*С.В.Ащеулов, В.А.Барышев*

# ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ФИЗИКЕ

Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1974.

В задачнике собрано 160 задач, в основном повышенной трудности. Особое внимание уделяется физической и математической строгости и полноте сопровождающих их решений. Широко используются чисто физические методы решения, основанные на соображениях симметрии, равноправия или тождественности объектов, выборе оптимальной системы координат и т. д. Для демонстрации эффективности этих методов ряд задач содержит несколько вариантов решений. В тексте часто встречаются выходящие за рамки конкретной задачи комментарии, которые могут оказаться полезными при рассмотрении аналогичных вопросов.

Задачник будет полезен учащимся средних школ, особенно о физико-математическим уклоном, абитуриентам вузов с повышенными требованиями по физике, слушателям подготовительных курсов, студентам младших курсов и преподавателям.

ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В современной высшей школе наблюдается заметное усиление роли фундаментальных наук в процессе подготовки специалистов всех профилей. Эта тенденция должна опираться, конечно, как на рост качества школьной подготовки учащихся, так и на дополнительную, внеклассную работу будущих студентов. Повышение уровня преподавания в школах, новые программы и учебники, создание специализированных школ и классов, традиционные олимпиады для школьников, лекции по телевидению и в лекториях способствуют решению этой задачи. И тем не менее глубина и прочность знаний по физике у выпускников средних школ часто оставляют желать лучшего, что особенно заметно на фоне значительного роста математической подготовки школьников.

Полезно указать на характерные недостатки физического образования многих абитуриентов.

Приходится сталкиваться с нечеткими, а нередко и ошибочными представлениями о своеобразии построения физики в целом как науки, о ее логике. Любое физическое утверждение является для одних справедливым исключительно на основе опытных данных, для других — следствием только математических выкладок. То, что часть физических законов является индуктивным обобщением человеческой практики (и что эти законы в принципе не могут быть доказаны так, как доказывается, допустим, теорема Пифагора), какие именно это законы или гипотезы, то, что остальные законы логически вытекают из первых, часто неизвестно. Эти заблуждения в большой мере связаны с непониманием роли опыта в процессе познания природы.

Законы, определения и понятия нередко усваиваются формально, без твердого понимания того, где, когда, в каких условиях они справедливы. В результате — ошибочное использование законов и правил, неумелое их применение в конкретных физических условиях: при решении количественных задач, при качественном анализе процессов и явлений (что особенно проявляется в ответах на простые, но непривычные вопросы).

В связи с этим следует заметить, что в ряде руководств и пособий стремление упростить законы и определения приводит к появлению как заведомо неверных формулировок (например, для вектора, центра тяжести, центробежной силы), так и неполных определений, что исключает четкое их понимание (для результирующей силы, сил трения, взаимной емкости, материальной точки и т. д.).

Плохо развитое физическое воображение мешает наглядно представить динамику физического процесса, то, каким законам и правилам он подчиняется на различных этапах своего развития. Отсюда, в частности, следует неумение физически проанализировать полученный в задаче ответ, сопоставить его с действительной ролью учтенных и неучтенных факторов, проверить на тех простейших случаях, где ход событий очевиден без выкладок.

Встречается нечеткое представление о физических идеализациях и моделях (точечном заряде, идеальном газе, гибких и нерастяжимых нитях и многом другом). Какова в них надобность, на чем основано наше право их вводить, где можно, а где нельзя их использовать — эти вопросы зачастую уходят из поля зрения школьника.

Недоумение и удивление вызывает упорное нежелание школьников использовать в физике арсенал своих математических знаний. При этом мы имеем в виду отнюдь не полную формализацию ответа по физике на экзамене: оснащение его производными и интегралами, скалярными и векторными произведениями векторов и т. п. (чем грешат некоторые книги по физике для школьников) — чего от абитуриента никто и никогда не требует. Однако использовать математические навыки и приемы в необходимых случаях, в том числе, конечно, и в физике, школьник, стремящийся в вуз, обязан. К сожалению, часто оказывается, что для поступающих физика — сама по себе, математика — сама по себе: например, не всегда проводится исследование решения. Тем более не приходится говорить о физическом анализе причин, вызвавших потерю смысла соответствующих математических выражений, или об исследовании результата решения задачи в зависимости от значений исходных параметров.

Как перечисленные, так и некоторые другие, менее серьезные недостатки связаны, в частности, с еще встречающимися излишними упрощениями физики в процессе школьного ее изучения, с отказом от строгих доказательств и формулировок там, где они вполне возможны и допустимы, с отсутствием развернутого анализа явлений и процессов там, где такой анализ поучителен. Незначительное сравнительно с математикой количество задачников и пособий по физике, невысокий уровень некоторых из них не способствуют исправлению создавшегося положения.

В настоящем задачнике авторы делают попытку хотя бы частично восполнить указанные пробелы. С этой целью было отобрано 160 задач повышенной трудности, однако не требующих знаний, выходящих за рамки школьных программ. При отборе задач авторы стремились к тому, чтобы каждая из них представляла для читателя небольшое самостоятельное исследование, начиная с понимания задачи до анализа полученного результата и обсуждения его физического смысла. При этом авторами ставилась цель убедить читателя в том, сколь разнообразные задачи могут быть решены совершенно строго на базе основных физических законов, рассматриваемых в школе. Сделанные в формулировке задачи (или ходе решения) допущения и пренебрежения анализируются. Указываются возможные пути проверки ответа, тем более, если в нем содержатся математические особенности. Если вид ответа зависит от исходных параметров, то ответ обсуждается. Для ряда задач приводится несколько вариантов решений в расчете на различные подходы читателей (особенно, если данная задача допускает наряду с математическим решение на основе соображений симметрии, тождественности объектов и т. д.).

Иногда даются типичные ошибочные решения, регулярно встречающиеся на приемных экзаменах, производится выяснение истоков ошибок.

Как отдельные задачи, так и комментарии в тексте решений ставят целью уточнить смысл некоторых физических моделей, понятий, определений. Материал такого рода выделен втяжкой (т. е. напечатан с более широким левым полем). Материал, чтение которого не обязательно для понимания данной и последующих задач, набран петитом.

Сборник предлагает задачи, решить которые могут читатели, в какой-то мере умеющие решать задачи средней трудности, поэтому он рекомендуется тем, кто совершенствует свои знания по физике, готовясь к приемным экзаменам в технические вузы, в особенности на специальности, непосредственно связанные с физикой и математикой. Задачник может быть использован слушателями подготовительных курсов, учащимися физико-математических школ и преподавателями, в том числе для внеклассной работы. Сборник может оказаться полезным и студентам младших курсов технических вузов и педагогических институтов.

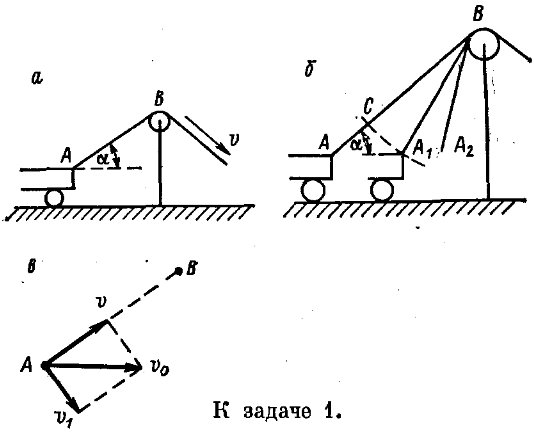
В настоящем задачнике не все разделы программы представлены достаточно полно, некоторые намеренно не представлены вообще (электромагнитные колебания и волны, волновая оптика, строение атома, основы специальной теории относительности). Пропущенным разделам авторы предполагают посвятить вторую часть задачника. Естественно, данный сборник не может служить заменой таким популярным книгам, как „Задачи по физике" А. Г. Зубова и В. П. Шальнова, „Сборник задач по элементарной физике" Б. Б. Буховцева, В. Д. Кривченкова, Г. Я. Мякишева, В. П. Шальнова.

Авторы приносят глубокую благодарность А. С. Трошину, Е. И. Бутикову и Е. Ф. Яруниной, чьи советы и замечания, несомненно, улучшили содержание книги.

Авторы с благодарностью примут любые замечания и пожелания, направленные на улучшение задачника.

### ЗАДАЧА 1

К тележке прикреплена веревка, перекинутая через неподвижный блок $B$. Конец веревки вытягивают со скоростью $v$. Определить скорость $v_0$ движения тележки по горизонтальному столу в тот момент, когда конец веревки, привязанный к тележке, составляет угол $\alpha$ с горизонтом (см. рис. *а*).




К задаче 1.

#### РЕШЕНИЕ

Приведем сначала ошибочное рассуждение, с которым часто приходится встречаться: так как веревка нерастяжима, то независимо от наклона части веревки, расположенной справа от блока, точка $A$ тележки движется со скоростью $\mathbf{v}$. Проекция этой скорости на горизонтальное направление равна величине $v\cos\alpha$, а тележка движется по горизонтали. Следовательно, скорость тележки $v_0$ равна величине $v\cos\alpha$.

В действительности вывод „следовательно" не только необоснован, но и неверен. Приведем несколько возражений, каждого из которых достаточно для того, чтобы убедиться в ошибочности решения.

1. Величина $\mathbf{v}$ не является скоростью движения точки $A$, так как $A$ движется горизонтально. Вектор $\mathbf{v}$, направленный вдоль $AB$, имеет какой-то другой физический смысл.

2. Заметим, что при заданной скорости вытягивания веревки скорость тележки растет с ростом угла $\alpha$ ($0 \leqslant \alpha < \pi/2$). Действительно, представьте себе, что тележка находится почти под блоком. Нетрудно догадаться, что при этом значительные перемещения тележки вправо или влево вызовут лишь сравнительно небольшие перемещения нити справа от блока. Следовательно, ответ не может быть вида $v_0 = v \cos \alpha$.

3. Поскольку $A$ движется горизонтально, вертикальная проекция скорости $\mathbf{v}$ не имеет физического смысла. Поэтому величине $v \cos \alpha$ также нельзя приписать указанный в „решении" физический смысл.

Каким же образом получить верное решение? Укажем два способа.

1-й способ. Прежде всего необходимо сообразить, что величина $v$ есть скорость, с которой укорачивается отрезок $AB$ нити слева от блока. Для вычисления величины $v_0$ воспользуемся очевидным утверждением: если $\Delta S_1$ и $\Delta S_2$ есть перемещения двух равномерно движущихся со скоростями $v_1$ и $v_2$ тел, совершенные за один и тот же промежуток времени, то $\Delta S_1/\Delta S_2 = v_1/v_2$.

Рассмотрим положения тележки и нити в два момента времени, разделенных интервалом $\Delta t$. Тележка переместилась из положения $A$ в положение $A_1$, т. е. прошла расстояние $\Delta l_0 = AA_1$. Нить переместилась из положения $AB$ в положение $A_1B$, причем ее длина уменьшилась на величину $\Delta l = AC$ ($CB = A_1B$), так что $\Delta l = v\Delta t$ (см. рис. *б*). Так как скорость тележки зависит от угла $\alpha$, интервал времени $\Delta t$ следует выбрать настолько малым, чтобы угол $\alpha$ не успел заметно измениться, и скорость тележки можно было считать постоянной, т. е. $AA_1 \ll A_1B$. При этом $\Delta l_0 = v_0\Delta t$, а $\angle ACA_1 \approx 90°$. Тогда из $\triangle ACA_1$ находим, что $\Delta l/\Delta l_0 \approx 1/\cos \alpha$, причем последнее приближенное равенство превращается в строгое при $\Delta t \to 0$. Значит, $v_0 = v/\cos \alpha$.

2-й способ. Рассмотрим вспомогательную задачу. В некоторой системе отсчета заданы положения и скорости двух точек $A$ и $B$ в один и тот же момент времени, при этом $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_B = 0$. С какой скоростью точка $A$ приближается к точке $B$ (см. рис. *в*)?

Разложим вектор $\mathbf{v}_0$ на две взаимно перпендикулярные составляющие такие, что одна из них направлена вдоль $AB$. Тогда можно считать, что точка $A$ участвует в двух движениях со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$. Если бы точка $A$ двигалась только со скоростью $\mathbf{v}_1$, то расстояние $AB$ не менялось бы; следовательно, скорость приближения $A$ к $B$ есть проекция скорости $\mathbf{v}_0$ на направление $AB$.

Вернемся к исходной задаче. Скорость $\mathbf{v}$, направленная вдоль $AB$, есть, очевидно, скорость приближения $A$ к $B$. Скорость же точки $A$ $\mathbf{v}_0$ по условию направлена горизонтально. Следовательно, скорость $\mathbf{v}$ есть проекция скорости $\mathbf{v}_0$ на направление $AB$, т. е. $v_0 = v/\cos \alpha$.

Полезно обратить внимание на то, что движение точки $A$ можно представить как сумму двух движений, одно из которых происходит в направлении к блоку. Какой вид имеет другое движение? Теперь ясно, что это — движение со скоростью $v_1 = v \operatorname{tg} \alpha$, $\mathbf{v}_1 \perp AB$, т. е. вращение вокруг точки $B$. Из рис. *б* хорошо видно, что точка $A$, приближаясь к блоку, одновременно вращается вокруг него против часовой стрелки.

Примечание I. Здесь и в дальнейшем мы часто пользуемся следующими выражениями: „сумма движений", „сложение движений", „точка участвует в двух движениях". Очевидно, что в заданной системе отсчета точка, если она движется, совершает вполне определенное, *единственное* движение; поэтому необходимо разъяснить смысл указанных выражений. При решении задач часто бывает удобно перейти к новой системе отсчета, которая движется относительно исходной. Характеристики движения (скорость, ускорение, вид траектории и т. д.) в новой системе отсчета могут отличаться от их значений в исходной системе. При таком переходе движение в исходной системе отсчета *условно* разбивается на два движения: движение точки в новой системе отсчета (т. н. относительное движение) *плюс* движение новой системы относительно исходной (переносное движение). Тогда кратко говорят, что движение точки относительно исходной системы отсчета „есть сумма двух движений". Ясно, что такое „разбиение" движения неоднозначно: например, любое движение можно представить как сумму двух, трех или пятидесяти движений. Однако именно эта неоднозначность и является достоинством метода: мы имеем возможность *произвольно* выбрать наиболее удобную в данной задаче систему отсчета. В следующих задачах мы будем пользоваться приведенными выражениями уже без кавычек.

Примечание II. При изучении курса физики приходится часто встречаться с величинами, называемыми скалярными и векторными. К сожалению, в ряде учебников даются неточные — и тем самым неверные — определения этих величин, что ведет к многочисленным недоразумениям и ошибкам. Поэтому ниже даются правильные определения и рассматриваются некоторые следствия из них.*

* Вообще говоря, *определения* не могут быть правильными или неправильными, точными или неточными (запрещается только внутренняя противоречивость). Автор любой книги (лекции, диссертации) вправе, например, сказать: „Назовем треугольником многоугольник, содержащий четыре стороны" или „Договоримся считать равными числа, различающиеся не больше, чем на единицу". Разумеется, после таких определений в рамках данной книги

1. Скалярной называется величина, характеризуемая только численным значением, *не меняющимся* при переносе начала координат (начала отсчета времени) и при изменении ориентации координатных осей.

В соответствии с этим определением не являются скалярными величины, использованные в следующих предложениях: „Ленинград расположен на 30 градусе восточной долготы", „Знаменитые „Начала" Ньютон опубликовал в 1687 г.", „Сейчас 12 часов по Московскому времени", „Координаты точки $A$ в данной системе координат $x$, $y$, $z$ с началом в точке $O$ суть 5,0,0." Действительно, выбрав иное начало отсчета (пулковский меридиан вместо гринвичского, сотворение мира вместо Рождества Христова, среднеевропейское время вместо московского), иную координатную систему, мы получили бы совсем иные числа: ноль градусов, 7195 г. (а сам Ньютон получил бы 5675 г.) и т. д.

Наоборот, в последующих утверждениях мы имеем дело с типичными скалярами: „Ленинград на 30 градусов восточнее Лондона", „Сегодня продолжительность дня в Москве составляет 12 ч", „Знаменитые „Начала" Ньютон опубликовал в возрасте 44 лет", „Расстояние между точками $A$ и $O$ равно 5". Опираясь на исходное определение, читатель может убедиться в этом сам.

2. Вектором называют величину, характеризуемую численным значением, направлением в пространстве *и складывающуюся с другой, себе подобной величиной геометрически.*

Подчеркиваем, что последняя часть определения является не свойством вектора (что нередко утверждается), но именно неотъемлемой частью определения. Первые два требования необходимы, но недостаточны. В незнании этого заложен источник многочисленных ошибок.

Рассмотрим такую физическую величину, как сила тока. Численное значение силы тока $I$ находится по известной формуле $I = \Delta Q/\Delta t$. Можно договориться для тонкого проводника считать направлением тока направление касательной к проводнику в соответствующей точке. Известно, однако, что токи, например, в точке, где цепь разветвляется, складываются алгебраически, но не геометрически. И сила тока, оказываю-

---

придется говорить, что число $e$ равно числу $\pi$ и т. д. (см. для примера задачи 14, 59).

Существуют, однако, общепринятые понятия, смысл которых одинаков во всей научной литературе (например, скаляр и вектор). Для них разработан соответствующий математический аппарат, им можно сопоставить вполне определенные величины в физике. Мы и назвали „неточными", „неверными" такие определения, которые отличаются по содержанию от общепринятых.

щаяся вектором по „урезанному" определению, в действительности является скаляром.

3. Из приведенного определения вытекают, в частности, следующие свойства векторных величин.

а) Любое векторное равенство (только в рамках элементарной физики) эквивалентно системе трех скалярных. Так, если **a** — ускорение тела под действием силы **F**, исходное векторное соотношение $\mathbf{a} = (1/m)\mathbf{F}$ (II закон Ньютона) эквивалентно трем скалярным:

$$a_x = (1/m)F_x, \quad a_y = (1/m)F_y, \quad a_z = (1/m)F_z,$$

где $a_x$, $a_y$, $a_z$, $F_x$, $F_y$, $F_z$ — проекции векторов **a** и **F** на координатные оси $x$, $y$, $z$ *.

б) Наряду с геометрическим способом сложения векторов (правило многоугольника) существует и алгебраический способ. Пусть отыскивается вектор **F** такой, что $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots$ .

Тогда проекции вектора **F** на координатные оси $x$, $y$, $z$ подчиняются соотношениям

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots, \quad F_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots,$$
$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \ldots.$$

В школьных задачах нередко все события разворачиваются в одной геометрической плоскости. Тогда разумным выбором ориентации осей можно свести эту систему к двум скалярным равенствам.

в) Векторные величины могут быть связаны друг с другом только знаком равенства. Поэтому из выражений $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$, $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, $\mathbf{A} > 0$ имеет смысл только первое. „Больше", „Меньше" можно говорить лишь о модулях или проекциях векторов.

Иногда, правда, в литературе встречаются выражения типа „Подъемная сила аэростата больше его веса", „Ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше ускорения свободного падения на Земле" и т. д. Разумеется, здесь речь идет не о силах и ускорениях (и те и другие векторы), но об их модулях, или проекциях на вертикальную ось во втором случае. Такая подмена понятий особенно часто встречается, если рассматриваемые векторы направлены по одной прямой (как в первом из приведенных примеров).

4. Введенные выше чисто математические понятия — скаляр и вектор — следует уметь использовать для описания физических явлений. Укажем на ряд особенностей такого использования.

* Так, по инерции, утверждается, кажется, везде. Но проекции вектора на координатные оси, входящие в упомянутые три равенства, не есть скаляры (см. выше определение скаляра).

Прежде всего необходимо подчеркнуть, что в основе физики лежит эксперимент. Отнести ту или иную физическую величину к скалярным или векторным можно лишь на основании экспериментов, подтверждающих справедливость этого. Распространенные суждения типа „Силы (ускорения, скорости и т. д.) складываются геометрически, так как это — векторы" принципиально ошибочны, причина и следствие здесь поменялись местами, телега поставлена впереди лошади. Следует говорить: „Установлено опытом, что сила характеризуется численным значением, направлением и складывается с другой силою по правилу параллелограмма. Следовательно, сила — вектор и, описывая силы, можно использовать разработанный для векторов математический аппарат".

Из определения, в частности такого, когда некоторая физическая величина определяется через другую, векторную физическую величину с помощью линейного соотношения (например, $\mathbf{E} = (1/q)\,\mathbf{F}$, где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{F}$ — сила, действующая на точечный заряд $q$), вообще говоря, не следует, что новая физическая величина — вектор *. Последнее можно установить лишь экспериментально (см. задачу 106).

Формально можно найти сумму любых одноименных скаляров и векторов, разложить заданный вектор на составляющие бесконечным числом способов. Однако при изучении природы мы безоговорочно можем использовать эти операции, только если их результаты имеют физический смысл. Пренебрежение этим требованием вызывает такие характерные ошибки, как а) сложение масс тел, каждое из которых движется со своим ускорением, подлежащим определению; б) сложение сил, приложенных к разным телам, в задачах, где интерес представляет относительное движение этих тел (в том числе оперирование с не существующей в природе центробежной силой); в) попытка приписать смысл одной из составляющих векторной физической величины без учета физического смысла другой составляющей (задача 1); г) применение к отдельным составляющим законов, сформулированных для векторных величин (в частности, II закона Ньютона), и т. д.

Способность свободно оперировать со скалярными и векторными величинами, в частности, умение дать физическое толкование каждому из векторов, встре-

---

* Так, например, напряженность поля $\mathbf{E} = (1/q)\,\mathbf{F}$ — вектор, давление $p = F/S$ — скаляр.

чающихся в задаче, в особенности необходимо в механике. Задачи по механике с этой точки зрения являются наиболее сложными и требуют безупречной логики. Многие задачи этого раздела подобраны специально для выработки соответствующих навыков.

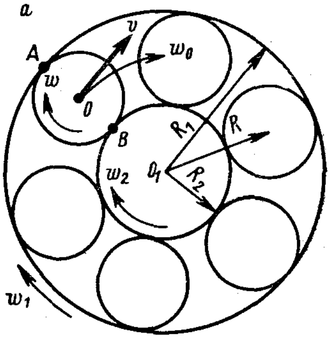
## ЗАДАЧА 2

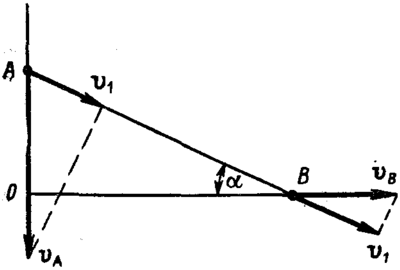
По сторонам прямого угла $AOB$ скользит стержень $AB$ (см. рисунок). В момент, когда стержень составляет угол $\alpha$ со стороной $OB$, скорость точки $A$ равна $\mathbf{v}_A$. Чему равна в этот момент скорость точки $B$?

### РЕШЕНИЕ

Найдем проекцию $\mathbf{v}_A$ на направление $AB$. Она равна величине $v_A \sin \alpha$ и в то же время является проекцией скорости $\mathbf{v}_B$ на направление $AB$. Следовательно, $v_B = v_A \operatorname{tg} \alpha$.

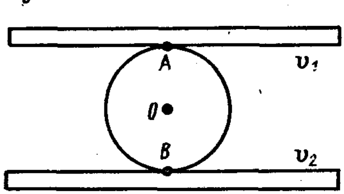
а




К задаче 2.

б




К задаче 3.

## ЗАДАЧА 3

На рис. *а* схематически изображен шарикоподшипник в разрезе. Требуется описать движение одного из шариков, если радиусы внешнего и внутреннего колец равны $R_1$ и $R_2$, а их угловые скорости — $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно. Проскальзывание между кольцами и шариками отсутствует.

### РЕШЕНИЕ

Движение любого шарика можно представить как сумму двух движений: поступательного со скоростью $v$ (при этом центр $O$ шарика движется по окружности радиусом $R = (R_1 + R_2)/2$) и вращения вокруг собственного центра $O$ с угловой скоростью $\omega$.

Тогда мгновенные скорости точек $A$ и $B$ шарика будут равны $v_A = v + \omega r$, $v_B = v - \omega r$, где $r$ — радиус шарика, $r = (R_1 - R_2)/2$.

В выписанных соотношениях знаки согласованы с предполагаемыми направлениями скоростей $v$ и $\omega$, указанными на рисунке. Это не ограничивает общности ответа: при противоположных направлениях значения скоростей окажутся отрицательными.

Так как проскальзывания нет, скорости $v_A$ и $v_B$ должны быть равны мгновенным скоростям точек $A$ и $B$ внешнего и внутреннего колец соответственно, следовательно: $\omega_1 R_1 = v + \omega r$, $\omega_2 R_2 = v - \omega r$, откуда находим, что

$$v = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2}{2}; \quad \omega = \frac{\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2}{R_1 - R_2}. \tag{1}$$

Вместо скорости $v$ поступательного движения шарика можно найти угловую скорость $\omega_0$ вращения центра шарика $O$ вокруг центра подшипника $O_1$:

$$\omega_0 = \frac{v}{R} = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{2}$$

Всегда полезно проверить ответ в тех простейших случаях, когда окончательный результат очевиден и без расчетов. Такими ситуациями в рассматриваемой задаче могут быть, например, следующие.

1. Скорости $\omega_1$ и $\omega_2$ таковы, что шарик вращается на месте. При этом, очевидно, $v_A = -v_B$, т. е. $\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2$. Из соотношения (2) также следует, что $\omega_0 = 0$.

2. Пусть $\omega_1 = \omega_2$. Кольца и шарики неподвижны друг относительно друга, они как бы склеены. Следовательно, должно быть, что $\omega = \omega_0 = \omega_1 = \omega_2$, что и дают соотношения (1) и (2).

Известно, что прямую линию можно считать дугой окружности с бесконечно большим радиусом. Такой подход дает возможность распространить полученные выше результаты на случай движения шарика, находящегося между двумя параллельными рейками (см. рис. *б*). Для этого надо в формулах (1) заменить $\omega_1 R_1$ на $v_1$, $\omega_2 R_2$ на $v_2$, $R_1 - R_2$ на $2r$ (заметим, что в этом случае порознь взятые величины $\omega_1$, $\omega_2$, $R_1$ и $R_2$ не имеют физического смысла, но входящие в формулы (1) их комбинации обладают им). Тогда получим, что $v = (v_1 + v_2)/2$, $\omega = (v_1 - v_2)/2r$.

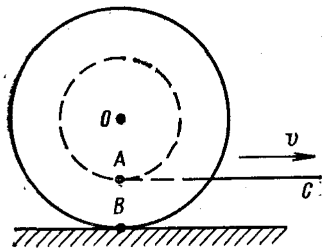
## ЗАДАЧА 4

На горизонтальной поверхности стола лежит катушка, которая может катиться по столу без скольжения. На внутренний цилиндр катушки намотана нитка (см. рисунок), конец которой тянут в горизонтальном направлении со скоростью $v$. Какова скорость оси катушки, если радиусы внешнего и внутреннего цилиндров равны $R$ и $r$?

### РЕШЕНИЕ

1-й способ. Движение конца нити $C$ можно представить себе складывающимся из двух движений: движения вместе с осью катушки со скоростью $v_0$ (как если бы нитка была закреплена в точке $A$, а катушка скользила бы поступательно) и движения с некоторой скоростью $v_1$ в результате наматывания (или сматывания) нити на катушку, т. е. $v = v_0 \pm v_1$, где знак плюс соответствует сматыванию нити.

Заставим катушку сделать один полный оборот и определим величину, на которую переместится конец нитки $C$. Очевидно, что в данном случае катушка катится вправо. За один оборот ось катушки переместится на расстояние $2\pi R$, причем на катушку намотается нить длиной $2\pi r$. Таким образом,



К задаче 4.

$$v_0 = v + v_1 = v\left(1 + \frac{v_1}{v}\right) = v\left(1 + \frac{2\pi r}{2\pi R - 2\pi r}\right) = v\frac{R}{R-r}.$$

2-й способ. Качение катушки без скольжения по плоскости в любой момент можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси $B$. Это следует из того, что точка $B$ катушки неподвижна. Таким образом, известно, что $v_B = 0$, $v_A = v$. Следовательно, $v_0 = vR/(R - r)$, так как линейные скорости точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям этих точек до оси вращения.

При $R = r$ и $v \neq 0$ ответ теряет смысл. Поясним это. Пусть скорость центра катушки $v_0$ задана. Тогда скорость конца нитки определяется соотношением $v = [(R - r)/R]\, v_0$, и при $R \to r$ $v \to 0$ при любом значении скорости $v_0$. При $R = r$ конец нитки „не замечает“, катится ли катушка, или она неподвижна. Следовательно, при $R = r$ скорость конца нитки может быть равной только нулю. Из формулы $v_0 = vR/(R - r)$ при этом мы получаем, что $v_0 = 0/0$, т. е. $v_0$ не определена.

## ЗАДАЧА 5

Определить скорость оси катушки в условиях предыдущей задачи, если нить составляет угол $\alpha$ с горизонтом. Доказать, что при некотором значении $\alpha_0$ угла $\alpha$ качение без проскальзывания невозможно, и найти это значение.

### РЕШЕНИЕ

Движение катушки представим как вращение вокруг мгновенной оси $B$. Тогда, если $\mathbf{v}_A$ есть скорость точки касания $A$ нити и внутреннего цилиндра катушки, то $\mathbf{v}_A \perp AB$ и $v_A = v/\sin\beta$

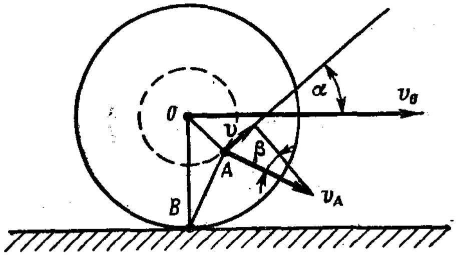
(см. решение задачи 1). Величину угла $\beta$ (см. рисунок) легко определить по данным задачи:

$$\cos\beta = \frac{R\sin\alpha}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\alpha}},$$

после чего скорость катушки можно рассчитать по формуле

$$v_0 = v_A\frac{R}{AB} = \frac{vR}{|r-R\cos\alpha|}.$$

При условии, что $\cos\alpha_0 = r/R$, выражение для величины $v_0$ теряет смысл. В этом случае нить направлена вдоль касательной к внутреннему цилиндру, проведенной из точки $B$. При таком направлении нити качание без проскальзывания при заданной величине $v$ невозможно (см. предыдущую задачу). Если $\alpha < \alpha_0$, катушка катится вправо, при $\alpha > \alpha_0$ — влево.




К задаче 5.

Найти величину $\alpha_0$ можно и не определяя величины скорости катушки. Чтобы заставить неподвижную катушку катиться по столу, нужно воздействовать на нее силой так, чтобы момент этой силы относительно мгновенной оси вращения $B$ был отличен от нуля. Следовательно, если линия действия силы проходит через ось вращения $B$, чистое качение невозможно.

## ЗАДАЧА 6

Автомобили $A$ и $B$ движутся равномерно с одинаковыми скоростями по прямым, пересекающимся в точке $O$ дорогам *1* и *2*. Определить минимальное расстояние между автомобилями, если известны их начальные положения ($AO = a$ и $BO = b$), скорость $v$ и угол $\alpha$ между дорогами (см. рис. *а*).

### РЕШЕНИЕ

В задачах на максимум и минимум всегда полезно с самого начала убедиться, если это возможно, что искомый результат существует. Обычно это подсказывает и основную идею решения. Следует, конечно, помнить, что всякое предположение нуждается в доказательстве. При решении задач мы будем иногда опускать наши интуитивные соображения, полагаясь на сообразительность читателя.

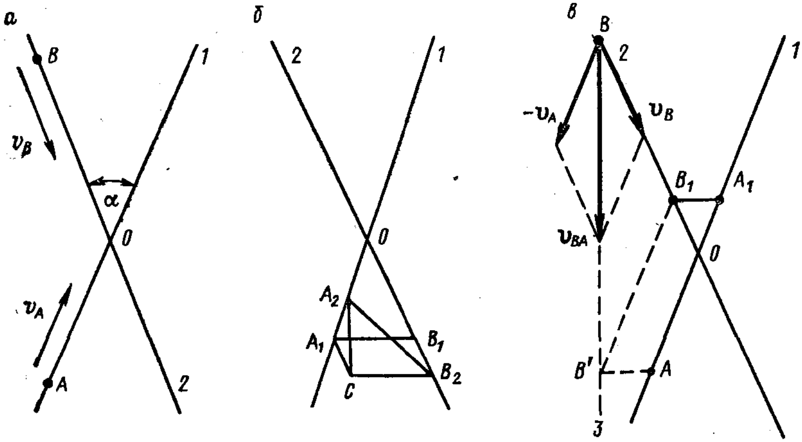
1-й способ. Искомое кратчайшее расстояние можно определить расчетным путем. Расстояние между автомобилями в момент времени $t$ определим по теореме косинусов

$$R_{AB}^2 = (a-vt)^2 + (b-vt)^2 + 2(a-vt)(b-vt)\cos\alpha. \qquad (1)$$

Необходимо найти минимум величины $R^2_{AB}$ как функции времени. Для этого воспользуемся следующим приемом: рассмотрим соотношение (1) как квадратное уравнение относительно величины $t$. Корни этого уравнения определяются соотношением $t_{1,2} = (a+b)/2v \pm D^{1/2}$, в котором $D$ есть дискриминант уравнения, равный

$$D = \frac{(a-b)^2(\cos\alpha - 1) + 2R^2_{AB}}{4v^2(\cos\alpha + 1)}.$$

Физический смысл корней следующий: если дискриминант неотрицателен, расстояние между автомобилями принимает одно и то же значение в два различных момента времени. Таким образом, искомое минимальное расстояние $R_0$, на котором автомобили




К задаче 6.

находятся только один раз (в момент времени $t_0 = (a+b)/2v$), достигается при $D = 0$. Тогда $R_0^2 = (a-b)^2(1-\cos\alpha)/2$. Представив выражение (1) в виде

$$R^2_{AB} = R^2_0 + 2v^2(1+\cos\alpha)\left(t - \frac{a+b}{2v}\right)^2,$$

убеждаемся, что $R^2_{AB} \geqslant R^2_0$.

2-й способ. Поскольку автомобили движутся с одинаковыми скоростями, то в момент времени $t' = (a+b)\,v$ автомобили „поменяются" местами, т. е. автомобиль $A$ окажется на расстоянии $b$ от точки пересечения дорог, а автомобиль $B$ — на расстоянии $a$. Таким образом, в рамках поставленной задачи автомобили равноправны, и можно догадаться, что в искомый момент времени автомобили должны быть симметричны относительно точки $O$, т. е. находиться от нее на одинаковых расстояниях. Попробуем проверить это предположение.

Обратимся к рис. *б* и выясним, справедливо ли неравенство $A_2B_2 > A_1B_1$, если $A_1O = B_1O$ и $A_1A_2 = B_1B_2$. Построим параллелограмм $A_1B_1B_2C$. Так как $\triangle CA_1A_2$ — равнобедренный, то отрезок $A_2C$ параллелен биссектрисе $\angle A_1OB_1$, т. е. $A_2C \perp B_2C$. Отрезки $A_2B_2$ и $CB_2 = A_1B_1$ являются, соответственно, гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника $CA_2B_2$, что и доказывает справедливость исходного неравенства, а значит, и нашего предположения. После этого нетрудно найти и величину кратчайшего расстояния между автомобилями.

3-й способ. Два предыдущих метода не лишены недостатков: первый требует сравнительно громоздких выкладок, во втором нужно заранее угадать результат, что не удалось бы, если бы скорости автомобилей были различны. Предлагаемый дальше способ свободен от этих недостатков и позволяет без вычислений построить искомый отрезок и соответствующие положения автомобилей.

Рассмотрим движение автомобиля $B$ с точки зрения наблюдателя, находящегося в автомобиле $A$. Скорость такого движения равна, как известно, разности $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ и постоянна по величине и направлению. Это значит, что относительно автомобиля $A$ автомобиль $B$ движется по прямой линии *3*. На рис. *в* прямая *3* изображена пунктиром для того, чтобы подчеркнуть, что она нарисована в системе отсчета, связанной с автомобилем $A$. Следовательно, автомобили находятся ближе всего друг к другу, когда автомобиль $B$ проходит через точку $B'$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из точки $A$ на прямую *3*. Отрезок $AB'$ равен искомому кратчайшему расстоянию между автомобилями.

Для того чтобы изобразить положение отрезка $AB'$ в неподвижной системе отсчета, сместим его параллельно самому себе так, чтобы конец $B'$ попал на дорогу *2*. Таким образом, точки $A_1$ и $B_1$ являются искомыми положениями автомобилей.*

## ЗАДАЧА 7

Вы находитесь на судне, которое идет с постоянной скоростью $v_1 = 15$ узлов ** (1 узел есть единица скорости, равная одной миле в час) прямолинейным курсом. Катер, идущий постоянным курсом со скоростью $v_2 = 26$ узлов, находится в шести милях южнее. Позднее он проходит точно у вас за кормой, причем в этот момент времени находится к вам ближе всего — на расстоянии трех миль.

Найдите курс судна. Какое время прошло между двумя моментами, указанными в задаче? Курсом судна называется направление его движения, отсчитываемое по часовой стрелке от направления на север.

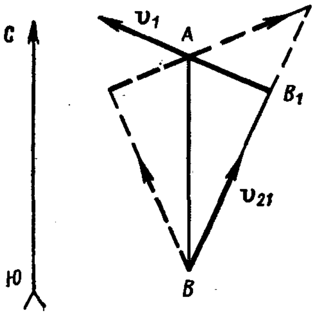
---

* Вас не должно смущать, что на рис. *б* и *в* отрезки $A_1B_1$ имеют разную длину, так как чертеж *б* иллюстрирует решение отдельной вспомогательной задачи.

** В морской практике скорость по традиции измеряется в узлах.

## РЕШЕНИЕ

Рассмотрим движение катера в системе отсчета, жестко связанной с нашим кораблем и, следовательно, движущейся поступательно со скоростью $\mathbf{v}_1$ относительно Земли. Скорость катера в этой системе отсчета $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ постоянна по величине и направлению, поэтому траектория катера во введенной системе отсчета является прямой (см. рисунок).




К задаче 7.

По условию наибольшее сближение происходит в тот момент, когда катер находится у нас за кормой, т. е. $\mathbf{v}_{21} \perp \mathbf{v}_1$. Поскольку $AB_1 \perp BB_1$, $AB_1 = AB/2$, то $\angle ABB_1 = 30°$.

Следовательно, курс нашего корабля равен 300 или 60°. Второму ответу соответствует пунктирный чертеж на рисунке. Очевидно, что $v_{21} = (v_2^2 - v_1^2)^{1/2}$, поэтому искомый промежуток времени равен

$$\Delta t = BB_1/v_{21} = AB/v_{21} \cos 30° \approx 20 \text{ мин}.$$

## ЗАДАЧА 8

Из пункта $A$ в пункты $B$, $C$ и т. д. можно попасть одним из двух способов: 1) выйти сразу и идти пешком; 2) вызвать машину и, подождав ее определенное время, ехать на ней. В любом конкретном случае используется способ передвижения, требующий наименьшего времени. При этом оказывается, что если конечный пункт отстоит от $A$ на 1 км (пункт $B$), 2 км (пункт $C$), 3 км (пункт $Д$), то требуется на дорогу не менее 10, 15, 17,5 мин соответственно. Скорости пешехода и машины, а также время ожидания машины неизменны.

Сколько времени потребуется, чтобы добраться до города $E$, отстоящего от $A$ на 6 км?

## РЕШЕНИЕ

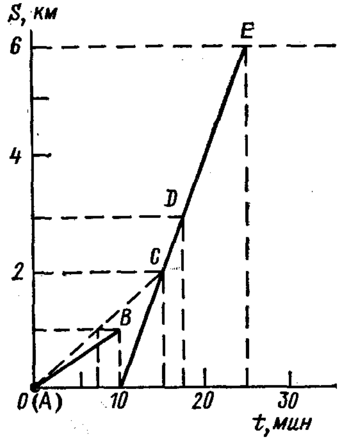
Для рассуждений воспользуемся способом графического представления движения. Возьмем прямоугольную систему координат и по оси абсцисс будем откладывать время, которое требуется на дорогу, а по оси ординат — расстояние от города $A$. Любое равномерное движение изображается на такой диаграмме, как известно, отрезком прямой.

Нанесем на диаграмму данные задачи; им соответствуют три точки $B$, $C$ и $Д$ (см. рисунок). Можно проверить, что эти точки не лежат на одной прямой. Следовательно, использовались оба способа перемещения, и по крайней мере в один из указанных пунктов пришлось добираться пешком.

Простые рассуждения показывают, что таким пунктом может быть только город $B$, отстоящий от $A$ на 1 км. Действительно, во-первых, из четырех точек $A$, $B$, $C$ и $Д$ никакие три не лежат на одной прямой; во-вторых, если бы добирались пешком до $C$ или $Д$, то до $B$ пешком можно было бы добраться меньше, чем за 10 мин, что противоречит условиям задачи.

До пунктов $C$ и $Д$, таким образом, следует добираться на автомобиле. Из чертежа видно, что и в город $E$ также нужно ехать на автомобиле.

Продолжив линию $CД$ до пересечения с линией $S = 6$ км, найдем искомое время поездки до пункта $E$: $t = 25$ мин.




К задаче 8.

Решение задачи, основанное на использовании чертежа, является совершенно строгим, если любое из утверждений может быть доказано алгебраически. В данном случае это условие выполнено. Алгебраическое (формульное) решение часто оказывается громоздким и значительно менее наглядным. Убедитесь в этом сами, решив задачу алгебраически.

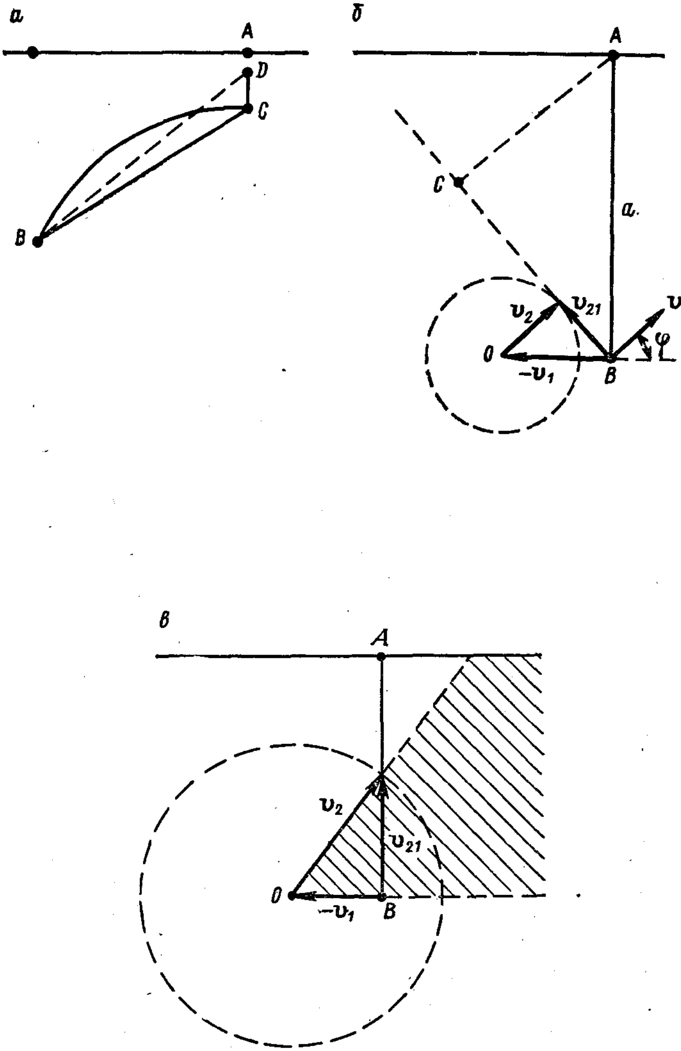
## ЗАДАЧА 9

Человек находится на расстоянии $a$ от прямой дороги, по которой равномерно со скоростью $v_1$ движется автомобиль. В начальный момент автомобиль находится в ближайшей к человеку точке дороги. Насколько близко человек может подбежать к автомобилю и в каком направлении он должен бежать, если его скорость равна $v_2$?

### РЕШЕНИЕ

Докажем, что человек должен бежать прямолинейно. Пусть человек бежит по некоторой кривой линии $BC$ (см. рис. $a$) и в точке $C$ находится к автомобилю, расположенному в этот момент в точке $A$, ближе всего. Пусть при этом затрачено время $t$. Однако, если человек побежит вдоль прямолинейного отрезка $BC$, он затратит на это время $t_1 < t$ и за оставшееся время $\Delta t = t - t_1$ сможет подбежать к автомобилю еще ближе. Бежать в направлении *ВД* еще выгоднее, и т. д.

Рассмотрим движение человека относительно автомобиля, осуществляемое со скоростью $\mathbf{v}_{21}$ (см. рис. *б*). Для построения вектора



К задаче 9.

$\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ поступим следующим образом. Начало вектора $-\mathbf{v}_1$ поместим в точку $B$ (исходное положение человека). Начало вектора $\mathbf{v}_2$ поместим в точку, где расположен конец вектора $-\mathbf{v}_1$. Если начало всех векторов $\mathbf{v}_{21}$ находится в точке $B$, то их концы при всевозможных направлениях движения человека лежат на окружности радиусом $v_2$ с центром в точке $O$.

Прямую, по которой бежит человек во введенной системе отсчета, следует провести так, чтобы она проходила как можно ближе к точке $A$ и имела общие точки с окружностью. Этим условиям удовлетворяет проведенная из точки $B$ касательная к окружности.* Следовательно, искомое направление движения человека (угол $\varphi$) и кратчайшее расстояние до автомобиля $R_{\min}$ таковы, что $\cos\varphi = v_2/v_1$, $R_{\min} = AC = a\sin\varphi$, $AC \perp BC$ для случая $v_2 < v_1$.

Если $v_2 > v_1$, то $v_1/v_2 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1$, $R_{\min} = 0$ и человек может бежать в любом направлении в пределах указанного сектора (см. рис. *в*): условия задачи не запрещают бегущему достичь какой-то точки дороги раньше, чем через эту точку пройдет автомобиль, и в этом месте подождать автомобиль.

Наконец, при условии, что $v_1 = v_2$, человек может сколь угодно близко подбежать к автомобилю, выбрав соответствующий малый угол $\varphi$.

Читателю предлагается самому доказать эти утверждения и построить соответствующие чертежи.

### ЗАДАЧА 10

Велосипедисту необходимо кратчайшим способом попасть из пункта $A$ в пункт $B$. Из $E$ в $B$ ведет дорога (см. рис. *а*), по которой можно ехать со скоростью $v_1$. Пункт $A$ находится на лугу, скорость передвижения по которому $v_2$. Расстояние $AD$ равно $a$, $AB$ равно *в*. Как должен ехать велосипедист?

### РЕШЕНИЕ

Нетрудно догадаться, что если $v_1 > v_2$, то самый короткий путь $AB$ не обязательно требует наименьшего времени. Велосипедисту выгодно использовать преимущество передвижения с большой скоростью по дороге, сократив, насколько возможно, медленную поездку по лугу.

Допустим, что велосипедист движется по ломаной $ACB$. На это затрачивается время

$$t = AC/v_2 + CB/v_1 = \sqrt{a^2 + CD^2}/v_2 + (BD - CD)/v_1,$$

или

$$t = (v_2 BD + \sigma)/v_1 v_2, \quad \text{где} \quad \sigma = v_1\sqrt{a^2 + CD^2} - v_2 CD.$$

Необходимо найти минимум величины $\sigma$ как функции $CD$. Представим последнее выражение в виде квадратного уравнения относительно величины $CD$, т. е.

$$CD^2 + \frac{2\sigma v_2}{v_2^2 - v_1^2} CD + \frac{\sigma^2 - v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} = 0.$$

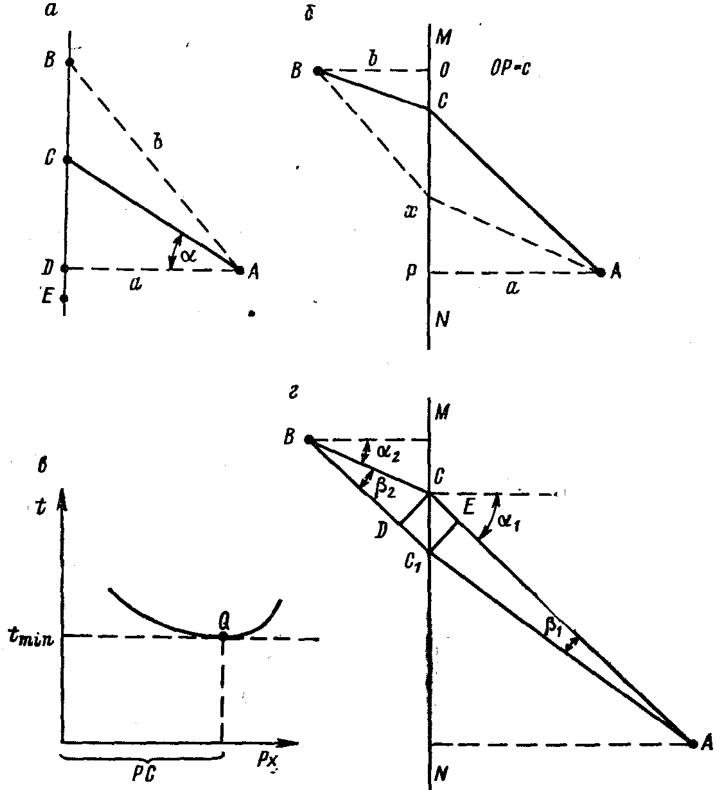
---

* Внимательный читатель заметит, что из точки $B$ проходят две касательные к окружности, расположенные на одинаковых расстояниях от точки $A$. Решение, однако, дает лишь одна из них. Почему?

Решения уравнения имеют смысл при условии, что дискриминант неотрицателен:

$$\left(\frac{\sigma v_2}{v_2^2-v_1^2}\right)^2-\frac{\sigma^2-v_1^2a^2}{v_2^2-v_1^2}\geqslant 0.$$

Отсюда для наименьшего значения $\sigma$ получаем выражение $\sigma_{\min}=a\,(v_1^2-v_2^2)^{1/2}$. При этом $CD=av_2/(v_1^2-v_2^2)^{1/2}$. Следовательно, если $BD=(b^2-a^2)^{1/2}\leqslant av_2/(v_1^2-v_2^2)^{1/2}$, то нужно ехать из $A$ в $B$ по прямой; в противном случае следует избрать путь вдоль ломаной $ACB$.




К задаче 10.

Отметим, что если кратчайшим путем является ломаная $ACB$, то справедливо, что $\sin\alpha=v_2/v_1$.

Рассмотрим аналогичную задачу. Велосипедисту нужно кратчайшим способом попасть из $A$ в $B$. Пункт $A$ расположен на лугу, пункт $B$ — на песчаном пляже. Пляж и луг разделены границей $MN$ (см. рис. *б*). Скорости передвижения по лугу и пляжу равны соответственно величинам $v_1$ и $v_2$. Все расстояния известны, т. е. $AP=a$, $BO=b$, $OP=c$. Какой путь должен быть избран велосипедистом?

Здравый смысл подсказывает, что и в этом случае решением задачи может оказаться некая ломаная $ACB$, если верно найти точку $C$. Предполагается, что $v_1 > v_2$. Допустим, что точка $C$ каким-то образом найдена, так что всякий другой путь $AxB$ требует большего времени. Если мы построим график зависимости времени поездки от величины $Px$, то должны получить кривую, похожую на изображенную на рис. *в*. Эта кривая касается прямой $t = t_{\min}$ при $Px = PC$, поэтому вблизи точки $Q$ прямая и кривая почти совпадают. Это означает, что если велосипедист избирает путь $AC_1B$ (рис. *г*), пересекающий границу $MN$ в точке $C_1$, близкой к $C$, то время поездки такое же, как и на пути $ACB$: скорость изменения величины $t$ вблизи значения $t_{\min}$ мало отличается от нуля (рис. *в*).

Сравним друг с другом пути $ACB$ и $AC_1B$ (рис. *г*). Будем считать, что углы $\beta_1$ и $\beta_2$ настолько малы, что $CE \approx AC - AC_1$ и $DC_1 \approx BC_1 - BC$, где $E$ и $D$ — основания перпендикуляров $C_1E$ и $CD$, опущенных на отрезки $AC$ и $BC_1$. Велосипедист, избирая путь $AC_1B$ вместо $ACB$, сокращает время езды по лугу на величину $\Delta t_1 = CE/v_1$, но по песку едет дольше на величину $\Delta t_2 = DC_1/v_2$. Так как общее время поездки вдоль $AC_1B$ примерно равно $t_{\min}$, то $\Delta t_1 \approx \Delta t_2$. Из чертежа находим, что $CE = CC_1 \sin\alpha_1$, $C_1D = CC_1 \sin\alpha_2$, откуда $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2 \approx v_1/v_2$, причем последнее соотношение выполняется тем лучше, чем ближе друг к другу точки $C$ и $C_1$.

Полученное соотношение совпадает по форме с законом преломления света на границе раздела двух сред, если принять, что показатель преломления $n_{21}$ при переходе света из среды 1 в среду 2 равен отношению скоростей света в этих средах, $n_{21} = v_1/v_2$ (в действительности так оно и есть). При этом можно сказать, что световой луч, преломляясь, следует по кратчайшему пути. Обобщение этого утверждения содержится в знаменитом принципе Ферма́: траектория распространения света из одной точки в другую такова, что для ее прохождения свету требуется минимальное (точнее экстремальное) время по сравнению с временем прохождения любых других возможных траекторий между этими точками.

## ЗАДАЧА 11 *

Пассажир, опоздавший на свой поезд, решил сначала догнать его на такси, однако через некоторое время он пересел на автобус, заплатив за билет $A$ руб, и прибыл на одну из станций одновре-

* Авторы сознательно включили в сборник типично математическую задачу типа задач на составление уравнений, так как в механике невозможно провести границу между „физическими“ и „математическими“ задачами, и, кроме того, это позволяет продемонстрировать некоторые полезные, но мало популярные в школьной математике способы решения кинематических задач.

менно с поездом. Между тем обнаружилось, что если бы он продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд на $\tau$ ч раньше, истратив при этом на $B$ руб меньше. Какова скорость поезда $v$, если скорость такси $v_1$ км/ч, автобуса $v_2$ км/ч, стоимость проезда 1 км на такси $a$ руб и шоссе проходит параллельно железной дороге?

РЕШЕНИЕ

1-й способ. Условимся, что поезд покинул исходную станцию в момент $t = 0$, пассажир опоздал на поезд на $\Delta t$ ч, пересел на автобус в $t_1$ ч и догнал поезд в $T$ ч.

К моменту встречи пассажир и поезд проходят одинаковое расстояние, т. е.

$$vT = v_1 (t_1 - \Delta t) + v_2 (T - t_1) \qquad (1)$$

в случае поездки на такси и в автобусе и

$$v (T - \tau) = v_1 (T - \tau - \Delta t) \qquad (2)$$

в случае поездки только на такси.

Доплата за такси во втором случае составляет $(A - B)$ руб, а дополнительное расстояние, покрытое на такси за эту сумму, $(A - B)/a$ км. Это дает еще одно уравнение

$$(A - B)/a = v_1 (T - \tau - t_1). \qquad (3)$$

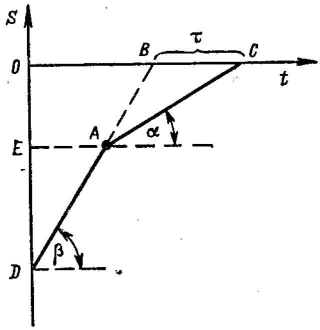
Условия задачи исчерпываются системой уравнений (1)—(3) с четырьмя неизвестными. Кратчайший путь к получению ответа таков: уравнения (1) и (2) вычитаются одно из другого, после чего в полученное уравнение подставляется величина $T - \tau$ из (3). Результат имеет вид

$$v = v_2 - (A - B)(v_1 - v_2)/a\tau v_1.$$

Примечание. Как известно, система из $m$ уравнений для $n$ неизвестных неразрешима, если $m < n$. Не следует забывать, однако, что под „неразрешимостью" понимается невозможность найти значения всех $n$ неизвестных, что, как в данной системе, совсем не исключает возможности нахождения нескольких из них.

2-й способ. Представим условия задачи в графической форме в прямоугольной системе координат, откладывая по оси абсцисс время с момента выезда пассажира из исходного пункта, по оси ординат — расстояние пассажира от поезда (см. рисунок), т. е. перейдем к системе отсчета, жестко связанной с поездом. Условимся считать, что отстающий пассажир находится на отрицательном расстоянии от поезда; $OD$ — отставание пассажира в начальный момент времени. На графике отрезок $DA$ изображает поездку в такси, $AC$ — на автобусе, $AB$ — предполагаемое продолжение поездки на такси. Движение самого поезда на нашем графике изображается линией, совпадающей с осью абсцисс, так как поезд в нашей системе отсчета неподвижен. Очевидно, что $BC = \tau$, $\operatorname{tg}\alpha = v_2 - v$, $\operatorname{tg}\beta = v_1 - v$. Отрезок $OE$, равный проекции отрезка $AB$ на ось ординат, есть величина отставания пассажира от поезда в момент пересадки с такси на автобус. Известно, что дополнительное расстояние, пройденное на такси со скоростью $v_1$, равно $(A - B)/a$ км. За то же время при движении со скоростью $v_1 - v$ будет пройдено расстояние $[(A - B)/a]\cdot[(v_1 - v)/v_1]$ км. Следовательно,

$$AB = OE/\sin\beta = \\ = [(A - B)/a\sin\beta]\,[(v_1 - v)/v_1].$$




К задаче 11.

Применяя к $\Delta ABC$ теорему синусов, получим, что

$$\frac{\tau}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{v_1 - v}{v_1}\cdot\frac{A - B}{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}. \qquad (4)$$

Воспользовавшись формулой для синуса разности углов, преобразуем последнее уравнение к виду

$$\frac{\tau}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{v_1 - v}{v_1}\cdot\frac{A - B}{a\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

откуда $v = v_2 - (A - B)\cdot(v_1 - v_2)/a\tau v_1$.

Преимущество изложенного метода по сравнению с предыдущим заключается прежде всего в его большой наглядности. Вся содержащаяся в условиях задачи информация связана с элементами $\triangle ABC$, а основная идея решения заключена в единственном уравнении (4). Дальнейшие выкладки лишь преобразуют это уравнение к удобному виду. Кроме того, метод не требует введения вспомогательных неизвестных величин $\Delta t$, $t_1$ и $T$, которые в дальнейшем необходимо исключать из системы уравнений.

Вообще, во всех случаях, когда условия задачи позволяют построить какой-то график, это следует делать; ничего, кроме пользы, это не принесет.

В заключение заметим, что формулировка задачи избавляет нас от необходимости исследовать ответ в зависимости от численных значений входящих в него величин.

## ЗАДАЧА 12

Торможение электропоезда метро должно начинаться на расстоянии $S = 200$ м до станции.

а) На каком расстоянии от станции окажется поезд, идущий со скоростью $v = 30$ м/с, через 7с после начала торможения с ускорением $a = -5$ м/с$^2$?

б) С какими скоростями $v_1$ и $v_2$ должны идти два поезда, если их нужно затормозить с ускорением $a = -5$ м/с$^2$ за $t_1 = 10$с и $t_2 = 15$с от начала торможения до полной остановки?

в) Какое ускорение следует сообщить поезду, идущему со скоростью $v = 30$ м/с, чтобы через $t = 20$с после начала торможения он не дошел до станции $\Delta S = 50$ м?

Отвечая на поставленные вопросы, школьник воспользовался уравнением равнопеременного движения

$$\mathbf{S} = \mathbf{v}t + \mathbf{a}t^2/2 \qquad (1)$$

и получил следующие ответы:

а) $\Delta S = S - (vt + at^2/2)$; $\Delta S = 112{,}5$ м;

б) $v = (2S - at^2)/2t$; $v_1 = 45$ м/с, $v_2 = 50{,}8$ м/с;

в) $a = (2S - 2\Delta S - 2vt)/t^2$; $a = -2{,}25$ м/с$^2$.

Не совершил ли он при этом ошибок?

### РЕШЕНИЕ

Уравнение (1) связывает друг с другом три *векторные* величины: *перемещение* $\mathbf{S}$ тела, его скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{a}$. В случае прямолинейного движения с постоянным ускорением справедливо и такое соотношение: $S = vt + at^2/2$, где $S$, $v$ и $t$ — проекции соответствующих векторов на направление движения тела. Но нельзя упускать из виду, что проекция перемещения $S$ не есть длина пути (последняя обозначается той же буквой $S$). Эти величины численно всегда совпадают для равноускоренного прямолинейного движения, а для равнозамедленного прямолинейного — лишь при $t \leqslant | v/a |$.

Этого школьник и не учел. Для указанных случаев имеем:

а) Через 6 с поезд остановится. Что с ним будет через 7 с, из условий задачи не известно. В таких случаях говорят, что задача не определена, иными словами исходных данных недостаточно для ответа на поставленные вопросы.

б) Уравнение $v = (2S - at^2)/(2t)$ справедливо только при условии, что $t \leqslant | 2S/a |^{1/2}$, которому данные задачи не удовлетворяют. Задача решений не имеет. Нетрудно вычислить, что максимальное время торможения $t_{\max} = |2S/a|^{1/2} = 9$ с.

в) Дополнительное условие к уравнению $S = vt + at^2/2$ имеет вид $t \leqslant 2(S - \Delta S)/v$. При данных числовых значениях величин $S$, $\Delta S$, $v$ и $t$ задача решений не имеет.

### ЗАДАЧА 13

Пассажир стоял у начала вагона с порядковым номером $k$. Поезд тронулся с места, после чего оказалось, что вагон номера $m$ двигался мимо пассажира $t$ с. Какое время займет прохождение мимо этого пассажира вагона номера $n$? Движение поезда равноускоренное, длины вагонов одинаковы, пассажир неподвижен относительно платформы.

РЕШЕНИЕ

Иногда эта задача вызывает недоумение: „Так мало дано! Вот если бы были еще известны ускорение или длина вагона...“. Однако, поскольку и в данных задачи и в поставленном вопросе речь идет только о времени, можно надеяться, что разумно введенные дополнительные неизвестные удастся исключить в процессе решения.

Обозначим время, за которое мимо наблюдателя прошли все вагоны с номера $k$ по номер $m-1$ включительно, символом $t_{m-1}$, по номер $m$ — символом $t_m$, по номер $(n-1)$ — $t_{n-1}$, по номер $n$ — $t_n$; время прохождения самих вагонов с номерами $k$, $m$ и $n$ — $\Delta t_k$, $\Delta t_m$ и $\Delta t_n$ соответственно. Тогда справедливо, что

$$\Delta t_m = t_m - t_{m-1}, \quad \Delta t_n = t_n - t_{n-1}. \tag{1}$$

Если длина вагона равна $l$, а ускорение поезда $a$, то для вагона $k$

$$l = a(\Delta t_k)^2/2. \tag{2}$$

Из последнего соотношения $(2l/a)^{1/2} = \Delta t_k$.

За время $t_m$ мимо пассажира прошло $m-(k-1)$ вагонов, поэтому соотношение типа соотношения (2) запишется в этом случае в виде $(m+1-k)\,l = at_m^2/2$, откуда $t_m = (2l/a)^{1/2} \times \times (m+1-k)^{1/2} = \Delta t_k (m+1-k)^{1/2}$. Аналогично $t_{m-1} = t_k(m-k)^{1/2}$. С учетом равенства (1) получаем, что

$$\Delta t_k = \frac{t_m - t_{m-1}}{\sqrt{m+1-k}-\sqrt{m-k}} = \frac{t}{\sqrt{m+1-k}-\sqrt{m-k}}.$$

Проводя те же выкладки для вагона с порядковым номером $n$, найдем, что искомое время определяется выражением

$$\Delta t_n = \left(\sqrt{n+1-k}-\sqrt{n-k}\right)\Delta t_k = \frac{\sqrt{n+1-k}-\sqrt{n-k}}{\sqrt{m+1-k}-\sqrt{m-k}}\,t.$$

Так как по условиям задачи $m, n \geqslant k$, то все корни имеют смысл, знаменатель в ноль не обращается.

### ЗАДАЧА 14

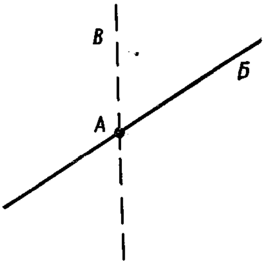
Четыре корабля $A$, $Б$, $В$ и $Г$ плывут в тумане с постоянными скоростями прямолинейными курсами. Корабли $A$ и $Б$ чуть не столкнулись; назовем это событие „столкновением“. Известно, что произошли следующие „столкновения“: $A$ и $Б$, $A$ и $В$, $A$ и $Г$, $Б$ и $В$, $Б$ и $Г$, причем в одном месте в одно и то же время „столкнулось“ не больше двух кораблей. Доказать, что при этом корабли $В$ и $Г$ также „сталкиваются“, если их скорости по величине различны. *

* Дж. Литлвуд. Математическая смесь. М., „Наука“, 1965.

**Р Е Ш Е Н И Е**

1-й способ. Как правило, когда интерес в задаче представляют расстояния между движущимися телами, бывает полезно вести рассмотрение в системе отсчета, в которой одно из тел неподвижно (см., например, задачи 6, 7).

Рассмотрим события с точки зрения наблюдателя, находящегося на корабле $A$. В этой системе отсчета траектория корабля $Б$ является прямой линией, проходящей через точку $A$ (сам корабль $A$ в этой системе неподвижен), раз происходит „столкновение“ $A$ и $Б$. Траектория корабля $В$ также есть прямая линия, проходящая через точку $A$. Допустим, что эта траектория имеет вид пунктирной прямой (см. рисунок). Если это действительно так, то в точке $A$ происходит „столкновение“ сразу трех кораблей: $A$, $Б$ и $В$, (иначе не „столкнутся“ корабли $Б$ и $В$), что противоречит условиям задачи. Следовательно, в нашей системе отсчета траектории $Б$ и $В$ совпадают, а столкновение $Б$ и $В$ происходит не в точке $A$, а где-то в другом месте. Точно так же можно убедиться, что траектория $Г$ совпадает с траекториями $Б$ и $В$. Поскольку скорости $В$ и $Г$ (относительно Земли) по условию различны, различны и их скорости в выбранной системе отсчета. В этой системе, таким образом, $В$ и $Г$ движутся по одной прямой с разными скоростями, а следовательно, неизбежно „столкнутся“, если еще не „столкнулись“.



К задаче 14.

2-й способ. Полезно познакомиться с еще одним удобным способом графического изображения движений. Допустим, что некоторое тело совершает движение, траектория которого лежит на плоскости. Введем на этой плоскости прямоугольную систему координат $oxy$. Пусть в момент времени $t$ тело имеет координаты $x$ и $y$. Добавим к нашей системе координат третью ось $oz$ ($oz \perp ox$, $oz \perp oy$), по которой будем откладывать время $t$. Три числа $x$, $y$ и $t$ изображаются в нашей системе точкой $M$. Множество этих точек для движения интересующего нас тела образует некоторую линию, которая называется мировой линией нашего тела. (Пример мировой линии для прямолинейного движения — кривая, изображающая зависимость от времени высоты тела, брошенного вверх. Мировая линия этого тела является, таким образом, отрезком параболы.) Мировые линии всех кораблей в нашей задаче являются прямыми, так как корабли движутся прямолинейно с постоянными скоростями.

Если мировые линии двух тел пересекаются, то эти тела сталкиваются. (Заметьте, что если пересекаются *траектории* тел, то это еще не означает столкновения, так как через точку пересечения траекторий тела могут пройти в разные моменты времени. Поэтому аппарат мировых линий очень удобен при составлении сложных расписаний движения транспорта и используется, например, железнодорожниками. Расписание должно быть составлено так, чтобы мировые линии поездов пересекались только во время остановок.) По условиям задачи мировые линии $A$, $Б$ и $В$ попарно „пересекаются“ (почти пересекаются), т. е. лежат в одной плоскости. Мировая линия $Г$ лежит в той же плоскости, так как она „пересекает“ линии $A$ и $Б$. Так как скорости $В$ и $Г$ различны, мировые линии $В$ и $Г$ не параллельны, т. е. „пересекают“ друг друга, что и означает „столкновение“ кораблей $В$ и $Г$.

## ЗАДАЧА 15

Необходимо поразить неподвижную цель, расположенную на расстоянии $S$ от орудия по горизонтали, на высоте $H$ над поверхностью Земли. Какова наименьшая скорость снаряда в момент выстрела $v_0$, при которой эта задача выполнима? Сопротивлением воздуха пренебречь.

### РЕШЕНИЕ

Укажем сначала на очень распространенную ошибку в рассуждениях: говорят, что траектории, вершина которой совпадает с положением цели, соответствует наименьшее значение начальной скорости снаряда. Основанные на этом расчеты приводят к выражению

$$v_0' = \sqrt{2gH\,(2H^2+S^2)}/2H.$$

Это утверждение кажется на первый взгляд справедливым; однако оно не только бездоказательно, но и неверно.

Начало системы отсчета поместим в точку, где находится орудие, оси системы направим горизонтально и вертикально. Если выстрел произведен под углом $\alpha$ к горизонту с начальной скоростью $v_0$, а траектория снаряда проходит через точку с координатами $S$ и $H$, то справедливо соотношение

$$H = S\operatorname{tg}\alpha - gS^2/2v_0^2\cos^2\alpha.$$

Найдем отсюда $v_0^2$:

$$v_0^2 = \frac{gS^2}{2}\cdot\frac{1}{(S\operatorname{tg}\alpha - H)\cos^2\alpha}.$$

Задача теперь состоит в подборе такого значения $\alpha$, при котором величина $v_0^2$ минимальна.*

Для удобства записи формул введем обозначения: $\operatorname{tg}\alpha = z$, $H/S = k$. Тогда

$$v_0^2 = \frac{gS}{2}\cdot\frac{1+z^2}{z-k},\quad z > k.$$

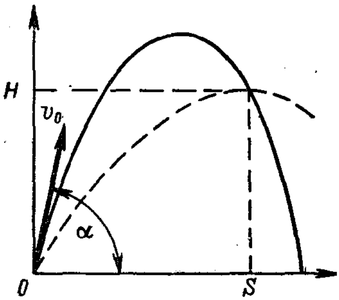
---

* Следует помнить, что задачи на экстремум отличаются принципиальной особенностью. Правильно решить такую задачу значит не только указать верное значение искомой величины, но и строго доказать, что найденное значение действительно превосходит любые другие в отношении требуемого свойства.

Преобразуем величину $(1+z^2)/(z-k)$, разделив числитель последнего выражения на знаменатель. В результате получим, что

$$\frac{1+z^2}{z-k}=2k+\sqrt{k^2+1}\left(\frac{z-k}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{\sqrt{k^2+1}}{z-k}\right).$$

Сопоставляя это выражение с классическим неравенством (см. примечание к этой задаче) $x+1/x \geqslant 2$ при $x>0$, приходим к выводу, что минимум $v_0$ имеет место при выполнении условия



К задаче 15.

$$\operatorname{tg}\alpha_0=z=k+\sqrt{k^2+1}= \\ =(H+\sqrt{H^2+S^2})/S$$

и определяется выражением $v_{0\ \min}=[gH+g(H^2+S^2)^{1/2}]^{1/2}$. Нетрудно видеть, что $v_{0\ \min}<v_0'$.

Интересно отметить, что траектория снаряда, соответствующая найденным величинам $\alpha_0$ и $v_{0\ \min}$, имеет вид, указанный на рисунке сплошной линией. Вершина траектории расположена по горизонтали ближе к орудию, чем цель, и находится выше цели. Снаряд попадает в цель на излете (т. е. когда вертикальная составляющая его скорости направлена вниз). Пунктиром на чертеже изображена траектория, вершина которой совпадает с положением цели.

Читателю рекомендуется самостоятельно доказать, что траектория построена правильно.

Примечание. Многие школьные задачи на максимум или минимум некоторой величины используют тот факт, что функция $x+1/x$, где $x>0$, имеет минимальное значение при $x=1$. Действительно, $x+1/x=x-2+1/x+2=(x^{1/2}-1/x^{1/2})^2+2$; так как $(x^{1/2}-1/x^{1/2})^2 \geqslant 0$ при $x>0$, то $x+1/x \geqslant 2$, минимальное же значение достигается при $x^{1/2}=1/x^{1/2}$, т. е. при $x=1$.

## ЗАДАЧА 16

Зенитное орудие производит выстрелы во всевозможных направлениях. Начальная скорость снарядов $v_0$. Определить границу области, которая простреливается из этого орудия.

### РЕШЕНИЕ

Из решения предыдущей задачи следует, что при заданной начальной скорости снарядов $v_0$ в точку с координатами $S$ и $H$, такими, что

$$v_0=\sqrt{gH+g\sqrt{H^2+S^2}}, \qquad (1)$$

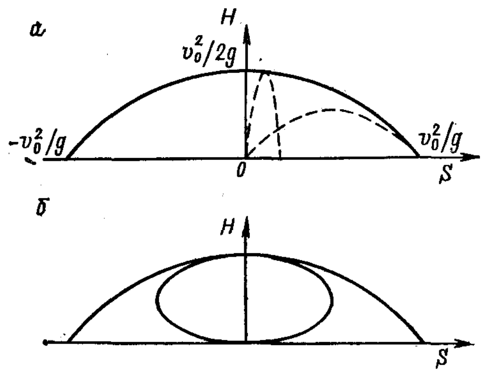
можно попасть только с помощью определенного выстрела, наклонив ствол к горизонту так, чтобы $\operatorname{tg}\alpha = [H + (H^2 + S^2)^{1/2}]/S$.

Если в том же или любом другом направлении из орудия произвести выстрел с начальной скоростью $v < v_0$, снаряд в эту точку не попадет. Следовательно, указанная точка $(S, H)$ лежит на искомой граничной поверхности.

Очевидно, что искомая поверхность симметрична относительно вертикальной оси выбранной системы отсчета. Поэтому достаточно найти уравнение линии пересечения этой поверхности с любой вертикальной плоскостью, проходящей через орудийную позицию.

Координаты точек, в каждую из которых можно попасть лишь единственным выстрелом, удовлетворяют соотношению (1). Рассмотрим это соотношение как уравнение, связывающее координаты $S$ и $H$, и преобразуем его к виду

$$H = v_0^2/2g - gS^2/2v_0^2. \quad (2)$$



К задаче 16.

Таким образом, искомая линия является параболой, которая описывается уравнением (2), а искомая граничная поверхность — параболоидом вращения (см. рис. *а*). Как указывалось в предыдущей задаче, любая траектория (кроме траектории при $\alpha = \pi/2$) касается найденной параболы не вершиной, но какой-то боковой точкой.

Получим одно интересное следствие из решения задачи. Построим поверхность, на которой расположены вершины траекторий всех снарядов.

Вершина траектории, соответствующей начальной скорости $v_0$ и углу $\alpha$, расположена, как известно, в точке с координатами

$$S = v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha/g; \quad H = v_0^2 \sin^2\alpha/2g.$$

Исключая из этих уравнений угол $\alpha$, получим, что

$$H^2 + S^2/4 - (v_0^2/2g)\,H = 0.$$

Линия, описываемая этим уравнением, симметрична относительно координатной оси $H$, проходит через начало координат и пересекает ось ординат в точке $H = v_0^2/2g$. Такая линия называется эллипсом (см. рис. *б*).

Искомая поверхность является эллипсоидом вращения.

Эллипсоид и параболоид вращения делят пространство на три области. В точки, расположенные вне параболоида вращения по отношению к орудию, при данной начальной скорости попасть нельзя. Любую неподвижную цель, находящуюся внутри эллипсоида, можно поразить снарядами как при восходящем, так и при нисходящем их движении. В цели, расположенные между параболоидом и эллипсоидом, снаряды попадают только при нисходящем полете.

Примечание. В связи с этой и рядом других задач необходимо знать следующее.

Любому соотношению вида $f(x, y) = 0$ (где $f(x, y)$ — произвольная непрерывная функция двух переменных) на плоскости $oxy$ можно сопоставить некоторую линию такую, что координаты любой точки линии удовлетворяют данному соотношению, и, наоборот, любая пара значений $x$, $y$, удовлетворяющих соотношению, дает точку, принадлежащую линии. Тогда соотношение $f(x, y) = 0$ называется уравнением линии. В школе широко известны графики прямой линии ($y = ax + b$), параболы ($y = ax^2 + bx + c$), гиперболы ($xy = a$). Приведенные в скобках соотношения есть, следовательно, уравнения прямой линии, параболы и гиперболы.

В настоящем сборнике используются также уравнения эллипса ($a^2x^2 + b^2y^2 - c^2 = 0$) и окружности ($x^2 + y^2 - R^2 = 0$).

## ЗАДАЧА 17

Автомобиль с колесами радиусом $R$ движется без проскальзывания по горизонтальной дороге со скоростью $v$. На какую максимальную высоту над поверхностью Земли забрасываются капли грязи, отрывающиеся от колес?

### РЕШЕНИЕ

Очевидно, что высота, на которую подлетает оторвавшаяся от колеса капля, зависит, во-первых, от высоты точки отрыва над поверхностью Земли и, во-вторых, от вертикальной составляющей скорости капли.

Поскольку вертикальные составляющие скорости любой точки колеса одинаковы в двух системах отсчета — в системе, жестко связанной с Землей, и в системе, связанной с осью колеса и движущейся поступательно относительно Земли, — эти системы в рассматриваемой задаче совершенно равноправны. Выберем из них вторую.

Пусть капля отрывается от края колеса в точке $A$ (см. рисунок). В выбранной системе отсчета модуль ее скорости $v_A$ для любого положения точки $A$ подчиняется равенству $v_A = v$. Вертикальная составляющая скорости поэтому $v_y = v \sin \alpha$. После отрыва от колеса капля движется с ускорением **g**, так что высота ее подъема над поверхностью Земли определяется выражением

$$h = R(1-\cos\alpha) + v^2 \sin^2\alpha / 2g. \qquad (1)$$

Если рассматривать последнее соотношение как уравнение относительно величины $\cos\alpha$, то его корни будут равны

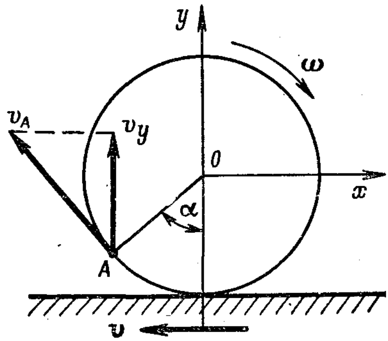
$$(\cos\alpha)_{1,2} = -\frac{Rg}{v^2} \pm \sqrt{\left(\frac{Rg}{v^2}+1\right)^2 - \frac{2gh}{v^2}}, \qquad (2)$$

причем эти формулы имеют физический смысл только при выполнении условий

$$h \leqslant \frac{v^2}{2g}\left(\frac{Rg}{v^2}+1\right)^2$$

и

$$|(\cos\alpha)_{1,2}| \leqslant 1.$$




К задаче 17.

Из последнего неравенства с учетом (1) следует, что 1) если $Rg/v^2 \leqslant 1$, то корень $(\cos\alpha)_1$ имеет физический смысл при

$$h \leqslant \frac{v^2}{2g}\left(\frac{Rg}{v^2}+1\right)^2,$$

а корень $(\cos\alpha)_2$ — при $h \geqslant 2R$; 2) если $Rg/v^2 > 1$, то $(\cos\alpha)_1$ имеет смысл при $h \leqslant 2R$, а $(\cos\alpha)_2$ смысла не имеет.

Следовательно, искомая высота подъема капель определяется выражением

$$h_{\max} = \begin{cases} \dfrac{v^2}{2g}\left(\dfrac{Rg}{v^2}+1\right)^2, & \dfrac{Rg}{v^2} \leqslant 1; \\ 2R, & \dfrac{Rg}{v^2} > 1. \end{cases}$$

Как видно, если скорость автомобиля мала ($v^2 < Rg$), то выше всего поднимаются те капли, которые от колес не отрываются.

## ЗАДАЧА 18

Круг (см. рис. *а*) с черным сектором (угол при вершине которого равен 40°) вращается вокруг оси, проходящей через центр круга перпендикулярно к его плоскости, с частотой оборотов 1500 мин$^{-1}$. Что будет видно на круге, если в темной комнате его освещают светом, мигающим 100 раз в секунду, причем длительность каждой вспышки света равна 0,003 с?

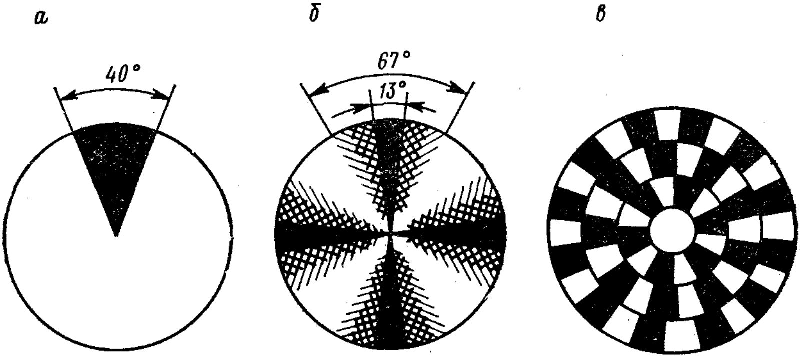
Решить эту задачу при частоте оборотов 1440 мин$^{-1}$ и 1560 мин$^{-1}$.

### РЕШЕНИЕ

Хорошо известно, что наш глаз обладает некоторой инерцией. Поэтому мелькающий свет при достаточно высокой частоте неотличим от непрерывного. В частности, это свойство глаза позволяет нам смотреть кино, т. е. воспринимать как непрерывное действие последовательность неподвижных сцен, сменяющих друг друга 24 раза в секунду.

В условиях предложенной задачи свет мелькает еще чаще, так что отдельных положений диска при вспышках мы различить не сумеем.

Если частота вращения диска 1500 мин$^{-1}$, то в промежутке времени между двумя последовательными вспышками (точнее, между началом одной вспышки и началом следующей) черный сектор повернется ровно на 90°. Таким образом, через четыре вспышки сектор возвращается в прежнее положение, повернувшись на 360°. В течение каждой вспышки (глаз воспринимает излучение




К задаче 18.

от диска только, когда диск освещен) сектор поворачивается на угол $\beta = 90° \cdot 0{,}3 = 27°$.

Все происходящее с диском в течение четырех вспышек воспринимается глазом как единовременное событие. Нетрудно понять, что при этом мы увидим на круге черный крест (см. рис. *б*). Средняя часть каждого лепестка этого креста (угол $\gamma = 40° - 27° = 13°$) темная, к краям лепесток плавно светлеет (угол $\gamma = 40° + 27° = 67°$).

Если диск вращается с частотой $\nu = 1440$ мин$^{-1}$, (т. е. 24 с$^{-1}$), то за четыре мигания (за время $\Delta t = 0{,}04$ с) сектор повернется на угол $\beta_1 = 360°\Delta t\nu = 345°{,}6$. События будут восприниматься нами при этом, как вращение креста в сторону, противоположную направлению вращения диска, с частотой

$$\nu_2 = \frac{360° - \beta_1}{360°\,\Delta t} = \frac{1}{4}\nu_1 - \nu = 1 \ \text{с}^{-1},$$

где $\nu_1$ есть частота вспышек.

При частоте вращения диска $\nu' = 1560$ мин$^{-1}$ крест будет вращаться в том же направлении, что и диск, с частотой $\nu_2 = \nu' - \nu_1/4 = 1$ с$^{-1}$.

**Рассмотренный эффект носит название стробоскопического. Он настолько любопытен, что полезно уделить ему некоторое внимание.**

Заметим прежде всего, что обычные лампы накаливания, хотя они и питаются переменным током, не мигают, так как за время между соседними амплитудными значениями тока, т. е. 1/100 с, нить накала не успевает остыть. Другое дело „холодные", газонаполненные лампы, например лампы дневного света или трубки, которые используют в световых рекламах. Они действительно мигают, но настолько часто, что обычно мы не замечаем этого, но можем убедиться в том, если, не фиксируя взгляд на лампе, быстро повернем голову: боковым зрением мы увидим целую гирлянду светящихся трубок.

С этим свойством неоновых реклам связан интересный случай стробоскопического эффекта *: велосипедист, проезжавший по улице, вымощенной брусчаткой и освещаемой рекламой, заметил, что при некоторой скорости движения брусчатка под ним кажется неподвижной. Попробуйте оценить скорость велосипедиста.

В заключение — вкратце о полезном использовании стробоскопического эффекта.

Много лет назад для проигрывания граммпластинок повсеместно использовались патефоны. Патефон с пружинным двигателем требует „настройки": частоту вращения диска с помощью специального тормоза можно в широких пределах менять, а она должна быть равна в точности 78 об/мин. Для такой настройки употребляли простой прибор — стробоскоп. Он представляет собой диск с отверстием, разделенный на несколько концентрических колец. На каждом из колец на белом фоне нарисовано определенное число (разное для разных колец) черных полосок, следующих друг за другом через одинаковые углы (см. рис. *в*, на котором стробоскоп изображен схематически: в действительности число полосок на кольцах не такое). Если стробоскоп поставить на вращающийся диск патефона как граммпластинку и осветить его неоновой лампочкой, то можно увидеть необычную картину: одно из колец окажется „неподвижным", а остальные кольца будут медленно „вращаться", причем в разных направлениях. Стробоскоп градуирован, так что по номеру неподвижного кольца можно сразу узнать частоту оборотов диска.

Этот же метод используется и в технике для точного определения частоты оборотов вращающихся валов. Соответствующий прибор называют стробbooтахометром. Диск, такой, как на рис. *а*, насаживают на вращающийся вал и освещают лампой, частоту миганий которой можно известным образом менять. Подбирают частоту миганий так, чтобы добиться на диске неподвижного рисунка (например, такого, как на рис. *б*). По частоте вспышек определяют искомую частоту вращения вала.

Еще одно очень важное применение стробоскопического эффекта в технике — обнаружение механических повреждений быстро вращающихся деталей. Допустим, например, возникло подозрение в том, что в роторе работающей турбины появилась поверхностная трещина. Останавливать турбину невыгодно, а на вращающемся с громадной скоростью роторе трещину, конечно, не заметишь. Освещают ротор мелькающим светом, частота мигания которого кратна частоте вращения ротора. При этом ротор „останавливается". Изменяя фазу миганий, можно заставить ротор „остановиться" в любом положении и, следовательно, просмотреть все участки его поверхности.

## ЗАДАЧА 19

**Какой силой F можно удержать на месте брусок массой $m$, лежащий на гладкой наклонной плоскости с углом при основании $\alpha$?**

---

* М. Миннарт. Свет и цвет в природе, М., Физматгиз, 1959.

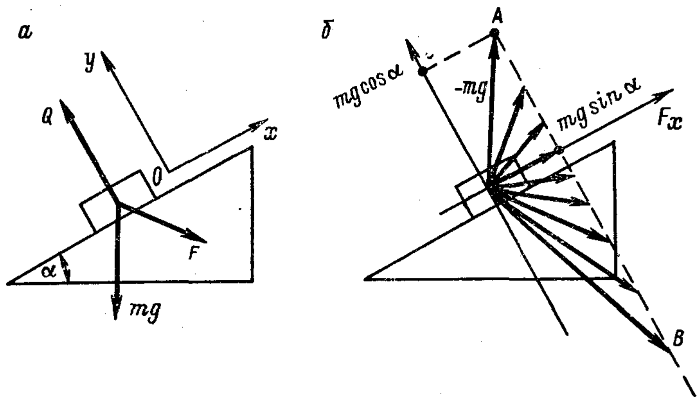
## РЕШЕНИЕ

На брусок действуют следующие силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, реакция опоры $\mathbf{Q}$ и искомая удерживающая сила $\mathbf{F}$ (см. рис. *а*). По условиям задачи $m\mathbf{g} + \mathbf{Q} + \mathbf{F} = 0$.

Проектируя это векторное равенство на оси $ox$ и $oy$, где $oy$ перпендикулярна, а ось $ox$ параллельна наклонной плоскости, получаем, что

$$\left.\begin{aligned} Q - mg\cos\alpha + F_y = 0, \\ -mg\sin\alpha + F_x = 0. \end{aligned}\right\}$$

Из этой системы (учитывая, что если брусок лежит на плоскости, то должно выполняться неравенство $Q \geqslant 0$) находим, что $F_x = mg\sin\alpha$, $F_y \leqslant mg\cos\alpha$.




К задаче 19.

Для наглядности все силы, удовлетворяющие последним соотношениям, можно изобразить в координатных осях $F_x$, $F_y$, ориентированных по $Ox$ и $Oy$ соответственно. Если начало искомого вектора $\mathbf{F}$ совпадает с началом системы координат $O$, то конец этого вектора должен лежать на полубесконечном луче $AB$ (см. рис. *б*).

Уместно пояснить, зачем нужны такие „идеальные" задачи (см. также задачу 32), поскольку очевидно, что в реальных условиях соскальзывание бруска неизбежно сопровождается возникновением сил трения, которые в задаче считаются отсутствующими.

Любой реальный физический процесс столь сложен, что полный учет всех действующих факторов принципиально невозможен. Неизбежно приходится идти на упрощения, ограничиваясь исследованием лишь основных из этих факторов. Заметим, что надо обладать определенным чутьем, чтобы в конкретных ситуациях отобрать именно основное и отсеять второстепенное. Так возникают многочисленные физические модели и идеализации (материальная точка, твердое тело, идеальный газ и т. д.). Используя их, следует помнить, что любая модель имеет ограниченную область применимости.

Что касается настоящей задачи, то скольжение почти без трения можно организовать достаточно легко, использовав в качестве бруска массивную тележку на легких, свободно вращающихся колесах. При этом полученный нами ответ окажется достаточно близким к действительности.

Учет трения существенно усложняет решение (см. задачу 20).

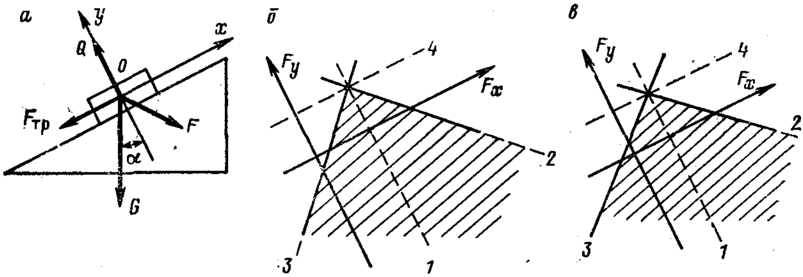
## ЗАДАЧА 20

На наклонной плоскости с углом при основании $\alpha$ находится брусок весом **G**. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен $f$. Какую силу **F** следует приложить к бруску, чтобы он был неподвижен?

### РЕШЕНИЕ

Введем систему координат $oxy$, так что ось $ox$ параллельна наклонной плоскости, ось $oy$ перпендикулярна к ней, причем обе оси лежат в вертикальной плоскости.

На брусок действуют силы: сила тяжести **G**, реакция опоры **Q**, удерживающая сила **F** и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. Направление последней




К задаче 20.

может быть и противоположным указанному на рис. *а*. Так как брусок неподвижен, то

$$\mathbf{G}+\mathbf{Q}+\mathbf{F}+\mathbf{F}_{тр}=0. \tag{1}$$

При этом обязательно

$$|\mathbf{F}_{тр}|\leqslant fQ, \tag{2}$$

а реакция Q направлена вверх от наклонной плоскости. Проецируя равенство (1) на ось $oy$, получаем, что $G\cos\alpha + Q + F_y = 0$, где $Q \geqslant 0$ или

$$F_y \leqslant G\cos\alpha, \tag{3}$$

$$Q = G\cos\alpha - F_y. \tag{4}$$

Проекция на ось $ox$ приводит к соотношению $-G\sin\alpha + F_x + F_{\text{тр}} = 0$, из которого с учетом (2) и (4) следует, что

$$|-G\sin\alpha + F_x| \leqslant f(G\cos\alpha - F_y).$$

Последнее неравенство имеет два решения: 1) если $-G\sin\alpha + F_x \geqslant 0$, то

$$f(G\cos\alpha - F_y) + G\sin\alpha \geqslant F_x \geqslant G\sin\alpha; \tag{5}$$

2) если $-G\sin\alpha + F_x \leqslant 0$, то

$$G\sin\alpha \geqslant F_x \geqslant f(F_y - G\cos\alpha) + G\sin\alpha. \tag{6}$$

Таким образом, указанному в задаче условию удовлетворяет любая сила $F$, составляющие которой подчиняются соотношениям (5) и (3) или (6) и (3).

Для наглядности полученные решения иллюстрируются графически (рис. *б* соответствует случаю $\sin\alpha > f\cos\alpha$, рис. *в* — $\sin\alpha < f\cos\alpha$). Любая сила, для которой изображающий ее вектор, начинаясь в начале координат, оканчивается в точке, принадлежащей заштрихованной области, удерживает брусок в состоянии равновесия.

Указанные на чертежах прямые описываются уравнениями

1. $F_x = G\sin\alpha$.
2. $F_x = G\sin\alpha + fG\cos\alpha - fF_y$.
3. $F_x = G\sin\alpha - fG\cos\alpha + fF_y$.
4. $F_y = G\cos\alpha$.

Минимальные абсолютные значения искомых сил равны величинам $fG(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ в первом и нулю — во втором случаях.

Сравните результат с ответом на предыдущую задачу. При $f \to 0$ угол при вершине заштрихованной зоны также стремится к нулю, а сама зона в пределе вырождается в полубесконечный отрезок. Таким образом, нами получено решение, более общее, чем в задаче 19, однако за счет более сложных выкладок.

Можно ли считать такой ответ полностью исчерпывающим явление? Нет, это лишь следующая модель, более сложная и точная сравнительно с задачей 19, но по-прежнему идеализированная. Ведь использованное соотношение для сухого трения скольжения $F_{\text{тр}} = fQ$ является идеализированным соотношением, справедливым лишь приблизительно в ограниченных пределах изменения величины нормального давления $Q$ и т. д.

И еще одно замечание. Пусть вектор, изображающий действующую на тело внешнюю силу **F**, заканчивается в точности на границе заштрихованной области. Как будет вести себя тело? Останется неподвижным? Будет двигаться? Если отвечать на такой вопрос в рамках нашей модели, то придется сказать, что оба ответа одновременно правильны. Тело находится в неустойчивом состоянии, когда сколь угодно малые воздействия (например, колебания наклонной плоскости, токи воздуха, даже броуновское движение молекул) будут то сдвигать его с места, то останавливать. К реальному ходу событий данное утверждение не относится: из-за неизбежных погрешностей в величине и направлении приложенной силы нам никогда не попасть концом вектора на линию. Да и сами линии в реальном опыте превратятся в полосы „неопределенности", тем более узкие, чем точнее нам известны значения величин $f$ и $\alpha$. Знать же эти величины абсолютно точно принципиально невозможно.

## ЗАДАЧА 21

Куб опирается одним ребром на пол, другим — на гладкую вертикальную стенку. Определить, при каких значениях угла между полом и боковой гранью возможно равновесие куба. Коэффициент трения куба о пол равен $f$.

### РЕШЕНИЕ

На куб действуют силы: сила тяжести **G**, сила трения **F**, реакции стенки $\mathbf{Q}_1$ и пола $\mathbf{Q}_2$ (см. рисунок).

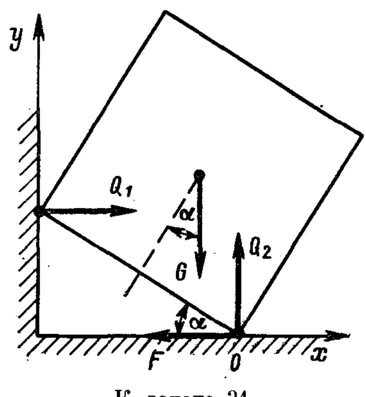
Из условия равенства нулю суммы сил следует, что $G = Q_2$, $F = Q_1$. Равенство нулю суммы моментов всех сил (если моменты вычислять относительно точки $O$) дает, что

$$Q_1 a \sin\alpha = G\,(\sqrt{2}\;a/2)\cos(\pi/4+\alpha),$$

где $a$ — ребро куба. Кроме того, $F \leqslant fQ_2$.

Решая выписанные уравнения относительно величины $\alpha$, находим, что $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1/(2f+1)$.

Надо также учесть, что при $\alpha > \pi/4$ куб опрокинется. Окончательный ответ имеет вид $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$, где $\alpha_0$ таково, что $\operatorname{tg}\alpha_0 = 1/(2f+1)$.



К задаче 21.

Легко видеть, что $\alpha_0$ всегда меньше $\pi/4$, если $f > 0$. Если $f = 0$, $\alpha = \alpha_0 = \pi/4$.

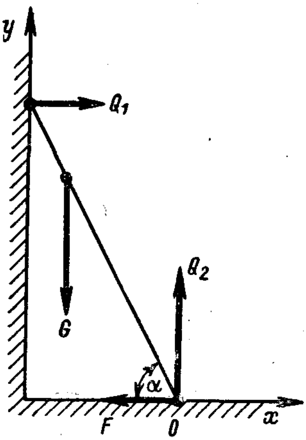
Примечание. В задачах, составленных применительно к школьной программе, моменты сил подсчитываются иногда относительно некоторой произвольной точки. Это, однако, частный случай использования общего определения, по которому моменты сил должны вычисляться относительно некоторой оси. Если же все рассматриваемые силы лежат в одной плоскости (именно так и оказывается в школьных задачах), а ось выбрана нами перпендикулярно этой плоскости, то найденные по общему правилу моменты сил (относительно оси) совпадают с моментами тех же сил относительно точки, где ось пересекает плоскость.

## ЗАДАЧА 22

На какую максимальную высоту может подняться человек по невесомой лестнице длиною $l$, приставленной к гладкой стенке? Угол между лестницей и полом равен $\alpha$, коэффициент трения о пол $f$ (см. рисунок).

РЕШЕНИЕ

На лестницу действуют силы: вес человека $\mathbf{G}$, приложенный на расстоянии $x$ от нижнего ее конца, реакция со стороны стенки $\mathbf{Q}_1$ (так как стена гладкая, трение между нею и лестницей отсутствует), реакция пола $\mathbf{Q}_2$ и сила трения у пола $\mathbf{F}$. Так как лестница неподвижна, сумма действующих на нее сил равна нулю:



К задаче 22.

$$\mathbf{G}+\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2+\mathbf{F}=0, \qquad (1)$$

сила же трения $F$ не превышает максимального значения силы трения покоя, т. е.

$$F \leqslant fQ_2. \qquad (2)$$

Из равенства нулю суммы моментов сил, действующих на лестницу, относительно точки $O$ получаем, что

$$Ql\sin\alpha = Gx\cos\alpha. \qquad (3)$$

Тогда из выражений (1) и (2) следует, что $Q_1 \leqslant fG$ или $G \geqslant Q_1/f$, а из соотношения (3) — что $x \leqslant fl\operatorname{tg}\alpha$. При этом интересующая нас максимальная высота определится из выражения $h = x\sin\alpha = fl\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

Не следует, однако, забывать, что величина $x$ не может превышать длины лестницы $l$. Следовательно, окончательный ответ имеет вид:

1) если $f\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1$, то $h = fl\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$.
2) если $f\operatorname{tg}\alpha \geqslant 1$, то $h = l\sin\alpha$.

## ЗАДАЧА 23

Сто шаров весом 1, 2, 3, ..., 100 кГ * расположены последовательно на прямом невесомом стержне, причем расстояния между центрами соседних шаров одинаковы (см. рис. *а*) и равны *a*.

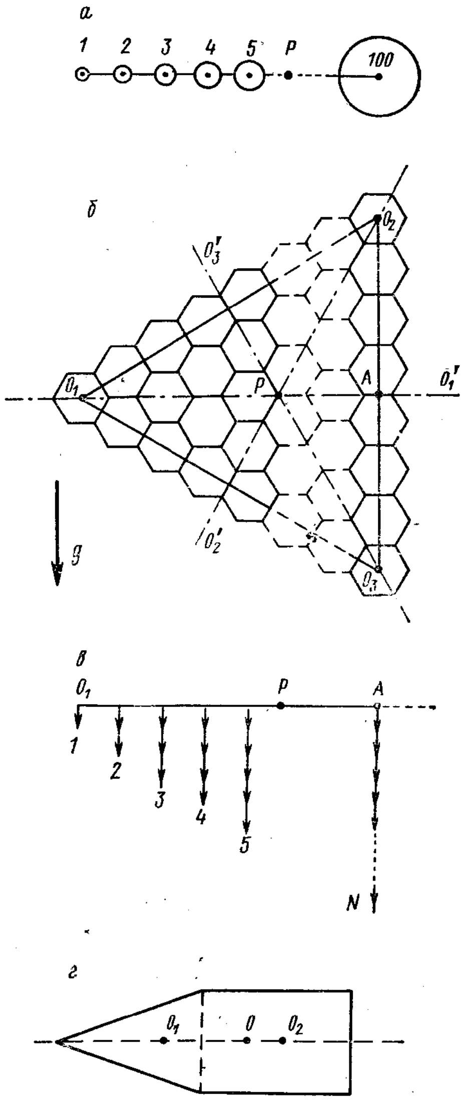
Найти центр тяжести такой системы.

### РЕШЕНИЕ

1-й способ. Несмотря на внешнюю сложность задачу можно решить вообще без вычислений.

Рассмотрим „треугольную“ фигуру, сложенную из правильных шестиугольников, в каждой стороне которой содержится $N$ шестиугольников (см. рис. *б*). Центр тяжести $P$ такой фигуры обязан лежать на точке пересечения трех осей симметрии $O_1O_1'$, $O_2O_2'$, $O_3O_3'$, т. е. его положение совпадает с центром тяжести правильного треугольника $O_1O_2O_3$, вершины которого лежат в центрах крайних шестиугольников.

Пусть вес каждого шестиугольника 1 кГ, $N = 100$, а направление силы тяжести совпадает с направлением вектора **g** на рисунке. Найдем сумму моментов всех сил тяжести относительно точки $P$. Для этого можно,




К задаче 23.

---

* В задаче 104 указано на два смысла понятия „вес“. В данном сборнике задач, как правило, используется второе содержание этого термина, за исключением устоявшихся, типовых словосочетаний вида „гиря весом в 1 кГ“, „невесомая нить“ и т. д.

В системе единиц СИ единицей силы, следовательно веса, является ньютон. Поскольку в практике укоренилось использование килограммов или граммов для измерения этих величин, то мы намеренно сохраняем традиционные единицы. Напомним, что 1 кГ = 9,8 Н.

в частности, перенести все силы вдоль по линиям их действия до оси $O_1O_1'$. В результате, если сторона шестиугольника равна $2a/3$, получим то же самое распределение сил, что и в случае стержня с шарами (рис. *в*). Следовательно, центр тяжести фигуры так же удален от точки $O_1$, как центр тяжести стержня с шарами от центра первого шара. Так как $O_1P = 2/3\ O_1A$, искомый центр тяжести совпадает с центром 67-го шара.

2-й способ.

Полезно знать, что центр тяжести тела совпадает с центром масс. Однако понятие „центр масс" более общее; в частности, центр масс есть у любого тела, в то время как центр тяжести — лишь у тел, находящихся в однородном поле тяжести (см. задачу 24).

Определяется центр масс так. Пусть дано некоторое тело массой $M$. Разобьем его мысленно на малые элементы с массами $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_i$. Пусть координаты соответствующих элементов в некоторой системе отсчета равны $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_i, y_i, z_i$. Вычислим следующие величины:

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_ix_i}{m_1 + m_2 + \ldots + m_i} = \frac{\sum\limits_i m_ix_i}{M};$$

$$Y = \frac{\sum\limits_i m_iy_i}{M}; \quad Z = \frac{\sum\limits_i m_iz_i}{M}.$$

Точка с координатами $X, Y, Z$ и называется центром масс.

В школе часто пользуются следующим приемом для определения положения центра тяжести. Исследуемое тело разбивается на несколько простых по форме частей, положения центров тяжести ($O_1$ и $O_2$ на рис. *г*) которых заранее известны, например из соображений симметрии. Центр тяжести $O$ всего тела отыскивается потом на отрезке $O_1O_2$, на расстояниях от точек $O_1$ и $O_2$, обратно пропорциональных весам соответствующих частей. Легко доказать, что такие действия непосредственно вытекают из приведенных выше формул.

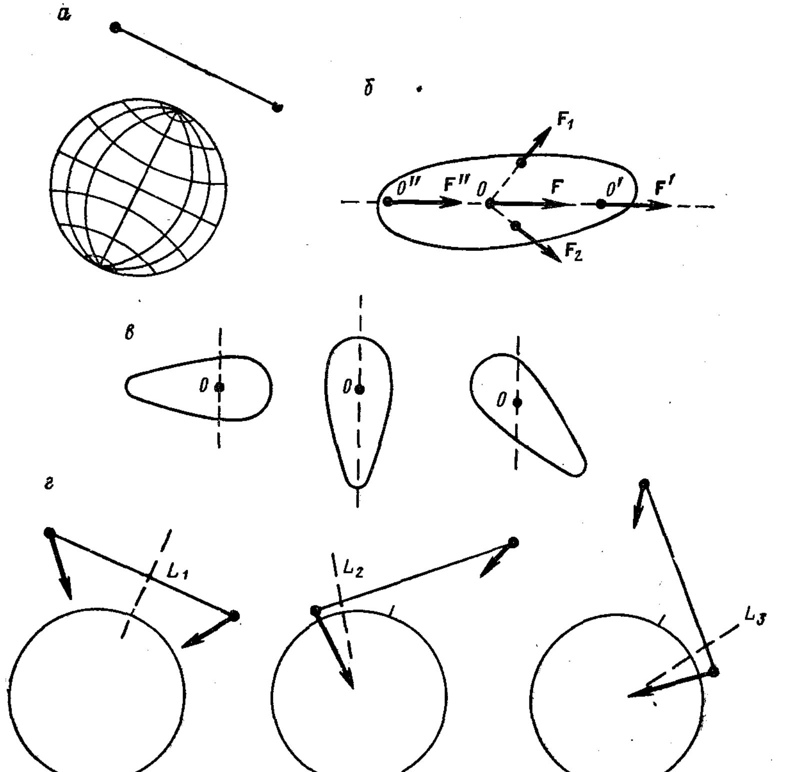
Вернемся к исходной задаче. Расположим стержень по оси $x$ так, чтобы центр первого шара находился от начала координат на расстоянии $x_1 = a$ ($a$ — расстояние между центрами соседних шаров). Тогда центр второго шара будет иметь координату $x_2 = 2a$ и т. д. Очевидно, что $Y = Z = 0$ (так как все $y_i = 0$, $z_i = 0$),

$$X = \frac{\sum\limits_i m_ix_i}{M} = \frac{a \cdot 1^2 + a \cdot 2^2 + \ldots + a \cdot 100^2}{1 + 2 + \ldots + 100}.$$

Известно, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Кроме того, $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$. Тогда находим что $X = 67a$, т. е. центр масс совпадает с центром 67-го шара.

## ЗАДАЧА 24

Найти положение центра тяжести тела, представляющего собой два массивных шарика, соединенных невесомым стержнем. Длина стержня сравнима с диаметром Земли (рис. *а*).




К задаче 24.

РЕШЕНИЕ

Широко распространено следующее определение:

> „Центром тяжести тела называется точка приложения равнодействующей всех элементарных сил тяжести, действующих на данное тело". В этом определении есть серьезная ошибка: у равнодействующей нет точки приложения, она имеет лишь линию действия.
>
> Как известно, равнодействующей силою для системы сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., приложенных к телу и сообщающих ему ускорение **а** (в том числе $a = 0$), называется сила **F**, сообщающая этому телу то же самое ускорение **а**.

Нахождение равнодействующей основывается на следующем экспериментальном факте (рис. *б*).

Пусть на некоторое тело в плоскости чертежа действуют силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Построим их векторную сумму $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Проведем линии действия этих сил и через точку пересечения $O$ проведем линию $O'O''$ вдоль направления $\mathbf{F}$. Тогда, как показывает опыт, сила $\mathbf{F}$, действующая по линии $O'O''$, эквивалентна по действию обеим силам $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, где бы вдоль прямой $O'O''$ она ни была приложена. Таким образом, если для реальных сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ нередко можно указать точки их приложения (не всегда!), для построенной нами расчетным путем равнодействующей $\mathbf{F}$ такой точки нет: подойдут и точка $O$, и точки $O'$, $O''$ и т. д.

Определение центра тяжести в свете сказанного можно дать в следующем виде.

Найдем по правилу сложения параллельных сил линию действия равнодействующей всех элементарных сил тяжести, приложенных к телу. Центром тяжести будет называться точка $O$, через которую эта линия проходит при любом положении тела (рис. *в*), если эта точка существует.

Легко сформулировать (труднее доказать) условие существования центра тяжести — однородность гравитационного поля в области пространства, занятой телом. В земных условиях это требование легко реализуется для тел, размеры которых много меньше размеров Земли.

В случае, рассматриваемом в этой задаче, указанное условие не выполняется. Рис. *г*, где найдены три линии действия $L_1$, $L_2$, $L_3$ для трех положений нашей „гантели", подтверждает, что общей точки у трех линий действия нет. Разные положения тела получены его поворотом относительно центра масс $O$ (см. задачу 23).

Примечание. Аккуратный читатель заметит, что у названных трех линий действия $L_1$, $L_2$, $L_3$ есть-таки общая точка пересечения — центр Земли. Это автоматическое следствие того, что поле тяготения Земли — центральное (т. е., что Земля сферически симметрична). Но в центре Земли будут пересекаться линии действия, принадлежащие любым телам любых размеров, следовательно, характеристикой тел эта точка не является. Следует договориться исключить ее из рассмотрения.

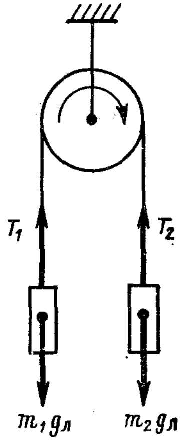
## ЗАДАЧА 25

Космический путешественник собирается отправиться на Луну. Он берет с собой пружинные весы, гирю с массой $m_1 = 1$ кг и блок. Опустившись на поверхность Луны, космонавт подбирает камень, который вытягивает на его весах 1 кГ. Затем он подвешивает гирю и камень к нити, перекинутой через блок, и обнаруживает, что камень опускается с ускорением $a = 1{,}2$ м/с². Чему равна масса камня $m_2$?

## РЕШЕНИЕ

Рассмотрим опыт космонавта с блоком (см. рисунок). Пусть ускорение лунного притяжения равно $\mathbf{g}_Л$. Тогда по второму закону Ньютона

$$m_1\mathbf{g}_Л + \mathbf{T}_1 = m_1\mathbf{a}_1, \quad m_2\mathbf{g}_Л + \mathbf{T}_2 = m_2\mathbf{a}_2,$$




К задаче 25.

где $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ — натяжения нитей, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ — ускорения гири и камня. Так как $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ и $-\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$, получаем, что

$$g_Л = a\,(m_1 + m_2)/(m_2 - m_1), \qquad (1)$$

причем $m_2 > m_1$, иначе камень поднимался бы. Поскольку показания пружинных весов одинаковы для гири на Земле, где ускорение свободного падения равно $\mathbf{g}_З$, и камня на Луне, $m_1\mathbf{g}_З = m_2\mathbf{g}_Л$, откуда

$$g_Л = g_З m_1/m_2. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что

$$(m_2)_{1,2} = \frac{m_1}{2}\cdot\frac{g_З - a}{a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ag_З}{(g_З - a)^2}}\right).$$

Подставляя числовые значения, находим, что $(m_2)_{1,2} = 3{,}58\ (1 \pm 0{,}75)$ кг. Из текста задачи известно, что $m_2 > m_1$. Следовательно, $m_2 = 3{,}58\ (1 + 0{,}75)$кг $= 6{,}25$ кг.

## ЗАДАЧА 26

Как правило, в задачах с блоками специально оговаривается или подразумевается, что а) нити абсолютно гибки, нерастяжимы и невесомы; б) блоки вращаются без трения и невесомы. Это обычный пример физической идеализации. Реализовать такие условия можно с весьма хорошим приближением. К примеру, капроновая нить (жилка) диаметром 1 мм выдерживает вес 30 кг, а собственный вес такой нити — около 1 г на метр длины. Блоки можно изготовить из легкого материала и установить на шарикоподшипниках.

А что дают нам указанные идеализации при решении задач?

## РЕШЕНИЕ

Для ответа на вопрос воспользуемся конкретным примером (см. рисунок).

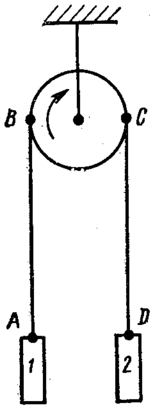
а) Гибкость нити дает право считать, что тела *1* и *2* движутся строго вертикально. Отсюда и из того, что нить нерастяжима, следует одно из необходимых нам уравнений $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2$ (см. задачи 25, 30).

Невесомость нити (а следовательно, и равенство нулю ее массы) позволяет ограничиться двумя динамическими уравнениями (в проекциях на вертикальную ось)

$$m_1a_1 = m_1g - T_A, \quad m_2a_2 = m_2g - T_D,$$

где $T_A$ и $T_D$ — натяжение нити в точки $A$ и $D$.

Рассмотрим отрезок нити $AB$. Для него следует записать, что $m_{AB}g - T_B + T_A = m_{AB}a_1$, где $m_{AB}$ — масса отрезка. Так как последняя равна нулю, с неизбежностью $T_B = T_A$. Продвигаясь вдоль всей нити, получаем, что $T_A = T_D$. В случае же весомой нити пришлось бы дополнить систему следующими уравнениями:



К задаче 26.

$$m_{AB}a_{AB} = m_{AB}g + T_A - T_B,$$
$$m_{CD}a_{CD} = m_{CD}g + T_D - T_C,$$
$$m_{BC}a_{BC} = T_C - T_B,$$
$$a_{AB} = -a_{CD} = -a_{BC} = a_1 = -a_2,$$

где $m_{AB}$, $m_{CD}$, $m_{BC}$ — массы соответствующих отрезков нити; $a_{AB}$, $a_{CD}$, $a_{BC}$ — их ускорения. При составлении уравнений было условно принято, что угловое ускорение блока направлено по стрелке.

Число уравнений в системе существенно увеличилось. К тому же, если грузы движутся, все величины, кроме $m_{BC}$, $m_1$, $m_2$, оказываются зависящими от времени. Очевидно, что решить такую задачу много сложнее. От этой излишней сложности и избавляются, полагая нить невесомой. Результат с хорошей точностью совпадает с истинным для легкой нити. Разумеется, могут встретиться задачи, где учет веса нити обязателен (см. задачу 42).

б) Еще бóльшие осложнения возникают, если не идеализировать блоки. Пусть блок вращается с трением. Представим для наглядности, что трение велико и что мы хотим привести блок в равномерное вращение в направлении стрелки. Очевидно, что в этом случае должно быть $m_2 > m_1$ и, следовательно, $T_C > T_B$ (так как $a_1 = a_2 = 0$). Последнее соотношение сохранится и при неравномерном вращении блока, лишь бы направление вращения совпадало со стрелкой (блок и нить считаются невесомыми). Переход от неравенства к уравнению, связывающему $T_C$ и $T_B$, очень сложен, так как требует учета многих обстоятельств (плотности посадки блока на ось, нагрузки на ось, соотношения радиусов оси и блока, коэффициента трения), к тому же полученное уравнение будет весьма приближенным.

Если блок весóм, т. е. обладает массой, вращение блока с ускорением снова приведет к тому, что $T_C \neq T_B$. Пусть блок массивен, тогда, чтобы раскрутить его (т. е. придать ускорение в направлении стрелки), должно быть, естественно, $m_2 > m_1$, откуда следует, что $T_C > T_B$ (так как $a_1 = -a_2$). Здесь переход от неравенства к уравнению проще, чем в предыдущем случае, и может быть выполнен точно и строго, если известны форма блока и плотность материала, из которого он выполнен.

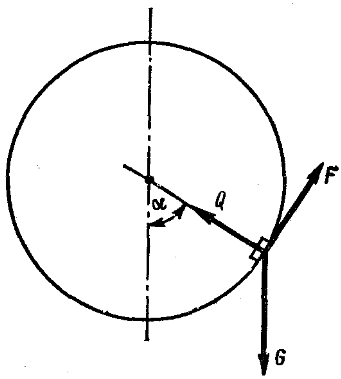
На стадии ознакомления с принципами применения в конкретных ситуациях основных законов физики нет никакой необходимости во всех указанных уточнениях, тем более, что за громоздкими расчетами легко потерять суть дела. И поскольку, как уже говорилось, идеализированные условия осуществляются часто, легко и с хорошей точностью, именно этим мы и ограничиваемся.

## ЗАДАЧА 27

Внутри колеса, всю массу которого можно считать сосредоточенной в ободе, бежит белка, причем отношение массы колеса к массе белки равно $n$. Колесо без трения вращается вокруг своей оси, которая расположена горизонтально. Коэффициент трения между ободом колеса и белкой равен $f$. Какое максимальное постоянное линейное ускорение $a$ может белка сообщить колесу?

### РЕШЕНИЕ

На рисунке изображены силы, действующие на белку: сила тяжести $\mathbf{G}$, реакция опоры $\mathbf{Q}$ и сила трения $\mathbf{F}$. Для того чтобы ускорение колеса было максимально, величина $|\mathbf{F}|$ должна быть максимальной, т. е. $F = fQ$, а следовательно, для постоянства ускорения необходимо, чтобы $F$ и $Q$ были постоянны.



К задаче 27.

Подумаем, как должна вести себя белка, чтобы выполнить указанные условия. В системе отсчета, связанной с Землей, белка может перемещаться только по окружности. При этом второй закон Ньютона приводит к равенству $Q - mg\cos\alpha = mv^2/R$ (см. рисунок), в котором $m$ — масса белки, $v$ — ее скорость. Удовлетворить условию $Q = \text{const}$ можно двумя способами, каждый из которых кажется на первый взгляд подходящим: либо белка неподвижна, т. е. $Q = mg\cos\alpha$, либо она бежит по колесу с достаточно большой скоростью так, что величина $v^2$ меняется прямо пропорционально величине $(-\cos\alpha)$. Рассмотрим более подробно последний случай движения белки. При значениях $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ величина $v^2$ принимает наименьшее и наибольшее значение соответственно. Следовательно (см. решение задачи 10), при этих значениях $\alpha$ касательное (линейное) ускорение белки равно нулю. Поскольку в этих же точках ускорение может вызываться только силой трения между белкой и колесом (вес белки направлен по радиусу окружности), сила трения в этих точках равна нулю. Следовательно, рассмотренный случай нам не подходит, и для достижения поставленной цели белка должна быть неподвижной относительно Земли, т. е. $\mathbf{G}+\mathbf{F}+\mathbf{Q}=0$. Из рисунка находим, что $Q=G\cos\alpha$ и $F=G\sin\alpha$, а значит, $F=fQ=fG/(1+f^2)^{1/2}$.

В соответствии с третьим законом Ньютона такая же по величине сила трения действует на колесо, заставляя его двигаться с линейным ускорением

$$a=\frac{F}{M}=\frac{g}{n}\cdot\frac{f}{\sqrt{1+f^2}},$$

где $M$ — масса колеса.

## ЗАДАЧА 28

Распространены следующие определения: „Материальной точкой называется тело, размеры которого пренебрежимо малы сравнительно с его расстоянием до других тел“. Или даже: „Материальная точка — это тело, вся масса которого сосредоточена в одной точке“.

Развивая последнюю мысль, логично добавить: материальных точек в природе нет и быть не может, так как любое тело имеет конечные размеры. Получается, что физика тщательно и кропотливо исследует то, что не существует. Разумеется, в физике идеализированные модели встречаются на каждом шагу. Именно поэтому надо твердо представлять, по какому направлению идет идеализация в конкретных понятиях, каковы границы применимости введенных моделей.

Попробуйте исправить приведенные выше определения материальной точки, обобщив особенности движения тел в следующих случаях:

а) скольжение бруска по наклонной плоскости;

б) вращение Земли вокруг Солнца;

в) колебания маленького массивного шарика на длинной невесомой нити (математический маятник).

Подскажем, что в указанных случаях брусок, Земля и шарик являются материальными точками.

### РЕШЕНИЕ

а) Движение бруска поступательное. Траектории всех его точек, их скорости и ускорения в любой момент времени одинаковы, следовательно, достаточно выяснить особенности движения любой точки бруска. Если брусок сделан из неоднородного по плотности материала, то это не скажется на его движении. Доведем неоднородность до крайности. Пусть вся масса бруска сосредоточена в одной точке: все равно в движении ничего не изменится. Естественно, что эта точка должна быть выбрана так, чтобы брусок не опрокинулся.

Вывод: исследуя поведение тела, движущегося поступательно, можно считать, что вся его масса сосредоточена в одной точке. К этой точке можно прикладывать все силы, действующие на тело. Размеры и формы тела на его движение не влияют.

Заметим, что первое из процитированных определений материальной точки к бруску не применимо: его размеры просто не с чем сравнить.

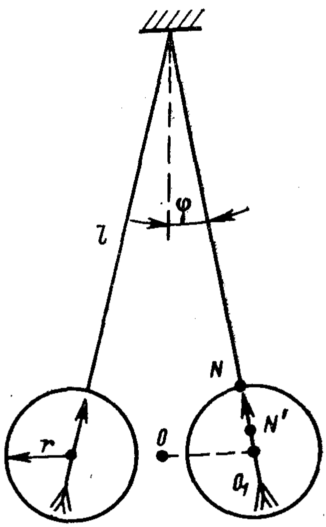
б) Движение Земли вокруг Солнца не является поступательным, так как Земля вращается вокруг своей оси. Однако совершенно очевидно, что на это вращение Солнце никак не влияет: поле тяжести Солнца сферически симметрично и достаточно однородно в пределах пространства, занятого Землей, и сила притяжения Солнцем Земли не создает вращающего момента относительно центра Земли. Движение центра масс Земли не зависит от ее вращения. (Конечно, Земля неоднородна по плотности, и к тому же не является шаром. Поле тяготения Солнца незначительно меняется в пределах части пространства, занятого Землей. По этим причинам, во-первых, отличен от нуля вращательный момент солнечного притяжения, и, во-вторых, возникают солнечные приливы — перемещающиеся с вращением Земли деформации ее верхних слоев. Оба фактора оказывают влияние на суточное вращение Земли, однако это влияние столь незначительно, что астрономические наблюдения за периодом суточного вращения Земли до самого последнего времени являлись основой службы точного (эталонного) времени). Следовательно, если нам нужно рассчитать траекторию какой-то точки Земли в пространстве, мы можем временно забыть о вращении Земли, полагать всю массу сосредоточенной в ее центре, рассчитать движение точки с такой массой, а затем наложить на рассчитанное движение суточное вращение Земли.

Итак, в данном случае ускорения всех точек Земли под действием только притяжения Солнца и других планет (кроме самой Земли) одинаковы и совпадают с величиной ускорения, вычисленной в предположении, что вся масса Земли сосредоточена в ее центре. Скорость вращения Земли, ее форма, распределение массы по объему на величину этого ускорения не влияют. Этот результат — следствие малого размера Земли сравнительно с ее расстоянием до Солнца.

Высказанные соображения станут еще очевиднее, если применить их к Венере. Венера покрыта плотным слоем облаков, так что детали ее поверхности неразличимы. И никакие наблюдения за движением Венеры вокруг Солнца не могли ответить на вопрос: каково собственное вращение этой планеты?

в) Шарик, совершающий на длинной нити колебания, участвует как в поступательном, так и во вращательном движении (см. рисунок), поворачиваясь вокруг своего центра между крайними положениями на угол $2\varphi$ (в действительности чуть меньше). В отличие от предыдущего случая это вращение неравномерно и вызывается теми же силами, которые создают ускорение поступательного движения шарика. Поэтому безоговорочно пренебрегать вращением нельзя.

Сравним параметры поступательного и вращательного движения. Когда в поступательном движении шарик проходит расстояние $OO_1 = l\varphi$, $l$ — длина нити, то за счет вращения перемещение, например, верхней точки $N$ шарика составляет величину $r\varphi$, где $r$ — радиус шарика. Средние скорости обоих движений пропорциональны соответствующим перемещениям, так как зависимость от времени в обоих случаях одинакова — синусоидальная. Поэтому $v_в/v_п = r/l$, где $v_в$ — скорость вращательного движения точки $N$, $v_п$ — скорость поступательного движения шарика.



К задаче 28.

Следует учесть, что скорость $v'_в$ вращательного движения любой внутренней точки $N'$ шарика подчиняется соотношению

$$v'_в < v_в, \qquad (1)$$

так как точка $N$ ближе к оси вращения, чем точка $N$.

Для кинетических энергий поступательного и вращательного движения шарика, учитывая соотношение (1), придется написать уже строгое неравенство

$$T_в/T_п < (v_в/v_п)^2 = (r/l)^2. \qquad (2)$$

Но по условию $r/l \ll 1$. Тем более мало $(r/l)^2$. Это обстоятельство дает нам право пренебречь и самим вращательным движением шарика, и энергией этого движения, если нас интересуют характеристики поступательного движения, например период. Наше пренебрежение тем более обосновано, а результат тем более точен, чем лучше выполняется последнее неравенство.

Итак, при изучении колебаний математического маятника мы вправе, допуская лишь незначительную погрешность, не учитывать вращение шарика и считать его движение строго поступательным. Всю массу шарика в этом случае можно считать сосредоточенной в одной точке.

Два последних рассмотренных случая допускают следующее обобщение: если в течение некоторого промежутка времени изменение энергии вращательного движения тела значительно меньше изменения энергии поступательного движения (при этом соотношении между величинами *самих энергий* может быть каким угодно), то при рассмотрении поступательного движения тела мы вправе в течение этого промежутка времени считать его материальной точкой.

Анализ случаев а), б), в) позволяет сделать следующий вывод.

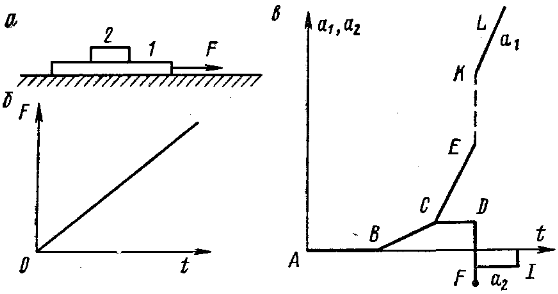
Если на тело конечных размеров действуют несколько внешних сил, то ускорение центра масс тела (см. задачу 23) можно вычислить следующим образом: всю массу тела считать сосредоточенной в центре масс, силы — приложенными к этому центру, и затем воспользоваться вторым законом Ньютона (см. задачи 46, 67). Если при этом вращением тела под действием данных сил можно пренебречь с удовлетворяющей нас точностью, тело является материальной точкой.

Иными словами: если в условиях данной задачи размеры тела допустимо не учитывать, такое тело можно считать материальной точкой.

Разумеется, одно и то же тело в разных задачах может быть, а может и не быть материальной точкой.

## ЗАДАЧА 29

Доска *1* покоится на столе, на ней лежит брусок *2* (рис. *а*). В некоторый момент времени на доску начинает действовать гори-




К задаче 29.

зонтальная сила $F$, линейно увеличивающаяся со временем (рис. *б*). С какими ускорениями будут двигаться оба тела, если между соприкасающимися поверхностями действуют силы трения?

### РЕШЕНИЕ

Будем для краткости проекции ускорений $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ доски и бруска соответственно на направление силы $\mathbf{F}$ называть просто ускорениями и обозначать $a_1$, $a_2$.

График зависимости этих величин от времени представлен на рис. *б*. Поясним его.

Обозначим массу доски $m_1$, бруска — $m_2$, коэффициент трения доски о стол $f_1$, бруска о доску — $f_2$.

На участке $AB$ $a_1 = a_2 = 0$, так как $F \leqslant (m_1 + m_2)\, g f_1$, т. е. действующая на доску сила меньше максимально возможного значения силы трения покоя между столом и доской. Как только сила превысит это значение, доска и брусок придут в движение с одинаковыми возрастающими ускорениями (участок $BC$): $a_1 = a_2 = [F - f_1 g (m_1 + m_2)]/(m_1 + m_2)$. (Здесь и дальше следует иметь в виду, что равенства для ускорений справедливы каждое лишь в ограниченной области изменения силы $F$; границы этих областей оговариваются в тексте решения.)

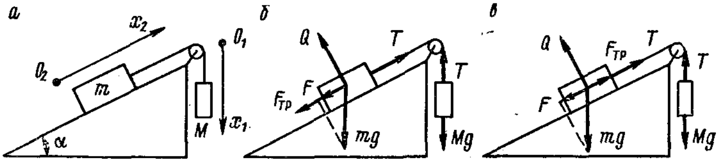
Как только величина силы трения покоя между бруском и доской достигает значения $f_2 m_2 g$, ускорение $a_2$ прекратит увеличиваться, сохранив величину, соответствующую точке $C$: $a_2 = f_2 g$ (участок $CD$). Ускорение $a_1$, напротив, растет быстрее, чем прежде ($CE$): $a_1 = [F - f_1 g (m_1 + m_2) - f_2 g m_2]/m_1$.

Когда брусок соскользнет с доски (точка $D$) и упадет на стол (точка $F$), он будет двигаться с замедлением $a_2 = -f_3 g$ ($f_3$ — коэффициент трения бруска о стол) до полной остановки ($I$). Выброс в точке $F$ связан с тем, что в момент удара давление бруска на стол превышает вес бруска.

Освободившись от бруска, доска скачком увеличит свое ускорение до значения $a_1 = (F - f_1 g m_1)/m_1$. В дальнейшем (участок $KL$) скорость роста ускорения $a_1$ не меняется и равна скорости роста $a_1$ на участке $CE$.

## ЗАДАЧА 30

На наклонной плоскости с углом при основании $\alpha$ находится брусок массой $m$, соединенный невесомой нерастяжимой нитью,




К задаче 30.

перекинутой через блок, с грузом массой $M$ (см. рис. *а*). Определить ускорения бруска и груза, если коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью равен $f$.

### РЕШЕНИЕ

Решение задач подобного типа существенно зависит от того, существует ли начальная скорость относительного перемещения тел, между которыми действуют силы трения, и каково ее направление. Введем следующие обозначения: $\mathbf{v}_{01}$ и $\mathbf{v}_{02}$ — начальные скорости груза и бруска соответственно; $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ — искомые ускорения; $v_{01}$—проекция скорости $\mathbf{v}_{01}$ на ось $O_1x_1$; $v_{02}$ — проекция скорости $\mathbf{v}_{02}$ на ось $O_2x_2$; $a_1$, $a_2$ — проекции ускорений на те же оси.

Выбор осей с учетом нерастяжимости нити приводит к очевидным равенствам: $v_{01} = v_{02} = v_0$, $a_1 = a_2 = a$.

1. Пусть начальная скорость $v_0$ перемещения груза $M$ отлична от нуля и для определенности направлена вниз (т. е. $v_0 > 0$, рис. *а*). Соответственно брусок движется вверх по наклонной плоскости с той же скоростью. Тогда сила трения $F_{\text{тр}}$, действующая на брусок, есть сила трения скольжения и направлена вниз по наклонной плоскости (рис. *б*).

Учитывая, что натяжение $T$ нити всюду одинаково, а $F_{\text{тр}} = fQ$, где $Q$ — сила реакции опоры, равная величине $mg \cos\alpha$, по второму закону Ньютона получаем следующие уравнения движения бруска и груза:

$$\left.\begin{aligned} T - F - F_{\text{тр}} &= ma, \\ Mg - T &= Ma, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $F = mg \sin\alpha$.

Решая систему (1) относительно $a$, получаем однозначно (вне зависимости от соотношений между исходными параметрами $M$, $m$, $f$, $\alpha$) значение $a$:

$$a = g\frac{M - m(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M + m},$$

откуда следует, что ускорения $a_1$, $a_2$ могут оказаться и совпадающими по направлению со скоростью $v_0$ и направленными в противоположную сторону. Для иного направления $v_0$ результат получаем аналогично.

2. Пусть начальная скорость $v_0$ равна нулю. Теперь заранее про силу трения известно лишь, что $|\mathbf{F}_{\text{тр}}| \leqslant fQ$. Для решения системы, в которую входит такое неравенство, необходим анализ всех возможных ситуаций.

а) Пусть значения масс $m$ и $M$ и угла $\alpha$ подобраны так, что при отсутствии трения груз $M$ начал бы опускаться, т. е.

$$M \geqslant m \sin\alpha. \tag{2}$$

В этом случае сила трения, препятствуя такому движению, направлена так, как показано на рис. *б*, причем $F_{\text{тр}} \leqslant f\,mg\cos\alpha$. Знак равенства соответствует случаю движения бруска и груза, т. е. случаю, когда $a > 0$, а значит, как только что вычислялось,

$$a = g\frac{M - m(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M + m},$$

что реализуется при $M/m \geqslant \sin\alpha + f\cos\alpha$.

б) Если условие (2) не выполнено, то на брусок действует сила трения $F_{\text{тр}}$, направленная вверх по наклонной плоскости (см. рис. *в*), причем уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} - T &= ma, \\ T - Mg &= Ma. \end{aligned}\right\}$$

Если $F_{\text{тр}} = fmg\cos\alpha$, т. е. $a > 0$, то

$$a = g\frac{m(\sin\alpha - f\cos\alpha) - M}{M + m},$$

что и окажется при $M/m \leqslant \sin\alpha - f\cos\alpha$.

Таким образом, окончательный ответ в случае, когда начальная скорость равна нулю, существенно зависит от соотношений между исходными параметрами $M$, $m$, $f$, $\alpha$ и должен быть записан так: если $M/m \geqslant \sin\alpha + f\cos\alpha$, то

$$a = g\frac{M - m(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M+m}$$

и груз $M$ опускается; если $M/m > \sin\alpha - f\cos\alpha$, то

$$a = g\frac{m(\sin\alpha - f\cos\alpha) - M}{M+m}$$

и груз $M$ поднимается; если $\sin\alpha - f\cos\alpha \leqslant M/m \leqslant \sin\alpha + f\cos\alpha$, то груз и брусок неподвижны.

### ЗАДАЧА 31

На наклонной плоскости с углом при основании $\alpha$ лежит доска массой $m_1$, на доске лежит брусок массой $m_2$. Коэффициент трения доски о плоскость $f_1$, бруска о доску — $f_2$. С какими ускорениями движутся брусок и доска, предоставленные самим себе (начальные скорости обоих тел равны нулю)?

#### РЕШЕНИЕ

Силы, действующие на рассматриваемые тела, указаны на рис. *а*. Силы трения, параллельные наклонной плоскости, изображены пунктиром, чтобы подчеркнуть: заранее их направления нам неизвестны.

Выберем систему отсчета, как указано на рис. *а*, и запишем для каждого из тел уравнения движения, следующие из второго и третьего законов Ньютона, сначала в векторной форме:

$$\left.\begin{aligned} m_1\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{Q}_1 + (-\mathbf{F}_2) + (-\mathbf{Q}_2) &= m_1\mathbf{a}_1, \\ m_2\mathbf{g} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_2 &= m_2\mathbf{a}_2, \end{aligned}\right\}$$

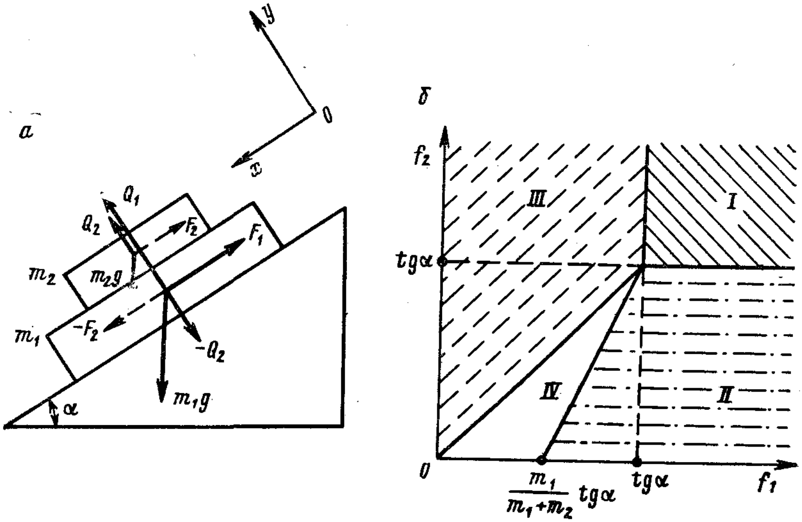
а затем в проекциях на координатные оси:

$$m_1 g\sin\alpha - F_1 + F_2 = m_1 a_1, \qquad (1)$$
$$m_2 g\sin\alpha - F_2 = m_2 a_2, \qquad (2)$$
$$Q_1 - Q_2 - m_1 g\cos\alpha = 0,$$
$$Q_2 - m_2 g\cos\alpha = 0.$$

(Было принято во внимание, что в направлении, перпендикулярном наклонной плоскости, тела не перемещаются, т. е. $a_{1y}$, $a_{2y} = 0$, и что $a_{1x} = a_1$, $a_{2x} = a_2$.) Из двух последних уравнений следует, что

$$Q_1 = (m_1 + m_2)\,g\cos\alpha, \qquad (3)$$
$$Q_2 = m_2 g\cos\alpha. \qquad (4)$$

В уравнениях (1), (2) содержатся четыре неизвестных: $a_1$, $a_2$, $F_1$, $F_2$. Уравнения (3), (4) не облегчают ситуацию. Следовательно, решение системы невозможно без использования каких-то дополнительных сведений о движении рассматриваемых тел. Динамические характеристики движения исчерпываются вторым законом Ньютона, так что дополнительная информация может содержаться только в кинематических уравнениях. В задачах, где исходные параметры заданы в общем виде (не численно), а тела в принципе могут оставаться неподвижными или перемещаться друг относительно друга, решение может быть найдено лишь




К задаче 31.

в результате исследования всех возможных вариантов движения тел. В нашей задаче возможны такие случаи движения:

1. $a_1, a_2 = 0$, т. е. оба тела неподвижны.

2. $a_1 = 0$, $a_2 \geqslant 0$ (доска неподвижна, брусок скользит по доске).

3. $a_1 = a_2 = a \geqslant 0$ (тела скользят по наклонной плоскости, оставаясь неподвижными друг относительно друга).

4. $a_2 \geqslant a_1 \geqslant 0$ (тела движутся с различными ускорениями, причем брусок опережает доску).

5. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant 0$ (тела движутся с различными ускорениями, причем брусок отстает от доски).

Отрицательные значения проекций ускорений, очевидно, невозможны (впрочем, это можно и доказать).

Нетрудно убедиться в том, что в каждом из указанных случаев движения система (1), (2) дополняется двумя необходимыми для ее решения уравнениями (например, в случае 4 нам известны значения обеих сил трения). После этого можно приступить к решению системы, рассматривая варианты движения по отдельности. При этом мы обязаны не только получить выражения для искомых проекций ускорений $a_1$ и $a_2$ в каждом из случаев, но и указать, при каких значениях исходных параметров задачи (т. е. $m_1$, $m_2$, $f_1$, $f_2$ и $\alpha$) осуществляется тот или иной тип движения.

1. Из уравнений (1), (2) при $a_1 = a_2 = 0$ находим величины сил трения покоя: $F_1 = (m_1 + m_2)\, g \sin\alpha$, $F_2 = m_2 g \sin\alpha$. Так как значения сил трения покоя удовлетворяют очевидным неравенствам

$$F_1 \leqslant f_1 Q_1 = f_1 (m_1 + m_2)\, g \cos\alpha, \tag{5}$$

$$F_2 \leqslant f_2 Q_2 = f_2 m_2 g \cos\alpha, \tag{6}$$

то рассматриваемый случай имеет место, если

$$f_1 \geqslant \operatorname{tg}\alpha, \quad f_2 \geqslant \operatorname{tg}\alpha. \tag{7}$$

2. Сила трения между бруском и доской является силой трения скольжения, $F_2 = f_2 m_2 g \cos\alpha$, что позволяет найти величину $a_2$ из уравнения (2):

$$a_2 = g (\sin\alpha - f_2 \cos\alpha). \tag{8}$$

Определив из (1) величину $F_1$ и использовав неравенства (5) и $a_2 \geqslant 0$, получим условия, при которых выполняется случай 2:

$$f_1 \geqslant \frac{m_1 \operatorname{tg}\alpha + m_2 f_2}{m_1 + m_2}, \quad f_2 \leqslant \operatorname{tg}\alpha. \tag{9}$$

3. Сила трения между доской и наклонной плоскостью является силой трения скольжения, $F_1 = f_1 (m_1 + m_2)\, g \cos\alpha$, что позволяет определить из уравнений (1), (2) искомую проекцию ускорения $a$:

$$a = g (\sin\alpha - f_1 \cos\alpha). \tag{10}$$

Так как справедливы неравенства (6) и $a \geqslant 0$, то получаем, что

$$f_1 \leqslant \operatorname{tg}\alpha, \quad f_2 \geqslant f_1. \tag{11}$$

4. Обе силы трения являются силами трения скольжения, $F_1 = f_1 (m_1 + m_2)\, g \cos\alpha$, $F_2 = f_2 m_2 g \cos\alpha$, так что искомые проекции ускорений могут быть найдены из системы (1), (2) и определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= g \sin\alpha + \frac{m_2}{m_1}(f_2 - f_1)\, g \cos\alpha, \\ a_2 &= g (\sin\alpha - f_2 \cos\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Используя неравенства $a_1 \geqslant 0$ и $a_2 \geqslant a_1$, находим, что

$$f_1 \leqslant \frac{m_1 \operatorname{tg}\alpha + m_2 f_2}{m_1 + m_2}, \quad f_2 \leqslant f_1. \tag{13}$$

5. Обе силы трения также являются силами трения скольжения, но проекция силы трения между бруском и доской отрицательна (т. е. ее направление противоположно указанному на рис. *а*), $F_2 = -f_2 m_2 g \cos\alpha$. При этом из неравенства $a_2 > 0$ следует, что $f_2 < 0$, что физически бессмысленно. Следовательно, такого движения в действительности быть не может.

Окончательный ответ выглядит следующим образом: если выполняются неравенства (7), то оба тела неподвижны; если справедливы неравенства (9), то $a_1 = 0$, $a_2$ определяется равенством (8); если справедливы неравенства (11), то ускорения тел одинаковы и определяются равенством (10); если справедливы условия (13), то ускорения тел определяются равенствами (12).

Полезно представить результаты исследования в графической форме. Изобразим области, соответствующие неравенствам (7), (9), (11) и (13), в прямоугольной системе координат $f_1$, $f_2$ (рис. *б*). (Неравенству (7) соответствует область *I* и т. д.) Как видно из рисунка, все возможные значения пар положительных чисел $f_1$ и $f_2$ обязательно попадут в одну и только в одну из построенных областей, что доказывает полноту и однозначность полученного решения. (На линиях, разграничивающих области, поведение брусков неоднозначно — см. задачу 20.)

Укажем на одно очень распространенное заблуждение. Школьники часто считают, что если в ответе на задачу не учтен какой-то из возможных случаев, то такой ответ является „неполным“ (т. е. верным, но не безупречным). Подчеркиваем, что любой „неполный“ ответ является неверным.

Представьте себе, что ваш приятель обратился к вам с просьбой дать ответ на задачу, которую он сам решить не может. Например он спрашивает у вас, когда приходит поезд из Минска, и узнает, что поезд приходит в 10 ч. Действительно, такой поезд есть. Но есть еще поезд, прибывающий в 9 ч; именно на нем и приехали знакомые вашего приятеля, которых он хотел встретить. Таким образом, предложив приятелю „неполный“ ответ, вы ввели его в заблуждение *.

## ЗАДАЧА 32

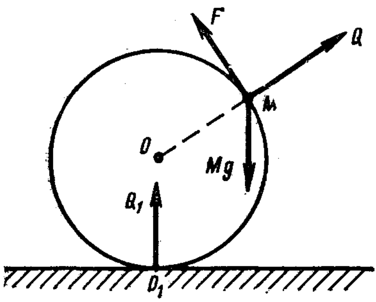
Сфера, масса которой равна нулю, лежит на горизонтальной подставке, причем трение между подставкой и сферой отсутствует. К поверхности сферы прикреплена материальная точка *M*. В исходном положении сфера находится в состоянии неустойчивого равновесия, т. е. материальная точка занимает самое высокое положение. Как будут двигаться сфера и точка, если их вывести из состояния равновесия?

---

* Современные научные и технические проблемы, как правило, настолько сложны, что далеко не всегда удается получить решение во всей области изменения исходных параметров. При этом типичный результат выглядит, например, так: $x$ (искомая величина) определяется таким-то уравнением, если $a \ll 1$ ($a$ — параметр). Такой ответ, разумеется, не является неверным: указанное ограничение ($a \ll 1$) обычно формулируют с самого начала и вводят в *условия* задачи.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим систему в положении, изображенном на рисунке, и определим силы, действующие на материальную точку $M$. Помимо силы притяжения к Земле на точку может действовать сила со стороны сферы. Представим последнюю силу в виде суммы двух составляющих $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{F}$, одна из которых направлена вдоль $OM$, а другая — перпендикулярно к этому отрезку. По третьему закону Ньютона на сферу со стороны $M$ действуют силы, равные $(-\mathbf{Q})$ и $(-\mathbf{F})$. Поскольку масса сферы равна нулю, то, как следует из второго закона Ньютона, сумма сил и сумма моментов сил, действующих на сферу, равны нулю. Из второго условия следует, что $F = 0$, так как в точке $O_1$ на сферу может действовать только сила $\mathbf{Q}_1$, перпендикулярная к подставке. Моменты сил $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}_1$ относительно точки $O$ равны нулю, а момент силы $(-\mathbf{F})$ относительно точки $O$ равен нулю, только если $F = 0$. Тогда из первого условия следует, что $Q_1 = Q = 0$.



К задаче 32.

Таким образом, на $M$ действует единственная сила — сила тяжести. Следовательно, выйдя из состояния равновесия, материальная точка свободно падает, разумеется, вертикально вниз, причем сфера из-под нее выскальзывает. Если столкновение $M$ с подставкой упругое, то после этого столкновения сфера вместе с $M$ станут прыгать на подставке.

Часто спрашивают (и такой вопрос совершенно законен), не бессмысленна ли эта задача: ведь тел с нулевой массой в природе не существует. Нет, выражение „сфера нулевой массы“ имеет определенный физический смысл, а именно: это „сфера, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой материальной точки”. При этом можно показать, что сила взаимодействия такой сферы и материальной точки также пренебрежимо мала по сравнению с весом материальной точки, если на сферу другие силы не действуют.

## ЗАДАЧА 33

В покоящийся на гладкой подставке клин массой $M$ попадает горизонтально летящая пуля массой $m$ и после абсолютно упругого столкновения с наклонной поверхностью клина отскакивает вертикально вверх. Каковы скорости пули до и после столкновения, если скорость клина в первый момент после удара равна $v$ (см. рисунок)?

## РЕШЕНИЕ

Обозначим искомые скорости пули до и после удара через $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$. На основе закона сохранения импульса

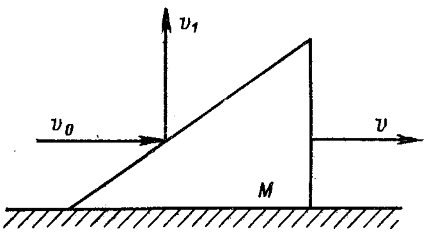
$$m\mathbf{v}_0 = M\mathbf{v} + m\mathbf{v}_1 + \mathbf{p}, \tag{1}$$

где $\mathbf{p}$ — импульс, полученный подставкой. Проекция выражения (1) на горизонтальную ось дает, что $mv_0 = Mv$, и, следовательно

$$v_0 = vM/m. \tag{2}$$

Так как удар абсолютно упругий, закон сохранения энергии приводит к выражению (см. примечание)

$$mv_0^2/2 = Mv^2/2 + mv_1^2/2. \tag{3}$$




К задаче 33.

С учетом соотношения (2) из выражения (3) следует, что

$$v_1 = v(M/m)\sqrt{1 - m/M}.$$

Эта формула имеет смысл лишь при условии, что $m/M \leqslant 1$, т. е. что пуля легче клина. В противном случае выражение для $v_1$ обращается в мнимое число, а это доказывает, что мы ищем то, чего быть не может: тяжелая пуля вертикально вверх не отскочит.

Примечание. При соударениях тел с массами $m$ и $M$ такими, что $m \ll M$, массивное тело изменяет свой импульс, но не меняет свою кинетическую энергию, в частности, при абсолютно упругом ударе кинетическая энергия тела $m$ остается без изменений. Мы не будем доказывать этого на первый взгляд парадоксального утверждения. Укажем только, что если до столкновения тело $M$ было неподвижно, а после столкновения приобрело скорость $v$, то его импульс пропорционален $v$, кинетическая энергия пропорциональна $v^2$. Так как $m \ll M$, $v$ мало, $v^2$ тем более мало, что и иллюстрирует высказанное выше.

## ЗАДАЧА 34

Абсолютно гибкая однородная цепочка массой $m$ и длиной $l$ висит вертикально над поверхностью стола, подвешенная за верхний конец. Нижний конец цепочки касается стола.

Верхний конец отпускают. Доказать, что в любой момент времени до тех пор, пока вся цепочка не упадет на стол, ее давление на поверхность стола равно утроенному весу лежащей на столе части цепочки.

Р Е Ш Е Н И Е

Пусть к моменту $t$ ($t \leqslant (2l/g)^{1/2}$) длина лежащей на столе части цепочки равна $x$, сила давления на стол этой части, т. е. ее вес, — $G(x)$. Очевидно, что

$$G(x) = mgx/l. \tag{1}$$

Пусть за малый промежуток времени от $t$ до $t + \Delta t$ на стол падает часть цепочки длиной $\Delta x$. Масса отрезка $\Delta x$ равна величине $\Delta m = m\Delta x/l$, а скорость падения $v = gt = (2gx)^{1/2}$, так как элемент $\Delta x$ находился в свободном падении время $t$ и прошел при этом путь $x$. Величины $v$, $\Delta t$ и $\Delta x$ связаны соотношением $\Delta t = \Delta x/v$.

Воспользуемся вторым законом Ньютона в форме

$$\Delta mv = F\,\Delta t, \tag{2}$$

где $F$ — сила, действующая со стороны стола на элемент $\Delta x$ и приводящая к остановке последнего. Подставляя в выражение (2) значения $v$, $\Delta m$ и $\Delta t$, находим, что

$$F = 2mgx/l. \tag{3}$$

На основании третьего закона Ньютона можно утверждать, что и элемент цепочки с силой $F$ действует на стол. Полную силу давления на стол получим, суммируя величины (1) и (3):

$$F + G(x) = 3mgx/l = 3G(x).$$

## З А Д А Ч А 35

Центры трех шаров расположены на одной прямой. Первому из них сообщают некоторую скорость $v_0$, после чего он абсолютно упруго сталкивается со вторым шаром. Затем второй абсолютно упруго ударяется о третий шар. Оба столкновения центральные.

Какова должна быть масса второго шара $m_2$ (массы $m_1$ и $m_3$ заданы), чтобы скорость третьего шара была максимальна при данной скорости $v_0$?

Р Е Ш Е Н И Е

Исследуем столкновение первого шара со вторым. Из законов сохранения импульса и энергии следует, что

$$m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2,$$
$$m_1v_0^2/2 = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2,$$

где $v_1$ и $v_2$ — скорости первого и второго шаров после столкновения. Преобразуем систему уравнений к виду

$$m_1(v_0 - v_1) = m_2v_2,$$
$$m_1(v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = m_2v_2^2.$$

Отсюда найдем решения

$$\text{а) } v_1 = v_0, \quad v_2 = 0;$$

$$\text{б) } v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

Два решения получены, потому что использованные в задаче законы сохранения „не знают“, было ли вообще столкновение. Первый ответ описывает события до столкновения и должен быть отброшен, как не решающий поставленную задачу.

Заметим, что это обычный результат при расчетах, опирающихся только на законы сохранения: направление, ход процесса эти законы не указывают. Надо пользоваться дополнительными соображениями. Например, разве закон сохранения энергии запрещает весомому телу неподвижно висеть над земной поверхностью без всяких опор и подвесок? Не запрещает. Энергия такого тела сохраняется.

Остается второе решение.

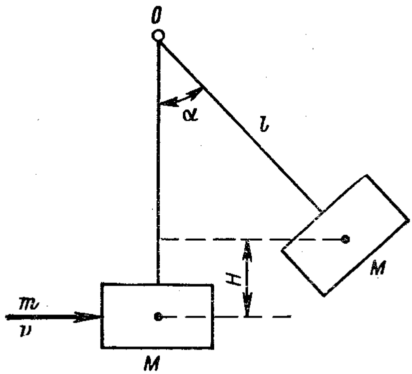
Аналогичный расчет для второго соударения приводит к следующему выражению для скорости третьего шара:

$$v_3 = \frac{2m_2 v_2}{m_3 + m_2} = \frac{4m_1 m_2 v_0}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} = \frac{4m_1 v_0}{m_1 + m_3 + m_2 + m_1 m_3/m_2}.$$

В последнем выражении числитель постоянен, следовательно, максимум дроби соответствует минимуму знаменателя. В свою очередь первые два слагаемых в знаменателе постоянны, и поиск максимального значения $v_3$ сводится к отыскиванию минимального значения выражения $m_2 + m_1 m_3/m_2$. Последнее перепишем в виде $(m_1 m_3)^{1/2} [m_2/(m_1 m_3)^{1/2} + (m_1 m_3)^{1/2}/m_2]$, что позволяет, воспользовавшись соотношением $(x + 1/x) \geqslant 2$ при $x > 0$ (см. примечание к задаче 15), найти, что искомый минимум достигается при $m_2 = (m_1 m_3)^{1/2}$.

### ЗАДАЧА 36

Пуля массой $m$, летящая горизонтально со скоростью $v$, попадает в ящик с песком массой $M$, жестко связанный с невесомым шестом длиной $l$, и застревает в нем. Шест может вращаться вокруг горизонтальной оси $O$, перпендикулярной к направлению скорости пули (см. рисунок). Определить максимальный угол отклонения шеста от вертикали. Размером ящика пренебречь.



К задаче 36.

РЕШЕНИЕ

На основе закона сохранения импульса $mv = (m + M)\, V$, где $V$ — начальная скорость движения ящика с застрявшей пулей. В крайнем положении ящика его скорость обратится в нуль, и, следовательно, по закону сохранения энергии $(m + M)\, V^2/2 = (m + M)\, gH$, где $H$ — высота подъема ящика. Из чертежа следует также соотношение $l \cos\alpha = l - H$, где $\alpha$ — искомый угол. Решая выписанные уравнения относительно величины $\cos\alpha$, получаем, что

$$\cos\alpha = 1 - m^2v^2/2\,(m + M)^2\, gl.$$

Обычно на этом решение заканчивают, не обращая внимания на такую возможность:

$$m^2v^2/2\,(m + M)^2\, gl > 2,$$

и, следовательно, $|\cos\alpha| > 1$.

> В математической задаче достаточно требовать выполнения неравенства
>
> $$m^2v^2/2\,(m + M)^2\, gl \leqslant 2,$$
>
> определяя тем самым область допустимых значений параметров $m$, $v$, $M$ и $l$.
>
> В физической же задаче необходимо разобраться, почему возникла нелепость и какие реальные события стоят за этим, как понимать отсутствие решения. Анализ должен проводиться лишь в рамках тех соотношений, которые были использованы в решении, никаких посторонних, не рассматривавшихся явлений (типа „шест разрывается“, „ящик ударяется о потолок“ и т. д.) привлекать к объяснению нельзя.

В нашем случае член $m^2v^2/2\,(m + M)^2\, gl$ растет с ростом $m$ и $v$. Растет тогда и $\alpha$. Легко догадаться, что при определенных условиях $\alpha$ станет больше $\pi$, и ящик начнет двигаться без остановки по окружности в вертикальной плоскости. Искомого угла $\alpha$ в таком случае просто не существует. Мы искали то, чего нет. Отсюда и особенность в решении. Окончательный ответ:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m^2v^2}{2\,(m + M)^2\, gl}, \quad \text{при} \quad \frac{m^2v^2}{(m + M)^2\, gl} \leqslant 4.$$

Если последнее неравенство не выполняется, ящик придет в круговое движение.

Следует заметить, что если в формулировке задачи вместо шеста будет дан канат, наше решение станет несправедливым уже при $m^2v^2/(m + M)^2\, gl > 2$, т. е. когда вычисляемый по формуле угол $\alpha$ превышает $\pi/2$ (почему?).

## ЗАДАЧА 37

При включенном двигателе ракета весом $G$ неподвижно висит над поверхностью Земли. Определить мощность $N$ двигателя в это время, если газы выбрасываются из сопла в вертикальном направлении со скоростью $v$.

### РЕШЕНИЕ

Ракета неподвижна, ее кинетическая и потенциальная энергии не меняются, следовательно, вся работа двигателя затрачивается на сообщение кинетической энергии выбрасываемым газам.

Пусть за время $\Delta t$ двигателем совершена работа $\Delta A$ и выброшена масса газа $\Delta m$, которую будем считать малой по сравнению с массой ракеты. По определению $N = \Delta A/\Delta t$, а кинетическая энергия газов $\Delta A = \Delta m v^2/2$. Так как ракета висит неподвижно, то сила, действующая со стороны газов на ракету, равна ее весу. На основе второго и третьего законов Ньютона для выбрасываемых газов $G\Delta t = \Delta m v$. Из этих уравнений находим, что $N = Gv/2$.

## ЗАДАЧА 38

На концах и в середине невесомого вертикального стержня длиной $l$ укреплены одинаковые шарики массой $m$ каждый. Какую скорость будут иметь шарики в момент падения на горизонтальный стол, если: а) нижний шарик закреплен шарнирно; б) нижний шарик не закреплен, трение между столом и нижним шариком отсутствует.

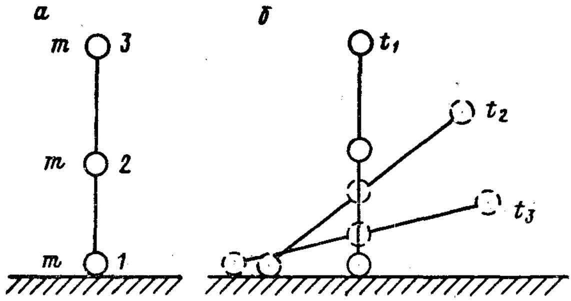
### РЕШЕНИЕ

а) Вся потенциальная энергия шариков превратится к моменту падения в их кинетическую энергию. Следовательно, $mgl/2 + mgl = mv_2^2/2 + mv_3^2/2$, где $v_2$ и $v_3$ — скорости второго и третьего шариков в момент удара о стол (рис. *а*). Так как при закрепленном нижнем шарике $v_2 = v_3/2$, окончательно получаем, что

$$v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}gl}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{3}{5}gl}.$$

б) Незакрепленный нижний шарик не влияет на конечный результат, хотя процесс падения выглядит существенно иначе (рис. *б*).

В отсутствие сил трения на систему из стержня и трех шариков не действуют никакие внешние горизонтальные силы. Следовательно, во-первых, центр масс системы, совпадающий со средним шариком, движется только по вертикали (см. задачи 23, 32, 50), и, во-вторых, система не может приобрести импульс в горизонтальном направлении, т. е. конечная горизонтальная составляющая скорости системы должна быть равна нулю. Так как первый шарик не имеет вертикальной составляющей скорости, его полная скорость в момент падения равна нулю.

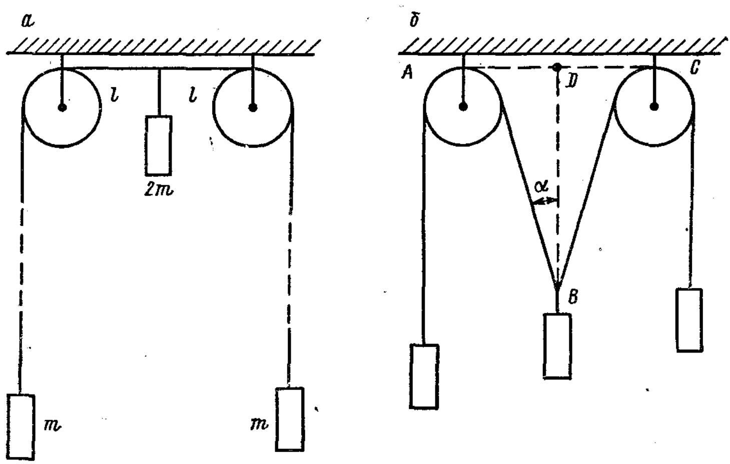



К задаче 38.

Соотношения между кинетической и потенциальной энергиями и между скоростями второго и третьего шариков в момент падения не отличаются от соответствующих соотношений для случая а), следовательно, окончательные результаты в обоих случаях одинаковы.

## ЗАДАЧА 39

Через два неподвижных блока, находящихся на расстоянии $2l$ друг от друга, перекинута достаточно длинная невесомая нить,




К задаче 39.

к концам которой подвешены грузы с массами $m$. К середине нити между блоками подвешен груз массой $2m$ (см. рис. *а*).

Найти скорости грузов по истечении достаточно большого промежутка времени.

РЕШЕНИЕ

Формулировка задачи предполагает, что по истечении достаточно большого промежутка времени скорости всех грузов станут постоянными (установившиеся скорости). Убедимся в этом, иначе попытки решать задачу могут оказаться бесплодными.

Когда средний груз опустится далеко вниз (нить допускает это, она „достаточно длинная“), нити, ведущие к нему, сольются в одну (угол между нитями станет весьма мал) и будут практически вертикальны. Очевидно, что в таком положении вес среднего груза уравновесится весами крайних грузов, и, следовательно, все грузы будут двигаться без ускорений. Их движение будет происходить по инерции с установившейся скоростью $v$, одинаковой у всех трех грузов.

Столь же ясно, что в начальном состоянии вес среднего груза ничем не уравновешен, и, следовательно, система придет в движение. Пусть к какому-то моменту крайние грузы поднялись на высоту $h$ каждый. Тогда длина любой из наклонных нитей от блока до среднего груза станет равной $l + h$ (рис. *б*). Размерами блоков мы пренебрегаем.

Из чертежа видно, что средний груз опустится при этом на расстояние $H$, причем $H = DB = AB\cos\alpha = (l + h)\cos\alpha$.

На основании закона сохранения прирост кинетической энергии системы равен убыли ее потенциальной энергии. Уменьшение потенциальной энергии определяется выражением

$$\Delta U = 2mg(l + h)\cos\alpha - 2mgh.$$

В пределе при $\alpha \to 0$ $\cos\alpha \to 1$, следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0}\Delta U = 2mgl. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия грузов при установившемся движении такова, что

$$T = mv^2/2 + mv^2/2 + 2mv^2/2. \qquad (2)$$

Из соотношений (1), (2) находим установившуюся скорость $v = (gl)^{1/2}$.

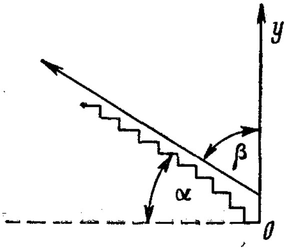
## ЗАДАЧА 40

Какую мощность должен развить человек массой $m$, чтобы за время $t$ подняться на высоту $H$ по эскалатору, который движется со скоростью $v$ под углом $\alpha$ к горизонту?

РЕШЕНИЕ

За время $t$ человек будет перенесен эскалатором на высоту $h = vt\cos\beta$, где $\beta$ — угол между вектором скорости движения эскалатора и осью $Oy$, направленной вертикально вверх (см. рисунок). (Если эскалатор движется вверх, $\beta = \pi/2 - \alpha$, и

$\beta = \pi/2 + \alpha$, если эскалатор движется вниз.) В результате человеку самому придется подняться на высоту $H - h = H - vt\cos\beta$. Совершаемая при этом подъёме работа $A = (H - vt\cos\beta)\, mg$, а необходимая мощность определяется выражением



К задаче 40.

$$N = A/t = mgH/t - mgv\cos\beta$$

при условии, что $H/t > v\cos\beta$. Последнее всегда имеет место, если эскалатор движется вниз, так как при $\beta = \pi/2 + \alpha$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ $\cos\beta < 0$. Если эскалатор движется вверх, то при $H/t \leqslant v\sin\alpha$ человеку для подъема за время $T \leqslant t$ достаточно стоять на месте, причем $N = 0$.

Если в такой задаче даны численные значения $m$, $H$, $t$, $v$ и $\alpha$, найденную мощность следует сравнить с реальными возможностями человека. Для него должно быть $N < 1$ л. с., иначе полученный результат имеет чисто академический интерес.

## ЗАДАЧА 41

Две однотипные ракеты, имеющие скорости относительно Земли 10 и 15 км/с, одновременно включили двигатели на одно и то же время. В результате скорости обеих ракет возросли одинаково, на 1 км/с каждая. Рассмотрим увеличение кинетической энергии каждой ракеты (для удобства в необычных единицах: $m$ км²/с², где $m$ — масса ракеты):

$$\Delta T_1 = (11)^2/2 - (10)^2/2 = 21/2,$$
$$\Delta T_2 = (16)^2/2 - (15)^2/2 = 31/2.$$

Следовательно, у второй ракеты кинетическая энергия увеличилась на большее значение, чем у первой. Не противоречит ли это закону сохранения энергии? Ведь обе ракеты израсходовали на увеличение скорости одно и то же количество топлива с одинаковой теплотворной способностью.

### РЕШЕНИЕ

Нет, не противоречит. Топливо второй ракеты обладает большей кинетической энергией, чем топливо первой ракеты, и при сгорании уменьшает свою кинетическую энергию на бóльшую величину, чем топливо первой ракеты.

Введем обозначения: $\Delta m$ — количество топлива, сгоревшего в ракете за малое время; $u$ — скорость ракеты относительно Земли; $\Delta u$ — приращение скорости ракеты в результате сгорания этого количества топлива; $v$ — скорость выброса продуктов горения топлива относительно ракеты; $Q$ — тепловая энергия, содержащаяся в $\Delta m$ топлива.

Будем считать для простоты, что вся тепловая энергия $Q$ топлива переходит в кинетическую энергию продуктов горения и ракеты. Учтем, что скорость выброшенных продуктов горения относительно Земли равна $u - v$. На основе закона сохранения энергии

$$mu^2/2 + Q = (m - \Delta m)(u + \Delta u)^2/2 + \Delta m (u - v)^2/2. \qquad (1)$$

Приращения $\Delta T$ кинетических энергий ракет и продуктов сгорания составляют соответственно

$$\begin{aligned} \Delta T'_{1,2} &= (m - \Delta m)(u_{1,2} + \Delta u_{1,2})^2/2 - (m - \Delta m)\, u_{1,2}^2/2, \\ \Delta T''_{1,2} &= \Delta m (u_{1,2} - v)^2/2 - \Delta m u_{1,2}^2/2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $\Delta T'_{1,2} + \Delta T''_{1,2} = Q$. Таким образом, суммарный прирост кинетической энергии системы равен количеству теплоты в топливе. Используя закон сохранения импульса $(m - \Delta m)\,\Delta u = \Delta m v$, нетрудно найти, что

$$Q = m(\Delta u_{1,2})^2/2 - \Delta m\,[(\Delta u_{1,2})^2 - v^2]/2,$$

т. е. суммарный прирост кинетической энергии системы ракета — топливо не зависит от начальной скорости ракеты.

Дотошный читатель может спросить, логично ли это — опровергать нарушение закона сохранения, опираясь на сам этот закон. Не напоминает ли это чеховское „этого не может быть, потому что этого не может быть никогда“? Да, внешне напоминает, но все же наши рассуждения логичны. Первоначальный нелепый вывод в задаче возник лишь потому, что закон сохранения был использован неправильно. Стоило же учесть все слагаемые энергии системы — и недоразумение выяснилось.

И еще одно замечание. Если события, изложенные в задаче, рассматривались бы в разных системах отсчета, каждая из которых двигалась вместе с соответствующей ракетой до включения двигателя, противоречия вообще не возникло бы: в собственной системе каждая ракета увеличила бы скорость от 0 до 1 км/с за счет сгорания одного и того же количества топлива. Сравнивать же события между собой было бы нельзя: кинетическая энергия относительна (т. е. ее величина зависит от системы отсчета), поэтому при применении закона сохранения энергии все расчеты следует проводить для одной и той же системы отсчета.

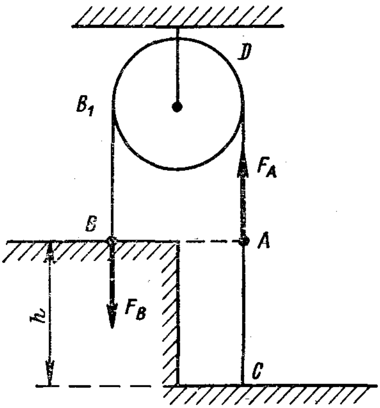
## ЗАДАЧА 42

Тонкая нерастяжимая цепочка с пренебрежимо малыми кольцами перекинута через неподвижный блок. Свешивающиеся с блока части цепочки лежат на столе и на полу, причем часть, находящаяся на столе, достаточно длинная и уложена в малую бухту вокруг точки $B$ (отрезок $BB_1$ вертикален). Найти скорость установившегося движения висящей части цепочки, если стол находится на высоте $h$ над полом (см. рисунок).

РЕШЕНИЕ

Сначала, разумеется, нужно убедиться в том, что движение действительно устанавливается.

Для удобства введем следующие обозначения: $\mu$ — масса единицы длины цепочки, $l$ — длина части $ADB$ цепочки, $F_A$ и $F_B$ — натяжения цепочки в точках $A$ и $B$.



К задаче 42.

Пусть в момент времени $t$ цепочка движется со скоростью $v$ и ускорением $a$, которые для определенности будем считать направленными от $A$ к $C$.

На основе второго и третьего законов Ньютона для отрезков $AC$ и $AB$ цепочки можно записать

$$\left.\begin{aligned} \mu g h - F_A &= \mu a h, \\ F_A - F_B &= \mu a l. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Из этих уравнений $F_B = \mu h(g - a) - \mu a l$. Рассмотрим интервал времени от $t$ до $t + \Delta t$, настолько малый, что скорость движения можно было бы считать постоянной. За время $\Delta t$ в движение вовлечен отрезок цепочки длиной $\Delta l = v\Delta t$, который в момент $t$ лежал на столе. В момент $t + \Delta t$ этот отрезок имеет количество движения, равное величине $v\mu\Delta l = \mu v^2 \Delta t$. По второму закону Ньютона это количество движения равно импульсу действующей силы, т. е. $F_B \Delta t = \mu v^2 \Delta t$. Сравнивая последнее выражение с формулой (1), находим, что

$$v^2 = h(g - a) - al. \qquad (2)$$

Допустим теперь, что ускорение цепочки с течением времени увеличивается. Очевидно, что при этом должна увеличиваться и скорость цепочки (напоминаем, что направления ускорения и скорости приняты совпадающими). Однако это противоречит соотношению (2). Следовательно, ускорение цепочки может только уменьшаться. Поскольку скорость при этом продолжает возрастать, то движение устанавливается только по мере приближения величины ускорения к нулю, т. е., как следует из (2), при скорости $v_0$ такой, что

$$v_0^2 = \lim_{a \to 0} v^2 = gh. \qquad (3)$$

Подобным же образом можно исследовать другие варианты движения цепочки в начальный момент времени и убедиться, что наш результат (3) справедлив всегда.

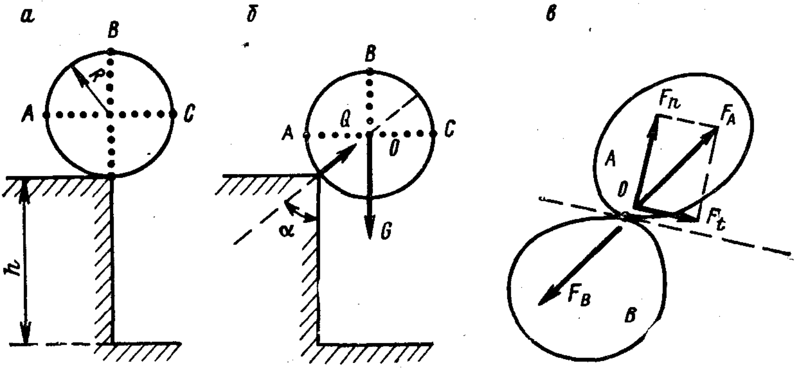
Школьник предложил другой подход к этой задаче. Пусть движение цепочки уже установилось и происходит со скоростью $v_1$. За время $\Delta t$ часть цепочки длиной $\Delta l = v_1 \Delta t$ вовлечена в движение, т. е. приобрела кинетическую энергию $\Delta T = \mu v_1^3 \Delta t/2$, а, кроме того, точно такая же часть цепочки „перешла" со стола на пол, т. е. потенциальная энергия цепочки уменьшилась на величину $\Delta U = \mu v_1 g h \Delta t$. Тогда по закону сохранения энергии $\Delta T = \Delta U$ и $v_1^2 = 2gh$.

Этот результат отличается от полученного выше и несправедлив, так как закон сохранения механической энергии в том виде, как его использовал школьник, в данном случае неприменим. Поясним это утверждение.

Вблизи точки $B$ происходит „рывок", т. е. покоившийся элемент цепочки должен практически мгновенно приобрести конечную скорость, что приводит к деформации этого элемента. Если деформация пластическая, то цепочка нагревается (что и имеет место в реальных условиях); если цепочка абсолютно упруга, то деформация приводит к возникновению в цепочке упругих продольных колебаний (попеременное сжатие и растяжение цепочки). В обоих случаях деформация связана с расходом энергии.

## ЗАДАЧА 43

На краю прямоугольного обрыва высотой $h$ лежит однородный шар радиусом $R$. В исходном положении шар находится в состоянии неустойчивого равновесия, т. е. центр шара лежит над краем




К задаче 43.

обрыва (см. рис. *а*). Определить место падения шара на Землю, если его вывести из состояния равновесия. Трение между шаром и обрывом отсутствует.

Выражение „тело выведено из состояния равновесия" обычно означает, что тело смещено из состояния равновесия на малую величину и начинает движение из этого положения с нулевой начальной скоростью.

## РЕШЕНИЕ

Рассмотрим движение шара в положении, указанном на рис. *б*. На шар действуют только две силы: сила тяжести **G** и реакция опоры **Q**, причем сила **Q** направлена к центру шара. Плечи этих сил относительно центра шара (который по условию является центром масс) равны нулю, а значит, шар движется поступательно, т. е. является в условиях нашей задачи материальной точкой (см. задачу 28).

Для наглядности на рис. *а*, *б* изображено это поступательное движение. На шаре нарисованы полоски из точек, как на детском мячике. При движении шара каждая полоска перемещается, оставаясь в плоскости, параллельной исходной.

Из второго закона Ньютона следует, что вплоть до момента отрыва шара от края обрыва справедливо соотношение $G \cos\alpha - Q = mv^2/R$, где $m$ — масса шара; $v$ — его скорость в рассматриваемом положении. Величину скорости можно определить исходя из закона сохранения энергии: $GR(1-\cos\alpha) = mv^2/2$, где величина $R(1-\cos\alpha)$ равна высоте, на которую опустился шар по сравнению с исходным положением. Сравнивая выписанные уравнения, находим, что

$$v=\sqrt{2gR(G-Q)/3G},\qquad \cos\alpha=(2G+Q)/3G. \tag{1}$$

Шар отрывается в тот момент, когда он перестает давить на край обрыва. Полагая в соотношениях (1) $Q=0$, находим скорость шара в этот момент: $v_0=(2gR/3)^{1/2}$, высоту нижней точки шара над Землей: $h_0=h-R/3$ и угол наклона вектора скорости к горизонту $\alpha_0$, причем $\cos\alpha_0=2/3$. При этом, разумеется, будем считать, что $h>R/3$. После этого остается решить простую кинематическую задачу. Если $x_0$ — искомое расстояние точки падения от края обрыва, то ответ имеет вид

$$x_0=\sqrt{\frac{5}{9}}R\left[1+\frac{2}{3}\frac{v_0^2}{gR}\left(\sqrt{1+\frac{18}{5}\cdot\frac{gh_0}{v_0^2}}-1\right)\right].$$

Уточним одно использованное в решении условие. Почему, собственно, сила давления перпендикулярна к поверхности шара, а не направлена как-то по другому? Для ответа на этот вопрос прежде всего дадим необходимые определения.

Пусть выпуклые тела $A$ и $B$ находятся в непосредственном механическом контакте (рис. *в*). При этом на тело $A$ со стороны тела $B$ действует сила $\mathbf{F}_A$. Из-за деформации тел их контакт осуществляется не в точке касания $O$, а по малой площадке, окружающей точку $O$. В силу малости площадку можно считать плоской.

Проведем нормаль к площадке и разложим полную силу $\mathbf{F}_A$ на составляющие: $\mathbf{F}_n$ по направлению нормали и $\mathbf{F}_t$, лежащую в плоскости площадки. *По определению* $\mathbf{F}_n$ называется силой нормального давления, $\mathbf{F}_t$ — силой трения. Иными словами, сила трения является лежащей в плоскости соприкосновения составляющей силы взаимодействия соприкасающихся тел.

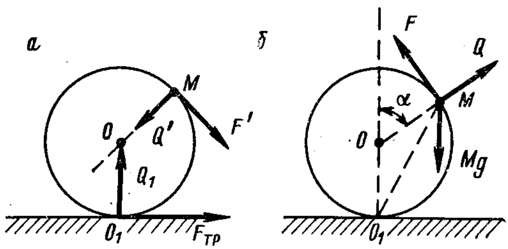
При соприкосновении шара и края обрыва плоскость соприкосновения на первый взгляд не определена. Однако следует учесть, что идеальный угол — это геометрическая абстракция; у реальных тел острая кромка или острие является частью цилиндра или сферы малых радиусов. Отсюда и следует указанное в решении задачи направление силы нормального давления.

## ЗАДАЧА 44

Как будет двигаться сфера и материальная точка в условиях задачи 32, если коэффициент трения между сферой и подставкой таков, что сфера не скользит по подставке, пока давит на нее?

### РЕШЕНИЕ

Рассмотрим сначала силы, действующие на сферу, когда масса находится в точке $M$ (см. рис. *а*). Так как сумма моментов этих сил равна нулю относительно центра сферы, то $F' = F_{\text{тр}}$. Тогда очевидно, что если в какой-то момент времени сила давления $\mathbf{Q}'$ массы на сферу обращается в нуль, то исчезают и все остальные силы.



К задаче 44.

Рассмотрим силы, действующие на материальную точку (рис. *б*). По третьему закону Ньютона $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$, $\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}'$. Пока сфера не скользит по подставке, материальная точка в любой момент времени движется так, как если бы она вращалась вокруг точки $O_1$ — мгновенного центра вращения. Следовательно, в соответствии со вторым законом Ньютона для этого необходимо, чтобы сумма действующих на точку $M$ сил обеспечила необходимое центростремительное ускорение, т. е. чтобы

$$\frac{Mv^2}{r} = Mg\cos\frac{\alpha}{2} - Q\cos\frac{\alpha}{2} - F\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{1}$$

где $r = O_1M$.

Скорость массы $M$ в этот момент времени определяется законом сохранения энергии, т. е.

$$Mv^2/2 = MgR\,(1 - \cos\alpha). \tag{2}$$

Учитывая, что $r = 2R\cos(\alpha/2)$, и полагая $Q = F = 0$, из выражений (1) и (2) получаем, что масса $M$ перестает давить на сферу при выполнении условия $\cos(\alpha/2) = (2/3)^{1/2}$. Следовательно, движение наших тел происходит следующим образом:

1) в течение некоторого времени после начального момента сфера катится без проскальзывания по подставке, а материальная точка движется по циклоиде;

2) в момент, когда радиус, проведенный из центра сферы в материальную точку, составит с вертикалью угол $\alpha_0$ такой, что $\cos(\alpha_0/2) = (2/3)^{1/2}$, материальная точка и сфера перестают взаимодействовать; одновременно прекращается взаимодействие сферы с подставкой; после этого материальная точка движется только под действием силы тяжести, т. е. по параболе, а сфера, поворачиваясь, скользит по подставке;

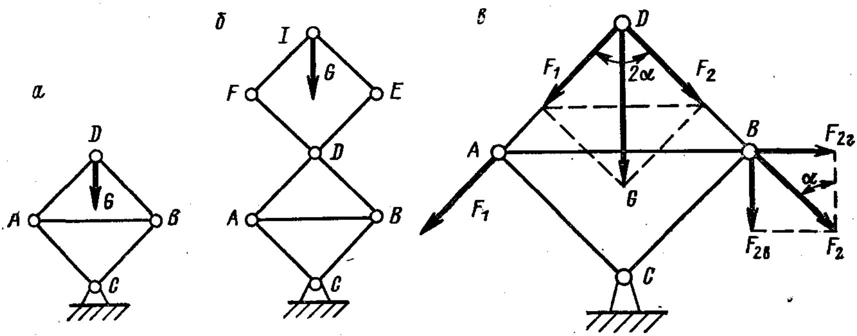
3) через некоторое время материальная точка падает на подставку, причем, если это столкновение упруго, в дальнейшем материальная точка будет прыгать по подставке, одновременно перемещаясь вдоль нее.

## ЗАДАЧА 45

С какой силой $T$ натянут трос $AB$, если на системы шарнирно скрепленных стержней действует груз весом $G$ (см. рис. *а*, *б*)? Стержни $BF$ и $EA$ — сплошные с шарниром в центре; $AC = CB = BD = DA = DF = DE = EI = FI$.

### РЕШЕНИЕ

1-й способ: (для рис. *а*). Разложим вес **G** по направлениям $DA$ и $DB$ (рис. *в*): $F_1 = F_2 = G/2\cos\alpha$. Силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ перенесем вдоль по линиям их действия в точки $A$ и $B$ и, в свою очередь,




К задаче 45.

разложим на вертикальные ($F_{1в}$, $F_{2в}$) и горизонтальные ($F_{1г}$, $F_{2г}$) составляющие. Горизонтальные составляющие и определяют натяжение каната, т. е.

$$T = F_{2г} = F_2 \sin\alpha = (G/2)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

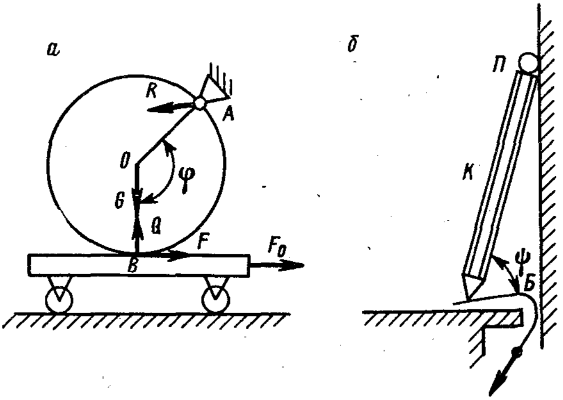
При $\alpha \to \pi/2$ $T \to \infty$, т. е. никакой канат не выдержит такой нагрузки. Наоборот, при $\alpha \to 0$ $T \to 0$. Последним обстоятельством часто пользуются для создания подъемных механизмов, где малой силой $T$ можно поднимать большой груз $G$.

2-й способ. На первый взгляд все предыдущие выкладки должны сохраняться в силе и в случае *б*, так как в конечном итоге вес **G** передается системой верхних стержней в точку $D$. Однако такой подход не учитывает внутренних сил в системе стержней. Сделать это не очень сложно, но мы воспользуемся иным весьма полезным методом расчета.

Из простейших геометрических соображений следует, что если при укорачивании каната $AB$ на $\Delta l$ груз $G$ в системе, изображенной на рис. *а*, поднимается на $\Delta h$, то для случая, представленного на рис. *б*, высота подъема составит $2\Delta h$. В обоих случаях при укорачивании каната придется совершать работу на пути $\Delta l$ силой, равной натяжению каната. Так как в случае *б* результат работы, т. е. изменение потенциальной энергии груза $G$, оказывается вдвое большим, то и натяжение каната в случае *б* вдвое превышает натяжение каната в случае *а*.

## ЗАДАЧА 46

На тележку опирается укрепленный шарнирно в точке $A$ диск массой $m$ (см. рис. *а*). Диск может вращаться вокруг $A$ в плоскости рисунка. Какую горизонтальную силу $F_0$ надо приложить




К задаче 46.

к тележке, чтобы сдвинуть ее с места, если коэффициент трения между диском и тележкой равен $f$, угол между радиусами $OB$ и $OA$ равен $\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$?

### РЕШЕНИЕ

Пусть мы пытаемся сдвинуть тележку вправо. Нам препятствует сила трения со стороны диска, направленная, естественно, влево. При этом в соответствии с третьим законом Ньютона на диск со стороны тележки действует сила **F**, равная силе трения и направленная как указано на рисунке. Кроме того, на диск действуют сила тяжести **G**, нормальная реакция опоры **Q** и некоторая сила **R** со стороны шарнира.

Так как диск неподвижен, сумма моментов всех сил, действующих на него, равна нулю. Вычисляя моменты относительно точки $A$, получаем, что

$$Gr\sin\varphi + F(r - r\cos\varphi) - Qr\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

где $r$ — радиус диска.

Легко убедиться, что если тележку пытаться сдвинуть влево, уравнение моментов получится из уравнения (1) простой заменой $\varphi$ на $-\varphi$ (или на $2\pi - \varphi$). Поэтому отдельно этот случай рассматривать не нужно.

Когда тележка придет в движение, сила трения $F$ станет равной $fQ$, и, следовательно, выражение (1) примет вид

$$mg\sin\varphi - F(1-\cos\varphi) - F\sin\varphi/f = 0,$$

откуда искомая сила $F_0$ определится выражением

$$F_0 \geqslant F = mg\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi/f - 1}. \tag{2}$$

Полученное выражение содержит несколько особенностей:
1) знаменатель может обратиться в нуль;
2) дробь может стать неопределенной (вида 0/0).

Как уже говорилось (см. задачу 36), в таких случаях необходимо указать физические причины появления особенности. Сделаем это.

1. Обращение знаменателя при некотором значении угла $\varphi_0$ в нуль, а силы $F$ — в бесконечность означает, что сдвинуть тележку указанным способом невозможно. Происходит так называемое заклинивание: чем большей силой мы воздействует на тележку, тем больше становится препятствующая нам сила трения. Читатель может убедиться в существовании этого явления на простейшем опыте, который изображен на рис. *б*. Схема опыта похожа на условия задачи. Попытайтесь выдернуть лист бумаги $Б$ из-под карандаша $К$, верхний конец которого закреплен, например, пальцем $П$ у стенки $С$. Угол $\psi$ должен быть близок к 90°.

Нетрудно убедиться, что угол $\varphi_0$ существует при любых значениях $f$ и лежит в пределах $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$.

2. Если $\varphi = 0$, то числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Раскрыв с помощью специальных методов неопределенность (т. е. определив истинное значение дроби, если такое существует), мы получим результат: $F_0(\varphi = 0) = mgf$, что совпадает со значениями искомой силы, если $\varphi$ близко к нулю (или к $2\pi$), когда $F_0$ может быть определена из формулы (2).

3. Еще одна особенность полученного результата. Если $\varphi_0 < \varphi < \pi$, то $F < 0$. Математик здесь не увидит ничего предосудительного, но физически это бессмысленно. Ведь при $F < 0$ саму силу трения $\mathbf{F}$ придется направить в сторону, противоположную выбранной первоначально. Такое легко может случиться со скоростями, ускорениями, силами и даже со скалярами, имеющими знак (ток, время). Но направление силы трения выбрано по условиям задачи заранее, притом так, что трение препятствует возникновению относительного движения или самому такому движению. Если после этого изменить направление силы трения, то последняя, наоборот, будет способствовать движению, что противоестественно.

И еще одно замечание. Как известно, для равновесия тела необходимо выполнение двух условий: сумма сил, действующих на тело, должна быть равна нулю, и сумма моментов сил относительно произвольной оси также должна быть равна нулю. В этой задаче мы ограничились исследованием лишь второго равенства. Правомерен ли такой подход? Да, правомерен. Сформулируем несколько простых правил, полезных при решении задач статики твердого тела.

1. Если по условиям конкретной задачи (см. задачи 19, 20) тело может двигаться только поступательно, интерес представляет лишь решение уравнения, утверждающего равенство нулю суммы всех сил, действующих на тело. Суммируя силы, их можно переносить параллельно самим себе.

Сумма моментов сил в этом случае также равна нулю, но соответствующее уравнение обычно оказывается избыточным, так как не несет, скорее всего, никакой новой информации. Оно позволит лишь проверить, что тело под действием данных сил не начнет, например, опрокидываться. Если такая возможность заранее исключена, проверять нечего.

2. Если по условиям задачи (как в данном случае) тело может лишь вращаться вокруг некоторой неподвижной оси, исчерпывающим утверждением, как правило, является равенство нулю суммы моментов сил, действующих на тело, относительно любой оси. При вычислении моментов силы можно переносить только по линиям их действия.

Сумма всех сил в этом случае также равна нулю, но соответствующее уравнение позволит определить, скорее всего, лишь реакцию опоры, т. е. силу, действующую на тело со стороны оси или точки, вокруг которой тело может вращаться. Сумму моментов сил предпочтительнее вычислять именно относительно этой оси, тогда момент реакции оси в уравнение не войдет, так как плечо этой силы равно нулю. Разумеется, если целью задачи является определение именно реакции опоры, уравнение для сил придется составлять.

3. Если возможное движение тела является суммой поступательного и вращательного движений (иными словами, не является ни чисто поступательным, ни чисто вращательным движением), для решения задачи необходимо составление уравнений и для сил и для их моментов. Правила переноса сил при составлении каждого из уравнений, приведенные выше, сохраняются.

4. Полезно иметь в виду, что если в задаче существенна деформация тела, то силы вообще нельзя переносить.

## ЗАДАЧА 47

На верхнюю ветвь горизонтально расположенного камертона насыпан песок. Камертон посредством смычка приводят в колебания с частотой $\nu = 500$ с$^{-1}$. Какова амплитуда колебаний $A_1$ в том месте камертона, где песчинки не подскакивают? Какова амплитуда колебаний $A_2$ там, где песчинки подскакивают на высоту $h = 2$ мм по отношению к их положению при покоящемся камертоне?

Камертон колеблется гармонически, т. е. в любом месте камертона смещение ветви от положения равновесия происходит по закону

$$x(t) = A \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi\nu, \tag{1}$$

причем в вертикальном направлении.

Скорость и ускорение точки, колеблющейся по закону (1), определяются, как известно, выражениями

$$v(t) = A\omega \cos \omega t, \quad a(t) = -A\omega^2 \sin \omega t. \tag{2}$$

### РЕШЕНИЕ

Как видно из соотношений (2), ускорение изменяется в противофазе со смещением. В частности, если колеблющаяся точка смещается вверх от положения равновесия, ее ускорение направлено вниз и увеличивается по абсолютной величине вместе со смещением. Песчинка отрывается от ветви камертона в тот момент, когда точка ветви смещается вверх от положения равновесия, а ускорение равно $\mathbf{g}$. Отрыв происходит потому, что, начиная с этого момента, песчинка движется вверх с ускорением $\mathbf{g}$, направленным вниз, а ветвь камертона, двигаясь с большим, чем $g$, по абсолютной величине ускорением, отстает от песчинки.

Следовательно, момент отрыва песчинки определяется равенством

$$A\omega^2 \sin \omega t_0 = g. \tag{3}$$

В этот момент песчинка находится на высоте

$$h_0 = A \sin \omega t_0 \tag{4}$$

относительно ее положения при покоящемся камертоне и имеет скорость

$$v_0 = A\omega \cos \omega t_0. \tag{5}$$

Максимальную высоту, на которую поднимется оторвавшаяся песчинка, найдем из выражения $h = h_0 + v_0^2/2g$. Подставляя в последнее соотношение значения $t_0, h_0$ и $v_0$ из формул (3) — (5), получим, что $h = g/2\omega^2 + (A_2\omega)^2/2g$, откуда

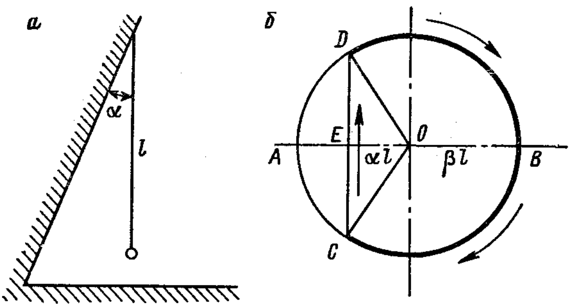
$$A_2 = (1/\omega)\sqrt{2gh - (g/\omega)^2} \approx 0{,}06 \text{ мм.}$$

Песчинки не подскакивают в тех местах, где ускорение не превышает по величине $g$, т. е.

$$A_1 \leqslant g/\omega^2 \approx 10^{-3} \text{ мм.}$$

## ЗАДАЧА 48

Математический маятник длиной $l$, подвешенный у наклонной стенки, которая составляет с вертикалью угол $\alpha$, отводят в сторону




К задаче 48.

от стенки на угол $\beta$ и отпускают. Определить период колебаний такого маятника, если стенка абсолютно упругая, а углы $\alpha$ и $\beta$ малы (см. рис. *а*).

### РЕШЕНИЕ

Если $\beta \leqslant \alpha$, соударений со стенкой нет и можно использовать известную формулу $T_0 = 2\pi\,(l/g)^{1/2}$. Если $\beta > \alpha$, шарик абсолютно упруго соударяется со стенкой. Пренебрегая длительностью соударения, воспользуемся аналогией между колебательным движением материальной точки и движением проекции материальной точки на диаметр при равномерном вращении последней по окружности (рис. *б*).

При полном обороте точки по окружности ее проекция на диаметр $AB$ совершает одно полное колебание с амплитудой $R$, что должно соответствовать амплитуде $\beta l$ исследуемого маятника, т. е. $OB = \beta l$. При движении проекции от $O$ к $A$ на расстоянии $OE$, равном $\alpha l$, происходит столкновение, что эквивалентно мгновенному переходу вращающейся точки из $C$ в $D$, минуя дугу $CAD$. Полный период таких колебаний, следовательно, равен времени равномерного движения точки из $D$ через $B$ в $C$.

Из тригонометрических соотношений следует, что $\angle AOC = \angle AOD = \arccos(EO/OC) = \arccos(\alpha/\beta)$.

Так как вся дуга окружности соответствует периоду $T_0$, т. е. $T_0 \sim 2\pi$, а искомый период $T \sim 2\pi - \angle DOC$, из пропорции получаем, что

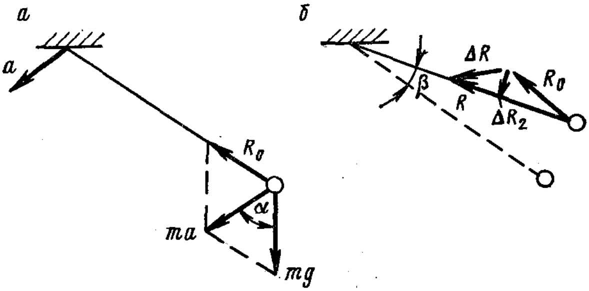
$$T = T_0 \frac{2\pi - 2\arccos(\alpha/\beta)}{2\pi} = 2\pi\sqrt{l/g}\left(1 - \frac{\arccos(\alpha/\beta)}{\pi}\right).$$

## ЗАДАЧА 49

Самолет, в кабине которого укреплен математический маятник длиной $l$, движется с ускорением $\mathbf{a}$. Определить период колебаний маятника.

### РЕШЕНИЕ

В равновесном состоянии груз маятника движется с тем же ускорением $\mathbf{a}$, что является результатом действия на груз силы




К задаче 49.

$\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ притяжения к Земле и силы $\mathbf{R}_0$ натяжения нити. На основе закона Ньютона и рис. *а* получаем, что

$$\left.\begin{aligned} m\mathbf{a} &= m\mathbf{g} + \mathbf{R}_0, \\ R_0^2 &= m^2(a^2 + g^2 - 2ag\cos\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Направление нити маятника при этом совпадает с направлением вектора $(\mathbf{a} - \mathbf{g})$.

Пусть маятник (рис. *б*) выведен из положения равновесия на малый угол $\beta$. При этом натяжение нити изменится и станет равным $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R}$. Динамическое уравнение становится в этом случае таким:

$$m(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) = m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R}, \quad (2)$$

где $\Delta\mathbf{a}$ — ускорение маятника относительно точки подвеса.

Из соотношений (1) и (2) следует очевидное равенство $m\Delta\mathbf{a} = \Delta\mathbf{R}$. Относительно точки подвеса маятник может двигаться только по окружности радиуса $l$, в противном случае нить растянется или провиснет. Поэтому в относительном ускорении $\Delta a$ можно выделить две составляющие: $\Delta a_1$ — центростремительную и $\Delta a_2$ — касательную к окружности. Разложив по тем же направлениям вектор $\Delta R$, получаем, что

$$\Delta R_2 = R_0 \sin\beta. \qquad (3)$$

Так как угол $\beta$ мал, $\sin\beta \approx \beta$; кроме того, $\beta = x/l$, где $x$ — линейное смещение маятника. Тогда из (3) находим, что

$$\Delta R_2 = R_0\beta = (mx/l)\sqrt{a^2 + g^2 - 2ag\cos\alpha}. \qquad (4)$$

Из последнего равенства следует, что сила, возвращающая груз в положение равновесия, пропорциональна величине отклонения $x$ от этого положения. Груз начнет совершать гармонические колебания (см. Примечание I к задаче) с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{a^2 + g^2 - 2ag\cos\alpha}}.$$

Полученный результат содержит особенность: при $\alpha = 0$ и $a = g$ знаменатель обращается в нуль, а период стремится к бесконечности. Источник особенности таков: при $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ маятник свободно падает, натяжение нити обращается в нуль, возвращающей силы не возникает. Выведенный из положения равновесия груз либо остается в новом положении относительно системы отсчета, связанной с точкой подвеса, либо движется равномерно относительно точки подвеса по окружности. В обоих случаях колебания отсутствуют.

Примечание I. Если материальная точка массой $m$ находится в положении устойчивого равновесия, а при ее отклонении от этого положения на величину $\mathbf{x}$ возникает такая возвращающая сила $\mathbf{F}$, что $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{x}$, где $\kappa$ — коэффициент пропорциональности, причем $\kappa > 0$, то рассматриваемая материальная точка, будучи выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе, станет совершать гармонические колебания, причем период $T$ этих, так называемых свободных, колебаний окажется равным $2\pi\,(m/\kappa)^{1/2}$.

Примечание II. Период свободных колебаний является объективной характеристикой систем определенного типа (например, указанных в примечании I), существующей вне зависимости от того, действительно ли система находится в состоянии колебательного движения или пребывает в покое. Поверхностная аналогия — электростатический потенциал. Он определяется через работу, совершаемую силами поля и т. д., но характеризует любую точку этого *поля* независимо от того, была ли совершена такая работа в действительности или только может быть совершена в принципе.

## ЗАДАЧА 50

Два бруска с массами $m_1$ и $m_2$, лежащие на гладком столе, соединены невесомой пружиной с коэффициентом жесткости $k$. Бруски разводят в противоположные стороны, растягивая при этом пружину на величину $\Delta l$, и одновременно отпускают. Найти основные характеристики движения брусков.

### РЕШЕНИЕ

Импульс системы из двух брусков и пружины в момент освобождения брусков равен нулю. На основе закона сохранения импульса $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$, где $v_1$ и $v_2$ — проекции мгновенных скоростей брусков 1 и 2 на горизонтальную ось. Следовательно, отношение скоростей брусков во времени неизменно: $v_1/v_2 = -m_2/m_1 = \text{const}$. Но если у двух тел скорости пропорциональны друг другу, то с тем же коэффициентом пропорциональны и пути, пройденные телами за любой промежуток времени: $x_1/x_2 = -m_2/m_1 = \text{const}$, где $x_1$ и $x_2$ — длины путей к произвольному моменту времени, отсчитанные, например, от начального положения.

Последнее соотношение можно переписать так:

$$x_1m_1 + x_2m_2 = 0. \tag{1}$$

Из определения центра масс (см. задачу 23) и равенства (1) следует, что несмотря на движение отдельных элементов, центр масс системы в целом остается неподвижным. Доказанное утверждение часто приводится в следующей формулировке: „Внутренние силы не могут изменить положение центра масс“. Именно эту теорему забыл барон Мюнхгаузен, вытащив самого себя из болота за волосы, да еще с конем впридачу.

При некотором положении грузов натяжение пружины, очевидно, обращается в нуль. Будем под $y_1$ и $y_2$ понимать смещения грузов от этих положений; для $y_1$ и $y_2$ равенство (1) остается, очевидно, так же справедливым. При этом величина $y_1 - y_2$ есть удлинение пружины по сравнению с нерастянутым состоянием, причем

$$k(y_1 - y_2) = -F, \tag{2}$$

где $F$ — натяжение пружины в момент, когда грузы занимают указанные положения.

С учетом равенства (1) можно найти, что

$$k(y_1 + y_1 m_1/m_2) = k(1 + m_1/m_2)\, y_1 = -F. \tag{3}$$

Таким образом, на груз $m_1$ действует сила, пропорциональная его смещению от положения равновесия (когда $y_1 = 0$) и направленная в сторону, противоположную смещению. Аналогичный результат с другим коэффициентом пропорциональности может быть получен и для груза $m_2$. Следовательно, положения, которые занимают грузы в момент, когда пружина нерастянута, являются положениями равновесия этих грузов, причем относительно положений равновесия грузы совершают гармонические колебания (примечание I к задаче 49) с периодом для $m_1$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k(1 + m_1/m_2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}. \tag{4}$$

Для вычисления периода $T_2$ колебаний груза $m_2$ можно:

1) или выполнить те же выкладки, начиная с соотношения (3) применительно к грузу $m_2$;

2) или поменять в ответе (4) индексы 1 и 2 местами;

3) или — самое лучшее — сообразить, что грузы могут колебаться только с одинаковыми периодами, $T_1 = T_2$.

Амплитуды колебаний $A_1$ и $A_2$ определяются из соотношений $A_1 + A_2 = \Delta l$, $A_1 m_1 = A_2 m_2$, т. е. $A_1 = \Delta l m_2/(m_1 + m_2)$, $A_2 = \Delta l m_1/(m_1 + m_2)$.

Заранее не исключено, что максимально возможное сжатие пружины $\Delta l_1 < \Delta l$. В этом случае произойдет столкновение брусков через сжавшуюся пружину. Если столкновение упругое, то ход событий будет аналогичен рассмотренному в задаче 48.

## ЗАДАЧА 51

Доказать, что силовые линии гравитационного поля не могут пересекаться или касаться друг друга в тех точках, где отсутствуют массивные тела.

### РЕШЕНИЕ

Напряженность поля тяготения равна отношению силы, которая действует со стороны поля на точечную массу, помещенную в исследуемую точку, к величине этой массы, т. е. равна ускорению силы тяжести в этой точке. Силовыми линиями поля называются линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением напряженности поля в этой точке, а густота линий в любой области пропорциональна величине напряженности поля в этой области. (Густотой силовых линий называется количество линий, проходящих через перпендикулярную к линиям площадку единичной площади.)

Часто, давая понятие „силовой линии“, приводят лишь первую часть определения. Это неверно: физический смысл имеет только *семейство*, совокупность силовых линий, но не отдельная линия. Понятие о семействе линий впервые ввел М. Фарадей.*

Допустим, что в точке $A$ (см. рис. $a$) силовые линии пересекаются или касаются друг друга. Тогда по мере приближения к точке $A$ силовые линии неограниченно сближаются, т. е. неограниченно увеличивается их густота, а следовательно, и напряженность поля. Из закона всемирного тяготения и принципа суперпозиции следует, что если поле создано конечным числом массивных тел, массы которых ограничены, то нигде вне этих тел напряженность поля не может быть бесконечной. По принципу суперпозиции напряженность суммарного поля есть сумма напряженностей полей отдельных тел, а сумма конечного числа ограниченных величин имеет конечное значение. Это и доказывает утверждение, содержащееся в тексте задачи.

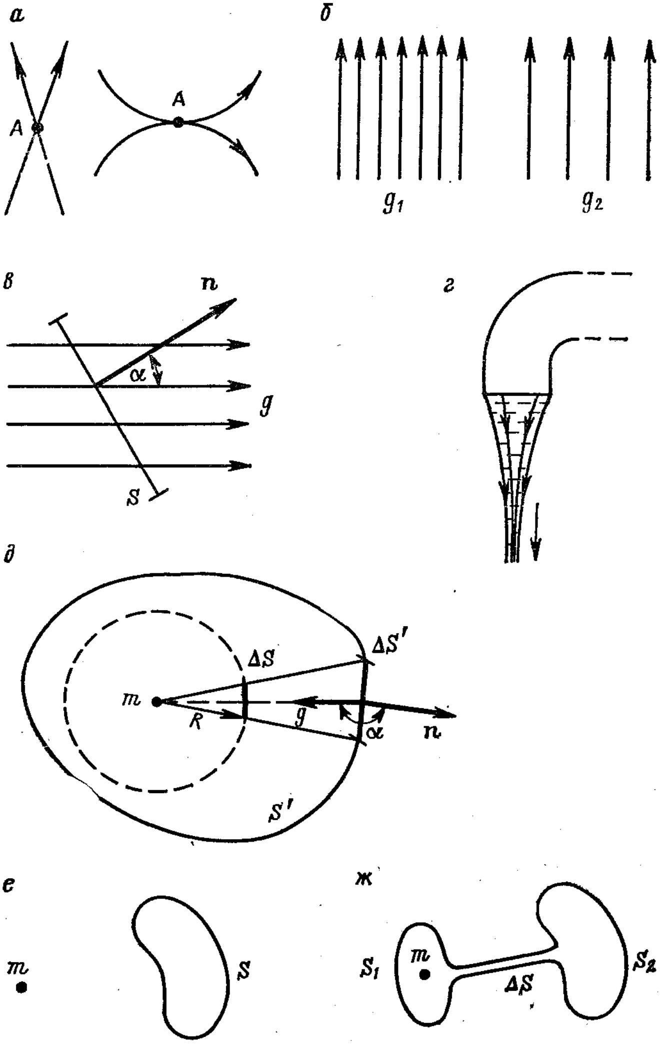
Представление поля в виде картины силовых линий не только очень наглядно, но и позволяет просто получать многие важные результаты. В то же время в самом определении понятия „силовая линия“ содержится некий произвол, так как не существует общепринятой единицы для измерения густоты линий. Одно и то же поле (однородное поле на рис. *б*, например) в зависимости от индивидуального вкуса можно изобразить как частыми, так и редкими линиями. Чтобы устранить эту неопределенность, вводят другую характеристику поля, величина которой пропорциональна густоте линий: поток напряженности через поверхность. Выделим в однородном поле (см. рис. *в*) плоскую площадку площадью $S$, перпендикуляр $\mathbf{n}$ к которой составляет с направлением напряженности $\mathbf{g}$ угол $\alpha$. Потоком напряженности через эту площадку называют величину $\Phi = gS\cos\alpha$.

Если мы имеем дело с неоднородным полем, то при определении $\Phi$ площадку $S$ следует выбрать настолько малой, чтобы в ее пределах поле можно было считать однородным, а саму площадку — плоской.

---

* Д. Максвелл, Речи и статьи, М.-Л., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1940.

Очевидно, что поток через площадку максимален в том случае, когда площадка перпендикулярна к направлению напряженности. Чем больше величина максимального потока, тем гуще в этой области поля силовые линии.




К задаче 51.

Для лучшего понимания смысла введенной характеристики полезно рассмотреть следующий пример из гидродинамики.

Пусть в некотором объеме имеется установившееся течение жидкости. Структуру этого течения можно характеризовать так называемыми линиями тока — линиями, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением скорости жидкости в этой точке (представьте себе, что на рис. *в* изображены эти линии тока). Величина $\Phi_ж = vS \cos \alpha$, где $v$ — скорость жидкости, есть объем жидкости, протекающей в единицу времени через площадку $S$, расположенную относительно линий тока, как указано на рисунке. Эту величину обычно и называют потоком жидкости через $S$. Чем больше $\Phi_ж$, тем гуще линии тока (на рис. *г* изображено вертикальное сечение струи, вытекающей из водопроводного крана, и нарисованы линии тока).

Рассмотрим поле тяготения точечной массы $m$ (см. рис. *д*). Окружим массу воображаемой сферой радиусом $R$ с центром в той точке, где находится масса, и подсчитаем поток напряженности через поверхность этой сферы. Для этого разобьем сферу на малые участки, которые можно считать плоскими, вычислим поток через каждый участок, а затем найдем сумму этих потоков. Условимся считать, что перпендикуляр $\mathbf{n}$ к каждому из участков направлен изнутри сферы (такое направление перпендикуляра называют внешней нормалью к поверхности). Так как напряженность поля на поверхности постоянна, $g = \gamma m/R^2$, и направлена в сторону, противоположную внешней нормали, поток через сферу $\Phi = -4\pi R^2 g = -4\pi\gamma m$ и не зависит от радиуса сферы.

Докажем, что величина потока не зависит и от формы поверхности, внутри которой находится $m$ (в доказательстве ограничимся случаем выпуклой поверхности). Построим произвольную выпуклую поверхность $S'$ (см. рис. *д*); разобьем ее на столь малые участки, чтобы каждый из них можно было считать плоским, а поле в его пределах — однородным. Пусть $\Delta S'$ — один из участков, внешняя нормаль к которому составляет угол $\alpha$ с направлением напряженности. Поток через этот участок $\Delta\Phi' = g(r)\,\Delta S' \cos \alpha = \gamma\,(m/r^2)\,\Delta S' \cos \alpha$, где $r$ — расстояние участка от массы $m$. Построим конус с вершиной в $m$, основанием которого является участок $\Delta S'$. На поверхности сферы радиуса $R$ этот конус вырезает участок площади $\Delta S$, причем $\Delta S = (R/r)^2 \Delta S' \mid \cos \alpha \mid$. Следовательно,

$$\Delta\Phi' = -\gamma\,(m/r^2)\,(r/R)^2\,\Delta S = -\gamma\,(m/R^2)\,\Delta S,$$

т. е. поток через $\Delta S'$ равен потоку через $\Delta S$.

Каждому участку поверхности $S'$ можно сопоставить указанным способом участок нашей сферы, поэтому полные потоки через обе поверхности одинаковы.

Поместим внутрь замкнутой поверхности любой формы произвольно расположенные точечные массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$. В соответствии с принципом суперпозиции полный поток через эту поверхность

$$\Phi = -4\pi\gamma \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Это утверждение можно обобщить на замкнутую поверхность любой формы (не обязательно выпуклую). Примем это без доказательства.

Докажем, что если внутри поверхности отсутствуют массивные тела, то поток через эту поверхность равен нулю. Как и раньше, достаточно рассмотреть лишь поле точечной массы. Пусть масса $m$ расположена вне поверхности $S$ (см. рис. *е*). Построим замкнутую поверхность $S_1S_2$ (рис. *ж*), часть $S_2$ которой совпадает с $S$ за исключением тонкой „трубки“ сечением $\Delta S$, соединяющей $S_2$ с $S_1$; $S_1$ окружает массу $m$. Поток через поверхность $S_1S_2$ в пределе при $\Delta S \to 0$ стремится к потоку через поверхность $S_1$ без „трубки“, так как поток через „трубку“ стремится к нулю. Следовательно, поток через $S_2$ при $\Delta S \to 0$ также стремится к нулю. Так как $S_2$ при этом совпадает с $S$, утверждение доказано.

Итак, *поток через произвольную замкнутую поверхность пропорционален с коэффициентом пропорциональности* $-4\pi\gamma$ *массе вещества внутри поверхности*. Это утверждение называется законом Гаусса. * Как видно, закон Гаусса не является неким независимым физическим законом — мы получили его как следствие закона всемирного тяготения и принципа суперпозиции для полей тяготения. Однако закон Гаусса не равносилен закону всемирного тяготения, так как последний не является следствием закона Гаусса.

По аналогии с гидродинамикой массивные тела, создающие поле, называют источниками поля. Закон Гаусса, таким образом, утверждает, что поток напряженности через замкнутую поверхность отличен от нуля в том и только в том случае, когда внутри поверхности имеются источники. Аналогичное утверждение для потока жидкости очевидно.

Электростатическое взаимодействие, подобно гравитационному, обратно пропорционально квадрату расстояния между точечными зарядами и подчиняется прин-

* Во многих книгах это утверждение называется „теоремой Гаусса“. Мы пользуемся названием „закон Гаусса“, тоже распространенным, чтобы отличить этот физический закон от широко известной математической теоремы Остроградского — Гаусса.

ципу суперпозиции. Следовательно, закон Гаусса справедлив и для электростатического поля.

Во многих задачах закон Гаусса приводит к результату быстрее и проще, чем непосредственное использование закона всемирного тяготения или закона Кулона (см. задачи 53, 106).

В заключение еще одно замечание. Если вы внимательно следили за рассуждениями, содержащимися в тексте решения задачи, то должны были заметить, что было негласно использовано такое утверждение: силовые линии непрерывны в тех местах, где отсутствуют массивные тела. Докажем (правда, не очень строго) справедливость этого утверждения, пользуясь законом Гаусса. Пусть силовая линия начинается (или заканчивается) в некой точке $A$, где отсутствует вещество. Мысленно окружим $A$ сферой с центром в $A$ настолько малой, чтобы, во-первых, внутрь этой сферы не попало ни одного массивного тела, или его части, и, во-вторых, чтобы внутри сферы не начиналась, не кончалась никакая другая силовая линия. При этом условии поток через сферу отличен от нуля, что противоречит закону Гаусса. Следовательно, требуемое утверждение доказано.

### ЗАДАЧА 52

Доказать, что поле тяготения, создаваемое тонким сферическим слоем, однородным по плотности, внутри сферы, окруженной этим слоем, отсутствует.

#### РЕШЕНИЕ

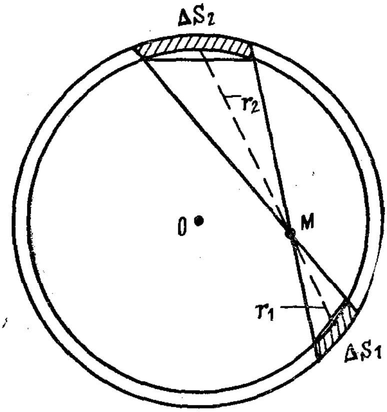
Обычно для доказательства этого утверждения используют следующий прием. Рассмотрим шаровой слой, толщина которого мала. Поместим в произвольную точку внутри сферы точечную пробную массу $M$ (см. рисунок). Выделим на поверхности слоя площадку $\Delta S_1$, построим конус с вершиной в $M$ и основанием $\Delta S_1$ и продолжим боковую поверхность конуса до нового пересечения со слоем. Эта поверхность „вырежет" из слоя площадку $\Delta S_2$. Выберем величину $\Delta S_1$ настолько малой, чтобы тела $\Delta S_1$ и $\Delta S_2$ по отношению к пробной массе $M$ можно было считать точечными массами. Тогда $M$ притягивается этими массами с силами

$$F_1 = \gamma M \,\Delta m_1/r_1^2, \quad F_2 = \gamma M \,\Delta m_2/r_2^2, \tag{1}$$

направленными в противоположные стороны. В формулах (1) $\Delta m_1$ и $\Delta m_2$ — массы тел $\Delta S_1$ и $\Delta S_2$; $r_1$ и $r_2$ — расстояния $M$ до этих тел. Нетрудно убедиться, что построенные конусы подобны друг другу, а это значит, что $\Delta S_1/\Delta S_2 = (r_1/r_2)^2$, откуда $\Delta m_1/\Delta m_2 = \Delta S_1/\Delta S_2 = (r_1/r_2)^2$. Подставляя последнее выражение в формулы (1), приходим к выводу, что $F_1 = F_2$, т. е. равнодействующая сил взаимодействия $M$ с массами $\Delta m_1$ и $\Delta m_2$ равна нулю.

Поскольку весь шаровой слой можно разбить на пары элементов, обладающих этим свойством, сила взаимодействия $M$ со слоем равна нулю и не зависит от положения точки $M$ внутри слоя. Следовательно, поле внутри слоя отсутствует.

Приведенное доказательство громоздко. Кроме того, если точка $M$ близка к внутренней поверхности слоя, требуются дополнительные рассуждения, доказывающие справедливость результата и в этом случае.



К задаче 52.

Используем другой способ доказательства, представляя поле в виде картины силовых линий. Очевидно, что силовые линии поля внутри слоя, если они существуют, должны располагаться сферически симметрично. Симметрия может быть разных типов. Кубик и диск симметричны, но, как интуитивно ясно, каждый по-своему. Сферической симметрией обладает, например, одноцветный круглый мячик: как бы мы его ни поворачивали, он всегда выглядит одинаково.

Сферически симметричными в совокупности являются только линии, которые выходят из центра $O$ в виде лучей во всевозможных направлениях. Однако силовые линии не могут пересекаться в точке, в которой отсутствует вещество. Следовательно, силовых линий внутри слоя вообще нет, т. е. поле тяжести там отсутствует. Это доказательство является строгим.

Соображения симметрии играют важную роль в физике. Нам еще придется встретиться с их применением.

## ЗАДАЧА 53

Построить график зависимости величины ускорения силы тяжести $g$ в поле тяготения, создаваемом однородным шаром, от расстояния до центра шара (в том числе и для точек, лежащих внутри шара).

### РЕШЕНИЕ

Известно, что однородный шар вне себя создает такое поле тяготения, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре шара. *

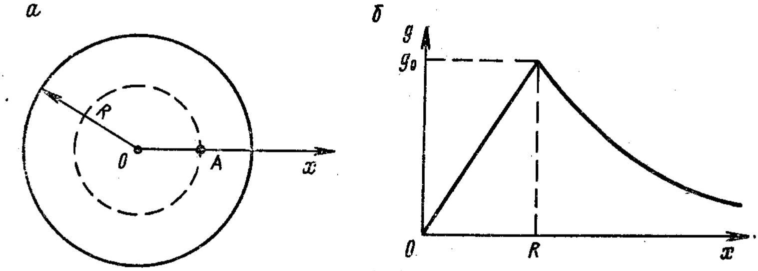
* Интересно, что эту задачу поставил и решил еще Ньютон, причем результат очень долго не удавалось получить и пришлось попутно создать основы интегрального исчисления.

Таким образом, вне шара ускорение меняется по закону

$$g(x) = \gamma M/x^2, \quad x \geqslant R,$$

где $M$ — масса шара; $x$ — расстояние до его центра (см. рис. *а*).

Поместим единичную пробную массу в точку $A$ на расстоянии $x$ от его центра, $x < R$. Сила взаимодействия этой массы со сферическим слоем, внутренний радиус которого равен $x$, равна нулю (результат предыдущей задачи). Следовательно, сила взаимодейст-




К задаче 53.

вия пробной массы со всем шаром такая же, как если бы этого сферического слоя вообще не было, т. е. ускорение в точке $A$

$$g(x) = \gamma m(x)/x^2, \quad x \leqslant R, \tag{1}$$

где $m(x)$ — масса шара с радиусом $x$, т. е. $m(x) = Mx^3/R^3$. Подставляя последнее в (1), получим, что

$$g(x) = \gamma Mx/R^3 = g_0 x/R, \quad x \leqslant R,$$

т. е. внутри слоя ускорение меняется прямо пропорционально расстоянию до центра шара (рис. *б*). Величина $g_0$ есть ускорение силы тяжести на поверхности шара, причем $g_0 = \gamma M/R^2$.

Искомый результат во всей полноте можно быстро получить, применяя закон Гаусса (см. задачу 52). Очевидно, что поле однородного шара обладает сферической симметрией, причем напряженность поля всегда направлена вдоль линии, соединяющей исследуемую точку с центром шара. Опишем из центра шара сферическую поверхность радиусом $x$. Поток напряженности через эту поверхность $\Phi(x) = -4\pi x^2 g(x)$. По закону Гаусса

$$\Phi(x) = \begin{cases} -4\pi\gamma M, & x \geqslant R, \\ -4\pi\gamma M x^3/R^3, & x \leqslant R. \end{cases}$$

Следовательно,

$$g(x) = \begin{cases} \gamma M/x^2, & x \geqslant R, \\ \gamma Mx/R^3, & x \leqslant R. \end{cases}$$

## ЗАДАЧА 54

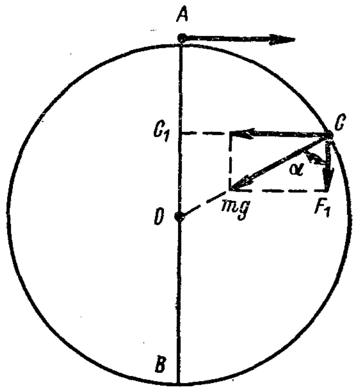
Допустим, что сквозь Землю через ее центр проведен прямолинейный туннель, такой узкий, что можно пренебречь искажением поля тяготения Земли. Докажите, что, если Земля является однородным шаром, то период колебаний тела, опущенного без начальной скорости в туннель, совпадает с периодом обращения приземного спутника Земли.

РЕШЕНИЕ

Найдем период обращения приземного спутника, т. е. спутника, высота орбиты которого значительно меньше радиуса Земли $R_З$. Спутник движется под действием единственной силы — веса, следовательно, в соответствии со вторым законом Ньютона $mv^2/R_З = mg_0$, где $m$ — масса спутника; $v$ — его скорость; $g_0$ — ускорение силы тяжести у поверхности Земли. Период обращения спутника находим из выражения

$$T_1 = 2\pi R_З/v = 2\pi \sqrt{R_З/g_0}.$$

Рассмотрим движение тела в туннеле. Если тело массы $M$ находится на расстоянии $x$ от центра Земли, то на него действует сила тяготения, определяемая формулой $F(x) = Mg_0 x/R_З$ (см. задачу 53). Так как $F(x)/x = Mg_0/R_З = \text{const} = k$, то движение тела является гармоническим колебанием вокруг центра Земли, причем период колебаний можно найти из известного соотношения (см. задачу 49): $T_2 = 2\pi (M/k)^{1/2} = 2\pi (R_З/g_0)^{1/2}$. Следовательно, действительно, $T_1 = T_2$.



К задаче 54.

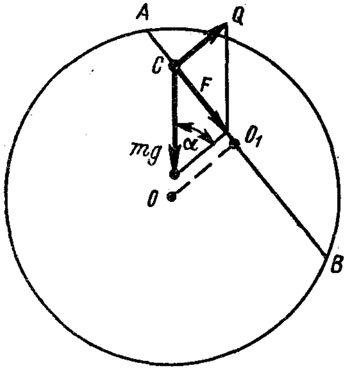
Обратите внимание, что в условиях задачи отсутствует вопрос о величине периодов $T_1$ или $T_2$. Нельзя ли доказать их равенство, не вычисляя самих периодов? Если это удастся сделать, то такое доказательство следует считать более красивым.

Очевидно утверждение: если два тела в некоторый момент времени имеют одинаковые скорости и в дальнейшем движутся с одинаковыми ускорениями, их скорости во все последующие моменты времени совпадают.

Допустим, что тело опущено в туннель $AB$ (см. рисунок) в точке $A$ в тот момент времени, когда спутник пролетает над входом в туннель. Рассмотрим движение проекции спутника на направление $AB$. В любой точке орбиты на спутник действует сила тяжести, направленная к центру Земли. В направлении, параллельном $AB$, спутник в положении $C$ движется под действием составляющей силы тяжести $F_1 = mg_0 \cos\alpha = mg_0\, OC_1/R_З$, где $C_1$ — проекция $C$ на $AB$. Точка $C_1$ движется по $AB$ с ускорением $g_1 = g_0\, OC_1/R_З$, совпадающим по величине с ускорением тела в туннеле, когда это тело находится в положении $C_1$. Таким образом, скорость тела в туннеле и проекция скорости спутника на направление $AB$ всегда одинаковы, а следовательно, одинаковы и периоды этих движений.

### ЗАДАЧА 55

Из Ленинграда сквозь Землю проведены прямолинейные железнодорожные туннели в Москву и Владивосток. Вагон начинает движение в туннеле без начальной скорости. Докажите, что поездка в любой город занимает одно и то же время. Предполагается, что Земля является однородным шаром; силы сопротивления движению отсутствуют; движение происходит только под действием силы тяжести.



К задаче 55.

#### РЕШЕНИЕ

Пусть отрезок $AB$ изображает туннель (см. рисунок). Рассмотрим силу, действующую на вагон в положении $C$. Сила притяжения вагона к Земле направлена к центру Земли, причем (см. задачу 53) $mg = mg_0\, OC/R_З$.

Проекция величины $mg$ на направление $AB$ определяется выражением $F = mg \sin\alpha = mg\, O_1C/OC = mg_0\, O_1C/R_З$. Так как $F/O_1C = mg_0/R_З = \text{const}$ и не зависит ни от положения вагона в туннеле, ни от расположения самого туннеля относительно центра Земли, то в любом прямолинейном туннеле вагон совершает гармонические колебания вокруг середины туннеля с одним и тем же периодом (см. задачи 49, 54).

### ЗАДАЧА 56

Вычислить величину второй космической скорости.

#### РЕШЕНИЕ

Взаимодействия точечных масс (закон всемирного тяготения) и точечных электрических зарядов (закон Кулона) описываются одинаковыми с точки зрения математики соотношениями. Это означает, что и следствия этих законов одинаковы в указанном смысле.

В частности, гравитационное поле, подобно электростатическому, потенциально, т. е. работа поля при перемещении точечной массы по замкнутому пути равна нулю. Потенциальный характер поля является непосредственным следствием закона всемирного тяготения.

По аналогии с электростатикой введем понятие потенциала гравитационного поля; потенциалом данной точки поля назовем такую величину, которая равна работе поля по перемещению единичной точечной массы из данной точки в бесконечность (где потенциал будем считать равным нулю). Потенциал поля точечной массы, или однородного шара, определяется, следовательно, соотношением (ср. с потенциалом поля точечного заряда)

$$U = -\gamma M/R = -gR, \tag{1}$$

где $R$ — расстояние исследуемой точки до точечной массы, создающей поле (источника); $g$ — ускорение силы тяжести в этой точке. Знак минус в формуле (1) связан с нашим выбором начала отсчета для потенциала $U_\infty = 0$: так как массивные тела притягивают друг друга, то сближение тел осуществляется за счет действия самого поля. (Заметим, что в формуле (1) ускорение $g$ является функцией $R$, так что в действительности потенциал $U$ пропорционален $1/R$, а не $R$, как это кажется на первый взгляд.)

Для вычисления второй космической скорости воспользуемся законом сохранения энергии $E_0 = E_\infty$, где $E_0$ — энергия тела у поверхности Земли; $E_\infty$ — энергия тела в бесконечности. Так как

$$E_0 = mv_2^2/2 - mg_0R_З, \quad E_\infty = 0,$$

где $v_2$ — искомая скорость; $R_З$ — радиус Земли; $g_0$ — ускорение силы тяжести на ее поверхности, то

$$v_2 = \sqrt{2g_0R_З} \approx 11,2 \text{ км/с}.$$

## ЗАДАЧА 57

Считая, что Земля является однородным жидким шаром с плотностью $\rho = 5,5$ г/см$^3$, определить давление в центре Земли. Построить график изменения давления внутри Земли в зависимости от расстояния до центра Земли. Вращением Земли пренебречь.*

### РЕШЕНИЕ

Рассмотрим внутри Земли тонкий сферический слой, концентричный земной поверхности и удаленный от центра Земли на расстояние $x$. Если $\Delta x$ — толщина слоя, то примем, что $\Delta x \ll x$, чтобы поле тяготения в пределах слоя можно было считать постоянным по величине. На малую площадку $\Delta S$ этого слоя действует сила тяготения, направленная к центру Земли и равная (см. задачу 53)

$$\Delta F_x = (4/3)\gamma\pi\rho^2 x\Delta x\Delta S.$$

* Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. Механика. М. „Наука“, 1971.

Давление, которое оказывает этот слой на нижележащие слои, определяется соотношением

$$\Delta p_x = \Delta F_x/\Delta S = (4/3)\,\gamma\pi\rho^2 x\Delta x.$$

Представим всю Землю в виде совокупности тонких концентрических слоев. Тогда давление $p(r)$ на расстоянии $r$ от центра можно представить как сумму давлений всех слоев, для которых $x \geqslant r$, т. е.

$$p(r) = (4/3)\,\gamma\pi\rho^2 \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i x_i \Delta x_i,$$

где $i$ — номер слоя, а суммирование выполняется для всех слоев, у которых $r \leqslant x_i \leqslant R_З$ ($R_З$ — радиус Земли).

Вычислять предел указанной величины вы умеете. Если построить график зависимости функции $y = x$ от $x$, то на этом графике величина

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i x_i \Delta x_i$$

изображается площадью трапеции, основаниями которой являются ординаты $x = r$ и $x = R_З$, а боковыми сторонами — отрезки прямых $y = x$ и $y = 0$ между этими ординатами (ср. со способом вычисления величины перемещения при равномерно ускоренном движении). Следовательно,

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i x_i \Delta x_i = (R_З + r)(R_З - r)/2 = (R_З^2 - r^2)/2,$$

$$p(r) = (2/3)\,\gamma\pi\rho^2 (R_З^2 - r^2).$$

Давление в центре Земли

$$p(0) = (2/3)\,\gamma\pi\rho^2 R_З^2 = 1{,}7 \cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2.$$

Функция $p(r)$ изображает параболу; постройте ее самостоятельно.

## ЗАДАЧА 58

В однородном шаре сделана сферическая полость, центр которой не совпадает с центром шара. Докажите, что поле тяготения, которое создается образовавшимся телом, внутри полости однородно.

### РЕШЕНИЕ

Напомним, что поле называется однородным в некоторой области, если его напряженность во всех точках области одинакова по величине и направлению.

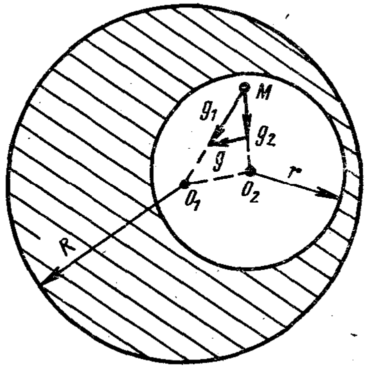
Для поля тяготения справедлив принцип суперпозиции: если масса $m_1$ создает поле с напряженностью $\mathbf{g}_1$, а масса $m_2$ — поле с напряженностью $\mathbf{g}_2$, то напряженность поля, создаваемого обеими массами, равна векторной сумме $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$.

Рассмотрим произвольную точку $M$ внутри полости (см. рисунок), $O_1$ — центр шара, $O_2$ — центр полости. Если полость заполнить веществом той же плотности, что и тело, то ускорение $g_1$

в точке $M$ окажется равным величине $g_{01} \cdot O_1M/R$, где $g_{01}$ — ускорение на поверхности полученного таким образом однородного шара радиусом $R$ (см. задачу 53). Заполняя полость веществом, мы добавляем к искомому ускорению $\mathbf{g}$ ускорение $\mathbf{g}_2$, которое создается веществом в полости. Это ускорение равно величине $g_{02} \cdot O_2M/r$, где $g_{02}$ — ускорение на поверхности шара радиусом $r$. Следовательно, $\mathbf{g}_2 + \mathbf{g} = \mathbf{g}_1$, откуда

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2. \tag{1}$$

Вектор $\mathbf{g}$ в соответствии с равенством (1) соединяет конец вектора $\mathbf{g}_2$ с концом вектора $\mathbf{g}_1$. Известно (см. задачу 53), что $g_{01}/g_{02} = R/r$, и, следовательно, $g_1/g_2 = O_1M/O_2M$. Так как векторы $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ направлены вдоль отрезков $O_1M$ и $O_2M$ и пропорциональны им по величине, треугольник, образованный из векторов $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, подобен треугольнику $O_1O_2M$. Следовательно, вектор $\mathbf{g}$ параллелен отрезку $O_1O_2$ и $g = g_{01} \cdot O_1O_2/R = \mathrm{const}$ вне зависимости от положения $M$ внутри полости, что и требовалось доказать.



К задаче 58.

Иногда в книгах можно встретить следующий способ рассуждений: шар с полостью можно представить себе как сферическую область пространства, занятую одновременно двумя телами — большим сплошным шаром с положительной плотностью и малым шаром, расположенным на месте полости, с равной по величине, но отрицательной плотностью. Если применить к таким телам принцип суперпозиции, можно получить соотношение (1) и искомый результат. Этот метод получил название „метода отрицательной массы“*.

Мы хотим предостеречь вас от такого „способа“ решения: несмотря на то, что в данном случае он формально приводит к верному результату, физического смысла он не имеет. Действительно, совершенно невозможно представить себе, как два тела, одно из которых имеет „отрицательную массу“, занимают одно и то же место в пространстве. Кроме того, поскольку и само понятие „отрицательная масса“ бессодержательно, тем более нельзя применять к этой „массе“ закон всемирного тяготения и принцип суперпозиции.

Когда мы говорим, что метод „формально справедлив“, мы имеем в виду, что результат может быть получен с помощью рассуждений, имеющих физический смысл (см. также задачу 60).

---

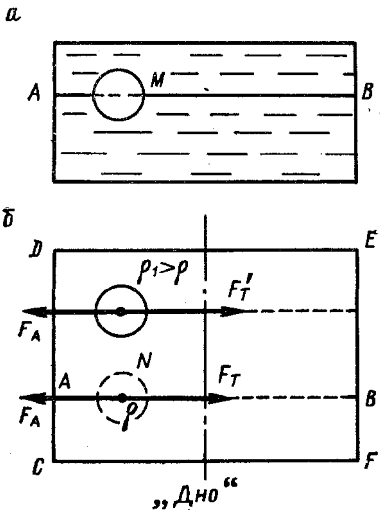
* „Метод отрицательной массы“ особенно популярен в задачах на отыскание центра тяжести тел „с дырками“.

# ЖИДКОСТИ, ГАЗЫ, ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

### ЗАДАЧА 59

Внутри достаточно большого сосуда с жидкостью, плотность которой $\rho$, укреплена горизонтальная ось $AB$. Вдоль этой оси может свободно перемещаться шайба $M$ плотностью $\rho_1$ (см. рис. *а*). В каком направлении перемещается шайба под действием поля тяготения, создаваемого жидкостью?

Рассмотрите случаи $\rho_1 < \rho$ и $\rho_1 > \rho$.




К задаче 59.

### РЕШЕНИЕ

Для простоты будем считать горизонтальное сечение сосуда прямоугольным.

Рассмотрим однородную жидкость в состоянии равновесия в отсутствии шайбы (см. рис. *б*, где изображен вид сосуда сверху). Выделим мысленно объем $N$ жидкости, расположенный в произвольном месте на уровне оси $AB$. Рассмотрим силы, действующие на этот объем в направлении $AB$. Очевидно, что из-за асимметричного расположения $N$ по отношению к стенкам $CD$ и $EF$ сила $\mathbf{F}_T$ гравитационного взаимодействия объема $N$ с остальной жидкостью направлена в сторону более далекой от $N$ стенки, в данном случае $EF$. Так как объем $N$ неподвижен, сила должна быть уравновешена какой-то другой силой, действующей на $N$ со стороны остальной жидкости. Такой силой может быть только сила давления жидкости на $N$. Природа этой силы совершенно такая же, как и у обычной силы Архимеда, поэтому мы и назовем ее „архимедовой силой“ $\mathbf{F}_A$. Подчеркнем, что величина силы $\mathbf{F}_A$ зависит от формы и размера объема $N$, но никак не связана с природой вещества, которое находится в этом объеме, в частности с плотностью этого вещества.

Мысленно удалим жидкость из объема $N$ и поместим туда вещество (шайбу) с плотностью $\rho_1$. При этом изменится величина силы $\mathbf{F}_T$ (эта сила в соответствии с законом всемирного тяготения пропорциональна плотности вещества в $N$). Если $\rho_1 > \rho$, то $F'_T > F_T$, т. е. шайба будет перемещаться к более далекой стенке. По аналогии с обычными терминами назовем направление, совпадающее с направлением „архимедовой силы", направлением „всплытия". При этом наш результат также может быть сформулирован в привычной форме: тяжелая шайба ($\rho_1 > \rho$) „тонет", легкая ($\rho_1 < \rho$) — „всплывает". „Дном" сосуда в нашем случае является середина оси $AB$, а „поверхностью" — концы оси.

Интересно заметить, что наша „архимедова сила" отличается от обычной тем, что она существенно зависит от „глубины погружения", т. е. от расстояния до „поверхности". В частности, легкая шайба „на дне" находится в состоянии неустойчивого равновесия ($\mathbf{F}_A = 0$).

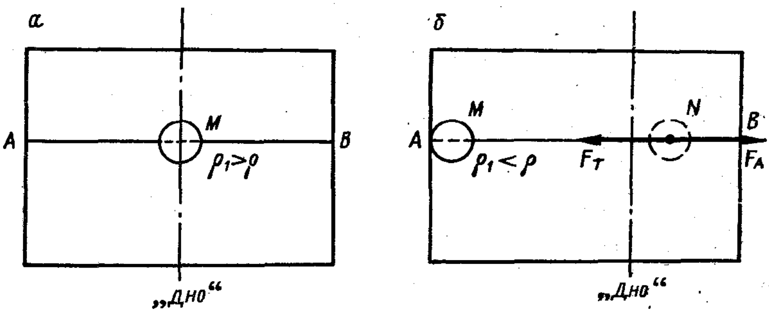
## ЗАДАЧА 60

На оси $AB$ (см. условия предыдущей задачи) находятся две шайбы с плотностями $\rho_1$ и $\rho_2$. Как они перемещаются?

Рассмотреть случаи $\rho_1, \rho_2 \geqslant \rho$; $\rho_1, \rho_2 \leqslant \rho$; $\rho_1 > \rho > \rho_2$.

### РЕШЕНИЕ

Рассмотрим сначала случай, когда в жидкости находится лишь одна шайба $M$ плотностью $\rho_1$ и вся система пребывает в состоянии устойчивого равновесия. При этом, очевидно, тяжелая шайба




К задаче 60.

„лежит на дне" (рис. *а* *), легкая находится у „поверхности" (рис. *б*). В последнем случае „дно", т. е. точка, в которой $\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_A = 0$, находится не в середине $AB$, а смещено в сторону от объема $M$.

* На рис. *а*, *б* изображен вид сосуда сверху.

Определим силы, действующие на объем жидкости $N$, находящийся на $AB$. Ограничимся исследованием только одного случая (остальные рассматриваются совершенно аналогично), а именно $\rho_1 < \rho$, объем $N$ находится между „дном" и „поверхностью" $B$; объем $M$ — у „поверхности" $A$. Силы, действующие на $N$, изображены на рис. *б*. Они равны друг другу и противоположны по направлению, так как $N$ находится в равновесии. Помещая на место $N$ мысленно вещество с другой плотностью, изменяем силу $\mathbf{F}_T$, сохраняя величину силы $\mathbf{F}_A$. Следовательно, в рассматриваемом случае тяжелая шайба „утонет", а легкая „всплывет к поверхности" $B$.

Окончательный ответ на задачу: тяжелые шайбы всегда „тонут", легкие „всплывают к ближайшей поверхности".

В заключение еще раз напомним о „методе отрицательной массы" (см. задачу 58). Приведем целиком „решение" нашей задачи, содержащееся в одном из сборников для школы:

„Вводя понятие массы, мы указывали, что масса — существенно положительная величина. Однако когда говорят о значении какой-либо физической величины, подразумевают, что ее сравнивают с другой величиной, значение которой часто принимают за нуль. Что же играет роль нулевой массы? Очевидно, масса „пустоты", масса того „фона", который окружает тела. В рассматриваемом случае роль „фона" выполняет гравитирующая жидкость. При $\rho_1 > \rho$ масса положительна, при $\rho_1 < \rho$ мы формально всегда можем говорить об отрицательной массе тела по отношению к окружающей среде. Используя понятие отрицательной массы, легко описать относительное движение шариков: 1) при $\rho_1 = \rho_2 > \rho$ сила взаимодействия их положительна — шарики сближаются; 2) при $\rho_1 < \rho < \rho_2$ масса первого шарика отрицательна, произведение масс также отрицательно, $F < 0$ и шарики отталкиваются; 3) при $\rho_1 = \rho_2 < \rho$ массы шариков отрицательны, $F > 0$ шарики притягиваются".

В этих рассуждениях содержится такое количество нелепостей, что не удивительно, что полученный результат даже формально несправедлив (ибо, как мы видели, взаимное поведение шайб зависит от того, с какой стороны от „дна" они находятся).

Мы уделили „методу отрицательной массы" такое значительное место потому, что нередко в руководствах для школьников рассуждения, основанные на законах физики, подменяются какими-то формальными необоснованными приемами.

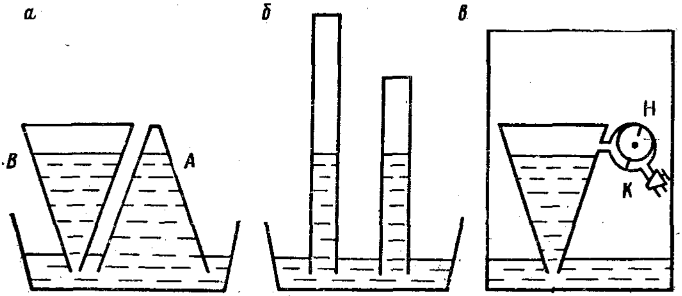
## ЗАДАЧА 61

Поставим мысленно такой эксперимент. Возьмем два одинаковых сосуда с кранами, откачаем их до полного вакуума и герметизируем. После этого, частично погрузив сосуды в ванну с ртутью, как указано на рис. *а*, откроем краны, позволив ртути проникнуть в сосуды. Очевидно, что в обоих сосудах ртуть поднимется до одинаковых уровней. При этом потенциальная энергия ртути в сосуде $A$ окажется меньше, чем энергия ртути в сосуде $B$. На откачку каждого сосуда была затрачена одна и та же работа, а полученный энергетический эффект различен. Не противоречит ли это закону сохранения энергии?

## РЕШЕНИЕ

Распространен такой вариант ответа: поднимаясь в сосуд, ртуть развивает некоторую скорость, а следовательно, приобретает кинетическую энергию. Поэтому поверхность ртути в сосуде поднимается выше положения равновесия и в дальнейшем совершает колебания относительно этого положения. Скорость ртути при прохождении положения равновесия различна для разных сосудов, так как сосуды в условиях задачи не равноправны. Следовательно, энергия колебаний для разных сосудов также неодинакова. По-видимому, если учесть энергию колебаний, то окажется, что суммарные запасы энергии ртути в обоих сосудах одинаковы.

На первый взгляд такие рассуждения кажутся очень правдоподобными. Однако нетрудно убедиться, что они далеки от истины.




К задаче 61.

Действительно, возьмем цилиндрические сосуды одинакового сечения, но разной высоты (рис. *б*) и повторим эксперимент. Очевидно, что и средние уровни ртути и амплитуды колебаний одинаковы в обоих сосудах. В то же время величины работы по откачке сосудов различны. Следовательно, приведенные выше рассуждения не снимают поставленного вопроса.

Верное же объяснение оказывается очень простым.

Мы настолько привыкли к закону сохранения энергии в школьных задачах, что иногда используем его, не задумываясь, автоматически (см. задачу 42). О чем же следует прежде всего подумать? О том, является ли рассматриваемая нами система замкнутой в энергетическом смысле. В нашей задаче система колба — насос — ванна с ртутью, разумеется, не является замкнутой. Существенное участие в происходящем процессе принимает земная атмосфера. Закон сохранения энергии к незамкнутой системе просто неприменим, и результаты нашего эксперимента этому закону не противоречат.

Нетрудно показать, что если подобный эксперимент выполнить так, чтобы вся установка явилась замкнутой системой, кажущееся противоречие с законом сохранения энергии исчезнет. Изолируйте колбу, насос и ванну с ртутью от атмосферы, например, так, как указано на рис. *в*, где *Н* — насос, *К* — кран. Считайте, что известны исходные данные: размеры колбы и сосуда, давления воздуха в них, количество ртути. Для того чтобы можно было не принимать во внимание энергию возможных колебаний ртути, откачивание производите медленно. При этом жидкость медленно же, т. е. не приобретая кинетической энергии, будет заполнять колбу. Попробуйте с помощью расчета убедиться в том, что увеличение потенциальной энергии такой системы строго равно работе по откачиванию колбы независимо от размеров последней.

Последнее замечание: если колба откачивается в атмосферу, т. е. колба не является замкнутой системой, то предсказать, какие энергетические изменения произойдут с ней в дальнейшем, в общем случае невозможно. Эта ситуация очень напоминает приобретение лотерейного билета: начальные затраты и конечный результат связаны очень слабо, одинаковые расходы совершенно не гарантируют одинаковых выигрышей. Другой пример: энергия, потраченная на то, чтобы нажать на курок ружья, не зависит от того, заряжено ли оно или нет. А результат?

## ЗАДАЧА 62

Закрытый сосуд доверху заполнен водой. У дна сосуда находится пузырек воздуха. Как изменится давление у дна, когда пузырек всплывет?

### РЕШЕНИЕ

В исходном состоянии давление воздуха в пузырьке совпадает с давлением воды у дна сосуда. Давление воды у крышки сосуда меньше, чем давление у дна, на величину $\Delta p = \rho g h$, где $\rho$ — плотность воды; $h$ — высота сосуда.

При подъеме пузырька вверх объем его не меняется, так как жидкость практически несжимаема, а следовательно, не меняется и давление воздуха в пузырьке. Таким образом, когда пузырек находится у крышки, то давление воды у крышки равно величине давления у дна в исходном положении, т. е. давление у дна увеличилось на величину $\Delta p$. Неожиданный результат, согласитесь?

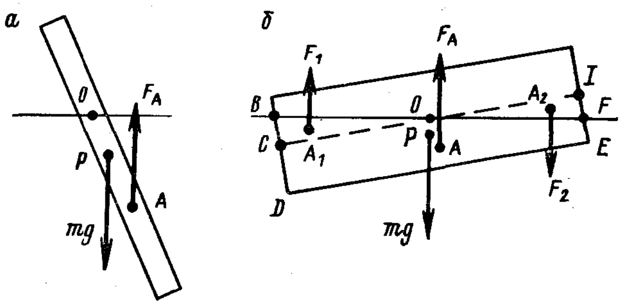
## ЗАДАЧА 63

Спичка устойчиво плавает в воде лишь в горизонтальном, но не вертикальном положении, что широко известно из повседневного опыта. Объясните это.

### РЕШЕНИЕ

У плавающего на поверхности жидкости тела, выполненного из однородного по плотности вещества, центр тяжести всегда лежит выше точки приложения выталкивающей силы. (Почему?) В равновесном положении эти точки должны находиться на одной вертикали. Пусть спичка опущена в воду в вертикальном положении и, предоставленная самой себе, отклонилась из этого положения на малый угол (рис. *а*). Из рисунка видно, что момент пары сил (веса $m\mathbf{g}$ и выталкивающей силы $\mathbf{F}_A$, $m\mathbf{g} = -\mathbf{F}_A$) стремится повернуть спичку от исходного положения равновесия; следовательно, это положение неустойчиво.

На рис. *б* изображена спичка, отклонившаяся на малый угол $\alpha$ от горизонтального положения. Здесь уже существенно изменение формы погруженной части, чего мы не учитывали в случае *а*, и вызванное этим смещение относительно спички точки приложения выталкивающей силы. Изменение формы погруженной части вызвано прибавлением к первоначально погруженному объему (т. е. к $CDEI$) объема $BCO$ и вычитанием объема $OFI$. Как следует




К задаче 63.

из рис. *б*, пара сил $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{F}_A$ стремится увеличить отклонение, а пара сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — вернуть спичку в первоначальное положение. Из рисунка же видно:

1. Плечи сил $\mathbf{F}_A$ и $m\mathbf{g}$ относительно точки $O$ пропорциональны $a\alpha$, сами силы пропорциональны $a^2l$ (где $l$ — длина спички; $a$ — ее толщина и ширина). Момент этой пары, следовательно, пропорционален $a^3l\alpha$.

2. Плечи сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ равны приблизительно $l/3$ каждое, сами силы пропорциональны площадям соответствующих треугольников, т. е. пропорциональны $l/2 \cdot l\alpha/2$. Следует еще учесть, что толщина спички $a$, следовательно, момент пары сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ пропорциональны $al^3\alpha$.

Если $l \gg a$, то тем более $l^2 \gg a^2$, и момент второй пары сил полностью определяет устойчивость равновесия, возвращая спичку в исходное горизонтальное положение. Равновесие устойчиво.

Изменение формы погруженной части при изменении положения плавающего тела требует особенно тщательного учета в судостроении, так как является основным фактором, обеспечивающим устойчивость судна на воде.

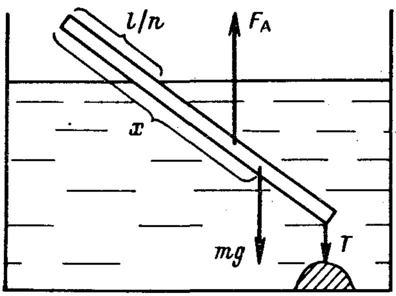
## ЗАДАЧА 64

Тонкий, изготовленный из неоднородного по плотности материала стержень длиной $l$ с поперечным сечением $S$ и массой $m$ плавает в наклонном положении, так как к одному его концу привязан тяжелый груз, лежащий на дне сосуда. Где расположен центр тяжести стержня и какая его часть торчит над водой, если нить натянута с силой $T$ (см. рисунок)?

### РЕШЕНИЕ

Пусть над водой торчит $1/n$ часть стержня, а центр тяжести расположен на расстоянии $x$ от верхнего конца.

Задача имеет смысл, если средняя плотность стержня $\rho$, равная $m/lS$, меньше плотности воды $\rho_0$, т. е. $\rho/\rho_0 < 1$.



К задаче 64.

Из условий равновесия стержня следует, что

$$\left.\begin{aligned} mg+T&=F_{\mathrm{A}}, \\ mg\,(l-x)&=F_{\mathrm{A}}l\,(n-1)/2n, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\mathrm{F_A}$ — выталкивающая сила Архимеда, приложенная в середине погруженной части стержня, а моменты сил $mg$ и $\mathrm{F_A}$ вычислены относительно нижнего конца стержня. Второе из выражений (1) имеет смысл лишь для наклонно плавающего стержня. По закону Архимеда

$$F_{\mathrm{A}}=\rho_0 gSl\,(n-1)/n. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) следует, что

$$\frac{1}{n}=1-\left(1+\frac{T}{mg}\right)\frac{\rho}{\rho_0}, \qquad x=l\left[1-\left(1+\frac{T}{mg}\right)^2\right]\frac{\rho}{2\rho_0}. \qquad (3)$$

Так как из задачи следует, что обе эти величины положительны, то из уравнений (3) находим, что решение имеет смысл при выполнении условий

$$T+mg\leqslant F_{\mathrm{A}\max}, \text{ если } \rho<\rho_0<2\rho,$$

$$T+mg<F_{\mathrm{A}\max}\sqrt{2\rho/\rho_0}, \text{ если } \rho_0>2\rho,$$

где $F_{\mathrm{A}\max}$ — значение выталкивающей силы при полностью погруженном стержне, $F_{\mathrm{A}\max}=mg\rho_0/\rho$.

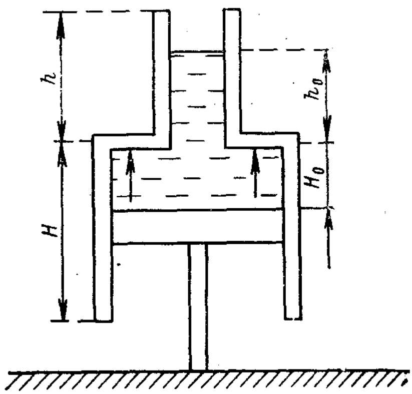
## ЗАДАЧА 65

Цилиндрический сосуд без дна и с цилиндрическим горлом надет сверху на неподвижный поршень сечением $S$ (см. рисунок). Полный вес сосуда $G$, его высота $H$, сечение горла $s$, высота горла $h$.

Что произойдет с сосудом, если в него налить жидкость плотностью $\rho$ в количестве $V$? Высота поршня над опорой достаточно велика.

РЕШЕНИЕ

По мере наливания жидкости давление $p$ в тонком ее слое между поршнем и верхним основанием широкого цилиндра будет расти. Сила этого давления на верхнее основание может стать равной весу сосуда, и тогда сосуд начнет подниматься вверх. При этом уровень жидкости в горле остается постоянным, а объем вновь наливаемой жидкости будет равен увеличению объема, ограниченного поршнем и верхним основанием сосуда.




К задаче 65.

Высота $h_0$ жидкости в горле, при которой сила гидростатического давления станет равной весу сосуда, определяется уравнением $h_0 \rho g (S - s) = G$. Очевидно, что если эта высота превышает высоту горла, сосуд остается неподвижным. То же самое будет происходить, если заданного объема жидкости $V$ не хватит для заполнения горла до высоты $h_0$. Если же $G/\rho g (S - s) < h$ и $h_0 S < V$, то сосуд начнет подниматься.

Высота подъема сосуда зависит от объема жидкости. Если $V \leqslant h_0 S + HS$, т. е. жидкости хватит лишь на заполнение горла до высоты $h_0$ и части сосуда, то сосуд поднимется на высоту $H_0 = (V - h_0 S)/S$. Если $V > h_0 S + HS$, то сосуд поднимется над поршнем на высоту $H_0 = H$, а избыток жидкости $\Delta V = V - h_0 s - HS$ выльется через щель между поршнем и приподнявшимся сосудом. В это время возможно опрокидывание сосуда.

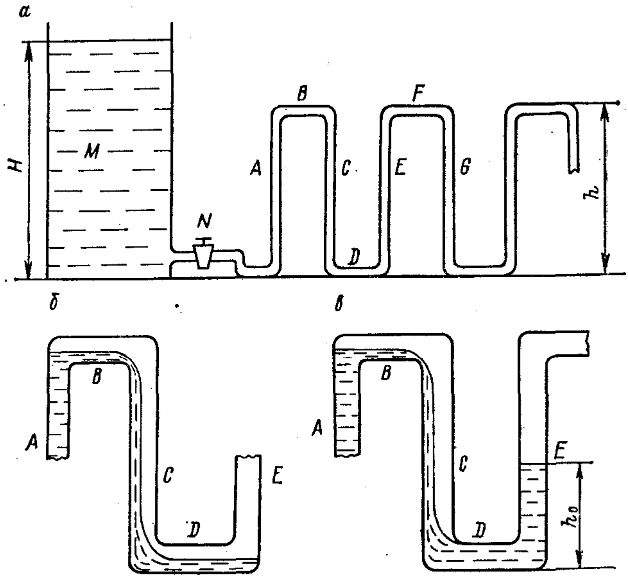
## ЗАДАЧА 66

В лабораторной установке требуется обеспечить непрерывный ток жидкости через плоский вертикальный многозвенный змеевик $ABCDEFG$... (см. рис. $a$). Лаборант присоединил к началу змеевика сосуд $M$, причем уровень жидкости в сосуде $H$ был выше уровня $h$ верхних колен змеевика, и открыл кран $N$. Потечет ли жидкость через змеевик? Капиллярными явлениями и падением уровня $H$ жидкости в сосуде $M$ пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Если не повышать давление в сосуде или не отсасывать воздух из открытого конца змеевика, то жидкость через змеевик может и не потечь. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим процесс наполнения жидкостью участка $ABCDE$.

Как только трубка $A$ заполнится, жидкость начнет перетекать по нижней части колена $B$ и стенкам трубки $C$ в колено $D$ (рис. *б*). По заполнении колена $D$ дальнейшее перетекание жидкости из $A$ через $B$ будет приводить лишь к повышению уровня в трубке $E$ (рис. *в*). Воздух в колене $B$ и трубке $C$ оказался в ловушке. Воз-




К задаче 66.

никла так называемая „воздушная пробка". Для равновесия жидкости в трубке $E$ необходимо, чтобы давление $p$ в воздушной пробке превышало атмосферное давление $p_0$ на величину гидростатического давления столба жидкости в $E$, т. е. должно быть $\Delta p = p - p_0 = \rho g h_0$, где $\Delta p$— избыточное давление в воздушной пробке; $\rho$ — плотность жидкости; $h_0$ — высота жидкости в трубке $E$.

Аналогично равновесие жидкости в трубке $A$ возможно, лишь если уровень жидкости в сосуде $M$ превышает высоту колена $A$ на ту же величину $h_0$.

Рассматривая последовательно возможность попадания жидкости в следующие участки змеевика, убеждаемся, что сквозной ток возникнет, лишь если превышение уровня в сосуде $M$ над уровнем верхних колен равно сумме высот всех трубок, в которых при заполнении змеевика жидкость стекает вниз, образуя воздушные пробки (т. е. трубок $C$, $G$ и т. д.), т. е. отношение $H/h$ должно превышать число колен в змеевике.

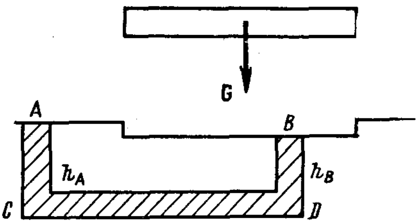
Только теперь можно понять смысл весьма расплывчатого выражения „многозвенный змеевик“, употребленного в тексте задачи. Очевидно, имелось в виду, что число колен превосходит отношение $H/h$ (больше это число сравнить просто не с чем!). Следовательно, жидкость через змеевик протекать не будет.

### ЗАДАЧА 67

Корабль на воздушной подушке имеет вес $G$. Вытесняет ли он из-под себя воду, и если да, то в каком объеме?

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим для простоты плоскую платформу весом $G$ и площадью $S$, висящую над водой (см. рисунок). Чтобы платформа не падала, снизу она должна испытывать избыточное давление $\Delta p$ такое, что $\Delta p = G/S$. Это избыточное давление действует и на воду в пределах площади днища корабля. Выделим в воде объем указанной на рисунке формы и рассмотрим поведение жидкости в нем. По законам гидростатики давления в точках $C$ и $D$, находящихся на одном уровне, должны быть равны. Но $p_C = p_0 + \rho g h_A$, $p_D = p_B + \rho g h_B = p_0 + \Delta p + \rho g h_B$. Следовательно, $h_A > h_B$ и $\Delta h = h_A - h_B = \Delta p / \rho g$.



К задаче 67.

Под кораблем поверхность воды оказалась ниже на величину $\Delta h$. Общий объем „вытесненной“ воды таков, что $V = \Delta h S = \Delta p S / \rho g = G / \rho g$, т. е. равен объему воды, которую вытесняет плавающий корабль весом $G$ согласно закону Архимеда.

### ЗАДАЧА 68

Цилиндрический сосуд с жидкостью плотностью $\rho$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг оси $OO'$, совпадающей с вертикальной образующей цилиндра. Внутри сосуда укреплен тонкий горизонтальный стержень $AB$, расположенный вдоль диаметра, проходящего через ось вращения. По стержню может скользить без трения муфта в виде шара массой $m$ и радиусом $r$. Шар связан с концом $A$ стержня пружиной жесткостью $k$, длина которой в нерастянутом состоянии равна $l_0$ (см. рис. $a$).

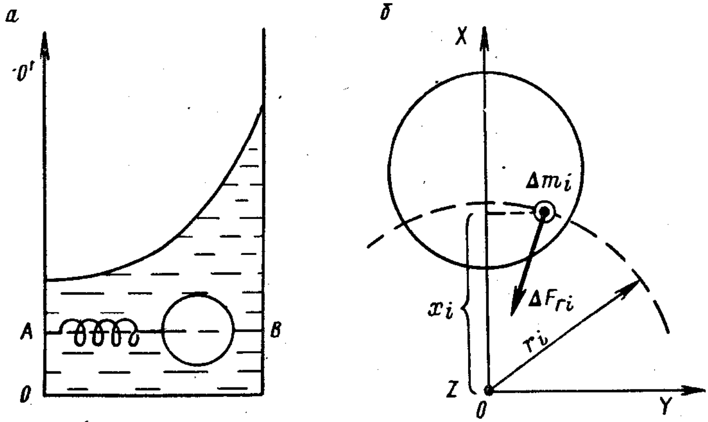
Определить расстояние шара от оси вращения.

## РЕШЕНИЕ

Пусть искомое положение центра муфты находится на расстоянии $x$ от оси вращения.

При установившемся вращении сосуда с жидкостью шаровой объем жидкости радиусом $r$, расположенный на расстоянии $x$ от оси вращения на той же глубине, что и муфта, испытывает действие двух сил: силы тяжести **G** и „архимедовой" силы **F** (см. задачу 59). Поскольку сила **F** зависит лишь от положения выделенного объема, его формы и величины, то эта сила равна „архимедовой" силе, действующей на муфту.

В соответствии со вторым законом Ньютона горизонтальная проекция $F_г$ „архимедовой" силы сообщает объему жидкости цент-




К задаче 68.

ростремительное ускорение $a = \omega^2 x$. Эта формула нуждается в пояснениях, так как неочевидно, что в ее правой части должна стоять величина $x$, а не какое-то другое расстояние $x'$. Другими словами, действительно ли „архимедова" сила **F** приложена к центру масс выделенного объема жидкости?

Если шарик мал, т. е. $r \ll l_0$, $\Delta x$, где $\Delta x$ — упругая деформация пружины, то в условиях задачи он является материальной точкой (см. задачу 28), и вопрос снимается.

Допустим, что размеры шарика сравнимы с длиной пружины и величиной деформации. Разобьем выделенный объем жидкости на элементарные объемы массой $\Delta m_i$. На каждый из элементарных объемов действует „архимедова" сила, горизонтальная проекция которой $\Delta F_{гi} = \Delta m_i \omega^2 r_i$ направлена к оси вращения, причем $r_i$ — расстояние объема с номером $i$ от оси вращения (рис. *б*). Введем систему координат $OXYZ$ с началом на оси вращения, направив ось $OX$ в центр выделенного объема жидкости, ось $OZ$ — по оси вращения. Проекция силы $\Delta F_{гi}$ на ось $OX$ будет равна $\Delta F_{x_i} = \Delta m_i \omega^2 x_i$.

Горизонтальная проекция „архимедовой" силы, действующей на весь шарик, направлена к оси вращения (это следует из соображений симметрии) и определяется соотношением

$$F_{\text{г}}=\sum_i \Delta m_i \omega^2 x_i=\omega^2 \sum_i \Delta m_i x_i=\omega^2 x M,$$

где $x$ — координата центра масс шарика (см. задачу 23); $M = \rho V$ — масса шара; $V$ — его объем.

Таким образом, горизонтальная составляющая „архимедовой" силы приложена к центру масс нашего объема жидкости (к слову, приведенное доказательство справедливо не только для шара, но и для объема произвольной формы).

Во избежание недоразумений еще раз поясним смысл выражения „сила приложена к такой-то точке тела". Это означает, что под действием рассматриваемой силы тело движется так, как если бы вся масса тела была сосредоточена в этой точке, а сила приложена к ней. В действительности точка реального приложения силы может быть совсем другой или даже вообще отсутствовать: в частности, в нашей задаче „архимедова" сила является результатом давления жидкости *на всю поверхность* шарика.

Из второго закона Ньютона для муфты следует, что

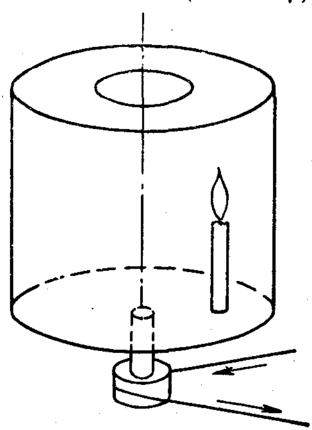
$$F_{\text{г}}+F_{\text{п}}=m\omega^2 x, \tag{1}$$

где $F_{\text{п}} = k\Delta x$ — проекция силы натяжения пружины на ось $OX$, причем $\Delta x = x - r - l_0$. Учитывая направления проекций сил, из (1) находим, что $V\rho\omega^2 x + k(x - r - l_0) = m\omega^2 x$, откуда $x = k(r + l_0)/[k - \omega^2(m - V\rho)]$.

Решение справедливо при условии, что $k > \omega^2(m - V\rho)$, ибо только в этом случае муфта при вращении не касается стенок сосуда. Выполнение обратного неравенства означает, что пружина слабая и не способна удержать муфту внутри жидкости. При этом муфта в зависимости от ее плотности сместится к одному из концов стержня.

### ЗАДАЧА 69

Внутри цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью, стоит свеча (см. рисунок). Отклонено ли пламя свечи от вертикали и в какую сторону?



К задаче 69.

### РЕШЕНИЕ

Внутри вращающегося цилиндра (воздух в нем также вращается) возникает дополнительная „архимедова“ сила (см. задачу 68), направленная по горизонтали вдоль радиуса цилиндра к оси вращения. Так как пламя свечи легче окружающего воздуха, эта сила способна сообщить пламени большее центростремительное ускорение, чем такому же объему воздуха. Поэтому пламя отклоняется к оси вращения цилиндра.

Часто вызывает затруднение вопрос: „Как мы узнали, что пламя легче воздуха?“ Ответ очевиден: пламя поднимается вверх.

## ЗАДАЧА 70

Сосуд с ртутью равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega$. Поверхность ртути принимает при этом вогнутую форму и используется как зеркало. Определить фокусное расстояние этого зеркала.

Указания: 1. Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки (фокуса) и прямой линии (директрисы). 2. Параллельные лучи, падающие на параболическое зеркало параллельно его оси, после отражения от зеркала пересекаются в его фокусе.

### РЕШЕНИЕ

Рассмотрим небольшой объем ртути $M$, находящийся у поверхности (см. рисунок, на котором $OO'$ — ось вращения; $M$ — положение выделенного объема). Действующие на него силы, а именно вес $\mathbf{G}$ и „архимедова“ сила $\mathbf{F_A}$ (см. задачи 59, 68), таковы, что в сумме создают центростремительную силу $\mathbf{F}$. Сила $\mathbf{F_A}$ при установившемся вращении направлена перпендикулярно поверхности жидкости. Следовательно,

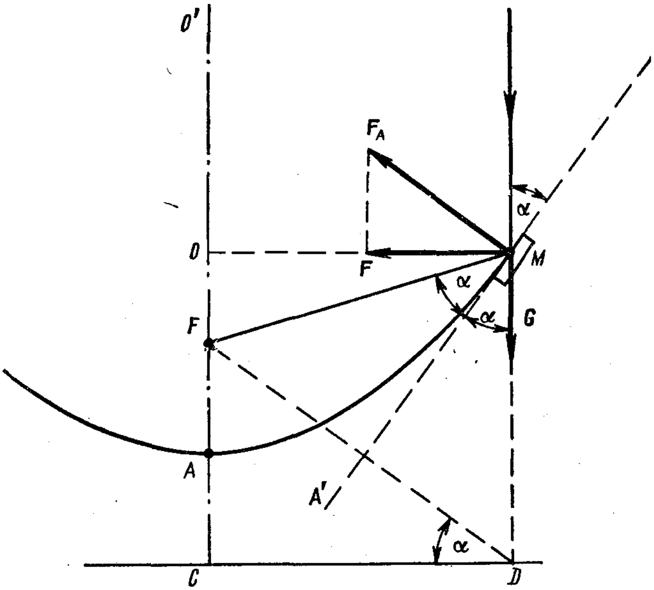
$$G \operatorname{ctg} \alpha = mv^2/R = m\omega^2 R, \qquad (1)$$

где $m$ — масса выделенного объема; $v$ — его скорость; $R$ — расстояние объема от оси вращения, $R = OM$. (Объем выбран настолько малым, что его можно считать материальной точкой.)

Вертикальный луч света, падающий на поверхность ртути в точке $M$, после отражения от поверхности пойдет вдоль $MF$, где $\angle FMA' = \alpha$, и пересечет ось вращения в точке $F$. Покажем, что точка $F$ является фокусом получающегося зеркала.

Построим отрезок $MD$ такой, что $MD \parallel OO'$ и $MD = MF$. Через точку $D$ проведем линию $DC$ так, что $DC \perp OO'$. Нетрудно видеть, что $FC = CD \operatorname{tg} \alpha$, или по (1) $FC = g/\omega^2$, т. е. расстояние $FC$ не зависит от расстояния $R$ нашего объема от оси вращения.

Построим параболу, для которой точка $F$ является фокусом, а линия $CD$ — директрисой. Вершина этой параболы расположена в точке $A$ такой, что $AF = FC/2$. Парабола проходит через точку $M$. Поверхность, полученная вращением параболы вокруг оси $OO'$, называется параболоидом вращения. Легко убедиться,




К задаче 70.

что для любого объема у поверхности построенного параболоида вращения выполняется второй закон Ньютона в форме (1). Следовательно, построенный параболоид является искомой поверхностью ртути в сосуде, а фокусное расстояние нашего зеркала $f = AF = g/2\omega^2$.

## ЗАДАЧА 71

Требуется подсчитать, насколько изменится температура Земли, если на нее упадет Луна. (Пусть кому-то удалось затормозить Луну на ее орбите, так что Луна с нулевой скоростью начала падать на Землю.)

Масса Луны примерно в 80 раз меньше массы Земли. Удельную теплоемкость вещества Земли и Луны принять равной 1 кал/кг·град (в системе СИ — $4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/кг·град).

### РЕШЕНИЕ

Решим задачу при следующих условиях.

1. Будем считать, что Луна находится достаточно далеко от Земли, так что скорость ее падения на Землю близка ко второй космической скорости.

2. Столкновение будем считать абсолютно неупругим (т. е. скорости планет после столкновения примем равными).

3. Пренебрежем возможной теплоотдачей в окружающее космическое пространство в форме излучения.

(Заметим, что если бы такое столкновение произошло в действительности, то, по-видимому, условия 1 и 2 соблюдались бы весьма точно. Что же касается третьего условия, то оно принято только для того, чтобы нашу задачу можно было „решить“ в рамках элементарной физики; при реальном столкновении, скорее всего, основная часть энергии перешла бы в излучение.)

При этих условиях в соответствии с законом сохранения импульса $m_Л v_Л = (m_З + m_Л)\, v$ и законом сохранения энергии $m_Л v_Л^2/2 = (m_З + m_Л)\, v^2/2 + \Delta E$, для энергии $\Delta E$, которая пошла на нагревание Луны и Земли, получим, что

$$\Delta E = \frac{m_Л v_Л^2}{2} \cdot \frac{m_З}{m_З + m_Л} = c\,(m_З + m_Л)\,\Delta T,$$

где $m_З$ и $m_Л$ — массы Земли и Луны соответственно; $v_Л$ — скорость падения Луны на Землю; $v$ — общая скорость планет после столкновения, $c$ — теплоемкость вещества планет; $\Delta T$ — изменение температуры.

Как видим, почти вся кинетическая энергия Луны переходит в тепло (только при наших условиях!). Искомое изменение температуры определяется выражением

$$\Delta T = \frac{v_Л^2}{2c} \cdot \frac{m_Л m_З}{(m_З + m_Л)^2} \approx 170^\circ\,\mathrm{C}.$$

## ЗАДАЧА 72

Определить увеличение температуры медной цепочки в условиях задачи 42, считая, что вся работа, затраченная на деформацию цепочки, приводит к увеличению ее внутренней энергии.

Теплоемкость меди $c = 0{,}38 \cdot 10^3$ Дж/кг·град, высота стола $h = 10$ м.

### РЕШЕНИЕ

Рассматривая некоторый интервал времени $\Delta t$ при установившемся движении, применим к цепочке закон сохранения энергии

$$\rho g h v \Delta t S = S \rho v^3 \Delta t/2 + \Delta U,$$

где $S$ — площадь поперечного сечения цепочки; $\Delta U$ — изменение внутренней энергии цепочки за время $\Delta t$, т. е. изменение внутренней энергии части цепочки длиной $\Delta l = v\Delta t$, если пренебречь теплоотдачей и теплопроводностью цепочки. Отсюда $\Delta U = c\,\rho\,\Delta l\,\Delta T S$. Сравнивая выписанные уравнения, находим что $\Delta T = gh/2c = 0{,}13^\circ$ С.

## ЗАДАЧА 73

Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}8\cdot10^{-4}$ град$^{-1}$. Коэффициент сжатия ртути $\gamma = 3{,}9\cdot10^{-6}$ атм$^{-1}$. Насколько нужно увеличить внешнее давление, чтобы сохранить постоянным объем ртути при ее нагревании от 0 до 10° С?

### РЕШЕНИЕ

Напомним, что коэффициентом сжатия называется относительное изменение объема жидкости при изменении давления на $\Delta p$ и постоянной температуре, т. е. $\Delta V/V = -\gamma\Delta p$. Аналогично определяется коэффициент объемного расширения: $\Delta V/V = \beta\Delta T$.

Условия задачи выполняются, если изменения объема ртути, вызываемые нагреванием ($\Delta V_1$) и изменением давления ($\Delta V_2$) по отдельности, по абсолютной величине одинаковы, т. е. $\Delta V_1 = -\Delta V_2$. Следовательно, должно быть, что $\gamma\Delta p = \beta\Delta T$, откуда $\Delta p = \Delta T\beta/\gamma = 460$ атм.

## ЗАДАЧА 74

В калориметр, содержащий 100 г льда при 0° С, налили 150 г воды при 50° С. Определить установившуюся в калориметре температуру. Потерями тепла на нагрев калориметра пренебречь.

### РЕШЕНИЕ

Введем обозначения: $m_в$ — масса воды; $m_л$ — масса льда; $c_в$ и $c_л$ — удельные теплоемкости воды и льда; $\lambda$ — удельная теплота плавления льда; $T_в$ и $T_л$ — начальные температуры воды и льда; $\theta$ — установившаяся температура.

Обычно составляют уравнение теплового баланса в виде

$$c_л m_л (0°\,\text{С} - T_л) + m_л\lambda + c_в m_л\theta = c_в m_в (T_в - \theta), \qquad (1)$$

$$\text{откуда } \theta = (c_л m_л T_л + c_в m_в T_в - m_л\lambda)/(c_в m_л + c_в m_в). \qquad (2)$$

Будь начальные данные предложены в общем виде, это решение многим показалось бы правильным и окончательным. Однако если подставить числовые значения, получим, что $\theta = -2°$ С. Как это понимать? Уравнение (1) написано в предположении, что весь лед растает. Однако для этого требуется 8000 кал, а из теплой воды при ее охлаждении до 0° С можно получить лишь 7500 кал. Лед растает не весь. Уравнение (1) не отражает действительный ход событий.

Теперь без расчета можно дать правильный ответ. Так как часть льда не растает, $\theta = 0°$ С.

В общем случае при решении таких задач должны быть исследованы все возможные ситуации, т. е.

1. Весь лед растаял. Это осуществляется, если $c_л m_л$ (0° C — $T_л$) + $m_л \lambda \leqslant T_в m_в c_в$. Решение для этого случая нами получено (см. выражение (2)).

2. Растаяла часть льда. Случай реализуется, если $c_л m_л$ (0° C — $T_л$) $\leqslant T_в m_в c_в \leqslant c_л m_л$ (0° C — $T_л$) + $m_л \lambda$. Ответ очевиден: $\theta$ = 0° C.

3. Часть теплой воды замерзла, $\theta$ = 0° C.

4. Вся вода замерзла и охладилась до температуры ниже 0° C.

Попробуйте закончить исследование и изобразить его результаты на диаграмме, подобно тому, как это было сделано в задаче 31.

## ЗАДАЧА 75

Теплоизолированный сосуд с водой, находящейся при температуре 0° C, соединен с откачивающим насосом. Что произойдет с водой, если насос начнет работать?

### РЕШЕНИЕ

Так как температура кипения падает с уменьшением давления, рано или поздно вода закипит. Образующиеся при этом пары воды будут откачиваться насосом, а сама вода — продолжать кипеть.

Но поскольку для испарения воды нужно тепло, а подвод тепла извне отсутствует, процесс испарения будет сопровождаться отдачей тепла неиспарившейся водой. В результате последняя замерзнет и процесс остановится.

Обозначив через $m$ первоначальное количество воды, через $m_1$ — выкипевшую часть воды, можно записать уравнение теплового баланса в виде $m_1\lambda = (m - m_1)\, r$, где $\lambda$ — удельная теплота парообразования; $r$ — удельная теплота плавления. Отсюда $m_1 = mr/(\lambda + r)$, или, иначе говоря, испарится $r/(\lambda + r)$-я часть воды.

## ЗАДАЧА 76

Внешнее давление на воду увеличивают. Что при этом нужно делать, нагревать или охлаждать воду, чтобы сохранить ее объем неизменным?

### РЕШЕНИЕ

Вследствие особенностей теплового расширения воды ответ зависит от ее начальной температуры. Увеличение внешнего давления при неизменной температуре приводит к уменьшению объема. Температуру воды нужно изменять так, чтобы компенсировать это изменение объема. Следовательно, если начальная температура воды меньше 4° C, воду следует охлаждать, при температуре, большей 4° C, — нагревать.

## ЗАДАЧА 77

Зависит ли теплоемкость воды от внешнего давления? Каким образом?

### РЕШЕНИЕ

*По определению* теплоемкость тела равна отношению тепла $\Delta Q$, поглощенного телом, к изменению температуры $\Delta T$ тела, при этом $C = \Delta Q/\Delta T$. И $\Delta Q$ и $\Delta T$ зависят не только от самого тела (его массы, состава, агрегатного состояния и т. д.), но и от того, совершается ли телом механическая работа в процессе нагрева. Для газов, например, различают теплоемкость $c_V$ при постоянном объеме (работа газа здесь равна нулю), $c_p$ при постоянном давлении (работа равна $p\Delta V$, где $\Delta V$ — изменение объема газа при нагревании). То же относится к жидким и твердым телам. Тепловое расширение этих тел, однако, ничтожно, поэтому механической работой, производимой ими, можно пренебречь. Даже в такой крайней ситуации — нагревается брусок хорошей стали, на бруске лежит столь тяжелый груз, что под действием веса груза брусок вот-вот разрушится — даже тогда на работу по подъему груза будет расходоваться приблизительно 1% подводимого тепла. Следовательно, все тепло, подводимое к твердому (жидкому) телу, можно считать ушедшим на изменение внутренней энергии последнего, а теплоемкости тела приписывать зависимость лишь от тела, но не от процесса. Именно такой смысл имеют удельные теплоемкости жидких и твердых веществ, приводимые в различных таблицах.

Данная задача, однако, самой своей формулировкой требует учета механической работы, совершаемой водой при нагреве.

Допустим, что сосуд с поршнем сплошь заполнен водой, находящейся при температуре $T°$ С. С помощью поршня можно изменить давление в сосуде.

Для определения теплоемкости подведем к сосуду количество тепла $Q$ такое, чтобы увеличить температуру воды на величину $\Delta T$. Если считать, что теплоемкость сосуда очень мала, то закон сохранения энергии приводит к следующему соотношению: $Q(T) = c(T)\, m\Delta T = \Delta U + A$, где $c(T)$ — теплоемкость воды при температуре $T$; $\Delta U$ — увеличение внутренней энергии воды; $m$ — масса воды; $A$ — работа против внешних сил; $\Delta T$ мало.

Если в нашем опыте вода не изменила агрегатного состояния (осталась водой), то величина $\Delta U$ прямо пропорциональна $\Delta T$, $\Delta U = k\Delta T$.

Работу против внешних сил $A$ можно представить в виде

$$A = p(V - V_0) = p\left(\frac{m}{\rho} - \frac{m}{\rho_0}\right) = p\frac{m}{\rho_0\rho}(\rho_0 - \rho) \approx$$
$$\approx -pV_0\Delta\rho/\rho_0 \text{ (так как } \rho \approx \rho_0),$$

где $V$ — объем воды после нагрева на $\Delta T$; $p$ — давление под поршнем; $V_0$ и $\rho_0$ — объем и плотность воды в исходном положении; $\Delta\rho$ — изменение плотности при нагревании. При нагревании воды работа против внешних сил может оказаться и отрицательной, т. е. сами внешние силы совершают работу.

Далее, $c(T) = k/m - [pV_0/(m\rho_0)](\Delta\rho/\Delta T)$.

Если исходная температура меньше 4° С, то $\Delta\rho/\Delta T > 0$, т. е. теплоемкость воды тем меньше, чем больше внешнее давление.

Подобным же образом можно найти, что при температурах, больших 4° С, теплоемкость воды увеличивается с увеличением давления.

## ЗАДАЧА 78

Предлагается следующее устройство типа вечного двигателя, способное совершать работу без затрат энергии.

Пусть имеется некоторое количество воды, холодильник, нагреватель и достаточный запас пустых бутылок. Наливаем воду в первую бутылку, закрываем ее и ставим в холодильник. Отнимем у воды количество тепла $Q$ такое, чтобы вода замерзла. При этом бутылка лопается. Получившийся лед помещаем в нагреватель. Отбирая от нагревателя то же самое тепло $Q$, превращаем лед в воду, наливаем эту воду во вторую бутылку и т. д. (Чтобы не мешать рассуждениям, все бутылки поставим предварительно в холодильник — при этом не нужно учитывать их теплоемкости.) В результате $n$ подобных циклов запас тепла нагревателя уменьшится на величину $nQ$, но зато запас теплоты у холодильника на ту же величину возрастет. В то же время совершена определенная работа (хотя и не слишком полезная) — налицо $n$ разбитых бутылок. (Читатель едва ли сомневается в том, что такое устройство вполне реально.)

Как согласовать эти рассуждения с законом сохранения энергии?

### РЕШЕНИЕ

Охлаждаемая в бутылке вода находится под повышенным давлением. Как было найдено в предыдущей задаче, теплоемкость этой воды меньше теплоемкости воды при более низком давлении (то же самое можно сказать и про величину теплоты плавления, но этого мы не доказывали). Поэтому, для того чтобы нагреть полученный в холодильнике лед до температуры воды, которую мы наливали в бутылку, нужно затратить количество тепла $Q_1 > Q$. Разность $Q_1 - Q$ равна работе, которая совершена за один цикл (работа по уничтожению одной бутылки). Таким образом, предлагаемое устройство на вечный двигатель не похоже.

## ЗАДАЧА 79

Для того чтобы продемонстрировать различную теплопроводность у разных материалов, поставлен следующий опыт. Из двух разных металлов изготовлены одинаковые по размерам стержни. Один из концов каждого стержня покрыт парафином. Другие концы нагреваются в одинаковых условиях. Утверждается, что парафин расплавится быстрее на конце того стержня, который лучше проводит тепло.

Правильно ли это утверждение?

### РЕШЕНИЕ

Утверждение неверно: результат опыта существенно зависит не только от теплопроводности стержней, но и от их удельных теплоемкостей. Предсказать, где раньше расплавится парафин, труднее, чем кажется на первый взгляд.

Действительно, от величины удельной теплоемкости стержня зависит, во-первых, скорость увеличения температуры на том конце, где находится парафин, и, во-вторых, количество тепла, которое при данной температуре стержень отдает парафину (чем больше удельная теплоемкость, тем медленнее нагревается конец стержня, но зато интенсивнее передается тепло парафину).

Результат опыта можно объяснить так, как это сделано в условиях задачи, если удельные теплоемкости стержней одинаковы.

## ЗАДАЧА 80

Можно ли, располагая 1 л воды при 100° С, нагреть 1 л воды от 0 до 60° С? Потерями тепла пренебречь.

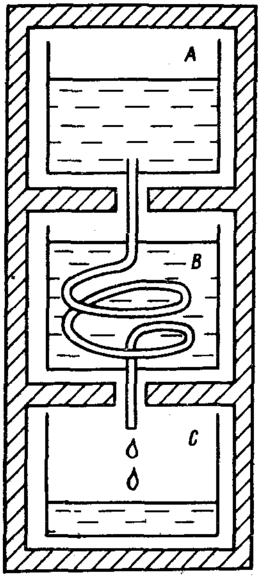
### РЕШЕНИЕ

Обычно требуемый результат считают недостижимым, ибо после теплообмена исходные объемы воды будут иметь равные температуры (по 50° С). Однако этот результат справедлив лишь, если нагревать сразу всю холодную воду, остужая сразу всю горячую. Но ведь процесс теплообмена можно осуществить и иначе.

Пусть холодная вода медленно вытекает из сосуда $A$ по тонкой металлической трубке, свернутой в спираль (змеевик) и помещенной в сосуд $B$ с горячей водой (см. рисунок), и стекает после этого в стакан $C$. Все три сосуда теплоизолированы от окружающей среды и друг от друга.

Каждая порция воды, прошедшая через змеевик, приобретет ту температуру, которую к этому времени имеет горячая вода. Первые капли, упавшие в сосуд $C$, будут нагреты практически до 100° С, следующие — чуть меньше и т. д. Оказывается, что при таком процессе конечная температура воды в сосуде $C$ составит приблизительно 63° С, а температура первоначально горячей воды будет равна 37° С. Не доказывая справедливость этого предельного результата, простейшим расчетом подтвердим, что можно нагреть холодную воду до температуры больше 50° С.

Заполним теплообменник 0,5 л холодной воды и дождемся выравнивания температур. Затем быстро выпустим воду из змеевика в сосуд $C$ и повторим этот же процесс второй раз.



К задаче 80.

1-й цикл: установившаяся температура $T_1 = (1\text{л}\cdot 100°\ \text{С} + 0{,}5\text{л}\cdot 0°\ \text{С})/(1\text{л} + 0{,}5\text{л}) = 67°\ \text{С}$;

2-й цикл: установившаяся температура $T_2 = (1\text{л}\cdot 67°\ \text{С} + 0{,}5\text{л}\cdot 0°\ \text{С})/(1\text{л} + 0{,}5\text{л}) = 44°\ \text{С}$.

Температура в сосуде $C$ после смешивания первой и второй порций подогретой воды следующая: $T = (67°\ \text{С} + 44°\ \text{С})/2 = 56°\ \text{С}$. Последнее число можно получить также из соотношения $T = 100° - T_2 = 56°\text{С}$.

Если осуществить процесс за четыре цикла, аналогично получим, что $T_1 = (1\cdot 100°\ \text{С} + 0{,}25\cdot 0°\ \text{С})/(1 + 0{,}25) = 80°\ \text{С}$; $T_2 = 80°\ \text{С}/1{,}25 = 64°\ \text{С}$; $T_3 = 64°\ \text{С}/1{,}25 = 51°\ \text{С}$; $T_4 = 51°\ \text{С}/1{,}25 = 41°\ \text{С}$, $T = (80 + 64 + 51 + 41)/4 = 59°\ \text{С}$, или $T = 100°\ \text{С} - 41°\ \text{С} = 59°\ \text{С}$.

В пределе, переходя к большому числу циклов, т. е. осуществив медленное непрерывное протекание холодной воды по змеевику, можно нагреть ее до 63° С. Указанная температура превзойдена быть не может, если пользоваться только прямым теплообменом.

Совершенно аналогичный результат будет достигнут, если поменять сосуды $A$ и $B$ местами, т. е. пропускать горячую воду сквозь холодную.

## ЗАДАЧА 81

Сняв с плиты чайник с закипевшей водой, хозяйка добавила в него ковш холодной и с удивлением почувствовала, что ручка чайника стала значительно более горячей. Как это объяснить?

### РЕШЕНИЕ

Ручка не стала более горячей в строгом смысле этого слова. Наоборот, за время осуществления всех указанных операций она могла лишь охладиться. Однако субъективное ощущение степени нагретости при соприкосновении руки с каким-то телом зависит не только от температуры этого тела, но и от величины удельного давления тела на руку. Чем больше это давление, тем большей кажется разница температур руки и тела. (При увеличении давления увеличивается теплообмен. Это происходит по нескольким причинам; в частности, увеличивается площадь соприкосновения руки и поверхности исследуемого тела. Чтобы убедиться в этом, поставьте простейший опыт: положите ладонь на горячую батарею парового отопления, а через некоторое время с силой сожмите руку; вы заметите резкое „увеличение температуры“ батареи). Долив в чайник воду, хозяйка увеличила вес чайника, а значит, и силу его давления на руку, что и привело к указанному в задаче ощущению.

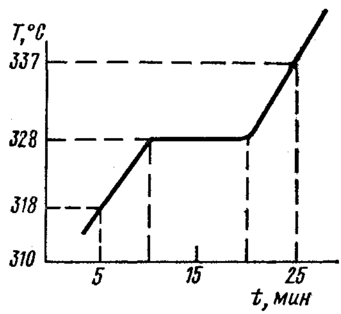
Следует также иметь в виду, что при определенной разнице температур ручки чайника и руки человек в состоянии удерживать чайник лишь ограниченный срок. За время долива воды хозяйка могла как раз подойти к пределу своей выносливости, что вместе с первым эффектом и определило „разогрев“ ручки.

Все эти события можно легко воспроизвести самим. При этом придется несколько раз повторять опыт, чтобы экспериментально отыскать те температуры и количества воды, при которых указанный эффект наблюдается.

Любителей строгих выкладок настоящая задача и ее решение могут удивить: нет никакой математики и даже физики! Ничего не поделаешь... Оказывается, и сложные на первый взгляд вопросы поддаются иногда решению на „бытовом“ уровне. Думается, что чем более простым и наглядным окажется решение (разумеется, при обязательном условии, что оно верное), тем бо́льшую ценность оно представляет.

## ЗАДАЧА 82

Для определения теплоты плавления тугоплавкого кристаллического вещества можно провести следующий опыт. Некоторое количество твердого вещества нагревают от температуры, меньшей точки плавления, до температуры, превышающей точку плавления, на достаточно мощном нагревателе и строят график изменения температуры вещества с течением времени (см. рисунок). Оцените по этому графику величину удельной теплоты плавления, если удельная теплоемкость $c$ вещества известна, $c = 130$ Дж/кг·град, как в жидкой, так и в твердой фазах.



К задаче 82.

### РЕШЕНИЕ

Очевидно, что горизонтальный участок нашего графика соответствует процессу плавления вещества, в продолжение которого в сосуде находится смесь жидкой и твердой фаз. Для определения удельной теплоты плавления необходимо знать количество теплоты, полученное нагреваемым телом в процессе плавления.

Если бы скорость получения тепловой энергии не менялась с течением времени, наклонные участки на графике были бы параллельны. В действительности скорость увеличения температуры тем меньше, чем больше температура тела (если мощность нагревателя специально не регулируется), так как с ростом температуры увеличивается теплоотдача в окружающее пространство и ухудшается теплообмен с нагревателем.

Оценим скорость получения энергии в среднем как среднее арифметическое скоростей, соответствующих процессам нагревания твердого тела и жидкости. Из графика находим, что средняя скорость увеличения температуры тела $v_1 = \Delta T/\Delta t = (9/5 + 10/5)/2 = 1{,}9$ град/мин. Из уравнения теплового баланса $\Delta Q = cm\Delta T$, следует, что скорость получения тепла определяется выражением $v_2 = \Delta Q/\Delta t = cm\Delta T/\Delta t = cmv_1$.

Во время процесса плавления вещество должно получить количество тепла $Q$ такое, что $Q = \lambda m$, где $\lambda$ — удельная теплота плавления. Так как процесс плавления длится $\Delta t' = 10$ мин, то $Q = v_2\Delta t' = cmv_1\Delta t'$. Следовательно, $\lambda = Q/m = cv_1\Delta t' = 2470$ Дж/кг.

В заключение скажем несколько слов об ошибках, которые мы могли допустить при вычислении искомой величины. Во-первых, по уже указанной причине невозможно точно определить величину $v_2$. Во-вторых, по графику нельзя точно указать длительность процесса плавления, так как весь процесс нагревания изображается кривой линией с плавными переходами между горизонтальным и наклонными участками, что связано, в частности, с тем, что выравнивание температуры в сосуде с нагреваемым телом происходит постепенно.

## ЗАДАЧА 83

Известно, что за счет поверхностного натяжения давление с разных сторон от искривленной поверхности жидкости неодинаково. Определить эту разность давлений для сферической и цилиндрической поверхности жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma$.

### РЕШЕНИЕ

Рассмотрим пузырь воздуха радиусом $R$ в жидкости. Для того чтобы увеличить радиус пузыря на величину $x$, нужно произвести работу тем большую, чем больше разность давлений вне и внутри пузыря. Будем считать, что $x \ll R$, так что и радиус пузыря, и искомая разность давлений при увеличении пузыря меняются незначительно. Тогда необходимую работу $A$ можно вычислить по формуле $A \approx \Delta p 4\pi R^2 x$, где $\Delta p$ — разность давлений по обе стороны от поверхности пузыря.

При этом поверхность пузыря увеличится на величину $\Delta S = 4\pi (R + x)^2 - 4\pi R^2 \approx 8\pi Rx$ *. На основе закона сохранения энергии в соответствии с определением величины $\sigma$ $A = \sigma\Delta S = 8\pi Rx\sigma$. Следовательно,

$$\Delta p_{\text{ш}} = 2\sigma/R. \quad (1)$$

Аналогичный расчет для цилиндрической поверхности с радиусом $R$ приведет к выражению

$$\Delta p_{\text{ц}} = \sigma/R. \quad (2)$$

Как следует из наших рассуждений, давление больше с той стороны от поверхности, с которой поверхность кажется вогнутой.

Примечание. Произвольная поверхность может быть в разных направлениях искривлена по-разному. Характерный пример: поверхность, имеющая форму седла. Наблюдатель, находящийся у такой поверхности, не может ответить на вопрос: является ли она выпуклой или вогнутой (в одном направлении поверхность кажется ему выпуклой, в другом — вогнутой)?

Кривизну любой поверхности в данной точке $M$ характеризуют следующим образом. Проведем в точке $M$ касательную к поверхности плоскость $P$. Любая плоскость $Q$, перпендикулярная к касательной плоскости $P$, пересекается с поверхностью по кривой, имеющей в точке $M$ какой-то радиус кривизны $R$. Значения $R$ различны для разных плоскостей $Q$. Наибольшее и наименьшее значения $R$ среди всех возможных называются главными радиусами кривизны $R_1$ и $R_2$ поверхности в точке $M$; соответствующие им плоскости $Q_1$ и $Q_2$ перпендикулярны друг другу.

Можно показать, что разность давлений по разные стороны от произвольной поверхности жидкости связана с главными радиусами кривизны соотношением

$$\Delta p = \sigma (1/R_1 + 1/R_2). \quad (3)$$

Для сферической поверхности главные радиусы кривизны одинаковы, $R_1 = R_2 = R$; при этом формула (3) приводит к выражению (1).

Для цилиндрической поверхности один из радиусов кривизны бесконечен, а второй совпадает с радиусом цилиндра; при этом из (3) следует формула (2).

Для поверхности, имеющей форму седла, один из главных радиусов кривизны имеет отрицательное значение.

* Если суммируются слагаемые, содержащие такие одноименные величины $a$ и $A$, что $|a| \ll |A|$, членами, содержащими $a^2$, $a^3$ и т. д., можно пренебречь сравнительно с членами, содержащими $a^0$ и $a^1$. См. также примечание к задаче 109.

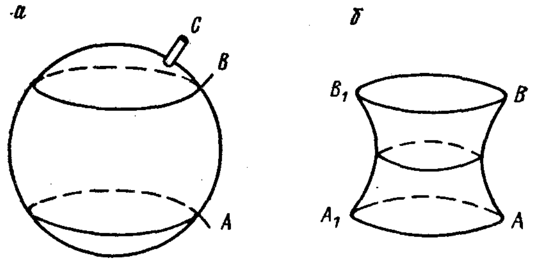
## ЗАДАЧА 84

Мыльный пузырь кладут на проволочное кольцо $A$, а затем покрывают его сверху другим таким же кольцом $B$ (см. рис. *а*). Если открыть трубку $C$, то, поскольку давление воздуха внутри пузыря больше наружного, объем пузыря начнет уменьшаться.

Какую форму примет пузырь, когда этот процесс закончится?

### РЕШЕНИЕ

В состоянии равновесия, если оно существует, давление внутри пузыря не должно отличаться от наружного, а следовательно, участки пузыря, „натянутые" на каждое из колец, должны быть плоскими.




К задаче 84.

Участок пузыря, находящийся между кольцами $A$ и $B$, плоским быть не может — он обязательно искривлен. Для того чтобы давление с обеих сторон от поверхности этого участка было одинаково, поверхность должна иметь такую форму, при которой в любой точке главные радиусы кривизны одинаковы по величине и противоположны по знаку. Поверхность приобретает характерную седловую (выпукло-вогнутую) форму (рис. *б*).

Состояние равновесия устойчиво.

Такой эксперимент нетрудно поставить в домашних условиях.

## ЗАДАЧА 85

На концах трубки укреплены две одинаковые конусообразные воронки. Из воронок выдувают пузыри различных радиусов (см. рисунок) и закрывают кран $A$. Будут ли меняться объемы пузырей, если краны $B$ и $C$ оставить открытыми? Наступит ли состояние равновесия и какую форму при этом примут пузыри?

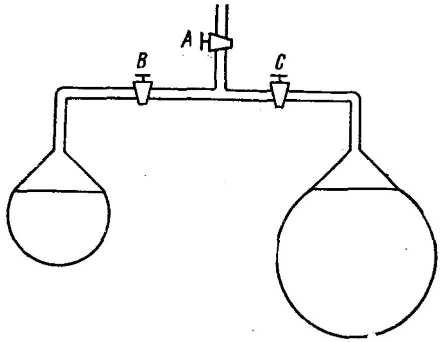
### РЕШЕНИЕ

Очевидно, что состояние равновесия имеет место, когда радиусы поверхностей пузырей равны друг другу: при этом давление воздуха внутри пузырей одинаково.

Если в исходном состоянии каждый из пузырей был больше полусферы, то больший пузырь начнет расти, а малый уменьшаться в размерах, пока не станет меньше полусферы, причем такой, что радиусы пузырей окажутся одинаковыми.

Если в исходном положении пузыри были меньше полусферы, то больший по объему пузырь начнет уменьшаться.

Нетрудно убедиться, что состояние равновесия устойчиво.



К задаче 85.

### ЗАДАЧА 86

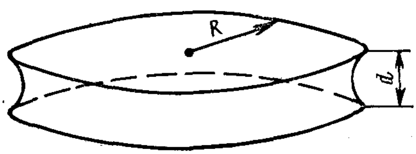
Известно, что мокрые стекла „слипаются" друг с другом: разделить их, да и то с трудом, можно только сдвигая стекла друг относительно друга.

Капля воды с массой $m = 0{,}1$ г введена между стеклами, находящимися на расстоянии $d = 10^{-4}$ см друг от друга. Мокрое пятно имеет круглую форму. Вода полностью смачивает стекла.

Какую силу $F$ нужно приложить к стеклам перпендикулярно к их плоскости, чтобы оторвать их друг от друга?

### РЕШЕНИЕ

Форма капли, находящейся между стеклами, изображена на рисунке. Нетрудно убедиться в том, что радиус $R$ круглого пятна значительно превышает толщину $d$ капли. Действительно, будем считать в первом приближении, что капля имеет цилиндрическую форму, т. е. $V = \pi R^2 d$, где $V$ — объем капли. С другой стороны, если $\rho$ — плотность воды, то объем можно найти из соотношения $V = m/\rho$. Следовательно, $R = (m/\rho\pi d)^{1/2} = 17{,}8$ см, т. е. $R \gg d$.



К задаче 86.

Так как стекло полностью смачивается водой, то поверхность капли в сечении, перпендикулярном стеклам, является вогнутой с радиусом кривизны $R_1 = d/2$. Радиус кривизны поверхности капли $R_2$ в сечении, параллельном стеклам, близок к величине $R$. Следовательно, в выражении $\Delta p = \sigma\,(1/R_1 + 1/R_2)$ (см. задачу 83) для разности давлений вне и внутри капли можно пренебречь величиной $1/R_2$ по сравнению с $1/R_1$.

Таким образом, давление внутри капли меньше, чем давление снаружи. Для того чтобы оторвать стекла друг от друга, нужно действовать на каждое из них силой, большей, чем сила избыточного давления наружного воздуха, т. е.

$$F \geqslant \Delta p \pi R^2 = 2\pi R^2 \sigma/d = 2m\sigma/\rho d^2 = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

для $\sigma = 76 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

## ЗАДАЧА 87

В сосуд с подвижным поршнем заключен мыльный пузырь радиусом $r$. Медленным вдвиганием поршня воздух в сосуде сжимают так, что радиус пузыря уменьшается вдвое. Найти давление воздуха вне пузыря в цилиндре в этот момент, если давление воздуха вне пузыря в исходном состоянии равно $p$.

### РЕШЕНИЕ

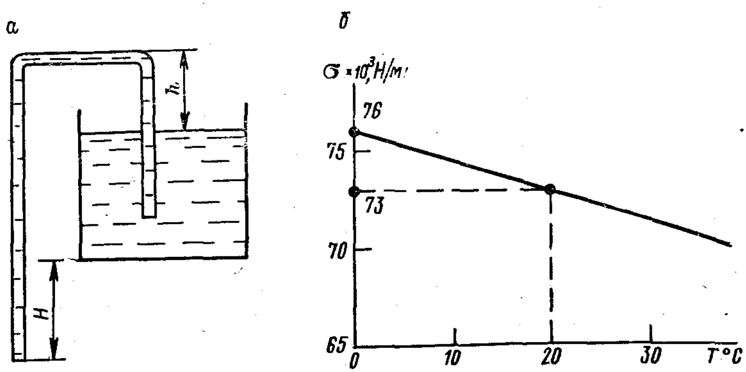
Будем считать, что сжатие воздуха происходило так медленно, что процесс можно считать изотермическим.

Так как объем пузыря при сжатии уменьшился в восемь раз, давление внутри пузыря в восемь раз возросло. Пусть $p_1$ и $p_2$ — давление внутри пузыря в исходном и конечном состояниях, а $p'$ — искомое давление. Учтем, что разность давлений воздуха по разные стороны от поверхности пузыря вдвое больше соответствующей величины для сферической поверхности жидкости, так как мыльная пленка, образующая пузырь, имеет две поверхности, каждая из которых создает дополнительное давление (см. задачу 83). Поэтому $p = p_1 - 4\sigma/r$, $p' = p_2 - 8\sigma/r$, откуда $p' = 8p_1 - 8\sigma/r = 8p + 24\sigma/r$.

## ЗАДАЧА 88

В сосуд с водой опускают стеклянный капилляр радиусом $R$ (см. рис. *а*). Температурный ход коэффициента поверхностного натяжения показан на рис. *б*.

В каком диапазоне температур вся вода вытечет из сосуда? Для вычислений принять, что $R = 0{,}1$ мм, $h = 14{,}1$ см, $H = 15$ см.




К задаче 88.

## РЕШЕНИЕ

Известно, что если поверхность жидкости искривлена, то из-за наличия сил, связанных с поверхностным натяжением, возникает разность давлений по обе стороны от поверхности.

Будем считать, что капилляр полностью смачивается водой, так что поверхность воды в капиллярной трубке является сферической с радиусом $R$.

Для того чтобы вода начала вытекать из сосуда, необходимо прежде всего, чтобы избыточное давление над мениском было способно поднять воду в правом колене капилляра до его горизонтального участка, т. е. чтобы $\Delta p = 2\sigma/R \geqslant \rho g h$. Если это условие выполняется, то вода проникает в левое колено и достигает его конца. Под действием силы гидростатического давления на левом конце образуется выпуклый мениск, который мы также будем считать сферическим с радиусом $R$.

Капли воды будут отрываться от капилляра только в том случае, если избыточное давление под мениском меньше гидростатического, т. е. если $2\sigma/R < \rho g H$.

Последнее неравенство написано для наихудшего случая, когда почти вся вода из сосуда уже вытекла и, значит, гидростатическое давление имеет наименьшую величину.

Следовательно, если $\rho g R h/2 \leqslant \sigma < \rho g R H/2$, то сосуд опорожняется.

Из заданного графика найдем зависимость величины $\sigma$ от температуры:

$$\sigma(T) = (76 - 0{,}15T\ ^\circ\mathrm{C})\, 10^{-3}\ \text{Н/м}.$$

Исключая из двух последних выражений величину $\sigma$, приходим к неравенству для температуры, при выполнении которого удовлетворяются условия задачи

$$\alpha\,(0{,}076 - \rho g R H/2) < T\ ^\circ\mathrm{C} \leqslant \alpha\,(0{,}076 - \rho g R h/2),$$

где $\alpha = 1{,}67 \cdot 10^4$ град$\cdot$Н/м.

Таким образом, искомый диапазон температур определяется неравенством $16{,}7^\circ < T \leqslant 46{,}7^\circ$.

## ЗАДАЧА 89

Предлагается еще один проект вечного двигателя. Допустим, что под колоколом, где находится сосуд с жидкостью, отсутствует воздух. В сосуд опущен вертикальный капилляр, который смачивается жидкостью. Жидкость поднялась в капилляре на высоту $h$ над ее уровнем в сосуде. Над поверхностью жидкости в капилляре находится насыщенный пар, давление которого совпадает с давлением пара $p_0$ у поверхности жидкости в сосуде. В то же время давление вне капилляра на высоте $h$ меньше, чем давление $p_0$, на величину давления столба пара высотою $h$ — это следует из закона Паскаля. Этот перепад приводит к „отсосу" пара из верхнего конца капилляра, жидкость в капилляре постоянно испаряется и конденсируется у поверхности жидкости в сосуде. При этом в капилляре существует постоянный ток жидкости, который можно использовать для совершения полезной работы.

Где ошибка в этих рассуждениях?

РЕШЕНИЕ

Поверхность жидкости в капилляре искривлена, а в приведенных выше рассуждениях предполагалось, что давление насыщенного пара не зависит от кривизны поверхности жидкости, над которой этот пар находится, что не соответствует действительности.

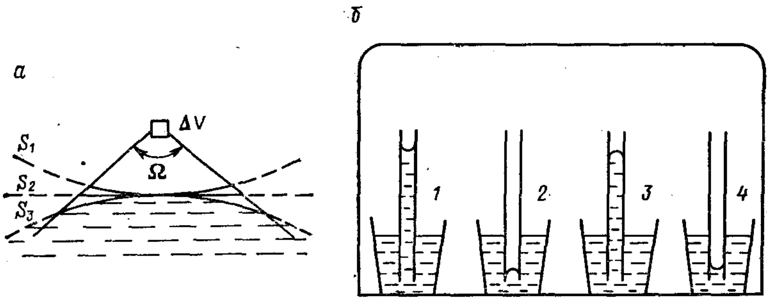
## ЗАДАЧА 90

Зависит ли давление насыщенного пара от кривизны свободной поверхности жидкости и если зависит, то каким образом?

РЕШЕНИЕ

При достижении парами состояния насыщения между жидкостью и паром устанавливается динамическое равновесие: количество молекул, вылетающих из жидкости через площадку $\Delta S$ ее поверхности, равно количеству молекул, возвращающихся в жидкость через эту площадку.

Рассмотрим малый объем пара $\Delta V$, расположенный на одинаковой высоте над вогнутой, плоской и выпуклой поверхностями



К задаче 90.

жидкости (рис. *а*). Если площадки малы, высота мала, то можно считать, что из молекул, покидающих жидкость через указанные поверхности, все, имеющие скорости, направленные в пределах угла $\Omega$, попадут в объем $\Delta V$. Так как $S_1 < S_2 < S_3$, от плоской поверхности таких молекул прилетит больше, чем от выпуклой, но меньше, чем от вогнутой.

Если считать, что количество вылетающих из жидкости молекул слабо зависит от кривизны поверхности и одинаково во всех трех случаях, то при одной и той же температуре насыщенный пар над плоской поверхностью должен иметь плотность, большую, чем над вогнутой поверхностью, но меньшую, чем над выпуклой.

Получим этот же результат более строгим способом. Пусть под колоколом, не содержащим воздуха, имеется сосуд с жидкостью и опущенной в нее капиллярной трубкой. Возможные случаи *1—4* изображены на рис. *б*.

Обозначим разность уровней жидкости в сосуде и капилляре символом $h$; давление у поверхности жидкости в сосуде — $p_0$ (т. е. давление насыщенного пара над плоской поверхностью), давления вне и внутри жидкости у поверхности мениска в капилляре — $p_1$ и $p_2$ соответственно; $\rho_ж$ и $\rho_п$ — плотности жидкости и пара (для пара возьмем среднюю плотность).

Рассмотрим сначала случай *3*. В состоянии равновесия должны выполняться следующие равенства в соответствии с законом Паскаля:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_0 - \rho_п g h, \\ p_2 &= p_1 + \Delta p = p_0 - \rho_ж g h, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\Delta p$ — дополнительное давление под мениском. Из (1) следует, что

$$p_0 - \rho_п g h = p_0 - (\rho_ж g h + \Delta p). \qquad (2)$$

Поскольку $\rho_ж > \rho_п$, уравнение (2) не удовлетворяется, и случай *3* не может наблюдаться в природе. Подобным же образом можно доказать, что не может быть и картины, соответствующей случаю *4*.

Рассмотрим случай *1*. На основе закона Паскаля

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_0 - \rho_п g h, \\ p_2 &= p_1 - \Delta p = p_0 - \rho_ж g h. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ясно, что при условии $\rho_ж > \rho_п$ уравнения (3) совместны. Из них следует, что $p_1 = p_0 - \Delta p\,\rho_п/(\rho_ж - \rho_п)$, т. е. давление насыщенного пара над вогнутой поверхностью меньше, чем давление пара над плоской поверхностью, на величину

$$\Delta p_п = \Delta p\,\rho_п/(\rho_ж - \rho_п).$$

Легко показать, рассматривая случай *2*, что давление насыщенного пара над выпуклой поверхностью больше, чем над плоской.

Приведенные рассуждения одновременно дают решение предыдущей задачи.

## ЗАДАЧА 91

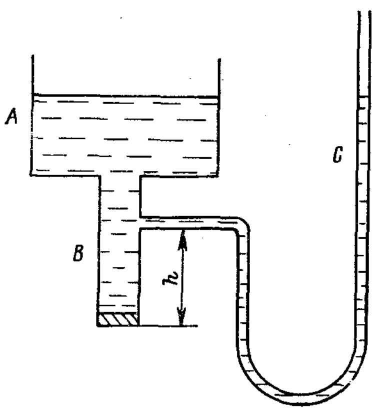
В облаке имеются капельки воды различных размеров. Допустим, что эта система является изолированной, т. е. не взаимодействует с окружающей средой; примем, кроме того, что гравитационные силы между капельками настолько малы, что капли друг относительно друга не перемещаются. Меняются ли при этом размеры капель и почему?

РЕШЕНИЕ

Размеры капель могут сохраняться неизменными лишь при условии, что каждая капля находится в динамическом равновесии с окружающим ее водяным паром. Мы уже знаем (см. задачу 90), что давление пара вблизи свободной поверхности жидкости зависит от кривизны этой поверхности: давление около малых капель больше, чем около крупных. Из-за этого в облаке происходит процесс диффузии — перенос пара от малых капель к большим. Пар вблизи мелких капель поддерживается в ненасыщенном состоянии (и эти капли испаряются), а у больших — в состоянии перенасыщения (так что большие капли увеличиваются в размерах). В конечном итоге в облаке остается единственная капля.

### ЗАДАЧА 92

Очень широкий цилиндрический сосуд $A$ имеет в днище отверстие, снабженное вертикальной трубкой $B$. К трубке присоединен манометр $C$. Нижний конец трубки закрыт пробкой, и уровни жидкости в сосуде и манометре одинаковы (см. рисунок).



К задаче 92.

Как расположится уровень воды в манометре, если, вынув пробку, дать жидкости вытекать? Как изменится ответ, если трубка $B$ суживается книзу?

Трением пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Очевидно, что в обоих случаях давление на уровне открытого конца трубки $B$ близко к атмосферному.

По закону Бернулли в первом случае давление у входного отверстия манометра меньше атмосферного на величину давления столба воды высотою $h$; во втором случае давление у входного отверстия манометра отличается от атмосферного на меньшую величину, так как скорость течения воды увеличивается по мере приближения к концу трубы $B$.

Следовательно, в первом случае вода в правом колене манометра расположится на уровне конца трубы $B$, а во втором случае — выше конца трубы $B$, но ниже входного отверстия манометра.

### ЗАДАЧА 93

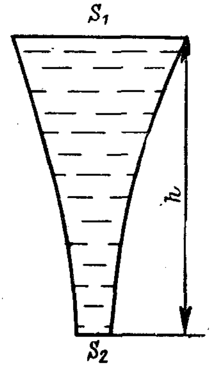
Из крана вытекает вниз вертикальная струя воды. Вам предоставлена возможность наблюдать отрезок струи длиной 3 см, и вы заметили, что на этом протяжении диаметр струи уменьшился от 3 до 2 мм.

За какое время наполнится водой стакан объемом $V = 200$ см³?

## РЕШЕНИЕ

Уменьшение диаметра струи происходит под действием сил поверхностного натяжения. Если бы поверхностное натяжение отсутствовало, то струя воды вела бы себя, как поток дроби, высыпающейся из трубки: у „струи" дроби диаметр не меняется по мере удаления от конца трубы, расстояния же по вертикали между дробинками возрастают (действует кинематика равноускоренного движения!).

Поскольку кривизна поверхности струи изменяется, дополнительное давление внутри струи, создаваемое поверхностным натяжением, различно в разных сечениях. Очевидно, что кривизна струи в сечении, проходящем через ее осевую линию, значительно меньше, чем в сечениях, перпендикулярных струе. Следовательно, для расчетов дополнительного давления $\Delta p$ в результате поверхностного натяжения можно принять, что в любом сечении поверхность струи имеет цилиндрическую форму.



К задаче 93.

Применим к сечениям $S_1$ и $S_2$ с радиусами $R_1$ и $R_2$ (см. рисунок) закон Бернулли *:

$$\Delta p_1 + \rho g h_1 + \rho v_1^2/2 = \Delta p_2 + \rho g h_2 + \rho v_2^2/2, \qquad (1)$$

где $\Delta p_1 = \sigma/R_1$, $\Delta p_2 = \sigma/R_2$, $h_1 - h_2 = h = 3$ см, $\sigma$ и $\rho$ — коэффициент поверхностного натяжения и плотность воды, $v_1$ и $v_2$ — скорости течения в сечениях $S_1$ и $S_2$.

Так как за один и тот же интервал времени через любое сечение струи проходит одно и то же количество воды, то $S_1 v_1 = S_2 v_2$, откуда $v_2 = v_1 S_1/S_2$. С учетом последнего соотношения из выражения (1) находим, что

$$v_1^2 = \frac{\rho g h R_1 R_2 - \sigma (R_1 - R_2)}{R_1} \cdot \frac{2R_2^3}{\rho (R_1^4 - R_2^4)}. \qquad (2)$$

Искомое время найдем из очевидного равенства $\Delta t = V/S_1 v_1$, подставляя в которое выражение (2) и численные данные (причем $\sigma = 76 \cdot 10^{-3}$ Н/м), получаем, что $\Delta t \approx 75$ с.

## ЗАДАЧА 94

Перевернутый цилиндрический стакан высотою $H$ плавает так, что его дно находится вровень с поверхностью воды (см. рисунок), причем вода занимает $1/n$ часть стакана. Такой же стакан, но пустой, погружают в воду вверх дном. На какую глубину надо его погрузить, чтобы он не всплыл?

Окружающий воздух имеет температуру $T_1$, вода — $T_2$, атмосферное давление равно $p$.

---

* Элементарный учебник физики. Под ред. Г. С. Ландсберга. Изд. 8-е. М., „Наука", 1973.

## РЕШЕНИЕ

Для плавающего у поверхности стакана давление воздуха в нем определяется выражением

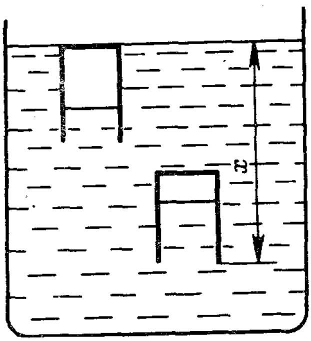
$$p_1 = \rho g H (n-1)/n + p,$$

где $\rho$ — плотность воды.

Так как только сила этого давления и удерживает стакан в неподвижном состоянии, вес $G$ стакана таков, что

$$G = \rho g H S (n-1)/n, \tag{1}$$

где $S$ — площадь поперечного сечения стакана (здесь и в дальнейшем для сокращения вычислений предполагается, что плотность стекла настолько превосходит плотность воды, что выталкивающей силой, действующей на объем, занятый стеклом, можно пренебречь по сравнению с силой давления воздуха).



К задаче 94.

Стакан, погруженный на глубину $x$, не всплывает, если окажется, что сила давления воздуха на дно стакана снизу не превосходит суммы силы давления воды на дно сверху и веса стакана, т. е.

$$\rho g (x - H + V/S) S \leqslant \rho g (x - H) S + G, \tag{2}$$

где $V$ — объем воздуха в стакане на глубине $x$. Знак равенства в выражении (2) соответствует состоянию неустойчивого равновесия стакана.

Исключая из выражений (1) и (2) величину $G$, находим, что

$$V \leqslant HS (n-1)/n. \tag{3}$$

На основе объединенного газового закона

$$pHS/T_1 = [p + \rho g (x - H + V/S)] V/T_2. \tag{4}$$

Исключая из соотношений (3) и (4) объем $V$, приходим к выражению

$$x \geqslant \frac{p}{\rho g}\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \frac{H}{n}.$$

Следует заметить, что решение задачи имеет смысл, если выполняется неравенство

$$\frac{p}{\rho g}\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \frac{H}{n} > 0.$$

В противном случае стакан утонет и сам.

## ЗАДАЧА 95

В замкнутом вертикальном сосуде поршень, который может двигаться без трения, делит разграниченные им объемы в отношении $n : 1$. Над и под поршнем находятся одинаковые массы одного и того же газа при температуре $T_1$.

Как изменится отношение объемов при изменении температуры до $T_2$?

### РЕШЕНИЕ

Так как поршень неподвижен, то сумма действующих на него сил равна нулю, следовательно, давление в нижней части сосуда должно быть больше давления в верхней его части, чтобы уравновесить давление газа сверху и вес поршня.

Если $n > 1$, то $n : 1$ дает, следовательно, отношение верхнего объема к нижнему. Будем решать задачу именно в таком предположении.

Введем следующие обозначения: $V_{в1}$, $V_{н1}$, $p_{в1}$, $p_{н1}$, $V_{в2}$, $V_{н2}$, $p_{в2}$, $p_{н2}$ — объем и давление газа в верхней и нижней частях сосуда при температурах $T_1$ и $T_2$. Так как объем сосуда неизменен, $V_{в1} + V_{н1} = V_{в2} + V_{н2}$,

$$V_{в1}(1 + 1/n) = V_{в2}(1 + 1/k), \tag{1}$$

где $k$ — искомое отношение верхнего объема к нижнему. Очевидно, что $k > 1$.

Вес $G$ поршня постоянен. Следовательно,

$$(p_{н1} - p_{в1})S = G = (p_{н2} - p_{в2})S, \tag{2}$$

где $S$ — площадь поршня. Так как массы газа с разных сторон от поршня одинаковы и неизменны, то $p_{в1}/p_{н1} = 1/n$, $p_{в2}/p_{н2} = 1/k$. При этом из равенства (2) получаем, что

$$p_{в1}(n - 1) = p_{в2}(k - 1). \tag{3}$$

Воспользуемся объединенным газовым законом. Из него, в частности, следует, что $V_{в1}p_{в1}/T_1 = V_{в2}p_{в2}/T_2$. Подставляя сюда выражения для $V_{в2}$ и $p_{в2}$ из (1) и (3), приходим к уравнению для определения величины $k$:

$$k^2 - (T_1/T_2)(n - 1/n)k - 1 = 0.$$

Его корни определяются выражением

$$k_{1,2} = \frac{T_1}{2T_2}\left(n - \frac{1}{n}\right) \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2}\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 + 1}. \tag{4}$$

Легко видеть, что дискриминант всегда положителен, один из корней отрицателен, мы его отбрасываем, другой корень больше единицы.

Проверка полученного решения для случая $n = 1$, что соответствует невесомому поршню, дает очевидный результат $k = 1$.

## ЗАДАЧА 96

В ртутном барометре с цилиндрической барометрической трубкой расстояние от уровня ртути в чашке до запаянного конца трубки равно $L$ мм. В трубку при давлении $H_1$ мм и температуре $T_1$ °С попал пузырек воздуха, из-за чего длина ртутного столба уменьшилась и стала равной $h_1$ мм.

Найти выражение для поправки $p$, прибавляя которую к показанию $h$ барометра, можно было бы пользоваться последним при любых температурах и любых высотах ртутного столба.

### РЕШЕНИЕ

Показания рассматриваемого барометра всегда меньше истинного давления на величину давления воздуха в трубке, выраженного в миллиметрах ртутного столба.

Давление воздуха в трубке при внешнем давлении $H_1$ равно по условию величине $p_1 = (H_1 - h_1)$ мм рт. ст. Это и есть поправка к показанию барометра при температуре $T_1$ и внешнем давлении $H_1$.

Найдем давление $p$ воздуха в трубке при температуре $T$ °С и внешнем давлении $H$.

Пусть сечение трубки равно $S$. При давлении $H_1$ и температуре $T_1$ °С объем воздуха в трубке $V_1 = S\ (L - h_1)$.

Если при давлении $H$ и температуре $T$ °С объем воздуха равен $V$, то в соответствии с объединенным газовым законом

$$p_1 V_1/T_1 = pV/T, \qquad (1)$$

но $p = H - h$ и $V = S\ (L - h)$. При этом из выражения (1) находим, что

$$p = p_1 \frac{V_1}{V} \cdot \frac{T}{T_1} = (H_1 - h_1) \frac{L - h_1}{L - h} \cdot \frac{T}{T_1} \text{ мм рт. ст.}$$

Следовательно, если температура равна $T$ °С, а барометр показывает давление $h$ мм рт. ст., то истинное внешнее давление $H = h + p$.

## ЗАДАЧА 97

Две сферы с объемами 100 и 200 см$^3$ соединены короткой трубкой, в которой имеется пористая перегородка. С ее помощью можно добиться равенства давлений в сосудах, но не температуры. В исходном состоянии система находится при температуре $T = 27$ °С и содержит кислород под давлением $p = 760$ мм рт. ст.

Малая сфера помещается в сосуд со льдом при $T_1 = 0$ °С, а большая — в сосуд с паром при $T = 100$ °С. Какое давление установится в системе? Тепловым расширением сфер пренебречь.

Р Е Ш Е Н И Е

Обозначим объем малой сферы $V_1$, большой — $V_2$. Из уравнения Клапейрона — Менделеева следует, что масса газа в обоих сосудах

$$m = \mu p (V_1 + V_2)/RT. \qquad (1)$$

Пусть в новых условиях массы газа в сферах равны соответственно $m_1$ и $m_2$. Тогда

$$m_1 = \mu p_1 V_1/RT_1, \quad m_2 = \mu p_1 V_2/RT_2, \qquad (2)$$

где $p_1$ — искомое давление. Так как $m_1 + m_2 = m$, то из выражений (1) и (2) находим, что

$$p_1 = p \frac{V_1 + V_2}{V_1 T_2 + V_2 T_1} \cdot \frac{T_1 T_2}{T} = 840 \text{ мм рт. ст.}$$

## З А Д А Ч А 98

Газ меняет свое состояние по закону $p = \alpha V$.

Найти работу, совершенную газом при изменении его давления от $p_1$ до $p_2$.

Р Е Ш Е Н И Е

При постоянном давлении и изменении объема от $V_1$ до $V_2$ газ совершит работу $A = p(V_2 - V_1)$. В нашем случае давление переменное. Вводя среднее значение давления $p = (p_1 + p_2)/2 = \alpha (V_1 + V_2)/2$, найдем, что $A = p(V_2 - V_1) = (\alpha/2)(V_2^2 - V_1^2)$.

Обращаем внимание на аналогию с вычислением пути при равноускоренном движении (см. задачу 57). Эта аналогия оказалась возможной, поскольку в обоих случаях один параметр (давление или скорость) линейно зависит от другого (объема или времени).

П р и м е ч а н и е. Изучая в школе идеальный газ, основное внимание уделяют обычно нескольким определенным процессам: изотермическому, изобарическому, изохорическому, адиабатическому. У многих учащихся поэтому невольно складывается убеждение, что этим список возможных процессов исчерпывается, что ничего иного с газом происходить не может. Разумеется, это не так. Перечисленные процессы — лишь частные случаи. На диаграмме с координатами $p$, $V$ этим процессам соответствуют четыре семейства линий: все изотермы (гиперболы $pV = \text{const}$), все изобары и изохоры (вертикали и горизонтали $p = \text{const}$, $V = \text{const}$), все адиабаты. Но на той же диаграмме можно начертить еще сколько угодно непрерывных линий, не совпадающих с указанными, и каждой из них будет соответствовать свой процесс (как в этой или следующей задачах). Перечисленные же выше процессы отличаются от последних исключительно лишь одной особенностью — постоянством одного параметра и потому легкостью описания.

Аналогичные заблуждения возникают при изучении разделов, где рассматриваются скаляры и векторы (см. примечание II задачи 1), последовательные и параллельные соединения электрических цепей и т. д.

## ЗАДАЧА 99

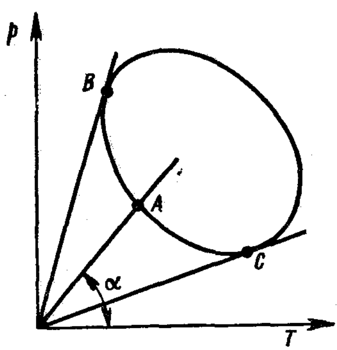
Зависимость давления от температуры в некотором процессе, который происходил с постоянным объемом газа, представлена на рисунке.

Указать, в каких точках диаграммы масса газа, заключенного в сосуде, максимальна и минимальна.

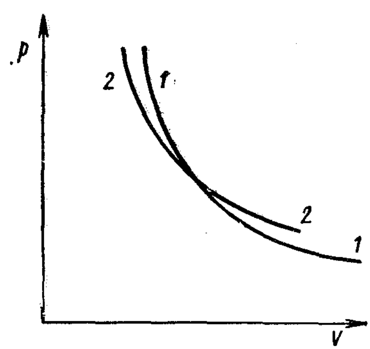
### РЕШЕНИЕ

Из уравнения состояния идеального газа $pV/T = mR/\mu$ следует, что при $V = \mathrm{const}$ $m \sim p/T$.

Возьмем произвольную точку $A$ на диаграмме. Очевидно, что $p_A/T_A = \operatorname{tg}\alpha$, точнее, так как $\operatorname{tg}\alpha$ — величина безразмерная, то $p_A/T_A \sim \operatorname{tg}\alpha$.




К задаче 99.




К задаче 100.

Следовательно, масса газа максимальна или минимальна в тех состояниях, для которых на диаграмме максимальна или минимальна величина $\operatorname{tg}\alpha$, а значит, и сам угол $\alpha$. Очевидно, что эти состояния изображаются точками $B$ и $C$, в которых линии, проходящие через начало координат, касаются кривой, изображающей процесс.

## ЗАДАЧА 100

На диаграмме с координатами $p$ и $V$ изображены две пересекающиеся кривые. Одна из них — изотерма, другая — адиабата (см. рисунок). Определите, какая из них адиабата.

РЕШЕНИЕ

В любом процессе расширяющийся газ совершает работу. Если процесс адиабатический, работа может производиться исключительно за счет внутренней энергии газа (напомним, что внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетических энергий всех его молекул. Величина внутренней энергии прямо пропорциональна абсолютной температуре). При этом газ, конечно, охлаждается, а уменьшение давления определяется не только увеличением объема, но и падением температуры.

При изотермическом же расширении температура остается постоянной. Газ при этом поглощает тепло от внешнего источника и преобразует это тепло в механическую работу. (Иногда спрашивают: „А если нет внешнего источника тепла? А если внешний источник имеет малую мощность?“ и т. д. Ничего страшного не случится. Процесс не будет изотермическим, только и всего.)

Теперь очевидно, что при адиабатическом расширении давление падает быстрее, чем при изотермическом. Следовательно, кривая *1* — адиабата.

## ЗАДАЧА 101

Вертикальный сосуд закрыт сверху поршнем, способным перемещаться без трения. Давление газа в сосуде отличается от атмосферного. Предоставленный самому себе, поршень будет двигаться с некоторым ускорением. Сохранится ли величина этого ускорения, если на поршень положить какой-то груз?

РЕШЕНИЕ

Если давление газа превышает атмосферное, ускорение свободного поршня

$$a_1 = \frac{mg - \Delta pS}{m} = g - \frac{\Delta pS}{m},$$

где $m$ — масса поршня; $\Delta p$ — разность давлений; $S$ — площадь поршня. При этом $a_1$ может быть направлено как вниз ($a_1 > 0$), так и вверх ($a_1 < 0$). В обоих случаях ускорение $a_2$ нагруженного поршня таково, что $a_2 = g - \Delta pS/(m + M)$, где $M$ — масса груза. Очевидно, что $a_2 \neq a_1$.

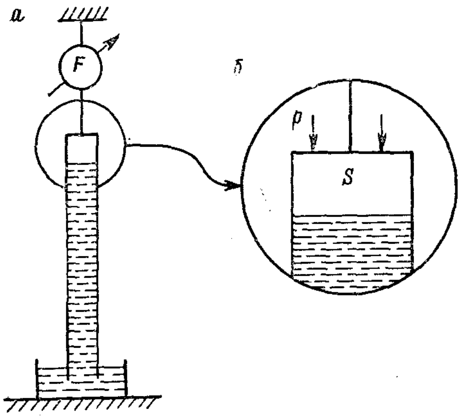
Но если давление газа меньше атмосферного, картина изменится. Теперь ускорение свободного поршня $a_3 = g + \Delta pS/m$ и превышает ускорение свободного падения. При этом груз отстает от поршня и, конечно, не влияет на его ускорение.

## ЗАДАЧА 102

Трубка ртутного барометра подвешена на нити так, что ее нижний открытый конец не касается дна сосуда с ртутью (рис. *а*). Можно ли по показаниям динамометра $F$ судить о величине атмосферного давления?

## РЕШЕНИЕ

Встречается такое рассуждение. Показания динамометра равны весу стеклянной трубки, так как только трубка непосредственно прикреплена к нити. (Поверхностным натяжением и выталкивающей силой, действующей на погруженную часть стеклянной трубки, можно смело пренебречь по сравнению с весом трубки.)



К задаче 102.

Ртуть же, содержащаяся в трубке, „опирается" на ртуть в чашке и тем самым не влияет на показания динамометра. Следовательно, атмосферное давление данным способом определить невозможно.

Приведенные соображения неверны. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим верхний торец трубки (рис. *б*). На основание $S$ сверху вниз действует сила атмосферного давления $p$, которая изнутри ничем не компенсируется, так как над ртутью в трубке вакуум. (Давлением насыщающих паров ртути можно пренебречь по сравнению с давлением атмосферы.) Сила этого давления, кстати, в точности равна весу ртути в трубке, если последняя имеет цилиндрическую форму.

Таким образом, показания динамометра являются суммой веса трубки и силы атмосферного давления. Следовательно, его шкалу можно градуировать непосредственно в единицах атмосферного давления.

## ЗАДАЧА 103

Вес совершенно пустого сосуда меньше, чем вес того же сосуда с газом. Этот очевидный факт связан с тем, что газ имеет относительно малый, но отличный от нуля вес.

Какие ошибки вкрались в следующие утверждения:

1. Давление газа в сосуде всюду одинаково. Если для простоты взять сосуд кубической формы, то сила давления газа изнутри на его нижнюю грань полностью уравновешивается силой давления газа на верхнюю грань. То же справедливо и для других пар противолежащих граней. Следовательно, сумма сил давления газа на сосуд равна нулю, и о присутствии газа в сосуде можно догадаться лишь по деформации стенок, но не по изменению веса сосуда. Как же весы „узнают" о том, что в сосуде находится газ?

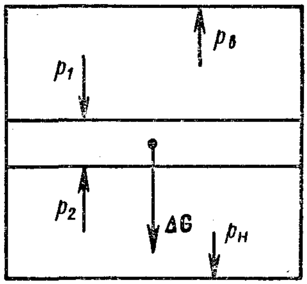
2. Рассмотрим эту же ситуацию с молекулярно-кинетической точки зрения. Давление газа мы объясняем как результат огромного

числа столкновений беспорядочно движущихся молекул газа со стенками сосуда. Средняя сила взаимодействия молекулы со стенкой при соударении зависит от массы и скорости молекулы и длительности столкновения. Поскольку все три параметра одинаковы для любой части сосуда, то и силы давления на любую грань по величине одинаковы, что опять приводит к предыдущим выводам.

РЕШЕНИЕ

1. Если в задачах на газовые законы давление считается одинаковым во всем объеме сосуда, то это лишь хорошее приближение к действительности для таких задач, но не абсолютно строгий факт.

Рассмотрим некий произвольный горизонтальный слой газа в сосуде (см. рисунок) *. На слой действует сила давления сверху ($F_1 = p_1S$), сила давления снизу ($F_2 = p_2S$) и вес слоя $\Delta G$. Так как слой неподвижен, должно быть: $F_1 + \Delta G = F_2$, откуда $p_2 > p_1$. Суммируя по всем горизонтальным слоям, получаем окончательно, что $(p_н - p_в)\, S = G$, где $S$ — площадь сосуда; $G$ — вес газа в сосуде.



К задаче 103.

Иначе говоря, разность сил давлений на нижнее и верхнее основания в точности равна весу газа в сосуде.

2. Ошибка рассуждений состоит в том, что молекула, движущаяся вверх после столкновения с нижней гранью, замедляет свое движение под действием земного притяжения. Ее удар о верхнюю грань менее энергичен, чем удар о нижнюю. Количественные же соотношения легко проиллюстрировать следующим примером.

Пусть некий шарик, падающий вертикально вниз, сталкивается с массивной горизонтальной плитой, причем столкновение является абсолютно упругим. Тогда скорость шарика после удара сохраняет величину, но изменяет направление на противоположное (см. примечание к задаче 33). В дальнейшем шарик будет подпрыгивать на плите. Вычислим среднюю силу давления $F_{ср}$ шарика на плиту. Воспользуемся для этого вторым законом Ньютона: $\Delta (m\mathbf{v}) = \mathbf{F}\Delta t$, где $\Delta (m\mathbf{v})$ — изменение количества движения шарика под действием силы $\mathbf{F}$ за время $\Delta t$.

Обычно под $F$ понимают среднюю силу удара, а под $\Delta t$ — время процесса соударения. Если же под $\Delta t$ понимать промежуток вре-

* Давления $p_1$, $p_2$ и т. д. на рисунке обозначены стрелками, хотя эти величины, как мы знаем (см. примечание II к задаче 1), являются скалярами. Принято в простых случаях (когда это не приводит к ошибкам) для краткости и наглядности „путать“ силу с ее проекцией, скаляр с вектором и т. д. Разумеется, при этом нужно знать, где формальная строгость принесена в жертву очевидной простоте.

мени между двумя последовательными ударами, то $F$ будет иметь смысл средней силы взаимодействия шарика с плитой за это время. Если скорость падения шарика на плиту равна $v$, то время одного скачка $\Delta t = 2v/g$ и $\Delta (mv) = mv - (-mv) = 2mv$. Подставляя эти значения в исходное соотношение, находим, что $F_{\text{ср}} = mg$. Средняя сила ударов равна весу шарика!

Распространив это рассуждение на все молекулы (при этом придется учесть, что большинство молекул достигает верхней грани с некоторой скоростью, и там тоже происходят соударения), окончательно найдем, что средняя сила взаимодействия всех молекул с сосудом равна общему весу этих молекул.

Из наших рассуждений следует, что вес газа в сосуде (так же как для твердого тела и жидкости) равен произведению массы всех молекул газа на ускорение силы тяжести.

## ЗАДАЧА 104

В научно-популярной литературе иногда встречается такое утверждение: „Вес земной атмосферы равен $5{,}15 \cdot 10^{18}$ кг.“ Какая грубая ошибка вкралась в это утверждение, и как надлежит ее исправить?

### РЕШЕНИЕ

> Понятие „вес“ имеет в физике различное содержание. Весом $G$ тела применительно к условиям Земли называют: а) силу его притяжения к Земле, рассчитанную по закону всемирного тяготения; или б) силу, с которой тело действует на горизонтальную опору или вертикальную нить, удерживающую тело неподвижным относительно заданной системы координат. В последнем случае подразумевается, что единственной силой, стремящейся вывести тело из состояния относительной неподвижности, является сила его гравитационного взаимодействия с Землей.

Различие содержаний не существенно для нашей задачи. Главное в том, что по любому определению вес — это сила. Силы же складываются как векторы. И если, пользуясь, например, вторым определением, просуммировать все силы веса *, действующие со стороны атмосферы на отдельные части сферически почти симметричной поверхности Земли, то сумма окажется равной (или почти равной) нулю. Для получения же указанного в условиях задачи результата было произведено сложение не сил, а модулей сил, что физически бессмысленно.

---

* Словосочетание „силы веса“ при всей его стилистической неудачности сознательно использовано авторами для исключения из суммирования сил негравитационного происхождения: воздействие ветра и т. д.

Исправить ошибку более чем просто: достаточно вес заменить пропорциональной ему массой. Масса — скаляр, и здесь сложение выполняется алгебраически. Итак, следует говорить: „Масса атмосферы Земли равна $5{,}15 \cdot 10^{18}$ кг.“.

Распространению этой ошибки способствуют в какой-то мере одинаковые названия единиц массы и веса (килограмм, грамм).

Читатель, ознакомившись с решением данной задачи, сам разберется в эффектных, но малосодержательных заявлениях типа „Давление атмосферы на поверхность человеческого тела (воды на водолаза и т. д.) равно 50 т (200 т и т. д.)“.

## ЗАДАЧА 105

Известно, что радиус Земли равен 6400 км. Не могли бы вы найти массу земной атмосферы?

### РЕШЕНИЕ

На малую площадку $\Delta S$ поверхности Земли опирается вертикальный столб атмосферы, вес которого $\Delta G = p\Delta S$, где $p$ — давление атмосферы на поверхности Земли, равное, как известно, 1 атм.

Учитывая, что подавляющая часть массы атмосферы сосредоточена в тонком (сравнительно с радиусом Земли) приземном слое, можно без существенной ошибки пренебречь зависимостью ускорения свободного падения $g$ от высоты. Отсюда следует, что $\Delta G = g\Delta m$, где $\Delta m$ — масса столба атмосферы, опирающегося на площадку $\Delta S$.

Суммируя по всей поверхности Земли, получаем для искомой массы земной атмосферы

$$M = \sum \Delta m = \sum p\Delta S/g = (p/g) \sum \Delta S = (p/g)\, 4\pi R_З^2 = 5 \cdot 10^{18} \text{ кг},$$

где $R_З$ — радиус Земли.

## ЗАДАЧА 106

Начертить графики, показывающие, как меняется напряженность и потенциал электростатического поля в зависимости от расстояния в следующих случаях:

а) поле двух бесконечных плоскостей, заряженных противоположно с одинаковой поверхностной плотностью; по оси абсцисс откладывать расстояние $x$ от какой-нибудь точки вне плоскостей, отсчитываемое в направлении, перпендикулярном плоскостям;

б) поле сферического конденсатора с радиусами обкладок $R_1$ и $R_2$ (внутренняя сфера заряжена положительно, заряды сфер по величине совпадают); по оси абсцисс — расстояние $x$ от центра сфер;

в) поле плоского слоя диэлектрика, заряженного с постоянной объемной плотностью; ось абсцисс направлена, как в условии а);

г) поле шара из диэлектрика, заряженного с постоянной объемной плотностью; ось абсцисс направлена, как в условии б).

Потенциалы точек, служащих началом отсчета расстояния, во всех случаях принять равными нулю.

### РЕШЕНИЕ

При построении графиков необходимо помнить определения напряженности и потенциала. Напряженность поля есть величина, равная отношению силы действия поля на заряд к величине этого заряда. Потенциал поля в данной точке есть величина, равная взятому с обратным знаком отношению работы поля по перемещению заряда в данную точку из той точки, где потенциал принят равным нулю, к величине этого заряда (сравни с определениями из задач 51 и 56).

Часто определяют напряженность как „силу, *численно* равную“ и т. д. Нам кажется, что слово „численно“ вводит в заблуждение. (Банальный пример: 100 рублей *численно* равны 100 копейкам, а 5 метров — 5 килограммам.) Когда говорят: „Напряженность *численно* равна“ некой силе, всегда хочется спросить: „А чему же она просто *равна*?“

Из опыта известно, что напряженность поля — вектор (см. задачу 1). Это проявляется в том, что если имеется система из любого числа зарядов, то напряженность в любой точке равна геометрической сумме напряженностей, создаваемых в этой точке порознь каждым зарядом. (Это утверждение называется принципом суперпозиции.) Как следствие — потенциал оказывается равным алгебраической сумме потенциалов от отдельных зарядов.

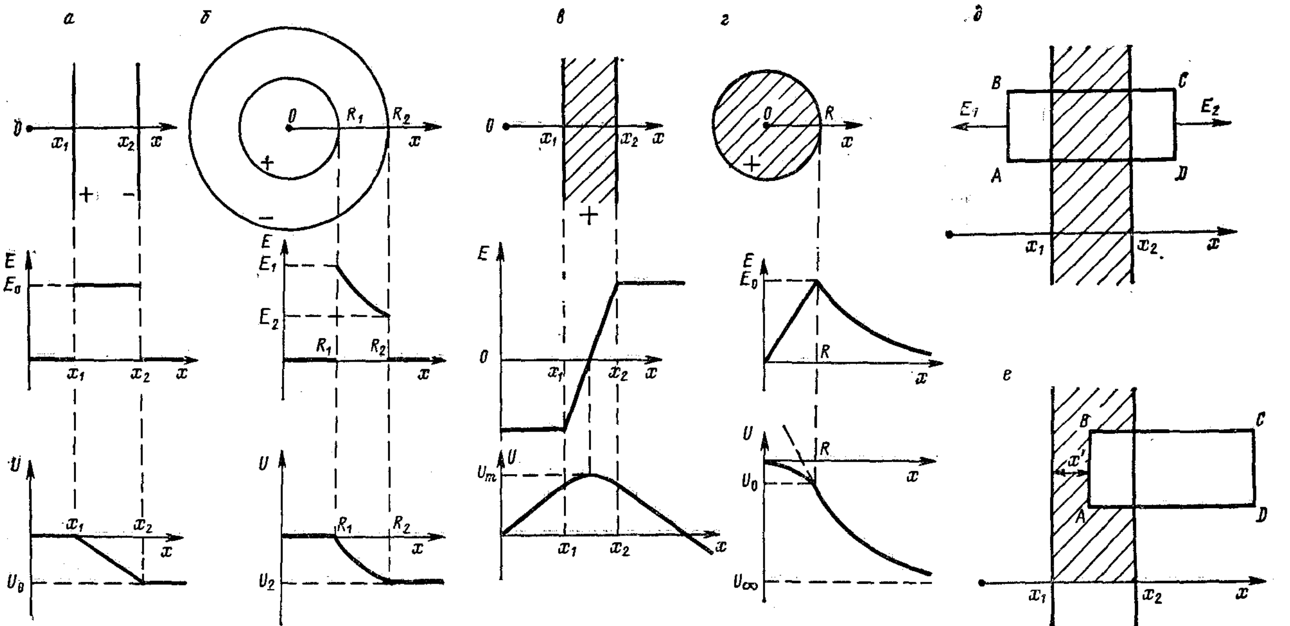
а) Известно, что поле вне плоскостей отсутствует, а в пространстве между ними — однородно. Следовательно, потенциал поля вне плоскостей постоянен (работа перемещения заряда равна нулю), а в пространстве между плоскостями потенциал изменяется пропорционально расстоянию $x$ (рис. *а*).

Следует обратить внимание на то, что если потенциал области, лежащей слева от плоскостей, положить равным нулю, потенциал области справа отличен от нуля, хотя поле в этой части пространства отсутствует. Если мы имеем дело не с плоскостями, а с плоскими участками конечных размеров (пластинами), то по мере удаления от пластин, как вправо, так и влево, потенциалы стремятся к одинаковому значению (см. также задачу 121).

б) Напомним, что поле заряда, равномерно распределенного по сфере, внутри сферы отсутствует, а вне сферы таково, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре сферы (ср. задачу 53). Следовательно, внутри малой сферы поля нет. Вне сфер поле также отсутствует, так как заряды сфер одинаковы по абсолютной величине и разных знаков. В пространстве между сферами поле создается только зарядом малой сферы, поэтому напряженность и потенциал этого поля изменяются обратно пропорционально $x^2$ и $x$ соответственно (см. рис. *б*).

в) Вне слоя поля однородны, а значит, потенциал изменяется линейно с $x$ (рис. *в*). Из соображений симметрии непосредственно следует, что внутри слоя напряженность изменяется с расстоянием $x$ по линейному закону и равна нулю в середине слоя. Так как сила, действующая на заряд, меняется линейно,то внутри слоя потенциал изменяется по квадратичному закону (сравните с выводом формулы для длины пути равномерно ускоренного движения: скорость линейно зависит от времени, длина пути — квадратично; см. также задачи 57 и 98).

г) Поле вне шара таково, как если бы весь его заряд был сосредоточен в центре, т. е. $E \sim 1/x^2$, $\Delta U \sim 1/x$, $x \geqslant R$, где $\Delta U$ — разность потенциалов между поверхностью шара и точкой $x$. Внутри шара напряженность линейно убывает, обращаясь в нуль в центре шара (так как математическая формулировка закона Кулона совпадает с формулировкой закона тяготения, рассуждения задачи 53 автоматически переносятся на обсуждаемый случай). Потенциал поля внутри шара пропорционален $(-x^2)$ (рис. *г*). При построении графика было принято, что шар заряжен положительно.




К задаче 106.

Решение задачи может быть легко выполнено с помощью закона Гаусса (см. задачу 51). Разберем лишь случай *в*.

Из соображений симметрии следует, что и напряженность и потенциал поля меняются лишь в направлении $x$ и постоянны на любой плоскости, параллельной поверхностям слоя.

Для вычисления поля вне слоя построим прямой цилиндр $АВСД$, основания которого $АВ$ и $СД$ параллельны поверхностям слоя (см. рис. *д*). Если $\Delta S$ — площадь основания, то поток напряженности через поверхность цилиндра равен величине $\Delta S\ (E_1 + E_2)$, где $E_1$ и $E_2$ — значения напряженности у оснований $АВ$ и $СД$. Заряд, находящийся внутри цилиндра, равен $\rho \Delta S\ (x_2 - x_1)$, где $\rho$ — объемная плотность заряда. По закону Гаусса $\Delta S\ (E_1 + E_2) = 4\pi \rho \Delta S\ (x_2 - x_1)$. Величина, стоящая в правой части равенства, не зависит от длины цилиндра. Следовательно, поле вне слоя однородно, $E_1 = E_2 = E$, причем его напряженность

$$E = 2\pi\rho\,(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

Для вычисления поля внутри слоя построим цилиндр, одно из оснований которого находится внутри слоя (рис. *е*, размеры указаны). Если площади оснований равны $\Delta S$, то по закону Гаусса $\Delta S\ (E + E') = 4\pi \rho \Delta S\ (x_2 - x_1 - x')$, где $E'$ — значение напряженности у основания АВ. Подставляя вместо $E$ ее значение из (1), найдем, что $E' = 2\pi \rho\ (x_2 - x_1) - 4\pi \rho x' = E - 4\pi \rho x'$, где $0 \leqslant x' \leqslant x_2 - x_1$. Как видите, мы получили прежний результат.

## ЗАДАЧА 107

Доказать справедливость следующих утверждений:

а) если силовые линии (см. задачу 51) некоторого электростатического поля в какой-то области являются параллельными прямыми, то густота их расположения постоянна, т. е. в этой области поле однородно;

б) если силовые линии представляют собой дуги концентрических окружностей, то их густота обратно пропорциональна радиусу окружности.

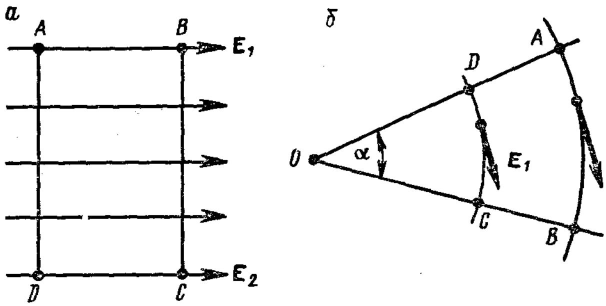
Указание. Предполагается, что в рассматриваемой области отсутствуют заряды. При этом силовые линии в этой области непрерывны, а, следовательно, их густота в направлении вдоль линий не изменяется, т. е. напряженность поля вдоль любой такой линии постоянна.

### РЕШЕНИЕ

а) Будем исходить из того, что электростатическое поле потенциально, т. е. работа сил электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому пути равна нулю.

Перенесем заряд $q$ по пути $АВСДА$ (рис. *а*). Работа на этом пути $A = (lE_1 - lE_2)\,q$, где $l$ — длина участков $AB$ и $CD$; на участках $BC$ и $AD$ работа не совершается, так как здесь перемещение перпендикулярно действующей силе. Так как $A = 0$, то $E_1 = E_2$, что и требовалось доказать.

б) Выберем замкнутый путь $ABCDA$, состоящий из двух дуг $AB$ и $CD$ и отрезков радиусов между этими дугами $BC$ и $AD$




К задаче 107.

(рис. *б*). Работа перемещения заряда $q$ вдоль этого пути $A = (-\alpha r_1 E_1 + \alpha r_2 E_2)\,q$, где $\alpha$ — угол между $OA$ и $OB$, $r_1 = OD$, $r_2 = OA$. Как и в предыдущем случае, на участках $DA$ и $BC$ работа силами поля не совершалась. Отсюда $E_1/E_2 = r_2/r_1$.

## ЗАДАЧА 108

Полный электрический заряд системы, состоящей из нескольких проводников конечных размеров, положителен. Доказать, что найдется хотя бы один проводник, поверхностная плотность заряда на котором всюду неотрицательна. Размеры системы ограничены.

### РЕШЕНИЕ

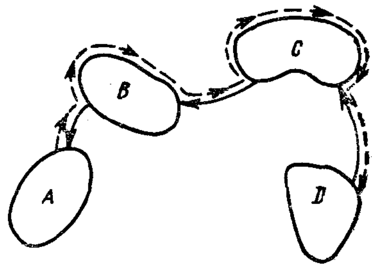
1-й способ. Представим себе электростатическое поле заряженных проводников в виде некоторой картины силовых линий. Так как поле внутри каждого проводника отсутствует, то силовые линии начинаются и кончаются на поверхности проводников в тех местах, которые заряжены.

Возьмем любой из проводников, например $A$, и найдем на его поверхности место, в котором находится конец какой-нибудь силовой линии (см. рисунок) (если такого места мы не обнаружим, то значит проводник везде заряжен неотрицательно, ибо силовые линии кончаются на отрицательных зарядах). Это и будет искомое. Будем переносить положительный пробный заряд из этого места вдоль силовой линии противоположно ее направлению. Следуя по этому пути, мы придем на поверхность какого-то другого проводника $B$. Пройдем по его поверхности, найдем на ней конец другой силовой линии и вновь пойдем ей навстречу. Будем продолжать этот перенос, следуя через проводники $C$, $D$ и т. д.

Справедливы следующие утверждения.

1. Такое движение не уведет нас в бесконечность, так как полный заряд системы положителен и, следовательно, силовые линии не приходят из бесконечности. Действительно, во всех достаточно удаленных точках поле нашей системы с ее ограниченными линейными размерами является просто полем точечного положительного заряда, силовые линии этого поля в таких точках направлены от системы и уходят на бесконечность.

2. В этом „путешествии" мы не можем побывать снова ни на одном из проводников, которые уже были пройдены: это означало бы, что какая-то часть нашего пути является замкнутой линией, и противоречило бы утверждению о потенциальном характере электростатического поля.



К задаче 108.

Следовательно, поскольку число проводников системы конечно, наше передвижение рано или поздно закончится, т. е. мы найдем проводник, в который силовые линии не входят. Поверхность такого проводника повсюду заряжена неотрицательно.

2-й способ. Рассмотрим потенциалы проводников. Могут иметь место два случая: а) проводники эквипотенциальны; б) потенциалы проводников различны.

В случае а) ни один из проводников не соединяется с другим силовой линией. Плотность электрических зарядов в любом месте на поверхности любого проводника неотрицательна.

В случае б) найдется один или несколько проводников с наибольшим потенциалом. Именно эти проводники и являются искомыми. (Доказательство предоставляем читателю.)

## ЗАДАЧА 109

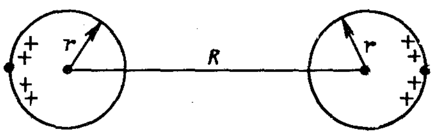
Точечный заряд определяют как заряженное тело, размеры и форма которого не влияют на его электростатическое взаимодействие с другими заряженными телами в рамках заданной точности. Поясним эту формулировку. Вычислим силу, действующую на исследуемый заряд со стороны окружающих зарядов двумя способами: а) полагая заряд на теле сосредоточенным в одной (любой) точке этого тела или б) находя истинное распределение заряда по телу и учитывая это в расчете. Пусть соответствующие значения сил равны $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Тогда, если отношение $|(F_1 - F_2)/F_2|$ меньше заданной относительной погрешности вычислений при любом выборе точки сосредоточения заряда внутри тела и то же справедливо для угла между векторами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, наше заряженное тело есть точечный заряд.

В качестве иллюстрации к данному определению требуется оценить относительную погрешность вычисления силы взаимодействия двух заряженных шариков с одинаковыми радиусами, возникающую при замене шариков точечными зарядами.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим два проводящих шарика радиусом $r$ каждый, центры которых расположены на расстоянии $R$ друг от друга, а заряды одинаковы по величине и положительны (см. рисунок). В результате электростатической индукции эти заряды переместятся к внешней стороне каждого шарика.

Не будь такого перераспределения зарядов, два однородно заряженных шарика взаимодействовали бы так же, как если бы заряд каждого из них был сосредоточен в его центре (что имеет место при гравитационном взаимодействии двух шаров независимо от их радиусов и расстояния между ними). Без учета индукции сила кулоновского взаимодействия шариков определяется выражением $F_1 = q^2/R^2$. Истинная сила взаимодействия $F$ отличается от величины $F_1$. Очевидно, нижнюю границу $F_2$ для силы $F$ можно найти, положив, что заряды шариков сосредоточены в наиболее удаленных друг от друга точках, т. е. $F_2 = q^2/(R + 2r)^2$.




К задаче 109.

Максимально возможную относительную погрешность находим из соотношения

$$\frac{F_1-F_2}{F_2}=\frac{1/R^2-1/(R+2r)^2}{1/(R+2r)^2}.$$

Пусть $r \ll R$. Тогда (см. примечание) $(F_1 - F_2)/F_2 \approx 4r/R$

Итак, если требуемая точность расчета составляет 1%, то точечными можно считать лишь заряды, сосредоточенные на телах, линейные размеры которых составляют 0,5% от расстояния между телами.

Заметим, что величина погрешности определена нами с запасом, так как очевидно, что заряды шариков не могут быть сосредоточены в самых удаленных друг от друга точках.

Примечание. В ряде задач данного сборника использованы некоторые простейшие формулы приближенных вычислений, известные, к сожалению, не всем школьникам. Эти формулы базируются на следующем общем утверждении (доказательство его справедливости выходит за рамки наших возможностей): для любых вещественных $m$ и таких вещественных $x$, что $|x| < 1$, справедливо равенство

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$

В случае, когда $|x| \ll 1$, а $m$ порядка единицы (наиболее часто встречающаяся в физических задачах ситуация), в бесконечной сумме можно ограничиться первыми двумя слагаемыми, т. е. пренебречь членами, содержащими $x^2$, $x^3$ и т. д. (Если $|x| \ll 1$, тем более $x^2 \ll 1$ и т. д.) Тогда получаем приближенное, но очень простое соотношение $(1+x)^m \approx 1+mx$, выполняющееся тем точнее, чем строже выполняется неравенство $|x| \ll 1$.

Последняя формула, в частности, дает

$$(1+x)^2 \approx 1+2x,$$
$$1/(1+x) = (1+x)^{-1} \approx 1-x,$$
$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1+x/2 \text{ и т. д.}$$

Если в тексте задачи или в процессе решения встречаются две одноименные величины $a$ и $A$ такие, что $|a| \ll A$ (или $|a/A| \ll 1$), приведенные формулы могут существенно упростить вычисления. Вносимая при этом в результат относительная погрешность приблизительно равна $a^2/A^2$.

Например:

$$\frac{A+a}{A-a} = \frac{1+a/A}{1-a/A} \approx (1+a/A)(1+a/A) =$$
$$= (1+a/A)^2 \approx 1+2a/A.$$

Для наглядности: если $A = 100$, $a = 1$, значение дроби $(A+a)/(A-a)$, вычисленное приближенным способом, составит 1,02, точное же значение равно 1,020202...

Иногда говорят: „Но если $|x| \ll 1$, не следует ли пренебречь и самим $x$ сравнительно с 1?“ Что же, не исключено и такое. Но при этом $x$ может исчезнуть в конечном результате, что, разумеется, недопустимо, если требуется найти как раз влияние величины $x$ на этот результат. (К примеру, правые части всех приведенных выше формул обратятся в 1, и станет неизвестно, как значение $x$ влияет на величину выражений вида $1/(1+x)$ или $(1+x)^{1/2}$).

В данной задаче результат был получен после следующих преобразований:

$$\frac{1/R^2 - 1/(R+2r)^2}{1/(R+2r)^2} = \left(\frac{R+2r}{R}\right)^2 - 1 =$$
$$= \left(1+\frac{2r}{R}\right)^2 - 1 \approx 1+\frac{4r}{R} - 1 = \frac{4r}{R}.$$

## ЗАДАЧА 110

Стеклянную палочку натирают шелком и проносят вблизи от мелких обрезков бумаги, фольги и т. д., которые притягиваются к палочке (известный демонстрационный опыт). Тем самым доказывается, что подвергнутая трению о шелк стеклянная палочка приобрела новое качество: по принятой терминологии наэлектризовалась.

Возникает вопрос, не противоречит ли этот опыт закону Кулона? Ведь обрезки не заряжены — это следует из того, что друг с другом они не взаимодействуют. А если заряд тела равен нулю, то по закону Кулона сила взаимодействия этого тела с любым другим — в том числе и с заряженной стеклянной палочкой — равна нулю.

### РЕШЕНИЕ

Противоречия нет. Закон Кулона справедлив исключительно для точечных зарядов. Нейтральное же тело любых размеров, находясь в неоднородном электростатическом поле, принципиально не является точечным зарядом с величиной заряда, равной нулю. В силу явления электростатической индукции под действием внешнего поля от источника $A$, для определенности положительного, на нейтральном теле $B$ произойдет перераспределение зарядов. Тело станет аналогом диполя. Положительный и отрицательный заряды на нем одинаковы, но последние ближе к телу $A$, сила их притяжения к $A$ превосходит силу отталкивания положительных зарядов (поле зарядов тела $A$ — неоднородно!). В целом тело $B$ притягивается к телу $A$.

Перераспределение зарядов, их пространственное разобщение на теле $B$ стали возможны исключительно потому, что тело $B$ имеет конечные размеры. Следовательно, в данном случае размеры тела $B$ существенно влияют на его взаимодействие с телом $A$. А коль скоро так (см. задачу 109), тело $B$ не есть точечный заряд, и закон Кулона к нему непосредственно не применим.

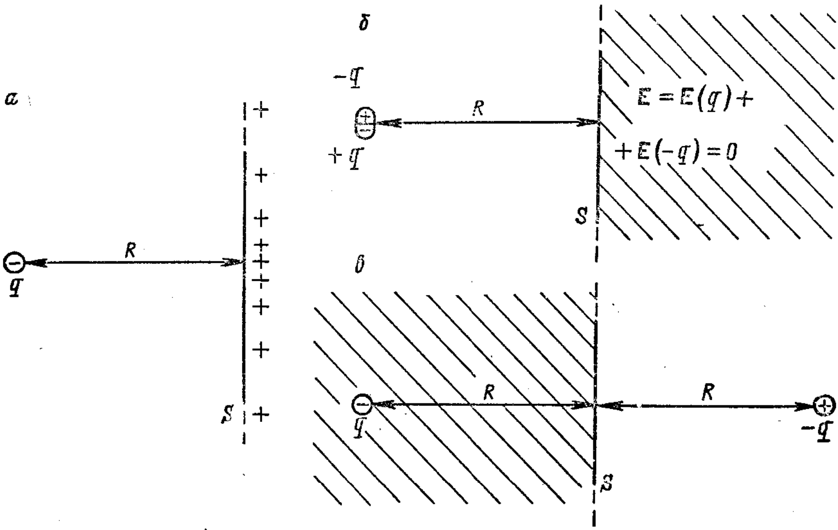
> Данный случай является убедительным примером неудовлетворительности следующего широко распространенного определения: „Точечным зарядом называется заряженное тело, размеры которого пренебрежимо малы сравнительно с расстояниями до других заряженных тел“.
>
> В рассмотренном случае размеры тела $B$ могут быть в тысячу или миллион раз меньше его расстояния до тела $A$. Размеры тела $B$ можно довести до размера одной молекулы. И все-таки точечным зарядом оно не станет.

## ЗАДАЧА 111

На расстоянии $R$ от бесконечно протяженной металлической плоскости $S$ находится точечный заряд $q$ (для определенности $q < 0$) (см. рис. $a$). Найти силу, действующую на него со стороны плоскости.

### РЕШЕНИЕ

Проведем вспомогательное рассуждение. Пусть все пространство справа от плоскости заполнено проводящим материалом. В электростатике принимают, что внутри проводника токи отсутствуют (так как ток есть движение заряда, а статика — учение о неподвижном состоянии). Нет тока — нет и электростатического поля. Заряды могут быть сосредоточены только на поверхности проводника. Это значит, что из сплошного проводящего материала




К задаче 111.

правого полупространства можно изымать кусок за куском и оставить только ограничивающую полупространство плоскость $S$, не меняя поля ни в одной из точек пространства. Полученная в результате ситуация совпадает со сформулированной в нашей исходной задаче. Поэтому справа от плоскости $S$ поля нет. При этом говорят, что проводящая плоскость является электростатическим экраном.

Очевидно, что в результате действия заряда $q$ на плоскости появится индуцированный распределенный положительный заряд, причем его плотность тем больше, чем ближе соответствующий участок плоскости к заряду $q$. Отрицательные заряды плоскости ушли на бесконечность.

Поле в любой точке пространства есть сумма поля заряда $q$ и поля распределенного на плоскости заряда. Справа от плоскости поле равно нулю (рис. *б*). А это значит, что суммарное поле всех наведенных на плоскости $S$ зарядов можно заменить для правого полупространства полем одного точечного заряда $-q$, помещенного в то же место, что и исходный заряд $q$.

Очевидно, что поле наведенных зарядов симметрично относительно плоскости. Следовательно, поле наведенных зарядов в левом полупространстве эквивалентно полю одного точечного заряда $-q$, расположенного справа от $S$ и симметричного заряду $q$ относительно $S$ (рис. *в*).

Исходный заряд находится слева от $S$. По доказанному, действие на него наведенных на плоскости зарядов равно действию эквивалентного точечного заряда. Следовательно, наш заряд притягивается к плоскости с силой $F = q^2/(2R)^2 = q^2/4R^2$.

Рассмотренный метод решения называют методом зеркального отображения.

## ЗАДАЧА 112

Металлические шарики радиусом $R$ и $r$ ($R \gg r$) заряжены одноименными зарядами $Q$ и $q$ соответственно ($Q \gg q$). Оценить, на каком расстоянии шарики будут притягиваться друг к другу.

### РЕШЕНИЕ

Необходимо прежде всего разобраться, почему в принципе между одноименно заряженными телами возможно взаимное притяжение (гравитационное взаимодействие в этой задаче мы не учитываем).

а) В задаче 110 уже объяснялась причина взаимного притяжения заряженного тела $A$ и незаряженного тела $B$. Пусть сила этого притяжения равна $F_1$. Всегда можно подобрать малый заряд $q$, одноименный с зарядом тела $A$ так, что сила $F_2$ отталкивания $q$ от заряда $A$ при расстоянии между ними, равном $AB$, удовлетворяет соотношению $|F_1| \gg |F_2|$. Поместив заряд $q$ на тело $B$, мы получим два одноименно заряженных тела $A$ и $B$, сила взаимодействия между которыми приблизительно равна $F_1 - F_2$ и является, следовательно, силой притяжения (условие $|F_1| \gg |F_2|$ наложено для того, чтобы получить малое значение $q$ и иметь право пренебречь перераспределением заряда $Q$ на теле $A$ после помещения на тело $B$ заряда $q$).

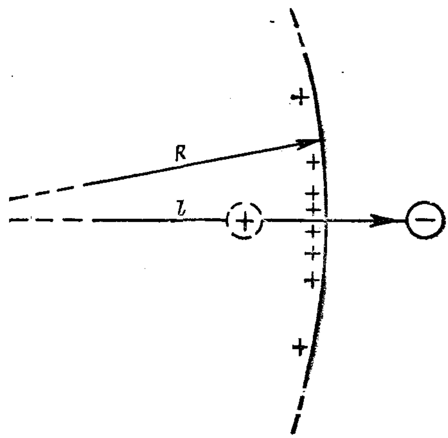
б) В условиях настоящей задачи ($R \gg r$) притяжение тел $A$ и $B$ может иметь и другую причину. Если расстояние $l$ между центрами шаров таково, что $R \gg l - R$ (см. рисунок), то ситуация очень похожа на рассмотренную в задаче 111. Взаимодействие заряда $q$ (на шарике $r$) с шаром $R$ вызовет появление на последнем индуцированных зарядов. Так как $R \gg l - R$ и $R \gg r$, то расположенную против шарика $r$ часть поверхности шара $R$

можно приблизительно считать плоской и использовать результаты задачи 111. В силу тех же неравенств заряд $Q$ можно считать сосредоточенным в центре шара $R$ (не следует забывать, что нашей целью является оценка, но не строгий расчет). Имеем $Qq/l^2 < q^2/4(l-R)^2$. Решая это неравенство с учетом соотношений $Q \gg q$; $R \approx l \gg l - R$, находим, что (см. примечание к задаче 109)

$$1-\sqrt{q/Q}/2 < R/l < 1+\sqrt{q/Q}/2,$$

а так как $R/l > 0$, то

$$1+\sqrt{q/Q}/2 > l/R > 1-\sqrt{q/Q}/2.$$




К задаче 112.

Из геометрических соображений следует, что должно также выполняться неравенство $l < R + r$. Последние два соотношения совместимы, лишь когда $r/R > (q/Q)^{1/2}/2$. В противном случае выполненная нами оценка несправедлива, что, однако, не исключает возможности взаимного притяжения шаров $R$ и $r$ уже за счет причин, рассмотренных в пункте а).

## ЗАДАЧА 113

Потенциал электростатического поля определяется, как известно, с точностью до некоторой произвольной постоянной. Чтобы убрать эту неопределенность, общепринято потенциал бесконечно удаленной точки считать равным нулю. Однако в ряде задач используется равенство нулю потенциала Земли.

Не слишком ли много условий накладывается на потенциал? Ведь в формулах для его определения произвольная постоянная только одна.

### РЕШЕНИЕ

Размер и, следовательно, емкость Земли столь велики сравнительно с аналогичными лабораторными величинами, что передача Земле какого-то электрического заряда в результате любого опыта не меняет ее потенциала, который так и остается равным нулю.

Если электростатический опыт проводится в некоторой ленинградской лаборатории, то никакие события в этой лаборатории не могут привести к появлению заметной (в пределах достигнутой сегодня точности измерений) напряженности и потенциала поля зарядов этого опыта на большом удалении, например в Буэнос-Айресе. Следовательно, этот город, с точки зрения ленинградца, находится на бесконечном (в электростатическом смысле) удалении, а потенциал там по соглашению должен быть принят равным нулю. Земля — проводник, и если потенциал какой-то ее точки равен нулю, потенциал любой другой — также равен нулю. Отсюда и следует, что потенциал Земли в Ленинграде равен нулю и одновременно равен нулю потенциал бесконечности.

Итак, сформулированные в задаче ограничения на потенциал равносильны друг другу.

Разумеется, при переходе от лабораторных опытов к исследованиям планетарных или космических масштабов эта равносильность может нарушиться, и тогда придется пользоваться только одним из ограничений.

## ЗАДАЧА 114

Доказать, что электрический заряд не может находиться в устойчивом равновесии под действием только электростатических сил.

### РЕШЕНИЕ

Пусть имеется некоторое поле $\mathbf{E}(x, y, z)$, в одной из точек которого, например $O$, положительный заряд находится в состоянии устойчивого равновесия. Это значит, что при малом отклонении заряда от точки $O$ в любую сторону возникает сила, стремящаяся вернуть его обратно. Отсюда следует, что в точке $O$ сходятся все силовые линии, находящиеся в ближайшей к этой точке окрестности. Но такое возможно, лишь если в $O$ расположен отрицательный заряд (ср. задачу 51). Следовательно, положительный заряд там разместить невозможно, что опровергает исходное предположение и доказывает теорему, содержащуюся в тексте задачи (теорема Ирншоу).

Из доказанной теоремы следует вывод фундаментальной важности. Как известно, любой атом содержит положительно (протоны) и отрицательно (электроны) заряженные частицы. С точки зрения электростатики такая система не может быть устойчива! А так как громадное большинство атомов устойчиво, приходится с неизбежностью считать атом системой динамической, т. е. приписать либо протонам, либо электронам непрерывное движение.

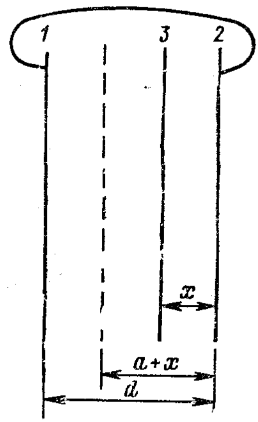
## ЗАДАЧА 115

Между незаряженными пластинами *1* и *2* накоротко замкнутого плоского конденсатора находится тонкая металлическая пластина *3* с зарядом $q$. Все пластины взаимно параллельны, одного размера и расположены друг против друга. Пластину *3* (см. рисунок) перемещают на расстояние $a$ перпендикулярно плоскостям обкладок. Какой заряд проходит при этом по внешней цепи конденсатора, если расстояние между его обкладками равно $d$?

Указание. Считать, что электростатическое поле пластины мало отличается от поля бесконечно протяженной равномерно заряженной плоскости, напряженность которого определяется выражением $E = 2\pi\sigma$, где $\sigma$ — поверхностная плотность заряда.

## РЕШЕНИЕ

Так как конденсатор замкнут накоротко, то при любом положении пластины *3* пластины *1* и *2* имеют одинаковый потенциал. Потенциал каждой из пластин является суммой трех составляющих: потенциала за счет собственного заряда и потенциалов, создаваемых в данном месте действием зарядов двух остальных пластин. Следовательно, поскольку при перемещении пластины *3* создаваемый ею потенциал на пластинах *1* и *2* меняется, должны меняться заряды на этих пластинах.



К задаче 115.

Так как по условию задачи поля пластин считаются однородными, то потенциал поля любой пластины изменяется линейно вместе с расстоянием до этой пластины. Поэтому в нашем случае не имеет смысла, как это обычно принято (см. задачу 113), полагать равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки: при этом потенциалы точек, расположенных на конечных расстояниях от пластин, окажутся по абсолютной величине бесконечными (см. задачу 106), и никаких расчетов нам произвести не удастся.

Условимся считать, что нулю равен потенциал пластины *1*. Выпишем выражения для потенциалов пластины *2* в двух положениях пластины *3* (на рисунке одно из этих положений изображено сплошной линией, а другое — пунктиром). Обозначим через $\varphi_2'$ и $\varphi_2''$ искомые потенциалы второй пластины при первом и втором положениях пластины *3*, $\sigma_1'$ и $\sigma_2'$ — плотности зарядов на пластинах *1* и *2* в первом, а $\sigma_1''$ и $\sigma_2''$ — во втором положениях. Тогда

$$\varphi_2' = 2\pi[-\sigma_1' d + \sigma_2' d + \sigma(d - x) - \sigma x] = 0,$$
$$\varphi_2'' = 2\pi[-\sigma_1'' d + \sigma_2'' d + \sigma(d - x - a) - \sigma(x + a)] = 0.$$

Поскольку $\sigma_2' = -\sigma_1'$ и $\sigma_2'' = -\sigma_1''$ (так как суммарный заряд пластин *1* и *2* равен нулю), из выражений для потенциалов находим, что $\Delta\sigma = \sigma_1' - \sigma_1'' = \sigma a/d$, где $\Delta\sigma$ — изменение плотности заряда на первой пластине при перемещении пластины *3* из первого положения во второе.

Так как размеры пластин одинаковы, то находящиеся на них заряды пропорциональны величинам плотности зарядов. Следовательно, искомая величина заряда, который прошел по внешней цепи, определяется выражением $\Delta q = qa/d$.

Интересно отметить, что поле вне крайних пластин такое же, как если бы их вообще не было. А если бы крайние пластины были заземлены, то поле вне пластин отсутствовало бы.

### ЗАДАЧА 116

Две тонкие проводящие концентрические сферы, радиусы которых равны $R_1$ и $R_2$ ($R_1 < R_2$), имеют потенциалы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ соответственно. Каковы будут потенциалы сфер, если соединить их проволокой?

#### РЕШЕНИЕ

Определим сначала заряды $q_1$ и $q_2$, которые находились на сферах до того, как их соединили. Для этого учтем следующее:

а) потенциал любой точки пространства есть алгебраическая сумма потенциалов, создаваемых в этой точке всеми зарядами;

б) потенциал вне заряженной сферы совпадает с потенциалом точечного заряда, равного по величине заряду сферы и расположенного в ее центре (см. задачу 106);

в) потенциал самой сферы совпадает с потенциалом любой точки внутри нее и равен величине $q/R$ (если внутри сферы нет зарядов).

Теперь можно записать, что

$$\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} = \varphi_1, \quad \frac{q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2} = \varphi_2,$$

откуда находим, что $q_1 + q_2 = \varphi_2 R_2$.

После соединения сферы имеют одинаковый потенциал $\varphi$, поэтому

$$\frac{q_1'}{R_1} + \frac{q_2'}{R_2} = \frac{q_1'}{R_2} + \frac{q_2'}{R_2} = \varphi, \tag{1}$$

где $q_1'$ и $q_2'$ — заряды на сферах после их соединения. Равенства (1) являются совместными только при условии, что $q_1' = 0$. Следовательно,

$$\varphi = \frac{q_1' + q_2'}{R_2} = \frac{q_1 + q_2}{R_2} = \varphi_2.$$

### ЗАДАЧА 117

Два металлических шара с радиусами $R_1$ и $R_2$ находятся на очень большом расстоянии друг от друга. Определить а) их взаимную емкость $C_1$; б) емкость $C_2$ системы, состоящей из этих шаров, соединенных тонкой проволочкой.

РЕШЕНИЕ

Для решения этой задачи необходимо четко представлять себе, что такое емкость.

а) По определению, если речь идет о взаимной емкости двух проводников, надо на один проводник поместить заряд $q$, на другой — заряд $-q$ и вычислить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между проводниками, после чего найти емкость по стандартной формуле $C_1 = q/\Delta\varphi$. В нашем случае $\varphi_1 = q/R_1$, $\varphi_2 = -q/R_2$, $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = q\,(1/R_1 + 1/R_2)$ и $C_1 = q/\Delta\varphi = R_1R_2/(R_1 + R_2)$.

б) Емкость изолированного проводника, состоящего из двух шаров (емкостью тонкой проволочки можно пренебречь), будем вычислять, учитывая, что каждый из шаров заряжен до одного и того же потенциала.

Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\varphi_1 = q_1/R_1$, $\varphi_2 = q_2/R_2$, $q_1 = \varphi R_1$, $q_2 = \varphi R_2$.

Итак, чтобы зарядить наш сложный проводник до потенциала $\varphi$, потребовался заряд $q = q_1 + q_2$. Следовательно, $C_2 = q/\varphi = R_1 + R_2$.

## ЗАДАЧА 118

Незаряженный полый проводящий шар внесли в электрическое поле с известным потенциалом $\varphi\,(x, y, z)$. Определить потенциал шара.

РЕШЕНИЕ

Поверхность шара в любом электростатическом поле является эквипотенциальной поверхностью. Кроме того, внутри полого проводника напряженность поля всегда равна нулю (разумеется, если внутри полости нет зарядов) и потенциал, следовательно, совпадает с потенциалом поверхности. Поэтому для решения задачи достаточно определить потенциал в любой точке на сфере или внутри нее.

Интуиция подсказывает, что самой удобной точкой для этого является центр сферы. Потенциал здесь есть сумма потенциала $\varphi$, создаваемого внешним полем, и потенциалов зарядов, индуцированных этим полем на сфере. Сумма индуцированных зарядов равна нулю, так как шар был незаряжен; все они одинаково удалены от центра сферы. Их суммарный потенциал

$$\varphi_1 = \Delta q_1/R + \Delta q_2/R + \ldots = (1/R)\sum \Delta q_i = 0,$$

где суммирование проводится по всей сфере, а $R$ — ее радиус.

Итак, потенциал сферы равен первоначальному потенциалу той точки поля, где оказался центр сферы.

ЗАДАЧА 119

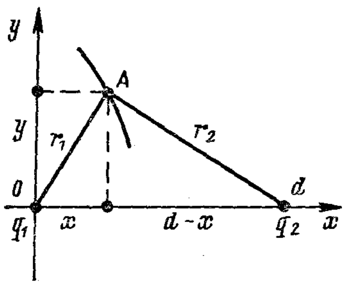
Доказать, что в поле двух разноименных точечных зарядов эквипотенциальная поверхность с нулевым потенциалом представляет собой сферу.

РЕШЕНИЕ

Поместим начало координат в точку, где расположен один из зарядов, и направим ось $Ox$ в сторону другого заряда (см. рисунок). Потенциал $\varphi_A$ в точке $A$ таков, что

$$\varphi_A = q_1/r_1 + q_2/r_2. \qquad (1)$$

Пусть $\varphi_A = 0$ (если точка $A$ не лежит в бесконечности, то это возможно лишь для разноименных зарядов). Учтем, что $r_1 = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $r_2 = [(d - x)^2 + y^2]^{1/2}$, где $d$ — расстояние между зарядами. Тогда из (1) следует, что



К задаче 119.

$$q_1/\sqrt{x^2 + y^2} = -q_2/\sqrt{(d - x)^2 + y^2}. \qquad (2)$$

После возведения равенства (2) в квадрат и простейших преобразований находим, что

$$\left(x - \frac{n^2}{n^2 - 1} d\right)^2 + y^2 = \frac{n^2 d^2}{(n^2 - 1)^2},$$

где $n = q_1/q_2$, $n \neq -1$, $n < 0$.

Полученное выражение представляет собой уравнение окружности (см. задачу 16), центр которой расположен в точке с координатами $x = dn^2/(n^2 - 1)$, $y = 0$.

При $n = -1$, т. е. $q_1 = -q_2$, преобразование соотношения (2) дает уравнение $x = d/2$, т. е. эквипотенциальная окружность вырождается в прямую, параллельную оси ординат.

Так как поле симметрично относительно оси абсцисс, в пространстве поверхность нулевого потенциала оказывается сферой (или плоскостью, если $n = -1$).

ЗАДАЧА 120

Электрон, обладающий на бесконечности скоростью $v$, движется точно в сторону другого неподвижного и свободного электрона. Как будут вести себя электроны? На какое наименьшее расстояние они сблизятся? Излучением электромагнитной энергии пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Электростатическое взаимодействие двух электронов тормозит один из них и ускоряет другой. Так как этот процесс происходит при любом расстоянии между электронами, их поведение напоминает растянутый во времени абсолютно упругий удар: первоначально двигавшийся электрон в пределе остановится, а прежде неподвижный будет удаляться от него со скоростью $v$.

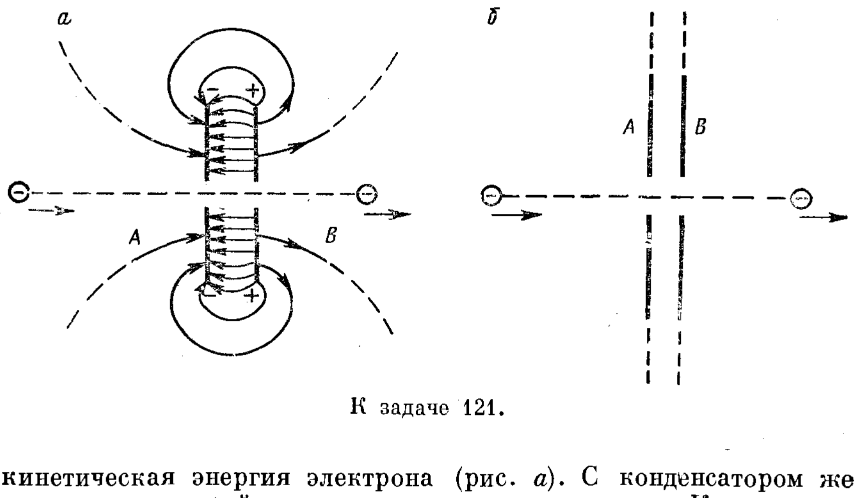
В исходном состоянии потенциальная энергия взаимодействия электронов равна нулю. В конечном, т. е. установившемся, состоянии это также должно иметь место, иначе между электронами еще действуют силы взаимного отталкивания и оба они продолжают менять скорость. Следовательно, когда скорости электронов установятся, из закона сохранения энергии следует, что $mv^2/2 = mv_1^2/2 + mv_2^2/2$, где $v_1$ и $v_2$ — скорости электронов; $m$ — масса каждого из них. На основе закона сохранения импульса $mv = mv_1 + mv_2$. Решение системы этих уравнений выполнено в задаче 36. В данном частном случае $v_1 = 0$, $v_2 = v$.

Наибольшее сближение электронов происходит в момент, когда скорости $v_1$ и $v_2$ электронов сравняются. В соответствии с законом сохранения импульса при этом $v_1 = v_2 = v/2$.

Применяя к этому моменту закон сохранения энергии, получаем, что $mv^2/2 = 2m(v/2)^2/2 + e^2/R$, где $e$ — заряд электрона; $R$ — расстояние наибольшего сближения. Отсюда $R = 4e^2/mv^2$.

## ЗАДАЧА 121

В обеих пластинах бесконечно протяженного плоского заряженного конденсатора имеются два малых отверстия, расположенных друг против друга. Свободный электрон пролетает сквозь эти отверстия, причем изменяется скорость, следовательно, и




К задаче 121.

кинетическая энергия электрона (рис. $a$). С конденсатором же никаких изменений в конечном итоге не происходит. Как согласовать это с законом сохранения энергии? Потерями энергии на излучение (неизбежное следствие ускоренного движения электрона и перераспределения заряда на пластинах), равно как и потерями на джоулево тепло, пренебречь.

## РЕШЕНИЕ

Распространенное стремление привлечь для объяснения перераспределение зарядов на пластинах конденсатора и, следовательно, изменение его потенциальной энергии, несостоятельно. Перераспределение заряда действительно имеет место, но лишь в то время, когда электрон находится вблизи пластин. Это перераспределение происходит с конечной скоростью (вследствие конечной скорости движения электрона), и потери энергии на излучение и джоулеву теплоту малы (ср. с задачами 123, 124). Электрон, находящийся на большом удалении слева от конденсатора (исходное состояние, см. рисунок) и на таком же расстоянии справа (конечное рассматриваемое состояние), на распределение заряда на конденсаторе влиять не может.

Уточним условия задачи.

а) Пластины можно считать бесконечными в физическом смысле. Это значит, что размеры пластин конечны, но существенно превышают расстояние между ними. Если же пластины конечны, хотя и велики, то в данной задаче нельзя пренебрегать обычно не учитываемым краевым эффектом. На рис. *а* изображено схематически поле такого конденсатора. Легко видеть, что оно существует и вне пластин, где оказывает на электрон действие, противоположное действию поля между пластинами, т. е., применительно к нашему рисунку, замедляет электрон и перед конденсатором (в области $A$), и после него (в области $B$), в то время как внутри конденсатора электрон ускоряется.

б) Пусть пластины бесконечны в математическом смысле (хоть это, конечно, чистая абстракция). В этом случае нам придется учесть потенциальную энергию электрона. Сравним потенциальные энергии в лежащих слева и справа от конденсатора точках $A$ и $B$ (рис. *б*). Пусть $\varphi_A = 0$. Точка $B$ находится в бесконечности. В обычных задачах из любой бесконечной точки $A$ в любую другую такую же точку $B$ можно попасть, минуя все те области пространства, где есть поле, а пробный заряд испытывает действие электрических сил. Поэтому в таких задачах $\varphi_A = \varphi_B$. В нашем же случае такого пути нет. Точки $A$ и $B$ разделены бесконечными пластинами. Попасть из $A$ в $B$ можно лишь пройдя сквозь конденсатор. Но внутри конденсатора пробный заряд испытывает действие поля, для перемещения заряда нужно совершить работу, и, следовательно, $\varphi_A \neq \varphi_B$.

Таким образом, в поставленной задаче существуют бесконечно удаленные точки с разными потенциалами.

Закон сохранения энергии применительно к электрону имеет вид

$$mv_A^2/2 + \varphi_A e = mv_B^2/2 + \varphi_B e,$$

где $v_A$ и $v_B$ — скорости электрона слева и справа от конденсатора, $v_A \neq v_B$, $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = \varphi$, $\varphi$ — разность потенциалов пластин конденсатора (ср. задачу 106, а).

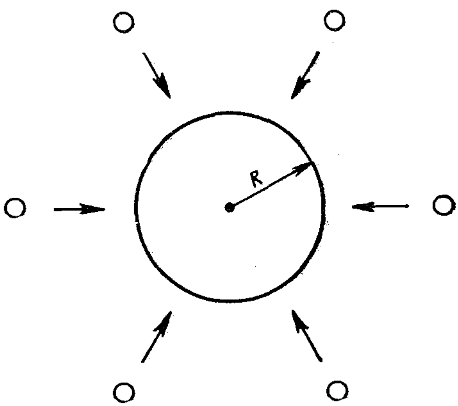
## ЗАДАЧА 122

Определить запас электростатической энергии, которой обладает металлический шарик радиусом $R$ с зарядом $q$ (см. рисунок).

### РЕШЕНИЕ

Если предоставить зарядам разлетаться, то, удаляясь беспредельно от шарика и друг от друга, они способны совершить определенную работу. Подсчитаем работу, необходимую для того, чтобы эти рассеянные заряды вновь собрать на шарик. Очевидно, что величина этой работы и определяет запас электростатической энергии шарика.

В дальнейшем мы будем пользоваться математической терминологией, это удобнее. Если мы говорим, что два заряда „бесконечно“ удалены друг от друга, то это означает, что взаимодействие этих зарядов практически отсутствует. Наша задача заключается в том, чтобы бесконечно удаленные друг от друга и от шарика элементарные заряды собрать воедино на шарике, т. е. в том месте, потенциал которого станет после этого равным величине $q/R$. Этого можно достигнуть разными способами. Например, можно одновременно сближать требуемое количество элементарных зарядов, как изображено на рисунке. Однако при этом будет трудно подсчитать работу перемещения зарядов, так как каждый из них взаимодействует со всеми остальными.



К задаче 122.

Электростатическое поле потенциально. Поэтому величина искомой работы не зависит от способа перемещения зарядов (здесь и в аналогичных задачах, когда говорится о работе перемещения заряда в электростатическом поле, то подразумевается, что кинетическая энергия заряженного тела при перемещении неизменна). Удобно (для расчета) перемещать заряды постепенно, т. е. так, чтобы при перемещении одного из них остальные были неподвижны.

Поместив на шарик первый электрон, работы мы не совершим. После этого потенциал шарика увеличится до значения $\varphi_1 = e/R$. Для перемещения второго электрона придется совершить работу $A_2 = e\varphi_1 = e^2/R$; для перемещения $k$-го электрона $A_k = e\varphi_{k-1} = (k-1)\, e^2/R$.

Пусть $q = ne$. Тогда работа, необходимая для зарядки шарика, определяется выражением

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} (k-1)\frac{e^2}{R} = \frac{n(n-1)}{2R} e^2. \tag{1}$$

Если $n \gg 1$, то $n(n-1) \approx n^2$ и

$$A = q^2/2R = U, \tag{2}$$

где $U$ — потенциальная энергия шара.

Несколько замечаний к задаче.

Во-первых, при перемещении электрона к незаряженному металлическому шарику свободные электроны на самом шарике также перемещаются. Из-за этого плотность заряда на шарике становится неравномерной, и возникает собственное поле шара, так что работа перемещения нашего электрона отлична от нуля. Если перемещать электрон к уже заряженному шару, то перераспределением зарядов можно пренебречь в том случае, когда взаимодействие друг с другом зарядов на шаре значительно больше их взаимодействия с приближающимся электроном, т. е. когда заряд шара значительно больше заряда электрона.

Во-вторых, как известно, свободные электроны и ионы кристаллической решетки шара совершают непрерывное хаотическое движение. Расстояния между заряженными частицами изменяются, благодаря чему плотность заряда на шаре претерпевает все время случайные изменения (флуктуации). Следовательно, утверждение „потенциал поверхности шара постоянен“ справедливо лишь приблизительно. Погрешностью этого утверждения можно пренебречь, если флуктуации поля шарика значительно меньше величины средней напряженности этого поля, что имеет место, когда заряд шара значительно превышает заряд электрона.

Сформулированное ограничение является обычным требованием так называемой макроскопической электродинамики, которая сознательно не учитывает атомистического строения электрического заряда: считается, что заряд меняется *непрерывно* и сплошным непрерывным образом распределяется на заряженных участках тел. Поэтому все законы этой теории и их следствия справедливы только для заряженных тел, значительно превышающих электрон по размерам и величине заряда.

Таким образом, значения нескольких первых членов суммы в выражении (1) являются ошибочными; более же далекие члены этой суммы вычислены нами верно. При условии, что $n \gg 1$, указанными ошибками можно смело пренебречь. Выражение же (1) самостоятельного смысла не имеет.

И еще одно. Так как емкость шарика равна $R$, выражение (2) можно переписать в виде

$$U = q^2/2C = C\varphi^2/2, \tag{3}$$

где $\varphi = q/R$ — потенциал шарика.

Легко показать, используя изложенный способ, что потенциальная энергия любой системы с емкостью $C$ вычисляется по формуле (3).

## ЗАДАЧА 123

На конденсаторе емкостью $C$ находится заряд $q$. Энергия, запасенная на конденсаторе, равна тогда $q^2/2C$ (см. задачу 122). К этому конденсатору проводами без сопротивления подключили (обкладка к обкладке) точно такой же, но незаряженный конденсатор. Подсчитать энергию системы двух конденсаторов.

### РЕШЕНИЕ

Иной читатель скажет: „А зачем подсчитывать? Провода без сопротивления, потерь энергии нет, работы при подключении не совершалось, следовательно, энергия системы должна равняться первоначальной энергии одного конденсатора, т. е. величине $q^2/2C$."

Не будем, однако, торопиться. При подключении второго конденсатора заряд системы не изменится, а емкость $C'$ увеличится вдвое. И тогда энергия системы окажется равной $q^2/2C' = q^2/4C$, что составляет половину ее первоначального значения.

Стало быть, мы имеем дело с нарушением закона сохранения энергии? Разумеется, нет. В рассматриваемом случае подавляющая часть „исчезнувшей" энергии выделяется в виде джоулева тепла на соединительных проводниках. И не имеет значения, что их сопротивление равно нулю: тогда в первый момент по закону Ома ток через проводники будет бесконечно большим! Для наглядности пусть это сопротивление не нулевое, а очень мало, соответственно ток очень велик. Выделяющееся тепло, следовательно, выражается произведением очень малого числа на очень большое. Нельзя заранее утверждать, что такое произведение равно нулю. Ситуация может оказаться похожей на давно известное „с миру по нитке — голому рубашка".

Выполним необходимые расчеты.

С заряженного конденсатора на незаряженный перетекла половина заряда, т. е. $q/2$. Этот процесс начался при разности потенциалов $\varphi = q/C$ и закончился при разности потенциалов, равной нулю. Воспользовавшись способом, примененным в задаче 122 в аналогичной ситуации, вычислим совершаемую при таком перемещении работу. Она окажется равной $^1/_2\,(q^2/2C)$, т. е. в точности соответствует „потерянной" энергии. Эта работа выполняется за счет потенциальной энергии, запасенной в первом конденсаторе, и расходуется (если пренебречь излучением) на увеличение кинетической энергии элементарных переносчиков заряда — электронов, а при остановке последних превращается в тепло.

Из задачи необходимо сделать следующие выводы:

а) при заряжении и перезарядке проводников неизбежны потери энергии на джоулево тепло;

б) пользоваться законом сохранения энергии в таких случаях следует очень осмотрительно.

### ЗАДАЧА 124

На упругий проводящий шарик массой $m$, несущий заряд $q$, падает с высоты $h$ такой же шарик с зарядом а) $q$, б) $-q$. На какую высоту подскочит шарик после удара? Нижний шарик через изолирующую прокладку жестко связан с Землей. Радиусы $r$ шариков много меньше $h$.

РЕШЕНИЕ

В случае а) потенциальная энергия верхнего шарика, определяемая электростатическим и гравитационным полями, одинакова в момент начала падения (т. е. на высоте $h$) и в верхней точке подъема после соударения, так как кинетическая энергия шарика в этих точках равна нулю, а перетекание зарядов с шарика на шарик при соударении отсутствует, так как одинаковые шарики несут одинаковые и одноименные заряды. Следовательно, шарик отскочит на ту же высоту $h$. Следует добавить, что при больших значениях зарядов $q$ соударения вообще не будет, а при еще больших верхний шарик, если его предоставить самому себе, даже начнет подниматься вверх (это значение заряда легко вычислить).

Случай же б) в рамках элементарной физики рассмотреть невозможно. Дело в том, что в момент столкновения заряды $q$ и $-q$ взаимно уничтожаются. Этот процесс будет сопровождаться выделением тепла и возникновением электромагнитного излучения. Подсчитать, какая часть первоначальной потенциальной энергии верхнего шарика перейдет в тепловую энергию и энергию излучения, простыми способами нельзя (см. задачу 123).

Заметим, что в случае а) часть энергии также переходит в тепло и в энергию излучения, но для лабораторных величин зарядов и скоростей этой частью можно смело пренебречь.

### ЗАДАЧА 125

По сфере с радиусом $R$, составленной из двух полусфер, равномерно распределен заряд $q$. Определить давление изнутри на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов. С какой силой необходимо действовать на каждую полусферу, чтобы они не расходились? Какой заряд нужно поместить в центре сферы, чтобы она находилась в равновесии?

РЕШЕНИЕ

Для решения задачи воспользуемся методом, который мы уже применяли в механике (см. задачу 45) и в молекулярной физике (см. задачу 83): подсчитаем работу, которую нужно выполнить, чтобы (мысленно) уменьшить на малую величину объем сферы, и результат, применяя закон сохранения энергии, сравним с изменением потенциальной энергии сферы.

Если искомое давление равно $p$, то, чтобы сжать сферу на малый объем $\Delta V$ (со всех сторон равномерно), нужно выполнить работу

$$\Delta A = p\Delta V = 4\pi p\,[R^3-(R-\Delta R)^3]/3 \approx 4\pi R^2 p\Delta R, \tag{1}$$

где $\Delta R$ — изменение радиуса сферы.

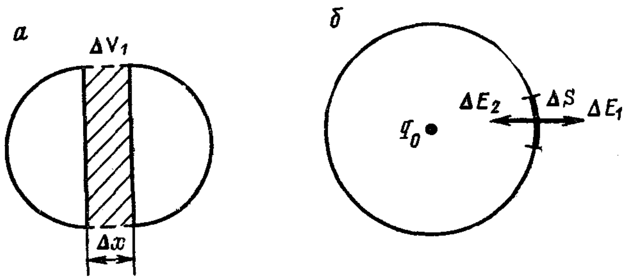
При этом потенциальная энергия заряда на сфере изменится на величину (см. задачи 109, 122)

$$\Delta U = -\frac{q^2}{2R} - \left(-\frac{q^2}{2(R-\Delta R)}\right) \approx \frac{q^2}{2R^2}\Delta R. \tag{2}$$

Тогда из равенства $\Delta A = \Delta U$ находим, что

$$p = q^2/8\pi R^4. \tag{3}$$

Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся аналогичным приемом. Пусть полусферы разошлись на столь малое расстояние $\Delta x$, что ни давление, ни распределение зарядов на них не изменились. При этом за счет взаимодействия зарядов произведена работа $\Delta A_1 = p\Delta V_1 = p\pi R^2\Delta x$ (см. рис. *а*). Эту же работу можно подсчитать по формуле $\Delta A_1 = F\Delta x$, где $F$ — искомая сила отталкивания полусфер. Следовательно, с учетом соотношения (3)




К задаче 125.

$$F = \pi R^2 p = q^2/8R^2. \tag{4}$$

Перейдем к последнему вопросу. Поместим в центр сферы произвольный заряд $q_0$. Сила, действующая со стороны этого заряда на малую площадку $\Delta S$ заряженной сферы, может быть найдена по закону Кулона:

$$\Delta F = q_0\Delta S\sigma/R^2 = q_0\Delta S q/4\pi R^4, \tag{5}$$

где $\sigma$ — плотность заряда на сфере. Очевидно, что если эта сила $\Delta F$ есть сила „давления на сферу снаружи“ и равна по величине силе давления за счет взаимодействия зарядов на сфере, т. е. $\Delta F = -\Delta S p$, то сфера находится в равновесии.

Таким образом, из (3) и (5) следует, что искомый заряд имеет величину

$$q_0 = -q/2. \tag{6}$$

Обсудим еще один способ решения этой задачи. Поместим в центр сферы произвольный заряд $q_0$, выделим на сфере малый участок $\Delta S$ и подберем величину заряда $q_0$ таким образом, чтобы силы взаимодействия заряда $\Delta q = \sigma \Delta S = q \Delta S / 4\pi R^2$ на выделенном участке с зарядом $q_0$ $(\Delta \mathbf{F}_1)$ и с зарядом на оставшейся части сферы $(\Delta \mathbf{F}_2)$ компенсировали друг друга.

Указанные силы можно определить из выражений

$$\Delta F_1 = q_0 \Delta q / R^2; \quad \Delta F_2 = \Delta q E', \tag{7}$$

где $\mathbf{E}'$ — напряженность поля, создаваемого заряженной сферой без участка $\Delta S$ в том месте, где расположен этот участок. Напряженности поля $\Delta \mathbf{E}_1$ и $\Delta \mathbf{E}_2$, создаваемого самим участком вблизи его поверхности, равны друг другу по величине (рис. *б*).

Представим поле целой сферы как суперпозицию полей с напряженностями $\mathbf{E}'$, $\Delta \mathbf{E}_1$ и $\Delta \mathbf{E}_2$. Так как поле вне сферы равно по величине $q/R^2$, а внутри сферы отсутствует, то $E' + \Delta E_1 = q/R^2$, $\mathbf{E}' + \Delta \mathbf{E}_2 = 0$, откуда

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 = E' = q/2R^2. \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в равенство $\Delta F_1 = \Delta F_2$ и учитывая соотношения (7), приходим к формуле (6).

Изложенный метод приводит к верному результату. Однако в процессе решения используется неочевидное утверждение, которое на первый взгляд трудно заметить.

Поясним это подробнее. Сформулируем требования, которые были предъявлены к размерам участка $\Delta S$. Во-первых, этот участок должен быть настолько мал, чтобы по отношению к остальной части сферы его можно было считать точечным зарядом и пользоваться второй из формул (7). Но, во-вторых, участок должен быть достаточно велик, чтобы при учете его взаимодействия с оставшейся частью сферы можно было пренебречь краевыми эффектами. То, что эти требования не противоречивы, не очевидно и нуждается в доказательстве (аналогичную ситуацию внимательный читатель заметит в задаче 52).

Первый способ решения в этом смысле проще.

## ЗАДАЧА 126

Полусфера радиуса $R$ равномерно заряжена электричеством с плотностью $\sigma$. Докажите, что в любой точке воображаемого круга, „стягивающего“ полусферу, напряженность поля перпендикулярна к плоскости этого круга. Найдите напряженность в центре круга.

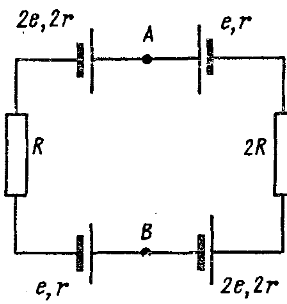
### РЕШЕНИЕ

Если взять две такие полусферы и составить целую сферу, то поле внутри нее будет равным нулю. Значит, поле одной из полусфер должно в плоскости круга, который их друг от друга отделяет, компенсировать поле другой. Поскольку поля полусфер симметричны относительно этого круга, утверждение, которое нужно было доказать, становится очевидным.

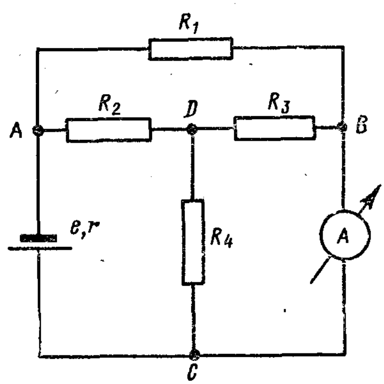
Для ответа на второй вопрос воспользуемся третьим законом Ньютона: сила, действующая на полусферу со стороны заряда $-q/2$, помещенного в центре сферы и поддерживающего сферу в равновесии, равна по величине силе, действующей на этот заряд со стороны полусферы (см. предыдущую задачу), т. е. $F = q^2/8R^2 = = qE/2$, где $E$ — искомая напряженность. Следовательно, $E = q/4R^2 = \pi\sigma$.

## ЗАДАЧА 127

В схеме, приведенной на рисунке, найти разность потенциалов $U$ между точками $A$ и $B$.




К задаче 127.




К задаче 128.

### РЕШЕНИЕ

Замкнутая цепь с несколькими э. д. с. подчиняется закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{-2e + e + e + 2e}{R + 2r + r + 2R + 2r + r} = \frac{2e}{3R + 6r}.$$

Закон Ома для правого участка цепи с учетом находящихся на этом участке э. д. с. имеет вид $I = (U + 3e)/(2R + 3r)$.

Сравнивая выписанные выражения, находим, что $U = -(5R + + 12r)\, e/(3R + 6r)$.

## ЗАДАЧА 128

Определить ток $I_A$ через амперметр с внутренним сопротивлением, равным нулю, в схеме, приведенной на рисунке. Величины сопротивлений таковы: $R_1 = R_3 = 30$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $r = 10$ Ом, а $e = 180$ В.

### РЕШЕНИЕ

Непосредственно применить закон Ома для участка цепи к амперметру нельзя, так как его сопротивление равно нулю.

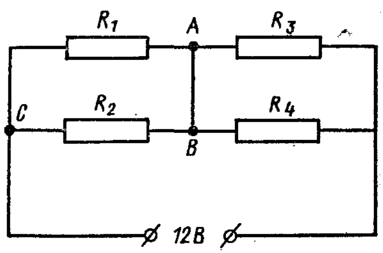
Вычислим полное сопротивление внешней цепи

$$R = \frac{R_1\,[R_2 + R_3R_4/(R_3+R_4)]}{R_1 + R_2 + R_3R_4/(R_3+R_4)} = 10 \text{ Ом},$$

и полный ток $I = e/(r + R) = 9$А. Этот ток в точке $A$ разветвляется на составляющие $I_1$ через сопротивление $R_1$ и $I_2$ через сложную цепь $R_2$, $R_3$, $R_4$. Сопротивление этой цепи равно 15 Ом, поэтому $I_1 = 3$А, $I_2 = 6$А. В свою очередь ток $I_2$ в точке $D$ делится на токи $I_3 = 2$А и $I_4 = 4$А. Ток $I_4$ минует амперметр, токи $I_1$ и $I_3$ проходят через него, т. е. $I_A = I_1 + I_3 = I - I_4 = 5$А.

### ЗАДАЧА 129

Рассчитать ток через перемычку $AB$ в схеме, приведенной на рисунке. Величины сопротивлений таковы: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = R_4 = 4$ Ом. Напряжение на клеммах 12 В. Сопротивление перемычки равно нулю.



К задаче 129.

### РЕШЕНИЕ

Как и в предыдущей задаче, при решении иногда возникают трудности, поскольку применить закон Ома к перемычке нельзя.

Рассчитаем токи через сопротивления $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$.

Полное сопротивление всей цепи

$$R = R_1R_2/(R_1+R_2) + R_3R_4/(R_3+R_4) = 4 \text{ Ом}.$$

При этом полный ток $I = U/R = 3$ А. Этот ток разветвляется в точке $C$ на токи $I_1 = 2$ А и $I_2 = 1$ А. Через сопротивления $R_3$ и $R_4$ текут одинаковые токи $I_3 = I_4 = 1{,}5$ А. Легко видеть, что ток через перемычку составляет 0,5 А.

### ЗАДАЧА 130

Известно, что вольтметр должен обладать большим внутренним сопротивлением. Обычно это обосновывают тем, что в противном случае часть тока, протекавшего ранее через участок цепи, напряжение на котором измеряется, ответвится в вольтметр, и режим участка изменится. Следствием такого объяснения является требование, чтобы сопротивление вольтметра было велико сравнительно с сопротивлением исследуемого участка.

Согласны ли вы с этим?

РЕШЕНИЕ

С приведенными рассуждениями согласиться нельзя. Никакого разветвления первоначального тока не происходит. В действительности ход событий выглядит так: подключение вольтметра приводит к уменьшению сопротивления участка цепи, что вызывает увеличение тока от источника; при этом увеличивается падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника и, следовательно, уменьшается падение напряжения на исследуемом участке. Чтобы этого избежать, надо подбирать вольтметр, сопротивление которого велико по сравнению с внутренним сопротивлением источника. Подтвердим это расчетом.

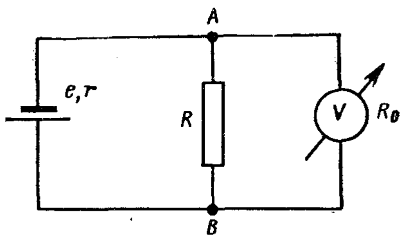
Любую сколь угодно сложную схему с точки зрения режима сопротивления $R$ можно представить себе следующим образом: отключим сопротивление $R$ от схемы; между теми точками, где оно было подключено раньше, существуют какое-то сопротивление $r$ и какая-то разность потенциалов $U$; эту разность потенциалов можно рассматривать как э. д. с., а $r$ — как внутреннее сопротивление источника э. д. с., подключенного к сопротивлению. Эквивалентная схема изображена на рисунке.

Итак, сопротивление $R$ подключено к источнику с э. д. с., равной $e$, и внутренним сопротивлением $r$. В отсутствие вольтметра ток через $R$ равен $I = e/(r + R)$, а падение напряжения на клеммах $AB$ $U = IR = eR/(r + R)$.

При подключении к клеммам $AB$ вольтметра с внутренним сопротивлением $R_0$ ток $I'$ через источник и падение напряжения на клеммах $AB$ изменятся до значений

$$I' = \frac{e}{r + RR_0/(R+R_0)};$$

$$U' = \frac{e}{r + RR_0/(R+R_0)} \cdot \frac{RR_0}{R+R_0}.$$



К задаче 130.

Именно величину $U'$ и показывает вольтметр.

Вычислим относительную погрешность измерения, т. е. величину

$$\frac{U-U'}{U} = \frac{\Delta U}{U} = 1 - \frac{1+r/R}{1+r\,(R+R_0)/RR_0}.$$

Оценим величину этой погрешности для различных соотношений между $r$, $R$ и $R_0$.

1. $r \ll R_0 \approx R$, тогда

$$\frac{\Delta U}{U} \approx 1 - \frac{1+r/R}{1+2r/R} \approx 1 - \left(1 + \frac{r}{R}\right)\left(1 - 2\frac{r}{R}\right) \approx \frac{r}{R} \approx \frac{r}{R_0}.$$

(Здесь и дальше используются формулы приближенных вычислений, приведенные в примечании к задаче 109.)

Таким образом, чем больше сопротивление вольтметра сравнительно с внутренним сопротивлением источника, тем меньше погрешность.

2. $r \ll R_0 \ll R$, т. е. сопротивление вольтметра совершенно не удовлетворяет требованиям, изложенным в условиях задачи. Тем не менее (учитывая, что неравенство $r \ll R_0 \ll R$ дает право пренебречь отношением $r/R$ сравнительно с единицей как величиной второго порядка малости) получаем, что

$$\frac{\Delta U}{U} \approx 1 - \frac{1}{1 + r(R+R_0)/RR_0} \approx \frac{r(R+R_0)}{RR_0} \approx \frac{r}{R_0},$$

т. е. опять важна лишь величина отношения $r/R_0$.

## ЗАДАЧА 131

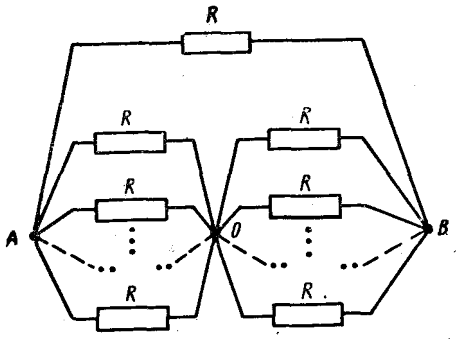
Соединены попарно каждая с каждой $N$ точек одинаковыми сопротивлениями величиною $R$ каждое. Определить сопротивление этой схемы между двумя любыми точками соединения.

### РЕШЕНИЕ

Найдем сопротивление между узлами $A$ и $B$. Оставшиеся узлы (их число равно $N-2$) тождественны: действительно, каждый из этих узлов соединен со всеми другими узлами (которых $N-1$).

Следовательно, если к точкам $A$ и $B$ подключить источник э. д. с., все узлы, за исключением $A$ и $B$, будут эквипотенциальны; токи через соединяющие их сопротивления не текут. Эквивалентная схема изображена на рисунке. (В точке $O$ соединены накоротко $(N-2)$ узла; каждая из точек $A$ и $B$ соединена с $O$ $(N-2)$ параллельными сопротивлениями $R$.) Легко подсчитать искомое сопротивление $R_{AB}$:

$$R_{AB} = \frac{1}{1/R + (N-2)/2R} = \frac{2R}{N}.$$

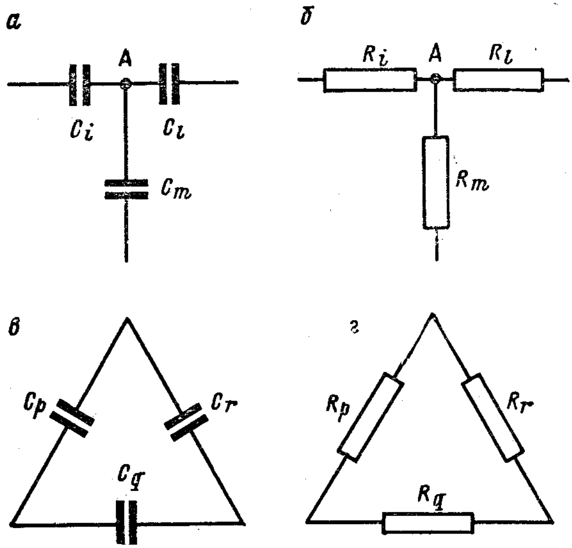


К задаче 131.

Необходимо понимать, что наш результат совершенно не зависит от того, как расположены в пространстве указанные $N$ точек. Для задачи имеют значение лишь их электрические соединения.

## ЗАДАЧА 132

Из сопротивлений $R_1$, $R_2$, ..., $R_n$ собрана некоторая электрическая схема. Точно такую же по структуре схему собирают из конденсаторов $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$, причем емкости конденсаторов подбирают так, что $C_1R_1 = C_2R_2 = \ldots = C_nR_n = k$, а элементы $C_i$




К задаче 132.

и $R_i$ с одинаковыми порядковыми номерами занимают в соответствующих схемах одинаковые положения. Измерения показали, что емкость второй схемы между входными зажимами равна $C$.

Определить сопротивление $R$ первой схемы между аналогичными точками.

### РЕШЕНИЕ

1-й способ. Если вторую схему подключить входными зажимами к источнику переменного тока, то каждый из конденсаторов $C_i$ окажет этому току сопротивление, пропорциональное величине $1/C_i$ (коэффициентом пропорциональности является величина $T/2\pi$, где $T$ — период синусоидального тока). Общее сопротивление схемы переменному току можно подсчитать при этом, используя формулы, применяемые для расчета сопротивлений разветвленных цепей постоянному току, причем величина этого общего сопротивления пропорциональна $1/C$, где $C$ — общая емкость схемы (коэффициентом пропорциональности также является величина $T/2\pi$). Следовательно, $R = k/C$.

2-й способ. Пусть каждая схема включена в цепь с источником постоянного напряжения. Выделим в схемах одинаковые блоки (см. рис. *а*, *б*). На основании закона сохранения заряда $q_i + q_l + q_m = 0$, $I_i + I_l + I_m = 0$, где $q_i$, $q_l$, $q_m$ — заряды на обкладках конденсаторов $C_i$, $C_l$, $C_m$ на пластинах, прилегающих к точке $A$; $I_i$, $I_l$, $I_m$ — токи через сопротивления $R_i$, $R_l$, $R_m$ (токи, идущие в направлении узла $A$, условимся считать положительными). В общем случае, если в некотором узле соединены несколько конденсаторов (или сопротивлений), то

$$\sum q_i = 0, \quad \sum I_i = 0, \tag{1}$$

где суммирование проводится по всем элементам, соединенным в узле.

Рассмотрим еще один тип участка схем — любой замкнутый контур (рис. *в*, *г*). Вследствие потенциальности электрического поля $U_p + U_r + U_q = 0$ для обоих контуров, где $U_p$, $U_r$, $U_q$ — падения напряжений на элементах с номерами $p$, $r$ и $q$. И вообще для любого замкнутого контура работа перемещения заряда вдоль контура равна нулю, т. е.

$$\sum U_p = 0, \tag{2}$$

суммирование производится по всем элементам, из которых состоит замкнутый контур.

Для первой схемы напряжение $U_i$ и ток $I_i$ через любое сопротивление $R_i$ связаны законом Ома:

$$R_i = U_i/I_i. \tag{3}$$

Для второй схемы напряжение и величина заряда связаны соотношением

$$1/C_i = U_i^{(1)}/q_i. \tag{4}$$

Сравнивая уравнения (1) — (4), нетрудно заметить, что они отличаются друг от друга только постоянными коэффициентами $R_i$ и $1/C_i$ перед неизвестными величинами ($U_i$, $I_i$ — для первой схемы, $U_i^{(1)}$, $q_i$ — для второй).

Допустим, что для второй схемы нам удалось определить все неизвестные — заряды и напряжения на конденсаторах $q_i$ и $U_i^{(1)}$. Тогда очевидно, что в первой схеме $U_i/I_i = C_i R_i U_i^{(1)}/q_i$.

Последнее соотношение применимо ко всем элементам обеих схем. В частности, его можно применить к элементам, находящимся у входных зажимов схем. Следовательно,

$$R = U/I = C_i R_i U^{(1)}/q = C_i R_i/C = k/C.$$

При расчете токов и напряжений на элементах первой схемы мы используем закон сохранения заряда, потенциальность электростатического поля, закон Ома, которые записываются в виде системы уравнений (1) — (3).

Получим важное следствие из этих уравнений. Все сказанное в дальнейшем применимо и ко второй схеме, если везде вместо слова „ток“ подставить слово „заряд“.

Приложим к входным зажимам напряжение $U^{(1)}$ и определим токи $I_i^{(1)}$ и напряжения $U_i^{(1)}$ на всех элементах схемы. Затем определим такие же величины $I_i^{(2)}$ и $U_i^{(2)}$, если к входным зажимам приложено напряжение $U^{(2)}$.

Докажем, что если к входным зажимам приложить напряжение $U^{(1)}+U^{(2)}$, то токи и напряжения на элементах схемы окажутся равными соответственно $I_i^{(1)}+I_i^{(2)}$ и $U_i^{(1)}+U_i^{(2)}$.

Для доказательства достаточно проверить, что условия теоремы не противоречат указанным основным законам.

Из очевидных равенств

$$\sum (I_i^{(1)}+I_i^{(2)})=\sum I_i^{(1)}+\sum I_i^{(2)}=0,$$
$$\sum (U_i^{(1)}+U_i^{(2)})=\sum U_i^{(1)}+\sum U_i^{(2)}=0,$$
$$\frac{U_i^{(1)}+U_i^{(2)}}{I_i^{(1)}+I_i^{(2)}}=\frac{R_iI_i^{(1)}+R_iI_i^{(2)}}{I_i^{(1)}+I_i^{(2)}}=R_i,$$

следует, что этих противоречий нет, и теорема доказана.

Содержание теоремы кратко можно сформулировать следующим образом: электрические схемы для постоянного тока подчиняются принципу суперпозиции.

## ЗАДАЧА 133

Имеется бесконечная плоская сетка с квадратными ячейками, изготовленная из проволоки. Сопротивление отрезка проволоки длиной, равной стороне ячейки, равно $R$. Чему равно сопротивление между двумя ближайшими узлами сетки?

### РЕШЕНИЕ

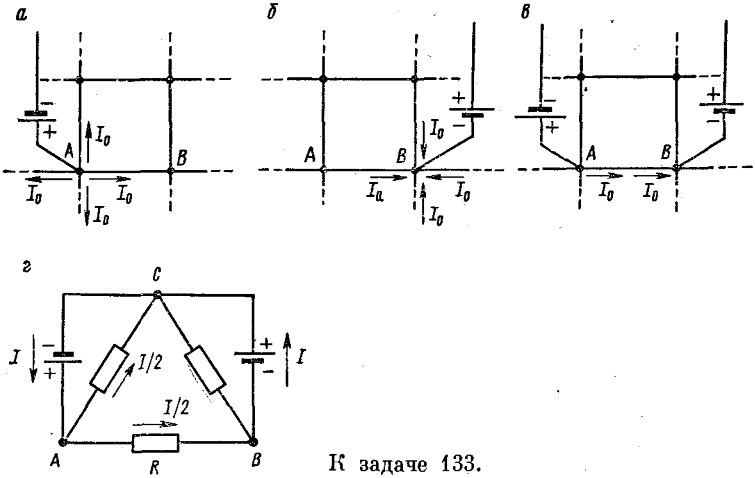
Воспользуемся принципом суперпозиции (см. пояснение к предыдущей задаче).

Рассмотрим любой из узлов сетки, например $A$ (см. рис. *а*). Возьмем источник питания с любой э. д. с. и включим его между точкой $A$ и бесконечно удаленной точкой так, чтобы положительный зажим источника был соединен с $A$. Вследствие симметрии схемы ток $I$ из точки $A$ разветвится на четыре одинаковых тока $I_0$, т. е. $I_0 = I/4$.

Отключим после этого источник питания и включим его так, чтобы отрицательный зажим был соединен с соседней точкой $B$, а положительный — с бесконечно удаленной точкой (рис. *б*). Ток $I$, поступающий в источник через точку $B$, приходит в $B$ по четырем совершенно равноправным направлениям, и, следовательно, по каждому из них течет ток $I_0$, т. е. $I_0 = I/4$.

Возьмем два одинаковых источника питания и включим их так, как указано на рис. *в*, соединив отрицательный полюс одного и положительный другого с бесконечно удаленной точкой. На рис. *г* изображена эквивалентная схема такого включения источников. Точка $C$ — бесконечно далекая точка.

Для определения тока через перемычку $AB$ по принципу суперпозиции (см. задачу 132) достаточно сложить токи, проходящие через эту перемычку и создаваемые источниками по отдельности: $I_{AB} = 2I_0 = I/2$.

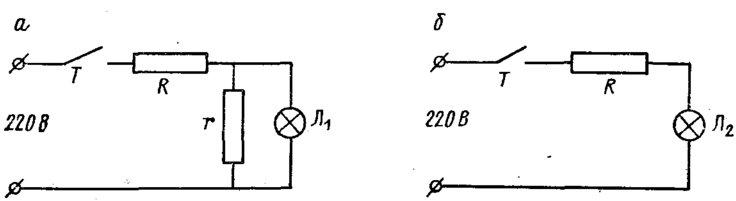


К задаче 133.

Таким образом, ровно половина тока $I$, проходящего через каждый источник, течет через перемычку $AB$. Следовательно, сопротивление всей остальной сетки равно сопротивлению перемычки $AB$, а полное сопротивление между точками $A$ и $B$ равно $R/2$.

## ЗАДАЧА 134

В утюге с терморегулятором $T$, включающим или выключающим нагревательный элемент $R$ (в зависимости от температуры утюга), для визуального контроля за исправной работой регулятора используется лампочка $Л_1$ от карманного фонаря, включенная по схеме рис. *а*. Шунт $r$ подбирается так, чтобы ток через лампу соответствовал ее рабочему току.



К задаче 134.

Спрашивается, почему не используется более простая схема (см. рис. *б*) с лампочкой $Л_2$, рабочий ток которой равен току через нагревательный элемент?

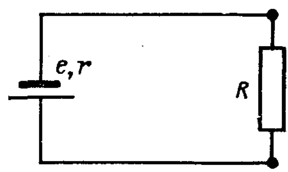
РЕШЕНИЕ

После включения в процессе нагрева сопротивление нагревательного элемента возрастает в $n$ раз, соответственно в $n$ раз уменьшается общий ток. Во сколько-то раз возрастают и величины сопротивлений шунта $r$ и лампочек $Л_1$ и $Л_2$. Однако тепловая инерция утюга с нагревателем много больше тепловой инерции лампочек. Это приводит к тому, что в схеме *б* через лампочку $Л_2$ в течение заметного времени после включения идет ток, в $n$ раз превышающий номинальный ток $I$, и лампочка может перегореть. Если же подобрать параметры лампочки $Л_2$ так, чтобы ток $nI$ был ее рабочим током, то после разогрева утюга при токе $I$ свечение лампочки будет слишком слабым.

В схеме рис. *а*, если времена установления рабочей температуры элемента $R$ и шунта $r$ близки, ток через лампочку $Л_1$ меняется в процессе разогрева не столь сильно, и параметры лампочки легче подобрать так, чтобы она и не перегорала и светилась достаточно ярко.

## ЗАДАЧА 135

Дана электрическая цепь, в которой находится, помимо других сопротивлений, некоторое сопротивление $R$, потребляющее мощность $N$. Когда к клеммам этого сопротивления подключают параллельно ему еще одно такое же сопротивление, то в них обоих расходуется та же мощность $N$. Дать простейшую схему и расчет такой цепи.



К задаче 135.

РЕШЕНИЕ

Построим эквивалентную схему первоначальной цепи (см. задачу 130).

Потребляемая мощность в первом случае равна $I^2R = e^2R/(r + R)^2$, а во втором случае $e^2R/2(r + R/2)^2$. Отсюда

$$r = \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} R = \frac{\sqrt{2}}{2} R, \quad e = \sqrt{\frac{N}{R} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}} R.$$

## ЗАДАЧА 136

Батарея с э. д. с., равной $e$, и внутренним сопротивлением $r$ замыкается на переменное внешнее сопротивление $R$. Построить графики зависимости от $R$ следующих величин:

а) мощности $N_а$, рассеиваемой внутри источника;

б) всей выделяющейся в цепи мощности $N_б$;

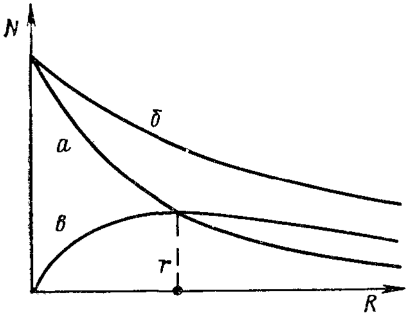
в) мощности $N_в$, рассеиваемой на $R$.

РЕШЕНИЕ

Воспользовавшись законом Ома для полной цепи, получим

$$N_а = \frac{e^2 r}{(R+r)^2}, \quad N_б = \frac{e^2}{R+r}, \quad N_в = \frac{e^2 R}{(R+r)^2}.$$

При этом графики для функций $N_а$ и $N_б$ построить легко (см. рисунок). Более сложный вид имеет функция $N_в$. При $R \to 0$ или $R \to \infty$ $N_в \to 0$. Следовательно, внутри этого промежутка $N_в$ имеем максимум. Представив $N_в$ в виде



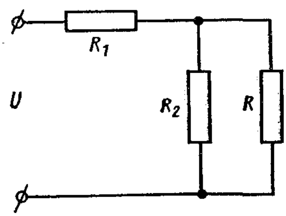
К задаче 136.

$$N_б = \frac{e^2}{(\sqrt{R/r} + \sqrt{r/R})^2 \sqrt{r}},$$

найдем, что максимум имеет место при условии, что $R = r$ (см. задачу 15).

## ЗАДАЧА 137 *

В некоторой лабораторной установке прибор, находящийся внутри цилиндра высокого давления, требует постоянного по мощности подогрева. Однако во время опыта меняется давление, что с неизбежностью вызывает некоторое изменение сопротивления любой проволоки, используемой в качестве нагревателя. Простая схема, приведенная на рисунке, позволяет обеспечить постоянную мощность. На рисунке $R$ обозначает сопротивление нагревательного элемента, меняющееся в течение опыта, $R_1$ и $R_2$ — резисторы, находящиеся вне цилиндра и потому имеющие неизменное сопротивление, $U$ — постоянное напряжение питания.



К задаче 137.

Выясните, почему удается достичь постоянной мощности подогрева и какое для этого необходимо соотношение между величинами $R$, $R_1$ и $R_2$.

РЕШЕНИЕ

Исследуем зависимость мощности $N(R)$, выделяющейся на сопротивлении $R$, при постоянных $R_1$ и $R_2$. При $R = 0$ $N = 0$, так как напряжение равно нулю, а величина тока ограничена наличием сопротивления $R_1$. При $R \to \infty$ $N \to 0$, так как ток равен нулю, а величина напряжения ограничена.

Очевидно также, что для всех $R$ таких, что $0 < R < \infty$, величина $N(R)$ положительна.

---

* Э. Парселл. Электричество и магнетизм. М.: «Наука», 1971.

Следовательно, функция $N(R)$ имеет по крайней мере один максимум в области положительных (т. е. имеющих физический смысл) значений $R$. В окрестности максимума (см. задачу 10) изменения $N$ весьма малы даже при заметных изменениях $R$.

Найдем зависимость $N$ от $R$. Полный ток $I$ от источника $U$ определяется законом Ома:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2R/(R_2+R)}.$$

Через сопротивление $R$ проходит ток $IR_2/(R_2 + R)$, и, следовательно,

$$N = \left(\frac{R_2}{R_2+R} I\right)^2 R = \frac{U^2R_2^2R}{(R_2+R)^2\,[R_1+R_2R/(R_2+R)]^2}.$$

Представим результат в виде

$$N = \frac{U^2}{2R_1^2/R_2 + 2R_1 + R_1^2/R + (R_1^2/R_2^2 + 2R_1/R_2 + 1)\,R}.$$

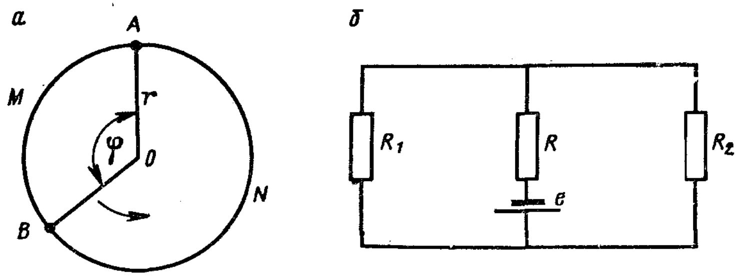
Максимум дроби соответствует минимуму двух последних слагаемых знаменателя ($U$, $R_1$, $R_2$ — const), которые зависят от $R$. Так как

$$\frac{R_1^2}{R} + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)^2 R = \frac{R_1(R_1+R_2)}{R_2}\left[\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)\,R} + \frac{(R_1+R_2)\,R}{R_1R_2}\right],$$

то искомый максимум имеет место при $R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$ (см. задачу 15).

## ЗАДАЧА 138

Проволочное кольцо радиусом $r$ находится в постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B$, перпендикулярном к плоскости кольца. Центр кольца соединен с кольцом двумя прямыми проволоками. Одна из них неподвижна, другая вращается с по-




К задаче 138.

стоянной угловой скоростью ω, вследствие чего и по прямым проволокам и по кольцу идут индукционные токи. Сопротивление проволоки на единицу длины (так называемое погонное сопротивление) равно ρ.

Определить ток в прямой проволоке в зависимости от угла $\varphi$. Считать при этом, что магнитные поля индукционных токов малы по сравнению с магнитным полем $B$ (см. рис. *а*).

РЕШЕНИЕ

Изобразим электрическую эквивалентную схему (рис. *б*), где имеется эквивалентный источник индукционного тока $e$, включенный на участке $OB$, $R$ — сопротивление участка $AO$, $R_1$ и $R_2$ — соответственно сопротивления участков кольца $AMB$ и $ANB$. Внутреннее сопротивление источника равно $R$ (это сопротивление проволоки $OB$).

Как известно, величина э. д. с. индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока через контур, т. е.

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\pi r^2\omega. \tag{1}$$

Указанные на рисунке сопротивления таковы, что

$$R = r\rho, \quad R_1 = r\rho\varphi, \quad R_2 = r\rho(2\pi - \varphi). \tag{2}$$

В соответствии с законом Ома найдем, что

$$I = \frac{e}{2R + R_1R_2/(R_1+R_2)}, \tag{3}$$

или после подстановки (1) и (2)

$$I = \frac{B\pi r\omega}{\rho}\cdot\frac{1}{2+\varphi-\varphi^2/2\pi}. \tag{4}$$

В соотношениях (2) — (4) угол $\varphi$ измеряется в радианах.

## ЗАДАЧА 139

В прямоугольную горизонтальную кювету с двумя противолежащими металлическими, а двумя другими диэлектрическими стенками налит электролит, плотность которого $\rho$, а электропроводность $\sigma$. К металлическим стенкам приложено напряжение $U$, и вся кювета помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B$.

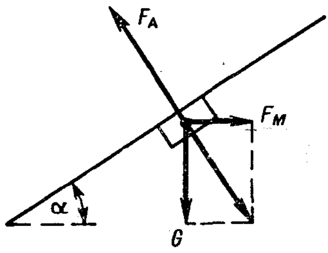
Определить разность уровней жидкости между диэлектрическими стенками кюветы, пренебрегая магнитным полем тока в электролите. Расстояние между металлическими стенками равно $a$, а их длина $b$.

РЕШЕНИЕ

Плотность тока между металлическими стенками $j = U\sigma/a$.

Вследствие взаимодействия тока в электролите с внешним магнитным полем на каждый из элементарных токов действует сила Лоренца, направленная горизонтально и параллельно металлическим стенкам кюветы. В результате любой объем электролита подвергается действию силы со стороны поля в указанном направлении.

Рассмотрим малый объем электролита вблизи его поверхности (см. рисунок, на котором изображен разрез кюветы в плоскости, параллельной металлическим стенкам). Силы, действующие на этот объем, таковы: его вес **G**, сила давления со стороны жидкости $\mathbf{F}_A$ (аналог силы Архимеда), направленная перпендикулярно поверхности жидкости в состоянии равновесия (см. задачи 59, 68, 70), и сила $\mathbf{F}_M$, действующая со стороны поля. Если величина объема равна $\Delta V$, то $G = \Delta V \rho g$, $F_M = Bj\Delta V$. (Пусть сечение выделенного объема равно $\Delta S$, а его длина в плоскости, перпендикулярной рисунку, $\Delta l$. Сила тока, проходящего через объем, равна $\Delta I = j\Delta S$. Тогда сила, действующая со стороны поля, $F_M = \Delta IB\Delta l = Bj\Delta V$.)



К задаче 139.

Так как объем находится в равновесии (электролит неподвижен), то в соответствии со вторым законом Ньютона $\mathbf{G} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_M = 0$, откуда следует, что $F_M/G = \operatorname{tg} \alpha$, где $\alpha$ — угол наклона поверхности электролита к горизонту.

Итак, $\operatorname{tg} \alpha = BU\sigma/\rho g a$, и при этом искомая разность уровней определяется выражением

$$\Delta h = b \operatorname{tg} \alpha = (b/a)(BU\sigma/\rho g).$$

## ЗАДАЧА 140 *

По двум длинным параллельным рельсам, расположенным в горизонтальной плоскости на расстоянии $l$ друг от друга, скользит без трения металлический стержень массой $m$. В одном конце рельсы через сопротивление $R$ соединены с источником питания, э. д. с. которого равна $e$. Внутреннее сопротивление источника питания, а также сопротивления стержня и рельсов пренебрежимо малы по сравнению с $R$. Перпендикулярно к горизонтальной плоскости (см. рис. *а*) приложено однородное магнитное поле; ключ находится в положении *1*, стержень при этом скользит с постоянной скоростью $v_0$. В некоторый момент времени ключ $K$ переводят в положение *2*.

Что происходит со стержнем в дальнейшем?

1. Прекратится ли когда-нибудь его движение? Если да, то когда именно?

2. На какое расстояние он передвинется?

---

* Э. Парселл. Электричество и магнетизм. М., „Наука", 1971.

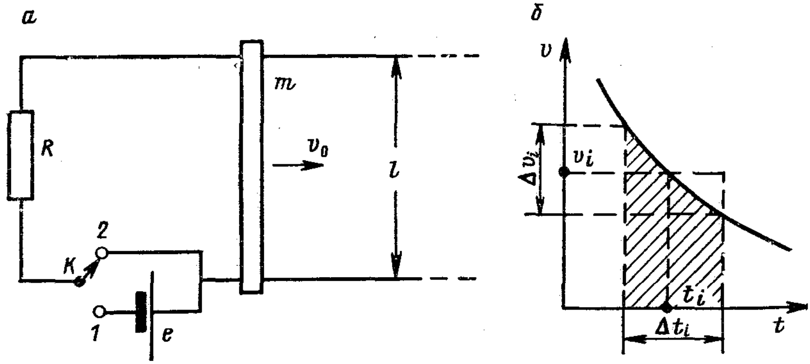
3. Какой заряд протечет через сопротивление $R$ за все время движения стержня?

4. Выполняется ли закон сохранения энергии в данном случае? Подтвердите свой ответ расчетом.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим сначала процесс, происходящий при первом положении ключа $K$. Это позволит нам определить величину индукции магнитного поля $B$.

При равномерном движении стержня в замкнутом контуре возбуждается постоянная электродвижущая сила индукции, равная



К задаче 140.

по величине скорости изменения магнитного потока через контур, т. е.

$$e_{\text{инд}} = \Delta\Phi/\Delta t = lBv_0.$$

Текущий в контуре ток определяется на основании закона Ома

$$e - e_{\text{инд}} = I_0 R. \tag{1}$$

Кроме того, известно, что мощность источника питания равна мощности тепловых потерь на сопротивлении $R$ (это следует из закона сохранения энергии), т. е.

$$eI_0 = I_0^2 R. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) позволяют определить величину $B$ и ток $I_0$ в контуре. Уравнение (2) имеет два корня: $I_{01} = 0$ и $I_{02} = e/R$. Подставляя эти значения в (1), убеждаемся, что при условии $v_0 \neq 0$ и $B \neq 0$ нам подходит только корень $I_{01} = 0$ (второй корень соответствует случаю, когда стержень неподвижен или поле отсутствует). Следовательно,

$$B = e/lv_0. \tag{3}$$

Пусть ключ переведен в положение *2*. При этом отключается источник питания. Тогда по закону Ома

$$e_{\text{инд}} = IR, \tag{4}$$

т. е. в начальный момент в контуре практически мгновенно возникает ток $I$ такой, что

$$I = e_{\text{инд}}/R = lBv_0/R = e/R = I_{02}. \tag{5}$$

При этом на стержень начинает действовать со стороны магнитного поля сила, направленная в сторону, противоположную движению стержня (убедитесь в справедливости этого утверждения при любом направлении магнитного поля $B$, применяя правило левой руки). Скорость стержня падает и рано или поздно должна обратиться в нуль. Так как при этом ток в контуре исчезнет, то в дальнейшем стержень будет оставаться неподвижным.

Примем, что переброс ключа сделан в момент времени $t = 0$, и рассмотрим процесс в некий произвольный момент времени $t_i$. Пусть в этот момент скорость стержня равна $v_i$, ускорение — $a_i$, ток в контуре — $I_i$. Указанные величины связаны друг с другом, во-первых, законом Ома

$$I_i R = lBv_i, \tag{6}$$

и, во-вторых, вторым законом Ньютона

$$F_i = ma_i = lBI_i. \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) определим связь между скоростью и ускорением стержня в момент времени $t_i$ (любой)

$$v_i = mRa_i/(lB)^2. \tag{8}$$

Отсюда видно, что ускорение тем меньше, чем меньше скорость, т. е. с течением времени стержень замедляется все в меньшей и меньшей степени. Поэтому можно ожидать что движение стержня продолжается немалое время.

Рассмотрим интервал времени $\Delta t_i$ вблизи момента $t_i$ (см. рис. *б*) настолько малый, чтобы можно было считать, что $a_i = |\Delta v_i|/\Delta t_i$, где $\Delta v_i$ — изменение скорости в течение интервала $\Delta t_i$. При этом из (8) находим, что

$$\Delta S_i = v_i \Delta t_i = mR\,|\,\Delta v_i\,|/(lB)^2, \tag{9}$$

где $\Delta S_i$ — путь, пройденный стержнем за время $\Delta t_i$. Для определения всего расстояния, на которое переместился стержень, нужно найти сумму всех отрезков $\Delta S_i$ от начала движения до момента остановки $T$:

$$S = \sum_i \Delta S_i = \sum_{t=0}^{t=T} v_i \Delta t_i.$$

Соотношение (9) позволяет ту же величину получить другим способом: найти сумму величин $mR\ |\Delta v_i|/(lB)^2$ от начала движения (когда скорость равна $v_0$) до момента остановки, т. е.

$$S = \frac{mR}{(lB)^2} \sum_{v=v_0}^{v=0} |\,\Delta v_i\,| = \frac{mRv_0}{(lB)^2} = \frac{mRv_0^3}{e^2}. \tag{10}$$

Таким образом, нам удалось вычислить перемещение стержня, не определяя времени его движения.

Еще интереснее, что соотношение (9) позволит определить и время движения $T$. Перепишем (9) в виде

$$|\Delta v_i/v_i| = (lB)^2 \Delta t_i/mR. \tag{11}$$

Смысл последнего выражения можно понимать так: за равные интервалы времени $\Delta t_i$ скорость изменяется в одно и то же число раз, независимо от того, какой именно момент времени мы рассматриваем. Подберем величину $\Delta t$ так, чтобы за это время скорость изменялась, например, вдвое (при этом $\Delta t$ совсем не обязано быть малым). Тогда за время $2\Delta t$ скорость изменится вчетверо, за время $n\Delta t$ — в $2^n$ раз, и т. д. К любому, сколь угодно большому, но конечному моменту времени скорость будет иметь малое, но конечное значение. Следовательно, в нашей идеализированной задаче стержень движется неограниченное время (не забывайте при этом, что для очень далеких моментов времени от начала движения скорость стержня становится ничтожной).

Перейдем к ответу на третий вопрос задачи. Из соотношения (6) следует, что ток в контуре и скорость стержня пропорциональны:

$$I_i = kv_i, \quad k = lB/R = \text{const}. \tag{12}$$

Следовательно, и изменяются эти величины пропорционально друг другу, т. е.

$$\Delta I_i = k\Delta v_i, \tag{13}$$

где $\Delta I_i$ и $\Delta v_i$ — изменения тока и скорости за один и тот же интервал времени. Подставляя последнее соотношение в формулу (9), получаем, что

$$I_i \Delta t_i = mR\,|\Delta I_i|/(lB)^2. \tag{14}$$

Для нахождения величины заряда $q$, прошедшего через сопротивление $R$, применим уже использованный прием суммирования:

$$q = \sum_{t=0}^{t=T\to\infty} I_i \Delta t_i = \frac{mR}{(lB)^2} \sum_{I=I_{02}}^{I=0} |\Delta I_i| = \frac{mRI_{02}}{(lB)^2} = \frac{mv_0^2}{e}. \tag{15}$$

Проверим выполнение закона сохранения энергии. В процессе движения стержня уменьшается (до нуля) его кинетическая энергия и рассеивается тепло на сопротивлении $R$. Количество тепла $Q$, следовательно, должно быть равно начальной кинетической энергии стержня $T_0 = mv_0^2/2$.

За малый интервал времени $\Delta t_i$ вблизи момента $t_i$ кинетическая энергия стержня изменяется на величину

$$\Delta T_i = mv_i^2/2 - m(v_i + \Delta v_i)^2/2 \approx -mv_i \Delta v_i \tag{16}$$

(мы пренебрегли величиной $(\Delta v_i)^2$ по сравнению с величиной $v_i\,\Delta v_i$).

За тот же интервал времени на сопротивлении рассеивается тепловая энергия, величина которой определяется законом Джоуля—Ленца, $\Delta Q_i = I_i^2 R\ \Delta t_i$. Подставив в это выражение значения величин $I_i$ и $I_i \Delta t_i$ из формул (12)—(14), найдем, что $\Delta Q_i = I_i\ (I_i \Delta t_i) R = m v_i\ |\Delta v_i|$, а эта величина совпадает с величиной $|\Delta T_i|$ из равенства (16), что и требовалось доказать.

### ЗАДАЧА 141

Электрон, обладающий малой по сравнению со скоростью света скоростью $\mathbf{v}$, попадает в область пространства, в которой созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля. Напряженность электрического поля равна $\mathbf{E}$, индукция магнитного — $\mathbf{B}$, причем в системе СИ $E \ll cB$, где $c$ — скорость света. В начальный момент скорость $\mathbf{v}$ перпендикулярна векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Как движется электрон в дальнейшем? Существует ли такая скорость движения $\mathbf{v}_0$, при которой траектория электрона прямолинейна?

Опыт происходит в вакууме. Силой тяготения пренебречь.

#### РЕШЕНИЕ

Сила, действующая на электрон со стороны электростатического поля, не зависит от скорости электрона, $F_e = eE$, и направлена в сторону, противоположную $\mathbf{E}$. Сила взаимодействия электрона с магнитным полем (сила Лоренца), $F_M = Bev$, направлена вдоль прямой, перпендикулярной к $\mathbf{B}$ и $\mathbf{v}$. Следовательно, траектория электрона лежит в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$.

Если начальная скорость электрона такова, что силы $F_e$ и $F_M$ равны, т. е. $E = Bv_0$, и направлены в противоположные стороны (такая скорость при данных $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ всегда может быть найдена), то сумма сил, действующих на электрон, равна нулю. Электрон движется при этом равномерно и прямолинейно.

Пусть скорость электрона $v$ отлична от $v_0$. Рассмотрим поведение электрона в системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью $\mathbf{v}_0$. Представим силу Лоренца, действующую на электрон, в виде суммы двух сил: $\mathbf{F}_M = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}$, где $F_0 = Bev_0$, $F = Be\ |\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|$, причем обе силы $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{F}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{B}$ и векторам $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ соответственно. Отметим, что скорость $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ есть скорость движения электрона относительно выбранной системы отсчета, а $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|$ есть длина вектора $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$.

При этом сумма действующих на электрон сил равна $\mathbf{F}$. Так как эта сила постоянна по величине и направлена перпендикулярно вектору $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$, то электрон в выбранной системе отсчета движется по окружности, радиус которой может быть найден из второго закона Ньютона

$$Be\,|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0| = (m/R)\,|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2,$$

где $m$ — масса электрона. Движение по окружности равномерное.

Таким образом, относительно наблюдателя, связанного с неподвижной системой отсчета, электрон участвует в двух движениях: поступательном со скоростью $\mathbf{v}_0$ и равномерном движении по окружности $R = (m/Be)\,|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|$ со скоростью $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|$.

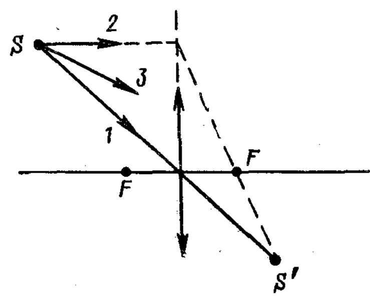
Вспомним, что любая точка, принадлежащая цилиндру, который без проскальзывания катится по плоскости, участвует в двух движениях указанного типа. Наверное, вы знаете, что траекториями всех точек такого цилиндра являются циклоиды. Если $v_0 = v - v_0$, т. е. $v = 2v_0$, то траектория движения электрона такая же, как и у точки, находящейся на образующей цилиндра.

Если $v_0 < v < 2v_0$, электрон движется по так называемой укороченной циклоиде. По таким траекториям движутся точки, удаленные от оси цилиндра на расстояние, меньшее его радиуса.

Любопытно отметить следующий важный факт. Допустим, что вы неподвижны относительно введенной системы отсчета. При этом, наблюдая за поведением электрона, вы не заметите существования электростатического поля. Реальным для вас будет только поле **B**. Этот факт лишний раз подчеркивает единство и неразрывность более общего понятия — понятия элекромагнитного поля и говорит об относительности его разделения на электрическое и магнитное поля.

### ЗАДАЧА 142

Во многих задачах геометрической оптики при построении изображения источника в тонкой линзе мы не учитываем размеров линзы. В то же время источник может быть удален от главной оптической оси дальше, чем края линзы. Можно ли при этом пользоваться обычными правилами построения изображения в линзе (см. рисунок): ведь луч *2* вообще через линзу не проходит?



К задаче 142.

### РЕШЕНИЕ

Разумеется, изображение создается только лучами, проходящими через линзу. Однако положение изображения $S'$ не зависит от того, какие именно из лучей мы выбираем для построения (легко доказать — сделайте это сами — что луч *3* после прохождения через линзу попадает в точку $S'$). Следовательно, положение изображения не зависит и от размеров линзы: обломок линзы, если его сферические поверхности сохранились, создает изображение там же, где создала бы его целая линза. Размер линзы определяет лишь яркость изображения.

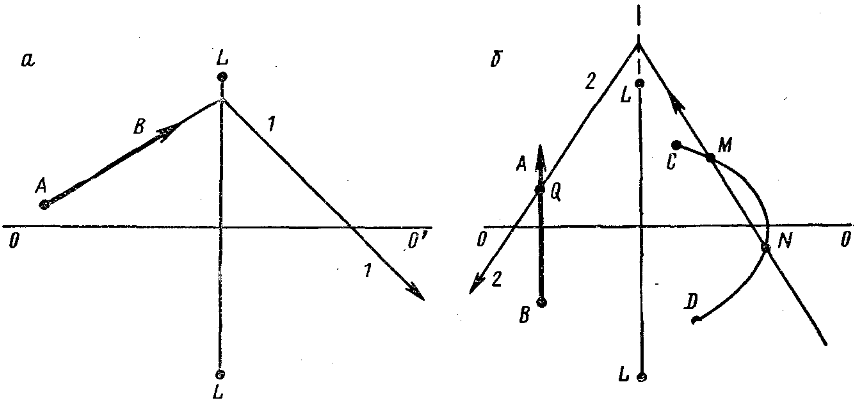
### ЗАДАЧА 143

В геометрической оптике мы часто пользуемся тем, что изображением прямолинейного отрезка в оптической системе (если изображение существует) является также прямолинейный отрезок (или луч, или два луча, лежащие на одной прямой). Однако это утверждение неочевидно. Докажите его справедливость на примере тонкой линзы.

## РЕШЕНИЕ

Пусть $LL$ — линза, $OO'$ — ее главная оптическая ось, $AB$ — протяженный источник (см. рис. *а*). Рассмотрим луч, направленный вдоль $AB$. После преломления в линзе луч идет в направлении *11*. Изображения точек отрезка $AB$ должны лежать на луче *11*. Следовательно, если $AB$ не перпендикуляреи к главной оптической оси линзы, его изображением является прямолинейный отрезок.

Пусть $AB$ составляет прямой угол с $OO'$ (рис. *б*). Допустим, что его изображением является отрезок некой кривой линии $CD$.




К задаче 143.

Для любой точки $M$ на $CD$ всегда можно найти точку $N$ на $CD$ такую, что прямолинейный отрезок $MN$ не будет перпендикулярен $OO'$. Направим вдоль $MN$ луч. После преломления в линзе этот луч идет в направлении *22* и может пересечь отрезок $AB$ лишь в одной точке $Q$. Таким образом, „изображениями" $Q$ являются две точки $M$ и $N$. Мы пришли к противоречию, так как линза создает единственное изображение. Следовательно, $CD$ может быть только прямолинейным, что и требовалось доказать.

Еще раз подчеркнем (см. предыдущую задачу), что луч $MN$ может пройти и вне линзы (для доказательства это не важно), существенно лишь, чтобы луч $MN$ пересекал плоскость, в которой расположена линза.

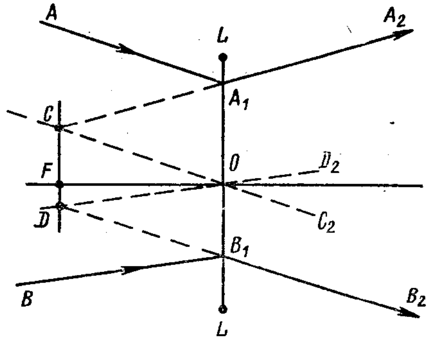
## ЗАДАЧА 144

Дана линза $LL$ и луч $AA_1A_2$, прошедший эту линзу. Построить ход луча $BB_1$ (см. рисунок).

## РЕШЕНИЕ

Проведем через центр $O$ линзы $LL$ вспомогательный луч $COC_2$ так, чтобы было $CC_2 \parallel AA_1$. Этот луч пройдет через линзу, не меняя направления. Линза рассеивающая (это видно по поведению луча $AA_1A_2$), поэтому продолжения вышедших из линзы лучей $A_1A_2$ и $OC_2$ должны пересечься в левой фокальной плоскости. Таким образом определяется положение фокуса $F$ линзы.

Проведем вспомогательный луч $DD_2$ так, чтобы было $DD_2 \parallel BB_1$. Продолжения прошедших линзу лучей $B_1B_2$ и $OD_2$ должны пересечься в уже найденной фокальной плоскости. Проводя линию через точку $B_1$ и точку пересечения луча $DD_2$ с фокальной плоскостью, определяем ход луча $B_1B_2$.



К задаче 144.

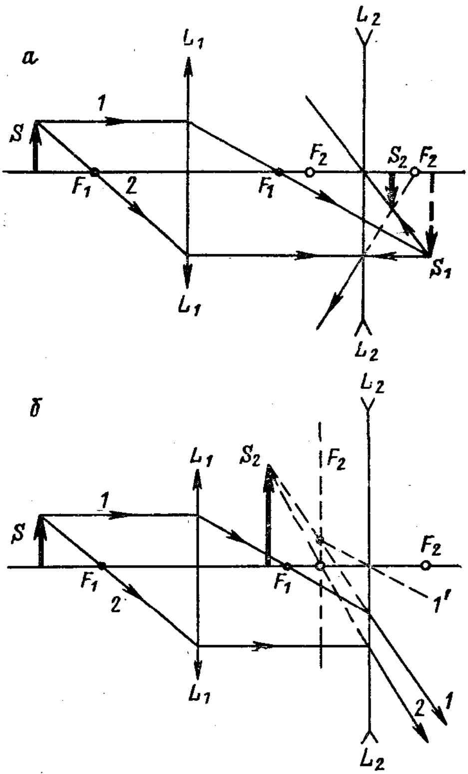
### ЗАДАЧА 145

Выполняя построение изображения стрелки $S$ в оптической системе из двух линз $L_1$ и $L_2$ (рис. *а*), школьник воспользовался стандартным приемом: построил изображение $S_1$ предмета $S$ в первой линзе $L_1$ и, рассматривая теперь $S_1$ как предмет, построил его изображение $S_2$ во второй линзе, которое, по его мнению, и явилось изображением исходного предмета в сложной оптической системе из двух линз.

Согласны ли вы с этим школьником?

### РЕШЕНИЕ

Школьник допустил серьезную ошибку. Изображение $S_1$ лежит за линзой $L_2$. Реальные лучи *1* и *2*, падающие на эту линзу и создающие за ней изображение $S_1$, сходятся, в то время как пучки лучей от любой точки любого действительного объекта являются расходящимися. В данном случае изображение $S_1$ является для линзы $L_2$ мнимым объектом, и для его построения указанные в условиях задачи приемы несправедливы.

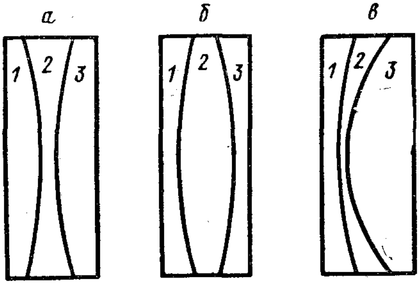


К задаче 145.

Чтобы избежать подобных ошибок (всегда возможных при построениях в сложных оптических системах), полезно отказаться от использования промежуточных изображений и ограничиться построением хода сначала одного произвольного луча от предмета последовательно через все оптические элементы, а затем выполнить то же для любого другого луча. Точка их пересечения по выходе из системы и укажет положение окончательного изображения (рис. *б*). Вспомогательный прием, необходимый при таком способе, указан в предыдущей задаче.

## ЗАДАЧА 146

Три тонкие линзы сделаны так, что сложенные вместе могут образовать плоскопараллельную пластинку. Известно, что фокусное расстояние линз *1* и *2*, сложенных вместе, равно $F_{1\,2} < 0$, а линз *2* и *3*, сложенных вместе, равно $F_{2\,3} < 0$. Определить фокусные расстояния всех трех линз по отдельности и указать, какие из них положительные.




К задаче 146.

### РЕШЕНИЕ

Полезно для наглядности восстановить форму линз (см. рисунок). Из трех вариантов, при которых линзы могут образовать плоскопараллельную пластинку, условия задачи ($F_{1\,2} < 0$, $F_{2\,3} < 0$) обязывают выбрать вариант *а*.

Для решения записываются уравнения для оптической силы линз: $D_1 + D_2 = D_{1\,2}$, $D_2 + D_3 = D_{2\,3}$, $D_1 + D_2 + D_3 = 0$, где $D_1 = 1/F_1$, $D_2 = 1/F_2$ и т. д. Сложив первые два уравнения и вычтя из этой суммы третье, получаем, что $D_2 = D_{1\,2} + D_{2\,3} = 1/F_2 < 0$ и т. д.

## ЗАДАЧА 147

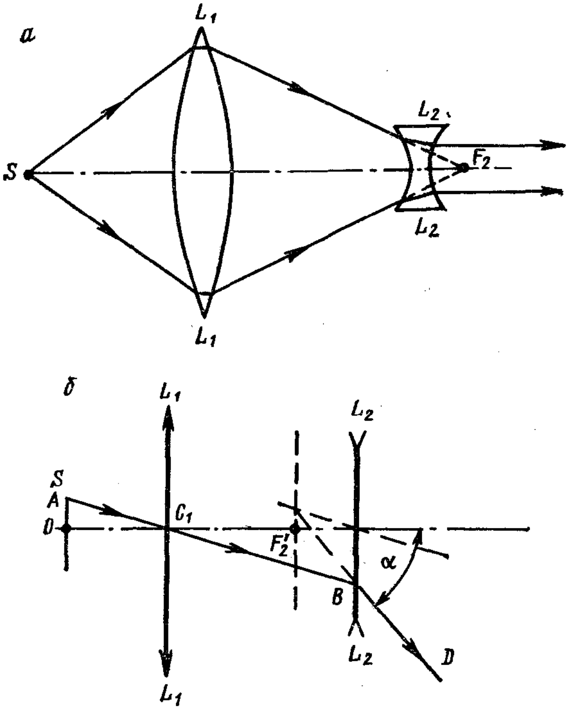
Среди многочисленных проектов получения „лучей смерти“ была, в частности, предложена схема, подобная изображенной на рис. *а*. Здесь $S$ — мощный источник световых лучей, $L_1$ и $L_2$ — собирающая и рассеивающая линзы соответственно. Если расположить последнюю так, чтобы ее фокус $F_2$ совпал с изображением $S'$ источника $S$, образованным линзой $L_1$, то на выходе $L_2$ лучи пойдут параллельным пучком, тем более узким, чем меньше фокусное расстояние $L_2$, и с тем большей, следовательно, концентрацией энергии в пучке. Подобрав соответствующий источник $S$, диаметры и фокусные расстояния линз $L_1$ и $L_2$, разместив все надлежащим образом, можно, по мнению изобретателя, сформировать луч, способный поражать любую цель в пределах прямой видимости.

Так ли это?

В ответе пренебречь потерями света в линзах и в атмосфере. Линзы считать идеальными.

## РЕШЕНИЕ

Построение, выполненное на рис. *а*, справедливо лишь для лучей, выходящих из центральной точки $O$ источника $S$, лежащей на главной оптической оси. Но одна точка не может излучать энергию. В противном случае весь протяженный источник давал бы бесконечно большое излучение, что физически бессмысленно.




К задаче 147.

Наши „точечные" источники — обычная в физике идеализация. Отличную от нуля энергию могут излучать лишь источники конечных размеров.

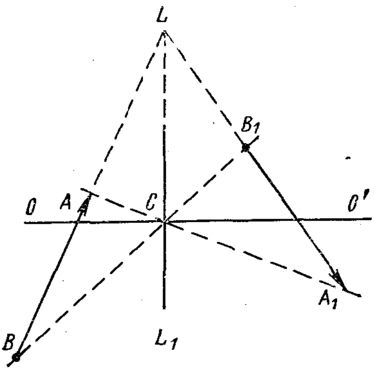
Пусть в действительности источник $S$ является диском (рис. *б*). Построим ход лучей через линзы $L_1$, $L_2$ от верхней точки $A$ этого диска.

Заметим, что точка $O$ является фокусом рассматриваемой двухлинзовой оптической системы: лучи из $O$, пройдя систему, идут параллельным пучком. Следовательно, и лучи из точки $A$, лежащей в фокальной плоскости, будут на выходе параллельными, поэтому достаточно построить ход одного лишь луча, например $AC_1$. Воспользовавшись способом, указанным в задаче 144, найдем направление вышедшего из системы луча $BD$.

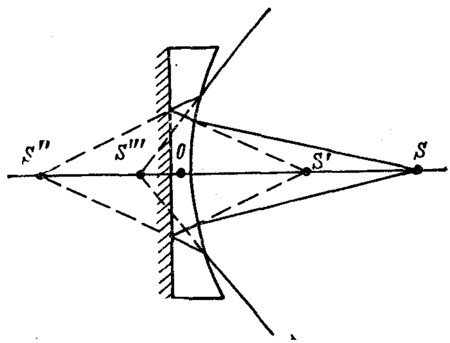
Итак, в действительности, хотя от одной точки источника лучи идут параллельным пучком, в целом поток энергии расходится под углом $\alpha$. При этом угол $\alpha$ тем больше, чем короче фокусное расстояние линзы $L_2$ и чем, следовательно, был у́же выходной пучок по мнению изобретателя.

### ЗАДАЧА 148

На рисунке изображено положение прямолинейного отрезка $AB$ и его изображения $A_1B_1$ в тонкой линзе. Построить положение линзы, ее главной оптической оси и фокусов.




К задаче 148.




К задаче 149.

### РЕШЕНИЕ

Требуемое построение изображено на рисунке; $LL_1$ — положение линзы, $OO' \perp LL_1$ — положение ее главной оптической оси. Положения фокусов после этого построить легко (см. задачи 142, 143, 144).

### ЗАДАЧА 149

Плоская поверхность плосковогнутой линзы с фокусным расстоянием $F$ посеребрена. На расстоянии $d$ от линзы со стороны вогнутой поверхности находится точечный источник $S$.

Где располагается его изображение?

### РЕШЕНИЕ

Пройдя сквозь линзу, лучи от источника $S$ упадут на зеркало так, как если бы линзы не было, а источник находился в точке $S'$ (см. рисунок). По формуле линзы $OS' = f$, $1/d + 1/f = -1/F$,

$f = -Fd/(F+d)$. Знак минус свидетельствует, что изображение мнимое.

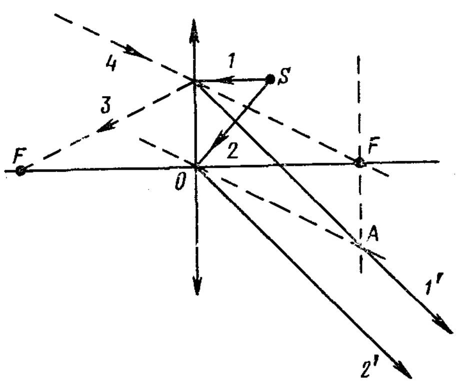
Отразившись от зеркала, лучи снова пройдут сквозь линзу. Можно считать, что зеркала нет, а лучи при вторичном прохождении сквозь линзу шли из точки $S''$, симметричной точке $S'$ относительно зеркала. Мнимое изображение источника окажется в $S'''$. С учетом правила знаков $S''O = |f| = -f$, $S'''O = x = |f|\, F/(F-f) = Fd/(2d+F)$.

## ЗАДАЧА 150

Плоская поверхность плосковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $F$ посеребрена. Построить изображение светящейся точки $S$ в такой системе. Действительное это изображение или мнимое?

### РЕШЕНИЕ

На рисунке выполнено построение для случая, когда расстояние $d$ источника от линзы равно $F/2$. Разумеется, принято, что линза обращена к источнику выпуклой стороной.



К задаче 150.

Луч *2*, проходящий через оптический центр, ведет себя так, как если бы на месте линзы находилось просто плоское зеркало.

Луч *1*, параллельный главной оптической оси, падает на зеркало в направлении *3* (проходящем через задний фокус), отражается от зеркала в направлении *4* (проходящем через передний фокус) и после второго прохождения через линзу пересекается с побочной оптической осью $OA$ в фокальной плоскости. Легко доказать, что в рассматриваемом случае изображение отсутствует, так как лучи *1'* и *2'* параллельны.

При $d > F/2$ изображение действительное, при $d < F/2$ — мнимое.

## ЗАДАЧА 151

Построить изображение $S'$ Солнца $S$ в заданной собирающей линзе.

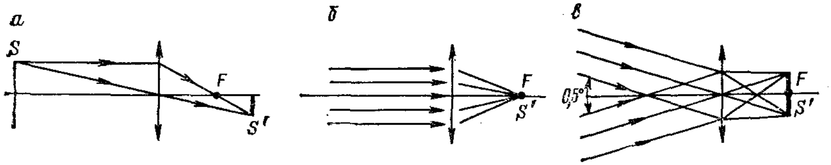
### РЕШЕНИЕ

При выполнении этой задачи часто встречаются две ошибки.

1. Лучи, падающие на линзу от одной точки Солнца, рисуют расходящимися (рис. *а*);

2. Солнце принимают за точечный источник (рис. *б*).

В действительности от каждой точки Солнца на линзу падает пучок параллельных лучей, но вследствие конечных угловых размеров нашего светила ($\approx 0{,}5^\circ$) пучки лучей от разных точек между собой не параллельны.

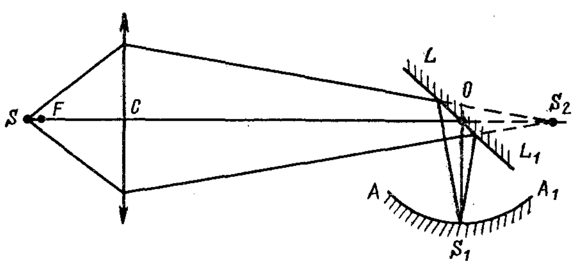



К задаче 151.

По определению пучок параллельных лучей после преломления в линзе собирается в одной из точек фокальной плоскости. Луч, проходящий через центр линзы, своего направления не меняет. Пользуясь этими правилами, легко выполнить требуемое построение (рис. *в*).

### ЗАДАЧА 152

Светящаяся точка $S$ с помощью линзы $C$, фокусное расстояние $F$ которой равно 10 см, и вращающегося зеркала $LL_1$ проектируется на круглый экран $AA_1$ (см. рисунок). Определить линейную




К задаче 152.

скорость $v$, с которой перемещается изображение точки по экрану, если зеркало вращается вокруг оси $O$ с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. Расстояние от центра линзы до оси зеркала $l = 300$ см, расстояние светящейся точки до центра линзы $d = 10{,}2$ см.

РЕШЕНИЕ

Не будь зеркала $LL_1$, изображение точки $S$ находилось бы в точке $S_2$, причем $CS_2 = dF/(d - F) = 510$ см.

В присутствии зеркала изображение точки $S$ оказывается в точке $S_1$, причем $OS_2 = OS_1$. Так как $OC = l = 300$ см, то радиус экрана $R = OS_1 = 210$ см.

При повороте зеркала на угол $\alpha$ луч $OS_1$ поворачивается на угол $2\alpha$; таким образом, угловая скорость точки $S_1$ равна $2\omega$. Следовательно, $v = 2\omega R = 420$ см/с.

### ЗАДАЧА 153

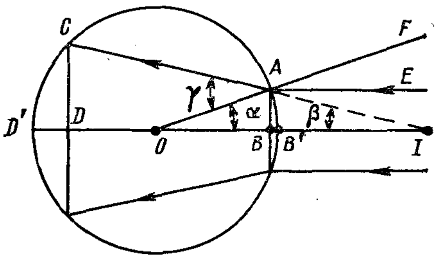
На тонкую пустую сферическую колбу, помещенную в жидкость, падает узкий параллельный пучок света так, что ось пучка проходит через центр колбы. На противоположной стороне колбы пучок имеет диаметр, вдвое отличающийся от диаметра пучка, падающего на колбу. Каков показатель преломления жидкости, в которую погружена колба?

РЕШЕНИЕ

Так как показатель преломления воздуха $n_0$ меньше показателя преломления $n$ любой жидкости, диаметр $D$ выходящего пучка может быть лишь вдвое больше, но не вдвое меньше, диаметра $d$ падающего пучка.

Из чертежа (см. рисунок) находим, что $d/2 = AB$, $D/2 = CD$, $\angle EAF = \angle FOB = \alpha$,

$$\frac{n_0}{n} = \frac{\sin \angle EAF}{\sin \angle CAO} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}. \quad (1)$$




К задаче 153.

Малое относительно радиуса колбы $R$ значение $d$ позволяет:

а) считать точку $B$ совпадающей с точкой $B'$, а точку $D$ — с точкой $D'$; при этом $DB \approx D'B' = 2R$, а так как $CD = 2AB$, то $B'I = 2R$;

б) измерять углы $\alpha$ и $\beta$ следующим образом: $\alpha \approx AB/OB \approx d/2R$, $\beta = CD'/4R \approx d/4R \approx \alpha/2$, и тогда угол $\gamma$, как внешний по отношению к треугольнику $OAI$, можно найти из выражения $\gamma = \alpha + \beta = 3\alpha/2$;

в) заменить в соотношении (1) синусы углов значениями самих углов.

Тогда получаем $n = n_0 \sin\gamma/\sin\alpha \approx n_0\gamma/\alpha = 3/2$.

### ЗАДАЧА 154

Стеклянный куб лежит на монете. При каких значениях показателя преломления стекла монета не видна через боковые грани?

РЕШЕНИЕ

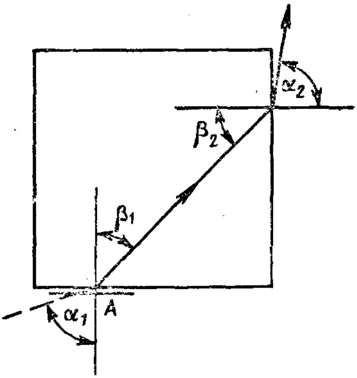
Луч от монеты $A$ через воздушный зазор между монетой и нижней гранью куба падает на нижнюю грань. Пусть угол падения равен $\alpha_1$, угол преломления — $\beta_1$ (см. рисунок).

Пройдя сквозь куб, луч под углом $\beta_2$ падает на боковую грань и под углом $\alpha_2$ выходит из куба. Только в случае, если луч выйдет, а не испытает полного внутреннего отражения, монету можно будет увидеть.

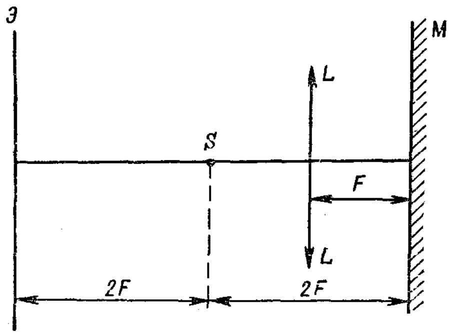
Легко догадаться, что граничный случай (видно — не видно) реализуется при $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$. Но тогда $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$. Следовательно, $n = \sin 90^\circ / \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. Если $n > \sqrt{2}$, монету не видно.

## ЗАДАЧА 155

На оптической скамье последовательно расположены: экран $Э$, точечный источник света $S$, положительная линза $L$ и плоское зеркало $M$. Расстояния указаны на рисунке.



К задаче 154.



К задаче 155.

Во сколько раз изменится освещенность в центре экрана, если плоское зеркало передвинуть вправо на расстояние $a$?

### РЕШЕНИЕ

Освещенность в центре экрана определяется суммой освещенностей от самого источника и от его изображения, создаваемого лучами после их прохождения через линзу, отражения от зеркала и вторичного прохождения через линзу. Так как источник расположен в фокусе линзы, на зеркало падает параллельный пучок лучей, остающийся параллельным и после отражения. Положение зеркала на оптической скамье не нарушает этой параллельности, следовательно, освещенность экрана не меняется.

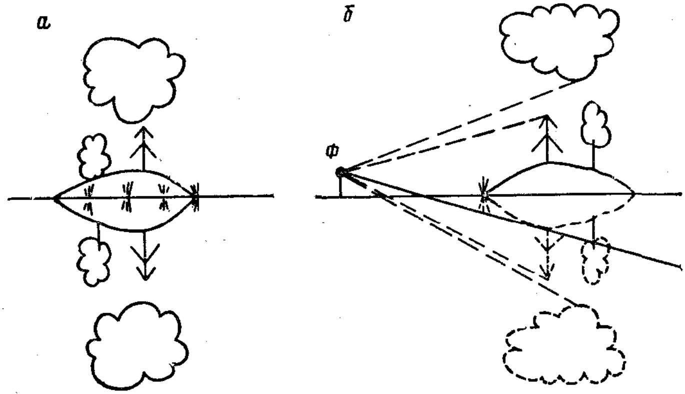
## ЗАДАЧА 156

На рис. $a$ изображен пейзаж, сфотографированный с лодки на спокойном озере. Как определить, где на фотографии настоящий остров, а где его отражение в воде?

По яркости и четкости верхняя и нижняя половины снимка одинаковы.

## РЕШЕНИЕ

Рассмотрим ход лучей, достигших фотоаппарата непосредственно и после отражения от поверхности воды. При этом необходимо учесть, что фотоаппарат Ф расположен выше поверхности воды. В качестве контрольных точек выберем вершину ели и ближайший к ней край облака. На рис. *б* отчетливо видно, что в прямых лучах эти точки разделены бо́льшим угловым расстоянием, чем в отраженных. Следовательно, в отраженном изображении облака бо́льше „прижаты" к вершинам деревьев, т. е. рис. *а* перевернут.




К задаче 156.

Существуют и другие признаки, по которым можно отличить оригинал от его изображения в воде.

На рис. *б* построено изображение пейзажа в воде (не имеет значения, что воды нет там, где находится остров; изображение все равно существует, см. задачу 142). Видно, что изображение берега закрывает (экранирует) нижние части изображений более удаленных от берега предметов: на фотографии все отражения „обрезаны" снизу тем в бо́льшей степени, чем дальше предметы расположены от берега.

## ЗАДАЧА 157

Вы стоите лицом к вертикальному плоскому зеркалу и смотрите в него. Видно, что зеркало переворачивает правое и левое. Действительно, ваше изображение пишет левой рукой (если вы не левша), сердце у него справа и т. д.

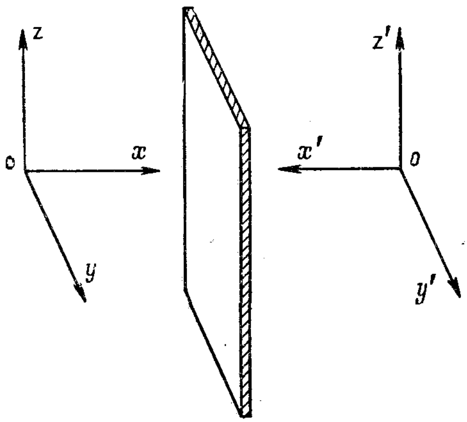
Почему зеркало „предпочитает" именно это направление: правое — левое? Почему не переворачивается, например, верх и низ? *

---

* Часто говорят: зеркало ничего не переворачивает — ни правое и левое, ни верх и низ; *оно лишь отражает падающие на него лучи.* Последнее утверждение, безусловно, верно, но не решает задачи. Поясним это. Если

РЕШЕНИЕ

Прежде всего можно заметить, что зеркало изотропно по отношению к любым направлениям, параллельным его плоскости. Действительно, если поворачивать зеркало вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, то с изображением ничего не происходит. Таким образом, зеркало „не знает", где правое, левое, верх или низ (и „предпочесть" одно другому не может). Но прекрасно знаем об этом мы: все-таки наше изображение существенно отличается от оригинала.




К задаче 157.

Посмотрим, как зеркало преобразует прямоугольную координатную систему $xyz$ в зеркальную систему $x'y'z'$ (см. рисунок). Легко видеть, что при этом изменяет направление в пространстве единственная ось — ось $ox$, положение которой в этих условиях действительно является особым: она направлена от оригинального объекта (системы $xyz$) к оптическому инструменту — зеркалу.

Системы $xyz$ и $x'y'z'$ обладают следующей особенностью: никакими поворотами и перемещениями их нельзя совместить полностью. Можно лишь добиться совпадения по направлению любых двух пар одноименных осей ($x$ и $x'$, $y$ и $y'$; $x$ и $x'$, $z$ и $z'$; $y$ и $y'$, $z$ и $z'$); при этом направления оставшихся осей, т. е. $z$ и $z'$, $y$ и $y'$, $x$ и $x'$, соответственно противоположны.

Как мы узнаем о том, что наше изображение в зеркале чем-то необычно, что оно перевернуто слева направо относительно нас? Мысленно мы пытаемся совместиться с изображением и оцениваем результат. Это совмещение можно выполнить различными способами, например, обойти зеркало, поворачиваясь вокруг вертикали так, чтобы в итоге обратиться лицом в ту же сторону, что и изображение. Это дает право утверждать, что у изображения правое и левое поменялись местами. Другой способ совмещения: перелезть через верхний край зеркала и опуститься за зеркалом

---

зеркало действительно не меняет местами правое и левое, то как объяснить результат несложного опыта? Поставьте вашего приятеля перед двумя вертикальными, расположенными под прямым углом друг к другу соприкасающимися зеркалами $A$ и $B$ так, чтобы он видел в них свое изображение второго порядка, т. е. изображение в зеркале $A$ своего изображения в $B$. (Для этого нужно смотреть в направлении ребра двугранного угла между зеркалами.) Скомандуйте: „Пусть изображение наклонит голову!" Требование будет выполнено. Другая команда: „Пусть изображение закроет левый глаз!" Если эта команда выполняется без размышлений, ошибка неминуема.

головой вниз (т. е. поворачиваться вокруг горизонтальной оси). Выполнив эту операцию, мы обнаружили бы, что у изображения перевернут верх и низ, а правая и левая стороны расположены так же, как и у нас. Поскольку передняя и задняя стороны человеческого тела совсем не похожи друг на друга, то в обоих способах мы стараемся повернуться так, чтобы смотреть в том же направлении, что и изображение.

Глядя в зеркало, мы выбираем первый, естественный для нас способ совмещения, причем, конечно, делаем это без рассуждений, автоматически. Почему? Дело в том, что строение человеческого тела и наше поведение теснейшим образом связаны с вертикальным направлением силы тяжести. Так, верхняя и нижняя части нашего тела несимметричны и неравноправны. Если от вас требуется повернуться кругом (т. е. обратиться лицом в противоположную сторону), то вы выполняете это действие, поворачиваясь именно вокруг вертикали, а не иначе. Хотя, как мы видели выше, можно „заставить" зеркало переворачивать верх и низ, но исполняемая при этом операция совмещения настолько противоестественна (а само совмещение трудно и назвать совмещением), что мы никогда не сможем признать ее равноправность с привычной операцией. Для нас, несмотря на все объяснения, зеркало будет продолжать переворачивать правое и левое.

Итак, как это ни странно на первый взгляд, указанная „особенность зеркала" связана с тем, что сила тяжести направлена вертикально вниз.

И еще одно существенное замечание. Правая и левая половины нашего тела *почти* симметричны относительно вертикальной плоскости. Однако если бы эта симметрия была идеальной, то наше отражение в зеркале ничем не отличалось бы от оригинала (посмотрите на изображение в зеркале, скажем, молочной бутылки). Более того, различие между изображением и оригиналом становится особенно заметным, когда мы каким-либо способом нарушаем симметрию правое — левое: например, поднимаем одну из рук.

В качестве иллюстрации рассмотрим воображаемую экзотическую планету, на которой живут существа, по строению тела во всем похожие на нас. Отличаются они от нас только тем, что все лежат на одном боку, скажем, на правом (как они при этом перемещаются, неважно). Собеседники на этой планете знают, что когда они повернуты лицом друг к другу, то ноги их направлены в разные стороны. Для этих „лежебоков" зеркало „меняет местами голову и ноги". Нам не удалось бы убедить их в том, что „переворачиваются правое и левое". Однако и в этом случае зеркало „учитывает", что сила тяжести направлена от левого бока к правому, а не от головы к ногам.

## ЗАДАЧА 158

Шарику радиусом $R$ сообщили малый заряд $q$. Как изменится красная граница $\nu_0$ фотоэффекта?

## РЕШЕНИЕ

Для нейтрального шарика красная граница фотоэффекта определяется потенциальным барьером на границе металла и подчиняется соотношению

$$h\nu_0 = A, \qquad (1)$$

где $h$ — постоянная Планка; $A$ — работа выхода для электрона.

После появления на шарике заряда электрон, покидая шарик, участвует в электрическом взаимодействии с зарядом $q$. Энергия $W$ этого взаимодействия такова, что $W = e\varphi = eq/R$, где $e$ — заряд электрона; $\varphi$ — потенциал шарика.

При этом соотношение (1) принимает вид

$$h\nu_1 = A + W = A + eq/R. \qquad (2)$$

Здесь $\nu_1$ — искомая красная граница. Сдвиг $\Delta\nu$ этой границы найдем из соотношений (1) и (2): $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_0 = eq/Rh$.

Очевидно, если $\Delta\nu < 0$ и $|\Delta\nu| > \nu_0$, электроны будут сами покидать шарик. Именно поэтому в условиях задачи на заряд $q$ наложено условие быть малым.

## ЗАДАЧА 159

Вольфрамовый шарик радиусом 10 см, находящийся в вакууме, облучают светом с длиной волны $\lambda = 2000$ Å. Определить установившийся заряд шарика, если работа выхода для вольфрама $A = 4{,}5$ эВ.

## РЕШЕНИЕ

Кинетическую энергию вылетающих при облучении электронов можно определить из уравнения Эйнштейна $h\nu = A + mv^2/2$, где $\nu$ — частота облучения; $m$ — масса; $v$ — скорость электрона.

Заряд шарика является установившимся, если все электроны, покидающие шарик, возвращаются под действием электростатического поля шарика. При этом наступает состояние динамического равновесия.

У поверхности шарика электрон обладает энергией $E = mv^2/2 - eq/R$, а его энергия в бесконечно удаленной точке равна нулю. Следовательно, $E = 0$ и $q = mv^2R/2e = (h\nu - A)R/e$. Подставляя числовые значения, получаем, что $q = 0{,}056$ ед. $GGSE$.