функций, для которых

$$\text{vrai sup}_{t \geq 0} \|u(t)\| e^{at} < \infty.$$

Введем соответственно нормы в пространствах L_p^a , L_{∞}^a

$$\|u\|_{(p, a)} = \left(\int_0^{\infty} \|u(\tau)\|^p e^{a\mu\tau} d\tau \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{(\infty, a)} = \text{vrai sup}_{t \geq 0} \|u(t)\| e^{at}.$$

Легко видеть, что соответствие $\Omega u = e^{at} u(t)$ является линейным взаимно однозначным соответствием между L_p^a и L_p^0 , сохраняющим норму. Так как пространство $L_p^0 = L_p$ является при любом p , $1 \leq p \leq \infty$ банаховым пространством, то такими же будут и пространства L_p^a .

В силу леммы 5.1 оператор $\Phi u = \int_0^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau$, переводящий пространство L_p^a в пространство L_∞^b , будет ограниченным оператором. Это значит, что существует такая положительная постоянная K , что

$$\|\Phi u\|_{(\infty, b)} = \text{vrai sup}_{t \geq 0} e^{bt} \left\| \int_0^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau \right\| \leq K \|u\|_{(p, a)}. \quad (5.10)$$

Теорема 5.3 (М. Регис [98]). Пусть выполнено условие

$$\int_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau < \infty$$

при $t \geq 0$. Если можно указать p , $1 \leq p < \infty$ такое, что для всякой функции $u(t) \in L_p^a$ решение задачи (4.1) принадлежит L_∞^b , где $a > 0$, $b > 0$, то можно указать такое положительное число N , что выполняется неравенство

$$\|W(t, t_0)\| \leq N e^{at_0} e^{-bt}. \quad (5.11)$$

Докажем теорему. Пусть $\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau = A_1$. В силу (3.12) имеет место неравенство при $|t - \tau| \leq 1$:

$$\|W(t, \tau)\| \leq e^{A_1}.$$

Определим далее функцию для целого $m \geq 0$. $u_m(t) = \frac{W(t, m) x_0}{e^{at} \|W(t, m)\|}$ при $m \leq t \leq m+1$, $\|x_0\| = 1$, $u_m(t) = 0$ всюду в остальных точках. Очевидно, $u_m \in L_p^a$, так как $\|u_m\|_{(p, a)} \leq 1$.

Согласно (5.10) имеем

$$e^{bt} \left\| \int_0^t W(t, \tau) u_m(\tau) d\tau \right\| \leq K. \quad (5.12)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t W(t, \tau) u_m(\tau) d\tau \right\| &= \left\| \int_m^{m+1} W(t, \tau) \frac{W(\tau, m) x_0}{e^{a\tau} \|W(\tau, m)\|} d\tau \right\| = \\ &= \|W(t, m)\| \int_m^{m+1} \frac{d\tau}{e^{a\tau} \|W(\tau, m)\|} \geq e^{-A_1} e^{-(m+1)a} \|W(t, m)\|. \end{aligned}$$

Согласно (5.12) получим

$$\|W(t, m)\| \leq Ke^{A_1} e^{(m+1)a} e^{-bt}.$$

Если $m \leq \tau \leq m+1$, то

$$\|W(t, \tau)\| \leq \|W(t, m)\| \|W(m, \tau)\| \leq Ke^{2A_1 + a} e^{a\tau} e^{-bt},$$

следовательно, можно положить $N = Ke^{2A_1 + a}$.

Заметим, что мы доказали здесь теорему М. Региса, несколько усилив ее, так как, в отличие от формулировки, данной в [98], мы заменили свойство ограниченности $\|A(t)\|$ на всей полуоси J требованием

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau = A_1 < \infty. \quad (5.13)$$

3. В 1948 г. теорема 5.1 была перенесена М. Г. Крейном [99] на случай, когда фазовое пространство E является банаховым пространством. Д. Л. Кучер [100] получил аналогичный результат в случае, когда $u(t) \subset L_p$. В работе Д. Л. Маскера и Д. Шеффера [94] соответствующие теоремы были рассмотрены для случая условной устойчивости. В этих работах снимается обычное требование ограниченности $\|A(t)\|$ и требуется лишь интегрируемость этой функции на любом конечном интервале. Однако чтобы получить результат, аналогичный результату теоремы 5.1, авторы потребовали выполнения условия (5.13). Это условие обеспечивает равномерность асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (5.7), что соответствует независимости величины B , фигурирующей в условии (5.8), от величины t_0 .

Формулировки теорем, приведенных ниже, так же как и доказательства этих теорем, приведены нами в соответствии с работой [94].

Теорема 5.4. Если для любой функции $u(t) \in L_p$, $1 < p < \infty$, задача (4.1) имеет ограниченное решение, то существует положительное число α и скалярная положительная функция $N(t)$ такие, что любое решение уравнения (5.7) удовлетворяет неравенству при $t \geq t_0$:

$$\|y(t)\| \leq N(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)^{1/q}} \|y(t_0)\|, \quad (5.14)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Докажем теорему. Пусть $y(t)$ — ненулевое решение уравнения (5.7). Выберем произвольные числа $\tau \geq t_0 > 0$ и определим функцию $\gamma(t)$, полагая $\gamma(t) = 1$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ и $\gamma(t) = 0$ вне указанного промежутка.

Очевидно, функция

$$x(t) = y(t) \int_{t_0}^t \gamma(\tau) \|y(\tau)\|^{-1} d\tau$$

является решением задачи (4.1) при $u(t) = \gamma(t)y(t) \|y(t)\|^{-1}$. Так как $u(t) \in L_p$ и $\|u\|_p = \tau^{1/p}$, то по условию теоремы $x(t)$ будет ограниченным решением задачи (4.1). В силу леммы 5.1 существует положительная постоянная K_p такая, что

$$\|x(t)\| \leq K_p \|u\|_p = K_p \tau^{1/p}.$$

Полагая

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|y(s)\|^{-1} ds, \quad (5.15)$$

получим при $\tau > 0$

$$\|y(t_0 + \tau)\| \varphi(t_0 + \tau) \leq K_p \tau^{1/p}. \quad (5.16)$$

Так как $\|y(t_0 + \tau)\|^{-1} = \dot{\varphi}(t_0 + \tau)$, то из (5.16) следует

$$\dot{\varphi}(t_0 + \tau) \geq K_p^{-1} \tau^{-1/p} \varphi(t_0 + \tau).$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от τ_0 до τ , получим

$$\varphi(t_0 + \tau) \geq \varphi(t_0 + \tau_0) \exp[qK_p^{-1}(\tau^{1/q} - \tau_0^{1/q})].$$

В силу (2.28) имеем $\|y(t_0 + \tau)\| \leq \Delta(t_0, \tau) \|y(t_0)\|$, где

$$\Delta(t_0, \tau) = \exp \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \|A(s)\| ds.$$

Согласно (5.15) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t_0 + \tau_0) &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau_0} \|y(s)\|^{-1} ds \geq \|y(t_0)\|^{-1} \int_{t_0}^{t_0 + \tau_0} \frac{ds}{\Delta(t_0, s)} \geq \\ &\geq \tau_0 (\|y(t_0)\| \Delta(t_0, \tau_0))^{-1}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Таким образом, из (5.16) и (5.17) следует

$$\begin{aligned} \|y(t_0 + \tau)\| &\geq K_p \Delta(t_0, \tau_0) \tau_0^{-1} \exp(qK_p^{-1} \tau_0^{1/q}) \tau^{1/p} \times \\ &\times \exp(-qK_p^{-1} \tau^{1/q}) \|y(t_0)\|. \end{aligned}$$

Пусть α — произвольное положительное число из интервала $0 < \alpha < qK_p^{-1}$. Нетрудно убедиться, что

$$\max \tau^{1/p} \exp(\alpha - qK_p^{-1}) \tau^{1/q} = [epq^{-1} (qK_p^{-1} - \alpha)]^{-q/p} = \lambda(\alpha).$$

Пусть

$$N(t_0) = N(\alpha, t_0, \tau_0) = \Delta(t_0, \tau_0) \exp(qK_p^{-1} \tau_0^{1/q}) \max(1, K_p \lambda(\alpha) \tau_0^{-1}).$$

Очевидно, при $\tau \geq 0$ получим

$$\|y(t_0 + \tau)\| \leq N(t_0) e^{-\alpha \tau^{1/q}} \|y(t_0)\|,$$

что эквивалентно (5.14).

Теорема 5.5. Если для всякой функции $u(t) \in C_0$ задача (4.1) имеет ограниченное решение, то существует постоянная α и скалярная положительная функция $N(t)$ такие, что любое решение $y(t)$ уравнения (5.7) удовлетворяет при $t \geq t_0 \geq 0$ неравенству

$$\|y(t)\| \leq N(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} \|y(t_0)\|. \quad (5.18)$$

Докажем теорему. Определим функцию $\gamma(t)$ следующим образом:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq t_0 + \tau, \\ 1 - (t - t_0 - \tau) & \text{при } t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + \tau + 1, \\ 0 & \text{при } t_0 + \tau + 1 \leq t. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $u(t) = \gamma(t) y(t) \|y(t)\|^{-1}$, где $y(t)$ — ненулевое решение уравнения (5.7). Очевидно, имеем $\|u(t)\|_{C_0} = 1$. Функция

$$x(t) = y(t) \int_{t_0}^t \gamma(s) \|y(s)\|^{-1} ds$$

является решением задачи (4.1) при выбранном возмущении $u(t)$, следовательно, в силу леммы 5.1 имеем при $t \geq t_0$, $\|x(t)\| \leq K$, где K — некоторое положительное число.

Снова определяя функцию $\varphi(t)$ соотношением (5.15), получим

$$\begin{aligned} \|y(t_0 + \tau)\| \varphi(t_0 + \tau) &= \\ &= \|y(t_0 + \tau)\| \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \|y(s)\|^{-1} ds \leq K, \end{aligned} \quad (5.19)$$

откуда следует

$$\hat{\varphi}(t_0 + \tau) \geq K^{-1} \varphi(t_0 + \tau).$$

Интегрирование последнего неравенства в пределах от τ_0 до τ , $\tau > \tau_0$ дает нам

$$\varphi(t_0 + \tau) \geq \varphi(t_0 + \tau_0) \exp K^{-1}(\tau - \tau_0). \quad (5.20)$$

Таким образом, из (5.19), (5.17) и (5.20) выводим

$$\|y(t_0 + \tau)\| \leq K \exp(K^{-1}\tau_0) \tau_0^{-1} \Delta(t_0, \tau_0) \exp(-K^{-1}\tau) \|y(t_0)\|$$

и вводя функцию

$$N(t_0) = \Delta(t_0, \tau_0) e^{K^{-1}\tau_0} \max(1, K\tau_0^{-1}),$$

получим требуемый результат

$$\|y(t_0 + \tau)\| \leq N(t_0) e^{-K^{-1}\tau} \|y(t_0)\|.$$

Чтобы получить (5.18), достаточно положить $\alpha = K^{-1}$.

Так как любую функцию из C_0 можно считать принадлежащей любому из пространств C , L_∞ , M_p , то теорема 5.5 будет справедлива и в том случае, если в ее формулировке заменить пространство C_0 любым из указанных пространств.

Следствие. Если при $u(t) \in C_0$ задача (4.1) имеет ограниченное решение $x(t)$, то это решение обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

В самом деле, так как $u(t) \in C_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует τ такое, что $\|u(t)\| \leq \varepsilon K^{-1}$ при $t \geq \tau$, где постоянная K взята из доказательства предыдущей теоремы.

Определим далее функцию $f(t)$, полагая $f(t) = u(t)$ при $t \leq \tau$ и $f(t) = 0$ при $t \geq \tau$. Очевидно, справедливо неравенство $\|f(t)\| \leq \varepsilon K^{-1}$ и, следовательно, задача $\dot{y} = A(t)y + f(t)$, $y(t_0) = 0$ имеет ограниченное решение. В силу леммы 5.1 имеем также $\|y(t)\| \leq K \|f(t)\| \leq \varepsilon$.

Пусть $z(t)$ — решение задачи $\dot{z} = A(t)z + u(t)$, $z(\tau) = y(\tau)$. Так как при $t \geq \tau$ $y(t) = z(t)$, то $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| \leq \varepsilon$.

Если $x(t)$ — решение задачи (4.1), то $x(t) - z(t)$ будет ограниченным решением уравнения (5.7) и по теореме 5.5 будем иметь $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - z(t)\| = 0$. Следовательно, имеем также $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \varepsilon$, и так как ε — произвольное число, то получаем требуемый результат.

Теорема 5.6. Пусть $A(t)$ удовлетворяет условию (5.13). Если для всякой функции $u(t) \in B$ (где B — одно из пространств C_0 , C , M_p , $1 \leq p < \infty$, L_p , $1 < p \leq \infty$) задача (4.1) имеет ограниченное решение, то нулевое решение уравнения (5.7) экспоненциально устойчиво.

Рассмотрим сначала случай $B = C_0$.

Пусть

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|A(s)\| ds = A_1 < \infty.$$

Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 5.5, примем $\tau_0 = 1$. Получим тогда

$$N(t_0) \leq \exp(A_1 + K^{-1}) \max(1, K).$$

Таким образом, неравенство (5.8) будет справедливо. Очевидно, точно так же устанавливается справедливость теоремы при $B = C$, $B = L_\infty$, $B = M_p$, $1 \leq p < \infty$.

Пусть теперь $B = L_p$, $1 < p < \infty$. Повторяя доказательство теоремы 5.4, примем $\tau_0 = 1$. В силу (5.13) получим

$$N(t_0) = \exp(A_1 + qK_p^{-1}) \max(1, K_p^\lambda(x)) = N,$$

откуда согласно (5.14) следует

$$\|y(t)\| \leq \rho(t - t_0) \|y(t_0)\|,$$

где

$$\rho(t) = N \exp(-at^{1/q}) \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0.$$

Требуемый результат следует теперь из леммы 5.4.

Рассмотрим теперь случай, когда $u(t) \in L$.

Теорема 5.7. Если для всякой функции $u(t) \in L$ задача (4.1) имеет ограниченное решение, то любое решение

$y(t)$ уравнения (5.7) удовлетворяет неравенству

$$\|y(t)\| \leq N \|y(t_0)\|, \quad (5.21)$$

где N не зависит от t_0 .

В самом деле, пусть выбраны числа $0 \leq t_0 \leq t_1$, и $0 < \delta \leq t_1 - t_0$. Положим $\gamma(t) = 1$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$, $\gamma(t) = 0$ вне указанного промежутка. Пусть $u(t) = \gamma(t) \|y(t)\|^{-1} y(t)$. Очевидно, функция $u(t)$ принадлежит L и $\|u\|_1 = \delta$. Следовательно, по условию теоремы

$$x(t) = y(t) \int_{t_0}^t \gamma(s) \|y(s)\|^{-1} ds$$

является ограниченной функцией.

В силу леммы 5.1 имеем

$$\|x(t)\| \leq N \|u\|_1 = N\delta.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|y(t)\| \int_{t_0}^t \gamma(s) \|y(s)\|^{-1} ds = \\ &= \|y(t)\| \int_{t_0}^{t_0+\delta} \gamma(s) \|y(s)\|^{-1} ds \end{aligned}$$

при $t > t_0 + \delta$, то

$$\|x(t_1)\| = \|y(t_1)\| \int_{t_0}^{t_0+\delta} \gamma(s) \|y(s)\|^{-1} ds \leq N\delta.$$

При $\delta \rightarrow 0$ получим

$$\|y(t_1)\| \|y(t_0)\|^{-1} \leq N,$$

откуда в силу произвольности t_1 и следует требуемый результат.

Очевидно, теорема 5.7 допускает обращение. Если выполнено условие (5.21), то при $u(t) \in L$ задача (4.1) будет иметь ограниченное решение.

4. Приведем некоторые примеры.

Пример 1 (Л. Массера, Д. Шеффер [94]). Рассмотрим ряд отрезков $J_n = [n - e^{-n^2}, n + e^{-n^2}]$, $n = 1, 2, \dots$ и определим функцию $\lambda(t)$, полагая $\lambda(t) = 1$ вне J_n , $\lambda(n) = e^{2n}$. На каждом из отрезков J_n определим функцию $\lambda(t)$ так, чтобы выполнялось неравенство $1 \leq \lambda(t) \leq e^{2n}$. Очевидно,

функция $\lambda(t)$ может быть построена так, что она будет непрерывной и дифференцируемой при $t > 0$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение, решением которого является функция $y(t) = e^{-t} (\lambda(t))^{-1}$. Так как

$$y(n + e^{-n^2}) (y(n))^{-1} = \exp(2n - e^{-n^2}) \rightarrow \infty,$$

то решение $y(t)$ не может удовлетворять неравенству типа $|y(t)| \leq N |y(t_0)|$, где N не зависит от t_0 , тем более $y(t)$ не может быть связанным неравенством типа (5.8).

Если $u(t) \in L_p$, $1 < p \leq \infty$, то решение соответствующего неоднородного уравнения

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{\lambda(t)} \int_0^t e^{s\lambda} (s) u(s) ds$$

будет ограниченным.

В самом деле, используя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq e^{-t} \int_0^t e^{s\lambda} |u(s)| ds + e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} e^{s\lambda} |u(s)| ds \leq \\ &\leq q^{-1/q} \|u\|_p + e^{-t} \|u\|_p \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n} \exp(n + e^{-n^2}) (2e^{-n^2})^{1/q} \leq \\ &\leq \|u\|_p \left\{ q^{-1/q} + e \sum_{n=1}^{\infty} \exp(2n + e^{-n^2}) (2e^{-n^2})^{1/q} \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, $|x(t)|$ будет ограниченной функцией, так как последний ряд сходится при любом q .

Таким образом, в формулировке теорем 5.4 и 5.5 невозможно полагать величину $N(t_0)$ не зависящей от t_0 . Чтобы получить это ценное свойство независимости, необходимо либо наложить ограничение типа (5.13) на $A(t)$ (теорема 5.6), либо ограничиться случаем $p=1$, как это сделано в теореме 5.7.

Пример 2 (Л. Массера, Д. Шеффер [94], О. Перрон [101]). Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} + (a - \sin \ln(t+1) - \cos \ln(t+1)) x = u(t), \quad (5.22)$$

где $1 < a < 1 + \frac{1}{2} e^{-\pi}$. Очевидно, имеем $|a - \sin \ln(t+1) -$

— $\cos \ln(t+1) | \leq a + \sqrt{2}$, следовательно, $A(t)$ принадлежит C . Решение однородного уравнения имеет вид

$$y(t) = y(0) e^{a e^{-(a - \sin \ln(t+1))(t+1)}}$$

и является ограниченным.

Так как $|y(0)| e^a e^{-(a+1)(t+1)} \leq |y(t)| \leq |y(0)| e^a e^{-(a-1)(t+1)}$, то при $t \geq t_0 \geq 0$ имеем

$$|y(t)| \leq e^{2(t_0+1)} e^{-(a-1)(t-t_0)} |x(t_0)|,$$

поэтому выполняется неравенство (5.18) и тем более (5.14) при любых $q < \infty$.

Рассмотрим далее соответствующее неоднородное уравнение (5.22), полагая $u(t) = e^{-a(t+1)}$. Очевидно, $u(t) \in L_p$ при $1 \leq p \leq \infty$ и $u(t) \in C_0$. Решение задачи (4.1) имеет вид

$$x(t) = e^{-(a - \sin \ln(t+1))(t+1)} \int_0^t e^{-(s+1) \sin \ln(s+1)} ds.$$

Положим $t_n = e^{(2n+1/2)\pi}$, $n = 1, 2, \dots$. Если $t_n e^{-\pi} \leq s \leq t_n e^{-\frac{2}{3}\pi}$, то $-1 \leq \sin \ln s \leq -1/2$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n - 1} e^{-(s+1) \sin \ln(s+1)} ds &> \int_{t_n e^{-\pi}}^{t_n e^{-\frac{2}{3}\pi}} e^{-s \sin \ln s} ds > \\ &> \int_{t_n e^{-\pi}}^{t_n e^{-\frac{2}{3}\pi}} e^{s/2} ds = 2 \exp(1/2 t_n e^{-\pi}) \{ \exp(1/2 t_n (e^{-\frac{2}{3}\pi} - e^{-\pi})) - 1 \}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $(a - \sin \ln t_n) t_n = (a - 1) t_n$. Поэтому, так как $t_n \rightarrow \infty$ и $a < 1 + \frac{1}{2} e^{-\pi}$, получим

$$\begin{aligned} x(t_n - 1) &> 2 \exp\left(\left(1 + \frac{1}{2} e^{-\pi} - a\right) t_n\right) \times \\ &\quad \times \left\{ \exp\left(\frac{1}{2} t_n (e^{-\frac{2}{3}\pi} - e^{-\pi})\right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

и, следовательно, $x(t_n - 1) \rightarrow \infty$. Таким образом, функция $x(t)$ является неограниченной, следовательно, этот пример показывает, что теоремы 5.4 и 5.5 в общем случае необратимы.

5. Рассмотрим теперь полученные результаты с точки зрения теории автоматического регулирования. В § 1 второй главы уже отмечалось, что всякую автоматическую систему можно рассматривать как совокупность звеньев, каждое из которых характеризуется оператором, переводящим входной сигнал в выходной сигнал. Было отмечено, что в большинстве случаев оператор звена может быть описан с помощью передаточной функции. Пусть u — входной сигнал и x — выходной сигнал, тогда можно записать $x = \Phi(u)$, где Φ — некоторый оператор, может быть, и нелинейный. Допустим, в силу некоторых причин сигнал u изменился и превратился в новый сигнал $u + \delta u$; в этом случае сигнал x тоже изменится и перейдет в $x + \delta x$. Очевидно, будем иметь $x + \delta x = \Phi(u + \delta u)$, откуда следует $\delta x = \Phi(u + \delta u) - \Phi(u)$.

Одним из желательных свойств рассматриваемого звена часто бывает свойство нечувствительности по отношению к входному сигналу; это значит, что для любого положительного числа $\epsilon > 0$ можно указать такое $\eta > 0$, что из неравенства $\|\delta u\| < \eta$ следует неравенство $\|\delta x\| < \epsilon$.

Таким образом, свойство нечувствительности (или, как часто говорят, свойство инвариантности с точностью до ϵ) состоит в том, что оператор звена Φ является непрерывным.

Если оператор Φ ограничен, то в этом случае всякому ограниченному возмущению входного сигнала u соответствует ограниченное возмущение выходного сигнала x . Это свойство рассматриваемого звена также представляет интерес.

Для линейных операторов, как известно, свойство ограниченности и свойство непрерывности эквивалентны. Если $K = \|\Phi\|$ — норма линейного ограниченного оператора, то имеем $\|\delta x\| \leq K \|\delta u\|$.

Очевидно, нечувствительность звена растет с убыванием величины K , которую иногда называют коэффициентом усиления звена [102].

Если оператор Φ задан соотношением

$$x(t) = \Phi u = \int_0^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau,$$

то смысл доказанных теорем сводится к следующему. Рассмотрим в качестве входного сигнала функцию $u_0(t) = x_0 \delta(t - t_0)$, где $\delta(t - t_0)$ — функция Дирака. Тогда полу-

чим $\Phi u_0 = W(t, t_0) x_0$. Следовательно, реакция на импульсное воздействие будет в данном случае функцией, являющейся решением задачи $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$. Смысл установленных теорем состоит в том, что из факта ограниченности оператора звена при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на операторную функцию $A(t)$, выводится суждение об асимптотическом поведении реакции звена на импульсное воздействие.

С точки зрения логической стройности теории наиболее приятными результатами выглядят результаты леммы 5.5, теорем 5.2, 5.4, 5.5 (включая следствие), 5.7, так как в этих теоремах не накладываются дополнительные ограничения на операторную функцию $A(t)$ и асимптотическое поведение реакции на импульсное воздействие целиком определяется реакцией звена на воздействия, принадлежащие тому или иному пространству, т. е. целиком определяется свойствами оператора Коши. К сожалению, как показали примеры, приведенные выше теоремы 5.4 и 5.5 необратимы.

Теоремы 5.1, 5.2, 5.6 дают условия, при выполнении которых ограниченность оператора Φ влечет за собой экспоненциальную устойчивость свободной системы. Экспоненциальная устойчивость линейного звена очевидно эквивалентна равномерной асимптотической устойчивости [8].

В теоремах 5.3 — 5.5 из свойства ограниченности оператора выводится свойство асимптотической устойчивости, которая может быть и неравномерной.

Впервые важность свойства ограниченности оператора Φ указана в монографии [103]. В этой книге устойчивость фильтра непосредственно отождествлялась с ограниченностью соответствующего оператора. Различные аспекты этой новой теории обсуждались в работах Л. А. Заде [104], Р. Кэлмана [105], Т. Бриджлэнда [97].

На наш взгляд, определение того или иного рода устойчивости звена следует связывать с асимптотическим поведением реакции звена на импульсное воздействие. Эта точка зрения соответствует классическому представлению об устойчивости как о внутреннем свойстве системы, характеризующем поведение системы при действии мгновенных возмущений. При этом поведение системы при постоянных действующих возмущениях, конечно, определяется характером устойчивости этой системы, а поведение системы при мгновенных возму-

шениях определяется характером поведения системы при постоянно действующих возмущениях.

Отметим еще следующий факт. Выше мы предполагали всюду, что линейный оператор $A(t)$ является ограниченным оператором. Это требование, по существу, нужно было только для того, чтобы обеспечить ограниченность оператора, заданного формулой (4.2). В настоящее время появилось много работ, в которых снимается требование ограниченности оператора $A(t)$. Полученные таким образом результаты могут быть непосредственно применены к исследованию вопросов устойчивости решений уравнений в частных производных [106, 107].

§ 6. Теоремы об устойчивости решений нелинейных уравнений

1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + R(x, t), \quad (6.1)$$

где $A(t)$ — линейный ограниченный оператор, непрерывный по t , функция $R(x, t)$ удовлетворяет в области D : $\|x\| \leq H$, $0 \leq t < \infty$ условию

$$\|R(x, t)\| \leq L \|x\|. \quad (6.2)$$

Обозначим через $W(t, \tau)$ оператор Коши уравнения

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (6.3)$$

и предположим, что имеет место неравенство

$$\|W(t, t_0)\| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (6.4)$$

где α, B — положительные постоянные, не зависящие от t_0 . Напомним, что условие (6.4) есть условие экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения (6.3).

Теорема 6.1 (об устойчивости по первому приближению). *Если выполнены условия (6.2) и (6.4) и если, кроме того, постоянные α, B, L удовлетворяют неравенству*

$$\lambda = \alpha - BL > 0, \quad (6.5)$$

то нулевое решение уравнения (6.1) будет экспоненциально устойчивым.

В самом деле, используя формулу Коши, можем записать интегральное уравнение

$$x(t) = W(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t, \tau)R(x, \tau)d\tau, \quad (6.6)$$

эквивалентное уравнению (6.1).

Из условий (6.2) и (6.4) получим оценку:

$$\|x(t)\| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^t BLE^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|ds. \quad (6.7)$$

Если ввести обозначение $\varphi(t) = e^{\alpha t}\|x(t)\|$, то из (6.7) следует

$$\varphi(t) \leq Be^{\alpha t_0}\|x_0\| + BL \int_{t_0}^t \varphi(s)ds,$$

откуда по лемме 1.1 первой главы получим

$$\varphi(t) \leq e^{BL(t-t_0)}Be^{\alpha t_0}\|x_0\|.$$

Таким образом, имеем

$$\|x(t)\| \leq Be^{(BL-\alpha)(t-t_0)}\|x_0\|. \quad (6.8)$$

Так как $BL - \alpha < 0$, то и получаем требуемое свойство экспоненциальной устойчивости.

Очевидно, неравенство (6.8) имеет место только для тех x_0 , которые лежат в области $\|x\| \leq H$, т. е. в области, в которой выполнено неравенство (6.2). Уменьшая H , можно уменьшить величину L , входящую в указанное неравенство, и тем самым можно обеспечить выполнение условия (6.5). Таким образом, величина области притяжения нулевого решения уравнения (6.1) зависит в конечном счете от величин α и B , входящих в условие (6.4) экспоненциальной устойчивости уравнения (6.3).

Наряду с линейным оператором $A(t)$ рассмотрим теперь другой линейный оператор, $F(t)$.

Следствие. Если выполнено условие (6.4) и неравенство

$$\|F(t)\| \leq L \quad (0 \leq t < \infty),$$

и если, кроме того, величины α , B , L удовлетворяют

условию (6.5), то нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = (A(t) + F(t))x \quad (6.9)$$

экспоненциально устойчиво.

2. Рассмотрим теперь вопросы устойчивости нулевого решения уравнения (6.1) при постоянно действующих возмущениях. Наряду с уравнением (6.1) рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + R(x, t) + u(x, t). \quad (6.10)$$

Предположим, по-прежнему, что в области D выполнены условия (6.2), (6.4) и (6.5). Кроме того, предположим, что в области D функция $u(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u(x, t)\| \leq r(t), \quad (6.11)$$

где $r(t)$ — функция, интегрируемая на любом конечном интервале времени. Функцию $u(x, t)$ будем рассматривать как постоянно действующее возмущение.

Введем обозначения

$$h_0 = \sup_{t \geq 0} r(t), \quad h_1 = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} r(\tau) d\tau,$$

$$h_2 = \sup_{t \geq 0} \left(\int_t^{t+1} r^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}.$$

Определение. Пусть для любого $\epsilon > 0$ можно подобрать положительные числа h и δ такие, что для решений уравнения (6.10) имеет место неравенство $\|x(t)\| < \epsilon$ при $t \geq 0$, если только $\|x(0)\| < \delta$ и выполнено одно из условий:

$$a) h_0 \leq h; \quad b) h_1 \leq h; \quad c) h_2 \leq h.$$

В этом случае будем говорить, что нулевое решение уравнения (6.1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях ограниченных (в случае а)), ограниченных в среднем (в случае б)), ограниченных в среднеквадратичном (в случае с)).

Очевидно, перечисленные выше случаи а), б) и с) отвечают оценкам постоянно действующих возмущений по норме соответственно пространств L_∞ , M и M_2 .

Лемма 6.1. *Всякое решение уравнения (6.10) удовлетворяет оценке*

$$\|x(t)\| \leq B(\Phi_1(t) + \Phi_2(t)), \quad (6.12)$$

где

$$\Phi_1(t) = e^{-\lambda t} \|x_0\|, \quad x_0 = x(0), \quad (6.13)$$

$$\Phi_2(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} r(s) ds, \quad (6.14)$$

$$\lambda = \alpha - BL.$$

В самом деле, используя формулу Коши, получим

$$x(t) = W(t, 0)x_0 + \int_0^t W(t, s)(R(x, s) + u(x, s)) ds,$$

откуда следует

$$\|x(t)\| \leq B e^{-\alpha t} \|x_0\| + B \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} [L \|x(s)\| + r(s)] ds.$$

Вводя обозначение $\varphi(t) = e^{\alpha t} \|x(t)\|$, получим

$$\varphi(t) \leq B \|x_0\| + B \int_0^t [L\varphi(s) + e^{\alpha s} r(s)] ds,$$

откуда согласно лемме 2.3 (неравенству (2.15)) следует неравенство

$$\varphi(t) \leq B e^{BLT} \left(\|x_0\| + \int_0^t e^{(\alpha - BL)s} r(s) ds \right).$$

Таким образом, получаем оценку

$$\|x(t)\| \leq B e^{-\lambda t} \left(\|x_0\| + \int_0^t e^{\lambda s} r(s) ds \right),$$

эквивалентную оценке (6.12).

Лемма 6.2. *Имеют место при $t \geq 0$ следующие оценки:*

$$\Phi_2(t) \leq \frac{h_0}{\lambda}, \quad (6.15)$$

$$\Phi_2(t) \leq \frac{h_1 e^{\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad (6.16)$$

$$\Phi_2(t) \leq h_2 (1 - e^{-\lambda})^{-1} \left(\frac{e^{2\lambda} - 1}{2\lambda} \right)^{1/2}. \quad (6.17)$$

В самом деле, оценка (6.15) непосредственно следует из неравенств $\Phi_2(t) \leq h_0 e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} ds$ и $\int_0^t e^{\lambda s} ds \leq \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}$.

Чтобы получить оценку (6.16), выделим из числа t целую часть k , т. е. представим t в виде $t = k + \tau_0$, где $0 \leq \tau_0 < 1$. Тогда будет справедлива оценка

$$\Phi_2(t) \leq e^{-k\lambda} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \int_{m-1}^m e^{m\lambda} r(s) ds \right], \quad (6.18)$$

откуда следует

$$\Phi_2(t) \leq h_1 e^{-k\lambda} \left[\sum_{m=1}^{k+1} e^{m\lambda} \right] \leq h_1 \frac{e^\lambda}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Докажем теперь справедливость оценки (6.17). Очевидно, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) &\leq e^{-k\lambda} \sum_{m=1}^{k+1} \int_{m-1}^m e^{\lambda s} r(s) ds \leq \\ &\leq e^{-k\lambda} \sum_{m=1}^{k+1} \left(\int_{m-1}^m e^{2\lambda s} ds \right)^{1/2} \left(\int_{m-1}^m r^2(s) ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\Phi_2(t) \leq h_2 (2\lambda)^{-1/2} e^{-k\lambda} \sum_{m=1}^{k+1} (e^{2\lambda m} - e^{2\lambda(m-1)})^{1/2},$$

откуда следует

$$\Phi_2(t) \leq h_2 (2\lambda)^{-1/2} (e^{2\lambda} - 1)^{1/2} (1 - e^{-\lambda})^{-1},$$

что и доказывает оценку.

Теорема 6.2 (об устойчивости при постоянно действующих возмущениях). Пусть в ε -окрестности точки $x=0$ выполнены условия (6.2), (6.4), (6.5), (6.11) и одно из неравенств

A) $h_0 < \frac{\varepsilon}{2B} \lambda,$

B) $h_1 < \frac{\varepsilon}{2B} e^{-\lambda} (1 - e^{-\lambda}),$

C) $h_2 < \frac{\varepsilon}{2B} \left(\frac{2\lambda}{e^{2\lambda} - 1} \right)^{1/2} (1 - e^{-\lambda}).$

Тогда всякое решение уравнения (6.10), определенное условием $\|x_0\| < \varepsilon/2B$, будет удовлетворять при $t \geq 0$ неравенству $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Докажем теорему. Из леммы 6.1 следует, что решение $x(t)$ удовлетворяет неравенству (6.12). Очевидно, что функция $\Phi_1(t) = e^{-\lambda t} \|x_0\|$ удовлетворяет условию $\Phi_1(t) < \varepsilon/2B$, а функция $\Phi_2(t)$, согласно лемме 6.2, связана при выполнении хотя бы одного из условий А), В), С) аналогичным неравенством $\Phi_2(t) < \varepsilon/2B$. Из (6.12) сразу следует, что $\|x(t)\| < \varepsilon$.

3. Рассмотрим теперь еще одну теорему, которую можно бы было назвать теоремой о диссипативной устойчивости.

Теорема 6.3. Пусть в ε -окрестности точки $x = 0$ выполнены условия (6.2), (6.4), (6.5), (6.11) и одно из неравенств

$$a) \quad h_0 < \rho \frac{\delta}{B} \lambda,$$

$$b) \quad h_1 < \rho \frac{\delta}{B} e^{-\lambda} (1 - e^{-\lambda}),$$

$$c) \quad h_2 < \rho \frac{\delta}{B} \left(\frac{2\lambda}{e^{2\lambda} - 1} \right)^{1/2} (1 - e^{-\lambda}),$$

где $0 < \rho < 1$ и $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2B}$. Существует положительное число T такое, что при $t > T$ и $\|x_0\| < \delta$ решение $x(t)$ уравнения (6.10) удовлетворяет неравенству $\|x(t)\| < \delta$.

Докажем теорему. Пусть T — целое положительное число такое, что $T > \frac{1}{\lambda} \ln \frac{B}{1-\rho}$. При $t > T$ получим оценку

$\Phi_1(t) = e^{-\lambda t} \|x_0\| < (1-\rho) \frac{\delta}{B}$. Если выполнено хотя бы одно из условий а), б), с), то получим, согласно лемме 6.2, $\Phi_2(t) < \rho\delta/B$. Отсюда следует, что решение $x(t)$ уравнения (6.10) будет удовлетворять при $t > T$ неравенству $\|x(t)\| < \delta$.

4. Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + R(x, t) + u(t), \quad (6.19)$$

где операторная функция $A(t)$ и функция $R(x, t)$ и $u(t)$ являются непрерывными и периодическими по t . Если период этих функций один и тот же и равен ω , то, очевидно, замена $t = \tau\omega$ приводит к случаю, когда период будет равен 1. Поэтому будем считать в дальнейшем, что $\omega = 1$. Пусть, как

и ранее, оператор Коши $W(t, \tau)$ уравнения (6.3) удовлетворяет условию (6.4). Пусть, далее, функция $R(x, t)$ удовлетворяет в области D условию Липшица

$$\|R(x, t) - R(y, t)\| \leq L \|x - y\|. \quad (6.20)$$

Предполагая выполненным условие $R(0, t) = 0$ при $t \geq 0$, можем считать, что условие (6.2) также удовлетворено. Пусть, далее, числа α, B, L удовлетворяют условию (6.5), а функция $u(t)$ условию (6.11). Очевидно, что в условии (6.11) можно положить $r(t) = \|u(t)\|$; отсюда следует, что функцию $r(t)$ можно считать периодической функцией t .

Теорема 6.4. Пусть для уравнения (6.19) выполнены перечисленные выше условия и хотя бы одно из условий а), б), с) теоремы 6.3. Существует в области $\|x\| \leq H/2B$ единственное периодическое решение $z(t)$ уравнения (6.19). Если $x(t)$ — любое другое решение этого уравнения, такое, что $\|x(0)\| \leq H/2B$, то $\|x(t) - z(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$; это значит, что периодическое решение $z(t)$ асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.

Докажем теорему. Из теоремы 6.3 следует, что если $\|x(0)\| \leq \delta = H/2B$, то можно указать такое положительное число T , что будем иметь $\|x(T)\| \leq \delta$. Это значит, что шар $\|x\| \leq \delta$ за промежуток времени T перейдет по траекториям уравнения в свою часть. Покажем, что отображение $x(0) \rightarrow x(T)$ удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений, т. е. условия теоремы 1.2. Заметим сначала, что число T было выбрано так, чтобы выполнялось неравенство

$$T > \frac{1}{\lambda} \ln \frac{B}{1-\rho} > \frac{1}{\lambda} \ln B. \quad (6.21)$$

Если x_0 и y_0 — два каких-то элемента из δ -окрестности нулевой точки, то по формуле Коши получим

$$x(T) = W(T, 0)x_0 + \int_0^T W(T, s)[R(x, s) + u(s)] ds,$$

$$y(T) = W(T, 0)y_0 + \int_0^T W(T, s)[R(y, s) + u(s)] ds,$$

откуда сразу следует оценка

$$\|y(T) - x(T)\| \leq \|W(T, 0)\| \|y_0 - x_0\| + \int_0^T \|W(T, s)\| \|R(y, s) - R(x, s)\| ds.$$

Принимая во внимание условия (6.4) и (6.20), получим

$$\|y(T) - x(T)\| \leq B e^{-\alpha T} \|y_0 - x_0\| + \int_0^T B L e^{-\alpha(T-s)} \|y(s) - x(s)\| ds.$$

Вводя обозначение $\varphi(t) = e^{\alpha t} \|y(t) - x(t)\|$, получим

$$\varphi(t) \leq B \|y_0 - x_0\| + B L \int_0^t \varphi(s) ds,$$

откуда согласно лемме 1.1 первой главы, получим

$$\varphi(T) \leq B e^{BLT} \|y_0 - x_0\|,$$

т. е.

$$\|y(T) - x(T)\| \leq B e^{-\lambda T} \|y_0 - x_0\|. \quad (6.21')$$

В силу условия (6.21) имеем $B e^{-\lambda T} < 1$, что и доказывает возможность применения принципа сжатых отображений.

Таким образом, в шаре $\|x\| \leq \delta$ существует единственная точка $z(0)$ такая, что $z(T) = z(0)$. Этой точке соответствует периодическое движение; покажем, что период этого движения в точности равен 1. В самом деле, рассмотрим точку $z(1)$; очевидно, в силу периодичности правой части (6.19) имеем $z(1) = z(T+1)$, следовательно, $z(1)$ также является неподвижной точкой рассмотренного выше отображения. Но так как неподвижная точка должна быть единственной, то должно выполняться равенство $z(0) = z(1)$.

Из неравенства (6.21') следует теперь справедливость заключительной части доказываемой теоремы.

Б. Перейдем теперь к рассмотрению теорем об устойчивости при постоянно действующих возмущениях и об устойчивости по первому приближению, доказательства которых не укладываются в схему, приведенную ранее.

Наряду с уравнением

$$\dot{x} = X(x, t), \quad \text{где } X(0, t) = 0, \quad (6.22)$$

рассмотрим уравнение

$$\dot{y} = X(y, t) + R(y, t). \quad (6.23)$$

Предположим, что выполнены условия, обеспечивающие существование и продолжаемость решений обоих уравнений в области D : $\|x\| \leq M$, $0 \leq t < \infty$.

Приведем определения, необходимые для формулировки дальнейших результатов:

а) Положение равновесия $x = 0$ уравнения (6.22) назовем *равномерно устойчивым в смысле Ляпунова*, если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ можно указать такое положительное число δ , зависящее только от ε , что из $\|x(t_0)\| < \delta$ следует $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.

б) Положение равновесия $x = 0$ уравнения (6.22) называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $\delta > 0$, $t_0 \geq 0$ можно указать число $T > 0$, зависящее только от ε и δ , и такое, что из $\|x(t_0)\| < \delta$ следует $\|x(t_0 + T)\| < \varepsilon$. В следующем определении не предполагается, что точка $x = 0$ является положением равновесия.

в) Точка $x = 0$ называется *ε -устойчивой*, если можно указать $\delta > 0$ такое, что из $\|x(t_0)\| < \delta$ следует $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.

Всюду в дальнейшем через $x(t)$ будем обозначать решение уравнения (6.22), а через $y(t)$ решение уравнения (6.23).

Лемма 6.3. Пусть решение $x = 0$ уравнения (6.22) равномерно асимптотически устойчиво. Определим согласно а) и б) числа $\delta < \varepsilon$ и $T > 0$ такие, что из $\|x(t_0)\| < \delta$ следует

$$\|x(t)\| < \varepsilon/2 \quad \text{при } t \geq t_0, \quad (6.24)$$

$$\|x(t_0 + T)\| < \frac{\delta}{2}. \quad (6.25)$$

Пусть $x(t_0) = y(t_0)$. Если справедливо неравенство

$$\|y(t) - x(t)\| < \delta/2 \quad \text{при } t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (6.26)$$

где t_0 — любое положительное число, то точка $x = 0$ будет ε -устойчивой по отношению к системе (6.23).

В самом деле, из условий леммы (6.24) и (6.26) получаем $\|y(t)\| < \varepsilon/2 + \delta/2 < \varepsilon$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. Далее из (6.24) и (6.25) следует $\|y(t_0 + T)\| < \delta$.

Таким образом, за промежуток времени $[t_0, t_0 + T]$ точка $y(t)$ не выйдет за пределы области $\|y\| < \varepsilon$ и в момент времени $t = t_0 + T$ будет лежать в области $\|y\| < \delta$.

Беря теперь момент времени $t = t_0 + T$ за начальный и проводя аналогичные рассуждения, т. е. рассматривая решение $x(t)$, определяемое условием $x(t_0 + T) = y(t_0 + T)$, убедимся, что точка $y(t)$ не выйдет за пределы области $\|y\| < \varepsilon$ при $t_0 + T \leq t \leq t_0 + 2T$, и, кроме того, получим $\|y(t_0 + 2T)\| < \delta$.

Продолжая далее аналогичные рассуждения, убедимся, что $\|y(t)\| < \varepsilon$ при $t_0 + (n-1)T \leq t \leq t_0 + nT$ и $\|y(t_0 + nT)\| < \delta$, что и доказывает лемму.

Положение равновесия $x = 0$ назовем *экспоненциально устойчивым в малом*, если можно указать такое $\varepsilon > 0$, что любое решение $x(t)$ уравнения (6.22) при $\|x(t_0)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad (6.27)$$

где $\alpha > 0$, $B > 0$ не зависят от t_0 .

Лемма 6.4. Если при $x(t_0) = y(t_0)$ и $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ имеет место неравенство

$$\|x(t) - y(t)\| \leq 1/4 \|x(t_0)\|, \quad (6.28)$$

где t_0 — любое положительное число и точка $x = 0$ экспоненциально устойчива в малом для уравнения (6.22), то эта точка будет экспоненциально устойчивой в малом и для уравнения (6.23).

Докажем лемму. Пусть $T = 1/\alpha \ln 4B$ и $\delta = \varepsilon/2B$, где ε — произвольное положительное число, для которого справедливо неравенство (6.27).

Если $\|x(t_0)\| < \delta$, то имеем $\|x(t)\| < \varepsilon/2$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, и, кроме того, $\|x(t_0 + T)\| < \delta/4$. Из условия (6.28) следует, что $\|y(t) - x(t)\| < \delta/4$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, откуда получим $\|y(t)\| < \varepsilon$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ и $\|y(t_0 + T)\| < \delta/2$.

Предположим теперь, что доказано

$$\|y(t)\| < \varepsilon/2^{n-1} \quad \text{при} \quad t_0 + (n-1)T \leq t \leq t_0 + nT$$

$$\text{и} \quad \|y(t_0 + nT)\| < \delta/2^n$$

Покажем, что имеют место неравенства

$$\|y(t)\| < \varepsilon/2^n \quad \text{при} \quad t_0 + nT \leq t \leq t_0 + (n+1)T \quad (6.29)$$

и

$$\|y(t_0 + (n+1)T)\| < \delta/2^{n+1}. \quad (6.30)$$

В самом деле, из (6.27) следует, что если $\|x(t_0)\| < \delta/2^n$, то $\|x(t)\| < \varepsilon/2^{n+1}$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ и $\|x(t_0 + T)\| < \delta/2^{n+2}$. Условие (6.28) дает $\|x(t) - y(t)\| < \delta/2^{n+2}$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, откуда следует, что $\|y(t)\| < \varepsilon/2^{n+1} + \delta/2^{n+2} < \varepsilon/2^n$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ и $\|y(t_0 + T)\| < \delta/2^{n+1}$.

Принимая теперь в качестве t_0 число $t_0 + nT$, убеждаемся в справедливости неравенств (6.29) и (6.30). Из этих неравенств легко выводится неравенство

$$\|y(t)\| \leq 4B\delta \exp(-\alpha \ln 2 / \ln 4B(t - t_0)),$$

доказывающее утверждение нашей леммы.

Пусть теперь в области D функция $X(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|X(x, t) - X(y, t)\| \leq L \|x - y\|, \quad (6.31)$$

а функция $R(x, t)$ — условию

$$\|R(x, t)\| \leq \eta, \quad (6.32)$$

где η — положительная постоянная.

Теорема 6.5 (об устойчивости при постоянно действующих возмущениях). *Если нулевое решение уравнения (6.22) равномерно асимптотически устойчиво, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, что для любого решения $y(t)$ уравнения (6.23) из неравенств (6.32) и $\|y(t_0)\| < \delta$ следует при $t \geq t_0$ неравенство*

$$\|y(t)\| < \varepsilon.$$

В самом деле, согласно лемме 6.3 выберем для заданного $\varepsilon > 0$ числа $T > 0$ и $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства (6.24) и (6.25). Из теоремы 2.6 выводим неравенство

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t_0+T} e^{L(t-s)} \eta ds = \eta/L (e^{LT} - 1).$$

Очевидно, если η выбрать исходя из неравенства $\eta/L \times \times (e^{LT} - 1) < \delta/2$, то все условия леммы 6.3 будут выполнены и мы получим требуемый результат.

Теорема 6.5 может быть усилена в том смысле, что вместо неравенства (6.32) можно потребовать выполнение неравенства $\|R(x, t)\| \leq \eta(t)$ с оценкой $\eta(t)$ по норме в пространствах M, M_3 , как это делалось при доказательстве леммы 6.2.

Теорема 6.6. Пусть выполнено в области D условие (6.31) и условие

$$\|R(x, t)\| \leq M \|x\|. \quad (6.33)$$

Если нулевое решение уравнения (6.22) экспоненциально устойчиво в малом, то при достаточно малом значении M нулевое решение уравнения (6.23) также будет экспоненциально устойчивым в малом.

Докажем теорему. Пусть $T = \frac{1}{\alpha} \ln 4B$, где α и B взяты из условия (6.27). Принимая во внимание условия (6.31), (6.33) и неравенство $\|x(t)\| \leq \delta B$, вытекающее из (6.27), можно получить при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ неравенство

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{MB\delta}{M+L} (e^{(M+L)(t-t_0)} - 1), \quad (6.34)$$

которое мы установили при доказательстве леммы 4.4 второй главы. Выбирая M достаточно малым, мы можем добиться, чтобы правая часть (6.34) стала меньше $\delta/4$. Далее применяем лемму 6.4.

6. Отметим теперь работы, в которых в случае конечномерного фазового пространства рассматривались затронутые выше вопросы.

Наиболее ранние работы, посвященные вопросам исследования устойчивости при ограниченных постоянно действующих возмущениях, принадлежат С. И. Горшину [108] и И. Г. Малкину ([8], стр. 308). Устойчивость движений при возмущениях, ограниченных в среднем, исследовалась в работе В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовского [109]. Исследование устойчивости периодического движения при ограниченных постоянно действующих возмущениях было проведено Н. А. Артемьевым [110]. Вопросы существования, сохранения и устойчивости периодического движения при ограниченных по модулю внешних воздействиях рассмотрены и

работах Н. Н. Красовского [111] и А. Антосевича [112] на основе метода функций Ляпунова.

Исследование влияния возмущений, ограниченных в среднеквадратичном, исследование периодических движений при возмущениях, ограниченных в среднем и среднеквадратичном, проведено в работе [113]. Идеи этой работы послужили основой для исследования действия случайных возмущений [114] и для исследования вопросов устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений [85, 91].

Леммы 6.3 и 6.4 даны в работе [115], где рассматривался более общий случай, а именно, не требовалось свойство единственности решений и исследовалась устойчивость множества. Теорема 6.6 опубликована в статье [116].

Идеи лемм 6.3 и 6.4 послужили основой целого ряда работ по теории разностных уравнений [117, 118], уравнений с запаздываниями [77], интегро-дифференциальных уравнений [84] и уравнений в банаховом пространстве [119].

§ 7. Устойчивость по отношению к импульсным воздействиям

1. Большой интерес представляет исследование случая, когда возмущения, действующие на систему, имеют импульсный характер. Примером импульсного возмущения может служить, в частности, функция $u(t) = x_0 \delta(t - t_0)$, где x_0 — некоторый фиксированный элемент пространства E , $t_0 \geq 0$, а $\delta(t - t_0)$ — известная функция Дирака.

Если выполнено условие $x(t) = 0$ при $t < t_0$, то после действия указанного возмущения, как нетрудно видеть, решенные задачи

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \quad x(0) = 0 \quad (7.1)$$

будет при $t > t_0$ иметь вид

$$x(t) = W(t, t_0)x_0. \quad (7.2)$$

Это значит, что возмущение $u(t)$ вызывает мгновенный переход в момент времени $t = t_0$ нулевой точки в точку x_0 .

Рассмотрим функцию $e(t)$ (функцию единичного скачка), определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} e(t) &= 0 & \text{при } t < t_0, \\ e(t) &= 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что решение (7.2) может быть представлено формулой

$$x(t) = \int_0^t W(t, s) x_0 ds, \quad (7.3)$$

где интеграл следует рассматривать как обобщенный интеграл Стильтеса.

Если рассматривать функцию $e(t)$ как некоторое входное распределение, то соотношение (7.3) показывает, как преобразуется это распределение в новое распределение $x(t)$ при прохождении через некоторое звено автоматической системы, описываемое уравнением (7.1). Таким образом, если встать на ту точку зрения, что уравнение (7.1) описывает закон преобразования входного распределения в выходное, то мы получим новую интересную задачу, относящуюся к теории обобщенных функций. Однако рамки настоящей книги не позволяют провести полное описание перехода входных обобщенных сигналов в выходные. Пользуясь несложным аппаратом интеграла Стильтеса, который мы коротко рассмотрели в § 1, нетрудно изучить важный класс импульсных воздействий вида

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta(t - t_i), \quad (7.4)$$

где функция $u_0(t)$ интегрируема на любом конечном интервале, a_i — элементы пространства E .

2. Рассмотрим сначала уравнение

$$x(t) = \int_0^t W(t, s) dg(s), \quad (7.5)$$

соответствующее задаче (7.1).

Теорема 7.1. Для того чтобы всякой функции $g(t)$ ограниченной вариации на множестве $0 \leq t < \infty$ соответствовала в силу (7.5) ограниченная (по норме L_∞) функция $x(t)$, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\|W(t, t_0)\| \leq W_0 < \infty$$

при любых $0 \leq t_0 \leq t < \infty$.

В самом деле, чтобы показать необходимость условия, достаточно взять функцию $g(t)$ в следующем виде:

$$g(t) = \int_0^t u(t) dt,$$

где $u(t)$ принадлежит пространству L . Таким образом, величина

$$\int_0^{\infty} \|u(t)\| dt$$

конечна и функция $g(t)$ будет функцией ограниченной вариации на множестве $t \geq 0$. По условию теоремы функция $x(t)$ должна быть ограниченной; используя теорему 5.7, получим нужное нам неравенство $\|W(t, t_0)\| \leq W_0 < \infty$ при $0 \leq t_0 \leq t$.

Достаточность условия теоремы вытекает из неравенства (1.9). Из этого неравенства следует, что

$$\|x(t)\| \leq W_0 \bigvee_0^{\infty} g(t),$$

откуда и получаем ограниченность $x(t)$.

Рассмотрим теперь пространство U , элементами которого являются функции $g(t)$, такие, что

$$\|g(t)\|_U = \sup_{t > 0} \bigvee_t^{t+1} g(t) < \infty.$$

Теорема 7.2. Пусть выполнено условие

$$\sup_{t > 0} \int_t^{t+1} \|A(t)\| dt < \infty.$$

Для того чтобы всякой функции $g(t) \in U$ соответствовала в силу (7.5) ограниченная функция $x(t)$, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\|W(t, t_0)\| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (7.6)$$

где $\alpha > 0$, $B \geq 1$ не зависят от t_0 .

В самом деле, чтобы доказать необходимость условия, рассмотрим подпространство пространства U , состоящее из

всех функций вида $g(t) = \int_0^t u(t) dt$, где $u(t)$ принадлежит пространству \mathbf{M} , что соответствует условию

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|u(t)\| dt < \infty.$$

Так как $\bigvee_t^{t+1} g(t) \leq \int_t^{t+1} \|u(t)\| dt$, то $g(t)$ принадлежит \mathbf{U} .

Очевидно, что в данном случае имеем

$$x(t) = \int_0^t W(t, s) u(s) ds.$$

Но так как $u(s) \in \mathbf{M}$ и $x(t)$ — ограниченная непрерывная функция, то из теоремы 5.6 следует справедливость (7.6).

Докажем достаточность условия. Согласно (7.6) и (1.10) имеем

$$\|x(t)\| \leq B e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dv(s), \quad (7.7)$$

где $v(s) = \bigvee_0^s g(s)$.

Оценим величину

$$\Phi(t) = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dv(s).$$

Для этого выделим из числа t целую часть, т. е. представим t в виде $t = k + \tau$, $0 \leq \tau < 1$. Следуя идее доказательства леммы 6.2, имеем

$$\Phi(t) \leq e^{-k\alpha} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \int_{m-1}^m e^{\alpha m} dv(s) \right].$$

Если

$$\sup_{t \geq 0} \bigvee_t^{t+1} g(t) = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} dv(s) = h < \infty,$$

то получим

$$\Phi(t) \leq h e^{-k\alpha} \sum_{m=1}^{k+1} e^{\alpha m} \leq \frac{h e^{\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}. \quad (7.8)$$

Таким образом, оценка (7.7) принимает вид

$$\|x(t)\| \leq \frac{B h e^{\alpha}}{1 - e^{-\alpha}},$$

что и дает требуемый результат.

3. Рассмотрим теперь нелинейную задачу.

Пусть закон преобразования входного воздействия задан формулой

$$x(t) = \int_0^t W(t, s) R(x, s) ds + \int_0^t W(t, s) dg(s). \quad (7.9)$$

Легко видеть, что для случая дифференцируемой функции $g(s)$ задача (7.9) эквивалентна задаче

$$\dot{x} = A(t)x + R(x, t) + u(t), \quad x(0) = 0, \quad (7.10)$$

где $u(t) = \dot{g}(t)$.

Предположим выполненными условия (7.6) и

$$\|R(x, t)\| \leq L \|x\| \quad (7.11)$$

в области D : $\|x\| \leq H$, $0 \leq t < \infty$.

Предположим также, что справедливо неравенство

$$\lambda = \alpha - LB > 0. \quad (7.12)$$

Теорема 7.3. Пусть

$$\sup_{t \geq 0} \bigvee_t^{t+1} g(t) = h.$$

Если выполнены условия (7.6), (7.11) и (7.12), то справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq B \frac{h e^{\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

В самом деле, имеем

$$\|x(t)\| \leq B L e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \|x(s)\| ds + B e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dv(s),$$

где

$$v(s) = \bigvee_0^s g(s).$$

Для функции $\varphi(t) = \|x(t)\| e^{\alpha t}$ справедливо неравенство

$$\varphi(t) \leq BL \int_0^t \varphi(s) ds + B \int_0^t e^{\alpha s} dv(s).$$

В силу леммы 2.3 (неравенство (2.14)) имеем

$$\varphi(t) \leq B e^{\beta L t} \int_0^t e^{\lambda s} dv(s),$$

откуда получим

$$\|x(t)\| \leq B e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dv(s).$$

Пользуясь теперь оценкой 7.8, получим требуемый результат.

Теорема 7.3 является теоремой об устойчивости по отношению к возмущениям, которые могут в частном случае быть и мгновенными.

4. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = W(t, 0) x_0 + \int_0^t W(t, s) R(x, s) ds + \int_0^t W(t, s) dg(s), \quad (7.13)$$

где $R(x, t)$ обладает свойством $R(0, t) = 0$, $g(-0) = g(+0)$. Это уравнение соответствует задаче (7.10) с той лишь разницей, что $x(0) = x_0$. Предположим, что оператор Коши удовлетворяет условию

$$W(t+1, s+1) = W(t, s); \quad (7.14)$$

кроме того, предположим, что $R(x, s)$ и $g(s)$ также являются периодическими функциями с периодом 1. Очевидно, условие (7.14) эквивалентно требованию периодичности операторной функции $A(t)$, входящей в уравнение (7.10).

Пусть, кроме того, по-прежнему выполнены условия (7.6) и (7.12). Вместо условия (7.11) потребуем, чтобы в области D

выполнялось условие Липшица

$$\|R(x, t) - R(y, t)\| \leq L \|x - y\|. \quad (7.15)$$

Теорема 7.4. Пусть $\|x_0\| \leq \delta$, где $\delta = H/2B$ и

$$\sup_{t \geq 0} \bigvee_t^{t+1} g(t) = h \leq \rho \frac{\delta}{B} e^{-\lambda} (1 - e^{-\lambda}), \quad 0 < \rho < 1. \quad (7.16)$$

Для решения уравнения (7.13) справедлива оценка $\|x(t)\| \leq H$. Кроме того, можно указать такое x_0 , $\|x_0\| \leq \delta$, что соответствующее решение $x(t)$ будет периодическим и асимптотически устойчивым. Всякое другое решение, определяемое начальной точкой из области $\|x\| \leq \delta$, будет притягиваться к указанному периодическому решению.

Докажем теорему. Повторяя доказательство леммы 6.1 и используя снова лемму 2.3 (неравенство (2.14)), установим, что

$$\|x(t)\| \leq Be^{-\lambda t} \|x_0\| + Be^{-\lambda} \int_0^t e^{\lambda s} dv(s).$$

Используя оценку предыдущей теоремы, получим

$$\|x(t)\| \leq Be^{-\lambda t} \delta + B \frac{he^{\lambda}}{1 - e^{-\lambda}},$$

откуда, в силу (7.16) следует

$$\|x(t)\| \leq Be^{-\lambda t} \delta + \rho \delta < (B + \rho) \delta < H.$$

С другой стороны, при целом $T > \frac{1}{\lambda} \ln \frac{B}{1 - \rho}$ получим $\|x(T)\| \leq \delta$ и, следовательно, точка x_0 переходит снова в δ -окрестность точки $x = 0$. Нетрудно видеть, что в данном случае преобразование $x_0 \rightarrow x(T)$ непрерывно и однозначно. Далее, повторяя доказательство теоремы 6.4, можно показать, что указанное преобразование удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений. Отсюда следует существование и единственность периодического движения, которое, правда, может иметь счетное число разрывов. Асимптотическая устойчивость периодического решения устанавливается точно так же, как и при доказательстве теоремы 6.4.

В конечномерном случае последняя теорема была рассмотрена в статье [113].

§ 8. Задача осуществления движения по заданной траектории

1. Рассмотрим теперь задачу отыскания управления, обеспечивающего точное или приближенное осуществление заданного процесса. Задача ставится следующим образом. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = X(x, \eta, t) + u(y, t), \quad (8.1)$$

где $x(t)$, $\eta(t)$, $y(t)$ — функции со значениями в банаховом пространстве E , функция $\eta(t)$ является, вообще говоря, случайной. Предположим, что в фазовом пространстве E задана при $0 \leq t < T$ ($0 < T \leq \infty$) некоторая траектория $x = \psi(t)$. Предполагая, что поступает некоторая информация об изменении функции $\eta(t)$, играющей роль помехи, требуется подобрать такое управление за счет выбора $y(t)$, чтобы некоторое решение уравнения (8.1) точно или приближенно осуществляло движение по траектории $x = \psi(t)$ на заданном интервале времени. Задача может быть осложнена ограничением множества возможных значений функции $y(t)$; это множество может, например, быть ограниченным, компактным, иметь конечную размерность и т. д.

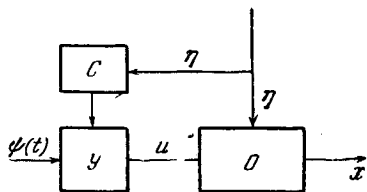


Рис. 18.

Структурная схема соответствующей автоматической системы дана на рис. 18. На этом рисунке O — объект регулирования, назначением которого является получение заданного режима $x = \psi(t)$. Чтобы осуществить этот режим вводится звено y , предназначенное для выработки управления u . При формировании управления используется информация об осуществляемом режиме $\psi(t)$ и помехе $\eta(t)$, причем информация о последней может поступить с искажением в силу ряда причин. Например, такое искажение может наступить в силу появления запаздываний, инерционности в линии связи C , ошибок измерения, случайных ошибок и т. д.

Так как управление рассматриваемой автоматической системы изменяется в соответствии с заранее заданной функцией

времени $\psi(t)$, то рассматриваемая система является программной автоматической системой.

Если бы поставленная таким образом задача программного регулирования имела точное решение, то искомое управление определялось бы из уравнения

$$u(y(t), t) = \psi(t) - X(\psi(t), \eta(t), t). \quad (8.2)$$

Однако уравнение (8.2) во многих случаях является неразрешимым относительно управляющей функции $u(t)$. Неразрешимость указанного уравнения может быть следствием ограничений, наложенных на норму функции $u(t)$, ограничений размерности $u(t)$, наличия неполной или искаженной информации о внешнем воздействии $\eta(t)$. Может случиться и так, что управление можно выбирать только из какого-либо узко очерченного класса функций, например, кусочно-постоянных функций, тригонометрических полиномов и т. д.

2. В уравнении (8.1) проведем замену $z = x - \psi(t)$; новое уравнение будет иметь вид

$$\dot{z} = Z(z, \eta, t) + \Delta(y, \psi(t), \eta(t), t), \quad (8.3)$$

где

$$\begin{aligned} Z(z, \eta, t) &= X(z + \psi(t), \eta(t), t) - X(\psi(t), \eta(t), t), \\ \Delta(y, \psi(t), \eta(t), t) &= X(\psi(t), \eta(t), t) - \psi(t) + u(y, t) = \Delta(t). \end{aligned}$$

В уравнении возмущенного движения функция $\Delta(t)$ определяет ошибку приближения программирующей функции, отклонение решения $z(t)$ уравнения (8.3) от нуля совпадает с отклонением решения $x(t)$ уравнения (8.1) от заданной функции $\psi(t)$. Основной задачей здесь является оценка $\|z(t)\|$ в зависимости от $\|\Delta(t)\|$. Эту задачу в общем виде мы рассматривали в § 2, а для случая, когда Z — линейный оператор относительно z , указанная задача решалась в § 4 как задача о накоплении возмущений.

Если идет речь об осуществлении заданного режима на бесконечном интервале времени $0 \leq t < \infty$, то, как нетрудно видеть, приближенное решение задачи возможно, если нулевое решение уравнения

$$\dot{z} = Z(z, \eta, t) \quad (8.4)$$

устойчиво по отношению к постоянно действующим возмущениям, ограниченным по отношению к той метрике, в кото-

рой оценивается ошибка приближения $\Delta(t)$. Теоремы 6.2 и 6.3 дают возможность оценить точность приближения $\|z(t)\|$ программируемого режима с помощью нормы $\Delta(t)$, взятой в пространствах C, M, M_2 . Теорема 6.4 позволяет получить соответствующий результат в случае осуществления периодического режима.

Если программируемый режим является разрывным, то для указанных оценок следует привлечь теоремы § 7.

Наконец, если мы хотим осуществить случайный режим, подчеркивая стохастический характер рассматриваемых уравнений, то следует принять во внимание пример 5 из § 3. Проведенные там рассуждения позволяют свести поставленную задачу к детерминированному случаю [114].

Из теоремы 6.5 следует, что устойчивость при постоянно действующих возмущениях гарантируется равномерной асимптотической устойчивостью нулевого решения уравнения (8.4). Отсюда возникает интересная задача.

Назовем режим $\psi(t)$ *устойчивым по отношению к уравнению* $\dot{x} = X(x, t)$, если нулевое решение уравнения $\dot{z} = X(z + \psi(t), t) - X(\psi(t), t)$ равномерно асимптотически устойчиво. Из предыдущего ясно, что только устойчивые режимы могут претендовать на хорошее приближение при всех $t \geq 0$.

Очевидно, в случае, когда оператор $X(x, t)$ линеен относительно x , всякий режим будет устойчивым, если нулевое решение уравнения $\dot{x} = X(x, t)$ равномерно асимптотически устойчиво.

Таким же свойством обладают системы, рассмотренные Н. Н. Красовским [120]. Эти системы определяются тем, что для каждой из них можно указать постоянную симметричную матрицу A , имеющую положительные собственные числа, и такую, что симметризованная матрица

$$\{B\}_{ik} = \left\{ \left(A \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{ik} + \left(A \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{ki} \right\},$$

где

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k},$$

имеет отрицательные собственные числа μ_i , удовлетворяющие неравенству $\mu_i < -\alpha$, $\alpha > 0$ во всех точках пространства, $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$, $0 \leq t < \infty$. Здесь X_i — проекции векторной функции $X(x, t)$.

3. Рассмотрим теперь в n -мерном линейном векторном пространстве E_n дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = X(x, t) + \sum_{k=1}^m c_k y_k(t). \quad (8.5)$$

Здесь x , c_k — n -мерные векторы, y_k — скалярные функции. Если ставится задача осуществления процесса $x = \psi(t)$ на промежутке $0 \leq t \leq T$, то замена $z = x - \psi(t)$ сведет уравнение (8.5) к уравнению

$$\dot{z} = Z(z, t) + \Delta(t), \quad (8.6)$$

где

$$Z(z, t) = X(z + \psi(t), t) - X(\psi(t), t),$$

$$\Delta(t) = X(\psi(t), t) - \dot{\psi}(t) + \sum_{k=1}^m c_k y_k(t).$$

Пусть в области $\|z\| \leq H$, $0 \leq t \leq T$ функция $Z(z, t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|Z(z_1, t) - Z(z_2, t)\| \leq L \|z_1 - z_2\|.$$

Тогда согласно теореме 2.6 решение $z(t)$ уравнения (8.6) может быть оценено следующим образом:

$$\|z(t)\| \leq \int_0^t e^{L(t-s)} \Delta(s) ds.$$

Очевидно, чтобы решить задачу приближенного осуществления процесса $z=0$, необходимо за счет выбора либо векторов c_k , либо функций $y_k(t)$, либо тех и других, сделать векторную функцию $\Delta(s)$ достаточно малой по отношению к той или иной метрике.

Пусть будет

$$r(t) = \dot{\psi} - X(\psi(t), t);$$

тогда будем иметь

$$\Delta(t) = \sum_{k=1}^m c_k y_k(t) - r(t)$$

и, следовательно, задача сводится к задаче аппроксимации функции $r(t)$ линейным агрегатом $y(t) = \sum_{k=1}^m c_k y_k(t)$. Ука-

званная задача является очевидно задачей теории приближений. Проще всего такие задачи решаются в метрике L_2 , т. е. в терминах теории среднеквадратических приближений. Напомним некоторые основные положения этой теории [121].

В линейном пространстве H сопоставим каждой паре элементов x, y некоторое число (x, y) , которое назовем скалярным произведением. Пусть будут выполнены следующие условия:

$$a) \quad (x, y) = (y, x),$$

$$b) \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z),$$

$$c) \quad (x, x) \geq 0,$$

$$d) \quad (x, x) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0.$$

Норму в пространстве H введем по правилу

$$\|x\|^2 = (x, x).$$

Пространство H назовем *пространством Гильберта*. Если $(x, y) = 0$, то элементы x и y будем называть ортогональными.

Систему элементов x_1, \dots, x_m из H назовем *линейно независимой*, если из

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0,$$

где α_k — вещественные числа, следует $\alpha_k = 0$ для любого значения k . Систему элементов x_1, \dots, x_m назовем *ортонормированной*, если $(x_i, x_k) = 0$ при $i \neq k$, $(x_i, x_i) = 1$ при $i = 1, 2, \dots, m$.

Если x_1, \dots, x_m — система линейно независимых элементов пространства H , то можно построить ортонормированную систему y_1, \dots, y_m , элементы которой являются линейными комбинациями x_1, \dots, x_m , и наоборот.

Пусть H_m — некоторое m -мерное подпространство пространства H , т. е. подпространство, порожденное m линейно независимыми элементами h_1, \dots, h_m , и пусть f — произвольный элемент пространства H . Поставим задачу подбора таких чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, чтобы величина

$$\|f - \alpha_1 h_1 - \dots - \alpha_m h_m\|$$

была наименьшей.

Такая задача всегда имеет решение и оно единственно. Если

$$h_0 = \sum_{k=1}^m \alpha_k h_k$$

является наилучшим приближением в указанном выше смысле, то справедливо равенство

$$(f - h_0, h) = 0, \quad (8.7)$$

где h — любой элемент из H_m .

Равенство (8.7) означает, что элемент $f - h_0$ ортогонален к любому элементу h из H_m . Этот факт, очевидно, допускает простую наглядную интерпретацию, если H — конечномерное векторное пространство, то h_0 в этом случае является проекцией вектора f на гиперплоскость H_m .

Беря в качестве h любой из порождающих элементов h_i из (8.7), выводим

$$(f - \sum_{k=1}^m \alpha_k h_k, h_i) = 0,$$

откуда следует

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k (h_k, h_i) = (f, h_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8.8)$$

Система (8.8) дает возможность найти числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Определитель этой системы

$$\Gamma(h_1, \dots, h_m) = \begin{vmatrix} (h_1, h_1) & \dots & (h_1, h_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (h_m, h_1) & \dots & (h_m, h_m) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама*. Если элементы h_1, \dots, h_m линейно независимы, то определитель Грама всегда положителен. С помощью определителя Грама можно найти ошибку приближения, т. е. величину

$$\delta = \|f - h_0\|.$$

Справедлива формула

$$\delta^2 = \frac{\Gamma(h_1, \dots, h_m, f)}{\Gamma(h_1, \dots, h_m)}. \quad (8.9)$$

Если система $\{h_i\}$ ортонормированная, то имеем

$$\delta^2 = (f, f) - \sum_{i=1}^m \alpha_i^2. \quad (8.10)$$

Если система $\{h_i\}$ ортонормированных векторов является бесконечной, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i,$$

где $\alpha_i = (f, h_i)$, называется *рядом Фурье*. Бесконечная ортонормированная система называется *полной*, если не существует элемента, отличного от нуля, который был бы ортогонален к каждому элементу рассматриваемой системы.

Если пространство H сепарабельно, т. е. в нем имеется счетное всюду плотное множество элементов, то в H всегда существует счетная и полная ортонормированная система элементов. Из (8.10) следует в этом случае неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \leq \|f\|^2.$$

Если пространство H сепарабельно и полно, то ряд Фурье любого элемента f по полной ортонормированной системе сходится к f и имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|f\|^2.$$

4. Вернемся теперь снова к нашей задаче, т. е. к задаче аппроксимации векторной функции $r(t)$ линейным агрегатом

$$\sum_{k=1}^m c_k y_k(t).$$

Задача А. Подобрать векторы c_k таким образом, чтобы ошибка

$$\delta = \left(\int_0^T \|\Delta(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$$

стала наименьшей.

Здесь

$$\|\Delta(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m c_{ik} y_k(t) - r_i(t) \right)^2,$$

c_{ik} — проекции вектора c_k . Имеем

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2,$$

где

$$\delta_i^2 = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m c_{ik} y_k(t) - r_i(t) \right)^2 dt$$

и задача сводится к минимизации каждой из частных ошибок δ_i . Такое разделение можно сделать потому, что выбор величин c_{ik} при одном значении i не влияет на выбор этих величин при другом значении i .

Рассмотрим пространство H , элементами которого являются функции $f(t)$ с интегрируемым квадратом на отрезке $[0, T]$. Скалярное произведение в H введем по правилу

$$(f_1, f_2) = \int_0^T f_1(t) f_2(t) dt.$$

Подпространство H_m теперь будет подпространством, порожденным функциями $y_1(t), \dots, y_m(t)$. Таким образом, ставится задача отыскания наилучшего среднеквадратического приближения функции $r_i(t)$ линейным агрегатом

$$\sum_{k=1}^m c_{ik} y_k(t).$$

Согласно (8.8) для определения величин c_{ik} при данном значении i имеем систему

$$\sum_{k=1}^m c_{ik} (y_k, y_j) = (r_i, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (8.11)$$

Для определения векторов c_k согласно (8.11) можем получить систему

$$\sum_{k=1}^m c_k (y_k, y_j) = (r, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (8.12)$$

Квадрат ошибки приближения в данном случае будет равен

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(y_1, \dots, y_m, r_i)}{\Gamma(y_1, \dots, y_m)}.$$

Задача В. При заданных векторах c_k найти систему функций $y_1(t), \dots, y_m(t)$, $m \leq n$, минимизирующих δ .

Прежде всего следует заметить, что выбор значений функций $y_k(t)$ в данный момент t не влияет на выбор значений этих функций в любой другой момент времени. Поэтому задача сводится к минимизации величины

$$\|\Delta(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m c_{ik} y_k(t) - r_i(t) \right)^2.$$

Теперь уже в качестве гильбертова пространства H следует рассматривать пространство n -мерных векторов c_k , а в качестве подпространства H_m будет фигурировать подпространство, порожденное векторами c_1, \dots, c_m .

Согласно (8.8) получаем систему для определения $y_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^m y_k(t) (c_k, c_j) = (r(t), c_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь выражения (c_k, c_j) , $(r(t), c_j)$ означают скалярные произведения соответствующих векторов в обычном смысле.

Согласно (8.9) получим

$$\delta^2 = \int_0^T \|\Delta(t)\|^2 dt = \frac{1}{\Gamma(c_1, \dots, c_m)} \int_0^T \Gamma(c_1, \dots, c_m, r(t)) dt.$$

Задача имеет простую геометрическую интерпретацию. Обозначим через H_m плоскость, порожденную векторами c_1, \dots, c_m . В n -мерном пространстве H задана кривая $z = r(t)$; требуется найти кривую

$$z = \sum_{k=1}^m c_k y_k(t),$$

которая имеет наименьшее среднеквадратичное отклонение

от заданной кривой. Решение задачи состоит в том, что каждую точку искомой кривой мы получаем как проекцию на плоскость H_m соответствующей точки первой кривой $z = r(t)$. Отсюда следует, что решение задачи не изменится, если в качестве порождающей системы векторов c_1, \dots, c_m возьмем эквивалентную ей ортонормированную систему. В этом случае получим

$$y_j(t) = (r(t), c_j), \quad (8.13)$$

$$\delta^2 = \int_0^T r^2(t) dt - \sum_{j=1}^m (r(t), c_j)^2 dt. \quad (8.14)$$

Задача С. Найти оптимальную систему векторов c_k и функций $y_k(t)$ минимизирующих δ .

Рассмотрим матрицу B , элементы которой имеют вид

$$b_{ik} = \int_0^T r_i(t) r_k(t) dt,$$

где $r_i(t)$ — проекции вектора $r(t)$.

Так как матрица B симметрична, то ее собственные числа вещественны. Более того, собственные числа матрицы B неотрицательны. В самом деле, матрица B является матрицей знакоположительной квадратичной формы

$$I(x) = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} x_i x_k = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right)^2 dt.$$

Отсюда согласно § 10 первой главы выводим, что наименьшее собственное число λ_n , как минимум формы $I(x)$ на единичной сфере, должно быть неотрицательным. Расположим собственные числа матрицы B в порядке убывания

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Каждому собственному числу λ_k соответствует по крайней мере один собственный вектор c_k . Известно ([5], стр. 20), что систему собственных векторов можно ортонормировать. Таким образом получим ортонормированную систему собственных векторов матрицы B .

Теорема 8.1. Ортонормированная система собственных векторов c_1, \dots, c_m матрицы B является оптимальной системой управляющих векторов, причем, если система управляющих функций $y_k(t)$ выбрана

согласно (8.13), то

$$\delta^2 = \sum_{k=m+1}^n \lambda_k. \quad (8.15)$$

В самом деле, если система векторов c_1, \dots, c_m ортонормирована, то согласно формуле (8.14) имеем

$$\delta^2 = \int_0^T r^2(t) dt - \sum_{k=1}^m \int_0^T (c_k, r(t))^2 dt.$$

Необходимо систему векторов подобрать таким образом, чтобы сумма

$$\sum_{k=1}^m \int_0^T (c_k, r(t))^2 dt$$

была наибольшей. Рассмотрим первое слагаемое этой суммы:

$$\begin{aligned} I_1 = I(c_{1i}) &= \int_0^T (c_1, r(t))^2 dt = \\ &= \sum_{i,k=1}^n \left(\int_0^T r_i(t) r_k(t) dt c_{1k} c_{1i} \right) = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} c_{1i} c_{1k}. \end{aligned}$$

Здесь c_{ik} — проекции вектора c_i . Задача сводится к тому, чтобы найти максимум квадратичной формы $I(c_{1i})$ при условии

$$\sum_{i=1}^n c_{1i}^2 = 1.$$

Согласно § 10 первой главы искомый максимум равен наибольшему собственному числу λ_1 и достигается для собственного вектора c_1 , отвечающего этому числу. Чтобы сделать максимальным следующее слагаемое,

$$I_2 = \int_0^T (c_2, r(t))^2 dt = I(c_{2i})$$

при дополнительных условиях $(c_1, c_2) = 0$, $c_2^2 = 1$, нужно взять собственный вектор c_2 , отвечающий следующему собственному числу. Согласно экстремальной теории квадратичных форм ([5]), максимум I_2 будет равен λ_2 . Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то в качестве c_2 следует выбрать среди бесконечного множества собственных векторов кратного корня λ_1 вектор,

ортогональный к c_1 . Пользуясь аналогичными рассуждениями, получим полное решение нашей задачи.

Так как

$$\int_0^T r^2 dt = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

есть инвариант квадратичной формы I , то формула (8.15) непосредственно вытекает из формулы (8.14).

Заметим теперь, что добиться точного осуществления траектории путем выбора оптимальной системы управляющих функций и управляющих векторов можно при $m \leq n$ только в том случае, если

$$\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Но это означает, что уравнение

$$D(\lambda) = |B - \lambda E| = 0 \quad (E \text{ — единичная матрица})$$

имеет нулевой корень кратности $n - m$. Условия существования такого корня имеют вид $D(0) = D'(0) = \dots = D^{(n-m+1)}(0) = 0$. Геометрически эти условия означают, что кривая $z = r(t)$ лежит в m -мерном линейном подпространстве пространства E_n . Если же величина

$$\delta^2 = \sum_{k=m+1}^n \lambda_k$$

не равна нулю, то она равна минимуму квадрата среднеквадратичного отклонения кривой $z = r(t)$ от m -мерной гиперплоскости пространства E_n .

Таким образом, величина δ в данном случае является m -м поперечником кривой $z = r(t)$ в пространстве E_n [122].

Для вычисления δ^2 по формуле (8.15) необязательно нужно знать корни $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$. Известно ([123], стр. 80), что

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_R z \frac{D'(z)}{D(z)} dz,$$

где R — любой контур плоскости комплексного переменного, охватывающий только указанные корни уравнения $D(\lambda) = 0$. В частности, R может быть окружностью радиуса ϵ с цент-

ром в начале координат, если известно, что $\lambda_{m+1} < \varepsilon < \lambda_m$. Для определения минимального количества управляющих функций, позволяющих осуществить траекторию с заданной точностью, полезно использовать принцип аргумента или какой-либо другой известный метод (например, метод Штурма) определения числа корней уравнения $D(\lambda) = 0$, лежащих в интервале $(0, \varepsilon)$. Если это число равно l , то $n - l$ управляющих функций и $n - l$ управляющих векторов можно будет подобрать так, что будет иметь место неравенство $\delta^2 < \varepsilon l$. Лучшую оценку точности приближения дает в этом случае снова формула (8.15). Во всяком случае, полезно помнить, что приближение при помощи m управляющих функций будет тем точнее, чем меньше будут по абсолютной величине коэффициенты уравнения $D(\lambda) = 0$ при степенях λ , не превосходящих $m - n$.

5. В случае, когда интервал времени, на котором мы осуществляем заданный процесс, полубесконечен, т. е. задан неравенством $0 \leq t < \infty$, необходимо обратиться к лемме 6.2 (неравенство (6.17)) и к теореме 6.5. Если мы хотим оценивать величину $\Delta(t)$ по норме M_2 , то можем выбрать управляющие векторы c_k таким образом, чтобы минимизировать

$$\| r(s) - \sum_{k=1}^m c_k y_k(s) \| \quad \text{на интервале } t \leq s \leq t + 1.$$

В этом случае, очевидно, при переменном t векторы c_k превращаются в векторные функции $c_k(t)$. Эти векторные функции можно сделать кусочно-постоянными, если минимизацию проводить только на интервалах $k \leq t \leq k + 1$, где k — целое число. Задача наилучшего приближения в M_2 и в том и в другом случаях не будет решена точно, однако найденное управление может оказаться практически удовлетворительным.

6. Может случиться так, что на величину управляющих векторов наложены некоторые ограничения. В работе [124] указан способ решения задачи в этом случае. Различные другие подходы к рассматриваемой здесь задаче освещены в статьях [125—131].

В задаче осуществления процесса мы предполагали все время, что начальные точки действительной и осуществляемой траектории совпадают. Если начальное состояние не соответствует желаемому, то предварительно следует осуществлять

переходный процесс [124]. Однако более перспективный способ состоит в том, что переходный процесс и процесс осуществления движения по заданной траектории производятся одновременно. В этом случае надо задать семейство переходных кривых, которое определяет поле направлений в фазовом пространстве. Это семейство может быть задано также дифференциальными уравнениями. Заданная система дифференциальных уравнений также определяет некоторое поле направлений, которое зависит от управления. Управление находится из условия минимизации в каждый момент времени квадратичного отклонения между соответствующими векторами указанных направлений [130].

Впрочем, следует заметить, что аналогичный результат получится, если управление выбирать исходя из требования максимума скорости убывания некоторой функции Ляпунова, составленной для уравнений возмущенного движения.

ЛИТЕРАТУРА

К главе I

1. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
2. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949.
4. Massera J. L., On Liapounoffs condition of stability, *Ann. of Math.*, 1949 **50**, № 3.
5. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1953.
6. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом, *ДАН СССР*, 1952 **86**, вып. 3.
7. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
8. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
9. Алимов Ю. И., К вопросу о построении функций Ляпунова для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, *Сиб. матем. журнал*, 1961 **2**, № 1.
10. Четаев Н. Г., О выборе параметров устойчивости механической системы, *ПММ*, 1951 **15**, вып. 2.
11. Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М. «МИР», 1964.
12. Айзерман М. А., Об одной проблеме, касающейся устойчивости в больших динамических систем, *УМН*, 1949 **4**, вып. 4.
13. Красовский Н. Н., Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений, *ПММ*, 1952 **16**, вып. 5.
14. Плисс В. А., Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Изд. ЛГУ, 1958.
15. Малкин И. Г., Об устойчивости систем автоматического регулирования, *ПММ*, 1952 **16**, вып. 4.
16. Еругин Н. П., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, *ПММ*, 1952 **16**, вып. 5.

17. Красовский Н. Н., Об одной задаче устойчивости движения в целом, ДАН СССР, 1953 **88**, № 3.
18. Барбашин Е. А., О построении функций Ляпунова для нелинейных систем, Тр. Первого Международного конгресса международной Федерации по автоматическому управлению, АН СССР, 1961, стр. 742-751.
19. Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях, ПММ, 1954 **18**, вып. 1.
20. Барбашин Е. А., Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, ПММ, 1952 **16**, вып. 3.
21. Железнов Е. И., Об устойчивости в целом одной нелинейной системы трех уравнений, Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74.
22. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
23. Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Физматгиз, 1962.
24. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, АН СССР, 1963.
25. Барбашин Е. А., Метод сечений в теории динамических систем, Матем. сб., 1951 **29**, вып. 2.
26. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1956.

К главе II

27. Долголеяко Ю. В., Скользящие режимы релейных систем непрямого регулирования. Тр. Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, 1, М.-Л., АН СССР.
28. Неймарк Ю. И., О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования, Автом. и телемех., 1957 **18**, № 1, 27-33.
29. Flugge-Lotz J., Discontinuous automatic control, Princeton, 1953 (русский перевод «Метод фазовой плоскости в теории релейных систем», Физматгиз, 1959).
30. Летов А. М., Условно устойчивые регулируемые системы (об одном классе оптимальных регулируемых систем), Автом. и телемех., 1957 **18**, № 7.
31. Барбашин Е. А., Печорина И. Н., Эйдинов Р. М., Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для регулирования одного класса линейных статических объектов. Автом. и телемех., 1963 **24**, № 1.
32. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Об одном способе стабилизации систем регулирования третьего порядка с большим коэффициентом усиления. I. Автом. и телемех., 1962 **23**, № 10.
33. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Об одном способе стабилизации систем регулирования третьего порядка с большим коэффициентом усиления. II. Автом. и телемех., 1963 **24**, № 5.

34. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Эйдинов Р. М., Об устойчивости одной системы регулирования с переменной структурой при нарушении условий скольжения, Автом. и телемех., 1963 24, № 7.
35. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Теорема об устойчивости решения одного дифференциального уравнения третьего порядка с разрывной характеристикой, ПММ, 1963 27, № 4.
36. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Теоремы об асимптотической устойчивости решений некоторых дифференциальных уравнений третьего порядка с разрывными характеристиками, ПММ, 1964 28, № 3.
37. Барбашин Е. А., Геращенко Е. И., О стабилизации систем регулирования, ПММ, 1964 28, № 4.
38. Бадков В. М., Барбашин Е. А., Об одном методе стабилизации систем регулирования при ограниченных допустимых значениях параметров регулятора, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 2.
39. Геращенко Е. И., Об устойчивости движения в гиперплоскости скольжения для некоторых систем автоматического регулирования с переменной структурой (с дополнениями С. В. Емельянова и В. А. Тарана), Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1963, № 4.
40. Геращенко Е. И., О степени устойчивости нелинейных систем в скольжащем режиме, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 2.
41. Барбашин Е. А., Геращенко Е. И., О форсировании скольжащих режимов. Дифференциальные уравнения, 1965 1, № 1.
42. Барбашин Е. А., Геращенко Е. И., Об одном принципе построения следящих систем, Автом. и телемех., 1965 26, № 6.
43. Барбашин Е. А., Геращенко Е. И., Табуева В. А., Эйдинов Р. М., Некоторые вопросы теории синтеза систем автоматического регулирования с переменной структурой, Доклад на Третьем Всесоюзном совещании по автоматическому управлению, 1965.
44. Геращенко Е. И., К вопросу о синтезе релейных систем, Автом. и телемех., 1965 26, № 10.
45. Геращенко Е. И., Клейменов А. Ф., Анализ одной нелинейной системы методом разделения движений. Дифференциальные уравнения, 1965, № 10.
46. Геращенко Е. И., Киселев Л. В., Об устойчивости одной системы регулирования с форсированным скольжащим режимом. Дифференциальные уравнения, 1965, № 12.
47. Эйдинов Р. М., К оценке времени переходных процессов в системах автоматического регулирования с переменной структурой, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 5.

48. Табуева В. А., Качественное исследование одного дифференциального уравнения второго порядка теории регулирования, Дифференциальные уравнения, 1965, № 12.
49. Емельянов С. В., Федотова А. И., Построение оптимальных систем автоматического регулирования второго порядка с использованием предельных значений коэффициентов усиления элементов контура регулирования, Автом. и телемех., 1960 21, № 1.
50. Емельянов С. В., Таран В. А., Об одном классе систем автоматического регулирования с переменной структурой, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 1962, № 3.
51. Емельянов С. В., Уткин В. И., Применения систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах, ДАН СССР, 1963 152, № 2.
52. Емельянов С. В., Костылева Н. Е., О некоторых особенностях движения в системах автоматического регулирования с переменной структурой, обладающей разрывной функцией переключения, ДАН СССР, 1963 153, № 4.
53. Петров Б. Н., Емельянов С. В., Принцип построения комбинированных систем автоматического регулирования с переменной структурой, ДАН СССР, 1963 153, № 5.
54. Петров Б. Н., Уланов Г. М., Емельянов С. В., Оптимизация и инвариантность в системах автоматического регулирования с жесткой и переменной структурой, Тр. II Международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению, Теория непрерывных автоматических систем, «Наука», 1965.
55. Бакакин А. В., Бермант М. А., Езеров В. Б., Применение систем с переменной структурой для стабилизации объекта с изменяющимися параметрами при наличии ограничений на перемещение регулирующего органа, Автом. и телемех., 1964 25, № 7.
56. Петров Б. Н., Емельянов С. В., Костылева Н. Е., Об управлении линейными объектами с переменными параметрами, ДАН СССР, 1964 155, № 1.
57. Петров Б. Н., Емельянов С. В., Уткин В. И., Принцип построения инвариантных систем автоматического регулирования с переменной структурой, ДАН СССР, 1964 154, № 6.
58. Бермант М. А., Емельянов С. В., Об устойчивости одного класса систем автоматического управления с переменными параметрами, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 6.
59. Емельянов С. В., Таран В. А., Стабилизация САР с переменной структурой при помощи инерционных звеньев с изменяемой постоянной времени, Автом. и телемех., 1964 25, № 6.
60. Емельянов С. В., Уткин В. И., Об устойчивости движения одного класса системы автоматического регулирования

- с переменной структурой, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 2.
61. Уткин В. И., Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для компенсации возмущений, приложенных к различным точкам объекта, Сб. «Теория и применение автоматических систем», М. «Наука», 1964.
 62. Garret S. I., Alinear switching condition for third-order positive-negative feedback control system. *Applic. and Industry*, 1961 7, № 54.
 63. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. В., Некоторые вопросы теории нелинейных систем автоматического регулирования с разрывными характеристиками, Тр. Первого Международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению, Теория непрерывных систем, АН СССР, 1961.
 64. Алимов Ю. И., О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями, *Автом. и телемех.*, 1961 22, № 7.
 65. Андре Дж., Зейберт П., Движение после конечной точки и анализ его устойчивости для общего случая разрывных систем регулирования, Тр. Первого Международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению, Теория непрерывных систем, АН СССР, 1961.
 66. Красовский Н. Н., Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения, Тр. Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, АН СССР, 1962.
 67. Зубов В. И., Колебания в нелинейных управляемых системах, Судпромгиз, 1962.
 68. Барбашин Е. А., Геращенко Е. И., Табуева В. А., Эйдинов Р. М., Методы анализа устойчивости систем автоматического регулирования с переменной структурой, Доклад на Третьем Международном конгрессе по автоматическому управлению (Лондон), 1966.
 69. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Эйдинов Р. М., Устойчивость систем регулирования с переменной структурой, Тр. Второго Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 2, «Наука», 1965, стр. 7—14.

К главе III

70. Bellman R., On application of a Banach—Steinhaus theorem to the study of the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations, *Ann. of Math.*, 1948 49, стр. 515—522.
71. Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
72. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
73. Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.

74. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1955 101, № 1.
75. Крейн М. Г., Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, АН УССР, ин-т матем., Киев, 1964.
76. Михлин С. Г., Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1949.
77. Репин Ю. М., Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом, ПММ, 1957 21, вып. 2.
78. Еругин Н. П., Линейные системы дифференциальных уравнений, АН БССР, Минск, 1963.
79. Еругин Н. П., Приводимые системы, «Наука и техника», Минск, 1966.
80. Персидский К. П., Об устойчивости решений бесконечной системы уравнений, ПММ 1948 12, вып. 5.
81. Персидский К. П., О характеристических числах, Изв. АН Казах. ССР, 1952, № 116, вып. 1 (6).
82. Барбашин Е. А., Об условиях сохранения свойства устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, Изв. Вузов, матем., 1957, № 1.
83. Барбашин Е. А., Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, вып. 74.
84. Либерман Л. Х., Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, Изв. Вузов, матем., 1958, № 3 (4).
85. Барбашин Е. А., Бисярина Л. П., Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, Изв. Вузов, матем., 1963, №3 (34).
86. Быков Я. В., К аналитической теории линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина, Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, Фрунзе, 1962, вып. II.
87. Быкова Э. Я., Об устойчивости решений интегро-дифференциальных и интегро-разностных уравнений типа Барбашина. Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, Фрунзе, 1962, вып. II.
88. Салпагаров Х. М., Об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина, Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, Фрунзе, 1962, вып. II.
89. Барбашин Е. А., Либерман Л. Х., Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений в полных дифференциалах, Докл. Высшей школы, 1958, вып. 3.
90. Бисярина Л. П., Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, Изв. Вузов, матем., 1964, № 2 (39).

91. Бисярина Л. П., О существовании периодического решения одного интегро-дифференциального уравнения, Математ. зап., Уральский ун-т, Свердловск, 1963 4, вып. 2.
92. Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., Динамические системы с неоднозначными характеристиками, ДАН СССР, 1961 140, № 1.
93. Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., К теории релейных дифференциальных уравнений, Изв. Вузов, матем., 1962, № 1 (26).
94. Massera J. L., Schäffer J. J., Linear differential equations and functional analysis, I, Ann. of Math., 1958 57, № 3.
95. Massera J. L., Schäffer J. J., Linear differential equations and functional analysis, II, Ann. of Math., 1959 69, № 1.
96. Булгаков Б. В., О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами, ДАН СССР, 1946 51, № 5.
97. Briland T. F., Some remarks on the stability of linear systems. IEEE Transac. circuit theory, 1963, CT-10, № 4.
98. Halanay A., Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, Academie RPR, 1963.
99. Крейн М. Г., О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости, УМН, 1948 3, вып. 3 (25).
100. Кучер Д. Л., О некоторых критериях ограниченности решений системы дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1949 59, № 5.
101. Perron O., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, Math. Zeit., 1930, 32.
102. Кудревич Я., Устойчивость нелинейных систем с обратной связью, Автом. и телемех., 1964 25, № 8.
103. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, ИЛ, 1951.
104. Zadeh L. A., On stability of linear varying — parameter systems. J. of Appl. Phys., 1951 22, № 4.
105. Kalman R. E., On the stability of time-varying linear systems. JRE Transac. circuit theory, 1962, CT-9, № 4.
106. Соболевский П. Е., Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Тр. Моск. матем. о-ва, 1961, т. 10.
107. Халилов З. И., Об устойчивости решений уравнения в банаховом пространстве, ДАН СССР, 1961 137, № 4.
108. Горшин С. И., Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями, Изв. АН Казах. ССР, 1948, № 56.
109. Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н., Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ПММ, 1957 21, вып. 6.
110. Артемьев Н. А., Основы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, ЛГУ, 1941.
111. Красовский Н. Н., О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздываниями времени, ДАН СССР, 1957 114, № 2.

112. Antosiewicz H. H., Forced periodic solutions of systems of differential equations. *Ann. of Math.*, 1953 **57**, № 2.
113. Барбашин Е. А., О построении периодических движений, *ПММ*, 1961 **25**, вып. 2.
114. Барбашин Е. А., Программное регулирование систем со случайными параметрами, *ПММ*, 1961 **25**, вып. 5.
115. Барбашин Е. А., О двух схемах доказательства теорем об устойчивости по первому приближению, *ДАН СССР*, 1956 **111**, № 1.
116. Барбашин Е. А., Скалкина М. А., К вопросу об устойчивости по первому приближению, *ПММ*, 1955 **19**, вып. 5.
117. Скалкина М. А., О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечноразностных уравнений, *ПММ*, 1955 **19**, вып. 3.
118. Скалкина М. А., О сохранении асимптотической устойчивости при переходе от дифференциальных уравнений к соответствующим разностным, *ДАН СССР*, 1955 **104**, № 4.
119. Габасов Р., Об устойчивости решений дифференциально-операторных уравнений при постоянно действующих возмущениях, *Изв. Вузов, матем.*, 1962, № 5 (30).
120. Красовский Н. Н., Об устойчивости при больших начальных возмущениях, *ПММ*, 1957 **21**, вып. 3.
121. Ахизер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.
122. Kolmogoroff A., Uber die beste Annäherung von Function einer gegeben Functionklassen, *Ann. of Math.*, 1936 **37**.
123. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1951.
124. Барбашин Е. А., Об одной задаче теории динамического программирования, *ПММ*, 1960 **24**, вып. 6.
125. Барбашин Е. А., Об оценке среднеквадратичного значения отклонения от заданной траектории, *Автом. и телемех.*, 1960 **21**, № 7.
126. Барбашин Е. А. Об оценке максимума отклонения от заданной траектории, *Автом. и телемех.*, 1960 **21**, № 10.
127. Барбашин Е. А., Программное регулирование и теория оптимальных систем, Тр. II Международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению, Оптимальные системы. Статистические методы, «Наука», 1965, стр. 221-230.
128. Барбашин Е. А., Построение периодического движения как одна из задач теории программного регулирования, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Т. III, АН УССР, Киев, 1963.
129. Барбашин Е. А., Осуществление процессов и конструирование сигналов на выходе системы, Тр. Четвертого Всесоюзного математического съезда, Т. II, «Наука», 1964.

130. Мильштейн Г. Н., О приближенном осуществлении процессов при помощи переходных кривых, ПММ, 1962, 26.
131. Либерман Л. Х., О некоторых задачах теории приближения решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве, Изв. Вузов, матем., 1964, № 3 (40).
132. Карачаров К. А., Пилюттик А. Г., Введение в техническую теорию устойчивости движения, Физматгиз, 1962.
133. Еругин Н. П., Качественное исследование интегральных кривых систем дифференциальных уравнений, ПММ, 1950 14, вып. 6.
134. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом, ПММ, 1950 14, вып. 5.
135. Еругин Н. П., Качественные методы в теории устойчивости, ПММ, 1955 19, вып. 5.
136. Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, «Наука», 1964.
137. Hahn W., Theorie und Anwendung der Direkten Methode von Ljapunov, Sprinegr — Verlag, Berlin, 1959.
138. Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, ЛГУ, 1957.
139. Massera J. L., Schäffer J. J., Linear differential equations and functional analysis. III. Ann. of Math., 1959 69, № 3.
140. Massera J. L., Schäffer J. J., Linear differential equations and functional analysis. IV. Math Annalen, 1960 139.
141. Персидский К. П., Об одной теореме Ляпунова, ДАН СССР, 1937 14, № 9.
142. Малкин И. Г., К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, ПММ, 1954 18, вып. 2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Метод функций Ляпунова	9
§ 1. Оценка изменения решений	10
§ 2. Определение устойчивости. Вывод уравнений возмущенного движения	15
§ 3. Функции Ляпунова	17
§ 4. Теоремы Ляпунова об устойчивости	20
§ 5. Теорема об асимптотической устойчивости	23
§ 6. Теоремы о неустойчивости	26
§ 7. Примеры	28
§ 8. Линейные системы	31
§ 9. Построение функций Ляпунова в виде квадратичных форм для линейных систем дифференциальных уравнений	35
§ 10. Оценка решений линейных систем	38
§ 11. Теоремы об устойчивости по первому приближению	40
§ 12. Устойчивость в целом	45
§ 13. Проблема Айзермана	47
§ 14. Примеры	50
Глава II. Устойчивость систем регулирования с переменной структурой	59
§ 1. Предварительные замечания. Постановка задачи	59
§ 2. Стабилизация системы второго порядка	65
§ 3. Стабилизация системы третьего порядка. Условия существования скольжения	71
§ 4. Стабилизация системы третьего порядка. Устойчивость системы	74
§ 5. Стабилизация системы n -го порядка	83
§ 6. Стабилизация системы с ограничителем в критическом случае одного нулевого корня	87
§ 7. Нелинейные системы с переменной структурой. Регулирование по координате x	92
§ 8. Нелинейные системы с переменной структурой. Регулирование по координате x и ее производным	102
§ 9. Исследование системы третьего порядка с разрывной поверхностью переключения	108

§ 10.	Система с форсированным скользящим режимом	123
§ 11.	Пример системы третьего порядка с форсированным скользящим режимом	132
Г л а в а III. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве		
§ 1.	Банахово пространство	140
§ 2.	Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве	147
§ 3.	Примеры дифференциальных уравнений в банаховых пространствах	156
§ 4.	Задача о накоплении возмущений на конечном интервале времени	162
§ 5.	Задача о накоплении возмущений на бесконечном интервале времени. Теоремы об устойчивости нулевого решения однородного линейного уравнения	164
§ 6.	Теоремы об устойчивости решений нелинейных уравнений	182
§ 7.	Устойчивость по отношению к импульсным воздействиям	194
§ 8.	Задача осуществления движения по заданной траектории	201
Литература		215