П. АППЕЛЬ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ТОМ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА. ДИНАМИКА ТОЧКИ

ПЕРЕВОД С ПЯТОГО ФРАНЦУЗСКОГО ИЗДАНИЯ
И. Г. МАЛКИНА

ФМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCE

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL

MEMBRE DE L'INSTITUT
RECTEUR HONORAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CINQUIÈME ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE

TOME PREMIER

STATIQUE. DYNAMIQUE DU POINT

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Многотомный «Трактат по теоретической механике» выдающегося французского ученого П. Аппеля (1855—1930), над созданием которого автор работал на протяжении нескольких десятков лет, пользуется во всех странах широкой известностью среди специалистов, работающих в области механики. По обилию материала, полноте и строгости изложения этот капитальный труд далеко выходит за рамки обычного учебника и представляет собою по существу энциклопедию знаний в области классической механики, отражающую уровень развития этой науки к концу XVIII — началу XIX столетий. Естественно, что при дальнейшем развитии науки и техники некоторые области исследований в механике значительно расширились, а трактовка многих вопросов изменилась. Однако фундаментальный курс Аппеля не утратил своей ценности и в наши дни.

Первые три тома трактата Аппеля были изданы в переводе на русский язык (с 3-го французского издания) еще в 1911 г. и давно уже стали библиографической редкостью. Настоящее издание представляет собою новый перевод (с 5-го и 6-го французских изданий) первых двух томов этого трактата, содержащих законченное изложение классической механики точки, системы материальных точек и твердого тела. При переводе лишь в некоторых местах (иногда без особых оговорок) были изменены устаревшие или не поддающиеся буквальному переводу термины и сняты рекомендации литературы. В основном же текст перевода полностью следует оригиналу.

В связи с безвременной кончиной И. Г. Малкина научную редакцию текста перевода как первого, так и второго тома осуществил С. М. Тарг.

Книга может служить хорошим пособием для студентов и аспирантов механико-математических факультетов университетов и ценным руководством для научных работников, преподавателей и инженеров, работающих в области теоретической механики или пользующихся этой наукой при технических исследованиях.

ВВЕДЕНИЕ

Среди математических наук первой является наука о *вычислениях*, которая основывается на единственном понятии о *числе* и к которой стремятся свести все остальные науки. Затем следует *геометрия*, которая вводит новое понятие — понятие о *пространстве*. В геометрии рассматриваются точки, описывающие линии, линии, описывающие поверхности, и т. д., но в ней никоим образом не касаются *времени*, в течение которого осуществляются эти движения. Если ввести понятие времени, то получится более сложная наука, называемая *кинематикой*, которая изучает геометрические свойства движений в их соотношениях во времени, но в которой не касаются физических причин движения. Этим последним вопросом занимается *механика*. Необходимо, однако, заметить, что механика не раскрывает действительных причин физических явлений и довольствуется заменой их некоторыми абстрактными причинами, называемыми *силами* и способными вызвать тот же механический эффект.

Предметом механики является решение двух следующих задач:

1°. Найти движение, которое получает система тел под действием заданных сил;

2°. Найти силы, способные сообщить системе тел заданное движение.

Прежде чем приступить к механике, мы изложим теорию *геометрических величин* или *векторов*, а после этого дадим элементарные сведения из кинематики.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ ВЕКТОРОВ

Излагаемые в этой главе геометрические теории введены главным образом Пуансо, Шалем и Мёбиусом. Они находят приложение во многих важных вопросах геометрии, кинематики, механики и физики. Так, например, векторами изображаются скорости, ускорения, вращения, силы, вихри в гидродинамике и т. д.

I. Определения

1. Геометрические величины, или векторы. *Геометрической величиной*, или *вектором*, называется отрезок прямой A_1B_1 (рис. 1), имеющий *начало* в точке A_1 и *конец* в точке B_1.

Если отрезок A_1B_1 неограниченно продолжить в обе стороны, то получится бесконечная прямая D_1, которая называется *линией действия вектора*, или его *основанием*. Вектор обычно определяется следующими элементами: 1) своим *началом* или *точкой приложения* A_1; 2) своей *линией действия*, совпадающей с неограниченной прямой A_1D_1; 3) своим направлением, обозначаемым стрелкой на конце B_1 и совпадающим с направлением, в котором движется точка, перемещающаяся из начала A_1 к концу B_1; 4) своим *модулем* P_1, являющимся длиной отрезка A_1B_1.

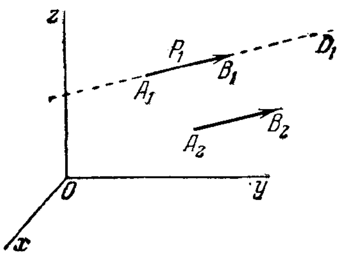


Рис. 1.

Аналитически вектор определяется координатами (x_1, y_1, z_1) его начала и (x_1', y_1', z_1') его конца относительно трех осей координат, или координатами (x_1, y_1, z_1) его начала и проекциями X_1, Y_1, Z_1 отрезка A_1B_1 на эти оси. При этом знаки проекций определяются обычными правилами аналитической геометрии. Эти проекции, очевидно, равны

$$X_1 = x_1' - x_1, \quad Y_1 = y_1' - y_1, \quad Z_1 = z_1' - z_1. \tag{1}$$

Мы будем обозначать вектор одной буквой P_1, представляющей его длину или модуль и помещенной на его конце. В тех случаях, когда можно опасаться смешения с буквами, изображающими числа, мы будем обозначать вектор A_1B_1 или P_1 также через (A_1B_1), (P_1) или через $\overrightarrow{A_1B_1}$, или $\boldsymbol{P}_1$ *).

Два вектора называются *геометрически равными*, если они параллельны, имеют одинаковые модули и одинаково направлены. Два вектора называются *равными и противоположными*, если они равны, параллельны и направлены в противоположные стороны.

2. Различные категории векторов. Все векторы, в зависимости от того, какие физические или механические величины они представляют, могут быть разделены на три следующие категории:

1°. Прежде всего может случиться, что два геометрически равных вектора изображают одну и ту же физическую или механическую величину. Как мы увидим дальше, это будет, например, справедливо для так называемых векторов моментов пары. Такого рода векторы, не имеющие ни определенной линии действия, ни определенной точки приложения, называются *свободными*.

2°. Может, однако, случиться, что два геометрически равных вектора A_1B_1 и A_2B_2 (рис. 2) изображают одну и ту же физическую величину лишь при условии, что они имеют *общую линию действия*, но они изображают различные физические величины, если имеют различные линии действия. Это, например, имеет место для векторов, изображающих силы, действующие на твердое тело. Такие неотделимые от линии действия векторы называются *скользящими*.

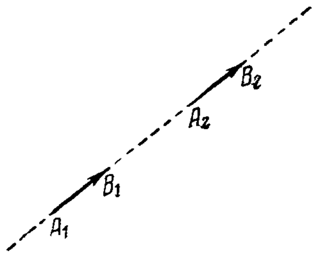


Рис. 2.

3°. Может, наконец, случиться, что изображаемая физическая величина такова, что два различных вектора изображают две различные физические величины, т. е. что вектор *не может быть отделен от своей точки приложения*. Такого рода векторы называются *связанными*. Связанным будет, например, вектор, изображающий скорость движущейся точки в какой-нибудь момент времени. Действительно, этот вектор не может быть отделен от движущейся точки.

Мы рассмотрим последовательно указанные выше три категории векторов и будем характеризовать их некоторыми числами, которые в известном смысле являются их координатами.

II. Свободные векторы. Три координаты свободного вектора

3. Три координаты свободного вектора. Возьмем три оси $Oxyz$ (рис. 1) и обозначим через X_1, Y_1, Z_1 алгебраические значения проекций вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ на эти оси, причем проектирование на какую-нибудь ось производится параллельно плоскости, проходящей через

*) Скобками обозначается еще система векторов (S) (*Прим. перев.*)

две другие оси. Так как два геометрически равных вектора имеют, очевидно, одинаковые проекции и два вектора, имеющие одинаковые проекции, геометрически равны, то свободный вектор характеризуется тремя числами X_1, Y_1, Z_1, которые являются его *координатами*.

Два вектора P_1 и P_2 с проекциями X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 *геометрически равны*, когда

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2;$$

равны и *противоположны*, когда

$$X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2;$$

параллельны, когда их проекции пропорциональны:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Случай прямоугольных осей. Направляющие косинусы вектора. Допустим, что оси координат Ox, Oy, Oz являются прямоугольными, и обозначим через α_1, β_1, γ_1 косинусы углов, которые образует с этими осями вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, имеющий модуль P_1. Проектируя вектор на эти оси, получим

$$X_1 = P_1\alpha_1, \quad Y_1 = P_1\beta_1, \quad Z_1 = P_1\gamma_1 \tag{2}$$

и, кроме того,

$$P_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}.$$

Скалярное произведение двух векторов; угол между ними. Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$. Их *скалярным* *) *произведением* (согласно мемуару Грассмана, Геометрический анализ, 1846) называется число

$$P_1P_2\cos(P_1P_2),$$

получаемое умножением произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. В этом произведении первые два множителя положительны; третий множитель $\cos(P_1P_2)$ *положителен, отрицателен или равен нулю* в зависимости от того, будет ли угол между обоими векторами *острым*, *тупым* или *прямым*.

Предполагая снова оси прямоугольными, обозначим через X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 проекции обоих векторов на эти оси, а через α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 — их направляющие косинусы. Имеем

$$\cos(P_1P_2) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2,$$

откуда, заменяя α_1, α_2, ... найденными из формул (2) значениями $\frac{X_1}{P_1}$, $\frac{X_2}{P_2}$, ..., получим формулу

$$P_1P_2\cos(P_1P_2) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \tag{3}$$

*) В оригинале употребляется термин «внутреннее произведение». (*Прим. перев.*)

являющуюся аналитическим выражением скалярного произведения двух векторов и позволяющую определить косинус угла между ними.

Условие перпендикулярности двух векторов. Для того чтобы два вектора были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между ними равнялся нулю. Таким образом, в прямоугольных осях получаем условие

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \qquad (4)$$

Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ мы будем обозначать символом $\boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{P}_2$.

Другие названия и обозначения. Дж.-В. Гиббс (Vector Analysis, New York et Londres, 1902) употребляет для определения скалярного произведения название *прямое произведение* двух векторов; О. Хэвисайд (Electromagnetic Theory) — название *скалярное произведение* и М. Карвалло — *алгебраическое произведение.* Были предложены и различные обозначения: наиболее простым обозначением скалярного произведения является запись в виде $\boldsymbol{P}\,|\,\boldsymbol{P}_1$. Имеем $\boldsymbol{P}\,|\,\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_1\,|\,\boldsymbol{P}$. Проекция вектора на ось есть скалярное произведение этого вектора на вектор, численно равный $+1$ и имеющий данную ось своей линией действия.

4. Геометрическая сумма произвольного числа свободных векторов. Пусть заданы векторы (рис. 3) $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Возьмем произвольную точку A за исходную и построим последовательно систему векторов, геометрически равных заданным векторам, а именно: сначала построим вектор AC_1, равный P_1, в конце его — вектор C_1C_2, равный P_2, затем вектор C_2C_3, равный $P_3, \ldots$ и, наконец, вектор $C_{n-1}C_n$, равный P_n. Вектор AC_n замыкает полученный таким образом многоугольник. Он называется *геометрической суммой* R заданных векторов, а заданные векторы *составляющими.*

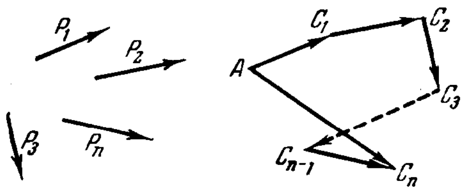


Рис. 3.

Легко убедиться, что геометрическая сумма не зависит от порядка, в котором берутся составляющие векторы.

Для обозначения того, что вектор R является геометрической суммой векторов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, мы будем писать:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\ldots+\boldsymbol{P}_n \quad \text{или} \quad (R)=(P_1)+(P_2)+\ldots+(P_n).$$

Проекции геометрической суммы векторов. Пусть $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_n, Y_n, Z_n$ — проекции векторов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, а X, Y, Z — проекции их геометрической суммы R. Согласно теореме о проекциях, проекция вектора $R=AC_n$ на произвольную ось равна сумме проекций сторон многоугольника $AC_1C_2 \ldots C_n$, т. е. сумме проекций составляющих векторов. Таким образом, имеем

$$R \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n. \end{cases}$$

Равенство векторной суммы нулю. Если точка C_n совпадает с точкой A, то сумма R равна нулю. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы X, Y, Z *равнялись нулю.*

Примечание. Пусть $\boldsymbol{P}$ — произвольный вектор. Если

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \ldots + \boldsymbol{P}_n,$$

то, взяв скалярные произведения, получим:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}_2 + \ldots + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}_n.$$

Это равенство непосредственно вытекает также из того, что проекция вектора $\boldsymbol{R}$ на вектор $\boldsymbol{P}$ равна сумме проекций векторов $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ на вектор $\boldsymbol{P}$.

5. Геометрическая разность. *Геометрическая разность* векторов P_1 и P_2 (рис. 4) есть вектор Q, сумма которого с вектором P_2 равна вектору P_1. Проведем из некоторой точки A два вектора AC_1 и AC_2, геометрически равных заданным векторам P_1 и P_2. Тогда вектор Q, геометрически равный вектору C_2C_1, и будет искомым, так как

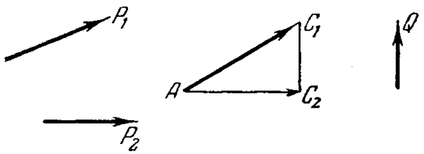


Рис. 4.

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{Q}.$$

Мы будем писать

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2.$$

Проекции геометрической разности векторов. Пусть X, Y, Z — проекции геометрической разности Q двух векторов P_1 и P_2, проекции которых равны соответственно X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2. Очевидно, имеем:

$$X = X_1 - X_2, \quad Y = Y_1 - Y_2, \quad Z = Z_1 - Z_2.$$

6. Положительное направление вращения вокруг оси. Пусть Δ — некоторая ось, на которой произвольным образом выбрано положительное направление, например, от z' к z (рис. 5). Мы будем говорить, что точка M, движущаяся по произвольной пространственной кривой C, вращается вокруг оси в *положительном направлении*, если для наблюдателя, смотрящего по направлению от z к z', точка движется *справа налево*. В противном случае точка вращается в *отрицательном направлении.*

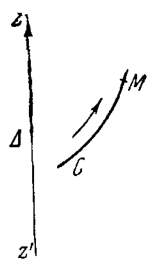


Рис. 5.

Рассмотрим, например, два вектора A_1P_1 и BP_2 (рис. 9). Допустим, что точка, перемещающаяся по направлению A_1P_1, поворачивается вокруг вектора BP_2, принятого в качестве оси, в каком-нибудь направлении. Тогда из рисунка видно, что и, наоборот, точка, перемещающаяся вдоль BP_2, вращается вокруг A_1P_1 в том же направлении.

Ориентация координатного триэдра. Мы будем предполагать, что координатный триэдр ориентирован таким образом, что поворот на $90°$ в положительном направлении вокруг оси Oz переводит ось Ox в ось Oy (рис. 1).

Примечание. При другом выборе положительного направления для сохранения формул необходимо изменить ориентацию осей, придерживаясь указанного правила.

7. Векторное произведение двух векторов. Проведем из какой-нибудь точки A векторы AP_1 и AP_2, геометрически равные двум заданным свободным векторам $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, и построим на них параллелограмм AP_1QP_2 (рис. 6). Проведем далее из точки A вектор $\overrightarrow{AG}$, перпендикулярный плоскости этого параллелограмма и содержащий столько единиц длины, сколько единиц площади содержится в параллелограмме. Направление вектора $\overrightarrow{AG}$ выберем таким образом, чтобы точка, пробегающая контур AP_1QP_2A, вращалась вокруг AG в *положительном направлении.* Этот вектор $\overrightarrow{AG}$ или $\boldsymbol{G}$ называется векторным, или внешним произведением векторов $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, что записывается следующим образом:

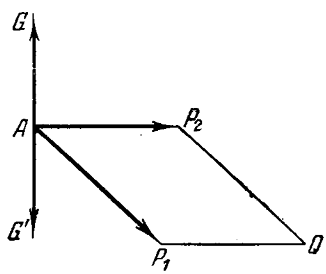


Рис. 6.

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2.$$

Грассман называет вектор $\boldsymbol{G}$ *дополнением* цикла AP_1QP_2A, определенного векторами $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$.

Векторное произведение $\boldsymbol{P}_2$ на $\boldsymbol{P}_1$ есть вектор $\overrightarrow{AG'}$ или $\boldsymbol{G}'$, противоположный вектору $\boldsymbol{G}$. Действительно, новое векторное произведение имеет ту же линию действия и тот же модуль, что и вектор $\boldsymbol{G}$, но оно направлено в противоположную сторону, так как точка, описывающая контур AP_2QP_1A, должна вращаться вокруг $\overrightarrow{AG'}$ в положительном направлении. Имеем:

$$\boldsymbol{G}' = \boldsymbol{P}_2 \times \boldsymbol{P}_1$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{P}_2 \times \boldsymbol{P}_1 = -\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2.$$

Если $\boldsymbol{P}_1$ совпадает с $\boldsymbol{P}_2$, то векторное произведение обращается в нуль:

$$\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_1 = 0.$$

III. Скользящие векторы. Пять координат скользящего вектора

8. Общие замечания. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ модуля P_1, приложенный в точке A_1. По предположению, если такой вектор переносить вдоль его линии действия D_1, то он по-прежнему будет представлять ту же самую физическую величину. При таком переносе вектор будет оставаться геометрически равным самому себе, и, следовательно, его проекция на какую-нибудь ось не будет изменяться. При этом, однако, не будут изменяться и некоторые другие геометрические величины, связанные с этим вектором.

Рассмотрим произвольную точку B пространства (рис. 7) и построим треугольник BA_1B_1, имеющий вершину в точке B, а основанием — вектор $\boldsymbol{P}_1$. Если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ будет скользить вдоль прямой D_1, то не будут изменяться следующие элементы:

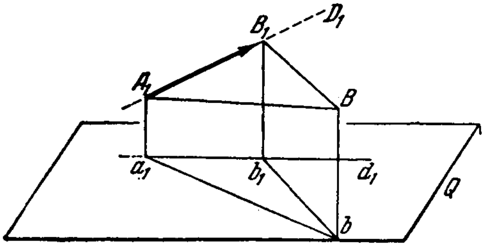


Рис. 7.

1°. плоскость треугольника BA_1B_1, являющаяся плоскостью, образованной прямой D_1 и точкой B,

2°. площадь треугольника BA_1B_1,

3°. направление, в котором точка, движущаяся вдоль вектора от A_1 к B_1, поворачивается вокруг B в плоскости BD_1.

Можно заметить, что если рассматриваемую фигуру спроектировать на какую-нибудь плоскость Q в фигуру ba_1b_1, то аналогичные элементы в треугольнике ba_1b_1 не изменятся при скольжении вектора P_1 вдоль прямой D_1.

Для уяснения этих обстоятельств вводятся следующие определения.

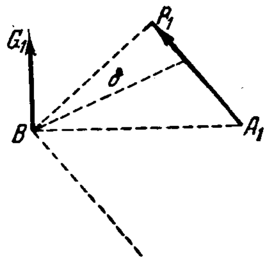


Рис. 8.

9. Теория моментов. 1. *Момент вектора относительно точки* (или векторный момент). Момент вектора P_1 относительно какой-нибудь точки B (рис. 8) есть вектор BG_1, приложенный в точке B и имеющий: 1) модуль, равный произведению $P_1 \cdot \delta$ модуля вектора P_1 на расстояние δ от точки B до этого вектора, 2) линию действия, перпендикулярную плоскости BA_1P_1, 3) направление такое, что точка, перемещающаяся по A_1P_1 от A_1 к P_1, поворачивается вокруг BG_1 в положительном направлении.

Модуль этого момента равен удвоенной площади треугольника BA_1P_1. Он равен нулю тогда, когда либо P_1, либо δ равно нулю. Момент не изменяется, когда вектор P_1 перемещается вдоль своей линии действия, или когда точка B перемещается вдоль прямой, параллельной этому вектору.

Пример. Векторное произведение $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$, определение которого дано в пункте 7, равно моменту вектора $\boldsymbol{P}_1$ относительно конца вектора $\boldsymbol{P}_2$ (рис. 6). Наоборот, векторное произведение $\boldsymbol{P}_2 \times \boldsymbol{P}_1$ равно моменту вектора $\boldsymbol{P}_2$ относительно конца вектора $\boldsymbol{P}_1$.

2. *Момент относительно оси.* Этот момент есть число положительное, отрицательное или равное нулю. Его называют иногда *скалярным моментом* относительно оси в противоположность векторному моменту относительно точки. Определяется он следующим образом: момент вектора P_1 относительно некоторой оси Δ (рис. 9), на которой выбрано положительное направление, есть алгебраическое значение проекции на эту ось момента вектора P_1 относительно точки, взятой на оси.

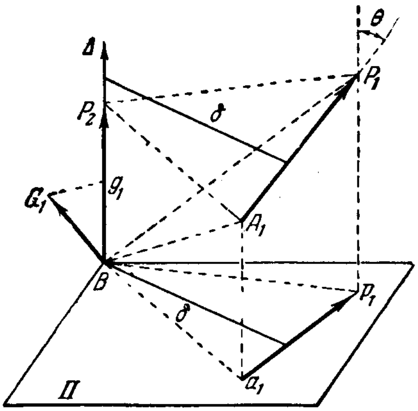


Рис. 9.

Чтобы такое определение имело смысл, необходимо показать, что значение момента не зависит от выбора точки на оси. Проведем через какую-нибудь точку B оси плоскость П, перпендикулярную оси, и пусть a_1p_1 — проекция вектора $\overrightarrow{A_1P_1}$ на эту плоскость, $\overrightarrow{BG_1}$ — момент вектора P_1 относительно точки B и Bg_1 — проекция $\overrightarrow{BG_1}$ на ось Δ. Так как угол между плоскостями A_1BP_1 и a_1Bp_1 равен углу между перпендикулярами к ним, то

$$2 \text{ площ. } a_1Bp_1 = 2 \text{ площ. } A_1BP_1 \cos \widehat{G_1Bg_1}, \quad Bg_1 = BG_1 \cos \widehat{G_1Bg_1}.$$

Но так как модуль BG_1 момента $\overrightarrow{BG_1}$ равен удвоенной площади A_1BP_1, то его проекция $\overline{Bg_1}$ равна по абсолютному значению удвоенной площади a_1Bp_1, а последняя величина не зависит, очевидно, от выбора точки B на оси Δ. Знак проекции Bg_1 также не зависит от выбора точки B и будет $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли точка, перемещающаяся вдоль A_1P_1, вращаться вокруг Δ в положительном или в отрицательном направлении.

Можно вывести несколько различных выражений для момента вектора P_1 относительно оси.

Обозначим через δ кратчайшее расстояние между вектором и осью, а через θ — угол между ними. Проекция отрезка δ на плоскость П равна самому отрезку, а величина p_1 равна $P_1 \sin\theta$, и поэтому момент $\mathfrak{M}_1$ относительно оси Δ будет

$$\mathfrak{M}_1 = \pm p_1\delta = \pm P_1\delta \sin\theta,$$

причем знак $+$ или $-$ берется в зависимости от того, будет ли точка, перемещающаяся вдоль A_1P_1, поворачиваться вокруг оси Δ в положительном или в отрицательном направлении.

Отложим на оси Δ в положительном направлении отрезок BP_2 длины P_2 и обозначим объем тетраэдра, имеющего A_1P_1 и BP_2 в качестве противоположных ребер, через объем (P_1, P_2). При этом он принимается положительным или отрицательным в зависимости от того, будет ли точка, перемещающаяся от начала к концу одного из векторов P_1 или P_2, поворачиваться вокруг другого вектора в положительном или в отрицательном направлении. Тогда момент вектора P_1 относительно Δ будет

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{6 \text{ объем. } (P_1, P_2)}{P_2}.$$

В самом деле, это равенство справедливо по знакам и по абсолютным значениям, так как рассматриваемый объем не изменится при перемещении вершин A_1 и P_1 до положений a_1 и p_1, что приведет к новому тетраэдру, объем которого V равен одной трети произведения P_2 на площадь a_1Bp_1; поэтому, абсолютное значение момента, равное удвоенной площади a_1Bp_1, равно величине $6V$, деленной на P_2.

Примечание. Из формулы $\mathfrak{M}_1 = \pm P_1\delta \sin\theta$ вытекает, что момент равен нулю, когда один из трех множителей равен нулю, т. е. когда вектор либо *равен нулю*, либо *лежит в одной плоскости с осью*.

10. Аналитические выражения моментов вектора относительно осей координат. Пусть дан вектор P_1 с началом в точке A_1 и с концом в точке B_1 (рис. 1). Обозначим через x_1, y_1, z_1 координаты его точки приложения A_1 и через X_1, Y_1, Z_1 его проекции на оси Ox, Oy, Oz. Момент N_1 вектора относительно оси Oz равен удвоенной площади проекции треугольника OA_1B_1 на плоскость xOy, причем этой величине площади приписывается знак согласно установленному ранее правилу. Но одна из вершин проекции совпадает с точкой O, а две другие имеют в плоскости xOy координаты:

проекция точки A_1: x_1, y_1,

проекция точки B_1: x_1+X_1, y_1+Y_1.

Согласно элементарной формуле для площади треугольника, имеющего вершину в начале координат, получим

$$N_1 = x_1(y_1+Y_1) - y_1(x_1+X_1) = x_1Y_1 - y_1X_1.$$

Точно так же для моментов L_1 и M_1 вектора относительно осей Ox и Oy получится:

$$L_1 = y_1Z_1 - z_1Y_1, \quad M_1 = z_1X_1 - x_1Z_1.$$

Определение векторного момента. Момент OG_1 вектора P_1 относительно начала O есть вектор, имеющий проекции на оси координат, равные L_1, M_1, N_1. Это вытекает из самого определения момента относительно оси.

Перенос начала. Если в качестве начала координат принять любую другую точку O' с координатами x', y', z', то координаты точки A_1 относительно новых осей, параллельных первоначальным, равны $x_1 - x'$, $y_1 - y'$, $z_1 - z'$. Проекции вектора на новые оси остаются X_1, Y_1, Z_1 и моменты относительно этих осей будут

$$L_1' = (y_1 - y')\,Z_1 - (z_1 - z')\,Y_1,$$
$$M_1' = (z_1 - z')\,X_1 - (x_1 - x')\,Z_1,$$
$$N_1' = (x_1 - x')\,Y_1 - (y_1 - y')\,X_1.$$

Эти выражения получаются путем замены в выражениях L_1, M_1, N_1 величин x_1, y_1, z_1 величинами $x_1 - x'$, $y_1 - y'$, $z_1 - z'$. Момент $O'G'$ того же вектора относительно точки O' есть вектор, имеющий проекции L_1', M_1', N_1'. Принимая во внимание значения L_1, M_1, N_1, можно написать

$$L_1' = L_1 - (y'Z_1 - z'Y_1),$$
$$M_1' = M_1 - (z'X_1 - x'Z_1),$$
$$N_1' = N_1 - (x'Y_1 - y'X_1).$$

11. Пять координат скользящего вектора. Шесть величин X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 удовлетворяют тождеству $X_1L_1 + Y_1M_1 + Z_1N_1 = 0$, которое выражает, что момент OG_1 перпендикулярен вектору A_1B_1. Обратно, пусть заданы шесть произвольных величин X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1, из которых первые три не равны нулю одновременно, удовлетворяющие тождеству

$$L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1 = 0.$$

Уравнения

$$L_1 = yZ_1 - zY_1, \quad M_1 = zX_1 - xZ_1, \quad N_1 = xY_1 - yX_1,$$

в которых x, y, z обозначают текущие координаты, определяют прямую линию D, так как в силу предположенного тождества они приводятся к двум независимым уравнениям. Пусть A_1 — *произвольная* точка этой прямой. Тогда вектор P_1 с началом в точке A_1 и с проекциями X_1, Y_1, Z_1 будет направлен по этой прямой D и будет иметь моменты L_1, M_1, N_1 относительно осей координат. Шесть величин X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 называются по Плюккеру координатами скользящего вектора. Из этих шести координат пять могут быть выбраны произвольно.

12. Относительный момент двух векторов P_1 и P_2. Так называют величину, равную 6 объемам (P_1, P_2), определенную раньше (рис. 9). Алгебраическое выражение этой величины получается непосредственно из элементарной формулы аналитической геометрии, выражающей объем тетраэдра в функции координат его вершин. Пусть x_1, y_1, z_1 — координаты точки A_1 и пусть X_1, Y_1, Z_1 — проекции вектора P_1 на оси координат, наконец L_1, M_1, N_1 — его моменты относительно этих осей. Точно так же обозначим через x_2, y_2, z_2 координаты точки B и через X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2 — проекции и моменты вектора P_2. Тогда, считая оси координат ортогональными и ориентируя их таким образом, чтобы поворот в положительном направлении вокруг оси Oz на 90° переводил ось Ox в ось Oy, получим с учетом знака

$$6 \text{ объем. } (P_1, P_2) = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1+X_1 & y_1+Y_1 & z_1+Z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_2+X_2 & y_2+Y_2 & z_2+Z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, предварительно вычтя из второй строки первую и из четвертой третью, получим

$$6 \text{ объем. } (P_1, P_2) = L_1X_2 + M_1Y_2 + N_1Z_2 + L_2X_1 + M_2Y_1 + N_2Z_1,$$

или ввиду тождеств $L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1 = 0$ и $L_2X_2 + M_2Y_2 + N_2Z_2 = 0$, имеем 6 объем. $(P_1, P_2) = (L_1 + L_2)(X_1 + X_2) + (M_1 + M_2)(Y_1 + Y_2) + (N_1 + N_2)(Z_1 + Z_2)$.

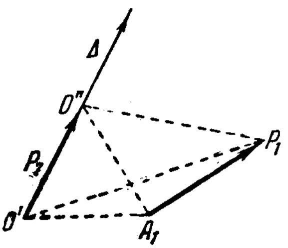


Рис. 10.

Аналитическое выражение момента относительно произвольной оси. Дана ось Δ (рис. 10), на которой выбрано положительное направление от точки O' с координатами (x', y', z') к точке O'' с координатами (x'', y'', z''). Проекции X_2, Y_2, Z_2 вектора $\overrightarrow{O'O''}$, представляющего собою вектор P_2, и величины L_2, M_2, N_2 его моментов равны соответственно

$$x''-x', \quad y''-y', \quad z''-z'; \quad y'z''-z'y'',$$
$$z'x''-x'z'', \quad x'y''-y'x''.$$

Момент $\mathfrak{M}_1$ вектора P_1 относительно заданной оси Δ равен величине 6 объем. (P_1, P_2), деленной на P_2, что дает:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{(x''-x')L_1+(y''-y')M_1+(z''-z')N_1+(y'z''-z'y'')X_1+(z'x''-x'z'')Y_1+(x'y''-y'x'')Z_1}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}}.$$

Из этой общей формулы можно для проверки получить значения моментов вектора P_1 относительно осей координат. Для оси Oz, например, достаточно положить $x' = y' = z' = x'' = y'' = 0$ и $z'' = 1$. Тогда момент будет равен N_1. Точно так же для осей Ox и Oy получатся L_1 и M_1.

13. Скользящие векторы, сходящиеся в одной точке. Результирующий вектор. Пусть заданы скользящие векторы $P_1, P_2, \ldots, P_n$, линии действия которых пересекаются в некоторой точке A. Каждый из указанных векторов можно перенести вдоль его линии действия так, чтобы все эти векторы оказались приложенными в самой точке A, как показано на рис. 11. Тогда *результирующим* вектором рассматриваемой системы векторов называется вектор R, равный их геометрической сумме и приложенный в точке A, либо другой вектор, получающийся вследствие переноса вектора $\boldsymbol{R}$ вдоль его линии действия. На рис. 11 результирующий вектор найден путем последовательного построения векторов AP_1, P_1Q_2, $\ldots$, $Q_{n-1}Q_n$, геометрически равных соответствующим заданным векторам, причем точка A принята за исходную. Результирующий вектор R совпадает с AQ_n.

Проекции результирующего вектора. Мы уже указывали (п. 4), что проекции X, Y, Z результирующего вектора R на оси координат равны соответственно суммам проекций составляющих векторов:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

$$Y = \sum Y_k, \qquad Z = \sum Z_k.$$

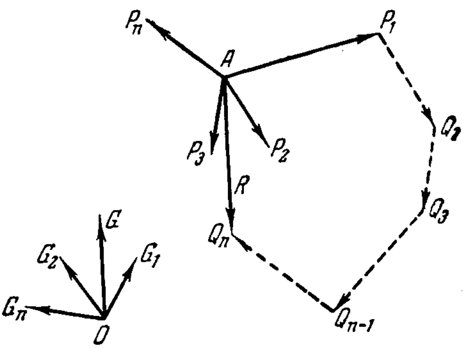


Рис. 11.

Моменты результирующего вектора относительно осей координат. Обозначим через x, y, z координаты точки A. Тогда моменты вектора $P_k(X_k, Y_k, Z_k)$ относительно осей координат будут:

$$L_k = yZ_k - zY_k, \qquad M_k = zX_k - xZ_k, \qquad N_k = xY_k - yX_k,$$

а моменты результирующего вектора относительно тех же осей будут:

$$L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

На основании найденных выше значений для X, Y, Z имеем

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n, \qquad M = \sum M_k, \qquad N = \sum N_k.$$

Таким образом, *шесть координат X, Y, Z, L, M, N результирующего вектора равны суммам соответствующих координат составляющих векторов.*

Так как произвольная ось может быть принята за координатную, то мы видим, что *проекция результирующего вектора заданной системы векторов, линии действия которых пересекаются в одной точке, на произвольную ось равна сумме проекций этих векторов на ту же ось; момент результирующего вектора относительно оси равен сумме моментов составляющих векторов относительно этой оси.* (Теорема Вариньона.)

Отсюда получаем следующее: *момент результирующего вектора системы сходящихся векторов относительно некоторой точки O равен геометрической сумме моментов составляющих векторов.* В самом деле, если точку O принять за начало координат, то L, M, N будут проекциями на оси координат момента OG результирующего вектора относительно точки O, а L_k, M_k, N_k — проекциями момента OG_k вектора P_k относительно той же точки. Но тогда предыдущие равенства как раз и показывают, что $\overrightarrow{OG}$ есть геометрическая сумма векторов $\overrightarrow{OG_1}$, $\overrightarrow{OG_2}$, ..., $\overrightarrow{OG_n}$.

Примечание. Иногда представляется нужным разложить заданный вектор AP на другие векторы, приложенные в точке A, т. е. найти векторы, от сложения которых получится вектор AP.

Можно, например, всегда разложить при помощи параллелограмма вектор AP на два других, имеющих заданные направления AB и AC, плоскость которых содержит AP.

Точно так же при помощи параллелепипеда можно разложить AP на три вектора, имеющих заданные направления AB, AC, AD и образующих триэдр.

14. Произвольная система векторов. Главный вектор и главный момент. Пусть заданы произвольные скользящие векторы P_1, P_2, ..., P_n, приложенные в точках A_1, A_2, ..., A_n. Выберем произвольную точку O пространства и назовем:

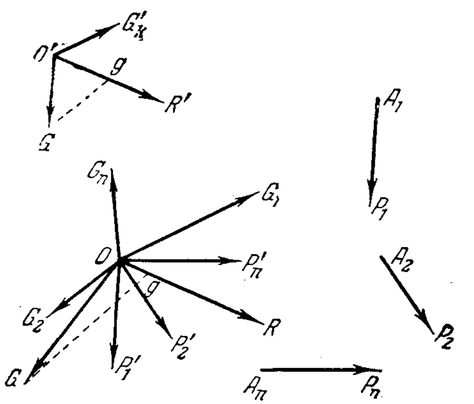


Рис. 12.

1) *главным вектором* — геометрическую сумму OR векторов OP'_1, OP'_2, ..., OP'_n, имеющих начало в точке O и равных заданным векторам;

2) *главным моментом* относительно точки O — геометрическую сумму OG моментов OG_1, OG_2, ..., OG_n заданных векторов относительно той же точки.

Если менять положение точки O, то главный вектор не будет меняться ни по величине, ни по направлению, что вытекает из самого определения этого вектора. Напротив, главный момент OG (рис. 12) изменяется за исключением случая, когда точка O перемещается по направлению прямой OR.

Приняв точку O за начало прямоугольных осей координат, обозначим через x_k, y_k, z_k координаты точки A_k, через X_k, Y_k, Z_k — проекции вектора P_k и через L_k, M_k, N_k — его моменты относительно этих осей. С другой стороны, пусть X, Y, Z обозначают проекции главного вектора OR и L, M, N — проекции главного момента OG относительно точки O. Тогда, обозначая через $\sum$ сумму, распространенную на все заданные векторы, получим

$$X=\sum X_k, \quad Y=\sum Y_k, \quad Z=\sum Z_k, \qquad (R)$$

$$L=\sum L_k, \quad M=\sum M_k, \quad N=\sum N_k. \qquad (G)$$

Пусть x', y', z' — координаты какой-нибудь другой точки O'. Мы видели (п. 10), что для проекций момента $O'G'_k$ вектора P_k относительно точки O' можно написать:

$$\left.\begin{aligned} L'_k &= L_k - (y'Z_k - z'Y_k), \\ M'_k &= M_k - (z'X_k - x'Z_k), \\ N'_k &= N_k - (x'Y_k - y'X_k). \end{aligned}\right\} \qquad (G'_k)$$

Следовательно, обозначая через X', Y', Z' и L', M', N' проекции векторов $O'R'$ и $O'G'$, получим:

$$X' = \sum X_k = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z, \qquad (R'$$

$$\left.\begin{aligned} L' &= \sum L'_k = L - (y'Z - z'Y), \\ M' &= M - (z'X - x'Z), \\ N' &= N - (x'Y - y'X). \end{aligned}\right\} \qquad (G')$$

При помощи этих формул можно вычислить векторы R' и G' для любой точки O' пространства, если они известны для одной точки O. Эти формулы показывают, что *главный момент $\overrightarrow{O'G'}$ относительно точки O' равен геометрической сумме главного момента относительно точки O и момента относительно точки O' главного вектора $\overrightarrow{OR}$ в точке O.*

15. Изменение главного вектора и главного момента; инварианты; центральная ось. Допустим сначала, что главный вектор отличен от нуля. Тогда главный момент G' будет отличен от G, если только точка O' не находится на линии OR. Но проекция главного момента на направление главного вектора есть величина *постоянная*. В самом деле, имеем

$$R'G' \cos \widehat{R'G'} = L'X' + M'Y' + N'Z',$$

а левая часть этого равенства на основании значений X', Y', Z', L', M', N' равна $LX + MY + NZ$, т. е. величине *постоянной*. Так как величина R' также постоянна, то

$$G' \cos \widehat{R'G'} = \text{const} = G \cos \widehat{RG},$$

что и доказывает теорему.

Вследствие этой теоремы, каковы бы ни были начало и направления прямоугольных осей координат, величины

$$X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad LX + MY + NZ$$

сохраняют *постоянные значения*. Эти величины называются *инвариантами* системы векторов.

Согласно определению *скалярного произведения* двух векторов (п. 3), можно сказать, что инвариант $LX + MY + NZ$ есть скалярное произведение главного вектора и главного момента относительно произвольной точки пространства. Ниже (п. 21) будет дано другое замечательное геометрическое истолкование этого инварианта.

Так как главный вектор, по предположению, везде отличен от нуля, то можно найти такую точку $O'(x', y', z')$, что главный момент $O'G'$ будет направлен по той же прямой, что и главный вектор $O'R'$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы L', M', N' были пропорциональны X, Y, Z:

$$\frac{L-(y'Z-z'Y)}{X}=\frac{M-(z'X-x'Z)}{Y}=\frac{N-(x'Y-y'X)}{Z}. \qquad (1)$$

Эти линейные относительно x', y', z' уравнения указывают, что геометрическое место точек O' есть прямая $D'D$, параллельная направлению главного вектора. Эта прямая называется *центральной осью* (рис. 13). Для какой-нибудь точки O' этой оси главный вектор и главный момент будут лежать на этой оси и будут иметь одинаковые или противоположные направления в зависимости от того, будет ли величина $LX+MY+NZ$ положительной или отрицательной. При этом главный момент g будет *минимальным*, так как он совпадает со своей проекцией на главный вектор.

Рис. 13.

В частности, если R отлично от нуля, а инвариант

$$LX+MY+NZ$$

равен нулю, то проекция главного момента относительно произвольной точки на главный вектор равна нулю. Этот момент будет перпендикулярен главному вектору, а *минимальный момент* $O'g$ будет *равен нулю*.

Примечание. Умножая члены отношений (1) соответственно на X, Y, Z и складывая, получим для общего значения этих отношений величину

$$\frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}=\frac{G\cos\widehat{RG}}{R},$$

которая обращается в нуль, если минимальный момент равен нулю.

Случай, когда главный вектор равен нулю. В случае, когда главный вектор равен нулю, из предыдущих формул вытекает, что L', M', N' будут равны L, M, N. В этом случае главный момент *будет одинаковым во всех точках пространства.*

Рассуждения, которые привели к понятию центральной оси, в рассматриваемом случае теряют смысл. Можно условно принять в этом случае в качестве центральной оси любую прямую, параллельную главному моменту.

16. Сумма моментов относительно произвольной оси. Прямые нулевого момента. Рассмотрим ось Δ, соединяющую две точки $O'(x', y', z')$ и $O''(x'', y'', z'')$. Момент $\mathfrak{M}_k$ вектора P_k относительно этой оси определяется одной из формул, установленных выше (п. 12).

прямо противоположны. В самом деле, так как главный вектор равен нулю, то вектор Q равен и противоположен вектору P. Далее, главный момент должен равняться нулю относительно произвольной точки. Примем в качестве нее точку A приложения вектора P. Момент вектора P относительно точки A равен нулю, и, следовательно, главный момент приводится к моменту Q, и так как он должен быть равен нулю, то линия действия вектора Q проходит через точку A, что и доказывает предложение.

Так же, как и в алгебре, где разность двух равных величин равна нулю и наоборот, — в теории векторов имеет место следующая теорема:

Для того чтобы две системы скользящих векторов (S) *и* (S_0) *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы система, образованная из векторов* (S) *и векторов* (S_0), *после того как направления последних заменены на противоположные, была эквивалентна нулю.*

В самом деле, если направления всех векторов системы (S_0) заменить на противоположные, то в полученной новой системе $(-S_0)$ главный вектор и главный момент относительно точки 0 будут отличаться от соответствующих элементов системы (S_0) только направлением. Следовательно, проекции главного вектора и главного момента всей системы, образованной путем соединения систем (S) и $(-S_0)$, будут

$$X-X_0,\quad Y-Y_0,\quad Z-Z_0,\quad L-L_0,\quad M-M_0,\quad N-N_0.$$

Но для того, чтобы две системы были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы эти величины равнялись нулю, что и доказывает теорему.

Мы приведем в статике (глава V) примеры наиболее важных систем векторов, эквивалентных нулю.

19. Элементарные операции. Можно получить системы, эквивалентные некоторой заданной системе, при помощи следующих элементарных действий:

1°. Присоединение или отбрасывание двух равных и прямо противоположных векторов. Перенос вектора вдоль линии действия.

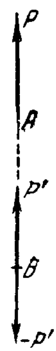


Рис. 16.

2°. Сложение нескольких сходящихся векторов в один. Разложение вектора на сходящиеся векторы.

Перенос вектора AP в точку B, находящуюся на его линии действия, есть следствие первого действия. В самом деле, приложим в точке B (рис. 16) вдоль прямой AB два равных и прямо противоположных вектора P' и $-P'$, из которых первый P' равен P. Отбросим далее два прямо противоположных вектора P и $-P'$. Тогда останется вектор BP', который представляет собой не что иное, как вектор AP, перенесенный в точку B на его линии действия.

Наоборот, прямые комплекса, расположенные в некоторой плоскости П, проходят через некоторую точку O', для которой главный момент перпендикулярен к этой плоскости. Точку O' называют по Шалю *фокусом* плоскости П. Этот фокус находится на конечном расстоянии, если только плоскость П не параллельна центральной оси.

Если плоскость П поворачивается вокруг некоторой прямой D, то фокус будет перемещаться по некоторой сопряженной прямой Δ. Наоборот, если плоскость будет поворачиваться вокруг прямой Δ, то ее фокус будет перемещаться по прямой D.

Легко видеть, во что обратятся эти теоремы, если g или R равны нулю.

IV. Эквивалентные системы скользящих векторов. Элементарные операции. Приведение системы скользящих векторов

18. Определение эквивалентности. Две системы скользящих векторов называются *эквивалентными*, если их главные векторы и главные моменты относительно некоторой точки пространства *равны*. Тогда будут одинаковыми главные моменты относительно какой угодно другой точки пространства. В частности, обе системы будут иметь одну и ту же центральную ось и один и тот же минимальный момент. Например, система сходящихся векторов эквивалентна главному вектору.

Пусть (S) и (S_0) — две системы скользящих векторов, X, Y, Z, L, M, N — проекции на оси координат главного вектора и главного момента относительно начала O системы (S), X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 — аналогичные величины системы (S_0). Условиями эквивалентности обеих систем являются равенства:

$$X = X_0, \quad Y = Y_0, \quad Z = Z_0, \quad L = L_0,$$
$$M = M_0, \quad N = N_0.$$

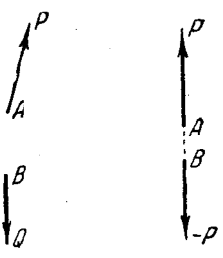


Рис. 15.

Система скользящих векторов, эквивалентная нулю. Говорят, что система (S) *эквивалентна нулю*, если ее главный вектор и главный момент относительно какой-нибудь точки равны нулю. Эти величины будут тогда равны нулю и во всех других точках пространства. Эквивалентность системы нулю выражается уравнениями

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Возьмем для примера систему двух равных и прямо противоположных векторов, т. е. систему, образованную двумя векторами P и $-P$, равными и направленными в противоположные стороны вдоль прямой AB, соединяющей их точки приложения (рис. 15). Эта система, очевидно, эквивалентна нулю. Наоборот, если система двух векторов P и Q эквивалентна нулю, то эти векторы равны и прямо противоположны. В самом деле, так как главный вектор равен нулю, то вектор Q равен и противоположен вектору P. Далее, главный момент должен равняться нулю относительно произвольной точки. Примем в качестве нее точку A приложения вектора P. Момент вектора P относительно точки A равен нулю, и, следовательно, главный момент приводится к моменту Q, и так как он должен быть равен нулю, то линия действия вектора Q проходит через точку A, что и доказывает предложение.

Так же, как и в алгебре, где разность двух равных величин равна нулю и наоборот, — в теории векторов имеет место следующая теорема:

Для того чтобы две системы скользящих векторов (S) *и* (S_0) *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы система, образованная из векторов* (S) *и векторов* (S_0), *после того как направления последних заменены на противоположные, была эквивалентна нулю.*

В самом деле, если направления всех векторов системы (S_0) заменить на противоположные, то в полученной новой системе $(-S_0)$ главный вектор и главный момент относительно точки 0 будут отличаться от соответствующих элементов системы (S_0) только направлением. Следовательно, проекции главного вектора и главного момента всей системы, образованной путем соединения систем (S) и $(-S_0)$, будут

$$X-X_0,\quad Y-Y_0,\quad Z-Z_0,\quad L-L_0,\quad M-M_0,\quad N-N_0.$$

Но для того, чтобы две системы были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы эти величины равнялись нулю, что и доказывает теорему.

Мы приведем в статике (глава V) примеры наиболее важных систем векторов, эквивалентных нулю.

19. Элементарные операции. Можно получить системы, эквивалентные некоторой заданной системе, при помощи следующих элементарных действий:

1°. Присоединение или отбрасывание двух равных и прямо противоположных векторов. Перенос вектора вдоль линии действия.

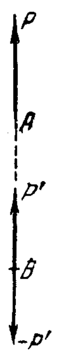


Рис. 16.

2°. Сложение нескольких сходящихся векторов в один. Разложение вектора на сходящиеся векторы.

Перенос вектора AP в точку B, находящуюся на его линии действия, есть следствие первого действия. В самом деле, приложим в точке B (рис. 16) вдоль прямой AB два равных и прямо противоположных вектора P' и $-P'$, из которых первый P' равен P. Отбросим далее два прямо противоположных вектора P и $-P'$. Тогда останется вектор BP', который представляет собой не что иное, как вектор AP, перенесенный в точку B на его линии действия.

Покажем теперь, что оба указанных элементарных действия не изменяют *ни главного вектора, ни главного момента относительно произвольной точки.*

Приняв эту точку за начало, необходимо показать, что шесть сумм

$$X=\sum X_k,\quad Y=\sum Y_k,\quad Z=\sum Z_k,$$
$$L=\sum L_k,\quad M=\sum M_k,\quad N=\sum N_k$$

не изменяются. В самом деле, присоединение или отбрасывание двух равных и прямо противоположных векторов означает добавление или отбрасывание в каждой сумме двух слагаемых, равных по величине и противоположных по знаку. Замена нескольких сходящихся векторов их равнодействующим вектором означает замену сумм проекций этих векторов проекциями их равнодействующего вектора в первых трех суммах и сумм моментов этих векторов — моментом равнодействующего вектора в последних трех суммах. Но это сводится к замене нескольких слагаемых в каждой из указанных сумм их суммой. Точно так же и разложение вектора на несколько сходящихся векторов не изменяет ни одной из шести указанных сумм.

Можно попытаться заменить при помощи элементарных действий заданную систему векторов (S) более простой эквивалентной ей системой.

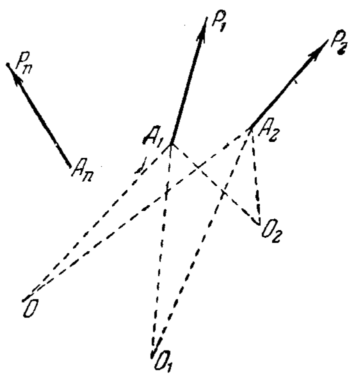


Рис. 17.

20. Приведение к двум векторам. Система скользящих векторов может быть заменена бесчисленным множеством способов двумя векторами, из которых один проходит через произвольную точку.

Мы покажем сначала, что система P_1, P_2, ..., P_n эквивалентна трем векторам, приложенным в произвольно взятых точках O, O_1, O_2, не лежащих на одной прямой (рис. 17).

Разложим вектор A_1P_1 на три составляющих вектора, направленных соответственно по прямым OA_1, O_1A_1, O_2A_1. После этого, перемещая точки приложения каждого составляющего вектора вдоль его линии действия, перенесем первый составляющий вектор в точку O, второй составляющий — в точку O_1 и третий составляющий — в точку O_2. Точно так же разложим вектор A_2P_2 на три составляющих вектора, направленных вдоль прямых OA_2, O_1A_2, O_2A_2, перенесем их в точки O, O_1, O_2 и так продолжаем далее. Векторы, приложенные в точке O, имеют результирующую R_1, векторы, приложенные в точке O_1, имеют результирующую R_2, и приложенные в точке O_2 —

результирующую R_3. Таким образом, заданная система векторов заменилась эквивалентной системой трех векторов R_1, R_2, R_3, приложенных в трех произвольных точках O, O_1, O_2.

Мы разложили вектор P_1 на три вектора, направленных по прямым OA_1, O_1A_1, O_2A_1. Это разложение возможно всякий раз, когда точка A_1 не находится в плоскости трех точек O, O_1, O_2. В таких случаях указанные прямые образуют триэдр. Если точка A_1 находится в плоскости OO_1O_2, но вектор P_1 в ней не лежит, то точку приложения этого вектора можно переместить вдоль его линии действия так, чтобы она не лежала в указанной плоскости. Если же сам вектор также лежит в плоскости, то его можно разложить на два вектора, направленных по OA_1 и O_1A_1.

Мы заменили заданные векторы тремя векторами R_1, R_2, R_3, приложенными в трех произвольных точках O, O_1, O_2. Эти три вектора можно привести к двум. Пусть OL (рис. 18) — прямая пересечения двух плоскостей, из которых одна проведена через точку O и вектор R_2, а другая — через точку O и вектор R_3. Выберем на этой прямой произвольную точку O'. Вектор R_2, находящийся в первой плоскости, может быть разложен на два вектора, направленных вдоль прямых OO_1, $O'O_1$; мы перенесем эти слагаемые — одно в точку O, а другое в точку O'. Точно так же вектор R_3, расположенный во второй плоскости, может быть разложен на два, направленных вдоль прямых OO_2 и $O'O_2$; перенесем первый из них в точку O, а второй в точку O'. Мы получим три вектора, приложенных в точке O, и два вектора, приложенных в точке O'. Первые три имеют результирующую F, а два других результирующую Φ. Таким образом, система трех векторов R_1, R_2, R_3, а следовательно и система заданных векторов, заменилась эквивалентной системой двух векторов F и Φ, из которых один приложен в произвольной точке O.

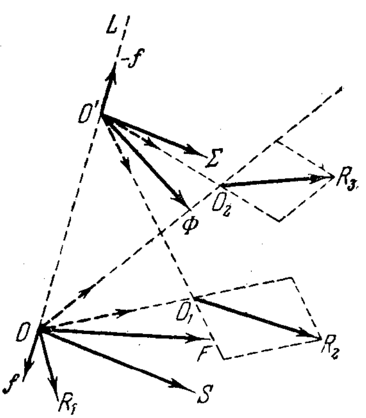


Рис. 18.

Если оба вектора, R_2 и R_3, и точка O расположены в одной плоскости, то в качестве OL может быть взята любая прямая этой плоскости, проходящая через точку O.

Существует бесчисленное множество способов приведения заданной системы векторов к двум векторам. Заметим прежде всего, что можно изменять векторы F и Φ без изменения точек O и O' их приложения. Вообразим, в самом деле, что к двум концам отрезка OO' приложены два равных и прямо противоположных вектора f и $-f$. Два вектора F и f, приложенные в точке O, можно сложить и привести к одному вектору S и два вектора Φ и $-f$, приложенных в точке O', — к одному вектору Σ. Система двух векторов F и Φ заменилась, таким образом, эквивалентной системой двух векторов S и Σ. Вектор Σ расположен в определенной плоскости — в плоскости, проходящей через точку O и вектор Φ. Точка приложения O вектора S является произвольной. Закрепив эту точку, можно перемещать произвольным образом точку O' по прямой $O'\Sigma$ и, следовательно, также по всей плоскости $OO'\Phi$, так как модуль вектора $-f$ произволен.

В общем случае два вектора F и Φ, эквивалентные всем заданным векторам, не лежат в одной плоскости.

Главный вектор и главный момент первоначальной системы относительно произвольной точки равны главному вектору и главному моменту системы двух векторов относительно той же точки (рис. 19). Например, если взять какую-нибудь точку A на линии вектора F, то главный вектор AR в точке A получится путем сложения вектора AF', геометрически равного вектору F, и вектора $A\Phi'$, геометрически равного вектору Φ. Главный момент AG относительно точки A равен моменту вектора Φ, так как момент вектора F равен нулю. Вектор AG будет перпендикулярен плоскости $AO'\Phi$ и точка A будет ее фокусом (п. 17).

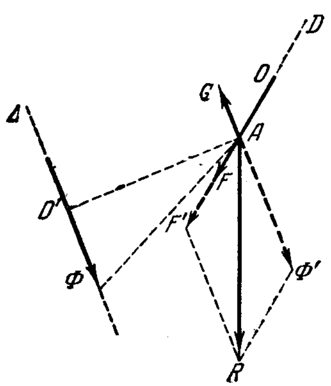


Рис. 19.

Следовательно, фокус плоскости, проходящей через один из векторов F или Φ, расположен на другом векторе, и эти векторы лежат на двух сопряженных прямых D и Δ.

Любая прямая, пересекающая одновременно линии действия векторов F и Φ, является, очевидно, прямой нулевого момента. Наоборот, если какая-нибудь прямая нулевого момента пересекает линию действия вектора F, то она пересекает также и линию действия вектора Φ на конечном или бесконечном расстоянии, так как поскольку момент вектора F относительно этой прямой равен нулю, то и момент вектора Φ относительно нее должен также равняться нулю.

В разделе упражнений будет показано, что систему векторов можно всегда привести к таким двум векторам, из которых один лежит на произвольной прямой, не параллельной главному вектору.

21. Геометрическое истолкование инварианта $LX+MY+NZ$. Обозначим через X', Y', Z', L', M', N', X'', Y'', Z'', L'', M'', N'' проекции и моменты двух векторов F и Φ, эквивалентных заданной системе. Имеем:

$$X = X' + X'', \quad L = L' + L'', \ \ldots$$

Принимая во внимание установленное ранее (п. 12) выражение для взаимного момента двух векторов, получим:

$$LX+MY+NZ=(L'+L'')(X'+X'')+\ldots=6\text{ объем. }(F,\ \Phi),$$

что позволяет дать замечательное геометрическое истолкование инварианта

$$LX+MY+NZ.$$

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — первоначальные векторы предложенной системы. Имеем соотношения

$$X=\Sigma X_k,\quad L=\Sigma L_k,\ \ldots, \tag{1}$$

$$L_kX_k+M_kY_k+N_kZ_k=0. \tag{2}$$

В силу соотношений (1) и тождества (2) находим также

$$LX+MY+NZ=\Sigma'(L_iX_k+M_iY_k+N_iZ_k+L_kX_i+M_kY_i+N_kZ_i),$$

где сумма в правой части распространена на все парные сочетания индексов i и k. Но выражение под знаком Σ' есть взаимный момент векторов P_i и P_k и, следовательно,

$$LX+MY+NZ=\Sigma' 6\text{ объем. }(P_i,\ P_k),$$

где во второй части число членов равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Полученные формулы показывают, что, *каким бы способом ни были приведены векторы P_k к двум векторам F и Φ, объем тетраэдра (F, Φ) будет постоянным и равным алгебраической сумме объемов тетраэдров, полученных путем парных сочетаний векторов P_k* (Шаль). Для того чтобы два вектора F и Φ находились в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы объем тетраэдра Шаля равнялся нулю.

22. Приведение двух эквивалентных систем друг к другу. Рассмотрим сначала систему (S), эквивалентную нулю. Тогда два вектора F и Φ, к которым мы можем привести систему, будут также эквивалентны нулю, т. е. эти векторы, как было показано ранее (п. 18), будут равны и прямо противоположны. Тогда можно эти векторы отбросить и таким образом привести систему (S) к нулю.

Пусть теперь предложены две системы векторов (S) и (S_0), эквивалентные между собой. Тогда эти системы могут быть приведены одна к другой при помощи элементарных операций. В самом деле, будем исходить из системы (S) и присоединим к ней систему $(S_0)(-S_0)$, образованную векторами (S_0) и векторами, им равными и прямо противоположными. Это, очевидно, — одна из элементарных операций, повторенная некоторое число раз. Совокупность систем (S) и $(-S_0)$, будучи эквивалентна нулю, *может быть приведена к нулю при помощи элементарных операций.* После этого останется система (S_0), что и доказывает предложение.

23. Пары. 1°. *Определение.* Парой, по Пуансо, называют совокупность двух векторов P и $-P$, равных по модулю, параллельных и противоположно направленных. Расстояние AB (рис. 20) называется *плечом пары*, а произведение $AB \cdot P$ плеча на модуль вектора P называется ее *моментом*. Когда момент равен нулю, то и пара эквивалентна нулю. Действительно, в этом случае равны нулю либо оба вектора, либо плечо AB, а тогда оба вектора прямо противоположны.

Так как пара является системой векторов, для которой главный вектор равен нулю, то *главный момент пары постоянен по величине и направлению для всех точек пространства*. Этот главный момент называется *векторным моментом* пары. Векторный момент пары является, следовательно, вектором, имеющим определенный модуль и направление, но его *точка приложения может быть выбрана в пространстве* произвольно, другими словами, векторный момент пары является вектором *свободным*. Чтобы уяснить, каким является этот вектор, найдем главный момент относительно точки O, расположенной на плече AB между точками A и B. Моменты обоих векторов P и $-P$ будут перпендикулярны к плоскости пары и одинаково направлены, так как оба вектора P и $-P$ *имеют одинаковое направление вращения* вокруг точки O. Следовательно, главный момент OG, т. е. *векторный момент* пары, перпендикулярен к плоскости пары и имеет модуль, равный $P \cdot OA + P \cdot OB$ или $P \cdot AB$, т. е. равный моменту пары.

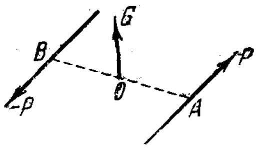


Рис. 20.

Из предыдущего следует, что *две пары с одинаковыми векторными моментами эквивалентны*, так как они имеют одинаковые главные моменты и одинаковые, равные нулю, главные векторы. Следовательно, они могут быть приведены одна к другой при помощи элементарных преобразований. Мы не входим здесь в подробности этого приведения. Оно может быть произведено, согласно указаниям п. 22.

Мы ограничимся формулировкой следующего заключения:

Всегда можно при помощи элементарных операций преобразовать одну в другую две пары, имеющие одинаковые векторные моменты, т. е. две пары, лежащие в параллельных плоскостях и имеющие одинаковые моменты и одинаковые направления вращений.

2°. *Сложение пар.* Любое число пар всегда эквивалентно одной паре, векторный момент которой равен сумме векторных моментов слагаемых пар.

В самом деле, система, образованная p парами $P_1, -P_1$; $P_2, -P_2; \ldots; P_p, -P_p$, есть система векторов, для которой главный вектор равен нулю. Главный момент этой системы будет, следовательно, одним и тем же для любой точки пространства (рис. 21).

Для нахождения этого главного момента OG относительно точки O можно поступить следующим образом. Возьмем сначала геометрическую сумму OG_1 моментов векторов P_1 и $-P_1$, которая равна векторному моменту первой пары, затем сумму OG_2 моментов векторов P_2 и $-P_2$, равную векторному моменту второй пары, и так продолжаем до тех пор, пока не получим сумму OG_p, равную векторному моменту последней пары. После этого полученные частичные суммы OG_1, OG_2, ..., OG_p складываем вместе. Рассмотрим теперь пару с векторным моментом OG, равным главному моменту. Эта одна пара эквивалентна системе всех заданных пар, так как эта пара и эта система имеют одинаковые главные моменты, равные OG, и одинаковые главные векторы, равные нулю.

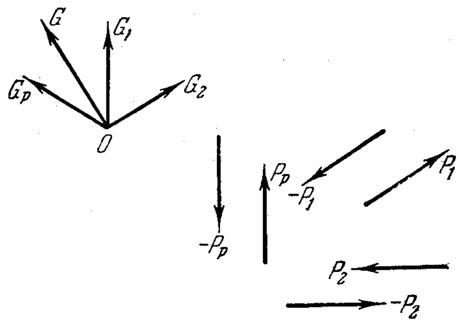


Рис. 21.

Можно *при помощи элементарных операций* привести заданную систему пар к одной паре с векторным моментом OG. Если $OG = 0$, то эта одна окончательная пара эквивалентна нулю и тогда вся заданная система тоже эквивалентна нулю.

Мы не будем здесь входить в подробности относительно тех элементарных операций, при помощи которых может быть осуществлено указанное сложение пар. Нам достаточно знать, что такое сложение осуществимо.

24. Приведение к вектору и паре. Произвольная система векторов эквивалентна одному-единственному вектору, равному главному вектору и приложенному в произвольной точке, и одной-единственной паре с векторным моментом, равным главному моменту относительно указанной точки. В самом деле, пусть OR — главный вектор и OG — главный момент системы относительно произвольной точки O. Новая система, образованная вектором R и парой $(P, -P)$ с векторным моментом OG, эквивалентна заданной системе, так как она имеет тот же главный вектор OR и тот же главный момент OG относительно точки O (рис. 22). Заданная система может быть, следовательно, приведена к системе R, P, $-P$ при помощи элементарных операций.

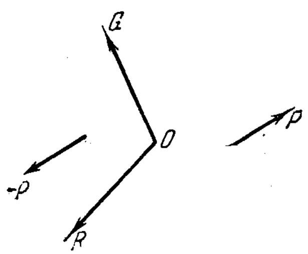


Рис. 22.

Так как точка O взята произвольно, то существует бесчисленное множество способов определения вектора и пары, эквивалентных заданной системе. После того, как точка O уже выбрана, в качестве пары $(P, -P)$ может быть взята любая из бесчисленного множества пар, имеющих векторный момент OG.

Если точка O взята *на центральной оси* DD' в точке O', то главный вектор $O'R$ и главный момент $O'g$ будут лежать на этой центральной оси. В этом случае плоскость пары (P, $-P$) будет перпендикулярна к главному вектору R и ее момент будет минимальным (рис. 23).

25. Винт. Английский ученый Болл называет предыдущую систему, образованную вектором $O'R$ (рис. 23) и парой, плоскость которой перпендикулярна к этому вектору, *винтом.*

Точкой приложения, линией действия, направлением и модулем винта называют точку приложения, линию действия, направление и модуль вектора $O'R$. *Параметр* f винта есть отношение величины момента g пары к модулю вектора R; это отношение считается положительным или отрицательным в зависимости от того, будут ли векторы $O'R$ и $O'g$ иметь одинаковое или противоположное направление. Принимая эти термины, мы видим, что произвольная система векторов эквивалентна винту, линия действия которого совпадает с центральной осью, а модуль и направление совпадают с модулем и направлением главного вектора. Параметр этого винта равен величине

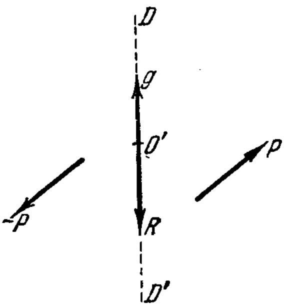


Рис. 23.

$$f=\frac{g}{R}=\frac{G\cos\widehat{RG}}{R}=\frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Следовательно, f есть найденное общее значение равных отношений, входящих в уравнения центральной оси.

Произвольное число заданных винтов всегда складывается в один винт. Действительно, каждый заданный винт представляет собой систему трех векторов; следовательно, совокупность заданных винтов представляет собою некоторую систему векторов, эквивалентную согласно установленным выше правилам одному винту, способ определения которого известен.

Единичным винтом (vis) называется винт, у которого вектор $O'R$ равен единице:

$$X^2+Y^2+Z^2=1.$$

В этом случае величина f приводится к $LX+MY+NZ$; ее называют *параметром* или *шагом* единичного винта.

Болл показал полезность понятия винта для кинематики и механики твердого тела. Перечисление многих работ, опубликованных им по этому вопросу, можно найти в *Bulletin Bibliographique* Жино Лориа, а изложение этих работ — во французском издании *l'Encyclopédie des Sciences mathématiques* в статье Люсьена Леви, *Sur les fondements géometriques de la Statique.*

26. Частные случаи приведения. Может случиться, в частности, что система векторов, не эквивалентная нулю, эквивалентна лишь *одной паре* или только *одному вектору.*

Система эквивалентна *только паре*, если ее главный вектор равен нулю.

Для того чтобы система была эквивалентна *одному вектору*, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор был отличен от нуля, а *минимальный момент* g равнялся *нулю*, т. е. чтобы главный момент относительно произвольной точки пространства был *перпендикулярен направлению главного вектора*. В самом деле, для системы, состоящей из одного вектора, центральная ось совпадает с этим вектором и минимальный момент равен нулю. Наоборот, если минимальный момент обращается в нуль, то система эквивалентна одному вектору, лежащему на центральной оси, так как пара с минимальным моментом, которую в общем случае необходимо добавить к этому вектору, в рассматриваемом случае обращается в нуль. Здесь $f=0$.

27. Резюме. Резюмируя изложенное, получаем следующую таблицу:

$LX+MY+NZ \gtrless 0$ — Система эквивалентна двум векторам, не лежащим в одной плоскости. Она эквивалентна также одному вектору, лежащему на центральной оси, и одной паре, плоскость которой перпендикулярна этой оси, т. е. винту.

$LX+MY+NZ=0$ — Система эквивалентна двум векторам, лежащим в одной плоскости, причем:

1°. $X^2+Y^2+Z^2>0$ — Система эквивалентна одному вектору, лежащему на центральной оси.

2°. $X=Y=Z=0$, $L^2+M^2+N^2>0$ — Система эквивалентна паре.

3°. $X=Y=Z=0$, $L=M=N=0$. — Система эквивалентна нулю.

28. Взаимный момент системы скользящих векторов. Используя обозначения п. 18, назовем *взаимным моментом* двух систем векторов (S) и (S_0) величину

$$LX_0+MY_0+NZ_0+L_0X+M_0Y+N_0Z, \tag{1}$$

значение которой не зависит от выбора осей координат. В самом деле, мы можем эту величину представить в виде

$$(L+L_0)(X+X_0)+(M+M_0)(Y+Y_0)+(N+N_0)(Z+Z_0)- \\ -(LX+MY+NZ)-(L_0X_0+M_0Y_0+N_0Z_0),$$

где три члена будут инвариантами либо полной системы $(S)+(S_0)$, либо одной из систем (S) или (S_0). Согласно истолкованию этих инвариантов, данному в п. 21, взаимный момент систем (S) и (S_0) равен ушестеренной сумме объемов тетраэдров, полученных сочетанием всех векторов системы (S) со всеми векторами системы (S_0).

Пусть δ — кратчайшее расстояние между центральными осями обеих систем и α — угол между ними, R и R_0 — их главные векторы, лежащие на этих центральных осях, а g и g_0 — соответствующие минимальные моменты. Тогда взаимный момент обеих систем равен

$$\pm RR_0\delta \sin\alpha+(gR_0+g_0R)\cos\alpha, \tag{2}$$

где первый член есть взаимный момент векторов R и R_0. Эту формулу легко вывести, если за ось Oz принять одну из центральных осей (п. 17) и посмотреть, во что при этом обратится выражение (1).

29. Приложение общих теорем к случаю параллельных скользящих векторов. Если все векторы некоторой системы параллельны, то эта система эквивалентна либо одному вектору, либо одной паре; либо нулю. В самом деле, так как моменты всех векторов относительно какой-нибудь точки направлены перпендикулярно общему направлению этих векторов, то и главный момент, если он отличен от нуля, будет также перпендикулярен этому направлению. Главный вектор, если он отличен от нуля, параллелен этому направлению. Следовательно, инвариант $LX+MY+NZ$ обращается в нуль.

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы какой-нибудь полупрямой, параллельной общему направлению векторов. Обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_n$ величины этих векторов, причем эти величины будем считать положительными, если направления соответствующих векторов совпадают с направлением выбранной полупрямой, и отрицательными — в противном случае. Тогда, если x_k, y_k, z_k — координаты какой-нибудь точки приложения вектора P_k; X_k, Y_k, Z_k — проекции этого вектора на оси координат, которые мы считаем прямоугольными, и L_k, M_k, N_k — его моменты относительно этих осей, то

$$X_k=\alpha P_k, \quad Y_k=\beta P_k, \quad Z_k=\gamma P_k;$$

$$L_k=P_k(\gamma y_k-\beta z_k), \quad M_k=P_k(\alpha z_k-\gamma x_k), \quad N_k=P_k(\beta x_k-\alpha y_k).$$

Отсюда, полагая

$$P=P_1+P_2+\ldots+P_n=\sum P_k,$$

где сумма распространена на все векторы системы, получим следующие выражения для проекций главного вектора и главного момента:

$$X=\alpha P, \quad Y=\beta P, \quad Z=\gamma P;$$

$$L=\gamma\sum P_k y_k-\beta\sum P_k z_k, \quad M=\alpha\sum P_k z_k-\gamma\sum P_k x_k,$$

$$N=\beta\sum P_k x_k-\alpha\sum P_k y_k.$$

Непосредственно убеждаемся в справедливости соотношения

$$LX+MY+NZ=0.$$

Следовательно:

если $P \gtrless 0$, то система эквивалентна одному вектору;

если $P=0$, $L^2+M^2+N^2>0$, то система эквивалентна одной паре;

если $P=0$, $L=M=N=0$, то система эквивалентна нулю.

Отсюда получаем *необходимые и достаточные условия эквивалентности системы нулю*:

$$\sum P_k = 0, \quad \frac{\sum P_k x_k}{\alpha} = \frac{\sum P_k y_k}{\beta} = \frac{\sum P_k z_k}{\gamma}.$$

Примечание. В частном случае, когда

$$\sum P_k = 0, \quad \sum P_k x_k = 0, \quad \sum P_k y_k = 0, \quad \sum P_k z_k = 0,$$

предыдущие условия будут выполняться, каковы бы ни были α, β, γ. Система будет эквивалентна нулю, какое бы направление ни задавать параллельным векторам, если только при этом не изменять отношения их величин и точек приложения. Говорят, что в этом случае система параллельных векторов находится в *астатическом равновесии*.

Центральная ось. Результирующий вектор. Пусть $P \gtrless 0$. Тогда система эквивалентна одному вектору, алгебраическое значение которого равно P и проекции которого суть αP, βP, γP. Этот вектор лежит на центральной оси. Для краткости мы будем называть его *результирующим вектором системы*.

Уравнения центральной оси в рассматриваемом случае принимают вид

$$yZ - zY - L = 0, \quad zX - xZ - M = 0, \quad xY - yX - N = 0,$$

так как общее значение отношений, которые образуют уравнение этой оси, обращается в данном случае в *нуль*. После подстановки найденных ранее значений X, Y, Z, L; M, N получим:

$$\gamma\left(Py - \sum P_k y_k\right) - \beta\left(Pz - \sum P_k z_k\right) = 0, \ \ldots,$$

откуда

$$\frac{Px - \sum P_k x_k}{\alpha} = \frac{Py - \sum P_k y_k}{\beta} = \frac{Pz - \sum P_k z_k}{\gamma}.$$

Полагая здесь

$$\xi = \frac{\sum P_k x_k}{\sum P_k}, \quad \eta = \frac{\sum P_k y_k}{\sum P_k}, \quad \zeta = \frac{\sum P_k z_k}{\sum P_k}, \tag{C}$$

получим

$$\frac{x - \xi}{\alpha} = \frac{y - \eta}{\beta} = \frac{z - \zeta}{\gamma}, \tag{D}$$

т. е. уравнение прямой D, проходящей через точку C с координатами ξ, η, ζ и параллельной заданным векторам.

Когда все векторы скользят вдоль их линий действия, прямая D не изменяется, так как не изменяются величины X, Y, Z, L, M, N. Координаты точек приложения x_k, y_k, z_k изменяются; поэтому точка $C(\xi, \eta, \zeta)$ перемещается, но она описывает *центральную ось* D заданных параллельных скользящих векторов, вдоль которой скользит результирующий вектор.

V. Связанные векторы; шесть координат связанного вектора; центр параллельных связанных векторов. Векторные производные

30. Шесть координат связанного вектора. Вириал. Мы назвали *связанным* всякий вектор, приложенный в определенной точке пространства.

Например, главный момент AG какой-нибудь системы скользящих векторов относительно некоторой точки A есть вектор, связанный с этой точкой A.

Для аналитического определения вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, связанного с точкой A_1, необходимо задать три координаты x_1, y_1, z_1 точки A_1 и три проекции X_1, Y_1, Z_1 вектора, всего *шесть независимых величин*, составляющих координаты связанного вектора.

Ниже, при изложении понятия работы, а затем в третьем томе, мы будем заниматься исследованием векторного поля, т. е. системы связанных векторов, приложенных в различных точках некоторой непрерывной области пространства.

Вириал. В п. 12 мы видели, что скользящий вектор имеет пять координат. Чтобы определить *связанный* вектор, достаточно добавить к пяти координатам этого вектора, рассматриваемого как скользящий, шестую величину, не зависящую от них. Эта величина может быть взята, например, равной *вириалу* Клаузиуса относительно некоторой заданной точки P.

Пусть $\overrightarrow{AV} = \boldsymbol{V}$ — вектор, связанный с точкой A. Возьмем какую-нибудь точку P, которую мы будем рассматривать как конец вектора $\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{r}$. Тогда вириал v вектора $\boldsymbol{V}$ относительно точки P есть скалярное произведение

$$v = Vr\cos\widehat{Vr}$$

векторов $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{r}$. Если принять точку A за начало прямоугольной системы координат и обозначить через X, Y, Z проекции вектора $\boldsymbol{V}$, а через x, y, z координаты точки P, то

$$v = Xx + Yy + Zz.$$

Имеет место следующая теорема:

Если два геометрически равных вектора имеют одинаковые моменты **M** *и одинаковые вириалы* v *относительно одной только точки* P, *то они приложены в одной и той же точке, т. е. они идентичны.*

Допустим, что эти векторы суть AV и $A'V'$ и они приложены в разных точках A и A'. Так как моменты равны, то эти векторы лежат на одной прямой AA'. Кроме того, из равенства вириалов вытекает

$$\overline{AP}\cos\widehat{PAV} = \overline{A'P}\cos\widehat{PA'V'},$$

и, следовательно, проекции PA и PA' на AA' равны по величине и знаку, т. е. точка A совпадает с точкой A'.

Следовательно, связанный вектор может быть определен своим вириалом относительно некоторой точки P и пятью своими координатами, если рассматривать его в качестве скользящего вектора.

31. Центр системы параллельных связанных векторов. Мы видели (п. 29), что система параллельных скользящих векторов с отличной от нуля геометрической суммой эквивалентна одному результирующему скользящему вектору, лежащему на центральной оси D системы.

Обозначим, как и раньше, через α, β, γ направляющие косинусы прямой, параллельной векторам, через P_1, P_2, ..., P_n — их алгебраические величины, считаемые положительными в направлении α, β, γ, и через x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n — координаты точек приложения этих векторов. Проекции X_k, Y_k, Z_k вектора P_k суть αP_k, βP_k, γP_k. Мы показали (п. 29), что результирующий вектор такой системы параллельных скользящих векторов им параллелен, имеет алгебраическое значение, равное

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \sum P_k,$$

и проекции X, Y, Z, равные величинам αP, βP, γP, и, наконец, что он лежит на центральной оси D, определяемой уравнениями

$$\frac{x-\xi}{\alpha} = \frac{y-\eta}{\beta} = \frac{z-\zeta}{\gamma}, \tag{D}$$

где

$$\xi = \frac{\sum P_k x_k}{\sum P_k}, \quad \eta = \frac{\sum P_k y_k}{\sum P_k}, \quad \zeta = \frac{\sum P_k z_k}{\sum P_k}. \tag{C}$$

Предположим теперь, что векторы P_k связаны со своими соответствующими точками приложения x_k, y_k; z_k, рассматриваемыми как вполне определенные, и не могут скользить вдоль своих линий действия. Тогда точка C, координаты которой выражены уравнениями (C), будет *вполне определенной*. Эта точка называется *центром заданной системы параллельных векторов, связанных со своими точками приложения*. Переместим теперь результирующий вектор P вдоль оси D, пока его точка приложения не совпадет с C, и будем считать его вектором, связанным с точкой C. Полученный таким образом результирующий вектор, *связанный с точкой C*, называется *результирующим вектором системы параллельных связанных векторов*.

Таким образом, *если параллельные связанные векторы имеют отличную от нуля геометрическую сумму, то результирующий вектор будет равен этой сумме и связан с центром заданной системы параллельных связанных векторов.*

Формулы (C), определяющие координаты ξ, η, ζ центра C параллельных связанных векторов, показывают, что *центр системы параллельных связанных векторов не зависит от α, β, γ, т. е. от общего направления этих векторов; он зависит исключительно от их точек приложения (x_k, y_k, z_k) и от отношений их величин P_1, P_2, ..., P_n*. Зависимость точки C только от отношений величин векторов вытекает из того обстоятельства, что выражения для ξ, η, ζ однородны относительно P_1, P_2, ..., P_n, причем порядок однородности равен нулю. Полученный результат можно сформулировать следующим образом: *Если изменить общее направление параллельных векторов, связанных с их точками приложения, и одновременно пропорционально изменить их величины, то и результирующий вектор, который им параллелен, изменится в том же отношении, но останется приложенным в центре этих параллельных векторов.*

Замечание к случаю, когда $\sum P_k = 0$. Если сумма векторов $P = \sum P_k$ равна нулю, но три суммы $\sum P_k x_k$, $\sum P_k y_k$, $\sum P_k z_k$ не обращаются в нуль одновременно, то центр C параллельных связанных векторов *уйдет в бесконечность*, так как тогда по крайней мере одна из координат ξ, η, ζ становится бесконечной. В этом случае точка C не существует.

Если одновременно

$$\sum P_k = 0, \quad \sum P_k x_k = 0, \quad \sum P_k y_k = 0, \quad \sum P_k z_k = 0,$$

то координаты ξ, η, ζ будут неопределенными и, следовательно, центр параллельных связанных векторов будет *неопределенным*.

Пример. Легко найти, в качестве примера, элементарные свойства двух параллельных векторов, связанных с двумя точками A_1 и A_2 и имеющих алгебраические значения P_1 и P_2. Когда $P_1 + P_2$ отлично от нуля, система имеет результирующий вектор, т. е. эквивалентна одному вектору, имеющему алгебраическое значение $P = P_1 + P_2$ и приложенному в точке A (центре двух параллельных векторов) (рис. 24), определяемой соотношением

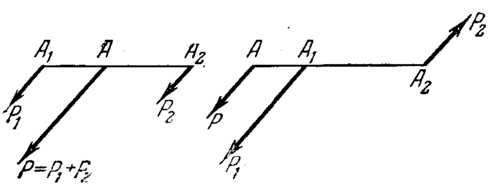


Рис. 24.

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}} = \frac{P_2}{P_1},$$

где отношение двух отрезков AA_1 и AA_2, как обычно принято в геометрии, считается положительным, если отрезки имеют одинаковые направления, и отрицательным, — в противном случае.

В частном случае, когда $P_1 + P_2 = 0$, эти векторы численно равны и противоположно направлены. Центр этих параллельных векторов не существует. Эти векторы в общем случае образуют пару, если только они не прямо противоположны. Если $P_1 + P_2 = 0$ и оба вектора приложены в одной точке, то центр параллельных векторов будет неопределенным.

32. Моменты параллельных связанных векторов относительно плоскости. Формулы для координат ξ, η, ζ центра параллельных связанных векторов, если их перевести на язык геометрии, приводят к *теореме моментов относительно плоскости.*

Пусть даны произвольно направленная ось Oz и плоскость Π, которую всегда можно принять за плоскость xOy (рис. 25). *Моментом какой-нибудь из параллельных геометрических величин относительно этой плоскости* Π *называется произведение* $P_k z_k$ *алгебраического значения* P_k *указанной величины на координату* z_k *ее точки приложения.* Это понятие введено Монжем («Курс элементарной статики», Париж, 1786).

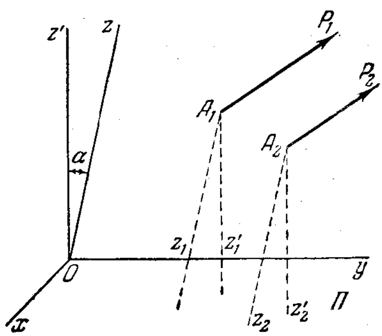


Рис. 25.

Определенный таким образом момент есть величина положительная, отрицательная или равная нулю, значение которой зависит от точки приложения геометрической величины, так что этот момент изменяется, если указанную величину переносить вдоль ее линии действия. Основное свойство, вытекающее из этого определения, будет следующим:

Если для системы параллельных связанных векторов существует результирующий вектор, то момент результирующего вектора относительно плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих векторов при условии, что этот результирующий вектор приложен в центре параллельных векторов.

Для доказательства предположим сначала, что ось Oz перпендикулярна к плоскости Π. Тогда координата z центра параллельных векторов определяется формулой

$$P\zeta = \sum P_k z_k,$$

где $P = \sum P_k$. Но эта формула как раз и выражает доказываемую теорему.

Если ось Oz наклонена к плоскости Π, то можно взять вспомогательную ось Oz', нормальную к плоскости и образующую с осью Oz угол α. Обозначим через z_1', z_2', ..., z_n', ζ' координаты z точек приложения, отсчитываемые параллельно этой новой оси, т. е. нормально к плоскости. По предыдущему имеем:

$$P\zeta' = \sum P_k z_k'.$$

Но координаты z' и z связаны очевидными соотношениями

$$z_1' = z_1 \cos\alpha, \quad z_2' = z_2 \cos\alpha, \ \ldots, \ \zeta' = \zeta \cos\alpha,$$

что после подстановки и приводит к искомому соотношению

$$P\zeta = \sum P_k z_k.$$

Таким образом, теорема моментов доказана в общем виде.

Прилагая эту теорему к трем плоскостям косоугольной системы координат, мы получим для определения координат ξ, η, ζ центра параллельных векторов в *косоугольной системе* те же формулы, что и в *системе прямоугольной*.

Примечание I. Теорема моментов относительно плоскости справедлива лишь в том случае, когда $\sum P_k \gtrless 0$.

Если $\sum P_k = 0$, то теорема не справедлива, так как результирующий вектор обращается в нуль, и центр параллельных векторов уходит в бесконечность. Исключение будет в еще более частном случае, когда векторы находятся в астатическом равновесии:

$$P = 0,$$

$$\sum P_k x_k = 0, \quad \sum P_k y_k = 0, \quad \sum P_k z_k = 0.$$

В этом случае координаты ξ, η, ζ *неопределенны* и теорема применима.

Примечание II. В частном случае, когда все векторы направлены в одну сторону, центр параллельных векторов лежит внутри любой выпуклой поверхности, окружающей точки приложения составляющих. В самом деле, примем направление заданных векторов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ за положительное, касательную плоскость П к поверхности — за плоскость xy и в качестве оси Oz — перпендикуляр к этой поверхности, направленный в ту же сторону, что и поверхность (рис. 26).

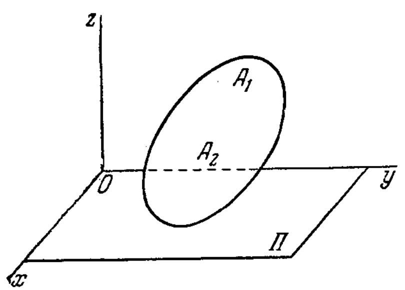


Рис. 26.

Тогда координаты z всех точек приложения векторов будут положительными, и равенство

$$\zeta = \frac{\sum P_k z_k}{\sum P_k}$$

показывает, что и координата ζ также положительная. Таким образом, центр параллельных векторов расположен по отношению к произвольной касательной плоскости по ту же сторону, что и поверхность и, следовательно, находится внутри ее.

33. Векторные производные. Пусть OM (рис. 27) — связанный вектор, приложенный в фиксированной точке O. Допустим, что этот вектор зависит от некоторой переменной u таким образом, что если u изменяется непрерывно, то и конец M перемещается также непрерывным образом. Можно тогда говорить, что этот вектор есть непрерывная функция переменной u. Пусть OM и OM_1 — векторы, соответствующие значениям u и $u+\Delta u$ переменной, причем Δu предполагается положительной. Соответствующее геометрическое приращение вектора есть *геометрическая разность* $(OM_1)-(OM)$.

т. е. вектор, равный MM_1. Отношение этого приращения к приращению переменной есть вектор

$$\overrightarrow{MB} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta u},$$

имеющий ту же линию действия и то же направление, что и вектор MM_1.

Когда Δu стремится к нулю, вектор MM_1 стремится к некоторому предельному вектору MD, касательному к кривой, описываемой точкой M. Этот предельный вектор называется *векторной производной вектора OM* по u.

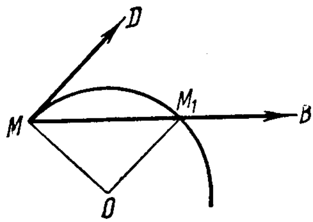


Рис. 27.

Аналитическое определение векторной производной. Возьмем оси $Oxyz$ с началом в точке O. Координаты x, y, z точки M суть проекции вектора OM на эти оси, причем проектирование на какую-нибудь ось производится параллельно плоскости двух других осей. Величины x, y, z являются функциями от u. Когда u получает приращение Δu, то точка M переходит в M_1 и x, y, z получают приращения Δx, Δy, Δz. Так как вектор MM_1 имеет проекции Δx, Δy, Δz, то вектор MB, равный отношению MM_1 к Δu, имеет проекции

$$\frac{\Delta x}{\Delta u}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta u}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta u}.$$

Полагая, что Δu стремится к нулю, мы видим, что проекции производного вектора MD суть производные

$$\frac{dx}{du}, \quad \frac{dy}{du}, \quad \frac{dz}{du}$$

проекций первоначального вектора.

VI. Полярные векторы. Аксиальные векторы. Скалярные величины

34. Характер симметрии вектора. Величины, изображаемые векторами, могут представлять собою два вида симметрии. С этой точки зрения они подразделяются на *векторы полярные* и *векторы аксиальные.*

Полярные векторы. Вектор A_1B_1 называется *полярным*, если представляемая им физическая величина симметрична относительно всех плоскостей, проходящих через A_1B_1, но не симметрична относительно плоскости, перпендикулярной к A_1B_1. Так, например, *скорость* и *ускорение* представляются полярными векторами. Можно сказать, что симметрия полярного вектора A_1B_1 будет такого же вида, как и симметрия параболоида вращения вокруг оси A_1B_1. Выбор направления осей и положительного направления вращения не содержится в определении полярного вектора.

Аксиальные векторы. Вектор A_1B_1 является *аксиальным*, если представляемая им физическая величина симметрична не только относительно плоскостей, проходящих через A_1B_1, но и относительно плоскостей, перпендикулярных к A_1B_1, так что характер симметрии представляемой физической величины будет таким же, как у цилиндра вращения вокруг A_1B_1.

Определение аксиального вектора зависит обычно от соглашения относительно положительного направления вращения или направлений, приписываемых некоторым циркуляциям. Например, векторный момент BG_1 некоторого полярного скользящего вектора A_1B_1 относительно какой-нибудь точки B есть *аксиальный вектор*. Действительно, физическая величина, которую должен представлять вектор BG_1, характеризуется: 1) плоскостью, проходящей через точку B и через ось вектора A_1B_1; 2) площадью треугольника BA_1B_1. Но оба эти элемента симметричны относительно плоскости BA_1B_1. Направление, приписываемое вектору BG_1 относительно этой плоскости, зависит от соглашения о выборе положительного направления вращения. Этот вектор является, следовательно, аксиальным. Представление момента при помощи вектора обладает, таким образом, некоторым несовершенством, так как оно вводит, вследствие произвольности выбора положительного направления вращения, диссимметрию, которой не имеет представляемый объект. Можно избежать этой диссимметрии, условившись, например, изображать момент полярного вектора A_1B_1 относительно точки B при помощи некоторого круга, описанного в плоскости BA_1B_1 с центром в точке B, причем радиус этого круга равен величине момента и на контуре круга при помощи стрелки указано направление, в котором точка, перемещаясь вдоль A_1B_1, вращается вокруг центра B.

Это представление поясняет симметрию момента, но оно менее удобно, чем обычное представление момента, с других точек зрения. Векторный момент пары полярных векторов есть также вектор аксиальный.

Легко показать, что векторный момент $B'G'$ некоторого векторного момента BG_1 относительно точки B' есть вектор полярный. Для этого достаточно установить, что вектор $B'G'$ не зависит от какого бы то ни было выбора положительного направления вращения.

Эти положения имеют важное значение для физики. По поводу связанных с ними вопросов можно указать на мемуар Клейна, переведенный на французский язык Г. Падэ (Annales de l'École Normale supérieure, série 3, т. VIII, 1891, стр. 87—193).

Скалярные величины первого и второго рода. Скаляром называют, обобщая уже встречавшееся заимствованное из теории кватернионов выражение, всякую величину, определяемую одним-единственным числом, как, например, плотность, температуру. Но при этом могут представиться два случая:

а) Рассматриваемое число не зависит от направления осей координат. Мы будем говорить, что оно является *скаляром первого рода.*

б) Число, определяющее рассматриваемую величину, меняет знак при перемене направления осей. Такое число называется *скаляром второго рода.*

VII. Другие геометрические образы, которые могут быть использованы в механике

35. Краткий обзор. Способ представления векторных величин, которого мы до сих пор исключительно придерживались, очевидно, не является единственно возможным. Можно ставить в соответствие другим механическим величинам и другие геометрические элементы. Так, например, любой системе сил, приложенной к твердому телу, можно поставить в соответствие винты Болла.

Скользящий вектор, рассматриваемый как совокупность двух точек, взятых в определенном порядке, можно понимать как первое звено в ряде величин, образованных путем присоединения в определенном порядке не только точек, но и других простейших элементов пространства.

Э. Штуди*) занимался систематическим исследованием таких геометрических величин. Он ввел следующие величины.

1°. *Крест*, образованный совокупностью двух прямых, из которых одна находится на конечном расстоянии, а другая представляет собой пересечение плоскостей, перпендикулярных к первой, и вследствие этого находится в бесконечности.

2°. *Биплан*, представляющий собой систему двух не перпендикулярных между собой плоскостей, взятых в определенном порядке.

3°. *Турникет* — (moulinet), образованный точкой и плоскостью.

4°. Некоторые системы прямых, называемые *моторами* и *импульсорами.*

5°. *Скользящие сферические векторы* и т. д.

Мы ограничиваемся только перечислением, потому что нигде не воспользуемся этими понятиями, так как до сих пор они не нашли каких-либо важных приложений в механике. Мы отсылаем для их геометрического исследования либо к сочинению Штуди, либо к статье Люсьена Леви (Lucien Lévy) во французском издании «l'Encyclopédie des Sciences mathématiques».

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что модуль R результирующего вектора нескольких сходящихся векторов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ определяется формулой

$$R^2 = \sum P_k^2 + 2\sum P_i P_k \cos \widehat{P_i, P_k},$$

где первая сумма распространена на все векторы, а вторая — на все их парные комбинации.

2. Для того чтобы система векторов была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы обращались в нуль их главные моменты относительно трех произвольных точек, не лежащих на одной прямой.

---

*) E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig, 1903 (первый выпуск вышел в 1901).

3. *Взаимность в теории векторов.* Возьмем мнимую сферу $x^2+y^2+z^2+1=0$ с центром в точке O и вектор P_1 с проекциями X_1, Y_1, Z_1 и моментами L_1, M_1, N_1. На прямой, сопряженной с P_1 относительно сферы, построим вектор P_1' с проекциями $X_1'=L_1$, $Y_1'=M_1$, $Z_1'=N_1$. Это возможно, так как направление L_1, M_1, N_1 перпендикулярно плоскости OP_1. Показать, что имеется взаимность между векторами P_1 и P_1', т. е. что P_1 лежит на прямой, сопряженной с P_1', и что его проекции равны моментам вектора P_1', а именно: $X_1=L_1'$, $Y_1=M_1'$, $Z_1=N_1'$ (преобразование Клейна, в частном случае указанное Кёнигсом).

4. По предыдущему преобразованию системе векторов (S) отвечает некоторая система (S'). Показать, что главный момент одной системы относительно точки O равен главному вектору второй системы.

5. Если одна из предыдущих систем (S) или (S') приводится к паре, то другая приводится к вектору, проходящему через точку O, и наоборот.

6. *Найти пространственные кривые, касательные к которым являются прямыми, относительно которых момент равен нулю.* Если принять за ось z центральную ось системы, то дифференциальное уравнение этих кривых имеет вид

$$f\,dz = x\,dy - y\,dx,$$

где f — параметр винта. Показать, что наиболее общая кривая, удовлетворяющая этому уравнению, определяется уравнениями

$$z=\varphi(\theta),\quad x=\sqrt{f\varphi'(\theta)}\cos\theta,\quad y=\sqrt{f\varphi'(\theta)}\sin\theta,$$

где φ — произвольная функция от θ.

7. Показать, что соприкасающаяся плоскость какой-нибудь кривой предыдущей задачи имеет фокус в точке соприкосновения.

8. Можно бесчисленным множеством способов образовать систему из двух векторов F и Φ, эквивалентных заданной системе векторов и таких, что F и Φ *взаимно перпендикулярны.* Показать, что прямые F и Φ образуют *комплекс второго порядка.* К этому же комплексу придем, отыскивая комплекс, образованный главными моментами относительно всех точек пространства.

9. Если два вектора F и Φ эквивалентны заданной системе, то их общий перпендикуляр пересекает центральную ось этой системы нормально к ней.

10. Даны несколько пар и их результирующая пара. Показать, что площадь проекции параллелограмма, построенного на векторах результирующей пары, на какую-нибудь плоскость равна алгебраической сумме площадей проекций параллелограммов, построенных на векторах составляющих пар.

11. Пусть P', P'', ..., $P^{(k)}$ — векторы, образующие систему, *эквивалентную нулю*, и, соответственно, M', M'', ..., $M^{(k)}$ — моменты какой-нибудь другой системы (S) векторов относительно осей P', P'', ..., $P^{(k)}$. Доказать соотношение

$$P'M'+P''M''+\ldots+P^{(k)}M^{(k)}=0.$$

Следует доказать сначала теорему для одного вектора P системы (S), воспользовавшись равенством нулю главного момента векторов P', P'', ..., $P^{(k)}$ относительно P.

12. *Барицентрические координаты Мёбиуса.* Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — некоторый тетраэдр. *Барицентрическими координатами* точки M называют алгебраические значения P_1, P_2, P_3, P_4 четырех параллельных векторов, которые необходимо приложить к вершинам A_1, A_2, A_3, A_4 для того, чтобы центр этих параллельных векторов совпадал с точкой M. Показать, что:

Каждой точке M отвечают значения P_1, P_2, P_3, P_4, определенные с точностью до общего множителя. Линейное однородное уравнение относительно P_1, P_2, P_3, P_4 определяет плоскость, расстояния которой от четырех вершин пропорциональны коэффициентам при P_1, P_2, P_3, P_4. Если эти коэффициенты равны, то плоскость уходит в бесконечность. Поверхность порядка m представляется однородным уравнением m-го порядка относительно P_1, P_2, P_3, P_4.

13. *Найти результирующий винт двух взаимно перпендикулярных сходящихся винтов.*

Решение. Примем прямые, на которых лежат винты, за оси x и y и прямую, к ним перпендикулярную, за ось z. Пусть X — вектор, а λ — параметр винта, лежащего на оси Ox (рис. 28). Тогда $L = \lambda X$. Обозначая через M, Y, μ аналогичные величины для второго винта, имеем $M = \mu Y$.

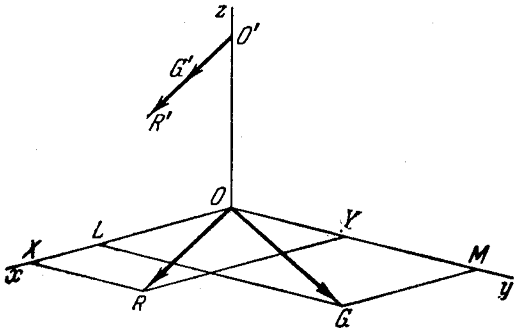


Рис. 28.

Пусть R — сумма векторов X и Y, а G — сумма моментов L и M. Тогда уравнение центральной оси всей системы будет

$$\frac{\lambda X + zY}{X} = \frac{\mu Y - zX}{Y} = \frac{-xY + yX}{0}.$$

Эта ось параллельна OR и пересекает Oz в точке O', для которой

$$z = \frac{(\mu - \lambda) XY}{X^2 + Y^2}.$$

Пусть $O'R'$ — эта ось. Обозначим через R' и G' главный вектор и главный момент системы относительно O'. Имеем $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$. Нужно найти G' или лучше отношение $K = \frac{G'}{R'}$, т. е. параметр результирующего винта. Но отношение G' к R' равно отношению их проекций L' и X на ось x. Таким путем находим:

$$L' = \lambda X + zY, \quad K = \frac{\lambda X^2 + \mu Y^2}{X^2 + Y^2}.$$

Результирующий винт вполне определен.

14. Найти геометрическое место результирующих винтов $O'R'G'$ предыдущего упражнения, когда параметры λ и μ слагаемых винтов остаются постоянными, а их векторы X и Y изменяются по модулю.

Искомая поверхность есть коноид

$$z(x^2 + y^2) = (\mu - \lambda) xy.$$

Кэйли назвал этот коноид *цилиндроидом.* Болл показал, что этот коноид имеет с цилиндром то общее свойство, что геометрическое место проекций произвольной точки на образующие есть плоская кривая. Можно дополнительно доказать, что указанная кривая является *коническим сечением* также и для цилиндроида.

15. Доказать в общем виде, что результирующий винт двух произвольных винтов с фиксированными положениями описывает цилиндроид, когда параметры этих винтов остаются постоянными, а их векторы изменяются. Принять за ось Oz общий перпендикуляр к обоим винтам.

16. Из всех нецилиндрических линейчатых поверхностей цилиндроид является единственной поверхностью, для которой геометрическое место проекций произвольной точки на образующие есть плоская кривая. (См. Appell, Bulletin de la Société mathématique, декабрь 1900; Bricard, там же, январь 1901; Demoulin, там же).

17. Произвольная система скользящих векторов всегда эквивалентна шести векторам, направленным по шести ребрам тетраэдра.

18. Пусть $SABC$ — тетраэдр. Примем в качестве положительных направлений на ребрах, выходящих из S, направления SA, SB, SC. Далее, на каждом ребре основания, таком, как AB, примем в качестве положительного направления вращения вокруг противоположного ребра SC направление AB. Обозначим через ξ, η, ζ, λ, μ, ν алгебраические значения шести векторов, направленных по SA, SB, SC, BC, CA, AB. Показать, что инвариант $LX+MY+NZ$ имеет значение

$$6V\left[\frac{\lambda}{BC}\frac{\xi}{SA}+\frac{\mu}{CA}\frac{\eta}{SB}+\frac{\nu}{AB}\frac{\zeta}{SC}\right],$$

где V — объем данного тетраэдра.

19. Для того чтобы система скользящих векторов была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы шесть составляющих ξ, η, ζ, λ, μ, ν равнялись нулю.

20. Для того чтобы система скользящих векторов была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов относительно каждого из шести ребер тетраэдра равнялась нулю.

21. Система скользящих векторов, лежащих в одной плоскости, эквивалентна либо одному вектору, либо одной паре, либо нулю.

22. Система скользящих векторов, лежащих в одной плоскости, эквивалентна трем векторам, направленным по сторонам произвольно взятого в этой плоскости треугольника.

23. Для того чтобы векторная производная какого-нибудь вектора была всегда ему перпендикулярна, необходимо и достаточно, чтобы этот вектор имел постоянную длину.

24. Для того чтобы векторная производная какого-нибудь вектора была всегда направлена вдоль него, необходимо и достаточно, чтобы этот вектор имел постоянное направление.

25. *Смешанное* произведение трех сходящихся векторов AP_1, AP_2, AP_3 с проекциями X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 есть скаляр

$$\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{P}_3=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix},$$

равный по величине и по знаку объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Показать, что:

1°. Смешанное произведение меняет знак при перестановке двух множителей.

2°. Смешанное произведение трех полярных векторов есть скаляр второго рода (п. 34).

3°. Смешанное произведение трех аксиальных векторов есть скаляр первого рода.

4°. Смешанное произведение трех векторов есть скалярное произведение одного из векторов на векторное произведение двух других.

26. *Центральная плоскость.* Дана система связанных векторов V_1, V_2, ..., V_n, приложенных в точках A_1, A_2, ..., A_n. Показать, что если точку P перемещать параллельно главному вектору R, то существует положение P_0 этой точки, для которого результирующий вириал относительно P_0, равный сумме вириалов всех векторов, обращается в нуль.

Геометрическое место точек P_0 есть плоскость, перпендикулярная к R. Это и есть центральная плоскость.

27. *Центр.* Точка центральной плоскости, относительно которой главный момент параллелен вектору R, есть *центр.*

ГЛАВА II

КИНЕМАТИКА

Кинематика оформилась как самостоятельная наука сравнительно недавно. Уже Даламбер указал на важность изучения законов движения как такового. Но первый, кто показал необходимость предпослать динамике теорию геометрических свойств движения тел, был Ампер. Эти свойства были представлены в 1838 г. Факультету наук в Париже Понселе. В этом представлении содержались, в частности, и теоремы о непрерывном перемещении твердого тела в пространстве, за исключением понятия мгновенной винтовой оси, которое было введено Шалем. Формулы, дающие вариации координат точек движущегося в пространстве тела, принадлежат Эйлеру (Берлинская Академия, 1750). Кинематика допускает многочисленные геометрические приложения. К ним относится, например, метод Роберваля построения касательных, теория мгновенных центров вращения, введенная Шалем, частный случай которой был дан уже Декартом в связи с задачей о касательной к циклоиде. К ним же относятся установленные Шалем свойства систем прямых, плоскостей и точек, связанные с движением твердого тела и приводящие наиболее простым образом к понятию комплекса прямых первого порядка. В 1862 г. Резаль выпустил курс «Чистой кинематики». С появлением этого курса кинематика окончательно утвердилась в качестве самостоятельной науки.

Мы ограничиваемся здесь изложением только тех понятий, которые необходимы для дальнейшего курса механики. Так, в частности, мы не занимаемся здесь перемещениями твердого тела, положение которого определяется двумя или несколькими параметрами. Эти перемещения были изучены, главным образом, Томсоном и Тэтом, Шёнеманом, Мангеймом, Рибокуром, Кёнигсом.

I. Кинематика точки

36. Определения. Когда говорят, что тело находится в *покое* или в *движении*, то под этим всегда понимают, что этот покой или движение имеет место относительно некоторых других тел. Так, объект, находящийся неподвижно на поверхности Земли, покоится относительно Земли, сама же Земля движется относительно Солнца, и т. д. Другими словами, наблюдают только *относительные движения*.

Тем не менее представляется удобным в каждом вопросе кинематики выбирать систему осей, которые по определению рассматриваются как *абсолютно неподвижные*. Тогда движение относительно этих осей называют *абсолютным движением*.

Но если в кинематике выбор осей, рассматриваемых как неподвижные, является произвольным, то в механике это будет не так. Ниже мы увидим, что с целью возможно большего упрощения исследования явлений природы осями, которые уславливаются считать неподвижными, являются оси, имеющие начало в центре тяжести солнечной системы и направленные на три, так называемые, неподвижные звезды.

Для определения момента времени, в котором происходит какое-нибудь явление, его относят к какому-нибудь определенному моменту, называемому *начальным*, и задают число, которое измеряет в каких-нибудь единицах (например, в секундах среднего времени) промежуток времени между рассматриваемым и начальным моментами. Этому числу приписывают знак + или — в зависимости от того, наступает ли рассматриваемый момент после или до начального момента. Вследствие этого, когда мы будем говорить о моменте времени t, буква t будет обозначать положительное или отрицательное число секунд.

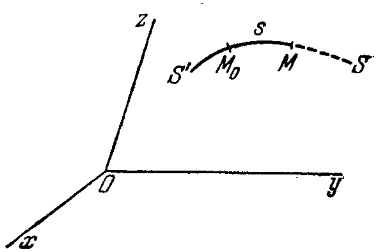


Рис. 29.

С целью упрощения изучения кинематики сначала изучают движение одной точки, а после этого — движение тел произвольной протяженности.

37. Движение точки. Пусть Ox, Oy, Oz — три абсолютно неподвижные оси и M — движущаяся точка, координаты которой x, y, z (рис. 29) являются заданными непрерывными функциями времени t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t).$$

Кривая, описываемая движущейся точкой, называется ее *траекторией*. Ее уравнения могут быть получены исключением t из уравнений, определяющих x, y, z в функции t.

Движение может быть определено еще следующим образом: задают траекторию, далее, приняв на ней какую-нибудь точку M_0 за начало отсчета дуг и какое-нибудь направление M_0S отсчета за положительное, задают в функции времени алгебраическое значение s дуги M_0M между движущейся точкой и точкой M_0.

38. Прямолинейное равномерное движение; скорость. Говорят, что движение является *прямолинейным*, если траектория — прямая линия. Если эту прямую принять за ось Ox, то оба предыдущих способа определения движения совпадут и движение будет определяться выражением абсциссы движущейся точки в функции времени.

Наиболее простым прямолинейным движением является то, для которого x есть линейная функция времени:

$$x = at + b,$$

где a и b — постоянные. Это движение характеризуется тем, что приращение Δx величины x за произвольный промежуток времени Δt пропорционально этому промежутку Δt.

Пусть M — положение движущейся точки в момент времени t, а M_1 — ее положение в момент $t + \Delta t$, где $\Delta t > 0$. Геометрическая величина MM_1, если ее отсчитывать вдоль оси Ox, имеет алгебраическое значение, равное Δx. Если в направлении MM_1 отложить от точки M отрезок MW, равный $\frac{MM_1}{\Delta t}$, то *геометрическая величина* MW, алгебраическое значение которой равно $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, называется *скоростью равномерного движения* (рис. 30). Алгебраическое значение этой скорости равно a.

Рис. 30.

39. Произвольное прямолинейное движение; скорость. Рассмотрим произвольное прямолинейное движение, для которого $x = \varphi(t)$. Перемещение MM_1, которое получает точка, когда t увеличивается на Δt, есть геометрическая величина, алгебраическое значение которой равно Δx. Если в направлении MM_1 отложить отрезок MW

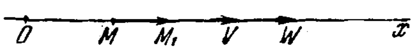


Рис. 31.

(рис. 31), равный $\frac{MM_1}{\Delta t}$, то вектор MW, алгебраическое значение которого равно $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, называется *средней скоростью* движущейся точки за промежуток времени Δt. Если Δt стремится к нулю, то вектор MW стремится к предельному вектору MV, алгебраическое значение которого равно производной $\frac{dx}{dt}$ или $\varphi'(t)$ и который называется *скоростью* точки в момент t.

Например, если

$$x = at^2 + bt + c,$$

где a, b, c — постоянные, то скорость MV в момент t будет иметь алгебраическое значение, отсчитываемое вдоль оси Ox, равное

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b.$$

Изменение этой скорости пропорционально изменению времени. Говорят, что определяемое таким образом прямолинейное движение является *равнопеременным*.

40. Вектор скорости в криволинейном движении. Пусть M и M_1 — положения движущейся точки в моменты t и $t + \Delta t$. Отложим на хорде MM_1 (рис. 32) в направлении MM_1 отрезок MW, равный $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$. Вектор MW называется *средней скоростью* движущейся точки за промежуток времени Δt. Это — скорость, которую должна иметь воображаемая точка, описывающая прямолинейно и равномерно отрезок прямой MM_1 за промежуток времени Δt. Когда Δt стремится к нулю, средняя скорость MW стремится к предельному вектору MV, *касательному* к траектории, который называется *скоростью движущейся точки в момент* t. Скорость есть полярный вектор, приложенный к движущейся точке.

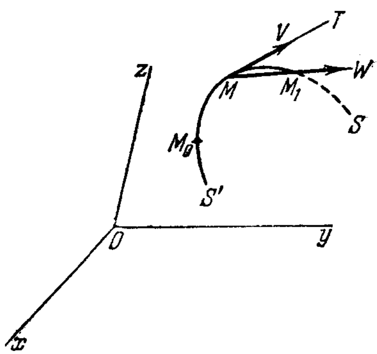


Рис. 32.

Пусть x, y, z — координаты движущейся точки. Проекции геометрической величины MM_1 на оси координат будут Δx, Δy, Δz, и, следовательно, проекции величины MW, т. е. средней скорости, равны

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Если Δt стремится к нулю, то MW стремится к MV. Следовательно, для проекций скорости в момент t имеем:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Допустим, что движение задано траекторией и выражением дуги $M_0M = s$ в функции t. Так как отношение дуги MM_1 к хорде MM_1 стремится к единице, когда Δt стремится к нулю, то для абсолютного значения скорости получается

$$\lim \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{\Delta t} = \pm \frac{ds}{dt}.$$

Если провести в направлении положительных дуг касательную MT к траектории, то скорость будет направлена по MT или в противоположную сторону в зависимости от того, будет ли величина

$\frac{ds}{dt}$ положительной или отрицательной. Следовательно, алгебраическое значение скорости, отсчитываемой в направлении MT, равно $\frac{ds}{dt}$. Если скорость v постоянна, то криволинейное движение называют *равномерным*.

41. Вектор ускорения. Понятие ускорения для простейших случаев введено Галилеем.

Пусть MV и M_1V_1 — скорости движущейся точки в моменты t и $t+\Delta t$ (рис. 33, a).

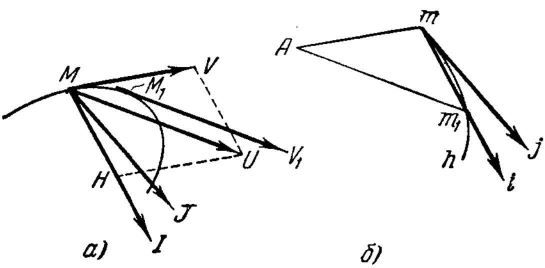


Рис. 33.

Проведем через M отрезок MU, равный и параллельный M_1V_1, и пусть MH — геометрическая разность векторов MU и MV, т. е. вектор, который необходимо приложить к MV, чтобы получить MU. Если вдоль MH отложить длину MI, равную $\frac{MH}{\Delta t}$, то вектор MI даст *среднее ускорение* движущейся точки за промежуток времени Δt. Когда Δt стремится к нулю, этот вектор стремится к пределу MJ, который называется *ускорением движущейся точки в момент* t.

Ускорение есть, следовательно, полярный вектор, приложенный к движущейся точке.

Так как плоскость VMU переходит в пределе в соприкасающуюся плоскость, то ускорение MJ лежит в соприкасающейся плоскости.

Чтобы получить проекции ускорения на оси координат, заметим, что проекция скорости MV в момент t на какую-нибудь ось, например на ось Ox, равна $\frac{dx}{dt}$, а скорость M_1V_1 или вектор MU имеет в момент $t+\Delta t$ проекцию на ту же ось, равную $\frac{dx}{dt}+\Delta\frac{dx}{dt}$. Проекция вектора MH, равная разности проекций векторов MU и MV, будет, следовательно, $\Delta\frac{dx}{dt}$. Поэтому проекции *среднего ускорения* $MI=\frac{MH}{\Delta t}$ равны

$$\frac{\Delta\frac{dx}{dt}}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta\frac{dy}{dt}}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta\frac{dz}{dt}}{\Delta t}.$$

Полагая Δt стремящимся к нулю, получим для проекций ускорения MJ в момент t значения:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Годограф. Понятие ускорения можно легко свести к понятию скорости. Проведем через произвольную фиксированную точку A вектор Am, равный и параллельный скорости MV движущейся точки в момент t (рис. 33, *б*). Когда t изменяется, вектор Am также изменяется и его конец образует новую движущуюся точку, описывающую траекторию h, которая называется *годографом*. Скорость mj этой новой движущейся точки в каждый момент времени равна ускорению точки M. В самом деле, в момент $t+\Delta t$ точка m занимает положение m_1, причем вектор Am_1 равен и параллелен вектору M_1V_1 или MU. Поэтому вектор mm_1 равен и параллелен вектору VU или MH. Средняя скорость точки m за время Δt есть вектор mi, направленный по mm_1 и равный $\frac{mm_1}{\Delta t}$. Эта средняя скорость mi равна, следовательно, и параллельна среднему ускорению MI точки M. Переходя к пределу, когда Δt стремится к нулю, мы видим, что скорость mj точки m в момент t равна ускорению MJ точки M в тот же момент времени.

Пусть, например,

$$x = at^2 + bt + c, \quad y = a't^2 + b't + c', \quad z = a''t^2 + b''t + c'', \tag{1}$$

где a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' — постоянные. Тогда траекторией будет парабола.

Проекции скорости будут

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b, \quad \frac{dy}{dt} = 2a't + b', \quad \frac{dz}{dt} = 2a''t + b'', \tag{2}$$

а проекции ускорения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2a, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2a', \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 2a''. \tag{3}$$

Последние, как видно, постоянны. Следовательно, ускорение будет постоянным по величине и направлению. И, наоборот, если в каком-нибудь движении ускорение постоянно по величине и направлению, то это движение определяется уравнениями вида (1). Действительно, исходя из уравнений (3), последовательным интегрированием придем сначала к уравнениям (2), а затем к уравнениям (1). Такое движение будет подробно изучено дальше при рассмотрении движения тяжелого тела в пустоте.

Важно заметить, что если ускорение движения постоянно по величине и направлению, то и среднее ускорение за произвольный промежуток времени Δt будет иметь *ту же самую постоянную величину и направление*. Действительно, если уравнения (3) выполняются, то, интегрируя их, получаем уравнения (2), из которых для проекций среднего ускорения за время Δt получаем те же значения $2a$, $2a'$, $2a''$, что и для проекций ускорения в момент t.

В этом примере годографом является прямая линия, движение по которой будет равномерным.

42. Касательное и нормальное ускорения (Гюйгенс). Рассмотрим какое-нибудь движение, заданное геометрически траекторией и выражением дуги M_0M или s в функции времени, причем отсчет на этой дуге принимается положительным в каком-нибудь определенном направлении M_0S (рис. 34).

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы (относительно прямоугольных осей) касательной MT к траектории, проведенной в сторону положительного отсчета s, а α', β', γ' — направляющие косинусы главной нормали, которая считается положительной от M к центру C главной кривизны. Пусть, наконец, $MC = \rho$ есть радиус главной кривизны траектории.

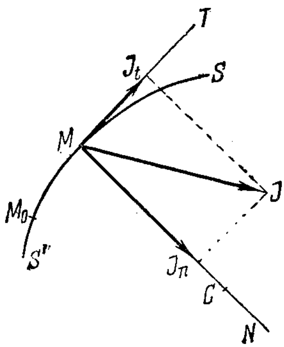


Рис. 34.

По известным формулам Серре—Френе имеем

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{\rho}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{\rho}.$$

Далее, очевидно,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}=\alpha\frac{ds}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}=\beta\frac{ds}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}=\gamma\frac{ds}{dt}.$$

Дифференцируя еще раз по времени и замечая, что

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{\alpha'}{\rho}\frac{ds}{dt}, \ \ldots,$$

получим для проекций ускорения

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\alpha'}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\beta\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\beta'}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\gamma\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\gamma'}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Эти формулы легко интерпретируются. Отложим на касательной, принимая MT за положительное направление, отрезок MJ_t, алгебраическое значение которого равно $J_t=\frac{d^2s}{dt^2}$, а на нормали MN отрезок MJ_n, равный $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$. Тогда формулы показывают, что проекции ускорения на каждую из трех осей равны суммам проекций геометрических величин MJ_t и MJ_n. Следовательно, в пространстве ускорение MJ есть результирующая величин MJ_t и MJ_n, которые называются *касательным* и *нормальным ускорениями*. Проекция J_t

ускорения MJ на касательную MT после замены $\frac{ds}{dt}$ через v напишется так:

$$J_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}.$$

Проекция J_n на нормаль MC всегда положительна:

$$J_n = \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{\rho}.$$

Ускорение MJ расположено, следовательно, *в соприкасающейся плоскости* и направлено в сторону *вогнутости траектории.*

Примеры. 1°. Если движение прямолинейно, то ρ равно бесконечности и нормальная составляющая обращается в нуль. Ускорение совпадает тогда с касательной составляющей. Наоборот, если нормальное ускорение везде нуль, то ρ обращается в бесконечность и траектория есть прямая линия.

2°. Если скорость постоянна по величине, т. е. если криволинейное движение является равномерным, то касательное ускорение равно нулю. Тогда ускорение направлено по главной нормали и изменяется обратно пропорционально радиусу кривизны. Так, если точка описывает окружность радиуса R с *постоянной* по величине скоростью v, то касательное ускорение равно нулю; ускорение J будет нормальным и равным v^2/R, т. е. постоянным по величине и направленным по радиусу. Наоборот, если в каком-нибудь движении касательное ускорение все время нуль, то скорость будет постоянной по величине и движение будет равномерным.

Применение векторных производных. Можно говорить, что вектор скорости MV движущейся точки M есть векторная производная по времени вектора OM, соединяющего неподвижную точку O с точкой M. Это вытекает из самого определения скорости.

Вектор ускорения MJ геометрически равен производной вектора Am, имеющего начало в неподвижной точке A и геометрически равного вектору скорости. Это вытекает из определения ускорения при помощи годографа.

II. Поступательное движение и вращение неизменяемой системы

43. Поступательное движение. *Неизменяемой системой* или *твердым телом* называется совокупность точек, неизменно связанных между собой.

Твердое тело движется поступательно, если оно перемещается таким образом, что все отрезки прямых, соединяющих попарно точки тела, остаются *параллельными* самим себе. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы триэдр, получающийся от соединения какой-нибудь точки A тела (рис. 35) с тремя другими его точками B, C и D, не лежащими с A в одной плоскости, перемещался параллельно самому себе.

Когда тело движется поступательно, все его точки имеют одинаковые скорости и наоборот. В самом деле, пусть $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки тела. Так как отрезок A_1A_2 перемещается параллельно самому себе, то его проекции

x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 на оси постоянны. Следовательно, их производные равны нулю и мы получаем:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dx_2}{dt},\quad \frac{dy_1}{dt}=\frac{dy_2}{dt},\quad \frac{dz_1}{dt}=\frac{dz_2}{dt}. \tag{1}$$

Это показывает, что обе точки имеют одинаковые скорости. Наоборот, если все точки тела имеют в каждый момент времени одинаковые скорости, то тело движется поступательно. В самом деле, если две точки A_1 и A_2 имеют одинаковые скорости, то будут справедливы уравнения (1), откуда после интегрирования увидим, что x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2 постоянны, т. е. что отрезок A_1A_2 перемещается параллельно самому себе. Общая скорость всех точек называется *скоростью поступательного движения*. Дифференцируя уравнения (1), непосредственно убеждаемся, что все точки тела при поступательном движении имеют в каждый момент времени *одинаковые ускорения*. Общее ускорение всех точек называется *ускорением поступательного движения*.

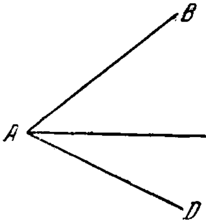


Рис. 35.

44. Вращение вокруг неподвижной оси. Угловая скорость. Геометрическое представление. Когда тело вращается вокруг неподвижной оси AB (рис. 36), каждая его точка M описывает окружность, перпендикулярную к оси, с центром P, лежащим на оси. Скорость точки M направлена, следовательно, нормально к плоскости MAB в сторону вращения. Дуги, описываемые двумя различными точками за одно и то же время, пропорциональны их расстояниям до оси. Скорости этих точек относятся, следовательно, как их расстояния до оси.

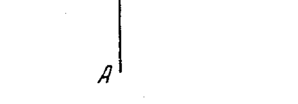


Рис. 36.

Угловой скоростью называют величину, численно равную скорости точек, расположенных от оси на расстоянии единицы длины. Если эту угловую скорость обозначить через ω, то величина V скорости точки M будет равна $\omega\overline{MP}$, где $\overline{MP}$ — расстояние от точки M до оси вращения. Когда вращение задается углом θ, на который поворачивается тело от какого-нибудь начального положения, и этот угол выражен в функции t, то ω равно $\frac{d\theta}{dt}$.

Для определения скоростей в какой-нибудь момент t при вращательном движении необходимо знать три элемента: *ось вращения*, *угловую скорость* и *направление вращения*. Эти три элемента могут быть представлены одним вектором следующим образом.

Возьмем на оси вращения AB произвольную точку A и отложим на ней отрезок $A\omega$ длины ω, направленный таким образом, что для наблюдателя, стоящего в точке A и смотрящего с конца ω отложенного отрезка, вращение происходит *справо налево*. Определяемая таким образом геометрическая величина $A\omega$ представляет вращение. Отождествляя вращательное движение с представляющим его вектором, часто говорят, что тело *совершает вращение* $A\omega$. Так как начало вектора A может быть выбрано где угодно на оси, то, не изменяя вращения, можно перенести начало изображающего его вектора ω в произвольную точку его линии. Вращение представляется, следовательно, вектором, приложенным вдоль некоторой прямой. Этот вектор является *аксиальным* (п. 34).

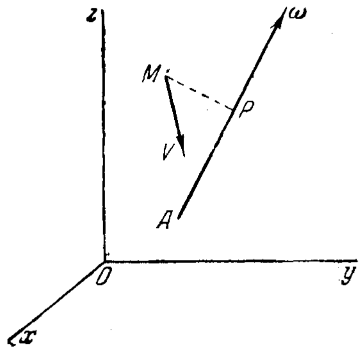


Рис. 37.

Аналитические выражения проекций скорости точки тела. Пусть $A\omega$ (рис. 37) — вращение с угловой скоростью ω, а p, q, r — проекции последней на оси Ox, Oy, Oz, предполагаемые прямоугольными, наконец, x_0, y_0, z_0 — координаты точки A. Пусть M — точка тела с координатами x, y, z, MV — ее скорость, V_x, V_y, V_z — проекции этой скорости на оси. Последние величины нам и нужно определить.

С этой целью заметим, что скорость V точки M по величине и направлению совпадает с моментом вектора $A\omega$ относительно точки M. В самом деле, эта скорость равна $\omega\overline{MP}$, перпендикулярна плоскости $MA\omega$ и направлена таким образом, что точка, перемещающаяся от A к ω, двигается вокруг V в положительном направлении. Нам известны (п. 9) формулы проекций момента относительно какой-нибудь точки (x', y', z'). Прилагая эти формулы к рассматриваемому случаю и замечая, что момент берется относительно точки x, y, z, найдем:

$$V_x = q(z - z_0) - r(y - y_0),$$

$$V_y = r(x - x_0) - p(z - z_0),$$

$$V_z = p(y - y_0) - q(x - x_0).$$

Когда точка A совпадает с началом координат, эти выражения принимают вид

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qx.$$

III. Скорость в относительном движении. Сложение поступательных и вращательных движений. Скорости точек свободного тела

45. Относительное движение; скорость. Вообразим неизменяемую систему (S), совершающую заданное движение, и некоторую точку M, движущуюся относительно этой системы. Система (S) может быть, например, Землей, а точка M — тяжелой точкой, предоставленной самой себе на поверхности Земли и падающей по вертикали. Для наблюдателя, увлекаемого системой (S), называемой *подвижной системой отсчета*, и не подозревающего об этом движении, точка M описывает относительно системы (S) некоторое движение, которое называется *относительным*. Траектория, скорость и ускорение в этом движении называются *относительной траекторией, относительной скоростью* и *относительным ускорением*. Одновременно та же точка совершает в пространстве некоторое абсолютное движение.

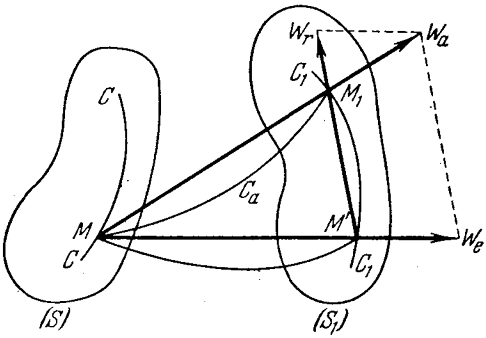


Рис. 38.

На рис. 38 изображена относительная траектория C точки M относительно системы сравнения (S). В то время, как точка M описывает эту кривую C, неизменно связанную с системой (S), сама система перемещается в пространстве. Пусть в момент t движущаяся точка, система сравнения и относительная траектория занимают положения M, (S) и C, а в момент времени $t+\Delta t$ они занимают положения M_1, (S_1) и C_1. Абсолютное перемещение есть MM_1; точка переходит из M в M_1, следуя по некоторой траектории C_a, которая является её абсолютной траекторией.

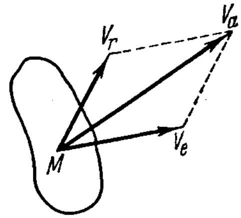


Рис. 39.

Обозначим через M' положение, которое занимает в момент $t+\Delta t$ точка системы (S), совпадавшая с точкой M в момент t. Перемещение $M'M_1$ есть *относительное перемещение* точки M; перемещение MM' называется *переносным перемещением*. Вектор MM_1 есть геометрическая сумма векторов $M'M_1$ и MM'. Если на каждом из этих векторов отложить отрезки MW_a, $M'W_r$ и MW_e, равные соответственно этим векторам, деленным на Δt, то полученные таким образом векторы будут представлять собой среднюю абсолютную скорость, среднюю относительную скорость и среднюю переносную скорость. Так как первый вектор есть сумма двух других, то

$$(W_a) = (W_r) + (W_e).$$

Когда Δt стремится к нулю (рис. 39), эти векторы стремятся к абсолютной скорости V_a, относительной скорости V_r и переносной скорости V_e. Мы имеем, следовательно, геометрическое равенство

$$(V_a) = (V_r) + (V_e).$$

Переносная скорость, согласно предыдущему, представляет собой скорость точки системы (S), совпадающей в рассматриваемый момент с точкой M, или скорость, которую имела бы точка M, если бы она в занимаемом ею положении оказалась неизменно связанной с системой (S).

Мы увидим дальше, как определяется абсолютное ускорение при помощи аналогичной формулы, но *с добавочным членом*. Однако прежде мы дадим некоторые приложения предыдущей теоремы.

46. Сложение поступательных движений. Рассмотрим неизменяемую систему (S_1), движущуюся поступательно со скоростью V_1, и вторую систему (S_2), движущуюся поступательно относительно (S_1) со скоростью V_2 (рис. 40).

Абсолютная скорость V_a какой-нибудь точки M системы (S_2) есть геометрическая сумма относительной скорости этой точки, которая равна V_2, и ее переносной скорости, равной V_1. Абсолютные скорости различных точек (S_2) будут, следовательно, такими, как если бы (S_2) совершала только одно поступательное движение со скоростью, равной геометрической сумме двух скоростей V_1 и V_2. Говорят, что два поступательных движения *сложились в одно*. Точно так же несколько поступательных движений складываются в одно со скоростью, равной результирующей скорости всех скоростей заданных поступательных движений.

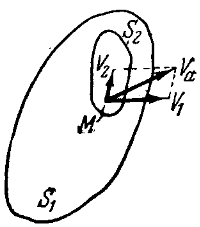


Рис. 40.

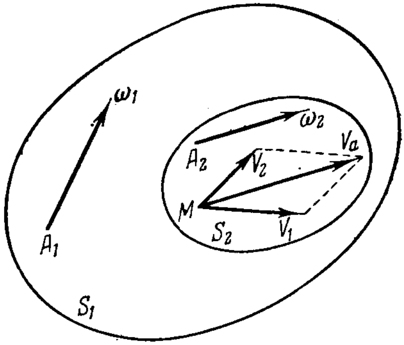


Рис. 41.

47. Совокупность двух вращений. Пусть тело S_1 совершает вращение $A_1\omega$. Вообразим, что это тело S_1 содержит ось $A_2\omega_2$ и что некоторое тело S_2 совершает относительно S_1 вращение ω_2 вокруг оси $A_2\omega_2$ (рис. 41).

Найдем абсолютную скорость какой-нибудь точки M тела S_2. Относительная скорость точки M относительно тела S_1 есть скорость, которой она обладает во вращении ω_2: это момент вектора ω_2 относительно точки M. Переносная скорость — это скорость V_1, которой обладала бы точка M, если бы она была неизменно связана с телом S_1. Это та скорость, которая вызвана вращением ω_1, или момент вектора ω_1 относительно точки M. Абсолютная скорость V_a точки M равна, следовательно, результирующему моменту векторов ω_1 и ω_2 относительно точки M. Эта скорость не зависит от порядка, в котором происходят вращения ω_1 и ω_2.

Рассмотрим несколько частных случаев:

1°. Оси вращения пересекаются. Результирующий момент векторов ω_1 и ω_2 относительно произвольной точки M равен моменту их результирующего вектора ω (рис. 42, *а*). Абсолютная скорость точки M будет, следовательно, такой, как если бы тело S_2 совершало только одно вращение $A_1\omega$.

2°. Оба вращения ω_1 и ω_2 параллельны и *не образуют пары*. Система этих двух векторов эквивалентна одному единственному вектору $A\omega$, получаемому по известному правилу (п. 31). Следовательно, результирующий момент относительно точки M равен моменту результирующего вектора $A\omega$. Скорости различных точек тела будут, как и раньше, такими, как если бы тело совершало только вращение ω (рис. 42, *б*).

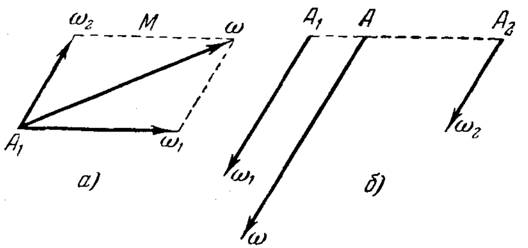


Рис. 42.

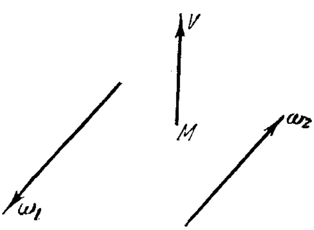


Рис. 43.

3°. В случае, когда оба вращения образуют пару, результирующий момент равен вектору момента пары, какова бы ни была точка M, и все точки тела S_2 имеют *одинаковую скорость*. Скорости этих точек будут, следовательно, такими, как если бы тело S_2 совершало поступательное движение со скоростью, равной вектору момента пары (рис. 43).

48. Произвольное число вращений. Пусть тело S_1 совершает вращение $A_1\omega_1$ и с ним связаны ось $A_2\omega_2$ и тело S_2, которое совершает относительно S_1 вращение ω_2. С телом S_2 связаны ось $A_3\omega_3$ и тело S_3, совершающее относительно S_2 вращение ω_3, и т. д. до тела S_n, совершающего относительно S_{n-1} вращение ω_n.

Мы будем говорить для краткости, что *тело* S_1 *одновременно совершает вращения* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Найдем абсолютную скорость какой-нибудь точки M, неизменно связанной с последним твердым телом S_n. Эта скорость равна главному моменту системы векторов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ относительно точки M. Так как это предложение установлено для случая двух вращений, то для того, чтобы установить его в общем виде, достаточно показать, что если оно справедливо для $n-1$ вращений, то оно остается справедливым и для n вращений.

Абсолютная скорость точки M тела S_n равна геометрической сумме его относительной скорости V_r относительно S_{n-1} и переносной скорости V_e (рис. 44). Относительная скорость точки M по отношению к S_{n-1} есть скорость, вызванная вращением ω_n, т. е. она равна моменту вектора ω_n относительно точки M. Переносная скорость точки M равна скорости, которую она имела бы, если бы была неизменно связана с телом S_{n-1}, т. е. она равна главному моменту векторов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ относительно точки M. Абсолютная скорость есть результирующая этих двух моментов и равна, следовательно, главному моменту векторов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ относительно точки M. Эта скорость не зависит от порядка вращений.

Задача, которая возникает при аналогичной комбинации поступательных и вращательных движений, приводится к предыдущей путем замены каждого поступательного движения парой вращений.

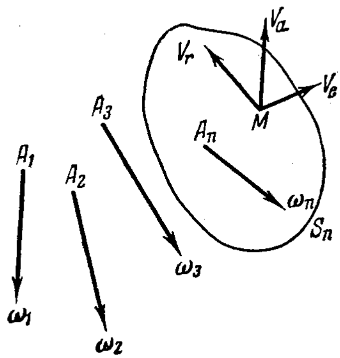


Рис. 44.

Установив это, рассмотрим вторую систему векторов $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_p$, эквивалентную первоначальной $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, т. е. такую, которая может быть получена из первоначальной элементарными операциями. Обе системы вращений, представляемые этими векторами, сообщают точке M одну и ту же скорость. Следовательно, если рассматриваются только скорости, то одну систему векторов ω можно заменить другой.

Вот некоторые, вытекающие отсюда наиболее важные следствия:

1°. Система векторов эквивалентна двум векторам, из которых один проходит через произвольно выбираемую точку. Следовательно, скорости точек тела S_n будут такими же, как если бы это тело совершало два вращения, ось одного из которых проходит через точку, выбираемую произвольно (Шаль).

2°. Система векторов эквивалентна одному вектору ω, проходящему через произвольную точку O, и паре с вектором момента OV_0. Следовательно, скорости точек тела S_n будут такими же, как если бы это тело совершало одно вращение $O\omega$, ось которого проходит через произвольную точку O, и пару вращений с вектором момента OV_0, т. е. поступательное движение со скоростью OV_0 (рис. 45). Когда положение точки O меняется, вращение $O\omega$ сохраняется неизменным, а поступательная скорость OV_0 изменяется, но так, что произведение $g = \overline{OV_0} \cos(\omega, V_0)$ остается постоянным.

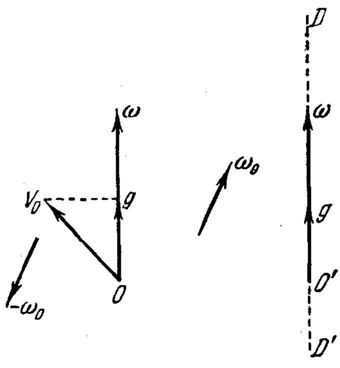


Рис. 45.

Если DD' есть центральная ось системы векторов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, то эта система эквивалентна одному-единственному вектору ω (вращению), направленному по DD', и паре с минимальным векторным моментом g (поступательному движению со скоростью g), направленным также по DD'. Скорости точек тела S_n будут такими же, как если бы оно совершало вращение ω и поступательное движение g в направлении этого вращения. Это движение, эквивалентное движению болта в неподвижной гайке, называется *винтовым движением*, а ось DD' — *мгновенной винтовой осью*.

49. Частные случаи. Отметим некоторые частные случаи, соответствующие различным исследованным случаям в теории векторов (п. 26). Если минимальный момент g равен нулю, то система заданных вращений эквивалентна одному-единственному вращению вокруг центральной оси. Если ω обращается в нуль, то система эквивалентна одному поступательному движению. Если ω и V_0 одновременно равны нулю, то система вращений эквивалентна нулю: скорости всех точек тела S_n равны нулю.

50. Геометрические следствия. Очевидно, что каждая теорема, установленная в главе I в теории скользящих векторов, может служить теоремой о вращениях и поступательных движениях, сообщаемых некоторому телу S_n, если векторы заменить вращениями, пары — поступательными движениями со скоростями, равными их векторам-моментам, и главный момент относительно точки M — скоростью, которою обладает эта точка, двигаясь вместе с телом. Теоремы геометрии о плоскостях и их фокусах, о сопряженных прямых, о прямых нулевого момента имеют простое истолкование. Так, например, если плоскость П неизменно связана с телом S_n при его движении, то фокусом плоскости П будет та ее точка, скорость которой перпендикулярна к плоскости, и т. д.

Тот факт, что произвольное число вращений и поступательных движений, приложенных к твердому телу, сообщают его различным точкам такие же скорости, как и винтовое движение, находит свое настоящее объяснение в теореме, согласно которой в наиболее общем движении твердого тела скорости в каждое мгновение будут такими же, как в винтовом движении. Это нам и предстоит доказать.

51. Распределение скоростей в движущемся твердом теле. Отнесем движение к трем неподвижным в пространстве прямоугольным осям $O_1x_1y_1z_1$. Для определения положения тела введем три прямоугольные оси $Oxyz$, ориентированные так же, как и первые, и неразрывно связанные с телом (рис. 46). Достаточно знать движение этих осей, которое определяется координатами x_0, y_0, z_0 подвижного начала и девятью направляющими косинусами подвижных осей относительно неподвижных, выраженными в функции времени. Будем полагать, что эти девять направляющих косинусов даются следующей таблицей:

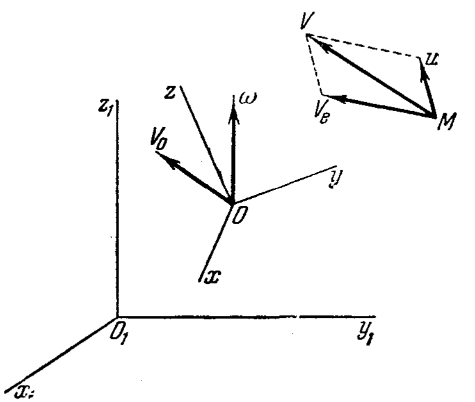


Рис. 46.

	x	y	z
x_1	α	α_1	α_2
y_1	β	β_1	β_2
z_1	γ	γ_1	γ_2

Пусть M — точка тела, имеющая координаты x, y, z относительно подвижных осей и x_1, y_1, z_1 относительно осей неподвижных. Числа x, y, z являются *постоянными*, так как точка M неразрывно связана с движущимися осями.

По формулам преобразования координат имеем:

$$x_1 = x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z,$$
$$y_1 = y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z,$$
$$z_1 = z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z.$$

Дифференцируя эти выражения по t, мы получим проекции скорости V точки M (рис. 46) на неподвижные оси:

$$V_{x_1}=\frac{dx_1}{dt}=\frac{dx_0}{dt}+x\frac{d\alpha}{dt}+y\frac{d\alpha_1}{dt}+z\frac{d\alpha_2}{dt},$$

$$V_{y_1}=\frac{dy_1}{dt}=\frac{dy_0}{dt}+x\frac{d\beta}{dt}+y\frac{d\beta_1}{dt}+z\frac{d\beta_2}{dt},$$

$$V_{z_1}=\frac{dz_1}{dt}=\frac{dz_0}{dt}+x\frac{d\gamma}{dt}+y\frac{d\gamma_1}{dt}+z\frac{d\gamma_2}{dt}.$$

Для простого истолкования этих формул найдем проекции V_x, V_y, V_z скорости V на подвижные оси. Очевидно, имеем

$$V_x=\alpha V_{x_1}+\beta V_{y_1}+\gamma V_{z_1},$$

$$V_y=\alpha_1 V_{x_1}+\beta_1 V_{y_1}+\gamma_1 V_{z_1},$$

$$V_z=\alpha_2 V_{x_1}+\beta_2 V_{y_1}+\gamma_2 V_{z_1}.$$

Вычислим правые части, заменяя в них V_{x_1}, V_{y_1}, V_{z_1} полученными для них выражениями и замечая, что такие величины, как

$$\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt},\ \ldots$$

равны нулю вследствие соотношений

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\ldots$$

Далее, примем во внимание соотношения

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0,\quad \alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2=0,\quad \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0,$$

которые продифференцируем по t. Получим:

$$\alpha_2\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_2\frac{d\beta_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\gamma_1}{dt}=-\left(\alpha_1\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_1\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma_1\frac{d\gamma_2}{dt}\right)=p,$$

$$\alpha\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma\frac{d\gamma_2}{dt}=-\left(\alpha_2\frac{d\alpha}{dt}+\beta_2\frac{d\beta}{dt}+\gamma_2\frac{d\gamma}{dt}\right)\quad=q,$$

$$\alpha_1\frac{d\alpha}{dt}+\beta_1\frac{d\beta}{dt}+\gamma_1\frac{d\gamma}{dt}=-\left(\alpha\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta\frac{d\beta_1}{dt}+\gamma\frac{d\gamma_1}{dt}\right)\quad=r.$$

Здесь обе части мы обозначаем соответственно через p, q, r. Окончательно получим:

$$\text{(основные формулы)}\ \left\{\begin{aligned} V_x&=V_x^0+qz-ry,\\ V_y&=V_y^0+rx-pz,\\ V_z&=V_z^0+py-qx,\end{aligned}\right.$$

где V_x^0, V_y^0, V_z^0 обозначают проекции скорости V_0 точки O на подвижные оси:

$$V_x^0=\alpha\frac{dx_0}{dt}+\beta\frac{dy_0}{dt}+\gamma\frac{dz_0}{dt},\ \ldots$$

Эти формулы имеют простой смысл. Они показывают, что скорость V каждой точки M твердого тела есть геометрическая сумма двух векторов: вектора V^o, общего для всех точек M, равного и параллельного скорости точки O, и вектора u, изменяющегося с положением точки M и имеющего проекции $qz-ry$, $rx-pz$, $py-qx$ на подвижные оси. Вектор V^o есть скорость, которую имела бы точка M, если бы тело совершало поступательное движение со скоростью V^o. Вектор u есть скорость, которую имела бы та же точка, если бы тело совершало вращение $O\omega$, имеющее проекции p, q, r на подвижные оси. Это вращение называется *мгновенным вращением*. Полученный результат выражают, говоря, что скорость произвольной точки тела есть *результирующая скорости поступательного движения, равной скорости какой-нибудь точки O тела, и скорости вращения вокруг некоторой оси, проходящей через O.*

Полученные формулы являются основными для кинематики. Когда движение твердого тела дано, то шесть величин V_x^o, V_y^o, V_z^o, p, q, r являются известными функциями времени. Наоборот, если эти величины даны в функции времени, то можно найти движение триэдра. (См. Darboux, Leçons de Géométrie, т. I, гл. II; Kœnigs, Leçons de Cinématiques, стр. 119.)

Компоненты скорости по неподвижным осям легко выводятся из полученного результата. Прежде всего, для проекций V^o на неподвижные оси имеем

$$\frac{dx_0}{dt},\quad \frac{dy_0}{dt},\quad \frac{dz_0}{dt}.$$

Далее, обозначая через p_1, q_1, r_1 проекции мгновенного вращения $O\omega$ на неподвижные оси и пользуясь формулами вращения (п. 44), получим следующее выражение для проекции вектора u на ось Ox_1:

$$q_1(z_1-z_0)-r_1(y_1-y_0).$$

Следовательно, проекция скорости V на Ox_1 будет

$$V_{x_1}=\frac{dx_1}{dt}=\frac{dx_0}{dt}+q_1(z_1-z_0)-r_1(y_1-y_0).$$

Два аналогичных выражения получаются для V_{y_1} и V_{z_1}.

52. Мгновенная винтовая ось. Касательное винтовое движение. Значения скоростей различных точек твердого тела таковы, как если бы тело совершало либо одно вращательное $O\omega$ и одно поступательное движение OV^o, либо три одновременных вращения: вращение $O\omega$ и два вращения ω^o и $-\omega^o$, образующих пару с вектором моментом OV^o. Согласно правилу, установленному в теории сложения вращений, это распределение скоростей будет в то же время таким, как если бы тело совершало одно винтовое движение вокруг центральной оси системы вектора ω, ω^o, $-\omega^o$. Уравнения этой центральной оси получатся, если искать геометрическое место точек, для которых скорость параллельна направлению мгновенного вращения ω (рис. 47). Таким путем для центральной винтовой оси получатся в подвижной системе координат уравнения

$$\frac{V_x^o + qz - ry}{p} = \frac{V_y^o + rx - pz}{q} = \frac{V_z^o + py - qx}{r} \tag{D}$$

и в неподвижной системе — уравнения

$$\frac{\frac{dx_0}{dt} + q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0)}{p_1} = \frac{\frac{dy_0}{dt} + r_1(x_1 - x_0) - p_1(z_1 - z_0)}{q_1} = \ldots \tag{D_1}$$

Общее значение всех этих отношений есть

$$f = \frac{g}{\omega} = \frac{pV_x^o + qV_y^o + rV_z^o}{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{p_1\frac{dx_0}{dt} + q_1\frac{dy_0}{dt} + r_1\frac{dz_0}{dt}}{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2},$$

где g — скорость скольжения, которая принимается положительной в направлении ω.

Отдельные частные случаи, которые могут представиться, будут следующие: если f равно нулю, то скорость скольжения обращается

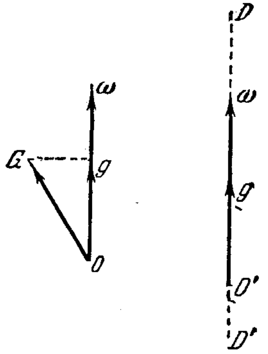


Рис. 47.

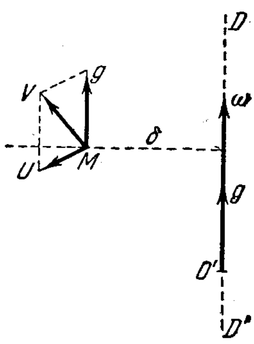


Рис. 48.

в нуль, а если f равно бесконечности, то угловая скорость равна нулю.

Определяемое таким образом винтовое движение называется касательным к действительному движению в момент t, так как распределение скоростей в обоих движениях будет одинаковым. Однако это не будет справедливым для ускорений.

53. Величина скорости точки тела. Рассмотрим точку M (рис. 48) тела, расположенную на расстоянии δ от мгновенной винтовой оси DD'. Скорость, вызванная вращением, есть вектор MU, перпендикулярный плоскости MDD' и равный $\omega\delta$; скорость, вызванная поступательным движением, есть вектор Mg, равный и параллельный g. Результирующая скорость V находится, следовательно, в плоскости, перпендикулярной к δ и определяется формулами

$$V^2 = \omega^2\delta^2 + g^2, \quad \operatorname{tg} \widehat{VMg} = \frac{\omega\delta}{g}.$$

Если точка M находится на оси DD', то ее скорость равна g и направлена вдоль оси. Когда точка M описывает прямую δ, перпендикулярную к DD', скорость V образует гиперболический параболоид. Эти предложения позволяют получить в простой форме распределение главных моментов вокруг центральной оси произвольной системы векторов, причем ω является главным моментом этой системы, а g — минимальной парой (п. 17).

54. Непрерывное движение. Геометрическое место мгновенных винтовых осей в теле есть некоторая линейчатая поверхность Σ, уравнение которой может быть получено путем исключения t из уравнений (D) этих осей в подвижной системе координат. Геометрическое место тех же осей в абсолютном пространстве, т. е. относительно неподвижной системы координат, представляет собой другую линейчатую поверхность, уравнение которой получается из уравнений (D_1). В произвольный момент времени обе эти поверхности имеют общую образующую, которая является мгновенной винтовой осью для этого момента. Более того, они касаются друг друга вдоль этой образующей. В самом деле, вообразим некоторую точку M, описывающую на неподвижной поверхности Σ_1 произвольную кривую таким образом, что в каждый момент времени t она находится на мгновенной оси, являющейся для этого момента общей образующей. Эта же точка описывает относительно движущегося тела некоторую кривую, расположенную на связанной с телом подвижной поверхности Σ. В момент t абсолютная скорость V_a этой точки M касается в M поверхности Σ_1, а ее относительная скорость V_r относительно тела касается в M поверхности Σ. Наконец, переносная скорость V_e, возникающая вследствие движения тела, направлена вдоль общей образующей MG, так как все точки тела, принадлежащие этой образующей, являющейся мгновенной винтовой осью, только скользят вдоль нее. Так как вектор V_a есть геометрическая сумма векторов V_r и V_e, то все эти три вектора лежат в одной плоскости. Плоскость V_a и V_e, т. е. плоскость V_a и MG, касается поверхности Σ_1; плоскость V_r и V_e, т. е. плоскость V_r и MG, касается поверхности Σ. Так как обе эти плоскости совпадают, то поверхности Σ и Σ_1 касаются друг друга в точке M. Но эта точка взята на образующей произвольно. Следовательно, поверхности Σ и Σ_1 касаются вдоль всей образующей.

В частном случае, когда V_e равно *нулю*, скорость V_r равна скорости V_a и обе касательные плоскости, определяемые — одна образующей MG и скоростью V_a, а другая — образующей MG и скоростью V_r, по-прежнему совпадают.

Таким образом, общее движение твердого тела может быть представлено следующим способом, указанным Понселе:

Линейчатая поверхность, связанная с телом, движется по неподвижной линейчатой поверхности, которой она касается вдоль образующей и по которой она катится, скользя вдоль этой образующей.

Рассмотрим несколько частных случаев этих теорем.

55. Твердое тело с неподвижной точкой. Эту неподвижную точку можно принять за начало подвижных и неподвижных осей. Так как скорость точки O равна нулю, то скорости различных точек тела будут такими, как если бы оно *вращалось вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку* (Эйлер). Эта ось называется *мгновенной осью вращения*. Ось винтового движения совпадает с ней, но *скольжение* в этом винтовом движении отсутствует и остается только мгновенное вращение. Конечное движение тела получится, если заставить *катиться* конус C с вершиной в точке O, являющийся геометрическим местом мгновенных осей в теле, по конусу C_1 с той же вершиной O, являющемуся геометрическим местом мгновенных осей в пространстве.

Точки тела, лежащие на сфере с центром в точке O, образуют сферическую фигуру неизменяемой формы, движущуюся по этой сфере. Конусы C и C_1 с вершиной в точке O пересекают эту сферу по двум кривым c и c_1, из которых первая неизменно связана с движущейся сферической фигурой, а вторая неподвижна на сфере. Движение сферической фигуры получится, если заставить кривую c, связанную с этой фигурой, катиться (без скольжения) по неподвижной кривой c_1.

56. Тело перемещается параллельно неподвижной плоскости. В этом случае скорости различных точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости Π и этот случай можно рассматривать как предельный, когда неподвижная точка O удаляется в бесконечность в направлении, перпендикулярном к плоскости Π. Сфера с центром в O, проходящая через какую-нибудь определенную точку тела, переходит при этом в плоскость, параллельную плоскости Π или, если угодно, в самую плоскость Π. Все точки тела, находившиеся в некоторый момент времени на одинаковом расстоянии от этой плоскости, будут и в дальнейшем находиться на том же расстоянии от нее. Они образуют плоскую фигуру неизменяемой формы, движущуюся по неподвижной плоскости. Мгновенное винтовое движение приводится теперь к вращению, ось которого перпендикулярна плоскости Π. Геометрическое место мгновенных осей образует в теле цилиндр C, а в пространстве цилиндр C_1 с образующими, перпендикулярными плоскости Π. Движение тела получится, если заставить катиться без скольжения цилиндр C по цилиндру C_1. Точки тела, лежащие на плоскости Π, образуют плоскую неизменяемую фигуру, движение которой вполне определяет движение всего тела. Скорости различных точек этой фигуры в какой-нибудь момент t будут такими же, как если бы фигура вращалась вокруг некоторой точки I своей плоскости. Эта точка I, являющаяся точкой пересечения мгновенной оси с плоскостью П, называется *мгновенным центром вращения плоской фигуры.* Конечное движение получается качением кривой c, полученной при пересечении цилиндра C плоскостью П, по кривой c_1, полученной при пересечении цилиндра C_1 той же плоскостью.

57. Качение и верчение подвижной поверхности по неподвижной поверхности. Вообразим движущееся твердое тело, ограниченное некоторой неизменяемой поверхностью S, которая все время касается некоторой неподвижной поверхности S_1 (рис. 49). В каждый момент t некоторая точка A

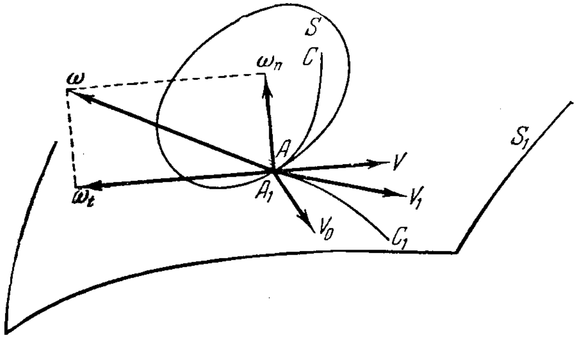


Рис. 49.

движущейся поверхности S находится в соприкосновении с некоторой точкой A_1 неподвижной поверхности S_1. Если в момент t скорость V_0 точки A касания поверхности S с поверхностью S_1 отлична от нуля, то эта скорость лежит в общей касательной плоскости обеих поверхностей. В самом деле, вообразим движущуюся точку, совпадающую в каждый момент с точкой соприкосновения обеих поверхностей. Абсолютная траектория C_1 этой движущейся точки лежит на поверхности S_1 и ее абсолютная скорость V_1 направлена по касательной к C_1; относительная траектория C лежит на поверхности S и относительная скорость V касается C; переносная скорость, вызванная движением S, есть скорость V_0 точки A поверхности S, находящейся в рассматриваемый момент в соприкосновении. Так как V_1 есть результирующая векторов V и V_0, то вектор V_0, если он отличен от нуля, так же как и векторы V_1 и V, лежит в плоскости, касательной к обеим поверхностям в точке A. Скорости различных точек движущегося тела будут такими же, как если бы тело совершало поступательное движение со скоростью V_0 и вращение $A\omega$ вокруг некоторой оси, проходящей через точку A.

Говорят, что поверхность S *катится и вертится* по поверхности S_1, если в каждый момент времени t *скорость точки A касания этих поверхностей равна нулю.* В этом случае V_1 равно нулю и скорости различных точек тела будут такими, как если бы оно совершало *вращение* $A\omega$ вокруг оси, проходящей через A. Следовательно, мгновенная винтовая ось проходит через A и *скольжение не происходит.* Геометрическое место осей $A\omega$ образует в теле S нек торую линейчатую поверхность Σ, а в абсолютном пространстве — некоторую линейчатую поверхность Σ_1. Движение тела получится, если заставить катиться поверхность Σ по поверхности Σ_1. Геометрическое место точек A на поверхности S есть кривая C пересечения поверхностей Σ и S; геометрическое место точек A_1 на поверхности S_1 есть кривая C_1 пересечения поверхностей Σ_1 и S_1. Эти две кривые C и C_1

также катятся одна по другой, что вытекает из того, что скорость V_1 совпадает со скоростью V. Мгновенное вращение $A\omega$ может быть разложено на два: одно $A\omega_n$, нормальное к обеим поверхностям и называющееся *угловой скоростью верчения*, и другое $A\omega_t$, лежащее в касательной плоскости и являющееся угловой *скоростью качения*. Когда движение таково, что скорость верчения ω_n равна постоянно нулю, то движение S по S_1 есть качение.

IV. Ускорения. Теорема Кориолиса

58. Распределение ускорений в движущемся твердом теле. В общем случае проекции скорости точки M тела на неподвижные оси равны:

$$\frac{dx_1}{dt}=a+q_1z_1-r_1y_1,$$

$$\frac{dy_1}{dt}=b+r_1x_1-p_1z_1,$$

$$\frac{dz_1}{dt}=c+p_1y_1-q_1x_1,$$

где a, b, c обозначают величины $V^o_{x_1}-q_1z_0+r_1y_0$ и т. д. Дифференцируя по t, получим формулы для проекций ускорения на неподвижные оси:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{da}{dt}+q_1\frac{dz_1}{dt}-r_1\frac{dy_1}{dt}+z_1\frac{dq_1}{dt}-y_1\frac{dr_1}{dt}, \ldots$$

Заменяя первые производные $\frac{dx_1}{dt}, \ldots$ их значениями и полагая $p_1^2+q_1^2+r_1^2=\omega^2$, найдем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{da}{dt}+q_1c-r_1b+p_1(p_1x_1+q_1y_1+r_1z_1)-$$
$$-\omega^2x_1+z_1\frac{dq_1}{dt}-y_1\frac{dr_1}{dt}.$$

Переставляя буквы, получим выражения других проекций $\frac{d^2y_1}{dt^2}$ и $\frac{d^2z_1}{dt^2}$ ускорения на неподвижные оси.

59. Ускорение в относительном движении. Теорема Кориолиса. Выше (п. 45) мы изложили очень важную теорему, устанавливающую связь между абсолютной скоростью движущейся точки и ее относительной скоростью относительно некоторой системы (S), совершающей известное движение.

Мы ставим себе задачей доказать такого же рода теорему, связывающую между собой абсолютное и относительное ускорения. Мы будем пользоваться аналитическим методом, который даст также и теорему о скоростях, доказанную ранее геометрически.

Для определения движения системы отсчета (S), относительно которой изучается относительное движение, введем три подвижные оси $Oxyz$, неразрывно связанные с (S), и зададим их движение так же, как мы это делали в п. 51. Пусть M — движущаяся точка. Так как она движется и в системе (S) и в пространстве, то ее координаты x, y, z относительно подвижных осей и ее абсолютные координаты x_1, y_1, z_1 будут функциями времени. Эти координаты связаны формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ y_1 &= y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ z_1 &= z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Точка M имеет абсолютную скорость и абсолютное ускорение, проекции которых на неподвижные оси равны

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt}, \tag{V_a}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2}. \tag{J_a}$$

Ее относительные скорость и ускорение имеют на подвижные оси проекции

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \tag{V_r}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{J_r}$$

а на неподвижные оси — проекции

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\frac{dx}{dt} + \alpha_1\frac{dy}{dt} + \alpha_2\frac{dz}{dt}, \\ &\beta\frac{dx}{dt} + \beta_1\frac{dy}{dt} + \beta_2\frac{dz}{dt}, \\ &\gamma\frac{dx}{dt} + \gamma_1\frac{dy}{dt} + \gamma_2\frac{dz}{dt}; \end{aligned}\right\} \tag{V_r}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2\frac{d^2z}{dt^2}, \\ &\beta\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1\frac{d^2y}{dt^2} + \beta_2\frac{d^2z}{dt^2}, \\ &\gamma\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_1\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_2\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \tag{J_r}$$

Точка M имеет также переносные скорость и ускорение, проекции которых на неподвижные оси равны

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_0}{dt}+x\frac{d\alpha}{dt}+y\frac{d\alpha_1}{dt}+z\frac{d\alpha_2}{dt},\\&\frac{dy_0}{dt}+x\frac{d\beta}{dt}+y\frac{d\beta_1}{dt}+z\frac{d\beta_2}{dt},\\&\frac{dz_0}{dt}+x\frac{d\gamma}{dt}+y\frac{d\gamma_1}{dt}+z\frac{d\gamma_2}{dt};\end{aligned}\right\}\qquad (V_e)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x_0}{dt^2}+x\frac{d^2\alpha}{dt^2}+y\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+z\frac{d^2\alpha_2}{dt^2},\\&\frac{d^2y_0}{dt^2}+x\frac{d^2\beta}{dt^2}+y\frac{d^2\beta_1}{dt^2}+z\frac{d^2\beta_2}{dt^2},\\&\frac{d^2z_0}{dt^2}+x\frac{d^2\gamma}{dt^2}+y\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}+z\frac{d^2\gamma_2}{dt^2}.\end{aligned}\right\}\qquad (J_e)$$

Эти формулы получаются, если рассматривать x, y, z как постоянные, так как *переносными скоростью* и *ускорением* точки M называются скорость и ускорение, которые имела бы эта точка, если бы она была неизменно связана с подвижными осями.

Дифференцируя формулы (1) по t, мы получим аналитическое выражение теоремы, доказанной ранее (п. 45): абсолютная скорость равна геометрической сумме относительной скорости и переносной скорости.

После второго дифференцирования формул (1) получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\left(\alpha\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha_1\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha_2\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\left(\frac{d^2x_0}{dt^2}+x\frac{d^2\alpha}{dt^2}+y\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+z\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}\right)+$$
$$+2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha_2}{dt}\frac{dz}{dt}\right)\qquad (2)$$

и две аналогичные формулы для вторых производных величин y_1 и z_1.

Для уяснения смысла этих равенств рассмотрим вектор J', имеющий начало в точке M и следующие проекции на неподвижные оси:

$$\left.\begin{aligned}&J'_{x_1}=2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha_2}{dt}\frac{dz}{dt}\right),\\&J'_{y_1}=2\left(\frac{d\beta}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d\beta_1}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d\beta_2}{dt}\frac{dz}{dt}\right),\\&J'_{z_1}=2\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d\gamma_1}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d\gamma_2}{dt}\frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}\right\}\qquad (J')$$

Этот вектор называется *добавочным* ускорением. Уравнения (2) показывают, что проекция вектора J_a на каждую из неподвижных осей равна сумме проекций J_r, J_e и J' на ту же ось, т. е. что вектор J_a есть геометрическая сумма векторов J_r, J_e и J'.

Следовательно, *абсолютное ускорение есть результирующая относительного ускорения, переносного ускорения и добавочного ускорения.*

Остается найти простое истолкование вектора J'. С этой целью найдем проекции J'_x, J'_y, J'_z вектора J' на подвижные оси. Очевидно, имеем

$$J'_x = \alpha J'_{x_1} + \beta J'_{y_1} + \gamma J'_{z_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Система отсчета (S), относительно которой рассматривается относительное движение, представляет собой движущееся твердое тело или неизменяемую систему. На основании полученных ранее результатов мы знаем, что скорости ее различных точек в рассматриваемый момент будут такими же, как если бы эта система совершала поступательное движение и мгновенное вращение ω с проекциями p, q, r на подвижные оси, причем

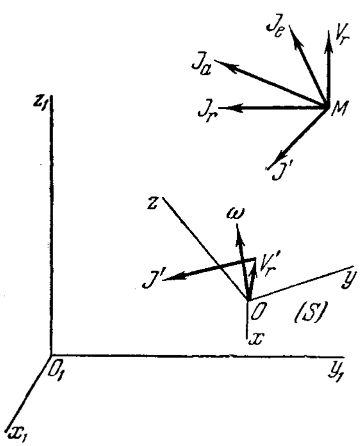


Рис. 50.

$$q = \alpha\frac{d\alpha_2}{dt} + \beta\frac{d\beta_2}{dt} + \gamma\frac{d\gamma_2}{dt} =$$
$$= -\left(\alpha_2\frac{d\alpha}{dt} + \beta_2\frac{d\beta}{dt} + \gamma_2\frac{d\gamma}{dt}\right), \ldots$$

При помощи этих формул сразу находим:

$$J'_x = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$
$$J'_y = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$
$$J'_z = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Рассмотрим точку V'_r (рис. 50), имеющую в подвижных осях координаты $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, т. е. координаты конца вектора OV'_r с началом в точке O, равного и параллельного относительной скорости V_r. Тогда проекции J' на оси x, y, z равны удвоенным проекциям скорости, которую будет иметь эта точка V'_r, если угол $\omega O V'_r$, предполагаемый неизменяемым, будет вращаться с угловой скоростью ω вокруг $O\omega$, как вокруг неподвижной оси. Следовательно, вектор J' по величине и направлению равен удвоенной этой скорости, т. е. удвоенному моменту вектора ω относительно точки V'_r. Этот вектор приложен в точке M. Более подробно его можно определить так: вектор J' перпендикулярен плоскости $\omega O V'_r$ мгновенной оси и относительной скорости; он равен по величине удвоенному произведению ω на расстояние от точки V'_r до оси $O\omega$, т. е. $2\omega V_r \sin(\omega, V_r)$; наконец, он направлен по отношению к плоскости $\omega O V'_r$ в ту сторону, куда мгновенное вращение ω стремится повернуть конец V'_r вектора OV'_r, параллельного относительной скорости. Итак, имеем:

$$(V_a) = (V_r) + (V_e), \quad (J_a) = (J_r) + (J_e) + (J').$$

Вектор J' обращается в нуль, если один из трех множителей: ω, или V_r, или $\sin(\omega, V_r)$ — обращается в нуль. Наиболее важными являются следующие случаи.

60. Поступательное движение подвижных осей. Сложение движений. *Если* ω *все время равно нулю, то и добавочное ускорение будет все время равно нулю.* Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы подвижные оси перемещались поступательно. Абсолютное ускорение J_a будет тогда результирующим вектором относительного ускорения J_r и переносного ускорения J_e.

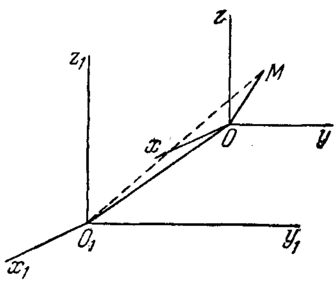


Рис. 51.

Этот частный случай относительного движения носит название *сложения движений*. Для определения поступательного движения подвижных осей, которые можно тогда предполагать параллельными неподвижным осям (рис. 51), достаточно определить движение одной точки O подвижной системы отсчета, что может быть сделано заданием изменения вектора O_1O в функции времени. Относительное движение точки M определяется изменением вектора OM. Абсолютное движение точки M, определяемое изменением результирующего вектора O_1M, называется *результирующим двух первых движений*. Согласно предыдущему скорость и ускорение в этом движении равны геометрическим суммам скоростей и ускорений составляющих движений.

61. Общие формулы для скорости и ускорения точки, отнесенной к подвижным осям. Допустим, что подвижный триэдр $Oxyz$ совершает известное движение. Обозначим, как и выше, через V_x^o, V_y^o, V_z^o проекции абсолютной скорости V^o начала O на подвижные оси, а через p, q, r—компоненты мгновенного вращения триэдра $Oxyz$ относительно тех же осей.

Скорость. Рассмотрим точку M, имеющую относительно осей $Oxyz$ координаты x, y, z. Относительная скорость V_r точки M относительно триэдра имеет на подвижные оси проекции

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \qquad (V_r)$$

а переносная скорость той же точки имеет проекции (п. 51)

$$V_x^o + qz - ry, \quad V_y^o + rx - pz, \quad V_z^o + py - qx. \qquad (V_e)$$

Абсолютная скорость V_a этой же точки, равная геометрической сумме скоростей V_r и V_e, имеет проекции

$$\left.\begin{aligned} V_{ax} &= \frac{dx}{dt} + V_x^o + qz - ry, \\ V_{ay} &= \frac{dy}{dt} + V_y^o + rx - pz, \\ V_{az} &= \frac{dz}{dt} + V_z^o + py - qx. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ускорение. Для получения проекций абсолютного ускорения точки M на оси $Oxyz$ достаточно обратиться к определению ускорения при помощи годографа (п. 41). Через некоторую неподвижную точку A проведем три оси Ax_1, Ay_1, Az_1, параллельные осям Ox, Oy, Oz, и отрезок A_m, равный и параллельный абсолютной скорости V_a точки M. Искомое ускорение J_a равно и параллельно абсолютной скорости точки m. Но эта точка m имеет относительно осей $Ax_1y_1z_1$ координаты

$$x_1 = V_{ax}, \quad y_1 = V_{ay}, \quad z_1 = V_{az}. \qquad (m)$$

Скорость начала A равна нулю и мгновенное вращение триэдра $Ax_1y_1z_1$ совпадает с мгновенным вращением параллельного триэдра $Oxyz$. Следовательно, проекции на $Ax_1y_1z_1$ или $Oxyz$ абсолютной скорости точки m, согласно формулам, аналогичным (3), равны

$$\frac{dx_1}{dt} + qz_1 - ry_1, \ldots$$

Поэтому для проекций абсолютного ускорения J_a имеем:

$$\left.\begin{aligned} J_{ax} &= \frac{dV_{ax}}{dt} + qV_{az} - rV_{ay}, \\ J_{ay} &= \frac{dV_{ay}}{dt} + rV_{ax} - pV_{az}, \\ J_{az} &= \frac{dV_{az}}{dt} + pV_{ay} - qV_{ax}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Эти формулы позволяют другим путем доказать теорему Кориолиса.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти траекторию движущейся точки, зная, что она плоская и что касательная и нормальная составляющие ускорения постоянны.

Ответ. Отсчитывая время от надлежащим образом выбранного момента и дугу s траектории от надлежащим образом выбранного начала, найдем

$$s = at^2, \quad \frac{v^2}{\rho} = b, \quad \rho = \frac{4a}{b} s,$$

где ρ — радиус кривизны, a и b — постоянные. Траектория — логарифмическая спираль.

2. Плоское движение определено двумя уравнениями, выражающими полярные координаты r и θ движущейся точки в функции времени. Требуется найти либо непосредственно, либо при помощи теории относительного движения компоненты скорости и ускорения по радиусу-вектору и по перпендикуляру к нему.

Ответ. Компоненты скорости —

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d\theta}{dt},$$

компоненты ускорения —

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

3. Точка описывает лемнискату

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

с постоянной по величине скоростью a. Выразить координаты точки в функции времени и вычислить ускорение. (Эта задача предполагает знакомство с эллиптическими функциями.)

Ответ. Пусть s — дуга кривой, отсчитываемая от точки, для которой $\theta = 0$. Тогда

$$at = s = -\int \frac{2a^2\,dr}{a\sqrt{2}\,\sqrt{(2a^2+r^2)(2a^2-r^2)}},$$

откуда

$$r = a\sqrt{2}\,cnt, \quad \cos\theta = dnt, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,snt,$$

где модуль эллиптических функций равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда непосредственно найдутся x и y в функции времени.

4. Показать, что при движении твердого тела в заданный момент времени:

а) геометрическое место точек тела, скорости которых пересекаются в заданной точке, есть пространственная кубическая кривая;

б) геометрическое место направлений этих скоростей есть конус второго порядка;

в) геометрическое место точек, скорости которых равны по величине, есть цилиндр вращения вокруг мгновенной винтовой оси (Шаль).

5. Те же вопросы для ускорений.

6. При движении твердого тела плоскости, перпендикулярные к траекториям точек, лежащих в одной плоскости, проходят через одну точку. Плоскости, перпендикулярные к траекториям точек, лежащих на одной прямой D, проходят через одну прямую Δ. Плоскости, перпендикулярные к траекториям точек, лежащих на поверхности порядка m, огибают поверхность класса m (Шаль). (Эти свойства непосредственно вытекают из свойств плоскостей и их фокусов, указанных в п. 17.)

7. Плоскости, перпендикулярные к траекториям двух произвольных точек a и b тела, пересекают мгновенную винтовую ось D в двух точках α и β, являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из a и b на указанную ось, так что

$$\alpha\beta = ab\cos(ab,\ D) \quad \text{(Шаль)}.$$

8. Если скорости, которыми обладают в один и тот же момент времени различные точки тела, рассматривать как бесконечные прямые, то они

образуют комплекс второго порядка, конические сечения которого являются параболоидами (задача, аналогичная задаче 8 предыдущей главы).

9. В движущемся твердом теле скорости различных точек в момент t проектируются на плоскость, перпендикулярную к центральной оси. Показать, что эти проекции перпендикулярны к прямым, соединяющим проекции точек на эту же плоскость с точкой ее пересечения с центральной осью.

10. *Построение мгновенной винтовой оси по Понселе.* Через произвольную точку O пространства проводят три вектора OV, OV', OV'', равных скоростям трех точек тела M, M', M''. Мгновенная винтовая ось перпендикулярна плоскости π трех точек V, V', V''. Пусть m и m' — проекции на эту плоскость двух из этих точек, M и M', а $\overline{mv}$ и $\overline{m'v'}$ — проекции их скоростей. Перпендикуляры, восставленные в точках m и m' к $\overline{mv}$ и $\overline{m'v'}$, пересекаются в точке встречи оси с плоскостью π. Ось таким образом определена.

11. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки. Показать, что если мгновенная ось занимает постоянное положение в теле, то она занимает также постоянное положение и в пространстве, и движение является вращением вокруг неподвижной оси.

Обратно, если мгновенная ось неподвижна в пространстве, то она неподвижна также и относительно тела.

12. Рассмотрим пространственную кривую, отнесенную к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$, и движущуюся по ней точку O, координаты которой являются заданными функциями дуги s. Предположим, что движение точки O определяется уравнением $s = t$ и рассмотрим прямоугольный триэдр $Oxyz$, образованный касательной Ox, направленной в сторону движения, главной нормалью Oy, направленной в сторону радиуса кривизны ρ, и бинормалью Oz.

а) Найти проекции p, q, r мгновенного вращения подвижного триэдра на подвижные оси.

Ответ.

$$p = -\frac{1}{\tau}, \quad q = 0, \quad r = \frac{1}{\rho} \qquad (\tau \text{ — радиус кручения})$$

б) Найти уравнения мгновенной винтовой оси.

13. Показать, воспользовавшись предыдущими результатами, что если $\frac{\rho}{\tau} = \text{const}$, то кривая является винтовой линией, проведенной на произвольном цилиндре (Бертран).

[Рассмотреть вспомогательный триэдр $O_1x'y'z'$ с неподвижной вершиной и с ребрами, параллельными подвижным осям $Oxyz$. Если $\frac{\rho}{\tau} = \text{const}$, то мгновенная ось вращения этого нового триэдра будет *неподвижна относительно его и*, следовательно, *неподвижна в пространстве* (задача 11), а касательная Ox образует с направлением этой неподвижной оси *постоянный угол.*]

14. Прямая AB пространства связана с неподвижной осью Oz, вокруг которой она вращается с постоянной угловой скоростью ω. Твердое тело C, связанное с прямой AB, вращается вокруг нее с той же относительной угловой скоростью ω.

Найти для этого тела мгновенную винтовую ось, неподвижную линейчатую поверхность Σ_1 и подвижную линейчатую поверхность Σ.

15. Круглый цилиндр C катится внутри круглого цилиндра C' вдвое большего радиуса и одновременно скользит параллельно образующей, причем так, что одна из точек цилиндра C описывает неподвижную прямую, обязательно пересекающую ось цилиндра C'.

Показать, что в этом движении все другие точки тела описывают эллипсы.

Это движение, если не считать движения, параллельного плоскости, является единственным, при котором все точки движущегося тела описывают плоские кривые. (См. Darboux, Comptes Rendus, XCII, или Annales de l'École Normale, 1890.)

16. Показать, что непрерывное движение твердого тела может быть получено следующим способом, указанным *Пуансо*. Конус C неизменяемой формы, связанный с телом, катится без скольжения по конусу C_1 также неизменяемой формы, совершающему поступательное движение.

17. Геометрическое место осей кривизны траекторий различных точек, лежащих на прямой линии, для точек этой прямой есть гиперболоид; геометрическое место центров соприкасающихся сфер есть пространственная кривая третьего порядка (Mannheim).

18. *К теореме Кориолиса.* Если мгновенное вращение подвижной системы отсчета есть результирующая двух вращений ω' и ω'', то и добавочное ускорение J' есть результирующая двух добавочных ускорений, соответствующих составляющим вращениям ω' и ω''. Если относительная скорость V_r есть результирующая двух относительных скоростей V_r' и V_r'', то добавочное ускорение J' есть результирующая двух добавочных ускорений, соответствующих составляющим скоростям V_r' и V_r'' (Resal).

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ. МАССА И СИЛА

Механика опирается на небольшое число основных законов, которые невозможно вывести непосредственно и к которым пришли длинным путем индукций. Полученные из них следствия подтверждаются наблюдениями. Первая идея этих законов принадлежит Галилею, который при исследовании законов падения тел (наклонная плоскость, маятник, параболическое движение) ввел понятия инерции, ускорения, сложения движений. Гюйгенс был продолжателем Галилея в теории движения точки. Он же первый изучал движение материальной системы. Наконец, Ньютон расширил область механики открытием закона всемирного тяготения.

Мы не ставим своей целью дать критический анализ основных законов механики. Это один из наиболее тонких вопросов, требующий дальнейших исследований.

I. Основные законы

62. Неподвижные оси. Мы будем относить положение всех тел к некоторой системе осей, которые, по определению, мы будем считать *абсолютно неподвижными осями*. Эта система осей является триэдром, с вершиной в центре тяжести солнечной системы и с ребрами, направленными на три звезды, называемые *неподвижными звездами*.

63. Время. Время, которым мы будем пользоваться, есть среднее время, определяемое в космографии.

64. Материальная точка. Для того чтобы начать с наиболее простых задач рассматривают сперва движение настолько малой частицы материи, что ее положение, без существенной ошибки, может быть определено как положение геометрической точки. Такую частицу материи называют *материальной точкой*. В дальнейшем тела рассматриваются как совокупность очень большого числа материальных точек.

Одновременно с изменением положения материальная точка может вращаться и деформироваться, но мы будем здесь заниматься только ее положением, не интересуясь тем, как она вращается и деформируется.

Наблюдения и опыт показывают, что материальные точки воздействуют друг на друга. Так, например, материальные точки, образующие тело, называемое *твердым*, действуют друг на друга таким образом, что форма тела почти сохраняется, когда его пытаются деформировать; две наэлектризованные точки притягиваются или отталкиваются; и т. д.

65. Основные законы. *Первый основной закон.* Все материальные точки, предоставленные самим себе, не имеют ускорения.

Этот закон может быть выражен еще так: материальная точка, предоставленная самой себе, сохраняет свою скорость по величине и направлению; она совершает относительно неподвижных осей прямолинейное равномерное движение; в частном случае движения может и не быть. Этот закон известен под названием *закона инерции*.

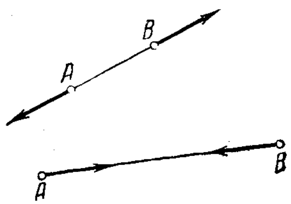


Рис. 52.

Второй основной закон. Две материальные точки сообщают друг другу ускорения, лежащие вдоль прямой, их соединяющей, и направленные в противоположные стороны (см. оба чертежа на рис. 52).

Изучение условий, при которых эти ускорения возникают, является предметом экспериментальной физики. Ускорения могут возникнуть вследствие того, что точки наэлектризованы или вследствие того, что они друг на друга давят, или вследствие ньютоновского притяжения и т. д.

Третий основной закон. Отношение численных значений ускорений, которые две произвольные материальные точки A и B сообщают друг другу, постоянно. Другими словами, это отношение будет одним и тем же, каковы бы ни были физические условия возникновения ускорений, будь то наэлектризованность, взаимное давление, ньютоновское действие и т. д.

Вследствие этого мы можем выразить отношение ускорения точки B к ускорению точки A при помощи дроби, числителем которой является произвольно выбранная величина, которую мы обозначим m_A, а знаменателем другая величина m_B, зависящая только от природы точек A и B.

Таким образом, имеем

$$\frac{\text{ускорение точки } B}{\text{ускорение точки } A} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Если теперь, сохраняя точку A, возьмем вместо точки B другую материальную точку C, то мы сможем опять выразить отношение ускорений точек C и A дробью, числитель которой есть уже избранная величина m_A, а знаменатель другое число m_C, характеризуемое совокупностью точек A и C. Имеем, таким образом,

$$\frac{\text{ускорение точки } C}{\text{ускорение точки } A} = \frac{m_A}{m_C}.$$

То же самое справедливо для всех точек D, E, F, ..., присоединенных к точке A. Для каждой из них будет свой знаменатель m_D, m_E, m_F, ...

Образуем таблицу величин m_A, m_B, ..., полученных, как мы сейчас говорили:

$$m_A,\ m_B,\ m_C,\ \ldots,\ m_K,\ \ldots$$

Эта таблица позволяет нам ответить на следующий вопрос. К точке A присоединена какая-нибудь точка K; требуется найти отношение ускорений, которые они сообщают друг другу. Для этого следует только написать

$$\frac{\text{ускорение точки } K}{\text{ускорение точки } A} = \frac{m_A}{m_K}.$$

Однако составленная таблица может служить для решения проблемы значительно более общего вида, благодаря следующему предложению, которое дополняет третий закон.

Отношение ускорений, которые две произвольные материальные точки P и Q сообщают друг другу, равно отношению ускорений точки P и какой-нибудь другой точки, например A, деленному на отношение ускорений точек Q и A, т. е.

$$\text{отношение ускорений точек } P \text{ и } Q = \frac{\text{отношение ускорений точек } P \text{ и } A}{\text{отношение ускорений точек } Q \text{ и } A}.$$

Следовательно, таблица величин m_A, m_B, ... позволяет нам ответить на следующий вопрос: каково отношение ускорений двух произвольных материальных точек? Это отношение равно обратному отношению соответствующих величин m таблицы. (Можно заметить аналогию между свойствами этой таблицы и свойствами таблицы химических эквивалентов.)

Величины m_A, m_B, ... называются *массами* точек A, B, ... *)

---

*) Раскрытие физического смысла понятия массы не является задачей механики. (*Прим. перев.*)

Подведем итоги сказанному. Отношение масс двух точек равно, по определению, обратному отношению ускорений, которые эти точки друг другу сообщают. Если численное значение одной из масс выбрать произвольно, то численные значения всех остальных масс станут вполне определенными.

Четвертый основной закон. Ускорение, сообщаемое произвольной материальной точке M совокупностью нескольких материальных систем S_1, S_2, S_3, ... получается сложением по правилам сложения векторов ускорений, которые сообщили бы точке M каждая из систем S_1, S_2, S_3, ..., если бы она действовала отдельно.

Все это будет строго верным лишь для *абсолютных движений* относительно указанных выше неподвижных осей. Однако только в астрономии и в некоторых исключительных опытах (например, в маятнике Фуко) приходится действительно пользоваться указанными осями. В огромном большинстве случаев в качестве неподвижных осей можно принимать оси, связанные с Землей. Как показывают наблюдения, в согласии с теорией относительных движений никаких заметных неточностей при этом не получается.

66. Силы. Слово *сила* не входит в основные законы динамики, которые мы только что указали. В действительности, можно обойтись и без него. Предметом динамики является следующее: «Зная движения, которые происходят при некоторых заданных условиях, определить, какими они будут при других заданных условиях». В эту задачу входят только тела и движения и нет необходимости вводить сюда третьи элементы.

Рис. 53.

Тем не менее представляется удобным, с точки зрения краткости, условиться о следующем. Если какая-нибудь точка M массы m, вследствие присутствия одной или нескольких других материальных точек, испытывает ускорение J, то мы будем условно говорить, что точка M подвергается со стороны этой одной или этих нескольких материальных точек действию силы, равной по величине и направлению mJ. Этот вектор mJ и есть, по определению, сила, действующая на точку M. Если обозначить ее через F, то $(F) = (mJ)$ (рис. 53). Мы видим, что сила есть понятие производное, определяемое при помощи других величин. Вектор силы есть вектор полярный, так же, как и ускорение.

67. Закон равенства действия и противодействия. Ньютон под названием *начала равенства действия и противодействия* провозгласил следующий закон. Если точка M подвергается действию силы F, вызванной присутствием другой точки M', то эта сила направлена по MM', а вторая точка M' подвергается со стороны точки M действию силы, равной и прямо противоположной силе F. Ньютон выразил это, говоря, что противодействие равно и противоположно действию. Это начало уже содержится неявно в данных выше законах. В самом деле, если точка M массы m подвергается действию силы F, то это означает, что она имеет ускорение J, равное геометрически $\left(\frac{F}{m}\right)$. Согласно второму основному закону точка M' испытывает ускорение, направленное в противоположную сторону и определяемое соотношением

$$J\frac{m}{m'}=\frac{F}{m}\times\frac{m}{m'}=\frac{F}{m'},$$

т. е. эта точка подвержена действию силы F', равной и прямо противоположной силе F. Это и есть закон Ньютона.

Закон равенства действия и противодействия непосредственно распространяется на взаимное действие двух произвольных систем точек (S) и (S').

Если точки системы (S) действуют на точки системы (S') некоторыми силами, то и наоборот, точки (S') оказывают действие на (S), выражаемое силами, равными и прямо противоположными первым.

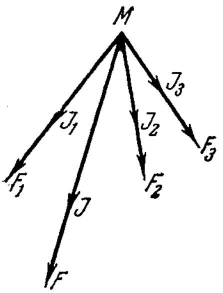


Рис. 54.

Так, например, если рукой давить на стену, то со стороны стены рука будет испытывать противодействие, выражаемое силой, равной и противоположной давлению руки. Когда лошадь тянет экипаж, то действие постромок на экипаж равно и противоположно действию экипажа на постромки и т. д.

68. Сложение сил. Равнодействующая. Четвертый закон приводит непосредственно к правилу сложения сил.

Допустим, что система S_1, действуя одна на материальную точку M, сообщает ей ускорение J_1. Следовательно, она действует на точку с силой F_1 (рис. 54), определяемой векторным равенством

$$(F_1)=m(J_1).$$

Точно так же вторая система S_2, действуя одна, сообщает точке M при том же положении и той же скорости ускорение J_2 и действует на нее с силой

$$(F_2)=m(J_2)$$

и т. д. и, наконец, система S_n, действуя одна, сообщает точке M ускорение J_n и действует на нее с силой

$$(F_n)=m(J_n).$$

Если все эти силы будут приложены к точке M одновременно, то при тех же условиях они сообщат ей ускорение J, равное геометрической сумме ускорений $J_1, J_2, \ldots, J_n$:

$$(J)=(J_1)+(J_2)+\ldots+(J_n).$$

Сила F, которая одна сообщает точке такое же ускорение J (рис. 54), будет

$$(F) = m(J);$$

и, следовательно,

$$(F) = (F_1) + (F_2) + \ldots + (F_n).$$

Эта единственная сила F, называемая *равнодействующей данных сил* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, представляется результирующим вектором системы векторов $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Таким образом, к сложению и разложению сил можно применить все, что было сказано о сложении и разложении сходящихся векторов.

69. Уравнения движения. Допустим, что на точку M массы m действуют силы, представляемые в момент t векторами $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Обозначим через x, y, z координаты точки M, а через $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), \ldots, (X_n, Y_n, Z_n)$ проекции сил на оси координат. Проекции X, Y, Z равнодействующей F будут

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad Z = \sum Z_i, \tag{F}$$

а проекции ускорения J —

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{J}$$

Следовательно, векторное равенство $(F) = m(J)$ после проектирования на оси приводится к соотношениям

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z, \tag{1}$$

которые являются *уравнениями движения*.

В наиболее общем случае, который может представиться, равнодействующая F зависит от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z, от скорости точки, т. е. от $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ и от времени. В этом случае имеем

$$X = \Phi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right) \tag{2}$$

и два аналогичных выражения для Y и Z. Для того чтобы найти движение точки под действием заданных сил, нужно проинтегрировать уравнения движения, которые являются дифференциальными уравнениями второго порядка, определяющими x, y, z в функции t.

Мы ограничиваемся здесь только указанием этой задачи. Подробно она будет рассмотрена в начале динамики.

70. Равновесие. Несколько сил находятся в равновесии, если, будучи приложены к точке, находящейся в покое, они не сообщат ей никакого движения. Геометрическая сумма ускорений, вызываемых этими силами, равна нулю. Следовательно, геометрическая сумма этих сил, т. е. их равнодействующая, тоже равна нулю. Это условие, необходимое для равновесия, будет, очевидно, и достаточным.

Вообще, материальная система находится в равновесии, если, будучи в покое, она не получит никакого движения от сил, которые на нее подействуют.

71. Статика. Динамика. Та часть механики, где изучаются условия, которым должны удовлетворять действующие на систему точек силы, для того чтобы система находилась в равновесии, называется *статикой*. Та часть механики, где изучаются соотношения между силами и вызываемыми ими движениями, называется *динамикой*.

Мы начнем с изучения статики, которая является не чем иным, как особого вида геометрией. После этого мы будем изучать динамику. Этот порядок оправдывается теми соображениями, что благодаря принципу Даламбера составление уравнений какой-нибудь задачи динамики может быть приведено к решению задачи статики.

С исторической точки зрения статика является наиболее древней частью механики. Действительно, статика восходит еще к Архимеду, установившему в своем труде De æquiponderantibus принцип рычага. Что же касается динамики, то ее возникновение стало возможным лишь после открытий Галилея.

II. Единицы массы и силы; однородность

72. Тяжесть. Вес. Тяжелая точка, падающая без начальной скорости с небольшой высоты, совершает по отношению к Земле прямолинейное равноускоренное движение по вертикали. Ускорение g этого движения, изменяющееся с широтой места и с высотой над уровнем океана, имеет для Парижа значение 9,808 $м/сек^2$. Вследствие движения Земли этому относительному движению соответствует абсолютное движение, которое не является прямолинейным и равномерным. Отсюда следует заключить, что на тяжелую точку со стороны Земли действует некоторая сила; эта сила есть *притяжение Земли*.

Если тяжелая материальная точка удерживается каким-нибудь препятствием, то действие Земли на нее продолжается, но эффект этой силы изменяется. Это получается вследствие того, что препятствие также оказывает на точку некоторое действие. Так, например, если тяжелая точка, подвешенная к концу нити, неподвижна относительно Земли, то нить оказывает на нее некоторое действие, которое является *натяжением нити*. *Абсолютным весом точки* называют *силу, равную и противоположную этому натяжению.*

Если бы Земля была неподвижна, то материальная точка, подвешенная к нити, находилась бы в равновесии под действием натяжения нити и притяжения Земли. Последнее было бы, следовательно, равно и противоположно натяжению нити, т. е. *равнялось бы абсолютному весу точки.* Но в действительности материальная точка ни неподвижна, ни движется прямолинейно и равномерно; натяжение и притяжение не находятся в равновесии и *абсолютный вес отличен от притяжения.* Эта разница, однако, весьма мала и в большинстве явлений ею можно пренебрегать. Мы увидим ниже, что тяжелая материальная точка, падающая в пустоте с небольшой высоты, движется относительно Земли почти так же, как если бы Земля была неподвижна и точка находилась под действием своего абсолютного веса. Так как это движение обладает постоянным ускорением g, то абсолютный вес p является для одного и того же места *постоянной силой*

$$p = mg.$$

Этот вес и ускорение g изменяются с широтой места и с высотой над уровнем океана.

Можно представить себе абсолютный вес еще таким образом. Допустим, что материальная точка положена на неподвижную относительно Земли руку. Рука окажет на точку действие, являющееся вертикальной силой, направленной кверху и равной по интенсивности абсолютному весу точки. Наоборот, по закону равенства действия и противодействия, рука будет испытывать со стороны точки давление, направленное вниз и равное абсолютному весу по интенсивности и направлению. Это ощущаемое рукой давление и дает некоторое представление об абсолютном весе. Точно так же, если точку положить на чашу весов, то давление будет совпадать с абсолютным весом.

73. Технические единицы. Килограмм-сила. В технике обычно принимают следующие основные единицы:

единица силы	килограмм-сила
единица длины	метр
единица времени	секунда среднего времени

По определению, килограмм-сила — это *абсолютный вес одного килограмма в Париже, т. е. сумма абсолютных весов в Париже материальных точек, составляющих один литр воды при ее наибольшей плотности.* Необходимо указывать, что этот абсолютный вес взят в определенном месте земного шара, например в Париже, так как абсолютный вес материальной точки изменяется с изменением места.

В этой системе единица массы является *производной единицей.* Масса точки определяется формулой

$$m = \frac{p}{g},$$

где p — абсолютный вес, выраженный в килограмм-силах, а g — ускорение тяжести. Если сделать $p = g$, то $m = 1$. Единица массы есть, следовательно, масса точки, абсолютный вес которой равен g килограмм-силам. В Париже, где $g = 9{,}808$ *м/сек*^{2}, единица массы есть масса 9,808 литров дистиллированной воды при 4° С.

Неудобство этой системы состоит в том, что единица силы — килограмм является величиной, определение которой требует указания определенного места земного шара. Более того, масса тела, являющаяся физическим свойством, присущим самому телу, выражается различными числами в зависимости от того, в какой точке земного шара определен килограмм силы. Этого неудобства можно избежать, как это показал еще Гаусс, если в качестве основных единиц принять единицы длины, времени и массы и уже из них вывести единицу силы.

74. Абсолютные единицы. Дина. В этой системе в качестве основных единиц принимаются единицы длины, времени и массы. Единица силы будет тогда производной. Эта система основана на том, что можно различать массы различных тел при помощи весов. В самом деле, допустим, что в определенной точке земного шара g есть ускорение тяжести, а p, p', p'', ... — абсолютные веса материальных точек с массами m, m', m'', ... Тогда будет

$$p = mg, \quad p' = m'g, \quad p'' = m''g, \quad \ldots$$

Следовательно, если $p = p'$, то $m = m'$, если $p = p' + p''$, то $m = m' + m''$, ... Вообще, массы материальных точек пропорциональны их абсолютным весам в одном и том же месте, т. е. их относительным весам, полученным при помощи взвешивания на весах. Поэтому, выбрав произвольным образом единицу массы, мы получим возможность измерять массы. Интенсивности сил будут тогда выражаться численно по формуле

$$F = mJ,$$

где m — масса точки, на которую действует сила, а J — вызываемое этой силой ускорение. Если положить m и J равными единице, то сила F будет равна 1. Следовательно, в этой системе единица силы есть сила, сообщающая точке единичной массы ускорение, равное единице длины при выбранной единице времени. Сообразно принципам, выработанным Британской комиссией в 1871 г., а затем Конгрессом электриков в 1881 г. за основные единицы приняты: для длины — *сантиметр*; для массы — *грамм-масса*, т. е. масса одного кубического сантиметра дистиллированной воды при 4° С; для времени — *секунда среднего солнечного времени*. В этой системе единиц CGS (сантиметр, грамм, секунда) масса тела выражается тем же числом, что и его относительный вес в граммах. Единицей силы, называемой *диной*, является сила, сообщающая массе в 1 *г* ускорение, равное 1 *см/сек*^{2}.

Абсолютный вес одного грамма в Париже равен 980,8 *дин*, так как такой абсолютный вес сообщает массе в 1 грамм ускорение 9,808 *м/сек*^{2}, т. е. 980,8 *см/сек*^{2}.

75. Статическое измерение сил. Система мер, при которой за единицу принят абсолютный вес, была первой, вошедшей в употребление. Это вызвано было тем, что первое представление о силе человек составил по тому усилию, которое он должен был делать, чтобы удерживать какой-нибудь груз рукой. Отсюда сравнение сил с весом. Это сравнение может быть сделано вполне точно при помощи *динамометра*. Возьмем вертикальную пружину, удлинение которой может быть измерено при помощи делений. Подвесим к этой пружине в Париже веса в 1 *кг*, 2 *кг*, ... и отметим соответствующие удлинения. Тогда для измерения произвольной силы, действующей на материальную точку, мы можем закрепить эту точку на конце пружины, установить ось пружины по направлению силы и отметить соответствующее удлинение. Мы получим тогда величину силы в килограммах.

Это статическое измерение сил является очень важным, так как оно показывает, что основное соотношение

$$F = mJ,$$

выражаемое уравнениями (1), *не является простым тождеством*. Возьмем, например, материальную точку, на которую действует сила, зависящая только от ее положения. Придавая точке различные положения и измеряя статически силу в каждом из этих положений, мы сможем узнать закон изменения силы в зависимости от положения точки. Аналитически мы узнаем проекции X, Y, Z силы в функции координат x, y, z точки. Если потом отпустить точку и подвергнуть ее действию указанных сил, то она придет в движение, уравнения которого в конечной форме получатся после интегрирования уравнений (1). В этих уравнениях проекции X, Y, Z являются известными функциями координат x, y, z.

76. Однородность. Если для приложений имеется необходимость в выборе определенных единиц, то для теории в этом нет надобности. В теоретических исследованиях целесообразнее оставлять основные единицы неопределенными, с тем чтобы получаемые формулы могли быть применены при любой системе единиц. Так как формулы должны оставаться верными при любом выборе трех основных единиц, то они должны обладать троякой однородностью относительно длины, времени и массы. Пусть l — длина, t — время, m — масса, v — скорость, j — ускорение, f — сила, измеренные в какой-нибудь системе основных единиц длины, времени и массы. Если теперь принять единицу длины в λ раз меньшую, единицу времени в τ раз меньшую и единицу массы в μ раз меньшую, то мерами только что указанных величин станут

$$l\lambda,\quad t\tau,\quad m\mu,\quad v\frac{\lambda}{\tau},\quad j\frac{\lambda}{\tau^2},\quad f\frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

так как скорость есть отношение длины ко времени, ускорение — отношение длины к квадрату времени, а сила — произведение ускорения на массу. Следовательно, если основные единицы не установлены, то формулы должны оставаться справедливыми при любых значениях множителей λ, μ, τ.

Например, полупериод малых колебаний простого маятника длины l в месте, где ускорение тяжести равно g, определяется формулой

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Если изменить единицы указанным выше способом, то получится

$$t\tau = \pi \sqrt{\frac{l\lambda}{\frac{gl}{\tau^2}}}, \quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

т. е. формула не изменяется. Следовательно, она действительно однородна.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Установить формулы перехода от системы единиц метр, секунда, килограмм-сила в Париже к системе CGS.

2. Предполагая известным, что период малых колебаний простого маятника зависит только от длины l и ускорения g:

$$t = \varphi(l, g),$$

показать, исходя из условий однородности, что t имеет вид

$$t = k \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где k — отвлеченное число ($k = 2\pi$).

3. Предполагая, что скорость v тяжелого тела, предоставленного самому себе и падающего в пустоте без начальной скорости, зависит только от высоты падения h и ускорения g:

$$v = \varphi(h, g),$$

показать, что v имеет вид

$$v = k \sqrt{gh},$$

где k — отвлеченное число.

4. Зная, что скорость звука в газе есть функция только *упругости* e газа и его *плотности* d, показать, что она определяется формулой

$$v = k \sqrt{\frac{e}{d}},$$

где k — отвлеченное число (k — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме). Упругость — это давление газа на единицу поверхности, а плотность — масса газа в единице объема.

ГЛАВА IV

РАБОТА. СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ

Прежде чем излагать статику, целесообразно ввести понятие первостепенной важности *о работе силы.*

I. Материальная точка

77. Элементарная работа. Пусть к материальной точке M приложена сила F. Допустим, что эта точка получает какое-нибудь бесконечно малое перемещение MM' (рис. 55). Тогда *элементарной работой* силы F на перемещении MM' называют скалярное произведение $\vec{F}$ на $\overrightarrow{MM'}$:

Рис. 55.

$$F \cdot MM' \cdot \cos(\widehat{FMM'}), \qquad (1)$$

т. е. произведение силы на перемещение и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения. Эта элементарная работа является алгебраической величиной, положительной, отрицательной или равной нулю, в зависимости от того, будет ли угол FMM' острым, тупым или прямым. Когда элементарная работа *положительна*, силу называют *движущей*, а когда *отрицательна* — *сопротивлением*. Если перемещение MM' совершается за бесконечно малый промежуток времени dt, то скорость v этого перемещения равна $\frac{MM'}{dt}$, и выражение (1) элементарной работы может быть представлено в виде

$$Fv\cos(F, v)\ dt, \qquad (2)$$

так как угол между силой и скоростью совпадает с углом между силой и перемещением.

Элементарная работа, которая может быть написана также в виде

$$MM' \cdot [F\cos(\widehat{FMM'})],$$

равна произведению перемещения MM' материальной точки на проекцию силы на направление перемещения. Если к точке M приложено несколько сил, то работа равнодействующей этих сил на каком-нибудь перемещении равна сумме работ составляющих сил на том же перемещении. Это вытекает из того, что проекция равнодействующей на направление перемещения равна сумме проекций составляющих.

Если работу написать в виде

$$F \cdot [MM' \cos(\widehat{FMM'})],$$

то ее можно определить как произведение силы на проекцию перемещения на направление силы. Следовательно, если перемещение MM' есть геометрическая сумма нескольких перемещений, или если скорость точки есть геометрическая сумма нескольких скоростей, то элементарная работа силы F, соответствующая результирующему перемещению или результирующей скорости, равна сумме элементарных работ силы F, соответствующих составляющим перемещениям или составляющим скоростям.

Если элементарная работа какой-нибудь силы равна нулю, то либо перемещение равно нулю, либо сила равна нулю, либо *сила перпендикулярна к перемещению.*

78. Аналитическое выражение элементарной работы. Пусть x, y, z — координаты точки M относительно трех прямоугольных осей, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ — координаты бесконечно близкой точки M' и X, Y, Z — проекции силы F на эти оси. Направляющие косинусы силы F и перемещения MM' равны

$$\frac{X}{F}, \frac{Y}{F}, \frac{Z}{F}, \quad \frac{dx}{MM'}, \frac{dy}{MM'}, \frac{dz}{MM'}.$$

Вычисляя $\cos(\widehat{FMM'})$, мы получим следующее выражение элементарной работы в прямоугольных декартовых координатах:

$$F \cdot MM' \cdot \cos(\widehat{FMM'}) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Эту формулу можно получить непосредственно, пользуясь формулой (3) п. 3 для скалярного произведения двух векторов.

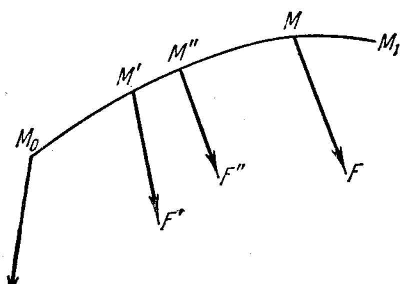


Рис. 56.

79. Полная работа. Единица работы. Допустим, что точка M совершает конечное перемещение из положения M_0 в положение M_1 вдоль какой-нибудь кривой M_0M_1 (рис. 56) по какому-нибудь закону движения. В положении M_0 точка находится в момент t_0, а в положении M_1 — в момент t_1. Пусть к точке M приложена сила F. Тогда *полной работой* силы F на рассматриваемом конечном перемещении называется *сумма элементарных работ силы F на всех бесконечно малых последовательных перемещениях, из которых складывается конечное перемещение.* Таким образом, дуга M_0M разбивается на бесконечно малые части M_0M', $M'M''$, ... и вычисляется сумма

$$\mathcal{T}=\lim\left[F_0\cdot M_0M'\cdot\cos(\widehat{F_0M_0M'})+F'\cdot M'M''\cdot\cos(\widehat{F'M'M''})+\ldots\right],$$

где F_0 — значение силы F, приложенной к точке, когда точка находится в положении M_0, F' — значение этой силы, когда движущаяся точка находится в положении M' ... Сумма $\mathcal{T}$ и есть полная работа силы F. Ее можно вычислить с помощью интеграла

$$\mathcal{T}=\int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz, \tag{1}$$

выражающего сумму элементарных работ. Например, если F всюду нормальна к траектории, то все элементы суммы равны нулю и работа обращается в нуль.

Единица работы. Если основные единицы выбраны, то полная работа единичной силы, приложенной к точке, совершающей перемещение в единицу длины вдоль направления силы, получается равной единице. Эту работу и принимают за единицу работы. Например, если за единицу силы принята килограмм-сила, а за единицу длины метр, то полученная единица работы будет *килограммометр*. В системе CGS единица работы называется *эргом*.

Для вычисления $\mathcal{T}$ полезно рассмотреть несколько частных случаев.

80. Сила зависит от времени или скорости. В наиболее общем случае, который может представиться, сила зависит от положения точки, от ее скорости и от времени, так что X, Y, Z являются заданными функциями переменных

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\quad \text{и}\quad t.$$

В этом случае для вычисления $\mathcal{T}$ надо знать движение точки из M_0 в M_1, т. е. знать выражения

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)$$

ее координат в функции времени. Тогда, подставляя эти выражения x, y, z, а также получающиеся из них дифференцированием выражения $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ в определенный интеграл (1), приведем его к виду

$$\mathcal{T}=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t)\,dt,$$

который и позволяет вычислить $\mathcal{T}$.

81. Сила зависит только от положения движущейся точки. В этом случае для нахождения $\mathcal{T}$ *достаточно знать только кривую C, по которой движущаяся точка перемещается из M_0 в M_1.* При этом нет необходимости знать закон, по которому точка перемещается по кривой, так что вычисление полной работы приводится к задаче геометрии. Действительно, в рассматриваемом случае можно выразить координаты точки M кривой C в функции некоторого параметра q, изменяющегося от q_0 до q_1, когда точка описывает дугу M_0M_1, так что

$$x = \varphi(q), \quad y = \psi(q), \quad z = \omega(q).$$

Компоненты X, Y, Z, завися только от x, y, z, будут вдоль кривой C некоторыми функциями от q. Поэтому, подставляя в интеграл (1) выражения x, y, z и получающиеся из них выражения для dx, dy, dz, получим для него формулу

$$\mathcal{T} = \int_{q_0}^{q_1} \Psi(q)\, dq,$$

которая и позволяет вычислить $\mathcal{T}$.

Если ту же самую кривую точка пробегает в противоположном направлении, от M_1 к M_0, то полная работа станет равной $-\mathcal{T}$, так как пределы интегрирования поменяются местами.

82. Частный случай, когда $\mathcal{T}$ зависит только от начального и конечного положений. Силовая функция. Потенциальная энергия. Допустим, что X, Y, Z являются функциями от x, y, z, непрерывными и допускающими частные производные первого порядка во всех точках области пространства, в которой расположены все рассматриваемые кривые. Выясним, какими должны быть функции

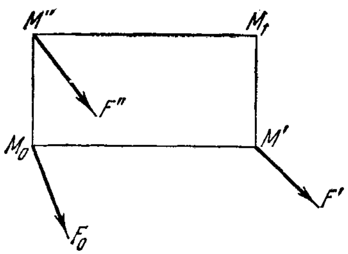


Рис. 57.

$$X(x, y, z), \quad Y(x, y, z), \quad Z(x, y, z)$$

для того, чтобы полная работа на конечном перемещении зависела только от *начального* и *конечного* положений M_0 и M_1 и не зависела от формы кривой, по которой перемещается точка.

Возьмем сначала две бесконечно близкие точки M_0 и M_1, лежащие в плоскости, параллельной xy (рис. 57), причем координаты точки M_0 равны x, y, z, а координаты точки M_1 равны $x + dx$, $y + dy$, z. Переведем движущуюся точку из положения M_0 в положение M_1, перемещая ее сначала параллельно оси Ox на отрезок длиною dx в положение M', а затем параллельно оси Oy на отрезок dy в положение M_1. Элементарная работа на перемещении M_0M' равна $X(x, y, z)\,dx$. В положении M' сила будет иметь значение F' и проекцию на ось Oy, равную $Y(x + dx, y, z)$. Элементарная работа силы F' на перемещении $M'M_1$ равна, следовательно, $Y(x+dx, y, z)\,dy$. Отсюда для полной работы на перемещении $M_0M'M_1$ получаем

$$\mathcal{T} = X(x, y, z)\,dx + Y(x + dx, y, z)\,dy.$$

Если сначала переместить точку параллельно Oy на отрезок dy в положение M'', а затем параллельно Ox на отрезок dx из M'' в M_1, то для работы получим

$$\mathcal{T} = Y(x, y, z)\,dy + X(x, y+dy, z)\,dx.$$

Мы желаем, чтобы оба эти значения $\mathcal{T}$ были равны. Приравнивая их и замечая, что

$$Y(x+dx, y, z) = Y(x, y, z) + \frac{\partial Y}{\partial x}dx,$$
$$X(x, y+dy, z) = X(x, y, z) + \frac{\partial X}{\partial y}dy,$$

после очевидных преобразований получим

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Поступая аналогичным образом в плоскостях, параллельных другим координатным плоскостям, получим два других необходимых условия

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Эти условия показывают, что выражение

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

есть полный дифференциал некоторой функции U независимых переменных x, y, z. Покажем, что эти условия являются также и *достаточными, по крайней мере при некоторых ограничениях, которые мы укажем.*

В самом деле, если эти условия выполнены, то будет существовать тождество

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU(x, y, z),$$

из которого вытекают три других:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Функция U, определенная с точностью только до произвольной аддитивной постоянной, называется *силовой функцией*. Говорят также, что в этом случае *силы имеют потенциал*; величина $-U$ называется потенциальной энергией.

Полная работа силы F, когда точка переходит из M_0 в M_1 вдоль кривой C (рис. 58), будет тогда

$$\mathcal{T} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} dU = U_1 - U_0,$$

где U_1 — конечное значение, которое принимает функция U в положении M_1 при *непрерывном ее изменении* вдоль кривой, а U_0 — начальное значение функции U в положении M_0.

Следовательно, если в рассматриваемой области пространства U является *однозначной функцией* от x, y, z, имеющей единственное значение в каждой точке этой области, то U_0 и U_1 будут вполне определенными и полная работа $\mathcal{T}$ не будет зависеть от пути, по которому точка переходит из M_0 в M_1. В частности, если точка описывает замкнутый путь, то M_1 совпадает с M_0 и тогда полная работа равна *нулю*.

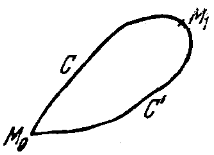


Рис. 58.

Но если функция U является многозначной, как, например, арктангенс, то полная работа не будет абсолютно не зависящей от пути перехода точки из M_0 в M_1. Она будет меняться в зависимости от того, какое из значений U мы должны будем в силу непрерывности принять в точке M_1, когда будем исходить из определенного значения U_0 в точке M_0. Можно также сказать, что в этом случае полная работа по замкнутому контуру не будет обязательно равна *нулю*. Эти два способа выражения будут, впрочем, идентичны, так как, если рассмотреть два пути C и C' из M_0 в M_1 и обозначить через $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ полную работу на конечных перемещениях M_0CM_1 и $M_0C'M_1$, то полная работа на замкнутом перемещении $M_0CM_1C'M_0$ будет равна $\mathcal{T} - \mathcal{T}'$. Следовательно, если $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, то полная работа равна нулю, а если $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, то не равна нулю.

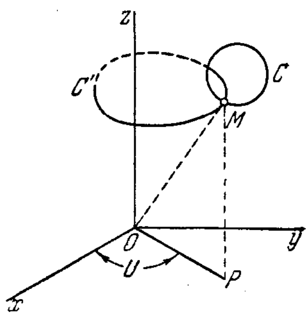


Рис. 59.

Пусть, например, $U = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Проекции силы F, равные

$$X = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Y = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad Z = 0,$$

являются непрерывными дифференцируемыми функциями во всей части пространства, расположенной вне кругового цилиндра сколь угодно малого радиуса, ось которого совпадает с осью Oz (рис. 59). Функция U есть угол xOP, образованный осью Ox с проекцией OP радиуса-вектора OM на плоскость xy. Поэтому, если движущаяся точка описывает замкнутую кривую MCM, не окружающую ось Oz, то полная работа равна нулю, так как функция U при непрерывном изменении вдоль контура C принимает в точке M свое первоначальное значение. Но если точка описывает замкнутую кривую $MC'M$, окружающую один раз в положительном направлении ось Oz, то изменение функции U будет равно 2π, и полная работа будет также равна 2π. Если точка совершит вокруг оси Oz в положительном направлении n оборотов, то полная работа будет равна $2n\pi$.

Эти соображения указаны Бертраном (Journal de l'École Polytechnique, вып. 28).

Вообще, для случая, когда существует силовая функция, можно установить предложение, которое мы только выскажем, не вдаваясь в слишком пространные аналитические подробности.

Если замкнутую кривую можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не пересекая при этом никакой точки, в которой функции X, Y, Z перестают быть непрерывными и дифференцируемыми, то полная работа силы F на этой замкнутой кривой равна нулю.

Доказательство этого предложения может быть легко получено, если исходить из приводимой ниже формулы.

Когда кривая C стягивается в точку P, то ее последовательные положения образуют некоторую поверхность S, на которой, по предположению, функции X, Y, Z конечны, непрерывны и дифференцируемы. Справедлива следующая формула (формула Ампера—Стокса):

$$\mathcal{T} = \int\limits_{(C)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int\int\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dy\,dx + \\ + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dz\,dy + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dx\,dz,$$

где первый интеграл берется по кривой C, а второй — по поверхности S. В силу самих условий, определяющих существование силовой функции, элементы двойного интеграла по поверхности S всюду равны нулю, вследствие чего $\mathcal{T} = 0$.

83. Поверхности уровня. Сделаем несколько важных замечаний, относящихся к случаю, когда существует силовая функция U.

Пусть $M(x, y, z)$ — одно из положений материальной точки, а My' — полупрямая, параллельная оси Oy (рис. 60). Проекция силы F на эту полупрямую равна $\frac{\partial U}{\partial y}$, т. е. равна пределу отношения

$$\frac{U' - U}{\overline{MM'}},$$

когда MM' стремится к нулю. Здесь M' — точка на полупрямой My' и U' — значение функции U в этой точке. Так как направление оси Oy может быть выбрано произвольно, то мы видим, что проекция силы F на произвольное направление MD равна пределу отношения

$$\frac{U'' - U}{\overline{MM''}},$$

когда MM'' стремится к нулю, где M'' — точка на прямой MD, а U'' — значение функции U в этой точке. Этот предел называется *производной функции U по направлению MD.*

Поверхности, определяемые уравнением

$$U(x, y, z) = C,$$

где C — постоянная, называются *поверхностями уровня*. Изменяя непрерывным образом C, мы получим семейство таких поверхностей, причем через каждую точку области пространства, в которой определена функция U, проходит одна из этих поверхностей. Сила, действующая на материальную точку в каком-нибудь ее положении M, нормальна к поверхности уровня S, проходящей через M, так как ее

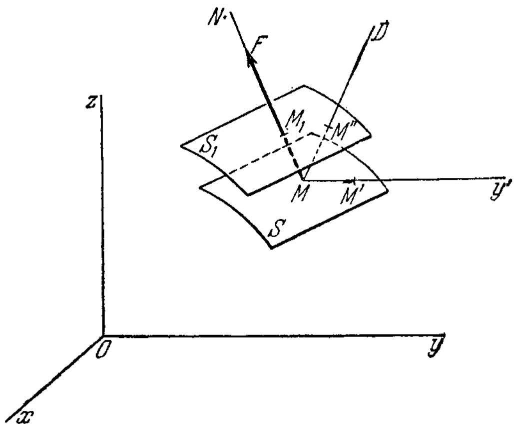


Рис. 60.

проекции равны трем частным производным функции U или функции $U—C$. Более того, сила F направлена относительно этой поверхности в ту ее сторону, в которую функция U возрастает. В самом деле, пусть MN — нормаль к поверхности уровня U, направленная в сторону возрастания U. Проекция силы на эту нормаль совпадает с самой силой. Она будет положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли сила направлена по MN или в противоположную сторону. Так как эта проекция равна

$$\lim \frac{U_1 - U}{MM_1},$$

где M_1 — точка на MN, бесконечно близкая к M, то она *положительна*, ибо, по предположению, $U_1 > U$. Таким образом, сила направлена по нормали MN и ее величина F равна производной от функции U по этой нормали, что символически может быть обозначено следующим образом:

$$F = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Проведем поверхность уровня S_1, бесконечно близкую к S, со стороны возрастания U. Эта поверхность пересечет какую-нибудь нормаль MN в некоторой точке M_1. Так как U принимает на поверхности S_1 постоянное значение U_1, то выражение

$$F = \lim \frac{U_1 - U}{MM_1},$$

в котором числитель постоянен для всех положений точки M на поверхности S, показывает, что сила изменяется обратно пропорционально отрезку нормали к поверхности уровня S, заключенному между этой поверхностью уровня и поверхностью уровня, бесконечно близкой к ней.

Поэтому распределение сил в рассматриваемом поле можно приближенно представить следующим образом.

Пусть ε — постоянная, выбираемая тем меньшей, чем лучшим желательно получить приближение. Построим поверхности уровня

$$U = 0, \quad U = \varepsilon, \quad U = 2\varepsilon, \quad \ldots, \quad U = n\varepsilon, \quad \ldots,$$

$$U = -\varepsilon, \quad U = -2\varepsilon, \quad \ldots, \quad U = -k\varepsilon, \quad \ldots$$

и припишем этим поверхностям номера $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, -1, -2, \ldots, -k, \ldots$ В точке M какой-нибудь из поверхностей S, имеющей номер p, построим нормаль в сторону поверхности S_1, имеющей номер $p+1$, и обозначим через M_1 точку пересечения этой нормали с поверхностью S_1. Тогда сила в точке M направлена в сторону MM_1 и имеет приближенное значение $F = \frac{\varepsilon}{MM_1}$.

84. Примеры. 1°. Сила, перпендикулярная неподвижной плоскости и являющаяся функцией расстояния от движущейся точки до этой плоскости, имеет силовую функцию. В самом деле, примем эту плоскость за плоскость xy (рис. 61, *а*). Тогда сила будет параллельна оси Oz, проекции X и Y будут равны нулю, а Z будет функцией только z: $Z = \varphi(z)$. Элементарная работа, равная $Z\,dz$ или $\varphi\,dz$, является полным дифференциалом функции U. Поэтому

$$U = \int \varphi(z)\,dz.$$

Поверхностями уровня будут плоскости, параллельные плоскости xy. Так, например, если сила есть вес точки M, то, направляя ось z вертикально вверх, получим

$$Z = -mg, \quad U = -mgz + \text{const}.$$

2°. Сила, направленная по перпендикуляру, опущенному из точки M на неподвижную ось, и являющаяся функцией расстояния от точки до этой оси, имеет силовую функцию.

Примем эту ось за ось Oz и обозначим через ρ расстояние MQ от точки M до оси и через Φ — значение силы, *считая ее положительной в направлении* QM (рис. 61, *б*). Проекции этой силы будут

$$X = \Phi\frac{x}{\rho}, \quad Y = \Phi\frac{y}{\rho}, \quad Z = 0.$$

Так как $\rho^2 = x^2 + y^2$ и, следовательно, $\rho\, d\rho = x\,dx + y\,dy$, то для элементарной работы получаем выражение

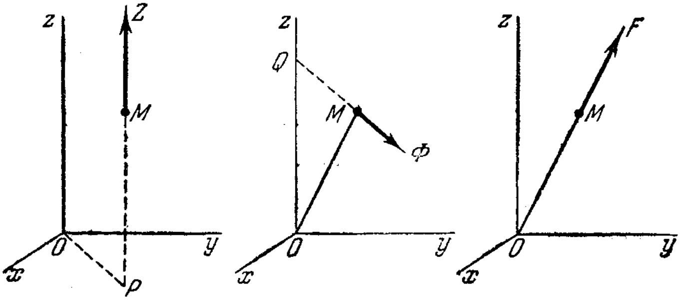
$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{\Phi}{\rho}(x\,dx + y\,dy) = \Phi\,d\rho.$$

По предположению, Φ *зависит только от* ρ, и поэтому элементарная работа есть полный дифференциал функции $U(\rho)$, равной

$$U = \int \Phi\,d\rho.$$

Поверхностями уровня являются цилиндры вращения вокруг оси Oz.

3°. Наконец, существует силовая функция и для силы, направление которой постоянно пересекает неподвижную точку O и которая зависит только от расстояния движущейся точки до O (рис. 61, *в*).



а) б) в)

Рис. 61.

Примем точку O за начало и пусть r — расстояние OM, а F — величина силы, которую мы будем считать положительной в направлении OM. Тогда проекции силы равны

$$F\frac{x}{r}, \quad F\frac{y}{r}, \quad F\frac{z}{r},$$

и элементарная работа имеет вид

$$\frac{F}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = F\,dr,$$

так как из соотношения $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ после дифференцирования получим $x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$. По предположению F зависит только от r, поэтому элементарная работа есть полный дифференциал функции $U(r)$, равной

$$U = \int F\,dr.$$

Поверхностями уровня являются сферы с центром в точке O.

В частности, если точка m притягивается к неподвижному центру O силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, то

$$F = -\frac{\mu}{r^2},$$

где μ — положительный коэффициент, так как сила, направленная в сторону MO, отрицательна. Тогда

$$U = -\int \mu \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu}{r} + C.$$

В этом примере полная работа силы, когда точка переходит из бесконечно удаленного положения M_0 в положение M_1, расположенное на расстоянии r_1 от притягивающего центра O, будет

$$\mathcal{T} = U_1 - U_0 = \frac{\mu}{r_1}.$$

Все три предыдущих закона сил являются частными случаями следующего. На точку M действует сила, направленная по нормали MP к некоторой неподвижной поверхности S, и величина силы есть функция длины MP этой нормали. Тогда существует силовая функция, зависящая только от MP, и поверхности уровня параллельны поверхности S. Доказательство этого общего случая предлагается в качестве упражнения (упражнение 7).

4°. Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил указанных выше типов, то силовая функция по-прежнему существует. Это вытекает из следующей теоремы.

Если силы F_1 и F_2, действуя на точку по отдельности, имеют силовые функции U_1 и U_2, то при одновременном действии этих сил будет также существовать силовая функция, равная $U_1 + U_2$.

В самом деле, пусть

$$X_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad Y_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad Z_1 = \frac{\partial U_1}{\partial z}$$

— проекции первой силы,

$$X_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad Y_2 = \frac{\partial U_2}{\partial y}, \quad Z_2 = \frac{\partial U_2}{\partial z}$$

— проекции второй. Проекции равнодействующей будут, очевидно,

$$X = \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial z},$$

что и доказывает высказанное предложение.

85. Замечание о поверхностях уровня. Если поверхности уровня определены только геометрически, а не их уравнением $U = \mathrm{const}$, то закон силы полностью не определяется. В самом деле, пусть $V(x, y, z)$ — некоторая функция, сохраняющая постоянные значения на поверхностях уровня. Тогда силовая функция будет непременно иметь вид

$$U = \varphi(V),$$

где φ — произвольная функция, и для закона силы имеем:

$$X = \varphi'(V)\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \varphi'(V)\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \varphi'(V)\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Так как функция V произвольна, то мы приходим к выводу, что на одной и той же поверхности уровня сила определяется лишь с точностью до произвольного постоянного множителя. Например, из того обстоятельства, что поверхностями уровня являются сферы с центром в точке O, следует, что сила пересекает точку O и является функцией расстояния от движущейся точки до точки O.

86. Мощность. Мощностью машины называют количество работы, которое она производит за единицу времени.

Единица мощности. В системе CGS единицей мощности является *эрг/сек.* Это — мощность машины, которая в секунду производит один *эрг* работы.

Лошадиная сила. В технической системе единицей мощности является *лошадиная сила.* Это — мощность машины, производящей в одну секунду 75 килограммометров работы.

II. Система точек

87. Работа сил, приложенных к системе точек. Силовая функция. Пусть на n точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots$, $M_n(x_n, y_n, z_n)$ действуют силы, причем равнодействующая сил, действующих на первую точку, есть $F_1(X_1, Y_1, Z_1)$, на вторую — $F_2(X_2, Y_2, Z_2)$, и т. д. Сумма элементарных работ сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ на бесконечно малом перемещении системы равна

$$\begin{aligned} & X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + Z_1\,dz_1 + \\ & + X_2\,dx_2 + Y_2\,dy_2 + Z_2\,dz_2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + X_n\,dx_n + Y_n\,dy_n + Z_n\,dz_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Когда силы зависят только от положения системы, т. е. когда $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots$ являются функциями от $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ и выражение (1) есть полный дифференциал некоторой функции U переменных $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$, то говорят, что данные силы *имеют силовую функцию* U. В этом случае

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Если система переходит из какого-нибудь положения P_0 в какое-нибудь положение P_1, то сумма полных работ всех сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \int\limits_{(P_0)}^{(P_1)} & (X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + Z_1\,dz_1 + \\ & + X_2\,dx_2 + Y_2\,dy_2 + Z_2\,dz_2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + X_n\,dx_n + Y_n\,dy_n + Z_n\,dz_n) = \int\limits_{(P_0)}^{(P_1)} dU. \end{aligned}$$

Работа равна, следовательно, приращению $U_1 - U_0$, которое получает функция U, непрерывно изменяясь при переходе системы из первого положения во второе.

Если U есть однозначная функция координат, то значения U_0 и U_1 будут единственными. Полная работа всех сил в этом случае совершенно не будет зависеть от способа перехода системы из одного положения в другое.

88. Примеры. 1°. Даны две точки M_1 и M_2. Допустим, что действие точки M_1 на точку M_2 выражается силой F_1, направленной по прямой M_1M_2. По закону равенства действия и противодействия действие точки M_2 на точку M_1 выражается силой F_2, равной силе F_1, но направленной противоположно (рис. 62). Совокупность этих двух сил называется *взаимодействием* двух точек. Условимся называть *алгебраическим значением* F *взаимодействия двух точек* величину силы F_1 или F_2, взятую со знаком плюс или минус, в зависимости от того будут ли точки отталкиваться (как на чертеже) или притягиваться. Тогда, обозначая через r расстояние M_1M_2, мы получим для проекций сил F_1 и F_2 значения

$$F\frac{x_2-x_1}{r}, \quad F\frac{y_2-y_1}{r}, \quad F\frac{z_2-z_1}{r}; \qquad (F_1)$$

$$F\frac{x_1-x_2}{r}, \quad F\frac{y_1-y_2}{r}, \quad F\frac{z_1-z_2}{r}. \qquad (F_2)$$

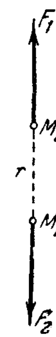


Рис. 62.

Вычисляя сумму элементарных работ этих двух сил, называемую *элементарной работой взаимодействия* F, найдем

$$\frac{F}{r}[(x_2-x_1)(dx_2-dx_1)+(y_2-y_1)(dy_2-dy_1)+(z_2-z_1)(dz_2-dz_1)].$$

Это выражение приводится к виду

$$F\,dr$$

в силу очевидных соотношений

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

$$r\,dr=(x_2-x_1)(dx_2-dx_1)+(y_2-y_1)(dy_2-dy_1)+(z_2-z_1)(dz_2-dz_1).$$

Если, следовательно, взаимодействие двух точек есть функция только расстояния r между ними, а именно $F=\varphi(r)$, то сумма элементарных работ обеих сил F_1 и F_2 будет полным дифференциалом функции

$$U=\int\varphi(r)\,dr.$$

Так, в частности, для двух точек, притягивающихся с силами, пропорциональными их массам m_1 и m_2 и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними

$$F = -f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где f — постоянная, откуда

$$U = f\frac{m_1 m_2}{r} + \text{const}.$$

Предположим, что точки вначале были бесконечно удалены друг от друга, а затем приблизились на расстояние r. Тогда полная работа будет равна изменению функции U при переходе от первого положения ко второму, т. е. $f\frac{m_1 m_2}{r}$.

2°. Пусть теперь дано произвольное число точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Допустим, что любые две из этих точек M_i и M_k оказывают друг на друга взаимное действие, алгебраическое значение которого F_{ik} есть функция только расстояния r_{ik} между этими точками. Если системе сообщить бесконечно малое перемещение, то сумма элементарных работ всех этих взаимодействий, согласно предыдущему, будет равна

$$\sum F_{ik}\, dr_{ik},$$

где суммирование распространяется на все попарные комбинации индексов i и k, причем $i \neq k$. Эта сумма является полным дифференциалом функции

$$U = \int \sum F_{ik}\, dr_{ik}$$

и, следовательно, существует силовая функция. Например, для системы трех точек с массами m_1, m_2, m_3, притягивающих друг друга по закону пропорциональности массам и обратной пропорциональности квадратам расстояний, получается

$$F_{ik} = -f\frac{m_i m_k}{r_{ik}^2},$$

откуда с точностью до аддитивной постоянной

$$U = f\left(\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right).$$

Это значение U равно полной работе взаимодействий при переходе трех точек из положения, при котором они бесконечно удалены друг от друга, в положение, которое они действительно занимают.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какова размерность работы относительно основных единиц длины, времени и массы? (Если взять единицу длины в λ раз меньшую, единицу времени в τ раз меньшую и единицу массы в μ раз меньшую, то работа $\mathcal{T}$ будет $\mu\lambda^2\tau^{-2}\mathcal{T}$.)

2. Точка M притягивается или отталкивается двумя центрами O и O_1 по закону обратной пропорциональности квадратам расстояний. Найти силовую функцию и исследовать поверхности уровня

$$\left[U = \pm\frac{h}{OM} \pm \frac{k}{O_1M}\right].$$

3. Упругая нить, длина которой в нерастянутом состоянии равна l, прикреплена концом к неподвижной точке O и затем растянута до длины $\lambda > l$. Найти работу натяжения нити, когда она возвращается от длины λ к первоначальной длине l. Допускается, что, когда нить имеет длину r, ее натяжение T *пропорционально удлинению*:

$$T = k(r - l).$$

Ответ:

$$\mathcal{T} = \frac{k(\lambda - l)^2}{2}.$$

4. Пусть

$$U = A\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + B\operatorname{arctg}\frac{y-b}{x-a}.$$

Исследовать значение полной работы вдоль замкнутой кривой C. (Эта работа имеет вид $2m\pi A + 2n\pi B$, где m и n — целые числа.) Если A и B несоизмеримы, то кривую C можно провести таким образом, чтобы работа вдоль C сколь угодно мало отличалась от любой наперед заданной величины.

5. Оболочка ограничивает объем v газа, давление которого на поверхность оболочки равно p. Допуская, что p зависит только от v, показать, что полная работа давления газа на все элементы оболочки, когда его объем возрастает от v_0 до v_1, равна $\int\limits_{v_0}^{v_1} p\,dv$.

Ответ. Разобьем поверхность на бесконечно малые элементы, равные $d\sigma$; на каждый из этих элементов действует нормальное давление $p\,d\sigma$; когда объем увеличивается от v до $v + dv$, элемент $d\sigma$ принимает положение $d\sigma'$; если, следовательно, обозначить через ε проекцию перемещения элемента $d\sigma$ на нормаль к нему, то элементарная работа давления $p\,d\sigma$ будет равна $p\varepsilon\,d\sigma$, и совокупность элементарных работ давления будет $p\int\varepsilon\,d\sigma$. Но $\varepsilon\,d\sigma$ есть объем цилиндра, противоположными основаниями которого служат $d\sigma$ и $d\sigma'$. Следовательно, $\int\varepsilon\,d\sigma$ представляет собой приращение полного объема. В таком случае совокупность элементарных работ равна $p\,dv$.

6. Сила F приложена к точке неизменяемой системы, которой сообщают элементарный поворот на угол $\delta\theta$ вокруг неподвижной оси Oz. Показать, что элементарная работа этой силы равна $N\delta\theta$, где N — момент силы F относительно оси Oz.

7. На точку M действует сила F, нормальная к неподвижной поверхности S. Обозначая через p расстояние от точки M до поверхности, отсчитываемое по нормали F, показать, что элементарная работа силы F равна $\pm F\,dp$, где знак $+$ или $-$ берется в зависимости от того, стремится ли сила увеличить или уменьшить расстояние p.

8. Взаимодействие двух точек с массами m и m', расположенных на расстоянии r, равно $F = -f\frac{mm'}{r^2}$, где f — постоянная (*закон всемирного тяготения Ньютона*). Как изменится множитель f при изменении единиц?

Ответ. Следует написать $f = -F\frac{r^2}{mm'}$; во что обращаются F, r, m и m' при изменении единиц известно. Тогда f обратится в $f\frac{\lambda^3}{\mu\tau^2}$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СТАТИКА

ГЛАВА V

РАВНОВЕСИЕ ТОЧКИ. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ

I. Материальная точка

89. Свободная точка. Для того чтобы свободная точка была в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая R приложенных к ней сил была равна *нулю*, т. е. чтобы проекции X, Y, Z вектора R были равны нулю:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0. \tag{1}$$

Если в каком-нибудь положении $M(x, y, z)$ подвергнуть точку M действию силы R, не сообщая ей при этом никакой начальной скорости, то начальное значение R может зависеть только от x, y, z и t. Мы будем предполагать, что от t оно *не зависит*. Тогда три уравнения (1) определяют координаты положения равновесия. Если существует *силовая функция* $U(x, y, z)$, то проекции X, Y, Z являются частными производными от U, и уравнения принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}=0. \tag{2}$$

Это как раз те уравнения, которые необходимо разрешить при нахождении *максимума и минимума функции* U от трех независимых переменных x, y, z. Мы покажем в динамике (гл. X) методом Лежен-Дирихле, что если функция U действительно имеет в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *максимум*, то эта точка является *положением устойчивого равновесия*. Это означает, что если материальную точку каким-нибудь образом отклонить бесконечно мало от положения M_1 и сообщить ей бесконечно малую начальную скорость, то она получит движение, при котором она удаляется от положения M_1 бесконечно мало.

Приближенное представление об этом можно получить следующим образом. Допустим, что в точке M_1 функция U имеет максимум, значение которого равно U_1. Вблизи точки M_1 функция U меньше чем U_1, и поэтому поверхность уровня будет

$$U=U_1-\varepsilon,$$

где ε — очень малая положительная величина, которая содержит замкнутую поверхность, окружающую точку M_1 и непрерывно стягивающуюся в нее, когда ε стремится к нулю (рис. 63, *а*). В каждой точке M этой поверхности сила нормальна к ней и направлена в сторону возрастания U, т. е. во внутрь. Она стремится, следовательно, помешать точке M удалиться от точки M_1.

Если, наоборот, в точке M_1 функция U имеет минимум и теперь U_1 есть значение этого минимума, то поверхность уровня

$$U = U_1 + \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ — положительно})$$

будет по-прежнему содержать замкнутую часть, окружающую точку M_1. Теперь в каждой точке M этой поверхности сила по-прежнему нормальна к ней, но направлена наружу (рис. 63, *б*). Эта сила стремится, следовательно, удалить точку M от точки M_1, и равновесие в точке M_1 неустойчиво.

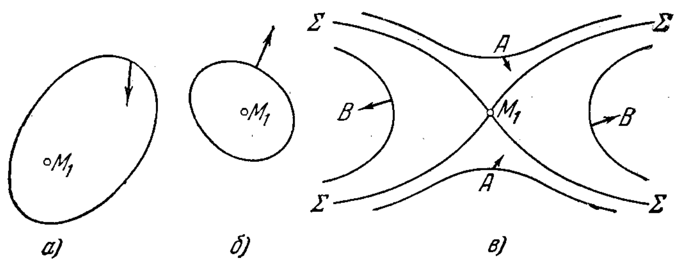


Рис. 63.

Допустим, наконец, что в положении M_1 три уравнения (2) удовлетворяются, но что соответствующее значение U_1 не является ни максимумом, ни минимумом функции U. Тогда в окрестности точки M_1 существуют две области A и B (рис. 63, *в*) такие, что в одной из них, например в A, функция U принимает значения, меньшие чем U_1, а во второй B — значения, большие чем U_1. Эти две области разделяются поверхностью уровня Σ, на которой

$$U - U_1 = 0.$$

Эта особая поверхность уровня Σ, проходящая, очевидно, через точку M_1, имеет в ней коническую точку, так как, согласно (2), в ней одновременно обращаются в нуль все три частные производные первого порядка функции $U - U_1$. Если через ε обозначить бесконечно малую положительную величину, то поверхности уровня

$$U = U_1 - \varepsilon$$

расположены в области A и в этой области силы стремятся вернуть движущуюся точку в положение M_1. Поверхности же

$$U = U_1 + \varepsilon$$

находятся в области B и в этой области силы стремятся удалить движущуюся точку от точки M_1, так как они направлены в сторону возрастания U. Следовательно, положение равновесия M_1 неустойчиво.

Этот последний случай представляется для точки, притягиваемой к двум неподвижным центрам силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний, что подробно рассматривается в теории притяжения.

90. Пример. Притяжения, пропорциональные расстояниям. Найти положение равновесия материальной точки, притягиваемой неподвижными центрами пропорционально расстояниям и массам притягивающих центров.

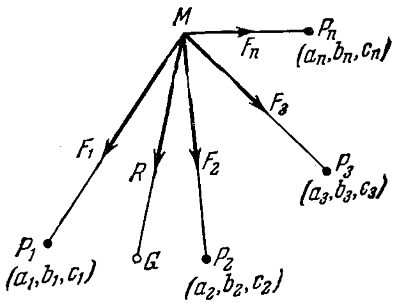


Рис. 64.

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (рис. 64) — неподвижные центры и $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — их массы. Силы притяжения $F_1, F_2, \ldots, F_n$, действующие на материальную точку M, направлены по $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$; их величины равны соответственно

$$F_1 = fm_1\overline{MP_1}, \quad F_2 = fm_2\overline{MP_2}, \quad \ldots, \quad F_n = fm_n\overline{MP_n},$$

где f — постоянная.

Пусть $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots, a_n, b_n, c_n$ — координаты притягивающих центров, а x, y, z — координаты точки M. Проекции силы F_k на оси координат равны проекциям соответствующих отрезков MP_k, умноженным на fm_k. Следовательно, они равны

$$fm_k(a_k - x), \quad fm_k(b_k - y), \quad fm_k(c_k - z).$$

Отсюда для проекций равнодействующей получаем

$$X = f\sum m_k(a_k - x), \quad Y = f\sum m_k(b_k - y), \quad Z = f\sum m_k(c_k - z), \tag{3}$$

где суммирование распространено на все силы, т. е. на все значения $k = 1, 2, \ldots, n$. Полагая

$$\mu = \sum m_k, \quad \mu\xi = \sum m_k a_k, \quad \mu\eta = \sum m_k b_k, \quad \mu\zeta = \sum m_k c_k,$$

можем написать

$$X = f\mu(\xi - x), \quad Y = f\mu(\eta - y), \quad Z = f\mu(\zeta - z).$$

Рассмотрим точку G с координатами ξ, η, ζ. Она называется *центром масс* системы масс $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Полученные только что уравнения показывают, что *равнодействующая сил, действующих на M, есть сила, которую можно получить, если всю систему притягивающих центров заменить единственной точкой G, полагая ее массу равной μ. Равнодействующая направлена по MG и ее значение равно $f\mu\overline{MG}$.* Следовательно, равновесия не будет, если точка M не совпадает с центром масс G системы.

Мы предполагали, что величины $m_1, m_2, \ldots, m_n$ существенно положительны. Допустим теперь, что эти числа не являются больше массами, а лишь некоторыми коэффициентами, и предположим, что некоторые из них отрицательны. Это равносильно предположению, что соответствующие силы являются отталкивающими, так как проекции какой-нибудь из сил F_k

меняют знак вместе с m_k, и сила F_k меняет направление на обратное, когда F_k делается отрицательным.

Если μ отлично от нуля, то приведенные вычисления сохранят силу, и мы придем к тем же результатам. Если μ равно нулю, то три величины (3) не зависят от x, y, z, равнодействующая постоянна по величине и направлению и *положения равновесия* нет. Если, наконец, одновременно

$$\mu = 0, \quad \sum m_k a_k = 0, \quad \sum m_k b_k = 0, \quad \sum m_k c_k = 0,$$

то X, Y, Z равны нулю, каковы бы ни были x, y, z, и, следовательно, точка M *находится в равновесии в любом положении.*

В рассматриваемой задаче существует силовая функция U. В общем случае, когда μ отлично от нуля, она будет

$$U = -\frac{f\mu}{2}[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2] = -\frac{f\mu}{2}\overline{MG}^2.$$

Если μ положительно, то эта функция равна нулю в точке G и отрицательна во всех остальных точках. Она, следовательно, имеет *максимум* в положении равновесия, которое вследствие этого *устойчиво.* Когда μ отрицательно, имеет место обратное. Если μ равно нулю, то X; Y, Z имеют постоянные значения $f\sum m_k a_k$, $f\sum m_k b_k$, $f\sum m_k c_k$, и силовая функция имеет вид

$$U = f\left(x\sum m_k a_k + y\sum m_k b_k + z\sum m_k c_k\right).$$

91. Точка, движущаяся без трения по неподвижной поверхности. Пусть дана неподвижная поверхность S (рис. 65) и на ней точка M, находящаяся под действием заданных сил, равнодействующая которых равна F. Для того чтобы точка находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы эта равнодействующая F, если она отлична от нуля, была *нормальна* к поверхности. В самом деле, если сила не нормальна к поверхности, то ее можно разложить на две силы, из которых одна направлена по нормали и прижимает точку к поверхности, а другая лежит в касательной плоскости и заставляет точку скользить по поверхности. Равновесия, следовательно, не будет. Если в каком-нибудь положении M сила F нормальна, то равновесие будет иметь место при условии, что точка не может покинуть поверхность ни в ту, ни в другую сторону. Это — случай, наиболее часто встречающийся. Но если точка просто *положена* на поверхность, как какой-нибудь предмет положен на стол, то для равновесия недостаточно, чтобы сила была направлена по нормали; сила должна быть направлена еще в такую сторону, чтобы она *прижимала точку к поверхности.*

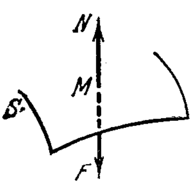


Рис. 65.

Если точка может скользить по поверхности без трения, то действие поверхности на точку выражается силой, которая не может оказывать никакого сопротивления скольжению, т. е. не может иметь никакой *касательной* составляющей. Эта сила, следовательно, *нормальна* к поверхности; она называется *нормальной реакцией.* Когда точка находится в равновесии, нормальная реакция равна и противоположна силе F. По закону равенства действия и противодействия точка M оказывает на поверхность действие, равное и противоположное MN, которое называется *давлением точки на поверхность*.

Выразим все эти результаты аналитически. Пусть

$$f(x, y, z)=0$$

— уравнение поверхности в прямоугольных координатах и X, Y, Z — проекции силы F. Проекциями нормальной реакции MN являются величины, пропорциональные направляющим косинусам нормали к поверхности, т. е. величины вида

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{N}$$

Так как должно иметь место равновесие между этой реакцией и силой F, то должны выполняться условия

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

которые совместно с уравнением поверхности $f(x, y, z)=0$ составляют систему четырех уравнений для определения x, y, z и λ. Пусть M — точка поверхности, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям. Если материальная точка не может покинуть поверхность ни с одной, ни с другой стороны, то в этой точке будет равновесие. В противном случае необходимо приписать коэффициенту λ определенный знак. Допустим, например, что точка может покинуть поверхность в ту сторону, где функция $f(x, y, z)$ становится положительной. Тогда необходимо, чтобы сила была направлена в сторону, где функция $f(x, y, z)$ отрицательна. Реакция будет направлена в противоположную сторону. Но вектор с проекциями

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

направлен относительно поверхности в ту ее сторону, где функция $f(x, y, z)$ положительна, что вытекает из таких же соображений, какие были сделаны в п. 83 относительно поверхностей уровня, если их применить к поверхностям $f(x, y, z)=\text{const}$. Так как реакция N должна быть направлена в ту же сторону, то λ *должно быть положительно*.

В случае, когда точка не может оставить поверхность, вычисления могут быть упрощены следующим образом. Выразим прежде всего координаты точки поверхности в функции двух параметров q_1 и q_2. Пусть, например,

$$x=\varphi(q_1, q_2), \quad y=\psi(q_1, q_2), \quad z=\omega(q_1, q_2).$$

Для того чтобы имело место равновесие, необходимо и достаточно, чтобы сила F была перпендикулярна к поверхности, т. е. к каждой из двух кривых, которые получатся, если положить последовательно сначала $q_1 = \text{const}$, а затем $q_2 = \text{const}$. Следовательно, уравнения задачи будут

$$Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0,$$

$$Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_3} = 0.$$

Величины x, y, z, которые зависят от положения точки M, будут функциями от q_1 и q_2, и полученные уравнения относительно q_1 и q_2 определяют значения параметров для положений равновесия.

Интересен случай, когда выражение

$$Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2,$$

где Q_1 и Q_2 — левые части написанных выше уравнений, есть полный дифференциал некоторой функции $U(q_1, q_2)$. Тогда для нахождения равновесия нужно будет приравнять нулю частные производные Q_1 и Q_2 функции U, т. е. искать максимум и минимум этой функции двух независимых переменных q_1 и q_2. Для этой функции можно написать

$$U(q_1, q_2) = \int X\, dx + Y\, dy + Z\, dz,$$

где во второй части все величины должны быть выражены через q_1 и q_2. В частном случае, когда сила F имеет потенциал, будет иметь место равенство

$$\int X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = U(x, y, z)$$

при любых x, y, z, и функция $U(q_1, q_2)$ будет существовать. Она получится из $U(x, y, z)$ после замены координат их выражениями в функции q_1 и q_2. Поверхность уровня, проходящая через положение равновесия M_1, будет в общем случае касаться в этой точке заданной поверхности S, так как сила в точке M_1 одновременно нормальна и к поверхности уровня, и к поверхности S.

Мы покажем в динамике, что если в каком-нибудь положении движущейся точки функция $U(q_1, q_2)$ действительно имеет максимум U_1, то соответствующее положение равновесия устойчиво. Так же, как и для рассмотренного выше случая свободной точки, в этом можно отдать себе отчет, исследуя вид кривых на заданной поверхности S, определяемых уравнениями

$$U = U_1 \pm \varepsilon.$$

92. Точка, движущаяся без трения по неподвижной кривой. Пусть задана неподвижная кривая C и на ней точка M, движущаяся без трения под действием сил, равнодействующая которых есть F. Так же, как и в случае точки, движущейся по поверхности, убеждаемся, что при равновесии сила F, если она не равна нулю, должна быть нормальна к кривой. Если это условие выполнено, то сила F будет уравновешиваться сопротивлением кривой, и равновесие будет иметь место.

Действие кривой на точку выражается нормальной силой MN, которая называется *нормальной реакцией*. Точка M оказывает на кривую давление, равное и противоположное этой реакции. Если точка находится в равновесии, то нормальная реакция равна силе F, но противоположна ей, а давление точки на кривую есть сама сила (рис. 66).

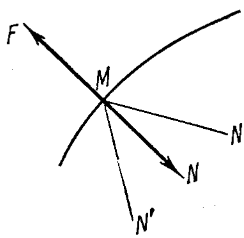


Рис. 66.

Пусть

$$f(x, y, z)=0, \quad f_1(x, y, z)=0$$

— уравнения кривой, отнесенной к трем прямоугольным осям, и X, Y, Z — проекции равнодействующей F сил, приложенных к точке $M(x, y, z)$. Для того чтобы выразить, что имеет место равновесие, достаточно написать, что сила F равна и прямо противоположна нормальной реакции N. Эта последняя может быть всегда разложена на две другие, направленные по нормалям MN' и MN'' к двум поверхностям $f=0$ и $f_1=0$, пересечение которых определяет заданную кривую, так как все три направления MN, MN' и MN'' лежат в одной нормальной плоскости. Эти две составляющие MN' и MN'' реакции имеют соответственно проекции

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}; \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Так как реакция и сила F находятся в равновесии, то

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}=0, \quad Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}=0,$$

$$Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}=0.$$

Эти три уравнения совместно с уравнениями кривой определяют пять неизвестных x, y, z, λ, λ_1.

Можно упростить вычисления, если положить, что координаты точки кривой выражены в функции одного параметра q при помощи уравнений

$$x=\varphi(q), \quad y=\psi(q), \quad z=\omega(q).$$

Направляющие косинусы касательной пропорциональны производным $\varphi'(q)$, $\psi'(q)$, $\omega'(q)$, и условие равновесия получится, если приравнять нулю величину

$$X\varphi'(q)+Y\psi'(q)+Z\omega'(q),$$

которую мы обозначим через Q. Каждому значению q, обращающему Q в нуль, соответствует положение равновесия. В рассматриваемом случае отыскание положений равновесия всегда приводится к *отысканию максимума и минимума функции, зависящей только от одной переменной.* Положим

$$U(q) = \int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int Q\,dq,$$

где в первом интеграле для того, чтобы он совпал со вторым, нужно заменить величины x, y, z их выражениями через q. Условие равновесия получится, если отыскивать те значения q, которые обращают в нуль производную от U по q, т. е. если искать максимум и минимум функции U. Если существует силовая функция $U(x, y, z)$, то функция $U(q)$ получится, очевидно, заменой величин x, y, z их выражениями через q. В этом случае поверхность уровня, проходящая через положение равновесия M_1, касается в этой точке кривой. В дальнейшем, при помощи общего метода мы покажем, что действительным максимумам функции $U(q)$ отвечают положения *устойчивого* равновесия. В виде упражнения (задача 7 в конце главы) мы укажем частный метод, позволяющий убедиться в справедливости этого предложения и основанный на том, что точка, предоставленная самой себе на кривой, стремится перемещаться по ней в сторону возрастания U.

II. Системы материальных точек

93. Система материальных точек. Если система состоит из свободных и независимых друг от друга точек, то для каждой из них может быть повторено все, что было сказано относительно совершенно свободной точки. Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы равнодействующие сил, действующих на каждую из точек, были равны нулю.

Та же теорема справедлива и тогда, когда на систему наложены связи, если каждую точку рассматривать как свободную, добавляя к приложенным к ней силам реакции связей.

Этой точки зрения мы будем придерживаться ниже в связи с теоремой о возможной работе.

Сейчас мы разделим все силы, приложенные к системе, на две категории: на силы внутренние и силы внешние. Мы покажем, что для равновесия необходимо, чтобы внешние силы удовлетворяли шести условиям, одинаковым для всех систем.

94. Силы внутренние и силы внешние. Шесть необходимых условий равновесия. Любую материальную систему, образованную телами твердыми, жидкими или газообразными, можно рассматривать, как составленную из большого числа материальных точек, подчиненных некоторым связям. Так, например, твердое тело есть совокупность материальных точек, расстояния между которыми должны оставаться неизменными. Общие теоремы могут быть получены, если написать уравнения равновесия для этих различных материальных точек и составить из них некоторые сочетания.

Внутренними силами системы называются силы взаимодействия между ее различными точками. По закону равенства действия и противодействия эти силы попарно равны и прямо противоположны. Например, если точка m' системы притягивает другую ее точку m с некоторой силой, то, наоборот, точка m притягивает точку m' с такой же силой, но противоположно направленной.

Силы, отличные от определяемых таким образом внутренних сил, называются *внешними*.

Пусть $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ — координаты различных точек системы, массы которых $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Если рассматривать какую-нибудь одну из этих точек с массой m и с координатами x, y, z, то все приложенные к ней силы можно разбить на две категории. К первой относятся все внутренние силы, действующие на m; проекции какой-нибудь из этих сил мы обозначим через X_i, Y_i, Z_i. Ко второй категории относятся все внешние силы, действующие на ту же точку; проекции какой-нибудь из этих сил мы обозначим через X_e, Y_e, Z_e. Точка m может рассматриваться как совершенно свободная при условии, что принимаются во внимание все действующие на нее силы как внешние, так и внутренние. Для того чтобы она находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая всех этих сил обращалась в нуль. Проектируя все силы на три оси, мы получим три уравнения равновесия

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i + \sum X_e &= 0, \\ \sum Y_i + \sum Y_e &= 0, \\ \sum Z_i + \sum Z_e &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где знак $\sum$ означает, что нужно взять сумму проекций всех внешних или внутренних сил, приложенных к точке m.

Допустим, что эти уравнения написаны для всех точек системы, и сложим почленно все уравнения, относящиеся к оси x. Получим

$$\sum\sum X_i + \sum\sum X_e = 0,$$

где знак $\sum\sum$ означает, что сумма распространена на все силы, действующие на различные точки системы. Но согласно закону равенства действия и противодействия все внутренние силы попарно равны и противоположны. Следовательно, $\sum\sum X_i$ их проекций на ось x равна нулю, и предыдущее уравнение принимает вид

$$\sum\sum X_e = 0. \tag{2}$$

Аналогично получаем

$$\left.\begin{aligned}\sum\sum Y_e=0,\\ \sum\sum Z_e=0.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Таким образом, получены три необходимые для равновесия условия, связывающие проекции внешних сил. Три других уравнения получатся, если ввести моменты.

Вернемся к уравнениям (1). Умножим первое из них на $-y$, второе на x и сложим. Имеем

$$\sum(xY_i-yX_i)+\sum(xY_e-yX_e)=0.$$

Написав аналогичные уравнения для всех точек системы и почленно сложив их, получим

$$\sum\sum(xY_i-yX_i)+\sum\sum(xY_e-yX_e)=0.$$

Но $\sum\sum(xY_i-yX_i)$ есть сумма моментов всех внутренних сил относительно оси Oz. Это выражение будет равно нулю, так как все внутренние силы попарно равны и прямо противоположны. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\sum\sum(xY_e-yX_e)=0\tag{3}$$

и аналогично к уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\sum\sum(yZ_e-zY_e)=0,\\ \sum\sum(zX_e-xZ_e)=0.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Полученные таким образом шесть необходимых условий (2) и (3) могут быть высказаны следующим образом.

Для того чтобы произвольная система находилась в равновесии, необходимо, чтобы сумма проекций внешних сил на каждую из трех осей и сумма их моментов относительно каждой из этих трех осей равнялись нулю.

Эти условия можно высказать и в форме, не зависящей от каких бы то ни было осей, следующим образом.

Для того чтобы произвольная система находилась в равновесии, необходимо, чтобы внешние силы составляли систему скользящих векторов, эквивалентную нулю.

Это условие можно выразить при помощи одного из методов первой главы. Можно, например, при помощи элементарных операций привести систему векторов к простейшему виду и окончательно получить или два равных и прямо противоположных вектора, или равные нулю главный вектор и главный момент.

Примеры. 1°. Представим себе сосуд с водой, находящейся в равновесии под действием силы тяжести. Рассматриваемая система образована частицами воды. Внутренними силами являются взаимодействия между этими частицами. Внешними силами являются действия тел, не принадлежащих системе, на точки системы. Этими силами будут: 1) веса частиц воды; 2) действия стенок сосуда на соприкасающиеся с ними частицы; 3) давления, производимые воздухом на свободную поверхность. Для того чтобы имело место равновесие, *необходимо*, чтобы совокупность всех этих внешних сил образовывала систему скользящих векторов, *эквивалентную нулю.*

2°. Вообразим тяжелую цепь, подвешенную своими обоими концами к двум неподвижным точкам A и B. Внешними силами, действующими на цепь, являются: 1) веса различных звеньев; 2) действия, вызываемые неподвижными точками A и B. Цепь тянет эти точки, и, наоборот, эти точки действуют на цепь двумя силами F_A и F_B, приложенными на ее концах. Для того чтобы было равновесие, необходимо, чтобы все внешние силы были эквивалентны нулю. Веса образуют систему параллельных векторов, эквивалентную одному вектору P, равному весу цепи и приложенному в ее центре тяжести. Три вектора P, F_A и F_B и должны составлять систему, эквивалентную нулю.

3°. *Твердое тело.* Если рассматриваемая система является твердым телом, то указанные шесть необходимых условий равновесия будут также и достаточными, что будет показано в следующей главе.

95. Разделение произвольной системы на части. Необходимые условия равновесия. Выделим мысленно из материальной системы S какую-нибудь ее часть S_1 так, чтобы система оказалась разделенной на две части, из которых одна состоит из точек S_1, а другая $(S-S_1)$ из остальных точек, образующих систему. Если система находится в равновесии, то в равновесии будет и каждая ее часть, например часть S_1. Тогда можно применить полученные результаты к части S_1, рассматривая ее как систему в равновесии. Приложенные к части S_1 силы, *внешние* для нее, должны составлять систему скользящих векторов, эквивалентную нулю. Таким путем, рассматривая последовательно различные части полной системы, мы получим все необходимые условия равновесия.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если n сходящихся сил находятся в равновесии, то их общая точка приложения является центром масс n точек с равными массами, размещенных по концам сил.

2. Найти положение равновесия свободной точки M, притягиваемой к неподвижным центрам O_1, O_2, ..., O_n силами, обратно пропорциональными расстояниям. Доказать, что: существует силовая функция $\log \overline{MO_1}\cdot\overline{MO_2}\ldots\overline{MO_n}$; каждое положение равновесия O' есть центр средних расстояний между точками, обратными к O_k относительно O'; если точки O_k лежат в одной плоскости и если составить многочлен, корнями которого будут комплексные числа z, изображающие точки O_k, то положения равновесия будут определяться корнями производной от этого многочлена по z. (Шаль, см. Lucas, Comptes rendus, 1879 и 1888 и Juhel-Rénoy там же, 1906, и Nouvelles Annales de Mathématiques 4 серия, т. VII, 1907.)

3. Точка M находится в равновесии в определенном положении A под действием определенных сил P_1, P_2, ..., P_n. На линии AP_k берется точка O_k, причем так, что $AO_k=(hP_k)^{\frac{1}{\nu}}$, где h и ν — постоянные ($\nu \gtreqless -1$). Показать, что функция $\overline{MO}_1^{\nu+1} + \overline{MO}_2^{\nu+1} + \ldots + \overline{MO}_n^{\nu+1}$ имеет максимум или минимум, когда точка M совпадает с положением равновесия A. Если $\nu = -1$, то эта функция должна быть заменена функцией $\log \overline{MO}_1 \cdot \overline{MO}_2 \ldots \overline{MO}_n$. Если $\nu = 1$, то A есть центр средних расстояний между точками O_k.

4. Найти положения равновесия тяжелой точки, которая движется без трения по винтовой линии на цилиндре вращения с вертикальной осью и притягивается одной из точек оси пропорционально расстоянию.

Ответ. Одно положение устойчивого равновесия.

5. Найти положения равновесия точки M, движущейся без трения по окружности радиуса a и подверженной действию силы, направление которой проходит через фиксированную точку A окружности и алгебраическое значение которой при положительном направлении, совпадающем с AM, равно $1 - \frac{a}{\overline{AM}}$.

Ответ. Три положения равновесия: два, для которых $AM = a$, и одно, для которого $AM = 2a$. Первые два устойчивы, а третье неустойчиво.

6. Дана сила F, проекции которой X, Y, Z зависят от x, y, z. Найти такую поверхность S, чтобы точка, движущаяся по ней без трения и подверженная действию силы F, находилась в равновесии в любом положении.

Ответ. Должен существовать такой множитель μ, чтобы

$$\mu (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = df(x, y, z).$$

Искомые поверхности суть $f(x, y, z) = \text{const}$. Если существует силовая функция, то искомые поверхности являются поверхностями уровня.

6а. Точно так же найти кривые, на которых точка находится в равновесии в любом положении.

(Эти кривые всегда существуют. Они должны удовлетворять уравнению

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

которое позволяет, выбрав произвольным образом x и y в функции параметра q, определить затем z.)

7. Точка M, находящаяся под действием силы F, может скользить без трения по неподвижной кривой, координаты которой выражены в функциях параметра q. К этой кривой проведена касательная MT в сторону возрастания q. Показать, что косинус угла TMF имеет знак функции, обозначенной через Q (п. 92). Отсюда вывести, что для устойчивости равновесия при $q = q_1$ необходимо и достаточно, чтобы функция Q обращалась в нуль, переходя от положительных значений к отрицательным, когда q достигает значение q_1 и переходит через него.

8. Найти положения равновесия точки M, помещенной на наружную поверхность эллипсоида, если M отталкивается неподвижной точкой P с силой, пропорциональной расстоянию. (Так как точка M может покинуть поверхность наружу, то необходимо принимать во внимание знак величины λ. Если P находится вне эллипсоида, то имеется одно положение неустойчивого равновесия. Если P находится внутри эллипсоида, положений равновесия нет. Геометрически задача сводится к проведению из точки P нормалей к поверхности. Затем следует сделать надлежащий выбор оснований этих нормалей.)

9. Точка, движущаяся по параболе $y^2 - 2px = 0$, притягивается неподвижной точкой (a, b), лежащей в плоскости кривой, пропорционально расстоянию. Найти положения равновесия. Исследовать устойчивость. Имеем

$$X = \mu (a - x), \quad Y = \mu (b - y), \quad \mu > 0.$$

Ординаты положений равновесия [основания нормалей, проведенных из (a, b)], являются значениями y, обращающими в нуль функцию

$$\Phi(y) = \mu\left[\left(a - \frac{y^2}{2p}\right)\frac{y}{p} + (b - y)\right]$$

и совпадающими со значениями, для которых функция

$$-\frac{\mu}{2}\left[(a - x)^2 + (b - y)^2\right],$$

выраженная через y, имеет максимум или минимум. Равновесие устойчиво, если эта функция имеет максимум.

10. К трем вершинам A, B, C треугольника прикреплены упругие нити, длины которых в нерастянутом состоянии равны α, β, γ. Нити растягиваются и связываются в узел. Предполагается, что сила упругости каждой нити пропорциональна удлинению, отнесенному к единице длины (например, если x — удлинение первой нити, то сила упругости равна $k\frac{x}{\alpha}$, где k одинаково для всех трех нитей). Какие соотношения должны существовать между тремя длинами α, β, γ, чтобы положение равновесия узла совпадало с центром тяжести треугольника?

ГЛАВА VI

РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

I. Приведение сил, приложенных к твердому телу. Равновесие

96. Твердое тело. *Твердым телом называется совокупность материальных точек, неизменно связанных между собой.* Если сила приложена к одной из этих точек, то говорят, что она *приложена к телу*. Определяемое таким образом твердое тело является абстракцией. Все естественные тела изменяют свою форму под действием приложенных к ним сил. Но тела, называемые твердыми, настолько мало деформируются, что этой деформацией в первом приближении можно пренебречь, если только приложенные силы не слишком велики.

Согласно общим теоремам о равновесии произвольных систем для равновесия твердого тела под действием некоторых сил необходимо, чтобы эти силы составляли систему скользящих векторов, эквивалентную нулю.

Но для твердого тела это необходимое условие является также и достаточным. Это можно доказать, допуская как очевидное следующее предложение:

Две приложенные к твердому телу равные и прямо противоположные силы находятся в равновесии.

Согласно этому предложению можно, не изменяя механического состояния твердого тела, приложить к нему или отнять от него две равные прямо противоположные силы.

Это предложение позволяет доказать, как мы это сделали в теории векторов (п. 19), следующее свойство:

Можно, не изменяя состояния твердого тела, переносить точку приложения любой силы вдоль ее линии действия, если только новая точка приложения неизменно связана с телом.

Следовательно, вектор силы, приложенной к твердому телу, *связан с прямой, т. е. является скользящим вектором.*

Мы покажем, как можно привести к простейшему виду совокупность приложенных к твердому телу сил и вывести отсюда необходимые и достаточные условия равновесия.

97. Приведение сил, приложенных к твердому телу. Равновесие. Согласно предыдущему, состояние тела не изменится, если выполнить следующие элементарные действия.

Присоединить или отбросить две равные прямо противоположные силы; перенести силу в какую-нибудь точку на ее линии действия.

Сложить несколько сходящихся сил в одну или разложить одну силу на несколько сходящихся сил.

Мы видели, что все системы скользящих векторов, полученные при помощи этих элементарных действий, *эквивалентны*, т. е. имеют одни и те же главные векторы и главные моменты. Наоборот, две эквивалентные системы скользящих векторов могут быть получены одна из другой при помощи этих действий. Следовательно, *две системы сил, представляющие собой эквивалентные системы скользящих векторов, могут быть заменены одна другой без изменения механического состояния твердого тела.*

Приведение к двум силам. Как было показано в теории векторов, система сил (S), приложенная к твердому телу, может быть приведена при помощи элементарных операций к двум силам F и Φ, из которых одна приложена в произвольно выбранной точке.

Приведение к силе и паре. Как было показано в теории векторов, произвольная система сил (S) может быть заменена одной силой R, равной главному вектору и приложенной в произвольной точке O, и одной парой с вектором момента, равным главному моменту OG относительно точки O.

Равновесие. Для равновесия *необходимо*, чтобы система (S) была эквивалентна нулю, т. е. чтобы ее главный вектор OR и главный момент OG равнялись нулю. Это условие также и *достаточно*. В самом деле, если оно выполняется, то при помощи элементарных действий все силы могут быть приведены к одной паре с моментом OG, равным нулю, и образованной, следовательно, двумя равными и противоположными силами, лежащими на одной прямой.

Уравнения равновесия. Обозначим через X, Y, Z суммы проекций всех сил на три оси координат, а через L, M, N суммы их моментов относительно тех же осей. Тогда необходимые и достаточные условия равновесия выразятся уравнениями:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0; \quad L=0, \quad M=0, \quad N=0.$$

98. Эквивалентные системы сил. Мы видели в предыдущем разделе, что если две системы сил, приложенные к твердому телу, изображаются двумя эквивалентными системами скользящих векторов, то они могут быть заменены одна другой без изменения состояния тела.

Наоборот, если две системы сил (A) и (B) могут быть заменены одна другой без изменения механического состояния тела, то они изображаются двумя эквивалентными системами скользящих векторов.

В самом деле, рассмотрим систему $(-A)$, получаемую из системы (A) заменой всех сил на противоположные. Эта система $(-A)$, очевидно, уравновешивает систему (A). Но тогда она уравновесит также и систему (B), которая, по предположению, производит такое же действие, как и система (A). Следовательно, совокупность векторов $(-A)+(B)$ эквивалентна нулю, откуда вытекает, что система векторов (A) эквивалентна системе векторов (B).

Когда две системы сил (A) и (B) могут быть заменены одна другой без нарушения механического состояния твердого тела, то их называют *эквивалентными*. Мы видим, таким образом, что для того, чтобы две системы сил были *эквивалентны*, необходимо и достаточно, чтобы они представлялись двумя *эквивалентными системами скользящих векторов*.

99. Частные случаи приведения. Для того чтобы система (S) имела *равнодействующую*, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор OR был отличен от нуля, а *главный момент OG либо равнялся нулю, либо был перпендикулярен главному вектору*. Тогда равнодействующая будет *лежать на центральной оси*. Аналитически имеем следующие условия:

$$X^2+Y^2+Z^2>0, \quad LX+MY+NZ=0.$$

Для того чтобы система (S) приводилась к одной паре, необходимо и достаточно, чтобы *главный вектор равнялся нулю*, а главный момент был отличен от нуля:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad OG \gtrless 0.$$

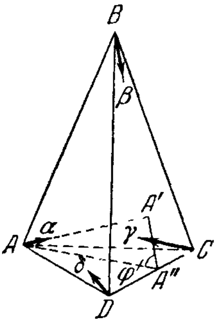


Рис. 67.

100. Другая форма условий равновесия. *Для равновесия твердого тела необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил относительно каждого из шести ребер тетраэдра равнялась нулю.* Это условие является, очевидно, необходимым. Оно также и достаточно. В самом деле, допустим, что оно выполняется для тетраэдра $ABCD$. Тогда, так как суммы моментов относительно трех ребер AB, AC, AD, выходящих из вершины A, равны нулю, то и главный момент относительно точки A равен нулю. Следовательно, все силы либо приводятся к одной равнодействующей, проходящей через точку A, либо находятся в равновесии. Так как эти рассуждения справедливы для каждой вершины, то силы находятся в равновесии, ибо они не могут иметь равнодействующую, проходящую одновременно через четыре вершины.

В качестве приложения докажем, что четыре силы, приложенные в четырех вершинах тетраэдра (рис. 67), пропорциональные площадям противоположных граней и направленные нормально к ним, находятся в равновесии. Для этого покажем, что суммы моментов относительно каждого из шести ребер тетраэдра равны нулю.

В самом деле, пусть α, β, γ, δ — силы, приложенные к вершинам A, B, C, D тетраэдра. Тогда

$$\alpha = k \cdot \text{пл.}\, BCD, \quad \beta = k \cdot \text{пл.}\, CDA, \quad \gamma = k \cdot \text{пл.}\, DAB, \quad \delta = k \cdot \text{пл.}\, ABC.$$

Возьмем моменты относительно ребра CD: моменты сил γ и δ равны нулю, моменты сил α и β противоположны по знаку. Так как сила α направлена по высоте AA', то угол между α и CD — прямой, и кратчайшим расстоянием между α и CD является перпендикуляр $A'A''$, опущенный из A' на CD; следовательно, абсолютное значение момента силы α относительно CD равно

$$\alpha \cdot \overline{A'A''} = \alpha \cdot \overline{AA'} \cdot \operatorname{ctg} \varphi = k \cdot \text{пл}\ BCD \cdot \overline{AA'} \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 3kV \operatorname{ctg} \varphi,$$

где V — объем тетраэдра и φ — двугранный угол при ребре CD. Такое же абсолютное значение имеет и момент силы β. Следовательно, сумма моментов относительно произвольно взятого ребра CD равна нулю.

II. Приложения. Силы в плоскости. Параллельные силы. Центр тяжести

101. Силы в плоскости. Примем плоскость, в которой лежат силы, за плоскость xy. Очевидно, имеем:

$$Z = 0, \quad L = 0, \quad M = 0,$$
$$LX + MY + NZ = 0.$$

Следовательно:

если $X^2 + Y^2 > 0$, то система приводится к одной равнодействующей, лежащей в плоскости и направленной по центральной оси;
если $X = 0$, $Y = 0$, а $N \gtrless 0$, то система приводится к паре;
если $X = 0$, $Y = 0$, $N = 0$, то система находится в равновесии.

Когда $N = 0$, то силы либо имеют равнодействующую, проходящую через точку O, либо находятся в равновесии. Следовательно, если сумма моментов сил относительно двух точек плоскости равна нулю, то либо равнодействующая проходит через эти точки, либо имеет место равновесие. Если, наконец, эта сумма равна нулю для трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой, то возможно только равновесие.

102. Примеры. 1°. Возьмем в плоскости xy произвольный многоугольник и приложим к середине каждой из его сторон силу, пропорциональную длине этой стороны, перпендикулярную к ней и направленную в сторону, внешнюю по отношению к многоугольнику. Эти силы находятся в равновесии. Докажем это предложение геометрически. Сделаем это сначала для треугольника, обозначив его через ABC (рис. 68).

Три силы $A'(k \cdot BC)$, $B'(k \cdot AC)$, $C'(k \cdot AB)$ пересекаются в одной точке, как перпендикуляры в серединах сторон треугольника. Более того, сумма их проекций на произвольную ось равна, очевидно, нулю. Следовательно, эти силы находятся в равновесии.

Переходим теперь к случаю произвольного многоугольника. При помощи диагоналей, проведенных из одной вершины, разобьем его на треугольникн. В середине каждой стороны полученного треугольника приложим силу, пропорциональную длине этой стороны, ей перпендикулярную и направленную в сторону, внешнюю по отношению к соответствующему треугольнику. По доказанному, вся эта система сил находится в равновесии. Но в середине каждой диагонали приложены две равные и противоположно направленные силы; их можно, следовательно, отбросить, не нарушая равновесия, и тогда останутся лишь силы, приложенные к серединам сторон многоугольника. Предложение, таким образом, доказано.

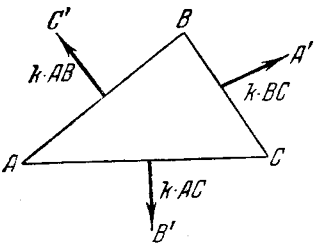


Рис. 68.

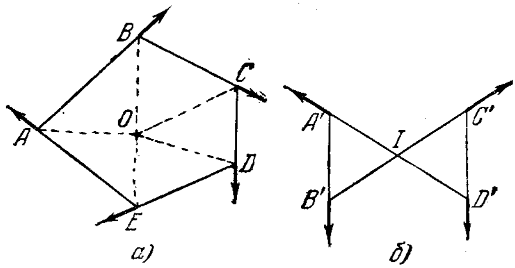


Рис. 69.

2°. Дан плоский многоугольник $ABCDE$ (рис. 69, a), на котором избрано какое-нибудь направление обхода. Приложим в каждой вершине этого многоугольника силу, направленную по стороне, оканчивающейся в этой вершине, и пропорциональную длине этой стороны. Если многоугольник выпуклый, то эти силы приводятся к паре. В самом деле, сумма проекций этих сил на любую ось равна нулю, так как она равна k-кратной величине проекции замкнутого многоугольника $ABCDE$, но сумма моментов относительно произвольной точки O плоскости многоугольника отлична от нуля. Действительно, эта сумма равна

$$N = \pm\, 2k\,(\text{пл.}\, OAB + \text{пл.}\, OBC + \ldots),$$

т. е.

$$N = \pm\, 2k \cdot \text{пл.}\, ABCDE.$$

Таким образом, равновесия нет.

Если многоугольник вогнутый, то такого результата не получится. В самом деле, возьмем многоугольник $A'B'C'D'$; сумма моментов относительно точки O плоскости (рис. 69, $б$) будет равна

$$\pm\, 2k\,(\text{пл.}\, D'IC' - \text{пл.}\, B'IA').$$

Следовательно, равновесие получится только тогда, когда треугольники $D'IC'$ и $B'IA'$ равновелики.

103. Параллельные силы. Пусть на твердое тело действуют параллельные силы. Обозначим через α, β, γ направляющие косинусы полупрямой OD, параллельной направлению сил, через $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — алгебраические значения этих сил, которые мы считаем положительными в сторону OD и отрицательными в противоположном направлении, и через x_k, y_k, z_k — координаты точки приложения P_k. Тогда могут представиться следующие различные случаи (п. 29).

1°. $\sum P_k \gtrless 0$. Одна равнодействующая, параллельная данному направлению, имеющая алгебраическое значение $\sum P_k$ и приложенная в центре параллельных сил

$$\xi = \frac{\sum P_k x_k}{\sum P_k}, \quad \eta = \frac{\sum P_k y_k}{\sum P_k}, \quad \zeta = \frac{\sum P_k z_k}{\sum P_k},$$

положение которого не зависит от направления сил.

2°. $\sum P_k = 0$, $L^2 + M^2 + N^2 > 0$. Одна пара с вектором момента L, M, N.

3°. $\sum P_k = 0$, $\dfrac{\sum P_k x_k}{\alpha} = \dfrac{\sum P_k y_k}{\beta} = \dfrac{\sum P_k z_k}{\gamma}$. Равновесие.

Астатическое равновесие. Допустим, что твердое тело перемещается, но параллельные силы сохраняют величину, линию действия и направление (относительно неподвижных осей) и остаются приложенными в одних и тех же фиксированных точках тела. Равновесие называется *астатическим*, если оно осуществляется при любом положении тела, или, что одно и то же, при любом направлении сил относительно тела, т. е. каковы бы ни были α, β, γ. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнения

$$\sum P_k = 0, \quad \sum P_k x_k = 0, \quad \sum P_k y_k = 0, \quad \sum P_k z_k = 0.$$

В этом случае центр сил, направленных в одну сторону, совпадает с центром сил, направленных в противоположную сторону, так что обе системы сил всегда уравновешиваются.

104. Центр тяжести. Мы уже дали определение *веса* материальной точки: это — вертикальная сила, интенсивность которой p равна массе точки, умноженной на ускорение тяжести g, одинаковое в одном и том же месте для всех тел. Направление вертикали изменяется с изменением места; наблюдения показывают, что величина g изменяется с высотой и широтой места; но эти изменения ничтожно малы в границах тела обычных размеров. Следовательно, тяжелое твердое тело можно рассматривать как совокупность большого числа связанных между собой материальных точек, находящихся под действием параллельных вертикальных сил, приложенных к этим точкам и пропорциональных их массам. Равнодействующая этих сил, равная их сумме, называется *весом тела*. Точка приложения этой равнодействующей или центр параллельных сил, приложенных к материальным точкам, называется *центром тяжести*. Он занимает в теле положение, не зависящее от ориентации тела, так как если тело перемещается, то для наблюдателя, связанного с ним, все происходит так, как если бы тело было неподвижно, а параллельные силы поворачивались на один и тот же угол вокруг своих точек приложения, что не изменяет положения центра параллельных сил. Таким образом, *центр тяжести тела — это точка, через которую всегда проходит его вес, каково бы ни было положение тела.* Если, следовательно, закрепить центр тяжести тела, предоставив ему свободу вращаться вокруг него, то тело, находясь под действием только тяжести, будет оставаться в равновесии в любом положении, которое оно может принять.

105. Координаты центра тяжести. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — массы материальных точек, составляющих твердое тело, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — их веса, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\ldots$, (x_n, y_n, z_n) — координаты этих точек, а P и M — вес и масса всего тела. Имеем

$$p_k = m_k g, \quad P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = Mg.$$

Если обозначить через ξ, η, ζ координаты центра тяжести, то их можно определить по формулам для центра параллельных сил

$$\xi = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

или, короче,

$$\xi = \frac{\sum px}{\sum p} = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad \eta = \frac{\sum py}{\sum p} = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad \zeta = \frac{\sum pz}{\sum p} = \frac{\sum mz}{\sum m}.$$

Отсюда видно, что положение центра тяжести в теле обычных размеров зависит только от *масс* точек.

Это заключение очень важно, так как оно позволяет распространить понятие центра тяжести на системы невесомые. А именно, в некоторых вопросах, относящихся к материальным точкам с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, *не связанных неизменно между собой*, полезно ввести точку, координаты которой определяются предыдущими формулами. Эту точку, которую Эйлер предложил называть *центром инерции* *), продолжают часто называть *центром тяжести*, несмотря на то, что соображения, приводящие к понятию центра тяжести, не применимы к рассматриваемым вопросам. Центр инерции расположен, очевидно, внутри любой выпуклой поверхности, окружающей рассматриваемые точки (п. 32, примечание II).

Разница между центром инерции и центром тяжести для тел больших размеров изучена Лильесштрёмом (Comptes Rendus, т. 162, 1916, стр. 155).

Если известны центры тяжести G_1 и G_2 двух частей тела с массами M_1 и M_2, то можно найти сразу центр тяжести всего тела, так как он является центром параллельных сил $M_1 g$ и $M_2 g$, приложенных в точках G_1 и G_2. Вообще, если известны центры тяжести $G_1, G_2, \ldots, G_p$ и массы $M_1, M_2, \ldots, M_p$ нескольких частей тела, то центр тяжести всего тела есть центр параллельных сил $M_1 g, M_2 g, \ldots, M_p g$, приложенных в точках $G_1, G_2, \ldots, G_p$. Обозначая через $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_p, y_p, z_p$ координаты цент-

*) Ее называют также *центром масс*.

ров тяжести этих различных частей, получим для координат ξ, η, ζ центра тяжести тела следующие формулы:

$$\xi=\frac{M_1x_1+M_2x_2+\ldots+M_px_p}{M_1+M_2+\ldots+M_p},\quad \eta=\frac{\sum My}{\sum M},\quad \zeta=\frac{\sum Mz}{\sum M}.$$

Когда желают определить центр тяжести произвольного тела заданной формы, например какой-нибудь металлической массы, то нужно применить полученные формулы к телу, образованному очень большим числом материальных точек, расположенных на очень малых взаимных расстояниях. Этой трудности можно избежать, рассматривая тело как непрерывное, что не соответствует действительности, но дает вполне достаточное для приложений приближение. Мы отсылаем читателя, желающего получить более подробное представление о законности такой замены заданного тела сплошным, к главе VI *Механики* Пуассона, относящейся к теории притяжения тел. Уподобляя таким образом твердое тело некоторому сплошному объему, мы предполагаем его разложенным на бесконечно большое число бесконечно малых частей и помещаем центр тяжести каждой из таких частей в какой-нибудь точке ее массы. Тогда формулы, определяющие координаты центра тяжести тела, разбитого на части с массами M_1, M_2, ..., M_p, сохраняются при условии замены сумм, входящих в числители и знаменатели, тройными интегралами. Если тело имеет очень малую толщину по сравнению с другими своими измерениями, то его уподобляют поверхности. Таким является, например, очень тонкий лист бумаги или металла. Точно так же имеются случаи, когда тело можно рассматривать как линию; таким является случай длинной и тонкой нити.

Мы укажем в конце главы некоторые формулы для определения центров инерции линий, поверхностей и объемов.

III. Приложения. Произвольные силы в пространстве

106. Примеры равновесия. 1°. *Силы, приложенные в центрах тяжести A', B', C', D' граней тетраэдра $ABCD$, пропорциональные площадям этих граней, им перпендикулярные и направленные внутрь тетраэдра, находятся в равновесии.* В самом деле, эти силы по отношению к тетраэдру $A'B'C'D'$, имеющему вершины в центрах тяжести граней данного тетраэдра, находятся в положении, указанном в конце п. 100. Отсюда можно заключить, что *силы, приложенные в центрах тяжести граней многогранника, пропорциональные площадям этих граней, нормальные к ним и направленные внутрь многогранника, находятся в равновесии.* Для этого достаточно разбить многогранник на тетраэдры и применить к совокупности этих тетраэдров те же рассуждения, что и в первом примере п. 102.

В качестве предельного случая приходим к выводу, что если взять произвольную замкнутую поверхность и к каждому ее бесконечно малому элементу приложить силу, пропорциональную площади этого элемента и направленную по нормали, то полученная система сил находится в равновесии.

2°. *Пары, векторные моменты которых пропорциональны площадям граней многогранника и направлены внутрь нормально к ним, находятся в равновесии.* В самом деле, сумма проекций моментов этих пар на произвольное направление равна нулю.

107. Условия, при которых силы, находящиеся в равновесии, могут быть направлены по трем, четырем, пяти, шести прямым. Найдем, как должны быть расположены в пространстве три, или четыре, или пять, или шесть прямых, для того, чтобы по ним можно было направить силы, находящиеся в равновесии. Сделаем сначала следующее замечание. Если несколько сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ находятся в равновесии, то сумма их моментов относительно произвольной оси равна нулю, поэтому, если какая-нибудь ось Δ пересекает направления $n-1$ сил, то момент каждой из этих сил будет равен нулю и потому момент последней силы будет также равняться нулю, вследствие чего ось Δ пересечет линию действия этой последней силы в точке, находящейся на конечном расстоянии или в бесконечно удаленной точке. Это свойство сохраняется и для *мнимой* оси, несмотря на то, что нельзя больше говорить о моментах относительно этой оси. В самом деле, пусть (x', y', z') и (x'', y'', z'') — две *вещественные или мнимые* точки, Δ — прямая, их соединяющая, и $X_k, Y_k, Z_k, L_k, M_k, N_k$ — проекции и моменты какой-нибудь силы F_k, приложенной в точке x_k, y_k, z_k. Условие того, что прямая Δ и сила F_k находятся в одной плоскости, на основании элементарных формул аналитической геометрии, заключается в том, что величина

$$\mathfrak{M}_k = (x''-x')L_k + (y''-y')M_k + (z''-z')N_k + \\ + (y'z''-z'y'')X_k + (z'x''-x'z'')Y_k + (x'y''-y'x'')Z_k$$

равна нулю. Если силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ находятся в равновесии, то сумма

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_n$$

равна, очевидно, нулю. Следовательно, если величины $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}$ равны нулю, т. е. если ось Δ пересекает $n-1$ первых сил, то и $\mathfrak{M}_n$ равно нулю и ось Δ пересекает также и последнюю силу на конечном расстоянии или в бесконечно удаленной точке. Если точка x', y', z' вещественная, то условие $\mathfrak{M}_k = 0$ означает, что момент F_k относительно этой точки перпендикулярен к прямой Δ.

1°. *Три прямых.* Допустим, что по трем прямым направлены три силы, находящиеся в равновесии. Любая ось, пересекающая две из этих прямых, должна пересекать также и третью. *Все три прямые обязательно находятся в одной плоскости: если две из этих прямых пересекаются в одной точке, то и третья прямая проходит через эту точку; в противном случае, все три прямые параллельны.* Эти условия необходимы. Если они удовлетворены, то по этим трем прямым можно, очевидно, всегда направить силы, находящиеся в равновесии.

2°. *Четыре прямых.* Допустим, что по четырем прямым D_1, D_2, D_3, D_4 направлены четыре силы, находящиеся в равновесии. Любая ось Δ, пересекающая три из этих прямых, должна пересекать и четвертую. Следовательно, если мы остановимся на общем случае, когда никакая пара прямых не лежит в одной плоскости, то линейчатая поверхность второго порядка (гиперболоид или параболоид), представляющая собою геометрическое место осей Δ, пересекающих одновременно три прямых, должна содержать и четвертую, как образующую той же системы, что и три первых. Мы получаем, таким образом, необходимое условие, указанное Мёбиусом: *необходимо, чтобы D_1, D_2, D_3, D_4 были четырьмя образующими (одной и той же системы) поверхности второго порядка.* Для того чтобы показать, что это условие является достаточным, мы воспользуемся следующим доказательством, данным Дарбу (статья в первом томе *Механики* Депейру).

Возьмем на гиперболоиде четыре образующих D_1, D_2, D_3, D_4 одной и той же системы. Через точку A (рис. 70) пространства проведем прямые A_1, A_2, A_3, A_4, параллельные этим образующим. Направим по прямой A_4 силу F'_4 и пусть F'_1, F'_2, F'_3 являются составляющими по прямым A_1, A_2, A_3 силы, равной и противоположной силе F'_4, и приложенной тоже в точке A. Геометрическая сумма четырех полученных таким образом сил F'_1, F'_2, F'_3, F'_4 будет, очевидно, равна нулю. Перенесем теперь эти силы параллельно самим себе на прямые D_1, D_2, D_3, D_4, после чего получим силы F_1, F_2, F_3, F_4. Эти четыре новые силы находятся в равновесии. Действительно, их главный вектор равен нулю, и их главный момент будет поэтому одинаковым относительно всех точек пространства. Этот главный момент либо равен нулю, либо перпендикулярен всем образующим Δ второй системы гиперболоида, так как каждая такая образующая Δ пересекает четыре прямые D_1, D_2, D_3, D_4 и поэтому сумма моментов относительно Δ, т. е. проекция главного момента на ось Δ, равна нулю.

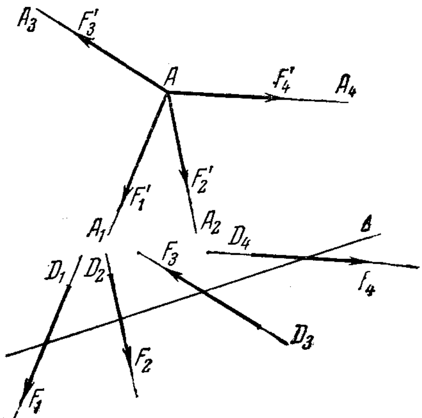


Рис. 70.

Отсюда следует, что главный момент равен нулю, так как он не может быть перпендикулярен всем образующим одной и той же системы гиперболоида, поскольку последние не параллельны одной и той же плоскости. Таким образом, имеет место равновесие.

Если четыре прямых D_1, D_2, D_3, D_4 являются образующими одной и той же системы гиперболического параболоида, то вспомогательные прямые A_1, A_2, A_3, A_4 *лежат в одной плоскости*. Тогда можно, поступая как и в предыдущем случае, поместить на *трех* первых прямых D_1, D_2, D_3 три силы f_1, f_2, f_3, главный вектор которых равен нулю, а главный момент имеет величину a, одинаковую для всех точек пространства, и направлен перпендикулярно ко всем образующим Δ второй системы, т. е. перпендикулярно второй направляющей плоскости. Точно так же можно поместить на прямых D_1, D_2 и D_4 три силы g_1, g_2, g_4, главный вектор которых равен нулю и главный момент которых b перпендикулярен второй направляющей плоскости, т. е. имеет то же направление, что и a Если теперь на четырех прямых поместить силы

$$F_1 = \lambda f_1 + \mu g_1, \quad F_2 = \lambda f_2 + \mu g_2, \quad F_3 = \lambda f_3, \quad F_4 = \mu g_4,$$

полученные сложением сил первой системы, умноженных на λ, и сил второй системы, умноженных на μ, то главный вектор будет равен нулю, а главный момент будет перпендикулярен второй направляющей плоскости и будет равен $\lambda a + \mu b$. Величинами λ и μ можно распорядиться таким образом, чтобы этот момент равнялся нулю, и тогда указанные четыре силы будут находиться в равновесии.

3°. *Пять прямых.* Если по пяти прямым D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 можно направить пять сил, находящихся в равновесии, то любая прямая, пересекающая четыре из них, будет обязательно пересекать и пятую. Существуют две вещественные или мнимые секущие Δ' и Δ'', пересекающие D_1, D_2, D_3, D_4. В самом деле, прямые Δ, пересекающие D_1, D_2, D_3, образуют поверхность второго порядка S, которая пересекает прямую D_4 в двух вещественных или мнимых точках p' и p''. Две образующие S системы Δ, проходящие через эти две точки, образуют две секущие, пересекающие четыре прямых D_1, D_2, D_3, D_4. Эти две секущие Δ' и Δ'' должны также пересечь и прямую D_5. *Необходимо, следовательно, чтобы существовали две прямые, пересекающие одновременно все пять заданных прямых*, или, на языке геометрии прямых, *заданные пять прямых должны принадлежать линейной конгруенции*. Рассуждениями, совпадающими с предыдущими (случай параболоида), можно показать, что это условие является достаточным.

4°. *Шесть прямых. Для того чтобы по шести прямым можно было направить шесть сил, находящихся в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы эти прямые принадлежали линейному комплексу.*

Применим аналитический метод, указанный Мёбиусом и Сомовым. На одной из шести прямых D_k отложим в определенном направлении отрезок d_k единичной длины и обозначим через α_k, β_k, γ_k проекции этого отрезка на три оси, а через λ_k, μ_k, ν_k — его моменты относительно этих осей. Эти шесть величин, связанных соотношением

$$\alpha_k\lambda_k + \beta_k\mu_k + \gamma_k\nu_k = 0,$$

пропорциональны величинам, названным Плюккером *координатами прямой* D_k. Направим теперь вдоль прямой D_k силу, алгебраическое значение которой, отсчитываемое в направлении отрезка d_k, равно F_k. Проекции и моменты этой силы равны

$$\alpha_kF_k, \quad \beta_kF_k, \quad \gamma_kF_k; \quad \lambda_kF_k, \quad \mu_kF_k, \quad \nu_kF_k.$$

Если все это проделать для каждой из шести рассматриваемых прямых ($k = 1, 2, \ldots, 6$) и написать, что шесть сил находятся в равновесии, то получится шесть уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sum \alpha_kF_k = 0, \quad \sum \beta_kF_k = 0, \quad \sum \gamma_kF_k = 0, \\ \sum \lambda_kF_k = 0, \quad \sum \mu_kF_k = 0, \quad \sum \nu_kF_k = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где суммирование распространяется на все шесть сил. Из этих шести линейных и однородных уравнений можно определить для шести неизвестных $F_1, F_2, \ldots, F_6$ значения, неравные одновременно нулю лишь в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов уравнений (1), равен нулю. Таким образом, получаем необходимое и достаточное условие

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \lambda_6 & \mu_6 & \nu_6 \end{vmatrix} = 0,$$

которое выражает, что шесть прямых принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

Такие же вычисления показывают, что если число заданных прямых превышает шесть, то по ним всегда можно направить силы, находящиеся в равновесии, так как шесть уравнений (1) будут содержать более шести неизвестных.

IV. Твердое тело, подчиненное связям

108. Метод. Общий метод, которым мы будем пользоваться, заключается в том, что мы будем рассматривать тела как свободные, вводя в качестве вспомогательных неизвестных реакции, вызываемые наложенными связями, которые называются *реакциями связей*.

109. Тело с неподвижной точкой. Рассмотрим твердое тело, имеющее одну неподвижную точку O, вокруг которой оно может свободно вращаться. Обозначим через $F_1, F_2, \ldots, F_n$ действующие на тело силы. Такое тело может быть названо *рычагом* в наиболее общем смысле этого слова. Мы занимаемся, следовательно, условиями равновесия рычага.

Тело оказывает на неподвижную точку давление R (рис. 71). По закону равенства действия и противодействия неподвижная точка действует на тело силой Q, равной и противоположной силе R, так что тело может рассматриваться как свободное под действием сил $F_1, F_2, \ldots, F_n, Q$. Если тело находится в равновесии, то первые n сил имеют равнодействующую, равную и прямо противоположную силе Q. Следовательно, условия равновесия заключаются в том, что заданные силы должны иметь равнодействующую, проходящую через неподвижную точку. Это условие является достаточным, так как если заменить все приложенные к телу силы указанной равнодействующей, то она уравновесится сопротивлением неподвижной точки, со стороны которой будет действовать равная и прямо противоположная равнодействующей сила реакции.

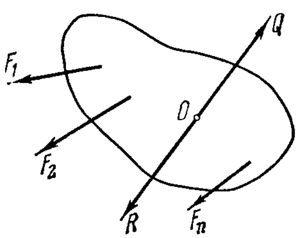


Рис. 71.

Мы можем прийти к этому же результату и аналитически. В точке O выберем три прямоугольные оси координат; обозначим через X, Y, Z, L, M, N проекции главного вектора и главного момента относительно начала O системы сил F, приложенных к телу, а через X', Y', Z' проекции реакции Q неподвижной точки. Условия равновесия будут:

$$X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad Z + Z' = 0, \tag{1}$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \tag{2}$$

Уравнения (2), не содержащие реакции, являются необходимыми условиями равновесия. Они выражают, что приложенные к телу силы F приводятся к одной силе, проходящей через начало O. Уравнения (1) показывают тогда, что реакция (X', Y', Z') равна и противоположна этой равнодействующей (X, Y, Z), которая является не чем иным, как *давлением* на неподвижную точку.

Рассмотрим частный случай рычага, находящегося под действием только двух сил F_1 и F_2. Для того, чтобы было равновесие, необходимо и достаточно, чтобы эти силы уравновешивались реакцией Q точки O. Для того чтобы три силы F_1, F_2, Q находились в равновесии, необходимо, чтобы силы F_1 и F_2 находились в одной плоскости с точкой O и чтобы сумма моментов сил F_1 и F_2 относительно точки O равнялась нулю. Это — хорошо известное элементарное условие равновесия рычага.

110. Тело, имеющее неподвижную ось. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — силы, действующие на твердое тело. Они вызывают в различных точках оси давления $P', P'', P''', \ldots$, а ось, в свою очередь, действует на тело реакциями $Q', Q'', Q''', \ldots$ Тело может рассматриваться как свободное, но находящееся под действием сил $F_1, F_2, \ldots, F_n, Q', Q'', \ldots$ Для того чтобы было равновесие, необходимо, в частности, чтобы сумма моментов всех этих сил относительно неподвижной оси, которую мы примем за ось z, равнялась нулю. А так как моменты реакций $Q', Q'', \ldots$ равны нулю, то необходимо, чтобы было

$$N=0.$$

Это — необходимое условие равновесия. Оно и достаточно. В самом деле, если оно выполняется, то система сил приводится к одной силе, равной главному вектору OR и уравновешивающейся сопротивлением оси, и к паре с вектором момента OG, перпендикулярным к Oz, так как N равно нулю. Эта пара может быть повернута в своей плоскости таким образом, чтобы ее плечо совпало с осью. Тогда силы φ, φ', составляющие пару, будучи приложены к точкам оси, уравновешиваются ее сопротивлением, и тело действительно находится в равновесии.

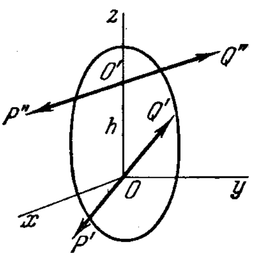


Рис. 72.

Задача, которою мы занимаемся, представляет собою условия равновесия ворота.

Найдем теперь реакции оси. Эти реакции являются силами, приложенными в различных точках тела, соприкасающихся с осью. Они могут быть приведены к двум силам Q' и Q'', приложенным к двум точкам O и O' оси. Такой результат может быть получен физически, если закрепить две точки O и O' оси, сделав ее таким образом неподвижной. Эти точки действуют на тело, развивая реакции Q и Q'. Примем точку O за начало. Обозначим через X, Y, Z, L, M, N те же элементы, что и раньше, а через $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ проекции реакций Q' и Q''. Пусть h — расстояние OO'. Мы получим условия равновесия (рис. 72):

$$X+X'+X''=0, \quad Y+Y'+Y''=0, \quad Z+Z'+Z''=0,$$

$$L-hY''=0, \quad M+hX''=0, \quad N=0.$$

Последнее из этих уравнений не зависит от реакций: это — необходимое и достаточное условие равновесия тела. Два предшествующих уравнения определяют X'' и Y''. Подставляя эти значения в два первых уравнения, найдем X' и Y'. Но Z' и Z'' связаны только одним условием

$$Z+Z'+Z''=0,$$

которое не позволяет определить каждую из этих реакций, если предполагать, что тело абсолютно твердое.

С физической точки зрения реакции Q' и Q'' являются, однако, вполне определенными, так как тела в природе не обладают свойствами, которые мы приписываем абсолютно твердым телам в теоретической механике: они деформируются, и эта деформация вызывает действие упругих сил. Если принять во внимание эти силы, то можно определить и каждую из последних двух реакций.

111. Тело вращается вокруг оси и скользит вдоль нее. В этом случае реакции Q', Q'', Q''' оси на тело нормальны к оси. Приняв последнюю за ось Oz, получим два условия равновесия

$$N = 0, \quad Z = 0.$$

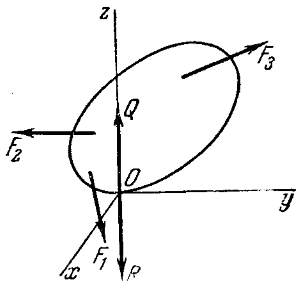


Рис. 73.

112. Тело, опирающееся на неподвижную плоскость.

1°. *Случай одной точки опоры.* Рассмотрим сначала случай, когда тело опирается на неподвижную плоскость только одной точкой. Реакция плоскости на тело будет нормальна к плоскости, если предположить, что тело может скользить без трения. Тело может рассматриваться как свободное, но находящееся под действием сил F_1, F_2, ..., F_n, непосредственно к нему приложенных, и реакции Q плоскости. Для того чтобы было равновесие, необходимо, чтобы силы F_i имели равнодействующую, равную и прямо противоположную реакции Q (рис. 73), т. е. чтобы заданные силы имели равнодействующую R, проходящую через точку опоры, перпендикулярную к плоскости и направленную таким образом, чтобы она прижимала тело к этой плоскости. Это условие, очевидно, и достаточно, так как если оно выполняется, то равнодействующая не вызовет скольжения тела и уравновесится равной и прямо противоположной реакцией плоскости Q. Легко получить этот результат также аналитически.

2°. *Случай нескольких точек опоры, лежащих на одной прямой.* Допустим, что тело опирается на неподвижную плоскость в точках A_1, A_2, ..., A_p прямой Ox. Во всех этих точках плоскость развивает нормальные реакции Q_1, Q_2, ..., Q_p, направленные в одну и ту же сторону (рис. 74). Эти силы имеют равнодействующую Q, нормальную к плоскости, направленную в ту же сторону и приложенную в некоторой точке, лежащей между крайними точками A_1 и A_p.

Для того чтобы имело место равновесие, необходимо, чтобы заданные силы уравновешивались реакциями плоскости, т. е. чтобы они имели одну равнодействующую, нормальную к плоскости, направленную таким образом, чтобы она прижимала тело к плоскости и чтобы ее продолжение пересекало прямую Ox в точке, расположенной между A_1 и A_p. Эти необходимые условия также и достаточны, так как названная равнодействующая может быть тогда разложена на две другие силы, нормальные к плоскости и приложенные в двух точках опоры. Полученные силы уничтожатся сопротивлением плоскости.

Чтобы выразить эти условия аналитически, примем прямую Ox за ось x, ось z направим нормально к плоскости в ту сторону, по которую находится тело. Тогда все реакции $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ будут положительными. Уравнения равновесия будут

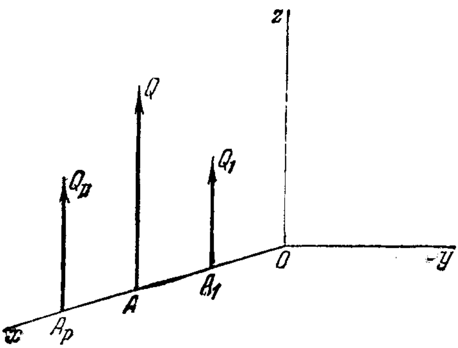


Рис: 74.

$$X=0, \quad Y=0,$$

$$Z+Q_1+Q_2+\ldots+Q_p=0,$$

$$L=0, \quad M-a_1Q_1-a_2Q_2-\ldots$$
$$\ldots-a_pQ_p=0, \quad N=0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — абсциссы точек опоры.

Четыре из этих уравнений, не содержащих реакции, выражают необходимые условия равновесия. Они показывают, что заданные силы должны иметь равнодействующую, нормальную к плоскости xy и пересекающую ось x. Третье уравнение показывает, что проекция Z равнодействующей должна быть отрицательная, т. е. что равнодействующая должна быть направлена так, чтобы она прижимала тело к плоскости. Пусть x — абсцисса точки пересечения равнодействующей с осью Ox. Момент равнодействующей относительно оси Oy равен $M=-xZ$. Следовательно, должно быть

$$xZ+a_1Q_1+a_2Q_2+\ldots+a_pQ_p=0,$$

откуда, заменяя Z его значением, получаем

$$x=\frac{a_1Q_1+a_2Q_2+\ldots+a_pQ_p}{Q_1+Q_2+\ldots+Q_p},$$

а эта величина, как известно, заключена между двумя конечными значениями a_1 и a_p, так как величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ положительны. Таким образом, продолжение равнодействующей пересекает ось Ox между крайними точками опоры.

Реакции плоскости должны теперь удовлетворять двум уравнениям

$$Z+Q_1+Q_2+\ldots+Q_p=0,$$
$$M-a_1Q_1-a_2Q_2-\ldots-a_pQ_p=0.$$

Если имеются только две точки опоры, то эти уравнения определяют обе реакции. Если точек опоры больше двух, то реакции не могут быть определены из этих соотношений. Они могут быть определены, если считать тело упругим.

3°. *Общий случай.* Предположим, что твердое тело опирается на плоскость в нескольких точках $A_1, A_2, \ldots, A_p$, не лежащих на одной прямой. Со стороны плоскости возникают нормальные реакции $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, имеющие одну равнодействующую Q, так как они все направлены в одну сторону. Как мы видели в теории сложения параллельных сил, точка пересечения этой равнодействующей с плоскостью лежит внутри любого выпуклого многоугольника, охватывающего все точки опоры. В частности, она находится внутри *опорного многоугольника*, который является выпуклым и вершинами которого служат точки опоры. Этот многоугольник охватывает все остальные точки опоры. Для равновесия необходимо, чтобы заданные силы уравновешивали равнодействующую реакцию Q. Следовательно, заданные силы должны иметь равнодействующую, нормальную к плоскости и направленную так, чтобы она прижимала тело к плоскости и пересекала эту плоскость внутри опорного многоугольника. Этих условий достаточно, так как при сделанных предположениях можно всегда разложить равнодействующую на три силы, нормальные к плоскости и приложенные к точкам опоры, и эти силы уничтожатся сопротивлением плоскости.

Возьмем ту же систему осей. Твердое тело можно рассматривать как свободное, но находящееся под действием сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$. Условия равновесия будут

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad N = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} Z + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_p &= 0, \\ L + b_1Q_1 + b_2Q_2 + \ldots + b_pQ_p &= 0, \\ M - a_1Q_1 - a_2Q_2 - \ldots - a_pQ_p &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ — координаты точек опоры.

Уравнения (1), не содержащие реакций, выражают необходимое условие равновесия, заключающееся в том, что заданные силы имеют равнодействующую, нормальную к плоскости. В самом деле, величина $LX + MY + NZ$ равна нулю и равенство $Z = 0$ возможно только при условии, что все реакции равны нулю, так как последние либо равны нулю, либо положительны. В этом частном случае, когда все реакции равны нулю, Z, L и M будут равны нулю, и тогда будут находиться в равновесии непосредственно приложенные силы. Отбрасывая этот очевидный случай равновесия, мы видим, что силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ должны иметь равнодействующую, нормальную к плоскости. Необходимо, кроме того, чтобы проекция Z была отрицательная, как это видно из первого уравнения (2), и чтобы равнодействующая пересекала плоскость внутри опорного многоугольника, что вытекает из двух последних уравнений (2). Если имеются только три точки опоры, то уравнения (2) позволяют определить три реакции. Если их больше, то необходимо принять в расчет упругость тела.

4°. *Приложения.* Чтобы показать, как можно составить вспомогательные условия равновесия, рассмотрим прямоугольный стол, опирающийся четырьмя ножками на горизонтальную плоскость.

Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — стол, на который мы положим произвольные тела. Пусть P — равнодействующая весов тел и стола и A — ее точка пересечения со столом. Обозначим через B_1, B_2, B_3, B_4 (рис. 75) точки опоры. Примем неподвижную горизонтальную плоскость за плоскость xy, центр опорного прямоугольника за начало координат и прямые, параллельные его сторонам, за оси x и y. Координаты точек опоры B_1, B_2, B_3, B_4 будут соответственно $(a,\ b)$, $(-a, b)$, $(-a,\ -b)$, $(a,\ -b)$. Пусть x, y — координаты точки A. Обозначим через Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 реакции плоскости. Напишем сначала общие уравнения равновесия, которые здесь имеют вид:

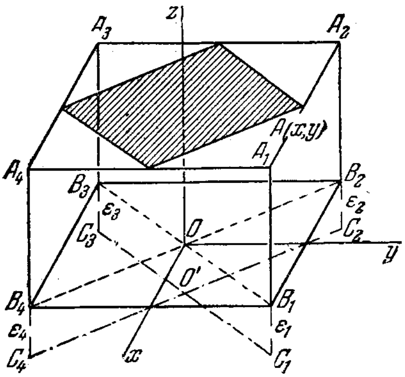


Рис. 75.

$$\left.\begin{aligned} Q_1+Q_2+Q_3+Q_4-P&=0,\\ bQ_1+bQ_2-bQ_3-bQ_4-Py&=0,\\ -aQ_1+aQ_2+aQ_3-aQ_4+Px&=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Чтобы получить еще одно уравнение, мы допустим, что грунт не является абсолютно твердым и что он оседает в каждой точке на очень малую величину, пропорциональную давлению на грунт в этой точке. Обозначим через ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 величины, на которые ножки углубляются в грунт. Тогда, по предположению,

$$\frac{\varepsilon_1}{Q_1}=\frac{\varepsilon_2}{Q_2}=\frac{\varepsilon_3}{Q_3}=\frac{\varepsilon_4}{Q_4}.$$

Точка O, рассматриваемая последовательно как середина отрезков B_1B_3 и B_2B_4, опустится на величину

$$OO'=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3}{2},\quad OO'=\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_4}{2}.$$

Следовательно, должно быть

$$\varepsilon_1+\varepsilon_3=\varepsilon_2+\varepsilon_4,$$

откуда

$$Q_1-Q_2+Q_3-Q_4=0. \tag{2}$$

Если имеются p точек опоры, то, написав, что после деформации грунта они остаются в одной плоскости, мы получим $p-3$ условий, которые совместно с тремя общими уравнениями позволят определить все реакции.

В нашем частном случае из уравнений (1) и (2) после их разрешения относительно Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 получаются для этих величин значения

$$\frac{P}{4}\left(1\pm\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right),$$

где величине Q_1 соответствуют знаки $(++)$, Q_2—знаки $(-+)$, Q_3—знаки $(--)$ и Q_4 — знаки $(+-)$. Необходимо, чтобы все эти значения были положительными, а для этого точка A должна находиться внутри ромба с вершинами в серединах ребер стола. Если точка A находится вне этого ромба, например со стороны A_1 (рис. 75), то реакция Q_3 будет отрицательной, а остальные три будут положительными. Так как это невозможно, то следует предположить, что ножка B_3 не оказывает больше давления на грунт и надо вычислять реакции Q_1, Q_2, Q_4 так, как если бы стол был поставлен только на три ножки, для чего нужно в уравнениях (1) положить $Q_3 = 0$.

113. Несколько твердых тел. Для нахождения условий равновесия системы, состоящей из нескольких твердых тел, соединенных взаимными связями, можно применить следующий метод: нужно выразить, что каждое из тел системы находится в равновесии под действием сил, непосредственно к нему приложенных, и под действием на него реакций остальных тел. Эти последние силы подчинены закону равенства действия и противодействия. Мы не будем заниматься здесь приложением этого метода. Мы увидим дальше, что принцип возможных скоростей дает значительно более быстрый метод для решения подобных вопросов.

V. Некоторые формулы для вычисления центра тяжести

114. Линии. На линии AB возьмем две точки P и P' (рис. 76) и обозначим через m массу дуги PP'. Отношение $\dfrac{m}{\smile{PP'}}$ есть средняя плотность дуги PP'. Если это отношение не зависит от положения точек P и P', то говорят, что линия AB *однородна*. Если оно изменяется, то плотностью линии в точке P называют предел ρ средней плотности дуги PP', когда точка P' стремится к P. Плотность ρ, изменяясь с положением точки P, является функцией параметра, определяющего положение точки P на кривой. Пусть ds — бесконечно малый элемент кривой, содержащий точку P с координатами x, y, z. Масса dm этого элемента равна $\rho\, ds$ и, обозначая через M всю массу кривой, а через ξ, η, ζ координаты ее центра тяжести, имеем

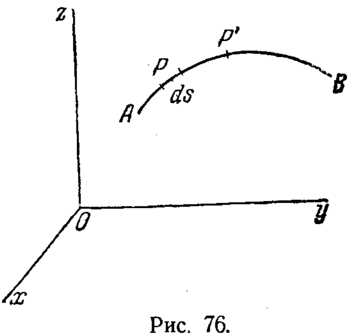


Рис. 76.

$$M = \int \rho\, ds, \quad M\xi = \int x\rho\, ds,$$

$$M\eta = \int y\rho\, ds, \quad M\zeta = \int z\rho\, ds.$$

Если линия однородна, то средняя плотность ρ будет постоянной и масса M будет тогда ρl, где l — длина кривой. Для ξ, η, ζ получим:

$$l\xi = \int x\, ds, \quad l\eta = \int y\, ds, \quad l\zeta = \int z\, ds.$$

115. Теорема Гюльдена. *Площадь поверхности, образованной вращением плоской кривой вокруг оси, расположенной в ее плоскости и* *ее не пересекающей, равна длине этой кривой, умноженной на длину окружности, описываемой ее центром тяжести, в предположении, что кривая однородна.*

В самом деле, отнесем плоскую кривую к оси вращения, принятой за ось Ox, и перпендикулярно к последней направим ось Oy. Элемент ds с ординатой y образует при вращении элемент поверхности dA, который можно отождествить с боковой поверхностью усеченного конуса, так что

$$dA = 2\pi y\, ds.$$

Следовательно,

$$A = 2\pi \int y\, ds = 2\pi\eta\, l,$$

что и доказывает теорему.

Если ось пересекает кривую, то найденное выражение для A представляет не полную поверхность, а разность между поверхностями, образованными вращением частей кривой, расположенных по одну и по другую сторону оси, так как в интеграле A элемент $y\,ds$ будет положительным или отрицательным, в зависимости от того, находится ли элемент ds выше или ниже оси.

116. Поверхности. Пусть m — масса элемента поверхности с площадью σ. Отношение m/σ есть средняя плотность элемента σ. Плотность ρ поверхности в точке P есть предел отношения m/σ, когда σ есть *бесконечно малый элемент*, окружающий точку P. В общем случае ρ будет функцией двух параметров, определяющих положение точки P на поверхности. Когда плотность ρ постоянна, поверхность называется *однородной.*

Пусть $d\sigma$ — бесконечно малый элемент поверхности, окружающий точку P с координатами x, y, z. Масса этого элемента равна $dm = \rho\, d\sigma$ и, обозначив через M всю массу, а через ξ, η, ζ координаты центра тяжести, получим

$$M = \int\int \rho\, d\sigma, \quad M\xi = \int\int x\rho\, d\sigma, \quad M\eta = \int\int y\rho\, d\sigma, \quad M\zeta = \int\int z\rho\, d\sigma.$$

У однородной поверхности плотность ρ — постоянна, масса M равна ρS, где S — площадь поверхности, и мы получаем

$$S\xi = \int\int x\, d\sigma, \quad S\eta = \int\int y\, d\sigma, \quad S\zeta = \int\int z\, d\sigma.$$

117. Плоские фигуры. Примем плоскость фигуры за плоскость xy. Координата ζ будет тогда равна нулю. Элемент $d\sigma$ будет иметь разные выражения в зависимости от принятой системы координат. Например, в полярных координатах r и θ элемент $d\sigma$ будет равен $r\,dr\,d\theta$, в декартовых косоугольных координатах с углом α между осями он равен $\sin\alpha\, dx\, dy$, ...

В частности, для однородной фигуры, отнесенной к прямоугольным декартовым координатам, формулы принимают вид

$$S = \int\int dx\, dy, \quad S\zeta = \int\int x\, dx\, dy, \quad S\eta = \int\int y\, dx\, dy, \quad S\zeta = \int\int z\, dx\, dy,$$

где одно интегрирование всегда может быть выполнено.

118. Теорема Гюльдена. *Объем, образованный плоской фигурой, вращающейся вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры, принимаемой за однородную.*

Какой-нибудь элемент $dx\,dy$ фигуры S при вращении вокруг оси Ox описывает элемент объема, равный разности объемов цилиндров, описанных прямоугольниками $ABCD$ и $A'B'CD$ (рис. 77), т. е. с точностью до величин третьего порядка равный

$$2\pi y\, dx\, dy.$$

Обозначая объем через V, получим

$$V = 2\pi \iint y\,dx\,dy = 2\pi\eta S,$$

что и доказывает теорему.

Заметим, что если ось пересекает фигуру, то полученная формула будет представлять разность объемов, описанных частями фигуры, расположенными по одну и по другую сторону оси.

Как на обобщение этой теоремы, укажем на исследования Кёнигса об объемах, описываемых кривыми (Journal de Jordan, t. V, 1889). См. также заметку Адамара в Bulletin de la Société mathématique de France, séance du 7 dec. 1898.

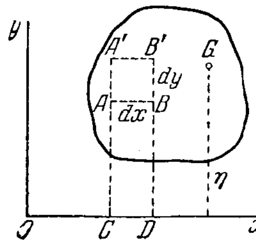


Рис. 77.

119. Объемы. Возьмем в твердом теле объем v, заключающий массу m. Отношение m/v называется *средней плотностью* выделенной части тела. Когда объем v стремится к нулю, стягиваясь в точку P, то отношение m/v стремится к пределу ρ, который называется *плотностью* в точке P. Эта величина ρ является функцией координат точки P, и, когда она постоянна, тело называется *однородным.*

Масса dm элемента объема dv, окружающего точку P с координатами x, y, z, равна $\rho\,dv$. Следовательно, обозначая через M *всю массу*, получим формулы

$$M = \iiint \rho\,dv,$$

$$M\xi = \iiint x\rho\,dv, \quad M\eta = \iiint y\rho\,dv, \quad M\zeta = \iiint z\rho\,dv.$$

Если тело однородно и имеет объем V, то $M = \rho V$ и

$$V\xi = \iiint x\,dv, \quad V\eta = \iiint y\,dv, \quad V\zeta = \iiint z\,dv.$$

Выражение dv зависит от избранной системы координат. В косоугольной декартовой системе необходимо принять dv равным $k\,dx\,dy\,dz$, где через k обозначен объем параллелепипеда с ребрами, равными единице и параллельными осям координат. В сферических координатах r, θ, φ для dv получается выражение $r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ и т. д.

В случае однородного тела можно всегда начинать с выполнения одного интегрирования и привести тройные интегралы к двойным.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Система сил, приложенных к твердому телу, отнесена к косоугольным осям. Показать, что уравнения равновесия имеют тот же вид, что и в прямоугольных осях:

$$\sum X_k = 0, \quad \sum Y_k = 0, \quad \sum Z_k = 0, \quad \sum (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0, \ \ldots$$

2. Рассматривается плоский замкнутый многоугольник; ко всем его сторонам, кроме одной, прилагаются силы, пропорциональные этим сторонам, им перпендикулярные, лежащие в плоскости этого многоугольника и направленные по отношению к нему наружу. Показать, что эти силы имеют равнодействующую, перпендикулярную к последней стороне и пропорциональную ей.

3. Доказать, что если несколько сил, приложенных к твердому телу, находятся в равновесии или приводятся к паре, то центр тяжести равных масс, помещенных в концах этих сил, совпадает с центром тяжести равных масс, помещенных в точках их приложения (Крофтон).

4. Вдоль сторон замкнутого пространственного многоугольника P направляют в одну и ту же сторону обхода силы, равные сторонам. Показать: 1) что эти силы приводятся к паре; 2) что если построить в плоскости этой пары многоугольник Π с площадью, равной половине момента пары, то проекция многоугольника P на произвольную плоскость имеет такую же площадь, как и проекция многоугольника Π на ту же плоскость (Гишар).

5. Дан выпуклый плоский четырехугольник $ABCD$. Направить по сторонам этого четырехугольника четыре силы, находящиеся в равновесии. (См. Мёбиус, Статика, § 29.)

6. *Центр системы сил, лежащих в плоскости и имеющих равнодействующую.* Дана плоская фигура $A_1A_2\ldots A_n$ неизменяемой формы, к различным точкам которой приложены силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$, расположенные в плоскости фигуры и имеющие равнодействующую R. Будем перемещать фигуру в ее плоскости, предполагая, что силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ остаются приложенными в тех же точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ движущейся фигуры и сохраняют неизменными свои величины и направления. Тогда равнодействующая R будет также сохранять неизменными свою величину и направление и будет проходить через некоторую точку C, неизменно связанную с движущейся фигурой и называемую по Мёбиусу *центром сил* $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

7. *Случай пары. Главные направления.* Допустим теперь, что силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ образуют пару. Тогда перемещая фигуру в своей плоскости и сохраняя постоянными величины и направления сил, можно всегда привести фигуру в положение равновесия.

Существуют два взаимно перпендикулярных направления OP и OQ, *неизменно связанных с движущейся фигурой* и обладающих следующим свойством: когда фигура приведена в то ее положение, где имеет место равновесие, и каждая из сил F_k разложена на две составляющие P_k и Q_k, параллельные соответственно OP и OQ, то каждая из систем параллельных сил P_k и Q_k находится в равновесии. Эти направления называются *главными* (Мёбиус).

8. На дощечке укреплены две магнитные стрелки, линии полюсов которых имеют длину a и b и пересекаются под прямым углом в своих серединах. Дощечка плавает в неподвижной жидкости. Найти: 1) положение равновесия; 2) главные направления (упр. 7). Известно, что действие Земли на правильно намагниченную стрелку, т. е. такую, которая имеет только два полюса и только одно нейтральное направление, приводится к паре, силы которой постоянны по величине и направлению и приложены в полюсах. Обозначим в рассматриваемой задаче через P общее значение горизонтальных проекций сил пары, действующих на стрелку a, а через Q ту же величину для стрелки b. Силы P и Q направлены по магнитному меридиану места.

9. *Центральная плоскость в твердом теле, находящемся под действием сил, главный вектор которых не равен нулю.* Пусть на твердое тело действуют силы, *главный вектор которых не равен нулю.* Допустим, что когда тело перемещается, каждая из сил сохраняет постоянными свою величину и направление и остается приложенной в одной и той же точке тела. Это, например, имеет место для тяжелого тела, образованного соединением нескольких намагниченных тел. В этом случае действие Земли на каждый магнит создает пару, силы которой постоянны по величине и направлению и приложены в полюсах магнита, а полный вес системы также является силой, постоянной по величине и направлению, приложенной в определенной точке тела. Эта система сил имеет главный вектор, равный весу.

Очевидно, что поступательное перемещение тела ничего не изменяет в его состоянии и поэтому достаточно исследовать эффект вращений.

Рассмотрим прямую Op и разложим каждую силу F_k на составляющую p_k, параллельную Op, и на силу, к ней перпендикулярную. Если произвольным образом менять направление Op, то геометрическое место центров ω параллельных сил p_k будет, в общем случае, плоскостью, называемой, по Мёбиусу, *центральной плоскостью*. Она не меняет свое положение в теле, какова бы ни была его ориентация. В некоторых частных случаях геометрическое место может быть *прямой* линией (центральная линия), а также и *точкой* (центр сил).

10. Теорема Миндинга. Будем перемещать произвольным образом тело, предполагая все время, что силы постоянны по величине и направлению. Существует бесчисленное множество положений, при которых силы F_k приводятся к одной равнодействующей. Совокупность этих равнодействующих образует в теле множество лучей, которые пересекают два фиксированных конических сечения (фокальные конические сечения), находящихся в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. (См. Crelle, т. 14, 15.)

11. *Оси равновесия.* Рассмотрим свободное твердое тело, удовлетворяющее указанным выше условиям: когда тело меняет свое положение, действующие на него силы сохраняют величину и направление и остаются приложенными к одним и тем же точкам тела. Как мы уже говорили, *поступательное перемещение ничего не меняет в состоянии тела и поэтому достаточно исследовать влияние вращений.* Допустим, что тело в рассматриваемом положении находится в равновесии, и положим, как и Мёбиус (Статика, гл. VIII), что

$$\sum yZ = \sum zY = F, \quad \sum zX = \sum xZ = G, \quad \sum xY = \sum yX = H,$$
$$\sum xX = l, \quad \sum yY = m, \quad \sum zZ = n,$$

где суммы распространены на все силы. Мёбиус назвал *осью равновесия* прямую, при повороте вокруг которой на произвольный угол тело остается в равновесии. Для того чтобы ось Oz была осью равновесия, необходимо и достаточно, чтобы, кроме шести уравнений равновесия, выполнялись следующие условия:

$$F = 0, \quad G = 0, \quad l + m = 0.$$

12. *Астатическое равновесие.* Говорят, что равновесие является *астатическим*, когда при тех же условиях в отношении сил, что и в предыдущем упражнении, это равновесие существует, каково бы ни было заданное положение тела. Для этого необходимо, чтобы каждая из трех осей координат Ox, Oy, Oz была осью равновесия, т. е. чтобы, кроме шести условий равновесия, выполнялись еще следующие шесть условий:

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0, \quad l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0.$$

Эти условия, необходимые для астатического равновесия, являются и достаточными.

13. Если на тело действуют две постоянные по величине и направлению силы, приложенные в двух фиксированных точках, то всегда существует ось, параллельная заданному направлению, причем такая, что если ее закрепить, то тело будет оставаться в безразличном равновесии во всех положениях, которое оно может принимать (Мёбиус).

14. Если тело находится в астатическом равновесии и действующие силы параллельны данному направлению, то система параллельных сил находится в равновесии. Центр тех из этих параллельных сил, которые направлены в одну сторону, совпадает с центром параллельных сил, направленных в противоположную сторону.

15. Рассмотрим твердое тело, находящееся под действием сил, приложенных в фиксированных точках этого тела и постоянных по величине и направлению. Каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы можно было привести тело в состояние астатического равновесия присоединением только одной силы, приложенной в фиксированной точке P и постоянной по величине и направлению?

Ответ:

$$\frac{\sum xX}{\sum X} = \frac{\sum xY}{\sum Y} = \frac{\sum xZ}{\sum Z}$$

и две аналогичные пропорции, в которых x должен быть заменен через y или z. Тогда точка P существует и называется *центром сил* системы. В этом случае координаты точки ω, подлежащей определению в упражнении 9, не зависят от положения тела. Эта точка как раз и будет точкой P.

16. Найти также условия, чтобы существовала *центральная линия*, т. е. чтобы точка ω описывала прямую. В этом случае всегда можно присоединить к системе две силы, чтобы осуществить астатическое равновесие.

17. Если точка ω описывает плоскость (*центральную плоскость*), то можно соответствующим образом присоединить к системе три силы, чтобы осуществить астатическое равновесие.

18. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, находится под действием сил, приложенных в неизменно связанных с телом точках и постоянных по величине и направлению. Каким условиям должны удовлетворять эти силы, чтобы тело оставалось в равновесии во всех положениях, которые оно может принимать вокруг неподвижной точки (астатическое равновесие рычага)?

19. Тот же вопрос в предположении, что тело может вращаться вокруг оси.

20. Тот же вопрос в предположении, что тело может не только вращаться вокруг оси, но и скользить вдоль нее.

21. Твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной точки или оси, находится под действием сил, приложенных в неизменно связанных с телом точках и постоянных по величине и направлению. Найти положения равновесия тела. (См. упражнение 23; см. также Муаньо, Leçons de Mécanique analytique d'après Cauchy, стр. 234.)

22. Дана система сил, приложенных к твердому телу, и произвольный триэдр OP, OQ, OS. Каждая из сил F_k разложена на три составляющие p_k, q_k, s_k, параллельные ребрам триэдра. Обозначим через A центр параллельных сил p_k и через $p = \sum p_k$ их равнодействующую, а через B и q, C и s —то же для сил q_k и s_k. Показать, что произведение площади треугольника ABC на объем параллелепипеда, имеющего ребра p, q, s, постоянно, какова бы ни была ориентация триэдра $OPQS$ (Миндинг).

23. *Упражнения к теореме Миндинга.* 1°. Взята произвольная прямая Δ, опирающаяся на два фокальных конических сечения, найденных в упражнении 10. Показать, что существует положение тела (т. е. система значений девяти направляющих косинусов), при котором силы приводятся к одной равнодействующей, направленной по Δ. (Нужно заметить, что так как подвижные оси могут совпадать с неподвижными, то определитель девяти косинусов равен $+1$; целесообразно выразить косинусы через углы Эйлера.)

2°. Через произвольную точку P тела можно провести четыре прямых, опирающихся на два фокальных конических сечения. Существуют, следовательно, четыре положения тела, для которых силы имеют равнодействующую, проходящую через точку тела.

3°. Если силы, действующие на тело, остаются постоянными по величине и направлению и приложены в фиксированных точках тела и если, кроме того, эти силы приводятся к паре, то существует четыре положения равновесия тела.

(В самом деле, пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — силы и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — точки их приложения. Главный вектор R сил $F_2, F_3, \ldots, F_n$ равен и противоположно направлен силе F_1. Согласно предыдущему существует четыре положения тела, при которых силы $F_2, F_3, \ldots, F_n$ имеют одну равнодействующую R, проходящую через точку A_1 тела. Эти четыре положения будут, очевидно, положениями равновесия, поскольку для них R и F_1 равны и *прямо противоположны*.)

Предыдущие теоремы имеют место в наиболее общих случаях. Для частных положений сил число 4 может быть увеличено и стать даже бесконечным.

24. Твердое тело находится в рассматриваемом положении в равновесии. Спрашивается, будет ли при предположениях упражнения 11 существовать для него ось равновесия.

Решение. Достаточно исследовать, существует ли ось равновесия Oz', проходящая через O. Для этого отнесем систему к новым осям Ox', Oy', Oz', образующим со старыми углы, косинусы которых равны $\alpha, \alpha', \alpha''$, β, β', β'', $\gamma, \gamma', \gamma''$, и найдем соответствующие этим новым осям величины F', G', H', l', m', n'. Если для сокращения положить

$$m+n=f, \quad n+l=g, \quad l+m=h$$

и обозначить через f', g', h' аналогичные величины относительно новых осей, то придем к следующему результату. Рассматривая квадратичную форму

$$\psi(u, u', u'')=fu^2+gu'^2+hu''^2-2Fu'u''-2Gu''u-2Huu',$$

можно написать:

$$f'=\psi(\alpha, \alpha', \alpha''), \quad g'=\psi(\beta, \beta', \beta''), \quad h'=\psi(\gamma, \gamma', \gamma''),$$

$$F'=-\frac{1}{2}\left(\gamma\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\gamma'\frac{\partial\psi}{\partial\beta'}+\gamma''\frac{\partial\psi}{\partial\beta''}\right), \quad G'=-\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}+\ldots\right),$$

$$H'=-\frac{1}{2}\left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+\ldots\right).$$

Для того чтобы ось Oz', направление которой определяется косинусами γ, γ', γ'', была осью равновесия, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma, \gamma', \gamma''$ удовлетворяли уравнениям

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\gamma'}=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\gamma''}=0,$$

которые выражают, что дискриминант формы ψ равен нулю.

25. Найти положения равновесия однородного тяжелого стержня AB, один из концов которого прикреплен при помощи нерастяжимой и не имеющей массы нити AO к неподвижной точке O, а другой конец скользит без трения по горизонтальной плоскости.

26. Даны материальные точки с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Пусть M — сумма их масс, G — их центр тяжести и A — произвольная точка. Доказать два соотношения:

$$\sum m_k\cdot\overline{m_kA}^2=\sum m_k\cdot\overline{m_kG}^2+M\cdot\overline{AG}^2,$$

$$M\sum m_k\cdot\overline{m_kA}^2=M^2\cdot\overline{AG}^2+\sum m_im_k\cdot\overline{m_im_k}^2,$$

где m_im_k обозначает расстояние между точками m_i и m_k (Лагранж).

27. *Центры тяжести однородных линий. Дуга круга.* Доказать, что расстояние от центра круга до центра тяжести дуги круга есть четвертая пропорциональная между дугой, радиусом и хордой.

28. *Дуга цепной линии* $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Доказать, что центр тяжести дуги цепной линии имеет ту же абсциссу, что и точка пересечения касательных к ней в концах A и B. Если точка A есть вершина кривой, то ордината центра тяжести равна половине ординаты точки пересечения нормали, проведенной в точке B, с осью Oy.

29. *Однородные плоские фигуры.* Доказать, что если однородная плоская фигура имеет прямолинейный диаметр, сопряженный с некоторым направлением хорд, то центр тяжести лежит на этом диаметре.

30. *Центр тяжести площади треугольника* совпадает с центром тяжести трех равных масс, помещенных в трех вершинах; *центр тяжести площади трапеции* лежит на прямой, соединяющей середины оснований b и B и делит эту прямую в отношении $2B + b$ к $2b + B$.

31. *Центр тяжести части плоскости, ограниченной дугой цепной линии AB, осью x (основанием цепной линии) и двумя ординатами точек A и B.* (Абсцисса центра тяжести равна абсциссе центра тяжести дуги AB; его ордината равна половине ординаты центра тяжести дуги AB.)

32. *Неоднородные фигуры. Центр удара.* Дана плоская фигура S. Рассмотрим прямую AA' в ее плоскости и допустим, что плотность ρ в какой-нибудь точке пропорциональна расстоянию δ от этой точки до прямой AA'. Центр тяжести G полученной таким образом материальной поверхности называется *центром удара* относительно оси AA' фигуры S, если считать ее однородной. Эта точка встречается в теории удара, а также в гидростатике. Доказать, что центр удара G и ось AA' образуют систему полюсов и поляр относительно неподвижного мнимого конического сечения, центр которого совпадает с центром тяжести площади S, если считать ее однородной.

Ответ. Примем за начало центр тяжести площади S, предполагаемой однородной, и обозначим через $d\sigma$ элемент этой площади. Интегралы $\iint x\,d\sigma$ и $\iint y\,d\sigma$, распространенные на площадь, равны *нулю*. Можно выбрать такое направление прямоугольных осей xOy, чтобы $\iint xy\,d\sigma$ также равнялся нулю. Тогда $\iint d\sigma = S$. Положим, кроме того, что

$$\iint x^2\,d\sigma = a^2S, \quad \iint y^2\,d\sigma = b^2S.$$

Пусть $ux + vy + 1 = 0$ — уравнение прямой AA'. Предполагаемая плотность площади S в точке (x, y) будет

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{u^2 + v^2}}(ux + vy + 1) \qquad (k \text{ — постоянная}).$$

Координаты точки G будут тогда $\xi = a^2u$, $\eta = b^2v$, и эта точка является полюсом прямой AA' относительно мнимого конического сечения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$. Можно также сказать, что точка G *симметрична* с точкой O относительно полюса прямой AA' для вещественного конического сечения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

33. *Криволинейные однородные поверхности.* Пусть S — часть сферической поверхности радиуса R, σ — ее проекция на диаметральную плоскость и δ — расстояние от ее центра тяжести до этой плоскости. Доказать формулу

$$S\delta = R\sigma.$$

34. *Однородные объемы.* Если однородный объем имеет диаметральную плоскость, сопряженную некоторому направлению хорд, то центр тяжести лежит в этой плоскости. Например, *тетраэдр* (центр тяжести совпадает с центром тяжести четырех равных масс, помещенных в четырех вершинах), *усеченный цилиндр* (центр тяжести есть середина прямой, параллельной образующим и соединяющей центры удара обоих оснований относительно прямой их пересечения).

35. Даны три косоугольные оси Ox, Oy, Oz. Обозначим через S_z площадь сечения однородного тела плоскостью, параллельной плоскости xOy, а через ξ', η', z — координаты центра тяжести площади этого сечения, предполагаемой однородной. Доказать, что центр тяжести тела имеет координаты

$$V\xi = k\int_{z_0}^{z_1} S_z\xi'\,dz, \quad V\eta = k\int_{z_0}^{z_1} S_z\eta'\,dz, \quad V\zeta = k\int_{z_0}^{z_1} S_z z\,dz,$$

где z_0 и z_1 — координаты z плоскостей, ограничивающих тело, V — его объем $\left(V = k\int_{z_0}^{z_1} S_z\,dz\right)$ и k — объем параллелепипеда, основание которого параллельно плоскости xy и имеет площадь, равную единице, и образующие которого параллельны оси Oz и равны по длине единице.

(Разбить тело на бесконечно тонкие слои плоскостями, параллельными плоскости xy.)

36. Из предыдущего упражнения следует, что если центры тяжести параллельных плоских сечений лежат в одной плоскости, то центр тяжести тела также лежит в этой плоскости. Если центры тяжести сечений расположены на прямой, то центр тяжести объема также лежит на этой прямой. Это последнее обстоятельство имеет место для части тела вращения, заключенной между двумя плоскостями, перпендикулярными оси, и для объема, ограниченного поверхностью второго порядка и двумя параллельными плоскостями.

37. Если S_z есть функция второй степени относительно z, то обозначая через S_0, S_1, σ площади обоих оснований и равноотстоящего от них сечения, а через h — высоту тела, получим

$$V = \frac{h}{6}(S_0 + S_1 + 4\sigma).$$

Расстояния от центра тяжести объема до обоих оснований S_0 и S_1 относятся как $S_1 + 2\sigma$ к $S_0 + 2\sigma$. Формулы эти применимы к усеченным пирамидам и конусам, а также к частям поверхностей второго порядка и линейчатых поверхностей, заключенных между двумя параллельными плоскостями.

38. Для тел, указанных в предыдущем упражнении, справедлива следующая теорема: *центр тяжести тела совпадает с центром тяжести трех масс, помещенных в центрах тяжести обоих оснований и среднего сечения и равных соответственно площадям оснований и учетверенной площади среднего сечения.* (Дарбу, Статья в «Механике» Депейру, стр. 383—388.)

ГЛАВА VII

ИЗМЕНЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

120. Предварительное замечание. В главе V мы указали необходимые условия равновесия произвольной материальной системы в следующей форме.

Если произвольная система находится в равновесии, то приложенные к ней внешние силы (т. е. все силы, отличные от взаимных реакций различных частей) образуют систему скользящих векторов, эквивалентную нулю, т. е. удовлетворяют условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу.

То же условие должно выполняться для внешних сил, приложенных к любой части материальной системы, если рассматривать ее как отделенную от остальной части.

Об этом можно составить себе представление на основании следующих рассуждений, основанных на идее затвердевания: если система находится в равновесии, то последнее, очевидно, сохранится, если все точки станут неизменно связанными между собой, т. е. если система затвердеет. Внешние силы должны уравновешиваться для полученного таким образом твердого тела и, следовательно, они удовлетворяют общим условиям равновесия твердого тела. Эти необходимые условия не будут, вообще говоря, достаточными. Мы применим эти рассуждения к некоторым изменяемым системам.

I. Веревочный многоугольник

121. Определение. Так называют систему материальных точек M_1, M_2, ..., M_n, каждая из которых связана с последующей при помощи гибкой нерастяжимой нити. К каждой из этих точек приложена соответственно одна из сил F_1, F_2, ..., F_n, под действием которых фигура может иметь некоторое положение равновесия в виде плоского или пространственного многоугольника. Исследуем условия равновесия такого многоугольника.

Рассмотрим сначала случай, когда имеются только две точки M_1 и M_2 и две силы F_1 и F_2. Равновесие может иметь место лишь тогда, когда внешние силы F_1 и F_2, действующие на точки M_1 и M_2, равны и прямо противоположны. Это необходимое условие не будет достаточным. Кроме того, силы должны иметь такое направление, при котором нить растягивается. Если силы будут направлены так, чтобы точки сближались, то равновесия не будет. Чтобы в этом случае оно все таки было, нужно заменить нить *твердым стержнем* (рис. 78).

122. Натяжение. Допуская, что равновесие имеет место, возьмем на нити M_1M_2 (рис. 78) произвольную точку A и выделим часть M_1A. Полученная нить M_1A раньше находилась в равновесии. На нее действовали только сила F_1 и часть нити AM_2. Необходимо, следовательно, заменить это действие силой, равной и противоположно направленной силе F_1. Эта сила называется натяжением в точке A. Она равна по абсолютному значению силе F_1 и одинакова во всех точках нити. Точно так же часть AM_2 находится в равновесии под действием силы F_2 и натяжения, приложенного в точке A в сторону AM_1. Наконец, произвольная часть AB нити находится в равновесии под действием натяжений, приложенных на обоих концах в направлениях AM_1 и BM_2.

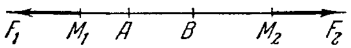


Рис. 78.

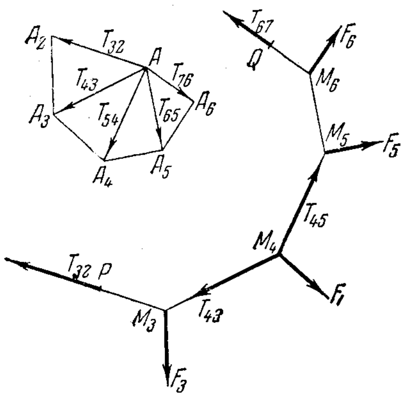


Рис. 79.

Вообще, если рассматривается произвольная часть веревочного многоугольника, находящегося в равновесии, например часть $PM_3M_4M_5M_6Q$, полученная рассечением нитей M_2M_3 и M_6M_7 в точках P и Q, то можно считать, что она находится в равновесии под действием сил, непосредственно приложенных к его вершинам M_3, M_4, M_5, M_6 (рис. 79) и под действием натяжений сторон PM_3 и M_6Q, приложенных в точках P и Q в направлениях M_3P и M_6Q. Эти силы и два натяжения удовлетворяют условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Например, если силы F_3, F_4, F_5, F_6 имеют одну равнодействующую R, то должно быть равновесие между натяжениями M_3P и M_6Q крайних сторон и этой равнодействующей. Следовательно (п. 107), эти крайние стороны должны пересекаться в некоторой точке на линии действия равнодействующей R.

123. Равновесие веревочного многоугольника. Многоугольник Вариньона. Рассмотрим веревочный многоугольник, находящийся в равновесии под действием сил, приложенных к его различным вершинам. Чтобы исключить всякие недоразумения с направлением натяжений, будем обозначать через $T_{i,i+1}$ натяжение стороны M_iM_{i+1}, которое она испытывает в направлении M_iM_{i+1}, а через $T_{i+1,i}$ то же самое натяжение, но в противоположном направлении, так что $T_{i,i+1}$ и $T_{i+1,i}$ являются равными и прямо противоположными силами.

Допустим, что рассекаются стороны M_2M_3 и M_6M_7 в точках P и Q и рассматривается часть $PM_3M_4M_5M_6Q$ веревочного многоугольника. Эта часть находится в равновесии под действием натяжений T_{32} и T_{67}, приложенных в точках P и Q, и заданных сил F_3, F_4, F_5, F_6, приложенных к промежуточным вершинам. Точка M_3, рассматриваемая как свободная, находится под действием силы F_3 и двух натяжений T_{32} и T_{34}, примыкающих к этой точке нитей; эти три силы находятся, следовательно, в равновесии. Точно так же точка M_4 находится в равновесии под действием непосредственно приложенной силы F_4 и двух натяжений T_{43} и T_{45}, примыкающих к этой точке нитей, и т. д. Выражая таким же образом, что каждая вершина находится в равновесии под действием приложенной к ней силы и двух натяжений примыкающих к ней нитей, мы и получим условия равновесия.

Эти условия очень просто выражаются при помощи следующего построения, приводящего к многоугольнику Вариньона. Через произвольную точку A (рис. 79) проведем вектор AA_2, равный и параллельный натяжению T_{32} первой рассматриваемой стороны и через точку A_2 вектор A_2A_3, равный F_3. Так как три силы T_{32}, F_3, T_{34} находятся в равновесии, то вектор A_3A, замыкающий треугольник AA_2A_3, равен и параллелен силе T_{34}, и поэтому вектор AA_3 равен силе T_{43}. Теперь, так как силы T_{43}, F_4 и T_{45} находятся в равновесии, то, проведя через конец A_3 вектора AA_3, равного и параллельного силе T_{43}, вектор A_3A_4, равный силе F_4, получим вектор A_4A, равный силе T_{45}, а противоположно направленный вектор AA_4 равен силе T_{54}. Продолжая так шаг за шагом, придем в конце концов к вектору A_5A_6, равному и параллельному силе F_6, и к вектору AA_6, равному натяжению T_{76}. Полученный таким образом многоугольник $AA_2A_3\ldots$ называется *многоугольником Вариньона.*

Резюмируя сказанное, мы видим, что для того, чтобы рассматриваемая часть $PM_3M_4M_5M_6Q$ (рис. 79) веревочного многоугольника была в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы после построения векторов A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, равных и параллельных силам F_3, F_4, F_5, F_6, приложенным в вершинах, можно было найти такую точку A, чтобы векторы AA_2, AA_3, AA_4, AA_5, AA_6 были параллельны векторам PM_3, M_3M_4, M_4M_5, M_5M_6, M_6Q и направлены в стороны, им противоположные. Это последнее условие вытекает из того, что такой вектор, как AA_3, должен быть равен натяжению T_{43}, которое направлено в сторону M_4M_3.

Эти условия также и достаточны. Если они выполняются, то каждая вершина M_i будет находиться в равновесии под действием силы F_i и двух натяжений $T_{i,i-1}$ и $T_{i,i+1}$, равных соответственно векторам AA_{i-1} и A_iA.

Главный момент крайних натяжений T_{32}, T_{67} и сил F_3, F_4, F_5, F_6 будет равен нулю, так же как и главный момент каждой из сил F_i и двух натяжений $T_{i,i-1}$, $T_{i,i+1}$, приложенных в точке M_i. Следовательно, рассматривая моменты сил и натяжений относительно одной и той же точки, мы получим векторы, для которых можно построить многоугольник, аналогичный многоугольнику Вариньона.

Может случиться, что будут выполнены все условия равновесия, кроме тех, которые касаются направления натяжений сторон. Тогда некоторые из сторон будут сжиматься вместо того, чтобы быть растянутыми, и равновесия не будет. Для того чтобы оно было, надо заменить эти стороны твердыми стержнями, которые способны сопротивляться сжатию.

124. Условия на концах. Указанные нами условия равновесия должны выполняться для любой части многоугольника. Крайние вершины веревочного многоугольника могут быть подчинены разного вида условиям, которые называются *условиями на концах.*

1°. *Свободные концы.* Может случиться, что веревочный многоугольник $M_1M_2 \ldots M_n$ является свободным в пространстве и его концы M_1 и M_n свободны и находятся под действием заданных сил F_1 и F_n. Допустим, для упрощения, что $n = 5$ и, следовательно, рассматривается многоугольник $M_1M_2M_3M_4M_5$. Тогда натяжения крайних звеньев M_1M_2 и M_4M_5 известны. В самом деле, так как M_1 находится в равновесии под действием F_1 и натяжения T_{12}, то это натяжение равно и противоположно F_1. Точно так же T_{54} равно и противоположно F_5. Если построить многоугольник Вариньона, соответствующий полному веревочному многоугольнику, то первое звено AA_1 будет равно и параллельно F_1, второе A_1A_2 равно и параллельно F_2, и т. д., последнее A_4A_5 равно и параллельно F_5 (рис. 80). Построенный таким образом многоугольник является многоугольником сил F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Этот многоугольник должен быть замкнутым, т. е. точка A_5 должна совпадать с точкой A, так как силы F_k должны удовлетворять условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу, и их главный вектор должен равняться нулю. Натяжения $T_{k+1,k}$ равны и параллельны диагонали AA_k многоугольника Вариньона.

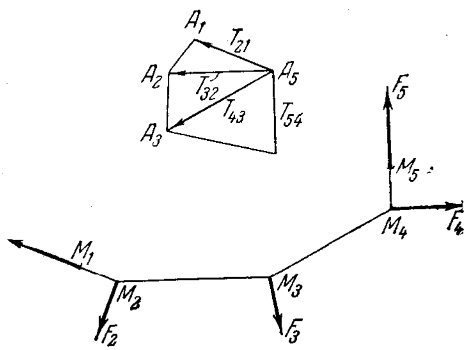


Рис. 80.

2°. *Концы M_i и M_n закреплены в неподвижных точках.* Необходимо тогда принять в качестве вспомогательных неизвестных силы F_1 и F_n, представляющие действия неподвижных точек на концы M_1 и M_n или, что то же, натяжения T_2 и $T_{n-1,n}$.

3°. *Веревочный многоугольник замкнут.* Многоугольник замкнут, когда последняя точка M_5 непосредственно связана с первой M_1 при помощи нити. В этом случае можно применить общие условия равновесия и построение Вариньона ко всему многоугольнику, разрезав мысленно нить M_1M_5 в двух точках P и Q и приложив вдоль M_1P натяжение T_{15} и вдоль M_5Q натяжение T_{51}. Тогда надо будет провести через точку A вектор AA_0, равный и параллельный натяжению T_{15} и далее векторы A_0A_1, A_1A_2, ..., A_4A_5, равные и параллельные силам F_1, F_2, ..., F_5 (рис. 81). Натяжения нитей будут равны и параллельны векторам AA_1, AA_2, ..., AA_5, причем натяжение T_{15} будет равно и параллельно вектору AA_0, натяжение T_{21} равно и параллельно вектору AA_1 и т. д, натяжение $T_{k+1,k}$ — вектору AA_k и т. д. Последнее натяжение T_{15} будет равно и параллельно вектору AA_5; точки A_5 и A_0 совпадают, так как AA_0 также равно T_{15}.

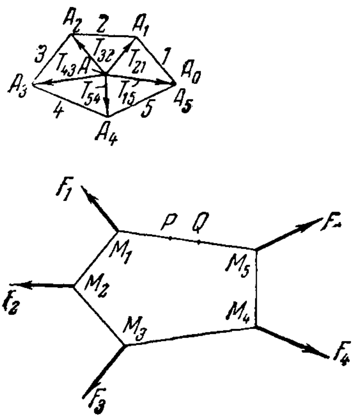


Рис. 81.

Следовательно, для равновесия замкнутого веревочного многоугольника необходимо и достаточно: 1) чтобы многоугольник сил, непосредственно приложенных, был замкнут; 2) чтобы существовала такая точка A, для которой каждая из сторон M_rM_{r+1} веревочного многоугольника была параллельна и противоположно направлена диагонали AA_r.

Примечание. Если число сторон веревочного многоугольника неограниченно возрастает, причем каждая из этих сторон стремится к нулю, то как этот многоугольник, так и многоугольник Вариньона обращаются в кривые. Этот предельный случай будет изучен в параграфе II.

В общем случае фигура равновесия будет пространственным многоугольником. Этот многоугольник будет плоским в случаях, когда силы $F_2, \ldots, F_{n-1}$ сходятся или параллельны.

125. Сходящиеся силы. *Если все силы F, кроме крайних F_1 и F_n, пересекаются в одной точке, то независимо от того, будет ли многоугольник замкнутым или нет, его фигура равновесия будет плоской и моменты всех натяжений относительно точки пересечения сил будут равны.*

Пусть O — точка пересечения сил. Как мы видели, можно считать, что материальная точка M_2 находится в равновесии под действием силы F_2 и натяжений T_{21} и T_{23}. Так как эти силы уравновешиваются, то они лежат в одной плоскости, и, следовательно, точки M_1, M_2, M_3, O находятся в одной и той же плоскости P. Таким же путем убеждаемся, что точки M_2, M_3, M_4, O тоже лежат в одной плоскости, которая совпадает с P, так как имеет с ней три общие точки O, M_2, M_3, и так далее. Следовательно, фигура равновесия является плоской, и ее плоскость проходит через точку O.

Так как точка M_2 находится в равновесии под действием сил F_2, T_{21}, T_{23}, то алгебраическая сумма моментов этих сил относительно точки O равна нулю. Но так как момент силы F_2 равен нулю, то сумма моментов сил T_{21} и T_{23} равна нулю, откуда вытекает, что момент силы T_{12} равен моменту силы T_{23}. Продолжая таким же образом дальше, убеждаемся, что все натяжения $T_{r,r+1}$ имеют одинаковые моменты относительно точки O (рис. 82).

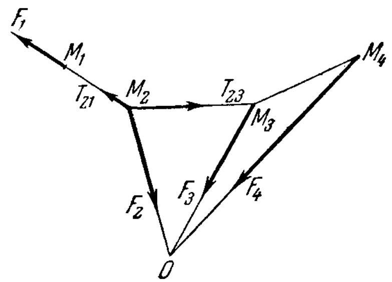


Рис. 82.

126. Параллельные силы. *Фигура равновесия будет также плоской, когда все силы, кроме двух крайних, параллельны. В этом случае проекции натяжений на перпендикуляр к общему направлению сил равны.*

Первая часть этого предположения докажется так же, как и для сходящихся сил. Для доказательства второй части замечаем, что так как силы F_2, T_{21}, T_{23} находятся в равновесии, то сумма их проекций на направление xx', перпендикулярное силам, равна нулю. Но так как проекция силы F_2 равна нулю, то отсюда следует, что проекция T_{12} равна проекции T_{23} и точно так же равна проекции T_{34} и т. д.

Допустим, например, что оба конца многоугольника подвешены к двум неподвижным точкам и что силами, действующими на промежуточные вершины, являются веса. Тогда многоугольник будет находиться в вертикальной плоскости, проходящей через две неподвижные точки. Допустим, кроме того, что имеется горизонтальное звено M_0M_1, натяжение которого мы обозначим через T_0. Натяжения следующих звеньев M_1M_2, $M_2M_3, \ldots$ будут T_{12}, $T_{23}, \ldots$, а их углы наклона к горизонту обозначим через α_1, $\alpha_2, \ldots$ На точки M_1, $M_2, \ldots$ действуют веса p_1, $p_2, \ldots$ Для построения в рассматриваемом случае многоугольника сил для части M_0, M_1, $M_2, \ldots$ веревочного многоугольника (рис. 83) необходимо провести через некоторую точку A в направлении M_1M_0 вектор AB, равный и параллельный натяжению T_0, далее — векторы BB_1, $B_1B_2, \ldots$, равные и параллельные силам p_1, $p_2, \ldots$ Точки B, B_1, $B_2, \ldots$ находятся на одной вертикали, а диагонали AB_1, $AB_2, \ldots$ параллельны сторонам M_1M_2, $M_2M_3, \ldots$ и равны натяжениям T_{21}, T_{32}. Имеем, следовательно:

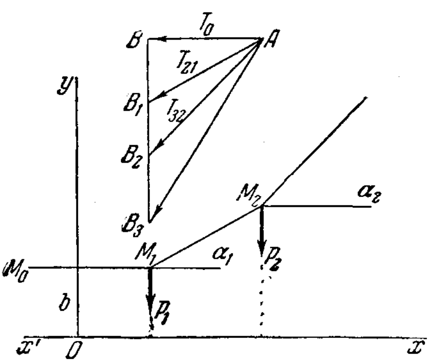


Рис. 83.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{p_1}{T_0}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{p_1 + p_2}{T_0}, \quad \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{T_0},$$

$$T_0 = T_{21} \cos \alpha_1 = T_{32} \cos \alpha_2 = \ldots = T_{k+1,\,k} \cos \alpha_k.$$

Если предположить, что число вершин $M_1M_2 \ldots$ неограниченно возрастает, причем каждая сторона стремится к нулю, то многоугольник превратится в такую кривую, что, обозначая через α угол наклона касательной в точке M к горизонту, через T — натяжение в этой точке, через P — вес дуги M_0M, отсчитываемой от наинизшей точки M_0, где натяжение равно T_0, мы сможем написать

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{T_0}, \quad T_0 = T \cos \alpha.$$

Например, если вообразить однородную тяжелую нить, находящуюся в равновесии, то вес нити от наинизшей точки M_0 до точки M пропорционален дуге M_0M, длину которой обозначим через s. Следовательно, для кривой равновесия (цепной линии)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{s}{a}$$

(a — постоянная). Ниже мы дадим уравнение этой кривой в конечной форме (п. 139).

Если тяжелая нить не однородна, но ее линейная плотность ρ (как она определена в п. 114) есть известная функция дуги s, отсчитываемой от M_0, то

$$P = g \int_0^s \rho\, ds, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{a} \int_0^s \rho\, ds,$$

где a, как и раньше, — постоянная.

Висячие мосты. Будем предполагать, что подвесные стержни вертикальны, находятся на одинаковых расстояниях друг от друга и одинаково нагружены. Мы будем пренебрегать весом этих стержней и каната. Будем, наконец, предполагать, что канат симметричен относительно вертикальной плоскости, перпендикулярной к его собственной плоскости, и что он абсолютно гибок и нерастяжим. Примем вертикальную плоскость, содержащую канат, за плоскость чертежа, прямую ее пересечения с плоскостью симметрии за ось y и прямую xx' ее пересечения с плоскостью моста, которая предполагается горизонтальной, за ось x. Будем предполагать число стержней четным, т. е. что в середине многоугольника имеется горизонтальное звено M_0M_1 (рис. 83). Обозначим через a расстояние между стержнями и через x_k, y_k координаты вершины M_k. Координаты вершины M_1 будут $a/2$, b. Координаты остальных вершин могут быть подсчитаны последовательно по формулам

$$x_k = x_{k-1} + a, \quad y_k = y_{k-1} + a \operatorname{tg} \alpha_{k-1},$$

в которых $\operatorname{tg} \alpha_{k-1}$ равен $\dfrac{(k-1)p}{T_0}$, так как веса $p_1, p_2, \ldots$ равны одному и тому же весу p. Таким путем найдем:

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)a,$$

$$y_k = b + \frac{ap}{T_0}[1 + 2 + \ldots + (k-1)] = b + \frac{k(k-1)}{2} \frac{ap}{T_0}.$$

Это последнее уравнение может быть непосредственно получено, если заметить, что внешние силы, приложенные к части $M_1M_2 \ldots M_k$, образуют систему векторов, эквивалентных нулю, вследствие чего сумма их моментов относительно точки M_k равна нулю.

В этих выражениях имеется еще неизвестное натяжение T_0. Оно может быть определено, если известна точка подвеса последней вершины M_n. Пусть h — высота этой точки; тогда

$$h = b + \frac{n(n-1)}{2}\frac{ap}{T_0},$$

что и определяет T_0. Вершины многоугольника находятся на параболе с вертикальной осью. В самом деле, если в равенствах

$$x = \frac{a}{2} + (k-1)a, \quad y = b + \frac{k(k-1)}{2}\frac{ap}{T_0}$$

изменять k непрерывным образом, то точка x, y опишет параболу с вертикальной осью и вершины многоугольника будут точками этой параболы, соответствующими целым значениям k. Легко, кроме того, показать, что звенья многоугольника касаются в своих серединах другой параболы с вертикальной осью.

Если число стержней будет очень большим, а звенья очень малыми, то многоугольник можно будет отождествить с кривой, которая, согласно вышеизложенному, будет обязательно параболой. В этом можно также убедиться, если заметить, что тангенс угла наклона звена M_kM_{k+1} пропорционален абсциссе его середины. Если многоугольник отождествляется с кривой, то угловой коэффициент касательной в какой-нибудь точке этой кривой пропорционален абсциссе этой точки, что является характерным свойством параболы с вертикальной осью.

127. Графические приложения теории веревочных многоугольников. Геометрические и механические свойства веревочных многоугольников послужили поводом к возникновению новых теорий, начало которым было положено в заметке Понселе и которые были впоследствии подробно разработаны в руководствах графической статики Кульмана, Кремоны, Мориса Леви, Руше. Можно указать также на элементарную книгу Зейрига в серии Aide-Mémoire Леоте и на книгу П. Монтеля «Статика и сопротивление материалов» (Gauthier-Villars, 125). Мы ограничимся здесь рассмотрением некоторых примеров.

1°. *Графическое определение равнодействующей нескольких сил, лежащих в одной плоскости.* Пусть в плоскости задано произвольное число сил, например, заданы четыре силы F_1, F_2, F_3, F_4, имеющие равнодействующую, не равную нулю. Построим многоугольник этих сил, проведя через некоторую точку A_5 вектор A_5A_1, равный и параллельный силе F_1, через точку A_1 — вектор A_1A_2, равный и параллельный силе $F_2, \ldots$, наконец, через точку A_3 — вектор A_3A_4, равный и параллельный силе F_4, и перенумеруем стороны этого многоугольника, обозначая буквой r сторону, равную и параллельную силе F_r. Равнодействующая сил $F_1, F_2, \ldots, F_4$ равна и параллельна стороне A_5A_4, имеющей номер 5. Возьмем в плоскости точку A и соединим ее с вершинами A_5, A_1, A_2, A_3, A_4 многоугольника сил. Обозначим через (r, s) диагональ, соединяющую точку A с точкой пересечения сторон r и s. Мы получим таким образом многоугольник Вариньона. Построим соответствующий веревочный многоугольник. Для этого проведем произвольную прямую L_5M_1, параллельную диагонали $(5, 1)$, и обозначим через M_1 точку, в которой она пересекает направление силы F_1. Через M_1 проведем прямую M_1M_2 (рис. 84), параллельную диагонали $(1, 2)$, и обозначим через M_2 точку ее пересечения с направлением силы F_2 и т. д. ..., через точку M_4 проведем M_4N_5 параллельно $(4, 5)$. Эта последняя прямая пересечет первую L_5M_1 в точке M_5, через которую проходит равнодействующая. В самом деле, если мы заменим прямые L_5M_1, M_1M_2, ..., M_4M_5 нитями или жесткими стержнями, перенесем силы F_1, F_2, F_3, F_4 в точки M_1, M_2, ..., M_4 на их линиях действия и приложим к крайним нитям L_5M_1, M_4N_5 натяжения, равные диагоналям (*1*, *5*) и (*4*, *5*) многоугольника Вариньона, то получим веревочный многоугольник, находящийся в равновесии. Согласно принципу затвердевания (п. 120) существует равновесие между крайними натяжениями, направленными по сторонам M_1L_5, M_4N_5, и силами F_1, F_2, F_3, F_4, приложенными в вершинах. Равнодействующая этих последних сил будет, следовательно, равна и прямо противоположна равнодействующей двух крайних натяжений и будет проходить через точку M_5 пересечения сторон L_5M_1 и M_4N_5. Таким образом, равнодействующая будет найдена, так как она по величине и направлению определяется вектором A_5A_4.

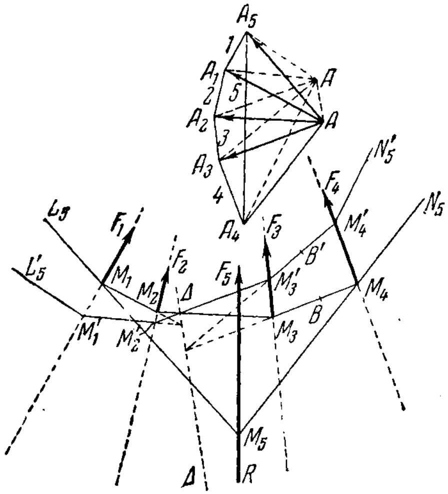


Рис. 84.

Если изменять положение первой стороны L_5M_1, перемещая ее параллельно самой себе, то веревочный многоугольник будет менять свою форму, а точка M_5 будет перемещаться по линии действия равнодействующей сил F_1, F_2, F_3, F_4.

Сумма моментов сил относительно произвольной точки O плоскости. Сумма моментов сил относительно точки O равна моменту равнодействующей R, т. е. равна $R\delta$, где δ — расстояние от точки O до силы R. Проведем через точку O (рис. 85) линию PQ, параллельную линии действия равнодействующей, и пусть P и Q — точки пересечения этой прямой с крайними звеньями M_1M_5 и M_4M_5. Треугольники PQM_5 и A_4A_5A, имея параллельные стороны, подобны. Построим высоты $M_5H = \delta$ и AK этих треугольников. Так как $A_4A_5 = R$, то получим

$$\frac{PQ}{R} = \frac{\delta}{AK}, \quad R\delta = PQ \cdot AK.$$

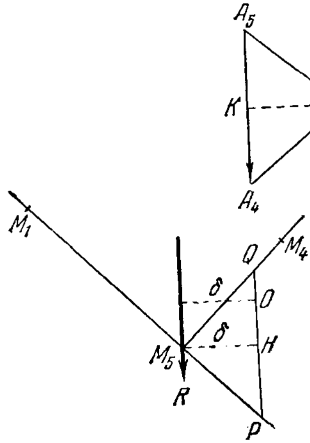


Рис. 85.

Точка A выбрана произвольно и поэтому можно принять $AK = 1$. Тогда момент $R\delta$ будет измеряться отрезком PQ.

Теорема. *Точка A выбрана произвольно. Выбирая для этой точки другое положение A', мы придем при помощи указанных выше построений к другому веревочному многоугольнику L_5', M_1', M_2', M_3', M_4', N_5', крайние* *звенья которого также пересекаются на линии действия равнодействующей* (рис. 84).

Более того, справедлива следующая теорема:

Точки пересечения соответствующих сторон M_kM_{k+1} *и* $M'_kM'_{k+1}$ *первого и второго веревочных многоугольников лежат на прямой* Δ, *параллельной* AA' (рис. 84).

В самом деле, допустим, что первый веревочный многоугольник разрезан в точке B какой-нибудь стороны, например, стороны M_3M_4. Часть $L_5M_1M_2M_3B$ этого многоугольника находится в равновесии под действием сил F_1, F_2, F_3, и натяжений T_{15}, T_{34} крайних сторон M_1L_5 и M_3B. Следовательно, натяжения T_{15} и T_{34} имеют равнодействующую, равную и противоположную равнодействующей сил F_1, F_2, F_3. Применяя те же рассуждения к части $L'_5M'_1M'_2M'_3B$ второго многоугольника, который мы предполагаем разрезанным в точке B' стороны $M'_3M'_4$, мы найдем, что натяжения крайних сторон $M'_1L'_5$ и M'_3B', которые мы обозначим через T'_{15} и T'_{34}, имеют равнодействующую, равную и противоположную равнодействующей сил F_1, F_2, F_3. Таким образом, натяжения T_{15} и T_{34} имеют равнодействующую, равную равнодействующей натяжений T'_{15} и T'_{34}. Можно также сказать, меняя направления двух последних натяжений, что совокупность четырех векторов T_{15}, T_{34}, T'_{51}, T'_{43} эквивалентна нулю. Равнодействующая двух натяжений T_{34} и T'_{43}, проходящая через точку пересечения сторон M_3M_4 и $M'_3M'_4$, равна и прямо противоположна равнодействующей Δ двух натяжений T_{15} и T'_{51}, проходящей через точку пересечения сторон L_5M_1 и $L'_5M'_1$. Следовательно, точка пересечения сторон M_3M_4 и $M'_3M'_4$ находится на фиксированной прямой Δ. То же самое будет справедливо для точки пересечения двух любых соответствующих сторон обоих многоугольников. Эта фиксированная прямая Δ параллельна AA', так как натяжение T_{15} равно и параллельно AA_5 и направлено в сторону AA_5, а натяжение T'_{51} равно и параллельно A_5A' и направлено в сторону A_5A'; следовательно, равнодействующая Δ этих двух натяжений равна и параллельна равнодействующей сил AA_5 и A_5A', т. е. силе AA'.

2°. *Построение замкнутого веревочного многоугольника, соответствующего системе лежащих в плоскости уравновешивающихся сил.* В плоскости дана система сил F_1, F_2, ..., F_5 (рис. 84), находящихся в равновесии, т. е. таких, главный вектор и главный момент которых равны нулю. Построим многоугольник сил $A_1\ A_2 \ldots A_5$. Это будет замкнутый многоугольник со сторонами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, соответственно параллельными силам F_1, F_2, ..., F_5. Возьмем далее в плоскости произвольную точку A. Этой точке можно поставить в соответствие замкнутый веревочный многоугольник следующим образом.

Соединим эту точку с различными вершинами многоугольника сил и пусть (r, s) — прямая, соединяющая точку A с точкой пересечения сторон r и s. Таким путем получится шесть прямых (*1*, *2*), (*2*, *3*) ..., (*5*, *1*). Построим затем замкнутый многоугольник $M_1M_2M_3M_4M_5$, вершины которого лежат, соответственно на осях векторов F_1, F_2, ..., F_5, а стороны M_5M_1, M_1M_2, ..., M_4M_5 параллельны сторонам (*5*, *1*), (*1*, *2*), ..., (*4*, *5*). На основании случая, рассмотренного раньше, можно произвольно выбрать положение стороны M_5M_1 или L_5M_1; последующие стороны M_1M_2, M_2M_3, ..., M_4N_5 будут тогда определенными и точка M_5 пересечения сторон L_5M_1 и M_4N_5 будет находиться на линии равнодействующей сил F_1, F_2, ..., F_4, т. е. на линии снлы F_5, которая равна и прямо противоположна этой равнодействующей. Построенный многоугольник будет, следовательно, замкнутым.

Построенный таким образом многоугольник $M_1 M_2 \ldots M_5$ называется *веревочным многоугольником*, соответствующим точке A. Если предположить, что точки $M_1, M_2, \ldots, M_5$ заменены материальными точками, а стороны $M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_5M_1$ — нерастяжимыми нитями, и перенести все силы в точки $M_1, M_2, \ldots, M_5$, то получится находящийся в равновесии замкнутый веревочный многоугольник, в котором натяжение стороны M_rM_s равно и параллельно отрезку (r, s). Может случиться, что некоторые из сторон подвержены сжатию; тогда необходимо заменить их твердыми стержнями. Это имеет место на рис. 84 для сторон M_1M_5 и M_5M_4.

Если взять другую точку A', то ей будет соответствовать другой веревочный многоугольник $M_1'M_2'M_3' \ldots$ Соответствующие стороны этих многоугольников, как было показано, пересекаются на прямой Δ, параллельной AA'.

Если бы силы $F_1, \ldots, F_5$ вместо того, чтобы находиться в равновесии, приводились к паре, то это обнаружилось бы при построении, так как L_5M_1 и M_4N_5 не пересекались бы на линии силы F_5 и равнодействующая R сил F_1, F_2, F_3, F_4 лежала бы на прямой, параллельной силе F_5, но не совпадающей с ней.

3°. *Частный случай. Пример взаимных фигур.* Допустим, что силы $F_1, F_2, \ldots, F_5$, находящиеся в равновесии, пересекаются в одной точке O (рис. 86). Веревочный многоугольник (O) $M_1 M_2 \ldots M_5$, построенный указанными выше приемами, и многоугольник Вариньона $(A) A_1 A_2 \ldots A_5$ будут тогда *взаимными*. Под этим надо понимать следующее. В веревочном многоугольнике $M_1M_2 \ldots M_5$ натяжения $T_{21}, T_{32}, \ldots, T_{15}$ сторон $M_2M_1, M_3M_2, \ldots, M_1M_5$ соответственно равны и параллельны диагоналям $AA_1, AA_2, \ldots, AA_5$ многоугольника Вариньона. Приложим в вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_5$ многоугольника Вариньона вдоль каждой из этих диагоналей силы $P_1, P_2, \ldots, P_5$, равные и параллельные соответствующим сторонам $M_2M_1, M_3M_2, \ldots, M_1M_5$ веревочного многоугольника, и заменим стороны $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_5A_1$ нитями. Построенный таким образом новый веревочный многоугольник $A_1A_2 \ldots A_5$ будет в равновесии, и натяжения сторон *1, 2, 3,*… будут равны и параллельны диагоналям $OM_1, OM_2, \ldots$ первоначального веревочного многоугольника, который, таким образом, является многоугольником Вариньона для нового веревочного многоугольника. Короче говоря, каждый из двух веревочных многоугольников (A) и (O) является многоугольником Вариньона для другого.

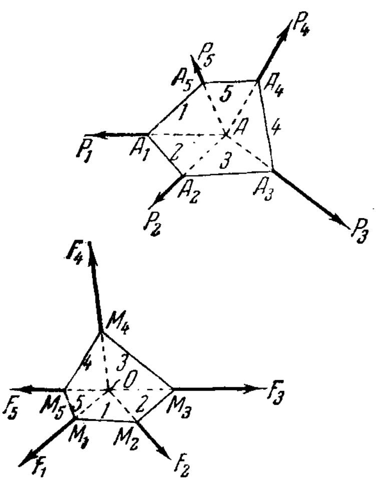


Рис. 86.

128. Кольца, скользящие на нити. Допустим, что гибкая нерастяжимая нить закреплена своими концами в двух неподвижных точках A и B и что по ней могут скользить без трения бесконечно малые кольца. К этим кольцам приложены известные силы. Нужно найти положение равновесия системы.

Если имеется только одно кольцо C (рис. 87), то сила F должна быть биссектрисой угла ACB. Это вытекает из того, что кольцо C может рассматриваться как точка, скользящая без трения по эллипсу с фокусами в точках A и B, причем сила должна быть нормальна к эллипсу и направлена наружу, т. е. так, чтобы нить натягивалась. Давление кольца на нить будет тогда равно силе F. Элемент нити, находящийся в точке C, будет находиться под действием двух натяжений T и T' и силы F. Так как последняя является биссектрисой угла между силами T и T' и должна их уравновесить, то эти натяжения равны между собой

$$F = 2T \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Теперь можно без труда исследовать случай нескольких колец. Если имеет место равновесие, то каждая из сил направлена по биссектрисе двух частей нити, примыкающих к соответствующему кольцу, натяжение T нити везде одинаково и если $F_1, F_2, \ldots$ — действующие силы, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — последовательные углы между частями нити, то (Пуансо)

$$T = \frac{F_1}{2\cos\frac{\alpha_1}{2}} = \frac{F_2}{2\cos\frac{\alpha_2}{2}} = \ldots$$

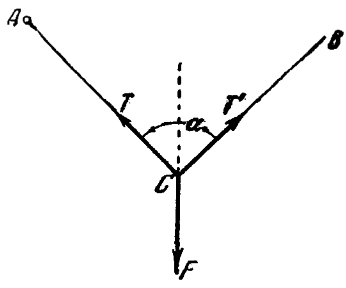


Рис. 87.

Так как система находится в равновесии, то последнее, очевидно, сохранится, если каждое кольцо закрепить в занимаемом им положении. Следовательно, к этой фигуре равновесия можно применить все, что сказано относительно веревочных многоугольников. Для рассматриваемого случая все натяжения одинаковы и все вершины $A_1, A_2, A_3, \ldots$ веревочного многоугольника (рис. 79), кроме вершины A, лежат на сфере с центром в вершине A. Если многоугольник плоский, то все вершины находятся на окружности с центром в точке A.

129. Фермы. Рассуждения, аналогичные тем, которыми мы пользовались для веревочных многоугольников, приводят к условиям равновесия ферм, т. е. систем прямолинейных стержней, весом которых пренебрегаем, соединенных своими концами при помощи шарниров. Предполагается, что вся система находится под действием сил, приложенных только в шарнирах (иначе, в узлах). Так как каждый из стержней, например AB, должен находиться самостоятельно в равновесии под действием двух сил, приложенных к его концам, то эти силы, являющиеся действиями узлов A и B на стержень, должны приводиться к двум равным и противоположно направленным сжатиям или растяжениям. Каждый узел будет находиться в равновесии под действием непосредственно приложенных к нему сил и реакций примыкающих к нему стержней. Последние направлены вдоль соответствующих стержней, так как по закону равенства действия и противодействия действия стержней на узлы равны и противоположны действию узлов на стержни.

Пример. Система шести невесомых стержней, образующих правильный шарнирный тетраэдр $SABC$ (рис. 88), подвешена с помощью трех вертикальных нитей AA', BB', CC' так, что основание ABC горизонтально.

К вершине S подвешен груз P. Найти натяжения нитей и силы растяжения и сжатия стержней. Обозначим через θ общее значение трех сил, растягивающих стержни SA, SB, SC. Проектируя на вертикаль и приравнивая нулю сумму проекций трех сил θ и силы P, приложенных в узле S, получим

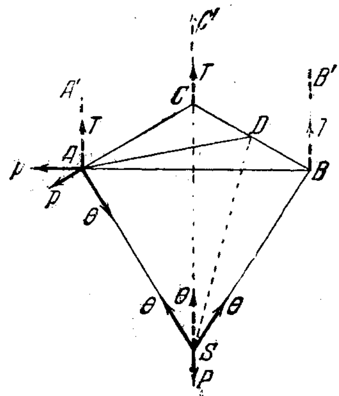


Рис. 88.

$$P-\theta\sqrt{6}=0,\quad \theta=\frac{P\sqrt{6}}{6},$$

так как косинус угла между ребром SA и вертикалью равен $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Стержни основания испытывают сжатия; обозначим через p общее значение этих сжимающих сил, а через T — общее значение натяжений нитей AA', BB', CC'. Точка A находится в равновесии под действием силы θ, натяжения T и двух сил p. Проектируя эти силы на вертикаль AA', получим:

$$T=\frac{\theta\sqrt{6}}{3}=\frac{P}{3},$$

что ясно непосредственно, так как три силы T уравновешивают груз P. Проектируя далее четыре силы, приложенные в точке A, на высоту AD треугольника ABC, получим

$$\frac{\theta\sqrt{3}}{3}-2p\frac{\sqrt{3}}{2}=0,\quad p=\frac{\theta}{3},$$

так как $\cos DAB=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos SAD=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

II. Равновесие нитей

130. Уравнения равновесия. Найдем условия равновесия нерастяжимой, гибкой нити, находящейся под действием непрерывных сил. Эта задача может рассматриваться, как предельный случай веревочного многоугольника, но мы рассмотрим ее непосредственно.

Обозначим через s длину дуги, отсчитываемую от какого-нибудь начала A в каком-нибудь определенном направлении AB (рис. 89). Мы будем предполагать, что внешние силы, действующие на элемент ds, могут быть представлены в виде одной силы $F\,ds$, порядка ds, приложенной в какой-нибудь точке этого элемента, Проекции этой силы будут

$$X\,ds,\quad Y\,ds,\quad Z\,ds,$$

где X, Y, Z — проекции вектора F, называемого *силой, отнесенной к единице длины*.

Если отбросить часть нити MB и рассматривать оставшуюся часть AM, то для сохранения ее равновесия необходимо будет приложить в точке M одну-единственную силу T, так как нить предполагается идеально гибкой. Сила T называется *натяжением* нити. Обозначим через α, β, γ направляющие косинусы этого натяжения; его проекции суть

$$T\alpha, \quad T\beta, \quad T\gamma.$$

Если же, разрезав нить в точке M, отбросить часть MA, то согласно закону равенства действия и противодействия, для сохранения равновесия части MB необходимо приложить в точке M силу $-T$. Проекции этого нового натяжения равны

$$-T\alpha, \quad -T\beta, \quad -T\gamma.$$

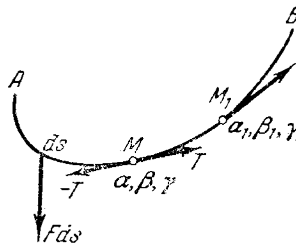


Рис. 89.

Разрежем нить в двух бесконечно близких точках M и M_1 и сохраним только элемент MM_1. Этот элемент будет в равновесии под действием приложенной к нему силы $F\,ds$ и двух натяжений $-T$ и T_1, которые заменяют действие отброшенных частей нити. Если через α_1, β_1, γ_1 обозначить направляющие косинусы натяжения T_1, то его проекции будут:

$$T_1\alpha_1, \quad T_1\beta_1, \quad T_1\gamma_1.$$

Напишем, что суммы проекций трех сил равны нулю. Тогда, замечая, что

$$T_1\alpha_1 - T\alpha = d(T\alpha), \quad T_1\beta_1 - T\beta = d(T\beta), \quad T_1\gamma_1 - T\gamma = d(T\gamma),$$

получим

$$\left.\begin{aligned} d(T\alpha) + X\,ds = 0, \\ d(T\beta) + Y\,ds = 0, \\ d(T\gamma) + Z\,ds = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Моменты трех сил $-T$, T_1 и $F\,ds$ относительно оси x равны, соответственно,

$$-(yT\gamma - zT\beta), \quad y_1T_1\gamma_1 - z_1T_1\beta_1, \quad (yZ - zY)\,ds,$$

где через x, y, z и x_1, y_1, z_1 обозначены координаты концов дуги ds. Следовательно, сумма моментов сил $-T$ и T_1 равна $d(yT\gamma - zT\beta)$ и по теореме моментов имеем:

$$\left.\begin{aligned} d(yT\gamma - zT\beta) + (yZ - zY)\,ds = 0, \\ d(zT\alpha - xT\gamma) + (zX - xZ)\,ds = 0, \\ d(xT\beta - yT\alpha) + (xY - yX)\,ds = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Развертывая первое из уравнений (2), можем написать

$$T\gamma\, dy + y\, d(T\gamma) - T\beta\, dz - z d(T\beta) + (yZ - zY)\, ds = 0.$$

В силу уравнений (1) члены с y и z уничтожаются, и тогда остается

$$\gamma\, dy - \beta\, dz = 0, \quad \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$

Второе из уравнений (2) показывает, что

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma};$$

это означает, что натяжение направлено по касательной к кривой. К этому же результату можно прийти, рассматривая нить как предел веревочного многоугольника. Общее значение трех отношений равно, очевидно, $\pm\, ds$; но натяжения должны быть направлены так, чтобы нить растягивалась. Для этого натяжение T должно быть направлено в сторону возрастающих дуг. Поэтому надо взять знак $+$. Следовательно,

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Внеся эти выражения в уравнения (1), получим:

$$\left.\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\, ds = 0, \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\, ds = 0, \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\, ds = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и уравнения (2) являются следствиями уравнений (3).

131. Общие теоремы. Из уравнений (1) и (2) непосредственно получаем две следующие теоремы.

Если сила F перпендикулярна какой-нибудь оси, например оси Ox, то проекция натяжения на эту ось постоянна. Действительно, из условия $X = 0$ получается $T\alpha = \text{const}$.

Если сила F постоянно находится в одной плоскости с какой-нибудь осью, например с осью Ox, то момент натяжения относительно этой оси постоянен. Действительно, из условия $yZ - zY = 0$ получается $yT\gamma - zT\beta = \text{const}$.

Эти две теоремы являются частными случаями следующей.

Если сила F всюду вдоль кривой принадлежит линейному комплексу, то момент натяжения относительно комплекса постоянен. В самом деле, если сила принадлежит линейному комплексу, то должно выполняться уравнение вида

$$pX + qY + rZ + a(yZ - zY) + b(zX - xZ) + c(xY - yX) = 0,$$

где p; q, r, a, b, c — постоянные. Заменяя в этом уравнении X через $\frac{dT\alpha}{ds}, \ldots, (yZ - zY)$ — через $\frac{d}{ds}(y\gamma - z\beta)T$, мы приведем его к уравнению, проинтегрировав которое, получим

$$pT\alpha + qT\beta + rT\gamma + aT(y\gamma - z\beta) + bT(z\alpha - x\gamma) + cT(x\beta - y\alpha) = \text{const}.$$

Это уравнение выражает, что относительный момент (п. 28) натяжения и системы векторов, имеющих координаты p, q, r, a, b, c, постоянен. (Пеннакьетти, Rendiconti del Circolo math. di Palermo, т. VI.)

132. Общие интегралы. Наиболее общим случаем является тот, когда сила F, отнесенная к единице длины, зависит от положения и направления в пространстве элемента ds и от его положения на нити. Тогда X, Y, Z будут функциями от x, y, z, s, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. При этих условиях написанные выше три уравнения равновесия (3) совместно с уравнением

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

образуют систему четырех дифференциальных уравнений, определяющих x, y, z и T в функции s. Это — уравнения первого порядка относительно T, но второго относительно x, y, z. Следовательно, их общий интеграл содержит шесть произвольных постоянных, в качестве которых могут быть, например, приняты значения шести величин x, y, z, T, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ при начальном значении $s = s_0$. Таким образом, в общем случае

$$x = \varphi(s, C_1, C_2, \ldots, C_6),$$

$$y = \psi(s, C_1, C_2, \ldots, C_6),$$

$$z = \omega(s, C_1, C_2, \ldots, C_6),$$

$$T = f(s, C_1, C_2, \ldots, C_6).$$

133. Определение постоянных, условия на концах. Шесть произвольных постоянных можно определить по условиям на концах. Эта задача будет наиболее простой для случая нити заданной длины l, закрепленной своими концами $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Приняв точку M_0 за начало отсчета дуг и написав, что при $s = 0$ и при $s = l$ величины x, y, z обращаются в координаты точек M_0 и M_1, мы получим шесть уравнений для определения шести постоянных. Далее необходимо будет исследовать эту систему, которая может допускать одно, два и даже бесчисленное множество решений.

Можно также предположить, что нить закреплена на одном конце $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а на другом имеет бесконечно малое колечко, которое может скользить без трения по неизменяемой кривой C, заданной уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Тогда три уравнения для определения постоянных получатся из условия, что при $s = 0$ величины x, y, z равны x_0, y_0, z_0. Остальные уравнения определятся из условий, что при $s = l$ значения x_1, y_1, z_1 величин x, y, z удовлетворяют уравнениям (C) кривой и что направление натяжения, т. е. касательной в точке M_1, нормально к этой кривой, так как кольцо может скользить без трения. Таким путем получится шесть уравнений для определения постоянных.

Точно так же, если конец M_1 нити может двигаться без трения по заданной поверхности, то надо выразить, что при $s = l$ значения x_1, y_1, z_1 удовлетворяют уравнению поверхности и что касательная в точке M_1 к ней нормальна.

134. Случай, когда сила не зависит от длины дуги. Часто случается, что X, Y, Z не содержат явно s. Заменяя тогда всюду в равенствах (3) ds через $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, можно будет принять x в качестве независимой переменной и тогда получатся три уравнения для определения y, z и T в функции x. Общий интеграл будет тогда содержать только пять постоянных, например значения, которые принимают y, z, T, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ при начальном значении $x = x_0$. Пусть

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \\ z &= \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_5), \\ T &= f(x, C_1, C_2, \ldots, C_5) \end{aligned}$$

— общие интегралы. Если мы захотим выразить, что нить имеет заданную длину и закреплена своими двумя концами в точках (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1), то нужно выразить, что величины y, z принимают значения y_0, z_0 при $x = x_0$ и значения y_1, z_1, при $x = x_1$ и что длина нити равна l. Мы получим пять уравнений, необходимых для определения постоянных.

135. Замечание о натяжении. Найденное решение будет неприемлемо, если T не будет положительным во всех точках кривой, так как если для какого-нибудь элемента натяжение T будет отрицательным, то этот элемент будет испытывать сжатие, а не натяжение. Можно истолковать решение, в котором T отрицательно, если предположить, что на нить нанизаны бесконечно малые твердые бусинки. Каждая такая бусинка будет испытывать давление со стороны предыдущей и последующей и равновесие будет осуществлено (Пуансо).

136. Естественные уравнения равновесия нити. Так называют уравнения равновесия, не зависящие от выбора осей координат. Мы уже обозначили через α, β, γ направляющие косинусы касательной Mt

в направлении возрастающих дуг; обозначим через α', β', γ' направляющие косинусы главной нормали Mn, направленной в сторону вогнутости (рис. 90), и через ρ — радиус кривизны. Известны формулы Френе и Серре:

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{\rho}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{\rho}$$

и, следовательно, первое уравнение равновесия

$$\frac{d}{ds}(T\alpha)+X=0$$

может быть написано в следующем виде

$$\alpha\frac{dT}{ds}+\frac{T}{\rho}\alpha'+X=0.$$

Таким образом, получаем три уравнения

$$\left.\begin{aligned} X&=-\alpha\frac{dT}{ds}-\alpha'\frac{T}{\rho},\\ Y&=-\beta\frac{dT}{ds}-\beta'\frac{T}{\rho},\\ Z&=-\gamma\frac{dT}{ds}-\gamma'\frac{T}{\rho}.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Эти уравнения показывают, что F есть результирующая двух отрезков, отложенных соответственно на касательной и на главной нормали и имеющих алгебраические значения, отсчитываемые в направлениях Mt и Mn, равные $-\frac{dT}{ds}$ и $-\frac{T}{\rho}$. Сила F находится, следовательно, в соприкасающейся плоскости кривой и направлена в сторону выпуклости и в сторону убывания натяжения. Ее проекции на касательную, главную нормаль и бинормаль определяются формулами

$$F_t=-\frac{dT}{ds}, \quad F_n=-\frac{T}{\rho}, \quad F_b=0, \quad (5)$$

которые и являются *естественными уравнениями равновесия*.

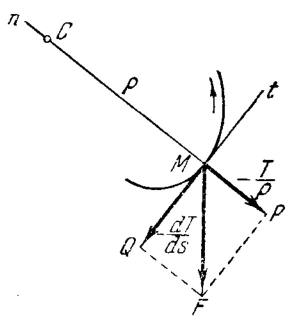


Рис. 90.

Если сила всюду нормальна к нити, то $F_t=0$. Тогда производная $\frac{dT}{ds}$ тоже равна нулю. Следовательно, натяжение T постоянно.

137. Формула, определяющая натяжение, когда существует силовая функция. Умножим уравнения равновесия (4) соответственно на α, β, γ и сложим. Тогда, заменяя α, β, γ через $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, получим

$$dT=-(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz),$$

что является не чем иным, как первым из естественных уравнений (5).

Это последнее уравнение очень важно. Оно позволяет сразу определить натяжение, когда X, Y, Z зависят только от x, y, z и имеют *силовую функцию* $U(x, y, z)$. Тогда, обозначив через h постоянную, получим

$$dT = -dU, \quad T = -(U+h),$$

что позволяет определить натяжение в конечной форме, не зная фигуры равновесия. Это значение натяжения следует внести в уравнения равновесия, после чего они приведутся к двум уравнениям.

Когда U принимает свое первоначальное значение, то то же самое будет и с натяжением. Следовательно, если U — однозначная функция, то натяжение будет одним и тем же во всех точках нити, лежащих на одной и той же поверхности уровня. Но если функция U не однозначна, если, например, $U = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, так что поверхности уровня суть плоскости $y = x \operatorname{tg} C$, и если нить пересекает какую-нибудь из этих плоскостей несколько раз, то натяжение может иметь одно из значений $C \pm k\pi$. Здесь можно повторить для натяжения все, что было сказано в главе IV относительно полной работы.

138. Параллельные силы. Наиболее простым случаем будет тот, когда внешние силы параллельны одному и тому же направлению. Фигура равновесия будет тогда плоской кривой, плоскость которой параллельна направлению сил, и проекция натяжения на перпендикуляр к этому направлению будет постоянна. Эти два свойства могут рассматриваться как следствия аналогичных свойств, полученных для веревочного многоугольника. Мы докажем, однако, эти свойства непосредственно.

Допустим, что ось Oy параллельна общему направлению сил. Тогда X и Z будут все время равны нулю и после интегрирования первого и последнего из уравнений равновесия (3) получим

$$T\frac{dx}{ds} = A, \quad T\frac{dz}{ds} = B.$$

Исключим из этих уравнений T. Получим

$$A\,dz - B\,dx = 0,$$

откуда

$$Az - Bx = C.$$

Это — уравнение плоскости, параллельной оси Oy. Следовательно, первая часть нашего предложения доказана. Примем эту плоскость за плоскость xy. Тогда можно составить два уравнения равновесия

$$T\frac{dx}{ds} = A, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0.$$

Внося во второе уравнение значение T из первого и обозначая через y' производную $\frac{dy}{dx}$, получим соотношение

$$A\,dy' + Y\,ds = 0, \tag{6}$$

которое является дифференциальным уравнением фигуры равновесия.

В наиболее общем случае равновесия нити сила может быть функцией шести величин x, y, z, s, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$. Сейчас, поскольку кривая плоская, имеем $z=0$ и $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1$. Следовательно, Y должно быть функцией переменных x, y, s, y'. В случае, когда Y зависит только от одной из величин x, y, s, y', задача приводится к квадратурам.

Пусть, например, $Y=f(x)$. Заменяя ds его значением $\sqrt{1+y'^2}\,dx$, мы видим, что переменные y' и x разделяются, и после интегрирования получается

$$A\ln\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right)+\int f(x)\,dx = C.$$

Из этого уравнения можно определить y' в функции x, после чего y находится новой квадратурой.

Пусть теперь $Y=f(y)$. Тогда можно принять $ds=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}\,dy$ и в уравнении (6) переменные сразу разделяются. В случае, когда существует силовая функция, натяжение, как мы видели, может быть вычислено сразу.

Наконец, если Y есть функция только s или только y', то уравнение (6) интегрируется сразу.

Естественное уравнение. Пусть α — угол между касательной к кривой равновесия и осью x и пусть ρ — радиус кривизны в точке касания. Если написать, что абсолютная величина нормальной составляющей силы есть $\frac{T}{\rho}$, то получим

$$Y\cos\alpha = \frac{T}{\rho},$$

и так как проекция $T\cos\alpha$ силы натяжения на ось Ox равна постоянной величине A, то дифференциальное уравнение кривой будет

$$Y\rho\cos^2\alpha = A.$$

Это уравнение идентично уравнению (6). Если, например,

$$Y=\frac{K}{\cos^2\alpha},$$

то из предыдущего уравнения получим для ρ постоянное значение, и следовательно, фигура равновесия есть окружность.

139. Цепная линия. Приложим эти вычисления к нахождению фигуры равновесия однородной тяжелой цепочки. Галилей считал, что этой фигурой является парабола. Ошибку Галилея исправил Гюйгенс.

Пусть p — вес единицы длины цепочки. На элемент ds действует сила $p\,ds$, направленная по вертикали. Следовательно, фигурой равновесия является плоская кривая, расположенная в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса. Примем эту плоскость за плоскость xy и направим ось y вертикально вверх. Тогда

$$Y\,ds = -p\,ds, \quad Y = -p,$$

и уравнения равновесия будут:

$$T\frac{dx}{ds} = A, \tag{1}$$

$$A\,dy' - p\,ds = 0. \tag{2}$$

Можно всегда предполагать, что A — число положительное. Действительно, T — существенно положительно; следовательно, если на кривой выбрать такое направление обхода, чтобы x и s возрастали одновременно, то производная $\frac{dx}{ds}$ будет положительной и постоянная A будет, вследствие этого, тоже положительной. Мы можем обозначить ее через pa, где a — положительная величина. Заменим ds его значением

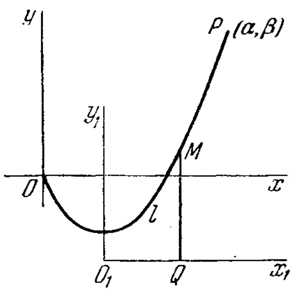


Рис. 91.

$$ds = +\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Интегрируя, найдем

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x-x_0}{a}} \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$y' - \sqrt{1+y'^2} = -e^{-\frac{x-x_0}{a}} \tag{4}$$

Складывая эти два уравнения, получим y' и, снова интегрируя, найдем уравнение кривой

$$y - y_0 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right).$$

Перенесем начало в точку $O_1(x_0, y_0)$ (рис. 91); тогда новое уравнение кривой будет

$$y_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

Это — уравнение цепной линии, которая симметрична относительно оси O_1y_1; ось O_1x_1 называется ее *основанием*.

Вычитая уравнение (4) из уравнения (3), получим

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right) = \frac{y_1}{a},$$

а из формулы (1) получим для натяжения

$$T = A\frac{ds}{dx} = A\sqrt{1+y'^2} = A\frac{y_1}{a} = py_1.$$

Отсюда мы видим, что натяжение нити в точке M равно весу части нити, длина которой равна ординате MQ этой точки над базой. Следовательно, если в точке M поместить бесконечно малый блок и дать возможность части нити, расположенной выше точки M, свободно свешиваться, то равновесие не нарушится, если свешивающаяся часть будет равна MQ.

140. Определение постоянных. 1°. *Концы закреплены.* Уравнение цепной линии содержит три постоянных x_0, y_0, a, которые определяются из условий на концах. Согласно принятому ранее условию постоянная a должна быть положительная. Примем за начало O точку закрепления, расположенную более низко, и направим ось x таким образом, чтобы вторая точка закрепления P находилась в квадранте между положительными координатными осями. Пусть α и β — координаты этой точки, l — длина нити (рис. 91). Напишем условия, выражающие, что кривая проходит через обе точки O (0, 0) и $P(\alpha, \beta)$:

$$-y_0 = \frac{a}{2}\left(e^{-\frac{x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}}\right), \tag{1}$$

$$\beta - y_0 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}}\right). \tag{2}$$

Чтобы получить третье уравнение, напишем, что нить должна иметь длину l. Имеем

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right)dx,$$

и, интегрируя в пределах от 0 до α, получим длину нити:

$$l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha-x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}}\right). \tag{3}$$

Вычитая равенство (1) из равенства (2), мы исключим y_0 и получим

$$\beta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha-x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}}\right). \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) определяют a и x_0. Из них легко находим:

$$l + \beta = a\left(e^{\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}}\right) = ae^{-\frac{x_0}{a}}\left(e^{\frac{\alpha}{a}} - 1\right),$$

$$l - \beta = a\left(e^{\frac{x_0}{a}} - e^{-\frac{\alpha-x_0}{a}}\right) = ae^{\frac{x_0}{a}}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{a}}\right).$$

Для исключения x_0 достаточно почленно перемножить эти равенства. Тогда

$$l^2 - \beta^2 = a^2\left(e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}} - 2\right).$$

Скобка равна квадрату величины $\left(e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right)$; следовательно,

$$+\sqrt{l^2 - \beta^2} = \pm a\left(e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right).$$

Может показаться, что следует рассматривать два знака. Но согласно выбору осей величины α и a, и поэтому также $a\left(e^{\frac{\alpha}{2a}}-e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right)$, должны быть положительными, вследствие чего надо брать только знак $+$. Положим $\frac{\alpha}{2a}=u$. Неизвестная u положительна и для нее уравнение имеет вид

$$\frac{\sqrt{l^2-\beta^2}}{\alpha}=\frac{e^u-e^{-u}}{2u}.$$

Нам нужно найти положительные решения этого уравнения. Заменяя его правую часть разложением в ряд, получим

$$\frac{\sqrt{l^2-\beta^2}}{\alpha}=1+\frac{u^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{u^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Здесь правая часть монотонно возрастает от 1 до бесконечности, когда u возрастает от 0 до бесконечности. Вследствие этого для того, чтобы существовал положительный корень, необходимо и достаточно, чтобы левая часть была больше 1. В этом случае уравнение будет иметь один и только один положительный корень. Следовательно, единственным условием возможности задачи будет

$$\frac{\sqrt{l^2-\beta^2}}{\alpha}>1,\quad l>\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

т. е. длина нити должна быть больше расстояния между точками подвеса. Если это условие выполнено, то можно будет определить u и, проследив за всем ходом вычислений, можно легко убедиться, что для трех постоянных a, x_0, y_0 будет получаться одна-единственная система значений. Следовательно, в этом случае существует одно и только одно положение равновесия.

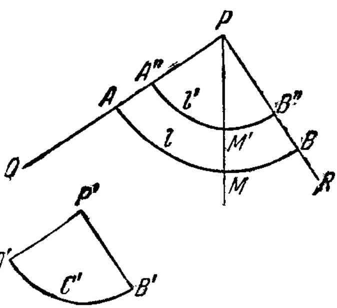


Рис. 92.

Пусть u' — положительный корень уравнения для u. Это уравнение имеет также отрицательный корень $-u'$. Пуансо интерпретирует это решение следующим образом: перевернутая цепная линия, для которой $u=-u'$, является фигурой равновесия особого свода, образованного равными бесконечно малыми, идеально отполированными твердыми шариками.

2°. *Концы скользят по двум прямым.* Допустим, что однородная тяжелая цепочка имеет длину l и что ее концы A и B скользят без трения по двум данным прямым PQ и PR, расположенным в одной вертикальной плоскости (рис. 92). Требуется определить постоянные x_0, y_0, a таким образом, чтобы цепная линия *пересекала обе прямые линии под прямым углом* и чтобы ее дуга AB между этими линиями имела заданную длину l.

Предлагая аналитическое решение в качестве упражнения, мы дадим здесь геометрическое решение задачи. Мы будем основываться на том, что две цепные линии, имеющие параллельные основания, подобны, и что, наоборот, фигура, подобная цепной линии с горизонтальным основанием, является другой цепной линией, расположенной таким же образом. Вообразим вспомогательную цепную линию C' с горизонтальным основанием и проведем к ней две нормали $A'P'$ и $B'P'$, параллельные заданным прямым QP и RP, что всегда возможно и притом единственным образом, так как при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ угловой коэффициент касательной к цепной линии принимает один и только один раз любое заданное значение. Дуга $A'B'$ будет иметь некоторую длину l'. Перенося угол $A'P'B'$ вместе с дугой $A'B'$ в угол P, получим дугу цепной линии $A''B''$ длины l', нормальную к обеим заданным прямым и имеющую горизонтальное основание. Искомая дуга AB будет тогда подобна дуге $A''B''$ относительно точки P, так как касательные к обеим дугам в точках A и A'', а также в точках B и B'' параллельны. Отношение подобия равно l/l'. Следовательно, достаточно поставить в соответствие каждой точке M' дуги $A''B''$ точку M таким образом, чтобы $\frac{PM}{PM'} = \frac{l}{l'}$, и точка M опишет искомую дугу. Решение будет, следовательно, единственным. Более того, мы видим, что если при таких же условиях на двух прямых расположить несколько цепных линий различной длины, находящихся в равновесии, то они все будут подобны относительно точки P.

141. Центральные силы. Фигура равновесия является плоской кривой и ее плоскость проходит через точку пересечения сил; момент сил натяжения относительно этой точки постоянен.

Эти предложения могут быть рассматриваемы как следствия аналогичных предложений, установленных для веревочных многоугольников, но мы установим их непосредственно.

Мы видели (п. 131), что *если момент силы F относительно оси равен все время нулю, то момент силы натяжения относительно этой оси постоянен.*

Так как внешние силы пересекаются в одной точке, то мы можем принять эту точку за начало координат. По только что высказанной теореме, примененной к трем осям координат, имеем:

$$T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = A,$$

$$T\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) = B,$$

$$T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C.$$

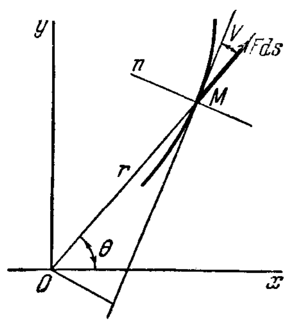


Рис. 93.

Умножая эти уравнения соответственно на x, y, z и почленно складывая, получим

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Следовательно, кривая равновесия является плоской и ее плоскость проходит через начало координат.

Если эту плоскость принять за плоскость xy и обозначить через F силу, отнесенную к единице длины, считая ее положительной, если она отталкивающая, и отрицательной, если она притягивающая, то проекции этой силы будут

$$X = F\frac{x}{r}, \quad Y = F\frac{y}{r}.$$

Уравнения равновесия могут быть преобразованы следующим образом (рис. 93).

Уравнение моментов относительно оси Oz, как мы установили, дает

$$T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C.$$

С другой стороны, имеем

$$dT + X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Вводя полярные координаты r и θ, мы приведем эти уравнения к виду

$$Tr^2\frac{d\theta}{ds} = C, \quad dT + F\,dr = 0.$$

Наиболее простым будет случай, когда F есть функция от r вида $\varphi(r)$. Тогда будет существовать первый интеграл, который легко найти. В самом деле, так так сила F потенциальная, то T получается при помощи квадратуры

$$T = -\int_{r_0}^{r} \varphi(r)\,dr - h = \Psi(r).$$

Имея силу натяжения, легко найти дифференциальное уравнение кривой равновесия. Для этого нужно подставить значение T в первое уравнение, которое после этого примет вид

$$\Psi(r)\,r^2\,d\theta = C\,ds.$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах. Действительно,

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2.$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, предварительно возведенное в квадрат, и разрешая относительно $d\theta$, получим уравнение кривой

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \pm \frac{C\,dr}{r\sqrt{r^2\Psi^2(r) - C^2}}.$$

Если, например, положить $F = k$ (k — постоянная), то

$$T = \Psi(r) = -kr - h,$$

и уравнение кривой будет содержать эллиптический интеграл. Но если приписать силе T значение $T = -kr$ $(k < 0)$, то искомая кривая будет равносторонней гиперболой с центром в точке 0.

Естественное уравнение. Пусть V — угол между касательной к нити и продолжением радиуса-вектора OM. Расстояние от полюса O до касательной равно $r \sin V$ (рис. 93). Условие того, что момент силы натяжения постоянен, будет иметь вид

$$Tr \sin V = C.$$

Далее, написав, что проекция силы F на нормаль равна T/ρ, получим

$$F \sin V = \frac{T}{\rho}.$$

Исключая T из этих двух уравнений, получим дифференциальное уравнение кривой в виде

$$F\rho\, r \sin^2 V = C.$$

142. Пример существования бесчисленного множества положений равновесия. *Нить закреплена в двух точках оси Ох и каждый элемент нити отталкивается от оси силой, пропорциональной его длине и* *расстоянию от этого элемента до оси.* Эта задача возникает при нахождении положения равновесия невесомой нити, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг оси Ox («прыгалки»).

Так как все силы, действующие на нить, пересекают ось Ox, то момент сил натяжения относительно этой оси постоянен вдоль всей нити. Но так как нить прикреплена к двум точкам оси, то момент сил натяжения на концах равен нулю. Следовательно, этот момент будет равен нулю всюду, и мы имеем

$$T\left(y\frac{dz}{ds}-z\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}=0, \quad y=mz,$$

где m — постоянная. Отсюда видно, что фигура равновесия находится в плоскости, проходящей через ось Ox. Примем ее за плоскость xy. Тогда сила, действующая на элемент ds, будет перпендикулярна к оси Ox, пропорциональна ординате y и будет отталкивающей

$$Y\,ds=\mu y\,ds.$$

Уравнения равновесия будут

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\mu y\,ds=0.$$

Из первого уравнения имеем $T\dfrac{dx}{ds}=A$, где постоянную A можно всегда считать положительной, отсчитывая дугу s в направлении, в котором x возрастает вместе с s. Подставляя это значение T во второе уравнение и полагая

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{\mu}{A}=\frac{2}{a^2},$$

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dy}{y'},$$

приведем его к виду

$$\frac{y'\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{2y\,dy}{a^2}=0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\sqrt{1+y'^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

где постоянная b^2 должна быть обязательно положительной, так как левая часть уравнения положительна. Уединяя радикал, возводя уравнение в квадрат и заменяя y' его значением $\dfrac{dy}{dx}$, получаем

$$dx=\pm\frac{a^2\,dy}{\sqrt{(b^2-y^2)^2-a^4}}.$$

Так как нить прикреплена к оси Ox, то уравнение должно иметь вещественное значение для y', когда $y=0$; следовательно, $b^2>a^2$. Обозначая через $\varphi(y)$ стоящий под радикалом многочлен четвертой степени, получим

$$\varphi(y)=(b^2+a^2-y^2)(b^2-a^2-y^2).$$

Величина y, начиная от нуля, может изменяться только в пределах

$$-\sqrt{b^2-a^2} \text{ и } +\sqrt{b^2-a^2}.$$

Построим кривую. Допустим, что нить закреплена в точке O (рис. 94) и что она расположена в углу yOx. Тогда x сначала возрастает вместе с y, $\frac{dx}{dt}$ положительно и

$$x=\int_0^y \frac{a^2\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}}. \tag{C}$$

Когда y возрастает, x тоже возрастает, причем до тех пор, пока y не сделается равным $\sqrt{b^2-a^2}$. Тогда x достигает значения

$$\xi=\int_0^{\sqrt{b^2-a^2}} \frac{a^2\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}}.$$

Таким путем получается ветвь OMA_1. Касательная в A_1 *горизонтальна.* Начиная с этого значения, y убывает, и для того, чтобы x продолжало возрастать, необходимо взять перед $\sqrt{\varphi(y)}$ знак —. Так получается вторая ветвь $A_1M_1O_1$, симметричная с первой ветвью OMA_1 относительно ординаты A_1B_1, так как одинаковым изменениям y отвечают одинаковые изменения x. При $y=0$ получается точка O_1 с абсциссой 2ξ. После этого y, становясь отрицательным, может убывать до значения $-\sqrt{b^2-a^2}$. При этом абсцисса будет все время возрастать до значения 3ξ, что соответствует точке A_2, в которой касательная горизонтальна. После этого y снова возрастает от $-\sqrt{b^2-a^2}$ до $+\sqrt{b^2-a^2}$. Начиная от точки A_2, необходимо брать перед радикалом знак $+$, и получится дуга $A_2O_2A_3$, пересекающая ось в точке O_2 с абсциссой 4ξ и т. д. Все получаемые таким образом последовательные волны тождественны с первой, и кривая аналогична *синусоиде.*

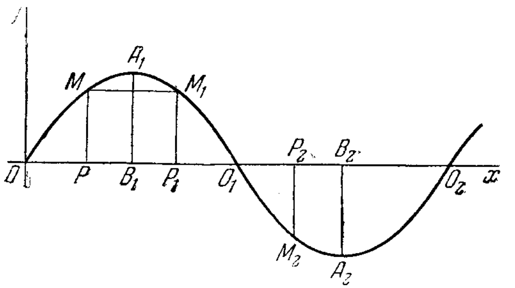


Рис. 94.

Уравнения легко интегрируются в эллиптических функциях. Положим в уравнении (C) кривой

$$y=t\sqrt{b^2-a^2},\quad k^2=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}<1,\quad 1-k^2=k'^2-\frac{2a^2}{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Тогда оно принимает вид

$$\frac{x\sqrt{2}}{ak'}=\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

откуда

$$t=\operatorname{sn}\frac{x\sqrt{2}}{ak'},\quad y=\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{sn}\frac{x\sqrt{2}}{ak'}.$$

Дифференциал ds дуги кривой будет

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \frac{(b^2-a^2)\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}}.$$

Сделав в этой формуле подстановку (1), мы получим для абсциссы ξ точки A_1 и для длины λ дуги OA_1 следующие два выражения:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{ak'}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{ak'}{\sqrt{2}}K,\\ \lambda &= \frac{a}{k'\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{(1+k^2-2k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

так как для точки A_1 величина t равна 1.

Когда λ и ξ *даны*, причем λ должно быть больше, чем ξ, так как дуга OA_1 больше своей проекции OB_1, то постоянные величины a и k^2 имеют единственную систему значений при условии, что $k^2 < 1$. В самом деле, вычисляя $\lambda-\xi$ и $\lambda+\xi$, имеем

$$\frac{\lambda-\xi}{\lambda+\xi} = k^2\frac{\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}}\,dt}{\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt}. \qquad (3)$$

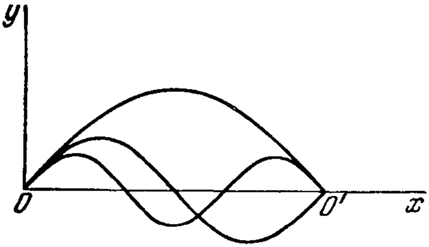


Рис. 95.

При $k^2 = 0$ отношение в правой части равно нулю; при увеличении k^2 числитель будет, очевидно, возрастать, а знаменатель убывать и, следовательно, отношение будет возрастать. При $k^2 = 1$, оно обратится в единицу. Таким образом, это отношение проходит один и только один раз через заданное значение $\frac{\lambda-\xi}{\lambda+\xi}$. Следовательно, постоянная k^2 будет иметь одно и только одно значение. Тогда из выражения (2), написанного для ξ, получим для a единственное значение $\frac{\xi\sqrt{2}}{Kk'}$.

Определение постоянных. Так как нить имеет заданную длину l и закреплена в точке O и в точке O' оси Ox с абсциссой α, то может представиться бесчисленное множество случаев.

1°. Нить имеет только одну полуволну между O и O' (рис. 95). Тогда ξ равно половине α, а λ — половине l. Величины ξ и λ известны и постоянная k^2 имеет значение, определяемое формулой (3); после этого $a = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2Kk'}$.

2°. Нить имеет две полуволны между O и O'. Тогда $\xi = \frac{\alpha}{4}$; $\lambda = \frac{\alpha}{4}$, а k^2 имеет то же значение, что и в предыдущем случае, так как $\frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi}$ имеет то же значение $\frac{\lambda - \alpha}{\lambda + \alpha}$. После этого

$$a = \frac{\alpha \sqrt{2}}{4Kk'}, \ldots$$

3°. Вообще, если нить имеет n полуволн между O и O', то $\xi = \frac{\alpha}{2n}$, $\lambda = \frac{l}{2n}$, k^2 имеет всегда одно и то же значение, но $a = \frac{\alpha \sqrt{2}}{2nKk'}$.

Следовательно, существует бесчисленное множество положений равновесия, которые все подобны первому относительно точки O с отношением подобия $1/2$, $1/3$, ..., $1/n$. (См. Аппель и Лякур, Théorie des fonctions elliptiques.)

143. Равновесие нити на поверхности. Пусть $f(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности, отнесенное к трем прямоугольным осям. Нить находится под действием непрерывных внешних сил. Обозначим через $F(X, Y, Z)$ силу, отнесенную к единице длины, в рассматриваемой точке.

Нить может скользить без трения, и реакция поверхности на элементе ds направлена по нормали. Пусть N — реакция, отнесенная к единице длины; ее проекции равны

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Можно считать, что нить находится в равновесии под действием сил $F\,ds$ и $N\,ds$, имеющих равнодействующую $\Phi\,ds$. Применяя общие формулы равновесия нитей, имеем три уравнения

$$\left.\begin{aligned} d\left(T \frac{dx}{ds}\right) + X\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\,ds = 0, \\ d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\,ds = 0, \\ d\left(T \frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\,ds = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которые совместно с уравнениями

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad f(x, y, z) = 0$$

определяют x, y, z, T и λ в функции s. Когда λ известно, то известной будет также и нормальная реакция, которая направлена относительно поверхности $f = 0$ в сторону, где f положительно или отрицательно, в зависимости от того, будет ли λ положительно или отрицательно. Так же, как и для свободной нити, если X, Y, Z

не содержат явно s, можно привести число неизвестных к четырем, заменяя везде ds через

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

и вычисляя, например, z, y, T, λ в функции x.

Для нахождения натяжения в общем случае мы имели

$$dT = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{2}$$

Здесь эта формула переходит в следующую:

$$dT = -\left[\left(X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz\right].$$

Так как нить лежит целиком на поверхности, то коэффициент при λ обращается в нуль и остается та же формула (2), что и для свободной нити. Если имеется силовая функция $U(x, y, z)$, то

$$dT = -dU, \quad T = -(U+h).$$

Например, если положить тяжелую однородную нить на поверхность, то, направляя ось Oz вертикально вверх, найдем, что сила F параллельна этой оси, направлена в противоположную сторону и равна по абсолютному значению весу p единицы длины нити. Тогда

$$dT = p\,dz, \quad T = p(z-h).$$

Рассмотрим плоскость $z=h$. Только что полученная формула показывает, что натяжение в точке M (рис. 96) равно весу части нити, равной расстоянию MQ от точки M до этой плоскости. Если, следовательно, удалить часть MB нити и оставить свешиваться через блок в точке M часть нити, равную MQ, то равновесие не нарушится.

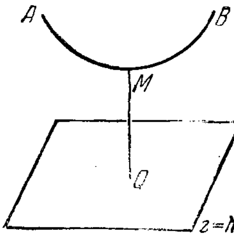


Рис. 96.

144. Примеры. 1°. *Геодезические линии.* Наиболее простым будет тот случай, когда на нить, растянутую на поверхности, не действуют никакие другие силы, кроме нормальной реакции N. Тогда предыдущее уравнение переходит в $dT=0$ и натяжение нити получается постоянным. Нить расположится по геодезической линии поверхности. Действительно, так как соприкасающаяся плоскость в какой-нибудь точке должна содержать силу N, то она будет нормальной к поверхности, что характеризует геодезическую линию.

Применим это к сфере. Так как реакции проходят через центр, то нить находится под действием центральных сил. Следовательно, ее фигура равновесия лежит в плоскости, проходящей через центр, и будет поэтому дугой большого круга.

Известно, что линия наименьшей длины, соединяющая две точки на поверхности, является одной из геодезических линий, проходящих через эти точки. Однако было бы неточным сказать, что каждая из геодезических линий будет минимальной по сравнению с бесконечно близкими линиями. Например, дуга большого круга, бóльшая 180°, соединяющая две точки на сфере, является геодезической линией. Между тем возможно найти между этими двумя точками путь бесконечно близкий и в то же время более короткий. Наоборот, на замкнутом цилиндре все геодезические линии, являющиеся винтовыми линиями, будут минимальными. Существует бесчисленное множество этих линий, соединяющих две точки на поверхности. Их можно получить, натянув по поверхности между этими точками нить и обернув ее один, два, ... раза вокруг цилиндра.

2°. *Сферическая цепная линия.* Фигура равновесия однородной тяжелой нити на сфере была исследована Бобилье (Жергоннь, 1829), Миндингом (Crelle, т. 12) и затем Гудерманом (там же, т. 33), который дал выражения интегралов при помощи эллиптических функций. Решение было дополнено Клебшем (Crelle, т. 57, § 6), Бирманом (Dissertation inaugurale, Берлин, 1865) и Шлегелем (Programm des Königlichen Wilhelms Gymnasium, Берлин, 1884).

Приняв центр сферы за начало координат, направив ось z вертикально вверх и, обозначив через p вес единицы длины нити, получим сначала для натяжения T значение $p(z-h)$ (п. 143). Так как равнодействующая сил (веса и реакции), приложенных к ds, находится все время в одной плоскости с осью Oz, то момент натяжения относительно этой оси постоянен. Следовательно, взяв в плоскости xOy полярные координаты r и θ, получим

$$Tr^2\,d\theta = C\,ds,$$

где C — произвольная постоянная. Заменив в этом уравнении T его значением и написав A вместо C, получим дифференциальное уравнение фигуры равновесия

$$(z-h)\,r^2\,d\theta = A\,ds.$$

Для интегрирования этого уравнения возведем его в квадрат и заметим, что вследствие соотношения

$$r = \sqrt{a^2-z^2},$$

где a — радиус сферы,

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2 = \frac{a^2\,dz^2}{r^2} + r^2\,d\theta^2.$$

Разрешая относительно $d\theta$, получим

$$d\theta = \frac{Aa\,dz}{(a^2-z^2)\sqrt{(h-z)^2(a^2-z^2)-A^2}},$$

откуда определяем выражение θ через z при помощи квадратуры. Переменная z может принимать лишь такие значения, для которых многочлен

$$\varphi(z) = (h-z)^2(a^2-z^2) - A^2$$

положителен. Следовательно, обозначая через z_0 координату z какой-нибудь точки нити, например одной из точек закрепления, имеем $\varphi(z_0) > 0$. Но $\varphi(a)$ и $\varphi(-a)$ отрицательны, и поэтому многочлен $\varphi(z)$ имеет один корень α между z_0 и a и один корень β между z_0 и $-a$. Переменная z может изменяться только между пределами α и β. Кривая на сфере расположена между двумя параллелями α и β, которых она попеременно касается. Координаты x, y, z точки кривой можно выразить через однозначные функции параметра u, определяемого уравнением

$$du = \frac{a\,dz}{\sqrt{(h-z)^2(a^2-z^2)-A^2}}.$$

(См. статью Аппеля в Bulletin de la Société mathématique, 1885 и статью Гомеца Тейксейра в Annales scientificos da Academia Polytechnica do Porto, т. IV, 1909.)

145. Естественные уравнения равновесия нити на поверхности. Пусть AA' — кривая равновесия, At — касательная к ней в точке A в направлении положительных дуг, An — нормаль в точке A к поверхности, считаемая положительной в направлении от точки A к центру кривизны O нормального сечения, проведенного через At, и R — радиус кривизны AO этого сечения (рис. 97). Если C — центр кривизны нити в той же точке A и $AC = \rho$ — радиус кривизны нити, то по теореме Менье $\rho = R\cos\theta$, где θ угол CAO. Обозначим, наконец, через Ap проекцию направления AC на касательную плоскость к поверхности в точке A. Элемент ds нити находится под действием заданной силы $F\,ds$ и нормальной реакции $N\,ds$, считаемой положительной в направлении AO. Равнодействующая $(F)+(N)$ двух сил F и N, на основании естественных уравнений равновесия свободной нити, равна равнодействующей сил $-\frac{dt}{ds}$ и $-\frac{T}{\rho}$, направленных соответственно по At и AC. Следовательно, сумма проекций сил F и N на какую-нибудь ось равна сумме проекций сил $-\frac{dT}{ds}$ и $-\frac{T}{\rho}$ на ту же ось. Спроектируем силы (F) и (N) последовательно на оси At, Ap, An. Тогда, обозначая через F_t, F_p, F_n проекции на эти оси силы F, получим

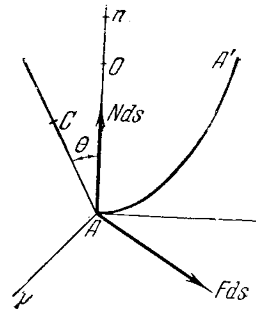


Рис. 97.

$$-\frac{dT}{ds} = F_t, \quad -\frac{T}{\rho}\sin\theta = F_p, \quad -\frac{T}{\rho}\cos\theta = F_n + N.$$

Из последнего уравнения получим реакцию N:

$$N = -\frac{T}{\rho}\cos\theta - F_n = -\frac{T}{R} - F_n.$$

Первые два уравнения являются естественными уравнениями равновесия нити на поверхности. В этих уравнениях величина $\frac{\rho}{\sin\theta}$ является *радиусом геодезической кривизны нити.*

Например, для сферической цепной линии (п. 144) F_n обозначает проекцию веса p на радиус сферы; следовательно, F_n равно $p\frac{z}{a}$. Так как R равно радиусу a сферы и T равно $p(z-h)$, то нормальная реакция для сферической цепной линии равна $-\frac{p}{a}(2z-h)$. Если нить находится между двумя бесконечно близкими сферическими поверхностями, то она давит на внутреннюю сферу в точках, где это значение N положительно, и на внешнюю сферу — в точках, где оно отрицательно. Точки, где $N=0$, являются в горизонтальной проекции точками перегиба.

Вернемся к общему случаю. Допустим, что нить находится в равновесии и будем деформировать поверхность таким образом, чтобы длины начерченных на ней линий *не изменялись.* Тогда геодезическая кривизна этих линий остается *неизменной.* В то же время сохраним для натяжения нити те же значения и изменим F таким образом, чтобы F_t и F_p не изменились. Тогда два естественных уравнения равновесия будут по-прежнему удовлетворяться, и *нить останется в равновесии.* Изменится только реакция N.

Вследствие этого нахождение фигуры равновесия нити на развертывающейся поверхности может быть сведено к случаю, когда эта поверхность — плоскость. Например, фигура равновесия тяжелой однородной цепочки на поверхности вертикального цилиндра является кривой, которая при развертывании цилиндра на вертикальную плоскость обращается в цепную линию. Фигурой равновесия тяжелой однородной цепочки на круговом конусе с вертикальной осью является кривая, которая при развертывании конуса обращается в фигуру равновесия нити, каждый элемент которой притягивается или отталкивается неподвижной точкой (вершиной конуса) с постоянной по величине силой. Дифференциальное уравнение этой кривой было нами найдено (п. 141).

III. Исследование одного определенного интеграла

146. Геометрическая задача. Нахождение фигуры равновесия нити в случае существования силовой функции может быть сведено при помощи интересного приема к отысканию *максимума* или *минимума некоторого определенного интеграла*, который встречается также при определении брахистохрон, при доказательстве принципа наименьшего действия и в общей задаче рефракции.

Пусть $\varphi(x, y, z)$ — непрерывная функция декартовых координат точки, определенная в некоторой области пространства, включающей все кривые, которые мы будем рассматривать. Разрешим сначала следующую задачу геометрии.

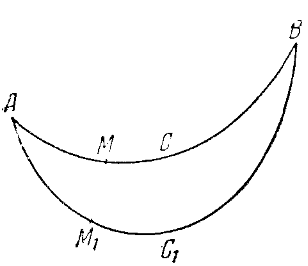


Рис. 98.

Среди всех кривых, соединяющих две неподвижные точки A и B (рис. 98), *найти такие, которые обращают интеграл*

$$I = \int_{(A)}^{(B)} \varphi(x, y, z)\, ds$$

в максимум или минимум. В этом интеграле ds обозначает элемент длины кривой, и интеграл распространен на всю кривую между точками A и B. Нетрудно представить себе, что для некоторых кривых C интеграл I имеет *максимум* или *минимум*. Например, если функция $\varphi(x, y, z)$ положительна при всех значениях x, y, z, то интеграл I будет положительным и не сможет обратиться в нуль; он будет тогда, очевидно, иметь минимум. В частности, если $\varphi(x, y, z) = 1$, то значение интеграла I равно длине кривой, соединяющей точки A и B, и кривая C, вдоль которой интеграл имеет минимум, есть прямая AB.

Пусть, в общем случае, C — кривая, обращающая интеграл в максимум или минимум. Выразим координаты x, y, z точки M этой кривой в функции какого-нибудь параметра q, который изменяется в пределах от a до b, когда точка M описывает дугу AMB. Обозначим через x', y', z' производные от x, y, z по q и положим

$$R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Имеем

$$ds = R\,dq,$$

и интеграл I вдоль C будет иметь значение

$$I = \int_a^b \varphi(x, y, z)\,R\,dq.$$

Для того чтобы выразить, что интеграл I имеет минимум, достаточно выразить, что значение I_1 того же интеграла, взятого вдоль *произвольной кривой* C_1, *бесконечно близкой* к C и соединяющей точки A и B, больше чем I.

Пусть ξ, η, ζ — произвольные функции от q, обращающиеся в нуль на пределах a и b и имеющие производные ξ', η', ζ'. Положим

$$x_1 = x + \varepsilon\xi, \quad y_1 = y + \varepsilon\eta, \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta, \tag{M_1}$$

где ε — бесконечно малая постоянная. Когда q изменяется от a до b, точка M_1 с координатами x_1, y_1, z_1 описывает кривую C_1, бесконечно близкую к C и проходящую через точки A и B. Имеем вдоль кривой C_1

$$I_1 = \int_a^b \varphi(x_1, y_1, z_1)\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2}\,dq.$$

Для оценки значения разности $I_1 - I$, т. е. вариации δI интеграла при переходе от кривой C_1 к кривой C, разложим I_1 по возрастающим степеням ε, останавливаясь на членах второго порядка. Имеем

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \varphi(x + \varepsilon\xi, y + \varepsilon\eta, z + \varepsilon\zeta) =$$
$$= \varphi + \varepsilon\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \varepsilon^2 P,$$

$$\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2} = \sqrt{(x' + \varepsilon\xi')^2 + (y' + \varepsilon\eta')^2 + (z' + \varepsilon\zeta')^2} =$$
$$= R + \varepsilon\left(\xi'\frac{\partial R}{\partial x'} + \eta'\frac{\partial R}{\partial y'} + \zeta'\frac{\partial R}{\partial z'}\right) + \varepsilon^2 Q,$$

где написано φ вместо $\varphi(x, y, z)$. Перемножая почленно, получим

$$\varphi(x_1, y_1, z_1)\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2} - \varphi R =$$
$$= \varepsilon\left[R\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \varphi\left(\xi'\frac{\partial R}{\partial x'} + \eta'\frac{\partial R}{\partial y'} + \zeta'\frac{\partial R}{\partial z'}\right)\right] + \varepsilon^2 S.$$

Умножая обе части на dq, интегрируя от a до b и замечая, что

$$R\,dq = ds, \quad \frac{\partial R}{\partial x'} = \frac{x'}{R} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{\partial R}{\partial y'} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{\partial R}{\partial z'} = \frac{dz}{ds},$$

получим

$$I_1 - I = \varepsilon \int_a^b \left[\left(\xi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) ds + \right.$$

$$\left. + \varphi \left(\xi' \frac{dx}{ds} + \eta' \frac{dy}{ds} + \zeta' \frac{dz}{ds} \right) dq \right] + \varepsilon^2 K. \qquad (1)$$

Освободимся от ξ', η', ζ' интегрированием по частям. Имеем

$$\int_a^b \varphi \frac{dx}{ds} \xi' \, dq = \Big|_a^b \varphi \frac{dx}{ds} \xi - \int_a^b \xi d \left(\varphi \frac{dx}{ds} \right)$$

и две аналогичные формулы для членов с η' и ζ'. Следовательно, окончательно,

$$I_1 - I = \varepsilon \Big|_a^b \left(\xi \frac{dx}{ds} + \eta \frac{dy}{ds} + \zeta \frac{dz}{ds} \right) \varphi - \varepsilon J + \varepsilon^2 K, \qquad (2)$$

где положено

$$J = \int_a^b \left\{ \xi \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} ds - d \left(\varphi \frac{dx}{ds} \right) \right] + \eta \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} ds - d \left(\varphi \frac{dy}{ds} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \zeta \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} ds - d \left(\varphi \frac{dz}{ds} \right) \right] \right\}.$$

Проинтегрированная часть равна нулю, так как ξ, η, ζ обращаются в нуль на пределах a и b. Для того чтобы интеграл I вдоль кривой C был максимумом или минимумом, надо, чтобы знак разности $I_1 - I$ сохранялся при любых бесконечно малых положительных или отрицательных значениях ε. Надо, следовательно, чтобы коэффициент J при ε равнялся *нулю*, так как, в противном случае, для достатоточно малых значений ε разность $I_1 - I$ будет иметь знак величины εJ. Следовательно, для того чтобы был максимум или минимум, необходимо, чтобы интеграл, который мы обозначили через J, равнялся нулю, и это должно быть каковы бы ни были произвольно выбранные функции ξ, η, ζ. Но это условие требует, чтобы в интеграле J коэффициенты при ξ, η, ζ были *тождественно равны нулю*; в противном случае, выбирая для ξ, η, ζ такие функции, которые при всяком значении q имеют такие же знаки, как и соответствующие коэффициенты, мы сделаем положительными все элементы интеграла J, который, очевидно, будет тогда отличным от нуля. Таким образом, искомая кривая C, осуществляющая максимум или минимум, должна удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,ds=0,\\ d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,ds=0,\\ d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,ds=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эти три уравнения приводятся к двум, что может быть непосредственно проверено, если их сложить, умножив предварительно на $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$; тогда, принимая во внимание хорошо известные соотношения

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1, \quad \frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds}=0,$$

мы придем к очевидному тождеству

$$d\varphi-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz\right)=0.$$

Уравнения (3) после замены ds выражением $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ приводятся к двум уравнениям второго порядка, общий интеграл которых определяет y и z в функции x и четырех произвольных постоянных:

$$\left.\begin{aligned} y=\psi(x,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4),\\ z=\chi(x,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4). \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Постоянные определяются из того условия, что кривая проходит через две заданные точки A и B, откуда получаются четыре уравнения для определения четырех постоянных. Таким образом определяются искомые кривые, соединяющие две точки. Не все эти кривые дают для интеграла максимум или минимум, но среди них находятся именно те, которые осуществляют максимум или минимум. Так как общие уравнения кривых C содержат четыре произвольных постоянных, то одна из этих кривых определяется четырьмя условиями. Кроме исключительных случаев можно, например, предположить, что кривая проходит через заданную точку и имеет в ней заданную касательную. Легко проверить, что если φ — постоянная, то кривые C, получаемые интегрированием уравнений (3), как мы это знали уже заранее, являются прямыми

$$y=c_1x+c_2, \quad z=c_3x+c_4.$$

Уравнения (3) показывают, *что искомые кривые C являются фигурами равновесия нити, находящейся под действием силы F, имеющей силовую функцию* — $\varphi(x,\ y,\ z)$, *причем натяжение нити должно иметь значение* $\varphi(x,\ y,\ z)$. Наоборот, пусть нить находится в равновесии и уравнения равновесия суть $d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+ +\frac{\partial U}{\partial x}ds=0, \ldots$, причем $T=-(U+h)$. Если на нити взять две фиксированные точки A и B, то фигура равновесия в общем случае придает максимальное или минимальное значение интегралу

$$\int_A^B \varphi\, ds, \quad \varphi=-(U+h)$$

и во всех случаях обращает в нуль вариацию этого интеграла (Мёбиус, Статика, ч. 2, гл. VII).

147. Формула Тэта и Томсона. Проделанные нами вычисления, при несколько иной интерпретации, приводят к важной теореме *Тэта и Томсона.* Пусть C — дуга одной из кривых, удовлетворяющих уравнениям (3), имеющая концы A и B, и пусть C_1 — другая кривая, бесконечно близкая к первой и имеющая концы A_1 и B_1, бесконечно близкие к A и B (рис. 99). Как и выше, можно перейти от кривой C к кривой C_1, полагая

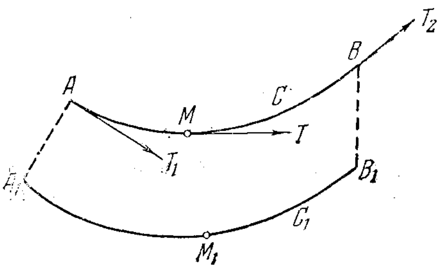


Рис. 99.

$$x_1=x+\varepsilon\xi,$$
$$y_1=y+\varepsilon\eta, \quad z_1=z+\varepsilon\zeta$$

с той только разницей, что $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$ *не обращаются больше в нуль* на пределах a и b, но при $q=a$ имеют значения $(\varepsilon\xi)_1$, $(\varepsilon\eta)_1$, $(\varepsilon\zeta)_1$, равные проекциям на оси координат отрезка AA_1, а при $q=b$ — значения $(\varepsilon\xi)_2$, $(\varepsilon\eta)_2$, $(\varepsilon\zeta)_2$, равные проекциям отрезка BB_1. Разность I_1-I значений интеграла $\int\varphi\, ds$ вдоль кривых C_1 и C по-прежнему определяется из формулы (2), в которой проинтегрированная часть, образующая первый член, не равна больше нулю, в то время как интеграл J, стоящий во втором члене, равен нулю, так как кривая C удовлетворяет, по предположению, уравнениям (3) и все элементы интеграла J равны нулю. Следовательно, пренебрегая в формуле (2) членом второго порядка малости ε^2K, имеем

$$I_1-I=\delta I=\varepsilon\left|\left(\xi\frac{dx}{ds}+\eta\frac{dy}{ds}+\zeta\frac{dz}{ds}\right)\varphi\right._a^b.$$

Значения $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$ на пределах a и b указаны выше; обозначим через $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ значения функции φ в точках A и B; заметим, наконец, что так как $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ суть направляющие косинусы α, β, γ касательной MT к кривой C, направленной в сторону возрастания дуги, т. е. от A к B, то значения указанных величин на обоих пределах равны направляющим косинусам α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 двух касательных AT_1 и BT_2 на обоих концах. Следовательно, для δI получается выражение

$$\delta I=[(\varepsilon\xi)_2\alpha_2+(\varepsilon\eta)_2\beta_2+(\varepsilon\zeta)_2\gamma_2]\,\varphi(B)-[(\varepsilon\xi)_1\alpha_1+(\varepsilon\eta)_1\beta_1+(\varepsilon\zeta)_1\gamma_1]\,\varphi(A),$$

которое имеет простую геометрическую интерпретацию. Величина

$$(\varepsilon\xi)_2\,\alpha_2 + (\varepsilon\eta)_2\,\beta_2 + (\varepsilon\zeta)_2\,\gamma_2$$

представляет собою проекцию отрезка BB_1 на касательную BT_2; она равна $\overline{BB_1}\cos\widehat{T_2BB_1}$; точно так же вторая величина, содержащаяся в δI, равна $\overline{AA_1}\cos\widehat{T_1AA_1}$. Окончательно,

$$\delta I = \overline{BB_1}\varphi(B)\cos\widehat{T_2BB_1} - \overline{AA_1}\varphi(A)\cos\widehat{T_1AA_1},$$

или в более симметричной форме

$$\delta I = -\overline{AA_1}\varphi(A)\cos\widehat{BAA_1} - \overline{BB_1}\varphi(B)\cos\widehat{ABB_1}, \tag{4}$$

так как угол ABB_1 является дополнительным к углу T_2BB_1, а угол BAA_1 равен углу T_1AA_1.

Формула (4) Тэта и Томсона совершенно аналогична хорошо известной элементарной формуле, выражающей изменение длины отрезка прямой, и получающейся из этой при $\varphi = 1$ (см. Бертран, Курс дифференциального исчисления, стр. 22).

Следствия, которые получаются из формулы (4), тождественны с теми, которые выводятся из аналогичной формулы для прямых в теории разверток и в теории параллельных кривых и поверхностей. Мы укажем здесь те следствия, которые приводят к интересным результатам в теории брахистохрон, в теории принципа наименьшего действия и в задаче рефракции. Мы предполагаем в последующем, что функция φ не обращается в нуль в рассматриваемой области пространства.

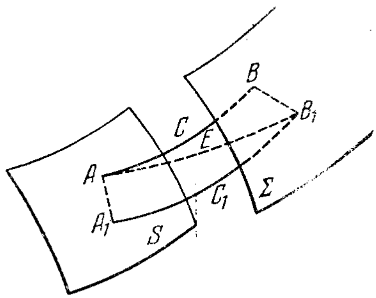


Рис. 100.

1°. *Приложение.* Даны две поверхности S и Σ. *Какую кривую нужно провести от одной поверхности к другой, для того, чтобы интеграл I, взятый вдоль этой кривой, имел максимум или минимум?* Пусть A и B (рис. 100) — две *неизвестные* точки, в которых искомая кривая пересекает обе поверхности. В частности, эта кривая будет одной из тех, соединяющих точки A и B, которые обращают интеграл I в максимум или минимум. Следовательно, это — одна из кривых C, определяемых уравнениями (3). Для определения точек A и B заметим, что при переходе от кривой ACB, которая обращает интеграл I между двумя поверхностями в максимум или минимум, к произвольной бесконечно близкой кривой, и, в частности, к другой бесконечно близкой кривой C, вариация δI должна быть равна *нулю.* Вычислим эту вариацию при переходе от кривой ACB к другой бесконечно близкой кривой C; пусть это будет кривая AEB_1, которая выходит из той же самой точки A и оканчивается в точке B_1 поверхности Σ. Тогда на основании полученной выше формулы

$$\delta I = -\overline{BB_1}\varphi(B)\cos\widehat{ABB_1}.$$

Так как вариация δI должна быть равна нулю, то нулю должен быть равен косинус. Следовательно, угол ABB_1 должен быть прямым для всех положений точки B_1 на поверхности Σ и искомая кривая C *нормальна* к этой поверхности. Точно так же она *нормальна* и к поверхности S. В частности, если $\varphi = 1$, то получается известный элементарный результат, заключающийся в том, что для нахождения кратчайшего расстояния между S и Σ нужно провести общую нормаль к обеим поверхностям. Отсюда видно, что искомая кривая является фигурой равновесия нити, концы которой скользят без трения по двум поверхностям, причем натяжение равно φ и силовая функция равна $-\varphi$. Очевидно, что та же теорема будет справедлива, если одну из поверхностей заменить неподвижной кривой или точкой.

2°. Теорема Тэта и Томсона. *Если рассматриваются кривые C, выражаемые уравнениями* (3) *и нормальные к заданной поверхности S и если на каждой из этих кривых откладывается от точки A, в которой она пересекает поверхность S, дуга AB такая, что интеграл*

$$I = \int_{(A)}^{(B)} \varphi \, ds,$$

взятый вдоль этой кривой, имеет постоянное значение, одинаковое для всех кривых, то геометрическое место точек B есть поверхность Σ, нормальная ко всем кривым.

В самом деле (рис. 100), если перейти от кривой C к бесконечно близкой кривой C_1, то вариация δI, заданная формулой (4), равна, по предположению, нулю, но так как $\cos \widehat{BAA_1} = 0$ в силу того, что кривая C нормальна к S, то и $\cos \widehat{ABB_1} = 0$, и кривая C нормальна к Σ.

Эта теорема, которая содержит как частный случай ($\varphi = 1$) теорию параллельных поверхностей, справедлива, очевидно, и в предельном случае, когда поверхность S сводится к сфере бесконечно малого радиуса, т. е. когда кривые C проходят через неподвижную точку.

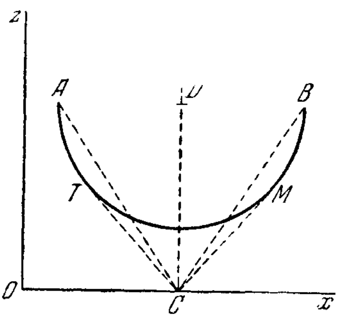


Рис. 101.

148. Примеры. 1°. Пусть функция $\varphi(x, y, z)$ имеет вид pz. Будем рассматривать кривые, проведенные только в части пространства, расположенной над плоскостью xy. Кривые C являются фигурами равновесия нити, на каждый элемент которой действует вертикальная сила. Проекция последней на ось Oz равна $-p\,ds$, причем натяжение T равно pz. Следовательно, кривые являются цепными линиями, лежащими в вертикальных плоскостях и имеющими основания в горизонтальной плоскости xOy. Действительно, мы видели, что если z_0 есть ордината основания находящейся в равновесии цепочки, то натяжение T равно $p(z - z_0)$; следовательно, z_0 должно быть равно нулю.

Этот результат имеет интересное геометрическое толкование. Возьмем в вертикальной плоскости zOx две точки A и B, лежащие над осью Ox, и кривую AMB, соединяющую эти точки (рис. 101). Площадь поверхности, образованной вращением этой кривой вокруг оси Ox, равна

$$2\pi \int_{(A)}^{(B)} z \, ds.$$

Следовательно, кривая AMB, описывающая *наименьшую* площадь, есть цепная линия, соединяющая обе точки A и B и имеющая основанием ось Ox. Если искать цепную линию, удовлетворяющую этим условиям, то окажется, что она не всегда существует. Например, если обе точки A и B имеют одинаковые ординаты, то она существует только в том случае, когда половина угла при вершине C равнобедренного треугольника ACB, имеющего основание AB и вершину в точке C на оси, меньше угла $DCT = 33°32'$, который образован осью симметрии CD (рис. 101) и касательной CT к цепной линии, проведенной из точки пересечения оси симметрии с основанием. Мы не будем здесь указывать условий существования цепной линии при произвольном положении точек A и B. Эти условия установлены впервые Гольдшмидтом (Determinatio superficiei mimoe, etc., Гёттинген, 1831).

Когда цепная линия не существует, то кривая AMB, при вращении которой описывается минимальная площадь, состоит из двух ординат AA' и BB' заданных точек и отрезка оси Ox, заключенного между A' и B'. В самом деле, дифференциальные уравнения кривой суть

$$d\left(pz\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad d\left(pz\frac{dz}{ds}\right)-p\,ds=0.$$

Из первого имеем $pz\dfrac{dx}{ds}=k$. Если k не равно нулю, то получается цепная линия. Если цепной линии нет, то это решение должно быть отброшено. В этом случае следует положить $k=0$, и, следовательно,

$$pz\frac{dx}{ds}=0.$$

Это показывает, что либо z равно нулю, либо x постоянен. Таким образом, часть кривой, не совпадающая с осью Ox, состоит из прямых, к ней перпендикулярных.

2°. Пусть $\varphi=\dfrac{1}{z}$ и по-прежнему рассматриваются точки и кривые, расположенные над плоскостью xOy. Все кривые C лежат в вертикальных плоскостях, причем в одной из них, а именно в плоскости zOx, они имеют дифференциальные уравнения

$$d\left(\frac{1}{z}\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad d\left(\frac{1}{z}\frac{dz}{ds}\right)+\frac{1}{z^2}ds=0,$$

которые приводятся к одному уравнению. В первом уравнении заменим ds через $\sqrt{dx^2+dz^2}$ и затем разделим в нем переменные. Получим

$$\frac{1}{z}\frac{dx}{ds}=\frac{1}{c},\quad\text{или}\quad dx=\pm\frac{z\,dz}{\sqrt{c^2-z^2}}.$$

Это уравнение интегрируется сразу. Обозначая через a новую постоянную, найдем

$$(x-a)^2+z^2-c^2=0,$$

т. е. уравнение окружности с центром на оси Ox. Следовательно, в пространстве кривые C суть окружности, *перпендикулярные* к плоскости xy. Через две точки A и B проходит, очевидно, одна и только одна из этих окружностей.

Геометрия, в которой эти окружности C играют ту же роль, что и прямые в обычной геометрии, и в которой сохранено элементарное понятие угла, а за *длину дуги какой-нибудь кривой* принимается интеграл $\displaystyle\int\frac{dz}{z}$, распространенный на эту дугу, является неэвклидовой геометрией Лобачевского.

149. Та же задача на поверхности. Нахождение фигуры равновесия нити на поверхности в случае, когда существует силовая функция, также приводится к определению максимума или минимума некоторого определенного интеграла.

Среди всех кривых, проведенных на неподвижной поверхности S и соединяющих две ее заданные точки A и B, нужно найти те, которые обращают интеграл

$$I = \int_{(A)}^{(B)} \varphi(x, y, z)\, ds$$

в максимум или минимум.

Пусть C — искомая кривая, а C_1 — *проведенная на поверхности* между теми же двумя точками A и B бесконечно близкая кривая. Обозначим через x, y, z координаты точки M кривой C. Тогда координаты бесконечно близкой к ней точки M_1 кривой C_1 будут

$$x_1 = x + \delta x, \quad y_1 = y + \delta y, \quad z_1 = z + \delta z,$$

где для краткости несколько изменены обозначения, принятые в п. 146, и пишется δx, δy, δz вместо $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$.

Если отбросить величины, содержащие ε^2, то согласно выкладкам, приведенным в п. 146 для вариации δI интеграла I, соответствующей переходу от кривой C к кривой C_1, имеющей те же концы, получается выражение

$$\delta I = \int_{(A)}^{(B)} \left\{ \delta x \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} ds - d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \delta y \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} ds - d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right)\right] + \delta z \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} ds - d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right)\right] \right\}. \quad (1)$$

В рассматриваемом случае эта вариация должна быть равна нулю при переходе не к произвольной бесконечно близкой кривой, но к бесконечно близкой кривой, лежащей на поверхности. Вследствие этого не все три вариации δx, δy, δz произвольны; если

$$f(x, y, z) = 0$$

есть уравнение поверхности S, то должно выполняться условие

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0, \quad (2)$$

которое выражает, что вариация функции $f(x, y, z)$ равна нулю при переходе от C к C_1, и которое показывает, что одна из вариаций, например δx, есть функция двух других вариаций δy и δz, которые остаются произвольными. При этом условии, обозначая через λ произвольную функцию, получим

$$\int_{(A)}^{(B)} \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z\right) ds = 0.$$

Вычтем этот равный нулю интеграл из δI. Получим

$$\delta I = \int_{(A)}^{(B)} \left\{ \delta x \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) ds - d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \delta y \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) ds - d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right)\right] + \delta z [\ldots] \right\},$$

где член с δz аналогичен двум первым членам. Эта вариация δI должна быть равна нулю, каковы бы ни были λ, δy и δz. Мы можем распорядиться величиной λ таким образом, чтобы коэффициент при δx обратился в нуль. Тогда величина, стоящая под знаком интеграла, будет содержать только члены с δy и δz, и так как δI должно равняться нулю при любых δy и δz, то коэффициенты при этих двух вариациях должны тоже равняться нулю. Таким образом, при подходящем выборе λ получаются три следующих уравнения, которые мы выписываем с обратными знаками:

$$d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right)+\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)ds=0,$$
$$d\left(\varphi\frac{dy}{ds}\right)+\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)ds=0,$$
$$d\left(\varphi\frac{dz}{ds}\right)+\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)ds=0.$$

Эти уравнения, вместе с уравнением поверхности, определяют искомые кривые C.

Но *эти уравнения в точности совпадают с уравнениями равновесия нити, лежащей на поверхности S, когда силовая функция равна* $-\varphi$ *и натяжение равно* φ. Мы получаем, таким образом, результат, тождественный с тем, который мы получили для кривых в пространстве.

Пример. Если $\varphi=1$, то интеграл I определяет длину кривой AB. Следовательно, если искать на поверхности линии наименьшей длины, соединяющие две точки A и B, то получится фигура равновесия нити, которая лежит на поверхности и на которую не действуют никакие непосредственно приложенные силы (п. 144).

150. Рефракция. Покажем вкратце, что этот же интеграл $\int\varphi(x, y, z)\,ds$ встречается в общей задаче рефракции. Этот факт, по крайней мере в наиболее простых случаях, был отмечен уже Мопертюи, Иваном Бернулли и Эйлером. Лаплас даже рассматривал с этой точки зрения двойную рефракцию (Mémoires de l'Institut, 1809).

Когда световой луч переходит из пустоты в однородную среду, (рис. 102), ограниченную произвольной поверхностью S, то он подчиняется двум следующим законам:

1°. Падающий луч AP, преломленный луч PA_1 и нормаль PN к поверхности S находятся в одной плоскости.

2°. Справедливо соотношение

$$\frac{\sin i}{\sin r}=n,$$

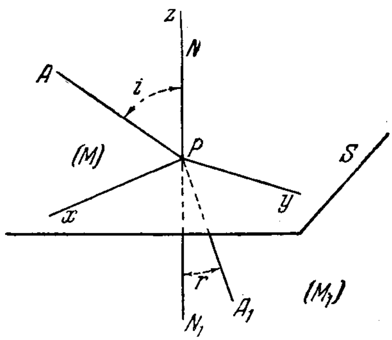


Рис. 102.

где i — угол APN, r — угол A_1PN_1 и n — постоянная, называемая *показателем преломления среды относительно пустоты* или *абсолютным показателем преломления.*

Пусть (M) и (M_1) — две однородные среды с абсолютными показателями преломления n и n_1, разделенные поверхностью S. Если световой луч переходит из первой среды во вторую, то первый закон сохраняется и

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_1}{n}.$$

Напомнив эти законы, переходим к следующей задаче.

Пусть A и A_1 — две заданные точки по одну и другую стороны от S, а P — произвольная точка на этой поверхности. Каково должно быть положение точки P, чтобы сумма

$$\sigma = n\overline{AP} + n_1\overline{A_1P}$$

была минимумом? Покажем, что минимум получится тогда, когда две прямые AP и PA_1 удовлетворяют закону преломления при переходе из среды (M) в среду (M_1). В самом деле, если обозначить через a, b, c координаты точки A, через a_1, b_1, c_1 — координаты точки A_1 и через x, y, z — координаты точки P, то расстояния AP и A_1P будут соответственно иметь значения

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}.$$

Сумма σ будет функцией двух независимых переменных x и y, так как z есть функция от x и y, определяемая уравнением $f(x, y, z) = 0$ поверхности S. Для того чтобы найти значения x и y, обращающие σ в минимум, необходимо приравнять нулю частные производные от σ по x и y, что приводит к двум уравнениям

$$n\frac{(x-a)+(z-c)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\overline{PA}} + n_1\frac{(x-a_1)+(z-c_1)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\overline{PA_1}} = 0,$$

$$n\frac{(y-b)+(z-c)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\overline{PA}} + n_1\frac{(y-b_1)+(z-c_1)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\overline{PA_1}} = 0,$$

которые вместе с уравнением поверхности определяют координаты точки P. Определив таким образом эту точку, сделаем замену осей координат: примем точку P за начало (рис. 102), за ось Oz примем нормаль в сторону точки A и за плоскость zx плоскость, содержащую A, так что координата b точки A будет равна нулю, а координаты a и c будут положительны. Величины x, y, z, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ будут тогда для точки P равны нулю и полученные уравнения примут вид

$$-\frac{na}{\overline{PA}} - \frac{n_1a_1}{\overline{PA_1}} = 0, \quad b_1 = 0.$$

Второе уравнение показывает, что точка A_1 также лежит в плоскости zPx, что выражает первый закон преломления. Первое уравнение показывает, что a_1 отрицательно и, если через i и r обозначить углы, образуемые отрезками AP и PA_1 с нормалью Pz, то из этого уравнения получим

$$n \sin i - n_1 \sin r = 0,$$

так как $a/\overline{PA}$ и $-a_1/\overline{PA_1}$ равны $\sin i$ и $\sin r$. Это — второй закон преломления. Таким образом, искомый минимум получается вдоль пути, по которому луч идет от A к A_1.

Вообразим теперь несколько поверхностей S_1, S_2, ..., S_p, разделяющих однородные среды. Пусть над S_1 находится среда с абсолютным показателем преломления n, между S_1 и S_2 — среда с показателем n_1, между S_2 и S_3 — среда с показателем n_2, и, наконец под S_p — среда с показателем n_p. Возьмем в первой среде точку A, в последней среде точку B и рассмотрим многоугольник $AP_1P_2 \ldots P_pB$ с вершинами на каждой из поверхностей, идущий от точки A к точке B (рис. 103). Если искать, каким должен быть этот многоугольник для того, чтобы сумма

$$\sigma = n\overline{AP_1} + n_1\overline{P_1P_2} + \ldots + n_p\overline{P_pB}$$

была минимумом, то согласно предыдущему получится, что он должен быть тем *путем, по которому идет световой луч от A к B, следуя законам преломления.*

Допустим, наконец, что число поверхностей неограниченно увеличивается и притом так, что стороны многоугольника, так же как и разности $n - n_1$, $n_1 - n_2, \ldots$, стремятся к нулю. Тогда совокупность рассмотренных сред превратится в непрерывную среду, в которой абсолютный показатель преломления n будет непрерывной функцией $\varphi(x, y, z)$ координат. Многоугольник, по которому следует световой луч, превратится в кривую, а сумма σ станет интегралом

$$I = \int_A^B n\,ds.$$

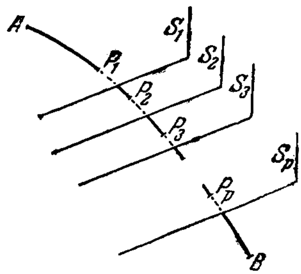


Рис. 103.

Таким образом, путь светового луча из точки A в точку B совпадает с кривой, которая обращает интеграл I в *минимум* и для которой мы составили дифференциальные уравнения. По этому вопросу можно указать на статью О. Бонне (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1887). Эти же кривые были исследованы Викером (Comptes Rendus, т. CVIII, стр. 330). Наиболее существенные их свойства были даны еще Эйлером в его «Теории брахистохрон».

IV. Плоские эластики

151. Натяжение и изгибающий момент. Пусть дан однородный упругий стержень, длина которого велика по сравнению с его толщиной и который имеет по всей своей длине одинаковые поперечные сечения. *Осью стержня* называют геометрическое место центров тяжести его поперечных сечений. *Естественным состоянием равновесия* стержня является та его форма, которую он принимает, когда на него не действуют никакие силы, которые стремились бы его деформировать, например, когда он положен на стол. Если к стержню приложить силы, стремящиеся его изогнуть, то он изменит свою форму и придет в новое состояние равновесия, которое называется *вынужденным состоянием равновесия*, соответствующим данным силам. Мы исследуем здесь наиболее простые случаи равновесия, когда изогнутая ось стержня (эластика) является плоской кривой. Но сначала укажем некоторые общие предложения, касающиеся такого рода задач.

Рассмотрим упругий стержень, ось которого в естественном состоянии имеет вид плоской кривой C_0, и пусть ρ_0 — радиус кривизны в какой-нибудь точке M этой кривой. Допустим теперь, что стержень деформируют, приложив к нему некоторые силы, но деформируют так, чтобы не изменилась длина стержня и чтобы его ось осталась плоской и приняла новую форму C. Радиус кривизны в точке M будет теперь ρ. В этом положении вынужденного равновесия силы упругости определяются следующими законами.

Если разрезать стержень в точке M, то для сохранения равновесия нужно будет к сечению в точке M приложить силу T, лежащую в плоскости кривой C и пару с вектором момента, перпендикулярным к этой плоскости, численное значение которого N (*изгибающий момент*) пропорционально изменению кривизны, так что

$$N = B\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right),$$

где B — постоянный коэффициент, зависящий от природы стержня.

152. Ось стержня была первоначально дугой окружности. Рассмотрим наиболее простой случай, когда ось стержня была первоначально *дугой окружности* M_1AM_2 или *прямой*, так что $\frac{1}{\rho_0} = \text{const}$. Пусть к концам M_1 и M_2 стержня приложены две силы T_1 и T_2, лежащие в плоскости его изогнутой оси при равновесии, и две пары N_1 и N_2 с моментами, перпендикулярными к этой плоскости.

Обе силы T_1 и T_2 равны и противоположно направлены, так как единственными действующими на стержень внешними силами, сумма проекций которых на произвольное направление должна равняться нулю, являются силы T_1 и T_2 и пары N_1 и N_2.

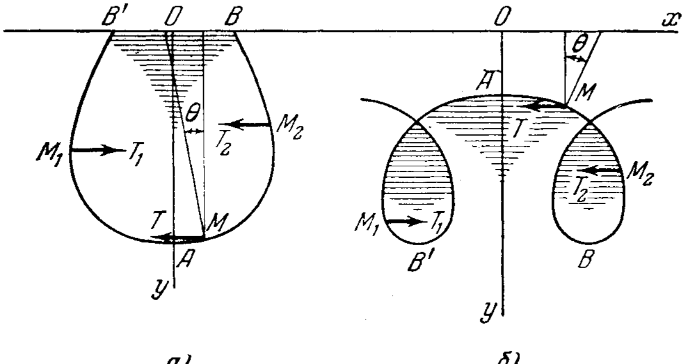


Рис. 104.

С другой стороны, так как сумма моментов внешних сил относительно любой точки плоскости равняется нулю, то силы T_1 и T_2 составляют пару, которая уравновешивает пары N_1 и N_2.

Примем за ось Ox (рис. 104) прямую, параллельную силам T_1 и T_2. Пусть M — произвольная точка оси стержня. Если стержень разрезать в точке M, то часть M_1M будет находиться в равновесии под действием следующих внешних сил: 1) силы T_1 и пары N_1, действующих на конце M_1; 2) силы T и пары N, действующих в точке M. Пара N имеет момент

$$N = B\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right). \tag{1}$$

Эти внешние силы, приложенные к дуге M_1M, уравновешиваются. Следовательно, сила T равна по величине силе T_1, но направлена противоположно ей. С другой стороны, сумма моментов всех внешних сил относительно любой точки плоскости должна равняться нулю. Возьмем сумму моментов относительно точки O; тогда, обозначая через y и y_1 ординаты точек M и M_1, имеем

$$T_1y_1 - Ty - N_1 + N = 0,$$

или, заменяя T через T_1 и N его значением (1), получим уравнение

$$T_1(y_1 - y) - N_1 + B\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = 0.$$

Если сила T_1 равна нулю, т. е. если к концам стержня прикладываются только пары, то из этого уравнения получаем для $1/\rho$ постоянное значение, и фигура вынужденного равновесия будет другой дугой окружности.

Оставляя этот случай в стороне, разрешим уравнение относительно $1/\rho$ и в получившейся правой части вынесем T_1/B в качестве множителя за скобки. Получим уравнение вида

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{c^2}(y - b),$$

где через c^2 обозначена положительная постоянная B/T_1 и через b — другая постоянная. Ось x всегда можно переместить параллельно самой себе так, чтобы последняя постоянная исчезла и чтобы уравнение равновесия приняло вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y}{c^2}. \tag{2}$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение кривой, форму которой примет ось стержня. Для интегрирования этого уравнения обозначим через θ угол, образованный нормалью в точке M с осью Oy (рис. 104); если точка M переместится на ds, то нормаль повернется на угол $d\theta$ и мы получим

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{y}{c^2},$$

откуда, дифференцируя, получим

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}=\frac{1}{c^2}\frac{dy}{ds}=-\frac{1}{c^2}\sin\theta, \tag{3}$$

так как $\frac{dy}{ds}=-\sin\theta$ и $\frac{dx}{ds}=\cos\theta$.

Умножим обе части уравнения (3) на $\frac{d\theta}{ds}$ и проинтегрируем. Получим

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=\frac{2}{c^2}(\cos\theta+\mu), \qquad ds=\frac{c\,d\theta}{\pm\sqrt{2(\cos\theta+\mu)}}, \tag{4}$$

где μ — произвольная постоянная. Теперь находим

$$dx=\cos\theta\,ds=\frac{c\cos\theta\,d\theta}{\pm\sqrt{2(\cos\theta+\mu)}},$$

откуда

$$x=c\int\limits_0^\theta\frac{\cos\theta\,d\theta}{\pm\sqrt{2(\cos\theta+\mu)}}. \tag{5}$$

Здесь нет необходимости добавлять постоянную, так как всегда можно в качестве оси Oy выбрать нормаль к кривой, перпендикулярную к оси Ox. С другой стороны, имеем

$$y=\frac{c^2}{\rho}=c^2\frac{d\theta}{ds}=\pm c\sqrt{2(\cos\theta+\mu)}. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) определяют x и y в функции θ. Здесь нужно различать три случая в зависимости от того, будет ли μ лежать внутри промежутка $(-1, +1)$, или будет больше 1, или равняться 1.

Укажем вкратце форму кривой в этих трех случаях. Анализ будет основываться на следующих замечаниях.

Условимся отсчитывать дугу s кривой от точки A, лежащей на оси Oy (рис. 104), и примем в качестве положительного направления для s направление движения точки, абсцисса которой, будучи в начале равна нулю, становится положительной. Когда кривая описывается в этом направлении, s всегда возрастает; следовательно, ds всегда положительно и в формуле (4) радикал всегда имеет тот же знак, что и $d\theta$. Этот знак радикала должен быть сохранен во всех последующих формулах. Из формул

$$\frac{dy}{ds}=-\sin\theta, \qquad \frac{dx}{ds}=\cos\theta \tag{7}$$

видно, что при возрастании s координаты y и x возрастают или убывают в зависимости от того, положительны или отрицательны величины $-\sin\theta$ и $\cos\theta$. Наконец, точками перегиба являются те точки кривой, в которых она пересекает ось x, так как уравнение (2) показывает, что ρ обращается в бесконечность при $y=0$, и наоборот.

Ось Oy является осью симметрии кривой.

Первый случай. $-1 < \mu < 1$. В этом случае можно положить $\mu = -\cos\alpha$, и радикал, содержащийся в формулах, принимает вид

$$\sqrt{2(\cos\theta + \mu)} = \sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}.$$

Для того чтобы он был вещественным, необходимо, чтобы θ, начиная от нуля, изменялось между $-\alpha$ и $+\alpha$. Когда θ изменяется от 0 до α, получается дуга AB (рис. 104, *а*; рис. 105, *а*, *б*, *в*); когда θ изменяется от 0 до $-\alpha$, получается симметричная дуга AB'.

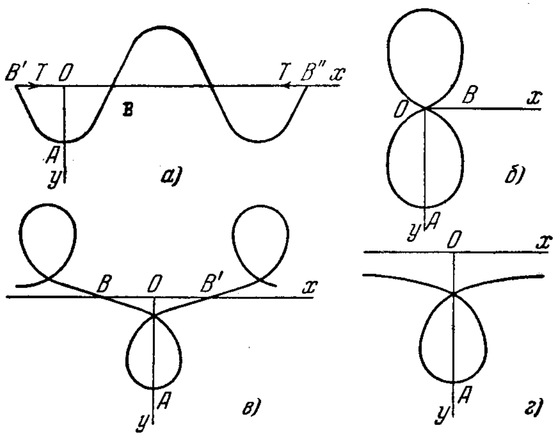


Рис. 105.

В точках B и B' кривая пересекает ось Ox под углом α, так как нормаль в точке, например, B образует с осью Oy угол α. Абсцисса точки B на основании формулы (5) будет

$$x_0 = c\int_0^\alpha \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}}, \tag{8}$$

где радикал берется положительный.

Когда угол α — острый или прямой, величина x_0 получается положительной, так как все элементы интеграла положительны (кривая на рис. 105, *а*); когда α возрастает, начиная от $\pi/2$, величина x_0 будет сначала положительной (форма на рис. 104, *а*), затем обратится в нуль при некотором значении α_0 величины α (форма на рис. 105, *б*) и после этого становится отрицательной (форма на рис. 105, *в*); когда α близко к π, тогда x_0 отрицателен и очень велик; это вытекает из того, что при $\alpha = \pi$ получается $x_0 = -\infty$; действительно, тогда

$$x_0 = c\int_0^\pi \frac{\cos\theta\, d\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}},$$

а этот интеграл равен $-\infty$. В предельном случае, когда $\mu = 1$, кривая будет иметь форму, указанную на рис. 105, *г* с асимптотой Ox.

Если s продолжает возрастать, начиная от точки B, то угол θ будет обязательно убывать, так как он не может быть больше α. Начиная с этого момента, нужно будет перед радикалом брать знак минус. Когда θ изменяется от α до $-\alpha$, получается новая ветвь кривой, симметричная первой относительно B, и т. д. Получается бесконечное число одинаковых волнообразных линий, как в синусоиде.

Второй случай. Если $\mu > 1$, то θ может изменяться от 0 до 2π; y и $1/\rho$ никогда не обращаются в нуль; кривая имеет вид, указанный на рис. 104, *б*.

Интегрирование в этих двух случаях может быть выполнено в эллиптических функциях (см. Аппелль и Лякур, Principes de la théorie des fonctions elliptiques, приложения).

Третий случай. В промежуточном случае, когда $\mu = 1$, кривая, как мы уже говорили, будет иметь асимптотой ось Ox, так как $x_0 = -\infty$ (рис. 105, *г*). В этом случае все интегрирования могут быть выполнены в элементарных функциях.

153. Случай первоначально прямолинейного стержня, сжимаемого на концах двумя одинаковыми и прямо противоположными силами. Наблюдения показывают, что первоначально, прямолинейный упругий стержень, к концам которого приложены две одинаковые и противоположно направленные силы T, не изгибается до тех пор, пока значение T не превысит некоторого предела; говорят, что тогда имеет место продольный изгиб. Когда T меньше этого предела, единственно возможной фигурой равновесия является прямолинейная форма. Лишь при значениях T превосходящих указанный предел, возможны изученные выше криволинейные фигуры равновесия. Найдем этот предел.

В рассматриваемом случае, так как ось стержня в естественном состоянии *прямолинейна*, то $\frac{1}{\rho_0} = 0$ и из формулы (1) для пары получаем

$$N = B\frac{1}{\rho}.$$

Эта пара обращается, следовательно, в нуль одновременно с кривизной. Но мы предположили, что к обоим концам B' и B'' стержня приложены две силы T, равные, противоположно направленные и *не образующие пары*; отсюда вытекает, что для обоих концов $N = 0$ и $\frac{1}{\rho} = 0$, следовательно, эти концы являются точками перегиба, как указано на рис. 105, *а*. Когда стержень очень мало отклоняется от первоначальной прямолинейной формы, величина α очень мала. Она равна нулю для прямолинейной формы. Допустим, что стержень может принять волнообразную фигуру равновесия, показанную на рис. 105, *а*, с n волнами, и определим постоянную α, зная длину l стержня и сила T на обоих концах B' и B''. Постоянная c будет тогда известна и равна $\sqrt{B/T}$. Согласно выражению (4) для ds, дуга AB имеет длину

$$\breve{AB} = c\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}}.$$

Сделаем подстановку

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

тогда

$$\breve{AB} = c\int_0^\alpha \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Обозначим, для краткости, $\sin\frac{\alpha}{2}=k$ и сделаем замену переменной

$$\sin\frac{\theta}{2}=ku.$$

Когда θ изменяется от 0 до α, тогда u изменяется от 0 до 1 и мы имеем

$$\breve{AB}=cK,$$

где

$$K=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{9}$$

Для всей длины l стержня, равной $2n\breve{AB}$, получаем

$$l=2ncK, \quad K=\frac{l}{2nc}. \tag{10}$$

Это уравнение, в котором $k=\sin\frac{\alpha}{2}$ неизвестно, определяет угол α. Для того чтобы фигура равновесия с n волнами существовала, необходимо и достаточно, чтобы из этого уравнения получалось для k значение, заключенное между 0 и 1. Но при $k=0$ имеем, согласно равенству (9), $K=\frac{\pi}{2}$; при возрастании k интеграл K постоянно возрастает, так как возрастает подынтегральное выражение, и при $k=1$ интеграл K становится бесконечным. Таким образом, когда k изменяется от 0 до 1, интеграл K проходит один и только один раз через любое значение, больше чем $\pi/2$. Для того чтобы уравнение (10) имело для k решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{l}{2nc}\geqslant\frac{\pi}{2}.$$

Заменяя c его значением $\sqrt{B/T}$, находим

$$T\geqslant\frac{\pi^2Bn^2}{l^2}.$$

Таким является условие существования фигуры равновесия с n волнами. Наименьшее значение нижнего предела для T соответствует значению $n=1$. Следовательно, для того чтобы существовала возможная фигура равновесия с одной волной, необходимо, чтобы

$$T\geqslant\frac{\pi^2B}{l^2}.$$

Если давление T меньше этого предела, то единственно возможной фигурой равновесия будет прямая линия.

154. Стержень, изгибаемый действующим в одной плоскости постоянным нормальным давлением. Эта задача исследована Морисом Леви (Comptes Rendus, т. XCVII, стр. 694); интегрирование по-прежнему выполняется в эллиптических функциях, как это показано в Traité Альфена и в Principes de la théorie des fonctions elliptiques Аппеля и Лякура.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Натянутая невесомая нить проходит через находящиеся на одинаковых расстояниях неподвижные кольца $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Показать, что если имеет место равновесие, то натяжение постоянно и давление на каждое кольцо A_k обратно пропорционально радиусу окружности, проведенной через это кольцо A_k и через два других соседних с ним кольца A_{k-1} и A_{k+1}. Вывести отсюда предельным переходом закон давления на кривую для невесомой нити, протянутой по этой кривой, по которой она может скользить без трения (Пуансо, Statique).

2. Невесомая нить заданной длины закреплена своими концами в двух неподвижных точках A и B. По этой нити могут скользить без трения два кольца M_1 и M_2, находящихся соответственно под действием сил F_1 и F_2, заданных по величине и направлению. Найти положение равновесия системы. (Надо воспользоваться сказанным в конце п. 128.)

3. Для веревочного многоугольника, находящегося в равновесии, нужно взять моменты φ_i сил и моменты τ_{ik} натяжений относительно некоторой точки. Показать, что для этих векторов можно построить многоугольник, аналогичный многоугольнику Вариньона, заменив векторы F_i и T_{ik} векторами φ_i и τ_{ik}.

4. Показать, что если веревочный многоугольник находится в равновесии, то, построив векторы, сопряженные относительно некоторой сферы (мнимой) силам и натяжениям, и прямые, сопряженные сторонам так, как об этом указывалось в упражнении 3 в конце главы I, мы получим новый многоугольник, находящийся в равновесии. Стороны одного многоугольника являются прямыми, сопряженными сторонам второго; вершины одного суть точки, сопряженные плоскостям, образованным двумя последовательными сторонами другого.

5. *Фермы. Теорема Ренкина* (см. Philos. Magazine, т. XXVII, 1864, стр. 92; Максвелл, там же, стр. 250). Силы, приложенные к узлам пространственной фермы, находятся в равновесии, когда они перпендикулярны и пропорциональны граням многогранника, ребра которого лежат в плоскостях, проведенных через неподвижную точку O нормально стержням фермы.

Решение. Предполагая, что многогранник из стержней находится в равновесии, построить многогранник, образованный векторами, сопряженными силам и натяжениям относительно мнимой сферы с центром O в соответствии с методом, указанным раньше (упражнение 3 в конце главы I). (См. статью Гидо Гука, Crelle, т. 100, стр. 365.)

6. Шарнирный четырехугольник, образованный четырьмя стержнями неизменной длины a, b, c, d, находится под действием четырех сил, приложенных в его четырех вершинах. Каковы должны быть эти силы, чтобы было равновесие? (Эта задача решена Мёбиусом, Статика.)

7. *Шарнирная система Фусса*. Рассматривается плоский многоугольник, образованный твердыми материальными стержнями, сочлененными своими концами шарнирно. В плоскости многоугольника в середине каждой стороны, перпендикулярно к ней, приложены силы, пропорциональные длинам соответствующих сторон. Доказать, что фигурой равновесия является вписанный в окружность многоугольник.

8. Радиус кривизны, находящейся в равновесии тяжелой однородной нити, изменяется пропорционально квадрату натяжения (Мёбиус).

9. Рассмотрим несколько одинаковых однородных нитей, вытянутых сначала по прямым линиям от точки P до точек $N, N_1, N_2, \ldots, N_i$, лежащих на одной вертикали. После этого точка P несколько смещается по горизонтали таким образом, что она приближается к вертикали и переходит в точку M. Тогда эти нити, которые предполагаются тяжелыми, расположатся по цепным линиям. Доказать:

1) что все цепные линии имеют одинаковый параметр a;

2) что их вершины лежат на цепной линии того же параметра a, обращенной вогнутостью к основанию и имеющей вершину в точке M (Мёбиус).

10. Найти положения равновесия однородной тяжелой нити, подчиненной указываемым ниже условиям на концах, причем длина нити предполагается заданной:

1°. Один из концов закреплен в точке A, другой проходит через бесконечно малый блок, находящийся на такой же высоте как и точка A, и затем свободно свешивается.

2°. Нить проходит через два бесконечно малых блока, расположенных на одной высоте, и оба конца свободно свешиваются. (*Ответ*: обе свешивающиеся части имеют одинаковую длину и оканчиваются у основания цепной линии; имеются два положения равновесия: одно устойчивое, другое неустойчивое.)

3°. Оба конца скользят без трения по двум одинаковым соприкасающимся внешним образом окружностям, центры которых лежат на одной высоте.

4°. Нить замкнута и проходит через два бесконечно малых блока A и B. [*Ответ*: две цепные линии ASB и $AS'B$ с общим основанием; если через более низкий блок A провести горизонталь $AU'U$, пересекающую обе кривые в точках U' и U, то длины обеих цепных линий обратно пропорциональны дугам BU и $B'U$ (Мёбиус).]

5°. Оба конца закреплены в неподвижных точках, находящихся на одной высоте; вдоль нити может скользить без трения бесконечно малое кольцо M, к которому подвешен груз P. (*Ответ*: кольцо расположится на середине нити; обе части MA и MB суть две цепные линии с общим основанием; в точке M получается угловая точка; натяжеиия дуг MA и MB уравновешиваются грузом P.)

11. Найти фигуру равновесия, которую принимает под действием ветра прямоугольный парус $ABCD$, закрепленный двумя противоположными краями на двух вертикальных реях AB и CD. (Действием веса преиебрегаем; предполагается, что ветер дует горизонтально и его давление на элемент паруса нормально к этому элементу и пропорционально его площади и квадрату нормальной составляющей скорости ветра. Можно считать очевидным, что парус примет форму цилиндра с вертикальными образующими и что вид прямого сечения не зависит от высоты. Следовательно, достаточно выразить, что полоса между двумя плоскостями двух бесконечно близких прямых сечений находится в равновесии. Эту полосу можно отождествить с гибкой нерастяжимой нитью. Прилагая к ней естественные уравнения, найдем, что она примет форму цепной линии и что натяжение постоянно.)

12. Найти фигуру равновесия нити, на каждый элемент которой действует вертикальиая сила, пропорциональная горизонтальной проекции этого элемента. (Парабола — предельный случай веревочного многоугольника висячих мостов.)

Определить постоянные, зная, что нить имеет заданную длину и закреплена в двух заданных точках.

13. Найти фигуру равновесия тяжелой нити, плотность которой изменяется пропорционально длине дуги s, отсчитываемой от наиболее низкой точки.

14. Тот же вопрос, полагая, что плотность равна $\dfrac{k}{\cos^2 \frac{s}{a}}$ (окружность).

15. Определить закон изменения плотности тяжелой нити в функции s для того, чтобы под действием веса оиа приняла форму наперед заданной кривой (параболы с вертикальиой осью, окружности и т. д.). Ответ на этот вопрос получится, если исходить из естественного уравнения (п. 138).

16. *Цепная линия одинакового сопротивления.* Так называют цепь переменной толщины такую, что в фигуре равновесия толщина в каждой точке пропорциональна натяжению в этой точке. В этом случае вероятность разрыва во всех точках одинакова (Кориолис). Требуется определить уравнение этой кривой и закон изменения толщины.

Ответ. Пусть σ — прямое сечение цепи, изменяющееся с s, p — вес единицы объема; вес элемента ds равен $p\sigma\, ds$. Если за начало координат принять наиболее низкую точку, то уравнение кривой будет

$$e^{\frac{y}{a}} \cos \frac{x}{a} = 1,$$

а для закона изменения толщины σ получим

$$\sigma = \frac{T_0}{a \cos \frac{x}{a}}.$$

17. Найти фигуру равновесия нити, на каждый элемент ds которой действует сила $F\,ds$, пересекающая неподвижную ось и нормальная к ней, причем F есть функция только расстояния r от элемента до оси.

Ответ. Принимая заданную ось за ось Oz и обозначая через r и θ полярные координаты в плоскости xOy, получим три уравнения:

$$T = -\int F\,dr, \qquad T\frac{dz}{ds} = C, \qquad Tr^2 \frac{d\theta}{ds} = K.$$

Каков бы ни был закон силы получается дифференциальное уравнение вида

$$dz = \frac{K}{C} r^2\, d\theta,$$

которое показывает, что касательные к кривой принадлежат линейному комплексу.

18. Частный случай предыдущей задачи, когда $F = \mu r$ (μ — постоянная), при произвольных условиях на концах. Эта задача исследована Клебшем при помощи особого метода, который будет изложен в аналитической механике (Crelle, т. 157, стр. 93).

Мы рассмотрели (п. 142) случай, когда оба конца нити закреплены в точках оси.

19. Найти фигуру равновесия нити в плоскости, зная, что на каждый ее элемент действует сила, пропорциональная этому элементу и образующая с ним постоянный угол. [Применить естественные уравнения; кривая является логарифмической спиралью (О. Бонне).]

20. Найти закон вертикальной силы, под действием которой нить располагается по заданной плоской кривой.

[Задача не будет вполне определенной, если в формулировке ничего не добавить относительно природы силы. Чтобы задача стала определенной, необходимо задать переменную, в функции которой должна быть выражена сила. Если нить лежит в плоскости xOy и сила $Y\,ds$ параллельна оси Oy, то Y может быть выражен в функции одной из величин x, y, s, α, где α — угол касательной с осью Ox, или в функции нескольких из этих величин сразу. Например, если заданная кривая есть окружность $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, то естественное уравнение (п. 138) будет

$$Y = \frac{A}{a \cos^2 \alpha}, \tag{1}$$

далее, так как $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{x}{y}$ и $s = a\alpha$, то

$$Y = \frac{Aa}{y^2}, \tag{2}$$

$$Y = \frac{Aa}{a^2 - x^2}, \tag{3}$$

$$Y = \frac{A}{a\cos^2\frac{s}{a}}. \tag{4}$$

Это — различные законы, отвечающие заданной окружности.]

Наоборот, найти фигуру равновесия нити, находящейся под действием вертикальной силы, закон которой выражается одной из предыдущих формул (1), (2), (3), (4). Получатся совершенно разные кривые в зависимости от взятого закона. Все они при надлежащем подборе постоянных могут оказаться окружностью $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

21. Найти закон центральной силы, под действием которой нить расположится по заданной плоской кривой.

[Здесь можно повторить те же замечания, что и в предыдущем упражнении. Принимая центр сил за начало координат и обозначая через r и θ полярные координаты, получим

$$F = -C\frac{d}{dr}\left(\frac{ds}{r^2\,d\theta}\right),$$

где F рассматривается как положительная или отрицательная величина в зависимости от того, будет ли сила отталкивающей, или притягивающей.] Пример:

$$\text{окружность,}\quad r = 2a\cos\theta,\quad ds = 2a\,d\theta,\quad F = \frac{4aC}{r^3}.$$

22. Найти фигуру равновесия нити, каждый элемент которой притягивается или отталкивается неподвижным центром обратно пропорционально квадрату расстояния. (Получится уравнение вида $\frac{1}{r} = a + b\cos m\theta$, или $\frac{1}{r} = a + b\operatorname{ch} m\theta$, или, как промежуточный случай, $\frac{1}{r} = a + b\theta^2$.)

23. Если одна и та же кривая является фигурой равновесия нити под действием силы F_1 при натяжении T_1, и силы F_2 при натяжении T_2, то она является также фигурой равновесия нити под действием силы $(F) = (k_1F_1) + (k_2F_2)$ при натяжении $(T) = (k_1T_1) + (k_2T_2)$, где k_1 и k_2 — постоянные. Использовать естественные уравнения.

24. Свободная нить под действием заданной силы F располагается по некоторой кривой C. Эту кривую осуществляют материально и протягивают по ней нить, подвергнув ее действию той же силы F. Показать, что в этом втором случае нормальная реакция кривой C на элемент ds лежит в соприкасающейся плоскости и имеет значение $k\,ds/\rho$, где k — постоянная, а ρ — радиус кривизны.

25. Пусть M — произвольная точка нити, находящейся в равновесии. Показать, что главный момент относительно точки M всех внешних сил, действующих на нить от конца M_0 до точки M, равен нулю (Мёбиус). (Этот результат выводится из принципа затвердевания в применении к дуге M_0M. Можно вновь установить результаты, указанные в тексте, применив это условие к части находящейся в равновесии цепной линии, заключенной

между вершиной M_0 и точкой M, и приняв в качестве вспомогательной переменной натяжение T_0 в точке M_0.)

26. Для тяжелой цепочки переменной плотности, находящейся в равновесии на сфере, гиперболоид, у которого образующими одного семейства являются натяжения в точках A и B, и вертикаль, проведенная через центр тяжести дуги AB, проходит через центр сферы. (Для доказательства следует предположить, что дуга AB затвердела и заметить, что приложенные к этой дуге внешние силы: натяжения в точках A и B, вес и равнодействующая реакции сферы должны уравновешиваться.)

27. Найти фигуру равновесия гибкой и нерастяжимой невесомой нити, по которой проходит электрический ток и которая находится под действием магнитного полюса O.

[Геодезическая линия кругового конуса с вершиной в точке O (Дарбу).]

Напомним, что действие полюса O на элемент ds, находящийся на расстоянии r от точки O, нормально к плоскости $O\,ds$ и равно по величине $\frac{ds}{r^2}\sin(r, ds)$.

28. Среди кривых, *проведенных на заданной поверхности* S между двумя точками, рассматриваются те кривые C, которые обращают в минимум интеграл $I=\int \varphi\,ds$, т. е. кривые, которые были определены в п. 149. Показать, что при переходе от какой-нибудь такой кривой AB к бесконечно близкой кривой A_1B_1, лежащей на поверхности, вариация интеграла попрежнему определяется формулой Тэта и Томсона. Вывести отсюда такие же следствия, как и для кривых C в пространстве (п. 147).

29. В плоскости zOx рассматриваются цепные линии, имеющие основанием ось Ox и пересекающие нормально заданную кривую C. На каждой из этих цепных линий от точки A, в которой она пересекает кривую C, откладывается дуга AB такая, что она описывает при вращении вокруг оси Ox определенную площадь S. Доказать, что геометрическое место точек B есть кривая C', нормальная к каждой цепной линии. (Приложение теоремы Томсона и Тэта.)

30. Даны две неподвижные точки A и B и неподвижные поверхности $S_1, S_2, \ldots, S_p$ (рис. 103, п. 150). Рассмотрим точки $P_1, P_2, \ldots, P_p$, которые могут скользить без трения по этим поверхностям. Допустим, что первая точка P_1 притягивается к точке A постоянной по величине силой n и к точке P_2 постоянной по величине силой n_1; вторая точка P_2 притягивается к точке P_1 постоянной силой n_1 и к точке P_3 постоянной силой n_2 и т. д. Доказать, что положением равновесия системы является путь светового луча, идущего от A к B и подчиняющегося законам преломления, указанным в тексте.

31. Доказать, что путь $AP_1P_2\ldots P_pB$ светового луча от A к B по законам преломления (п. 150) совпадает с фигурой равновесия веревочного многоугольника, вершины которого A и B закреплены, а вершины $P_1, P_2, \ldots, P_p$ могут скользить без трения по поверхностям $S_1, S_2, \ldots, S_p$ и для которого натяжение стороны P_kP_{k+1} равно n_k. (Другая форма условий предыдущей задачи.)

32. Если вдоль кривой (п. 146), соединяющей точки A и B, функция $\varphi(x, y, z)$ *принимает положительные и отрицательные значения*, то интеграл

$$\int_{(A)}^{(B)} \varphi(x, y, z)\,ds,$$

взятый по этой кривой, не может быть ни максимумом, ни минимумом. (Вейерштрасс. См. заметку Кобба Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1891).

33. Пусть A и B — две точки, из которых одна расположена выше, а другая ниже плоскости xOy. Если среди кривых, соединяющих эти две точки, искать ту, которая обращает в максимум или минимум интеграл

$$\int_{(A)}^{(B)} z^n \, dz,$$

где n — целое положительное четное число, то получится, что эта кривая состоит из двух перпендикуляров AA' и BB', опущенных из точек A и B на плоскость xOy и из прямой $A'B'$.

34. Рассмотрим функцию $\varphi(x, y, z)$, конечную и непрерывную в области пространства, расположенной по одну сторону от некоторой поверхности S, на которой эта функция принимает постоянное значение k. Пусть $\varphi_1(x, y, z)$ — — другая функция, конечная и непрерывная по другую сторону этой поверхности S и принимающая на ней постоянное значение k_1. Пусть, наконец, A — точка в первой области, а B — во второй. Найти, какой кривой нужно соединить эти две точки, чтобы получить *максимум* или *минимум* для интеграла

$$I = \int_{(A)}^{(P)} \varphi(x, y, z)\, ds + \int_{(P)}^{(B)} \varphi_1(x, y, z)\, ds,$$

где P — точка пересечения искомой кривой с поверхностью S.

(Дуги AP и BP являются кривыми, образующими, соответственно, первый и второй интегралы в максимум или минимум; касательные t и t_1 к этим кривым в точке P лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности S в той же точке и образуют с этой нормалью углы i и i_1, для которых $\dfrac{\sin i}{\sin i_1} = \dfrac{k_1}{k}$.)

35. Если дугу AP перемещать нормально к некоторой поверхности Σ, которую она пересекает в точке A, и если на кривых AP и BP предыдущего упражнения отложить такие дуги, что интеграл I *будет иметь постоянное значение*, то геометрическим местом точек B будет поверхность Σ_1, нормальная к дугам PB. (Это свойство доказывается при помощи соотношения Тэта и Томсона (п. 147), которое надо последовательно применить к вариации каждого из обоих интегралов, составляющих I.)

36. Упругий прямолинейный вертикальный стержень, находящийся в естественном состоянии, имеет заделанный конец A. Другой его конец B подвергается действию вертикальной силы T. Каков предел силы T, начиная с которого стержень изгибается?

ГЛАВА VIII

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ СКОРОСТЕЙ

155. Исторический обзор. Принцип возможных скоростей применялся Галилеем в теории некоторых простых машин и затем Валлисом в его «Механике». Декарт пользовался правилом, похожим на правило Галилея, для того, чтобы свести всю статику к одному единственному принципу. Но (цитируем дословно Лагранжа) «Иван Бернулли был первым, понявшим общность принципа возможных скоростей и его полезность для решения задач статики. Это видно из одного из его писем к Вариньону, датированного 1717 годом, которое последний поместил в начале девятого раздела своей «Новой Механики», раздела, целиком посвященного доказательству справедливости для различных приложений принципа, о котором идет речь, и посвященного его использованию. Этот же принцип привел впоследствии к появлению другого принципа, предложенного Мопертюи в 1740 г. в Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris под названием «Закона покоя», и развитого затем в более общей форме Эйлером в 1751 г. в Mémoires de l'Académie de Berlin. Наконец, этот же самый принцип лежит в основе принципа, данного Куртивроном в Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris за 1748 и 1749 гг. И вообще я считаю возможным утверждать, что любой общий принцип, который, быть может, будет еще открыт в науке о равновесии, будет не чем иным, как тем же принципом возможных скоростей, рассматриваемым с иной точки зрения и иначе выраженным. Но этот принцип не только сам по себе является очень простым и очень общим: он обладает, кроме того, особо ценной и уникальной выгодой, позволяющей выразить в одной общей формуле все задачи, которые можно предложить на равновесие тел». (Лагранж, Аналитическая механика, часть первая, § 17.)

После Лагранжа было предложено несколько доказательств принципа возможных скоростей. Одно из наиболее известных принадлежит Амперу; изложение его можно найти, например, в Механике Депейру. Позднее К. Нейман предложил другое доказательство (Berichte der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, март, 1886). Мы изложим здесь классическое доказательство, основанное на анализе различных видов простых связей.

I. Формулировка и доказательство принципа в случае связей, выражающихся равенствами

156. Возможное перемещение и работа. Пусть M — материальная точка, к которой, среди других сил, приложена также сила F. Допустим, что этой точке сообщено произвольное бесконечно малое перемещение MM'; это сообщенное точке перемещение называют *возможным перемещением* для того, чтобы отличить его от *действительного перемещения*, которое эта точка совершает под действием приложенных к ней сил. Элементарная работа

$$F\overline{MM'}\cos \widehat{FMM'} \tag{1}$$

называется *возможной работой* силы F, соответствующей перемещению MM'. К этой возможной работе можно тогда применить все, что говорилось об элементарной работе (глава IV). Ограничимся напоминанием двух следующих предложений.

Для одного и того же возможного перемещения MM' возможная работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к точке M, равна сумме работ составляющих сил.

Если возможное перемещение MM' есть геометрическая сумма нескольких перемещений, то работа одной и той же силы на перемещении MM' равна сумме работ этой силы на составляющих перемещениях.

Если обозначить через δt бесконечно малый промежуток времени, в течение которого осуществляется возможное перемещение MM', то вектор V, равный $\frac{\overline{MM'}}{\delta t}$ и направленный по MM', называется *возможной скоростью*, сообщенной точке M. Заменяя MM' через $V\delta t$, можно написать возможную работу в виде

$$FV\cos(F, V)\,\delta t, \tag{2}$$

так как угол между силой F и вектором V равен углу между этой силой и перемещением MM'.

Аналитически, в прямоугольной системе, если проекции силы обозначить через X, Y, Z, а проекции перемещения через δx, δy, δz, то возможную работу можно выразить следующим образом:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Мы будем брать возможную работу в форме (1); первоначально ее чаще брали в форме (2). Если будет употребляться форма (2) и если будут рассматриваться возможные перемещения нескольких различных точек, то условимся считать, что для всех этих точек промежуток δt имеет одно и то же значение.

157. Формулировка принципа. Установив это, рассмотрим систему точек, подчиненных связям *без трения*, которые могут быть выражены при помощи равенств. Разделим все силы, приложенные к различным точкам, на две группы: *реакции связей*, происходящие от связей, наложенных на систему, и силы *непосредственно приложенные*, или *заданные силы*, которые действуют на систему. Тогда принцип возможных перемещений формулируется следующим образом.

Необходимые и достаточные условия равновесия системы заключаются в том, что для любого возможного ее перемещения, допускаемого связями, сумма возможных работ непосредственно приложенных сил равна нулю.

Мы сначала установим справедливость этого принципа для некоторого числа простых случаев.

158. Свободная точка. Пусть дана совершенно свободная материальная точка и пусть X, Y, Z — равнодействующая непосредственно приложенных к ней сил. В этом случае любое перемещение будет возможным, так как отсутствуют связи. Возможная работа, соответствующая какому-нибудь из этих перемещений, есть

$$\mathcal{T} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z.$$

Если точка находится в равновесии, то X, Y, Z равны нулю и, следовательно, действительно $\mathcal{T} = 0$, каково бы ни было перемещение δx, δy, δz. Наоборот, если $\mathcal{T} = 0$, каковы бы ни были δx, δy, δz, то

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

и точка находится в равновесии.

159. Точка на поверхности. Рассмотрим точку, которая может перемещаться без трения по неподвижной поверхности

$$f(x, y, z) = 0$$

и находится под действием силы F. В этом случае имеется одна связь, выражаемая предыдущим уравнением, и единственными перемещениями, допускаемыми этой связью, являются те, которые происходят по поверхности. Если точка находится в равновесии, то сила будет нормальна к поверхности и, следовательно, ко всем возможным перемещениям. Тогда возможная работа будет равна нулю на всех этих перемещениях. Наоборот, если работа $\mathcal{T}$ равна нулю на любом перемещении MM', лежащем на поверхности, то из выражения

$$\mathcal{T} = F\,\overline{MM'}\cos(F, MM')$$

следует, что либо $F = 0$, либо $\cos(F, MM') = 0$, т. е. либо сила равна нулю, либо сила нормальна к поверхности. В обоих случаях имеет место равновесие.

Выведем снова в качестве упражнения уравнения равновесия точки на поверхности, исходя из принципа возможных скоростей. Мы должны иметь

$$\mathcal{T} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

при единственном условии, что приращение δx должно быть связано с произвольными приращениями δy и δz соотношением

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0,$$

которое выражает, что перемещение MM' происходит по заданной поверхности. Умножим это уравнение на λ и сложим с предыдущим. Получим

$$\left(X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z=0,$$

каковы бы ни были λ, δy, δz. Выберем λ так, чтобы обратить в нуль первый коэффициент. Тогда, так как δy и δz произвольны, их коэффициенты должны тождественно равняться нулю. Таким образом, получим одновременно:

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Это — действительно уравнения равновесия, полученные нами ранее другим путем (п. 91). Сила, вызванная связью, является нормальной реакцией N поверхности, и написанные уравнения равновесия показывают, что точка M, предполагаемая совершенно свободной, находится в равновесии под одновременным действием заданной силы и силы, имеющей проекции $\lambda\frac{\partial f}{\partial x}$, $\lambda\frac{\partial f}{\partial y}$, $\lambda\frac{\partial f}{\partial z}$. Отсюда следует, что эта последняя сила представляет собой не что иное, как нормальную реакцию. Эта реакция называется *реакцией связи*; она происходит от связи, наложенной на точку.

Если поверхность задана в форме

$$x=\varphi(q_1, q_2),\quad y=\psi(q_1, q_2),\quad z=\omega(q_1, q_2),$$

то для всех вариаций δq_1 и δq_2 величин q_1 и q_2 перемещение δx, δy, δz, определяемое этими уравнениями, будет происходить по поверхности. Возможная работа

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z$$

для такого рода перемещения примет вид

$$Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2$$

и условия равновесия будут те же, что и полученные ранее:

$$Q_1=0,\quad Q_2=0.$$

Примечание. Во всех случаях, независимо от того, *будет ли точка находиться в равновесии или нет*, для любого возможного перемещения, допускаемого связью, работа реакции связи, т. е. нормальной реакции, равна *нулю*.

160. Точка на кривой. Если материальная точка вынуждена оставаться на неподвижной кривой

$$f(x, y, z)=0, \quad f_1(x, y, z)=0,$$

то единственным перемещением, допускаемым этой связью, будет перемещение по кривой. Непосредственно видно, что если имеет место равновесие, то работа заданной силы на возможном перемещении равна нулю, так как сила нормальна к кривой, и, наоборот, если работа на возможном перемещении равна нулю, то сила либо равна нулю, либо нормальна к перемещению, причем в обоих случаях имеет место равновесие. Выведем отсюда уравнения равновесия, которые уже были получены нами ранее (п. 92).

Мы должны иметь

$$\mathcal{T}=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=0$$

для всех перемещений, допускаемых связями, т. е. для всех δx, δy, δz, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z=0,$$

которые выражают, что перемещение происходит по кривой. Следовательно, только одна из величин δx, δy, δz, например δz, остается произвольной. Умножим теперь два последних уравнения на λ и λ_1 и сложим их с первым. Получим:

$$\left(X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\delta x+\left(Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\delta y+$$
$$+\left(Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\delta z=0,$$

каковы бы ни были λ, λ_1, δz. Если λ и λ_1 определить так, чтобы два первых коэффициента равнялись нулю, то и третий тоже должен будет обратиться в нуль, так как выражение должно равняться нулю при любом δz. Следовательно, имеем одновременно

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}=0,$$
$$Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}=0,$$
$$Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}=0.$$

Эти уравнения выражают, что существует равновесие между непосредственно приложенной силой и силой, имеющей проекции

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Эта сила является нормальной *реакцией связи.*

Если уравнения кривой представлены в виде

$$x = \varphi(q), \quad y = \psi(q), \quad z = \omega(q),$$

то возможная работа будет

$$\mathcal{T} = (X\varphi' + Y\psi' + Z\omega')\,\delta q,$$

и условие равновесия будет

$$X\varphi' + Y\psi' + Z\omega' = 0.$$

В рассматриваемом случае, так же как и в предыдущем, независимо от того, будет ли точка находиться в равновесии, или нет, для любого перемещения, допускаемого связями, работа нормальной реакции связи равна *нулю*.

161. Свободное твердое тело. Пусть свободное твердое тело находится под действием заданных сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Это тело образовано большим числом материальных точек, вынужденных оставаться на неизменных расстояниях друг от друга. Это и будут связи, наложенные на систему. В этом новом случае единственными возможными перемещениями, допускаемыми связями, являются те, при которых форма тела остается неизменной. Пусть для одного из этих перемещений a, b, c обозначают проекции скорости поступательного движения, а p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости. Эти шесть величин могут быть выбраны совершенно произвольно, так как твердому телу можно сообщить какое угодно перемещение. Скорость точки (x, y, z) имеет проекции

$$V_x = a + qz - ry, \quad V_y = b + rx - pz, \quad V_z = c + py - qx,$$

так что возможная работа

$$\mathcal{T}_\nu = X_\nu\,\delta x_\nu + Y_\nu\,\delta y_\nu + Z_\nu\,\delta z_\nu$$

силы F_ν, приложенной к точке (x_ν, y_ν, z_ν), равна

$$\mathcal{T}_\nu = X_\nu(a + qz_\nu - ry_\nu)\,\delta t + Y_\nu(b + rx_\nu - pz_\nu)\,\delta t + \\ + Z_\nu(c + py_\nu - qx_\nu)\,\delta t.$$

Мы можем это выражение написать так:

$$\mathcal{T}_\nu = \delta t\,[aX_\nu + bY_\nu + cZ_\nu + p(y_\nu Z_\nu - z_\nu Y_\nu) + \\ + q(z_\nu X_\nu - x_\nu Z_\nu) + r(x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu)].$$

Следовательно, сумма работ на возможных перемещениях всех непосредственно приложенных сил будет

$$\mathcal{T} = \Sigma\mathcal{T}_\nu = \delta t\,[a\Sigma X + b\Sigma Y + c\Sigma Z + p\Sigma(yZ - zY) + \\ + q\Sigma(zX - xZ) + r\Sigma(xY - yX)].$$

Если тело находится в равновесии, то коэффициенты при шести произвольных величинах равны нулю и мы действительно имеем

$$\mathcal{T} = 0$$

для любого перемещения, допускаемого связями, и, наоборот, если $\mathcal{T}$ равно нулю, каковы бы ни были эти произвольные величины, то необходимо, чтобы коэффициенты равнялись нулю, т. е. чтобы выполнялись условия равновесия.

Вне зависимости от того, находится ли тело в равновесии или нет, сумма работ реакций связей, которые являются здесь силами взаимодействия между точками системы, равна нулю для любого перемещения, допускаемого связями. В самом деле, пусть M_1 и M_2 — две точки тела, находящиеся на расстоянии r друг от друга. Точка M_1 оказывает на точку M_2 какое-то действие F_1, направленное по M_1M_2, а точка M_2 согласно закону равенства действия и противодействия оказывает на точку M_1 *равное и прямо противоположное* действие F_2 (п. 88, рис. 62). Эти две силы являются реакциями связи, вызванными взаимодействием обеих точек M_1 и M_2, связанных между собой так, что они остаются на *неизменном расстоянии друг от друга.* Для того чтобы осуществить эту связь, можно вообразить, что обе точки связаны между собой твердым стержнем, лишенным массы. Условимся, как и раньше, называть алгебраическим значением силы F взаимодействия обеих точек абсолютное значение этого действия, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, отталкиваются точки или притягиваются. Для произвольного возможного перемещения, сообщенного обеим точкам, сумма работ обеих сил равна (п. 88)

$$F\,\delta r.$$

Если возможные перемещения, сообщенные обеим точкам, допускаются наложенной на них связью, согласно которой расстояние r между ними *должно оставаться постоянным*, то $\delta r = 0$ и сумма работ реакций связи равна нулю. То же самое имеет место для всех взаимных действий попарно взятых точек тела, что и доказывает высказанное предложение.

162. Лемма. Замечания, сделанные в трех рассмотренных примерах, мы возведем сейчас в общее правило и докажем следующую лемму.

Независимо от того, будет ли система материальных точек находиться в равновесии или нет, сумма возможных работ реакций связей на любом возможном перемещении, допускаемом связями, равна нулю. При этом является существенным предположение, что трения нет.

Достаточно, очевидно, доказать эту лемму для каждой связи системы и поэтому мы переходим к обзору различных видов связей. Мы разобьем их на две категории:

1) связи тел системы с другими неподвижными телами;

2) связи тел системы между собой.

Первая категория. а) Наиболее простым является случай, когда твердое тело имеет неподвижную точку; единственно возможным перемещением будет вращение вокруг этой точки; работа реакции связи или реакции неподвижной точки будет равна нулю, так как ее точка приложения при таком движении тела не перемещается. То же самое будет иметь место и в случае, когда тело имеет две неподвижные точки, т. е. вращается вокруг неподвижной оси.

б) Допустим, что какая-нибудь поверхность S, связанная с каким-нибудь телом системы, скользит без трения по какой-нибудь неподвижной поверхности S'. Реакцией связи будет нормальная реакция MN этой поверхности S' на S (рис. 106); ее точкой приложения является точка M поверхности S, находящаяся в соприкосновении с S'. Так как перемещение этой точки должно находиться в общей касательной плоскости поверхностей S и S', то работа нормальной реакции равна нулю. Одна из обеих поверхностей S или S' может вырождаться в линию или в точку.

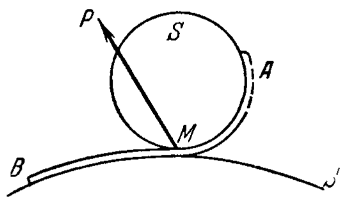


Рис. 106.

в) Допустим, наконец, что поверхность S, связанная с каким-нибудь твердым телом системы, катится и вертится без скольжения по неподвижной поверхности S' (п. 57). Реакция MP поверхности S' на S (рис. 106) по-прежнему приложена в точке M поверхности S, находящейся в соприкосновении, но эта реакция не будет больше нормальной, так как связь между S и S' противодействует скольжению. Сообщим системе перемещение, допускаемое рассматриваемой связью, т. е. сообщим поверхности S качение и верчение по поверхности S', и пусть V_r — возможная скорость точки M. Возможная работа силы P будет при этом $PV_r \cos(P, V_r)\delta t$. Эта работа равна нулю, так как при скольжении и верчении скорость V_r точки соприкосновения M равна *нулю.*

Наиболее простым примером такого рода связи будет следующий.

Колесо S, оставаясь в неподвижной плоскости, катится без скольжения по неподвижной кривой S' (рис. 106). Эту связь можно осуществить, снабдив колесо и кривую бесконечно малыми зубцами, находящимися в зацеплении друг с другом, или закрепив лишенную массы нерастяжимую нить в какой-нибудь точке A окружности колеса и протянув ее по окружности до точки касания M и далее по кривой S' до некоторой неподвижной точки B, где она должна быть закреплена.

Вторая категория. а) Пусть сначала два движущихся твердых тела сочленены в точке O. Реакциями связи будут равные и прямо противоположные реакции P и P' обоих тел. Так как их точки приложения совпадают при всех допускаемых перемещениях, то сумма возможных работ этих двух сил равна нулю. То же самое будет справедливо, если оба тела должны все время иметь больше двух общих точек, например если они связаны шарниром.

б) Рассмотрим теперь две поверхности, связанные с телами системы, обе находящиеся в движении и вынужденные скользить без трения одна по другой (рис. 107). Реакции связей, являющиеся реакциями N и N' этих поверхностей, равны, противоположно направлены и нормальны к общей касательной плоскости в точке касания. Пусть V и V' — возможные скорости точек M и M' поверхностей S и S', находящихся в рассматриваемый момент в соприкосновении. Эти скорости не будут одинаковыми, так как можно, например, получить перемещение, допускаемое связями, если одну поверхность закрепить неподвижно, а другую заставить скользить по ней. Обозначая через V_n и $V'_{n'}$ проекции соответствующих возможных скоростей V и V' на N и N', получим следующее выражение для полной возможной работы

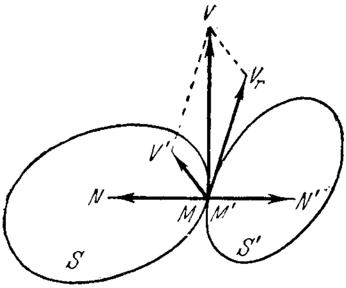


Рис. 107.

$$\mathcal{T}' = \delta t\left(NV_n + N'V'_{n'}\right) = N\,\delta t\left(V_n + V'_{n'}\right).$$

Так как движением поверхности S относительно поверхности S' является скольжение, то относительная скорость V_r точки M по отношению к поверхности S лежит в общей касательной плоскости, и для абсолютной скорости точки M получаем

$$(V) = (V_e) + (V_r),$$

где V_e — переносная скорость точки M. Эта переносная скорость V_e является, по определению, скоростью точки системы отсчета S', совпадающей с точкой M, т. е. скоростью V' точки M'. Следовательно, имеем

$$(V) = (V') + (V_r),$$

и, проектируя на направление $N'N$, получим

$$V_n = V'_{n'},$$

так как V_r лежит в касательной плоскости и ее проекция равна нулю. Но $V'_n = -V'_{n'}$, так как обе эти величины обозначают проекции одного вектора V' на два прямо противоположных направления N и N'; следовательно,

$$V_n + V'_{n'} = 0,$$

и работа $\mathcal{T}$ равна нулю.

в) Допустим, наконец, что какое-то твердое тело системы ограничено поверхностью S (рис. 108), которая катится и вертится по некоторой поверхности S', являющейся частью тела, также принадлежащего системе. Взаимное действие двух поверхностей S и S' в их точке касания не будет больше нормальным к общей касательной плоскости, так как оно препятствует скольжению. Пусть MP — действие поверхности S' на поверхность S, приложенное в точке касания M, принадлежащей поверхности S, а $M'P'$ — реакция поверхности S на поверхность S', приложенная в точке касания, принадлежащей поверхности S'. Эти две силы равны и противоположны. Сообщим системе перемещение, допускаемое связями, т. е. такое, при котором S и S' перемещаются и S катится по S'. Пусть, как и раньше, V и V' — возможные скорости точек M и M', V_p и $V_{p'}$ — их проекции соответственно на MP и $M'P'$. Сумма возможных работ обеих реакций связи P и P' равна

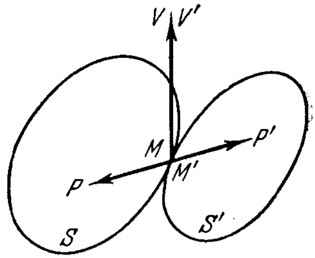


Рис. 108.

$$\mathcal{T}' = \delta t\left(PV_p + P'V'_{p'}\right) = P\,\delta t\left(V_p + V'_{p'}\right).$$

Так как движение S относительно S' является качением и верчением, то относительная скорость V_r точки M относительно S' равна нулю; переносная скорость точки M так же, как и раньше, равна скорости V' точки M' и общая формула

$$(V) = (V_e) + (V_r)$$

принимает вид

$$(V) = (V').$$

Так как обе скорости V и V' равны, то их проекции V_p и $V'_{p'}$ на два противоположных направления равны по величине и обратны по знаку. Поэтому работа $\mathcal{T}$ равна нулю.

163. Сочетания предыдущих связей. Связи, осуществляемые в машинах, являются сочетаниями предыдущих. Так, легко включить в число связей, рассмотренных выше, связи, осуществляемые при помощи нитей или цепей. Вообразим, например, что две точки M и M_1 системы связаны между собой нерастяжимой цепью, протянутой частью своей длины по некоторой поверхности S, по которой она может скользить без трения, причем эта поверхность S либо неподвижна, либо движется. Эта связь является сочетанием предыдущих; звенья цепи являются твердыми телами; каждое из них сочленено со следующим в точке или вдоль оси; те из них, которые находятся в соприкосновении с поверхностью, скользят без трения по поверхности S. Одна из точек, например M_1, могла бы, сверх того, быть неизменно связанной с поверхностью S: это было бы еще одной связью, рассмотренной выше. К такого рода связям относятся, в частности, связи, осуществляемые при помощи блоков.

164. Общее определение идеальных связей*). Мы видели, что в случаях наиболее простых связей и их сочетаний сумма возможных работ реакций связей равна нулю на любом возможном перемещении, допускаемом связями, если только отсутствует трение. Для связей более сложной природы, например, для связей, выражаемых уравнениями, это свойство принимается как определение самого понятия отсутствия трения; связи будут без трения, или идеальными, если на любом допускаемом ими перемещении сумма работ реакций связей равна нулю.

165. Доказательство принципа. Рассмотрим систему материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, подчиненных заданным связям и находящихся под действием непосредственно приложенных сил. Обозначим через x_ν, y_ν, z_ν координаты какой-нибудь из этих точек M_ν и через X_ν, Y_ν, Z_ν — проекции равнодействующей F_ν непосредственно приложенных к ней сил.

Мы хотим доказать следующее предложение: *для того, чтобы система в каком-нибудь положении была в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы при сообщении системе произвольного возможного перемещения, допускаемого связями, сумма возможных работ непосредственно приложенных сил равнялась нулю.*

Это условие необходимо. Действительно, если равновесие имеет место, то каждая точка M_ν находится в равновесии под действием всех приложенных к ней сил как заданных, так и реакций связей. Более точно можно рассматривать эту точку как свободную при условии приложения к ней некоторых сил F'_ν, F''_ν, ..., вызванных связями. Точка будет тогда находиться в равновесии под действием заданных сил, имеющих равнодействующую F_ν, и реакций связей F'_ν, F''_ν ... Для произвольного возможного перемещения, сообщенного этой точке, сумма работ всех этих сил равна нулю. То же самое справедливо для любой точки системы, и поэтому если всем точкам системы сообщить произвольные перемещения, допускаемые или недопускаемые связями, то сумма работ всех сил как заданных, так и реакций связей будет равна нулю:

$$\mathcal{T}_D + \mathcal{T}_L = 0.$$

*) В оригинале «связи без трения». Термин «идеальные связи» в оригинале не применяется. (*Прим. перев.*)

Здесь $\mathcal{T}_D$ — сумма работ заданных сил, а $\mathcal{T}_L$ — сумма работ реакций связей. Но если перемещения допускаются связями, то на основании предыдущей леммы $\mathcal{T}_L$ равна нулю и, следовательно, также

$$\mathcal{T}_D = 0.$$

Условие является и достаточным. Если для всех перемещений, допускаемых связями, сумма $\mathcal{T}_D$ работ заданных сил равна *нулю*, то система находится в равновесии. Для доказательства нам достаточно показать, что если система не находится в равновесии, то существует, по крайней мере, одно перемещение, допускаемое связями, для которого $\mathcal{T}_D$ отлично от нуля. Действительно, если система не находится в равновесии и предоставлена самой себе, то она начнет двигаться. Перемещения, которые при этом получат точки, будут допускаемые связями и каждая точка M_ν, рассматриваемая как свободная, переместится в направлении равнодействующей всех действующих на нее сил F_ν, F'_ν, F''_ν, ... как заданных, так и реакций связей. В этом действительном перемещении все начальные скорости равны нулю; но мы можем сообщить системе возможное перемещение, при котором каждая точка перемещается в том же направлении, что и при действительном перемещении, но при котором не все возможные скорости точек M_ν равны нулю. Тогда сумма работ сил F_ν, F'_ν, F''_ν, равная работе их равнодействующей, будет положительной, так как перемещение происходит в направлении этой равнодействующей. Так как то же самое имеет место для каждой точки системы, то сумма $\mathcal{T}_D + \mathcal{T}_L$ работ заданных сил и реакций связей для рассматриваемого перемещения будет положительной, отличной от нуля. Но это перемещение допускается связями. Следовательно, $\mathcal{T}_L$ равно нулю и мы получаем

$$\mathcal{T}_D > 0.$$

Отсюда следует, что если для всех перемещений, допускаемых связями, $\mathcal{T}_D$ равно нулю, то равновесие будет иметь место.

166. Замечание о работе силы. Произведенный нами анализ различных возможных связей выдвигает со всей очевидностью один вопрос, на котором не бесполезно остановиться. Речь идет о том, что при вычислении элементарной работы силы, как возможной так и действительной, не следует смешивать материальную точку, к которой приложена сила, с геометрической точкой ее приложения.

В выражениях элементарной работы

$$F\overline{MM'}\cos(F,\ MM'),\quad FV\cos(F,\ V)\,\delta t$$

MM' и V обозначают бесконечно малое перемещение и скорость *материальной точки, к которой приложена сила*, а не перемещение и скорость геометрической точки приложения силы. Например, если колесо катится по неподвижной кривой C (рис. 109), то реакция P кривой приложена к материальной точке M колеса, находящейся в соприкосновении с кривой; после промежутка времени δt колесо примет бесконечно близкое положение, в соприкосновении будет новая точка M_1 колеса и реакция P_1 будет приложена в точке M_1; что касается материальной точки M, находившейся в соприкосновении первоначально, то она займет положение M'. В выражение работы силы входит именно перемещение MM' и скорость $\frac{MM'}{\delta t}$ (эта скорость равна нулю вследствие качения) материальной точки M, а не перемещение MM_1 и скорость $\frac{MM_1}{\delta t}$ геометрической точки приложения этой силы.

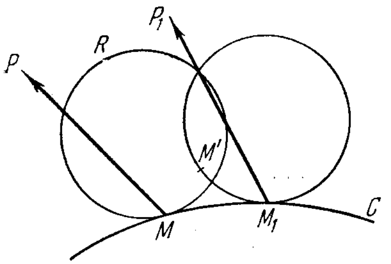


Рис. 109.

167. О связях, осуществляемых при помощи тел, не имеющих массы. Иногда бывает, что в системе, движущейся или находящейся в равновесии, имеются тела, массами которых, по сравнению с массами других тел системы, пренебрегают и считают эти тела лишенными массы. Это предположение можно осуществить, выразив, что силы, приложенные к телу без массы, находятся в равновесии. В самом деле, уравнения движения точки имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

где X, Y, Z — проекции равнодействующей всех сил, приложенных к точке. Если точка m принадлежит движущейся системе, то ее ускорение конечно и, следовательно, если она имеет очень малую массу, то величины X, Y, Z будут также малыми. Если предположить, что $m = 0$, то и X, Y, Z должны быть равны нулю и силы, приложенные к точке, уравновешиваются. Если теперь вообразить систему без массы, то масса каждой точки системы будет равна нулю, все приложенные к этой точке силы будут находиться в равновесии и, следовательно, совокупность всех приложенных к системе сил будет тоже находиться в равновесии.

Если, например, две точки M и M' связаны между собой при помощи *твердого стержня, не имеющего массы*, то действия стержня на обе точки выражаются двумя равными и прямо противоположными силами F и F'. В самом деле, если действие стержня на точку M есть F, то действие точки M на стержень есть $-F$; точно так же действие точки M' на стержень есть $-F'$. Следовательно, силы, действующие на стержень суть F и $-F'$ и так как они уравновешиваются, то они равны и прямо противоположны. Мы снова приходим таким образом к связи, разобранной ранее (п. 161).

Рассмотрим еще две материальные точки M и M', связанные нерастяжимой нитью, не имеющей массы и лежащей на неподвижной или движущейся поверхности S, по которой она может скользить без трения. Пусть T и T' — действия, оказываемые нитью на точки M и M' и, следовательно, $-T$ и $-T'$ действия, оказываемые на нить этими точками. На нить действуют: на концах силы $-T$ и $-T'$, а на часть, соприкасающуюся с поверхностью S, — нормальные силы, вызванные реакцией поверхности. Так как нить должна быть в равновесии, то ее натяжение везде одинаково и она должна расположиться по геодезической линии поверхности (п. 144); в частности и $T = T'$. Этот род связи встречается среди разобранных выше (п. 163); он приводит к некоторым геометрическим следствиям, которые мы укажем в качестве упражнений в конце главы (упражнения 1 и 2).

II. Первые примеры. Системы с полными связями. Простые машины

168. Системы с полными связями. Говорят, что система материальных точек является системой с полными связями (с одной степенью свободы), если ее положение зависит только от одного параметра. В такой системе каждая точка описывает определенную неподвижную кривую и положение одной точки на траектории определяет положение всех остальных точек. Например, твердое тело, вращающееся вокруг оси, является системой с полными связями: положение тела зависит только от угла, на который оно повернулось от начального положения. Каждая точка тела описывает окружность, перпендикулярную к оси вращения, с центром на этой оси; положение одной из этих точек определяет положение всех остальных. Винт, движущийся в неподвижной гайке, цепь, скользящая по неподвижной кривой, являются системами с полными связями.

Эти системы являются наиболее простыми из всех, так как им можно сообщить только одно возможное перемещение, допускаемое связями, а именно то, которое получится, если бесконечно мало изменить единственный параметр, определяющий положение системы. Следовательно, существует только одно условие равновесия такой системы.

169. Простые машины. Простые машины являются системами с полными связями. На машины действуют две силы: одна P, называемая *движущей силой*, и другая R, называемая *сопротивлением*. Для нахождения условия равновесия машине сообщают единственное бесконечно малое возможное перемещение, допускаемое связями. Пусть в этом перемещении δP — проекция на направление P перемещения AA' точки A приложения движущей силы, а δR — проекция на R перемещения BB' точки B приложения сопротивления (рис. 110). Тогда условие равновесия будет

$$P\,\delta P + R\,\delta R = 0.$$

Вводя вместо перемещений возможные скорости, получим условие

$$PU_P + RV_R = 0, \quad \frac{P}{R} = -\frac{V_R}{U_P},$$

где U_P — проекция на P возможной скорости U точки A и V_R — проекция на R возможной скорости V точки B. Следовательно, при равновесии движущая сила и сопротивление находятся в отношении, обратном отношению проекций возможных скоростей точек приложения этих сил на направления сил. Это — то, что Галилей высказал в следующей форме: «То, что выигрывается в силе, теряется в скорости».

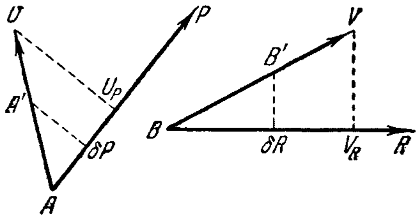


Рис. 110.

1°. *Клиновый пресс.* Клин есть равнобедренная треугольная призма, зажатая между двумя толстыми досками, из которых одна неподвижна, а другая перемещается горизонтально. Движущей силой является вертикальное давление, действующее на основание клина, которое предполагается горизонтальным. Сопротивлением является горизонтальная сила R, противо-

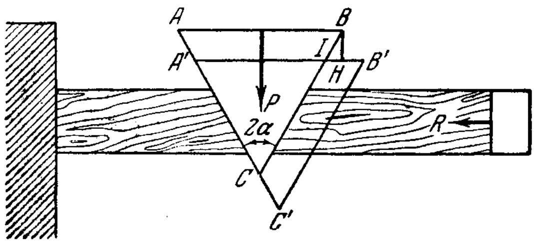


Рис. 111.

действующая перемещению горизонтальной подвижной доски. Рассмотрим возможное перемещение, при котором клин переходит из ABC в $A'B'C'$, (рис. 111) опускаясь при этом на

$$BH = \delta P.$$

Перемещение δR равно IB' со знаком минус, т. е. если угол C равен 2α, то

$$\delta R = -2\overline{BH}\operatorname{tg}\alpha = -2\delta P \operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, условие равновесия будет

$$P\delta P - 2R\operatorname{tg}\alpha\,\delta P = 0$$

или

$$P = 2R\operatorname{tg}\alpha.$$

Применение клина тем выгоднее, чем меньше угол.

2°. *Винтовой пресс.* Допустим, что движущей силой является сила P, перпендикулярная оси Bz винта (рис. 112) и приложенная в точке A на расстоянии a от этой оси нормально к плоскости AzB, а сопротивление R действует вдоль самой оси. При бесконечно малом повороте $\delta\theta$ — единственном перемещении, допускаемом связями, проекция на P дуги винтовой линии, описываемой точкой A, есть дуга круга радиуса a с центральным углом $\delta\theta$:

$$\delta P = a\,\delta\theta.$$

Что касается δR, то оно имеет значение

$$\delta R = -\frac{h}{2\pi}\,\delta\theta,$$

где h — шаг винта, так как перемещение винта вдоль оси пропорционально его повороту, а шаг h есть значение этого перемещения при полном повороте винта. Условие равновесия имеет вид

$$Pa\,\delta\theta - R\,\frac{h}{2\pi}\,\delta\theta = 0, \quad P = \frac{h}{2\pi a}\,R.$$

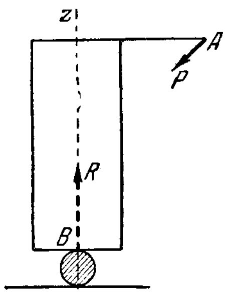


Рис. 112.

Отсюда следует, что выгодно увеличивать расстояние a и уменьшать шаг винта.

3°. *Коромысловые весы Квинтенса.* Весы состоят из коромысла ABC (рис. 113), вращающегося вокруг точки O и несущего при помощи шарнирно связанных с ним стержней BB' и CC' две горизонтальные платформы, из которых одна опирается в I на неподвижное лезвие, а другая в F на лезвие FF', неразрывно связанное с платформой IC'. Взвешиваемое тело помещают на верхнюю платформу и уравновешивают гирей P, подвешенной в точке A таким образом, что коромысло ABC занимает горизонтальное положение. При бесконечно малом повороте $\delta\theta$ коромысла вокруг оси, очевидно, имеем

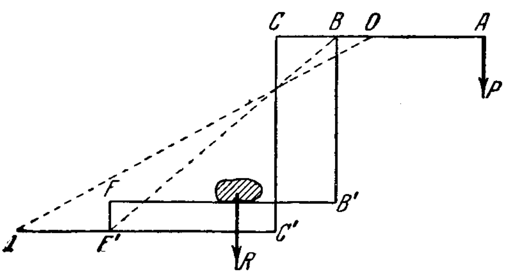


Рис. 113.

$$\delta P = \overline{OA}\,\delta\theta.$$

Что касается перемещения δR, то оно будет зависеть от положения груза на площадке FB', если только эта площадка не перемещается параллельно самой себе, т. е. если точки F и B' не повышаются на одинаковые величины. Чтобы выразить это условие, заметим, что точка B' поднимается на ту же величину, что и B, т. е. на $\overline{OB}\,\delta\theta$; точка C поднимается на величину $\overline{OC}\,\delta\theta$, на ту же величину поднимается точка C'. Точка F', увлекающая за собой и точку F, поднимается на $\dfrac{\overline{IF'}}{\overline{IC'}}\,\overline{OC}\,\delta\theta$. Следовательно, искомое условие будет следующее:

$$\overline{OB} = \overline{OC}\,\frac{\overline{IF'}}{\overline{IC'}}, \quad \frac{\overline{IF'}}{\overline{IC'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}.$$

Оно выражает, что прямые OI и BF' пересекаются на CC'. При таком предположении имеем

$$\delta R = OB\,\delta\theta$$

и весы будут в равновесии, если будет выполнено условие

$$PO\,A\,\delta\theta - RO\,B\,\delta\theta = 0, \quad \frac{P}{R} = \frac{OB}{OA}$$

и все происходит так, как если бы взвешиваемое тело было непосредственно подвешено в точке B.

4°. *Весы Роберваля.* Шарнирный параллелограмм $ABCD$ (рис. 114) может поворачиваться вокруг середин O и O' двух противоположных сторон, причем эти точки лежат на одной вертикали. Стороны AD и BC будут, очевидно, оставаться вертикальными. Если к ним прикрепить две площадки,

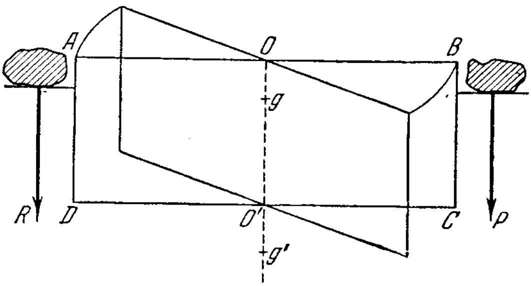


Рис. 114.

то их возможные перемещения будут равны, но противоположных знаков, так что для равновесия положенных на них двух грузов P и R необходимо, чтобы эти грузы были одинаковы. Так же, как и в случае коромысловых весов, условие равновесия не зависит от положения тел на площадках. Более того, равновесие будет иметь место во всех положениях: оно будет безразличным.

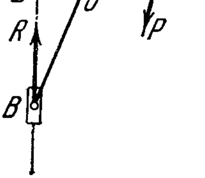


Рис. 115.

До сих пор мы пренебрегали весом стержней. Так как веса вертикальных стежней AD и BC одинаковы, то сумма их возможных работ равна нулю и так как веса стержней AB и CD приложены в неподвижных точках O и O', то сумма их работ также равна нулю. В действительности стержни AB и CD заменяются твердыми телами с весами p и p', центры тяжести которых находятся в точках g и g', когда линии AB и CD *горизонтальны.* Допустим, что равновесие установлено *в этом положении.* При возможном перемещении системы точки g и g' перемещаются нормально к p и p', описывая дуги окружностей с центрами соответственно в точках O и O'. Следовательно, сумма возможных работ весов будет по-прежнему равна нулю и условием равновесия будет всегда $P = R$. Только равновесие не будет безразличным, так как в другом положении в расчет войдут работы весов p и p'.

5°. *Кривошипный механизм.* Стержень AO (рис. 115) шарнирно связан концом A с неподвижной осью, а концом O — со стержнем OB длины b, конец которого B скользит без трения по вертикали, проходящей через точку A. На палец F, неизменно связанный с AO, действует движущая сила FP, которую мы можем считать перенесеной в точку E ее направления, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из точки A на P. Сопротивлением является вертикальная сила BR_1, препятствующая движению точки B.

Единственным перемещением, допускаемым связями, будет то, которое получится, если повернуть стержень AO на угол $\delta\alpha$. При этом перемещении работа силы P будет

$$P\delta P = -P\overline{AE}\,\delta\alpha.$$

Работа сопротивления равна $-R\,\delta x$, где x — расстояние AB. Из треугольника AOB имеем

$$b^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos\alpha,$$

и, дифференцируя, получаем

$$0 = x\,\delta x - a\cos\alpha\,\delta x + ax\sin\alpha\,\delta\alpha,$$

откуда

$$\delta x = -\frac{ax\sin\alpha}{x - a\cos\alpha}\,\delta\alpha,$$

так что условие равновесия будет

$$P = \frac{R}{\overline{AE}}\,\frac{ax\sin\alpha}{x - a\cos\alpha}.$$

Проведем OD и AC перпендикулярно к AB и обозначим через C точку пересечения последнего перпендикуляра с продолжением линии BO. Имеем

$$OD = a\sin\alpha,\quad BD = x - a\cos\alpha,\quad \frac{x}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OD}}$$

и условие равновесия напишется в такой простой форме:

$$\frac{P}{R} = \frac{x\overline{OD}}{\overline{AE}\,\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

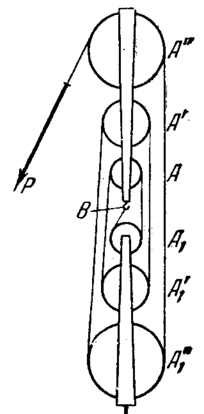


Рис. 116.

6°. *Полиспасты и тали.* Полиспаст состоит из двух систем блоков, каждая из которых смонтирована в общей обойме, причем блоки насажены на общую ось или на отдельные оси. Первая система неподвижна, а вторая движется (рис. 116). Допустим, что каждая система состоит из трех блоков: первая — из блоков A, A', A'' и вторая — из блоков A_1, A_1', A_1''. В неподвижной точке B обоймы первой системы закреплена веревка, которая последовательно перекидывается через A_1A, $A_1'A'$, ... Движущая сила P является натяжением, действующим на свободный конец веревки. Сопротивлением R является груз, подвешенный внизу подвижной системы. Шесть частей веревки, заключенных между обеими системами блоков, можно рассматривать как параллельные. Так как общая длина нити остается неизменной, то при перемещении свободного конца нити на δP, каждая из ее частей, заключенных между двумя системами блоков, укоротится на $\frac{1}{6}\delta P$. Это выражение, взятое с обратным знаком, является значением δR и при равновесии получаем

$$P = \frac{1}{6}R.$$

7°. *Нерастяжимая цепь, скользящая без трения по неподвижной кривой.* Пусть A и B — концы цепи, толщина которой принимается бесконечно малой, F — сила, непосредственно приложенная к элементу ds, находящемуся в точке C, F_t — проекция этой силы на касательную к кривой в точке C в направлении AB. Сообщим системе единственно возможное перемещение, допускаемое связями, при котором вся цепь целиком, а вследствие этого и каждый ее элемент, скользит вдоль кривой на общую величину CC', равную $\delta\sigma$ (рис. 117). Возможная работа силы F равна $F_t\,\delta\sigma$; приравнивая сумму этих работ нулю и замечая, что $\delta\sigma$ может быть выведено из суммы в качестве общего множителя, получим условие равновесия

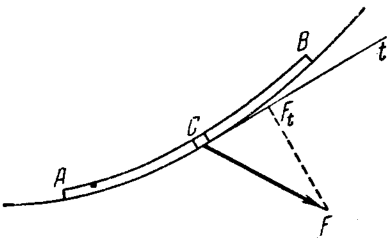


Рис. 117.

$$\sum F_t = 0.$$

Это условие достаточно, если предположить, что цепь во всех точках растянута, а не сжата. Например, если на цепь не действуют никакие силы, кроме двух сил P и R, приложенных к концам, то условие равновесия будет

$$P_t + R_t = 0.$$

8°. *Равновесие несжимаемой жидкости в очень узкой трубке.* Уже Галилей пользовался принципом возможных скоростей для доказательства основных теорем гидростатики. Декарт и Паскаль также пользовались этим принципом для изучения движения жидкостей. Для того чтобы можно было приложить принцип возможных скоростей к жидкости, пренебрегая работой внутренних сил, необходимо, чтобы работа внутренних сил жидкости или реакций связей равнялась нулю при любом возможном перемещении, допускаемом связями, т. е. чтобы соседние молекулы оставались на постоянных расстояниях (несжимаемая жидкость) и чтобы не было внутренних трений (идеальная жидкость). Мы позаимствуем пример у Лагранжа (Статика, раздел 7).

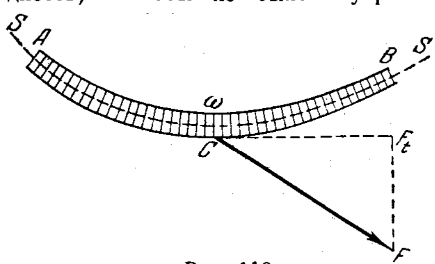


Рис. 118.

Рассмотрим несжимаемую жидкость, заключенную в бесконечно тонкой трубке заданной формы, поперечное сечение которой ω изменяется по заданному закону. Для большей точности можно себе представить, что трубка образована перемещающимся бесконечно малым плоским элементом, остающимся все время нормальным к заданной кривой S (рис. 118). Пусть A и B — концы жидкой колонки, удерживаемой двумя бесконечно малыми поршнями, dm — элемент этой колонки в положении C, где поперечное сечение равно ω. Обозначим через F силу, приложенную к элемеиту dm, и через F_t — ее проекцию на касательную к кривой S в направлении AB, т. е. на нормаль к ω. Сообщим жидкости единственно возможное для нее перемещение, допускаемое связями, перемещение, при котором вся колонка совершает скольжение как целое на бесконечно малую величину. При этом скольжении элемент dm, находящийся в C, описывает по кривой S дугу δs, так что $\omega\,\delta s$ равно количеству жидкости, проходящей через сечение ω трубки. Вследствие несжимаемости жидкости необходимо, чтобы это количество было всюду одинаковым. Можно положить $\omega\,\delta s = a$, где a — одинаково на всем протяжении трубки. Работа F равна тогда $F\,\delta s$ или $\frac{a}{\omega}F_t$, и сумма возможных работ непосредственно приложенных сил равна $\sum \frac{F_t}{\omega}$. Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия будет

$$\sum \frac{F_t}{\omega} = 0,$$

предполагая, что колонка сжата во всех своих точках.

Например, если единственными силами, приложенными к жидкости, являются нормальные давления P_0 и P_1, приложенные к поршням A и B с сечениями ω_0 и ω_1, то условие равновесия будет

$$\frac{P_0}{\omega_0} - \frac{P_1}{\omega_1} = 0.$$

Примечание. К этому же самому уравнению равновесия жидкости можно прийти при следующих условиях. Представим себе замкнутый сосуд произвольной формы, из которого выведены две цилиндрические трубки A и B с сечениями ω_0 и ω_1. Допустим, что сосуд заполнен жидкостью, на которую не действуют никакие непосредственно приложенные силы, и что трубки закрыты двумя поршнями A и B, на которые действуют нормальные давления P_0 и P_1. Если поршень A вдвинуть на бесконечно малую величину ε_0, то внутренний объем уменьшится на $\varepsilon_0\omega_0$; необходимо, следовательно, чтобы поршень B поднялся на такую величину ε_1, что $\varepsilon_0\omega_0 = \varepsilon_1\omega_1$. Так как сумма возможных работ P_0 и P_1, очевидно, равна $P_0\varepsilon_0 - P_1\varepsilon_1$, то имеем уравнение равновесия

$$P_0\varepsilon_0 - P_1\varepsilon_1 = 0, \quad P_0\omega_1 - P_1\omega_0 = 0.$$

На этой зависимости основано устройство гидравлического пресса.

III. Общие условия равновесия, выводимые из принципа возможных скоростей

170. Основное уравнение статики. Мы будем следовать методу, указанному Лагранжем. Пусть задана система, образованная n точками

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad M_n(x_n, y_n, z_n)$$

и подчиненная связям, выражаемым такими равенствами, какие рассматривались в предыдущем.

Обозначим через $F_\nu(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ равнодействующую заданных сил, действующих на точку M_ν. На основании принципа возможных скоростей составляем уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = 0, \tag{1}$$

которое должно удовлетворяться *для всех перемещений* δx_ν, δy_ν, δz_ν, допускаемых связями. Можно сказать, что это уравнение является *общим уравнением статики*.

171. Приведение уравнений равновесия к наименьшему числу. В каждой частной системе для получения наиболее общего возможного перемещения, допускаемого связями, необходимо и достаточно сообщить k параметрам $q_1, q_2, \ldots, q_k$ *произвольные* вариации δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_k$. Тогда говорят, что рассматриваемая система имеет k *степеней свободы*.

Например, для получения наиболее общего перемещения точки по поверхности (п. 159) необходимо и достаточно сообщить двум параметрам произвольные вариации δq_1 и δq_2; следовательно, точка на поверхности является системой с двумя степенями свободы.

Для получения наиболее общего перемещения свободного твердого тела достаточно сообщить ему три произвольных бесконечно малых поступательных перемещения, параллельных трем осям координат, и повернуть его на три произвольных бесконечно малых угла вокруг этих трех осей. Следовательно, свободное твердое тело является системой с шестью степенями свободы.

Возьмем еще систему, образованную твердой материальной окружностью, которая *катится без скольжения* по неподвижной плоскости P (обруч). Для выражения связи нужно написать, что скорость материальной точки, находящейся в соприкосновении, равна нулю. Следовательно, для того чтобы сообщить обручу перемещение, допускаемое связью, необходимо и достаточно сообщить ему вращение на бесконечно малый угол вокруг произвольной оси, проходящей через точку касания. Но это элементарное вращение может быть всегда разложено на три: одно δq_1 вокруг нормали к неподвижной плоскости в точке касания A, другое δq_2 вокруг касательной к обручу в точке A, и третье δq_3 вокруг нормали к обручу, проведенной в точке A в неподвижной плоскости. Следовательно, обруч образует систему с тремя степенями свободы.

Вернемся к общему случаю системы с k степенями свободы. Так как, по предположению, перемещение системы определяется бесконечно малыми вариациями $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$, то вариации δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, $\delta z_2, \ldots$ координат различных точек системы будут определенными, если известны $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$. Для этих вариаций должны иметь место выражения вида

$$\left.\begin{aligned}
\delta x_1 &= a_{11}\,\delta q_1 + a_{12}\,\delta q_2 + \ldots + a_{1k}\,\delta q_k,\\
\delta y_1 &= b_{11}\,\delta q_1 + b_{12}\,\delta q_2 + \ldots + b_{1k}\,\delta q_k,\\
\delta z_1 &= c_{11}\,\delta q_1 + c_{12}\,\delta q_2 + \ldots + c_{1k}\,\delta q_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\delta x_\nu &= a_{\nu 1}\,\delta q_1 + a_{\nu 2}\,\delta q_2 + \ldots + a_{\nu k}\,\delta q_k,\\
\delta y_\nu &= b_{\nu 1}\,\delta q_1 + b_{\nu 2}\,\delta q_2 + \ldots + b_{\nu k}\,\delta q_k,\\
\delta z_\nu &= c_{\nu 1}\,\delta q_1 + c_{\nu 2}\,\delta q_2 + \ldots + c_{\nu k}\,\delta q_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если внести эти выражения в основное уравнение статики

$$\sum (X_\nu\,\delta x_\nu + Y_\nu\,\delta y_\nu + Z_\nu\,\delta z_\nu) = 0,$$

то оно примет вид

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k = 0, \tag{3}$$

в котором

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu a_{\nu i} + Y_\nu b_{\nu i} + Z_\nu c_{\nu i}).$$

Так как уравнение (3) должно выполняться при любых δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_k$, то должно быть одновременно

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, \quad Q_k = 0. \tag{4}$$

Таким образом, получились k необходимых и достаточных уравнений равновесия. Число этих уравнений в точности равно числу степеней свободы системы.

172. Голономные системы; координаты голономной системы. Говорят, согласно Герцу (Oeuvres complètes, т. III), что система с k степенями свободы является *голономной*, когда существует такая система параметров $q_1, q_2, \ldots, q_k$, что координаты x_ν, y_ν, z_ν различных точек системы выражаются в функции этих параметров *в конечной форме*

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= \varphi_\nu (q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ y_\nu &= \psi_\nu (q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ z_\nu &= \omega_\nu (q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ &(\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Параметры $q_1, q_2, \ldots, q_k$ будут тогда *координатами* голономной системы; их численные значения определяют положение системы. Для получения возможного перемещения, допускаемого связями, достаточно дать этим параметрам произвольные бесконечномалые приращения $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$. Таким путем на основании равенств (5) получится

$$\left.\begin{aligned} \delta x_\nu &= \frac{\partial x_\nu}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta y_\nu &= \frac{\partial y_\nu}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_\nu}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y_\nu}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta z_\nu &= \frac{\partial z_\nu}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_\nu}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z_\nu}{\partial q_k} \delta q_k. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Эти формулы являются частными случаями выражений (2), поскольку правые части выражений, написанных для δx_ν, δy_ν, δz_ν, являются полными дифференциалами функций от $q_1, q_2, \ldots, q_k$, что не имеет места в общем случае (2).

Подставляя выражения (6) в основное уравнение статики (1), мы получим уравнения равновесия в форме

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, \quad Q_k = 0, \tag{7}$$

в которых

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{n}\left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\right). \tag{8}$$

Большинство систем, встречающихся в приложениях, являются голономными. Например, твердое тело, которое вращается вокруг оси и скользит вдоль нее, является голономной системой, так как его положение зависит от двух координат: угла, на который оно повернулось от некоторого начального положения, и длины, на которую оно совершило скольжение от этого положения.

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, является голономной системой, так как положение тела определяется тремя координатами, которыми могут быть, например, углы Эйлера, между осями, связанными с телом, и осями неподвижными.

Напротив, окружность, катящаяся без скольжения по неподвижной плоскости (обруч), не представляет собою голономной системы. Это вытекает из того, что обруч обладает тремя степенями свободы (п. 171) и в то же время его положение на плоскости, по которой оно катится, не может быть определено тремя координатами. Уже Лагранж рассматривал неголономные системы в своей Аналитической механике (раздел IV, п. 2, т. I, изд. Бертрана).

173. Частный случай, когда выражение возможной работы есть полный дифференциал. Полученные выше общие результаты принимают интересную форму, когда выражение возможной работы

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots + Q_k\,\delta q_k,$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ суть функции параметров q, является полным дифференциалом некоторой функции U от параметров $q_1, q_2, \ldots, q_k$, т. е. когда

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

В этом случае дифференциальные уравнения равновесия совпадают с уравнениями, определяющими максимум и минимум функции U. Мы покажем в динамике, что если для определенной системы значений величин q эта функция U действительно имеет максимум, то соответствующее положение равновесия является положением устойчивого равновесия (Лежен-Дирихле).

Случай существования силовой функции, т. е. случай, когда выражение

$$\sum (X_\nu\,\delta x_\nu + Y_\nu\,\delta y_\nu + Z_\nu\,\delta z_\nu)$$

является полным дифференциалом некоторой функции от величин $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$, относится к только что рассмотренному, так как если заменить координаты и дифференциалы координат их выражениями через q и δq, то рассматриваемая сумма останется полным дифференциалом. Но обратное, вообще говоря, неверно: может случиться, что $Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_k\delta q_k$ будет полным дифференциалом и в случае отсутствия силовой функции.

174. Приложения. Тяжелые системы. Когда система, для которой ищутся положения равновесия, находится под действием только сил тяжести, являющихся непосредственно приложенными силами, то, очевидно, существует силовая функция непосредственно приложенных сил. В самом деле, полагая, что ось Oz направлена вертикально вниз, получим для точки m_i, имеющей вес $m_i g$, возможную работу, равную $m_i g\,\delta z_i$. Следовательно, для суммы возможных работ получится

$$g\sum m_i\,\delta z_i = gM\,\delta\zeta,$$

где ζ — ордината центра тяжести. Тогда положениями равновесия будут те, для которых $\delta\zeta$ равно нулю. Они совпадают с теми положениями, которые получаются при нахождении максимума или минимума координаты ζ, рассматриваемой как функция от k геометрически независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_k$, определяющих положение системы.

Примеры. 1°. Найдем положение равновесия однородного тяжелого стержня AB (рис. 119), скользящего без трения своими концами по коническому сечению, фокальная ось которого вертикальна (система с одной степенью свободы). Прежде всего очевидными положениями равновесия, если только они возможны, будут горизонтальные положения. Для нахождения остальных положений равновесия рассмотрим директрису DD' и пусть AA' и BB' — расстояния от точек A и B до этой директрисы. Расстояние прямой DD' от центра тяжести G, находящегося на середине стержня AB, равно

$$\overline{GG'} = \frac{\overline{AA'} + \overline{BB'}}{2}.$$

Но если e — эксцентриситет и F — фокус, соответствующий директрисе DD', то, как известно, AA' и BB' равны соответственно $\frac{1}{e}\,\overline{AF}$ и $\frac{1}{e}\,\overline{BF}$, откуда получаем

$$\overline{GG'} = \frac{\overline{AF} + \overline{BF}}{2e}.$$

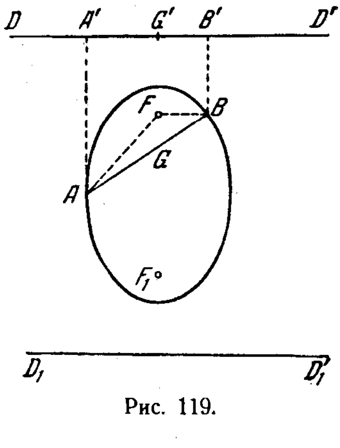


Рис. 119.

Следовательно, расстояние GG' будет максимумом или минимумом одновременно с $AF + BF$, а последняя сумма будет, очевидно, минимумом, когда прямая AB проходит через фокус F. Таким образом, если прямая может проходить через фокус, то каждое ее положение является положением равновесия. В случае, показанном на фигуре, когда прямая проходит через F, она будет находиться в неустойчивом положении равновесия, так как в этом положении ее центр тяжести будет выше, чем в соседних положениях. Она будет в устойчивом положении равновесия, когда будет проходить через другой фокус F_1, как это видно, если взять вторую директрису D_1D_1'.

2°. Тяжелая, однородная или неоднородная цепочка, концы которой закреплены или могут скользить по неподвижным кривым или поверхностям, занимает положение равновесия, являющееся тем из возможных положений, этой цепочки, при котором высота ее центра тяжести имеет максимум или минимум. Например, из всех однородных кривых заданной длины l, проходящих через две неподвижные точки, та из них, центр тяжести которой занимает самое низкое положение, является найденной ранее (п. 140) цепной линией. Отсюда следует, что если на плоскости взять неподвижную ось Ox и две неподвижные точки A и B, то из всех кривых заданной длины l, лежащих в этой плоскости и проходящих через эти точки, цепная линия опишет при вращении вокруг оси Ox поверхность наименьшей площади. В этом убеждаемся на основании теоремы Гюльдена, так как описанная площадь, равная $l \cdot 2\pi\overline{GG'}$, обращается в минимум одновременно с $\overline{GG'}$. Можно оставить в стороне условие относительно длины и вновь установить, по крайней мере частично, один полученный ранее результат. Из всех кривых, лежащих в плоскости и проходящих через A и B, та, которая описывает наименьшую площадь, является некоторой цепной линией. В самом деле, пусть C — эта кривая. Она является, в частности, одной из всех кривых такой же длины, что и сама кривая C, описывающих наименьшую площадь. Следовательно, она действительно является цепной линией, имеющей основание, параллельное оси Ox. Остается среди всего этого бесчисленного множества цепных линий найти ту, которая описывает наименьшую площадь. Последняя, как мы видели (п. 148, пример 1), является той, которая имеет основанием ось Ox.

175. Принцип Торричелли. Мы видели как следствие принципа возможных скоростей, что для нахождения положений равновесия тяжелой системы достаточно приравнять нулю вариацию высоты центра тяжести. Лагранжу принадлежит важное замечание, что если принять, как и Торричелли, в качестве очевидного принципа это условие равновесия тяжелой системы, то отсюда можно будет вывести принцип возможных скоростей во всей его общности (Аналитическая механика, том I, Статика, отдел I и отдел III, § V). Пусть, в самом деле, имеется система материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, на которые наложены заданные связи и действуют заданные силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (рис. 120).

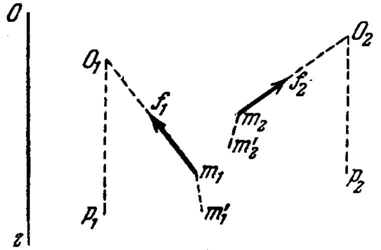


Рис. 120.

Рассмотрим определенное положение системы, в котором точки занимают положения $m_1, m_2, \ldots, m_n$, а силы имеют значения $f_1, f_2, \ldots, f_n$. На направлении силы f_ν вообразим неподвижную точку O_ν на некотором расстоянии $\overline{m_\nu O_\nu} = r_\nu$. Если сместить бесконечно мало систему из рассматриваемого определенного положения, то точка m_ν перейдет в m_ν' и возможная работа силы f_ν будет равна $-f_\nu \delta r_\nu$, так как имеем (п. 84, пример III):

$$\delta r_\nu = -\overline{m_\nu m_\nu'} \cos(f_\nu, m_\nu m_\nu').$$

Следовательно, сумма возможных работ сил f_ν будет

$$\mathcal{T} = -\sum f_\nu \delta r_\nu.$$

Требуется доказать, что необходимым и достаточным условием того, что рассматриваемое частное положение представляет положение равновесия, является равенство нулю величины $\mathcal{T}$.

Для этого заметим, что мы можем заменить действие силы f_ν натяжением нерастяжимой нити, закрепленной в точке m_ν, проходящей через бесконечно малый блок O_ν и несущей натягивающий груз p_ν, равный f_ν. Если мы проделаем эту операцию с каждой из сил f_ν, то мы заменим предложенную систему тяжелой системой и первоначальная система будет служить лишь для нахождения соотношений между грузами p_ν. Тяжелая система может находиться или не находиться в равновесии в том же самом положении. Но для того, чтобы тяжелая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы вариация $\delta\zeta$ ординаты центра тяжести грузов p_ν равнялась нулю; эта вариация определяется формулой

$$P\,\delta\zeta = p_1\,\delta z_1 + p_2\,\delta z_2 + \ldots + p_n\,\delta z_n$$

где ось z направлена вертикально вниз, P — общий вес и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — координаты центров тяжести грузов $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Очевидно, что $\delta z_\nu = -\delta r_\nu$, так как нить $m_\nu O_\nu p_\nu$ имеет постоянную длину. Следовательно, имеем

$$P\,\delta\zeta = -\sum p_\nu\,\delta r_\nu = -\sum f_\nu\,\delta r_\nu = \mathcal{T},$$

так как $p_\nu = f_\nu$. Для того чтобы первоначальная система была в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы $\delta\zeta = 0$, т. е. чтобы для любого перемещения, допускаемого связями, обращалась в нуль величина $\mathcal{T}$, что и представляет принцип возможных скоростей во всей его общности.

Примечание. Если материальной системе с нитями и с грузами p_1, $p_2, \ldots, p_n$ придать *какое-нибудь* положение, отличное от рассматриваемого частного, то заданными силами будут $F_1, F_2, \ldots, F_n$, а натяжения нитей M_1O_1, $M_2O_2, \ldots$, равные $p_1, p_2, \ldots, p_n$, будут отличаться и по величине и по направлению от сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Однако в рассматриваемом частном положении $m_1, m_2, \ldots, m_n$ заданные силы равны натяжениям, так что если это положение является положением равновесия системы под действием заданных сил, то оно будет положением равновесия и под действием натяжений. Но так как для положения, даже бесконечно близкого к $m_1, m_2, \ldots, m_n$, силы F_ν отличаются от натяжений, то может случиться, что это положение равновесия системы будет устойчивым под действием заданных сил F_ν и неустойчивым под действием грузов p_ν.

В упражнениях (6) будут указаны некоторые свойства положений равновесия системы, аналогичные только что подробно изложенным, в частности свойство, указанное Гауссом и Мёбиусом, относительно минимума суммы квадратов.

IV. Множители Лагранжа

176. Уравнения связей. Пусть дана система, образованная n точками

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad M_n(x_n, y_n, z_n)$$

и подчиненная связям, выражаемым соотношениями между их координатами вида

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_h(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Число h этих уравнений должно быть меньше числа $3n$ координат, ибо если бы оно равнялось $3n$, то все $3n$ координат определялись бы этими уравнениями. Положим поэтому,

$$h = 3n - k.$$

Такая система будет *голономной*, так как при помощи равенств (1) можно выразить все координаты в функциях подходящим образом выбранных из них k координат. Система имеет, следовательно, k степеней свободы. В случае, когда $k = 1$, система будет с полными связями, так как ее положение зависит только от одного параметра, например, от одной подходящим образом выбранной координаты.

Обозначим через $F_\nu(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ равнодействующую заданных сил, действующих на точку M_ν. Тогда на основании принципа возможных скоростей имеем уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = 0, \tag{2}$$

которое должно выполняться для всех перемещений δx_ν, δy_ν, δz_ν, допускаемых связями.

177. Множители Лагранжа. Перемещения точек M связаны h соотношениями, которые получаются дифференцированием уравнений (1), а именно:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\delta z_n = 0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n}\delta z_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial f_h}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_h}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_h}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial f_h}{\partial z_n}\delta z_n = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Эти h соотношений между $3n$ вариациями координат показывают, что k из этих вариаций могут быть выбраны произвольно. Назовем эти вариации *независимыми вариациями*, а остальные, определяемые уравнениями (3), — *зависимыми вариациями*.

Для нахождения условий равновесия применим метод множителей Лагранжа. Умножим уравнения (3) соответственно на неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ и сложим их с уравнением (2); после этого определим множители таким образом, чтобы в полученной сумме обратить в нуль коэффициенты при h зависимых вариациях; тогда коэффициенты при независимых вариациях должны также обратиться в нуль; в результате требуется определить λ таким образом, чтобы обращались в нуль все коэффициенты, и мы получаем $3n$ совместных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_\nu} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_\nu} = 0, \\ Y_\nu + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_\nu} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_\nu} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_\nu} = 0, \\ Z_\nu + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_\nu} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_\nu} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_\nu} = 0, \\ (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти уравнения совместно с h уравнениями связей (1) составляют полную систему $3n+h$ уравнений, определяющих $3n$ координат и h вспомогательных неизвестных λ.

Таковы общие уравнения равновесия.

Как только коэффициенты λ будут известны, так сейчас же можно будет определить и *реакции связей*. В самом деле, мы видим, что уравнения равновесия не изменятся, если отбросить связь $f_1 = 0$ и присоединить к заданным силам, действующим на точку M_ν, силу с проекциями $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu}$, $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_\nu}$, $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_\nu}$; эта сила является действием связи на точку M_ν, т. е. тем, что мы называем *реакцией связи*. Мы непосредственно имеем величину этой силы; ее направление $\frac{\partial f_1}{\partial x_\nu}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y_\nu}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z_\nu}$ нормально к поверхности, которая получится, если предположить, что в уравнении $f_1 = 0$ всем координатам, кроме x_ν, y_ν, z_ν, приданы численные значения, соответствующие положению равновесия, а координаты x_ν, y_ν, z_ν являются текущими.

Пример. Применим предыдущие рассуждения к равновесию веревочного многоугольника с n сторонами, концы которого закреплены в двух заданных точках. Здесь будет n уравнений связи, а именно:

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu+1})^2 + (y_\nu - y_{\nu+1})^2 + (z_\nu - z_{\nu+1})^2} - l_\nu = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

причем координаты x_0, y_0, z_0 и x_n, y_n, z_n даны. Общие уравнения равновесия будут

$$X_\nu + \lambda_{\nu-1} \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{l_{\nu-1}} + \lambda_\nu \frac{x_\nu - x_{\nu+1}}{l_\nu} = 0,$$

$$Y_\nu + \lambda_{\nu-1} \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l_{\nu-1}} + \lambda_\nu \frac{y_\nu - y_{\nu+1}}{l_\nu} = 0,$$

$$Z_\nu + \lambda_{\nu-1} \frac{z_\nu - z_{\nu-1}}{l_{\nu-1}} + \lambda_\nu \frac{z_\nu - z_{\nu+1}}{l_\nu} = 0.$$

Они действительно совпадают с теми, которые получатся при помощи элементарных методов, если выразить, что сила F_ν уравновешивается натяжениями двух нитей, оканчивающихся в точке M_ν. Так как коэффициенты при λ в этих уравнениях равны направляющим косинусам сторон веревочного многоугольника, то эти λ являются абсолютными значениями натяжений, причем последние направлены вдоль сторон. Мы действительно видим, что они нормальны к поверхностям

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu\pm 1})^2 + (y_\nu - y_{\nu\pm 1})^2 + (z_\nu - z_{\nu\pm 1})^2} = l_\nu \quad \text{или} \quad l_{\nu-1},$$

где только x_ν, y_ν, z_ν являются переменными, так как эти поверхности являются сферами с центрами в точках $M_{\nu+1}$ и $M_{\nu-1}$.

178. Случай неголономной системы. Тот же метод применим к такой системе точек, для которой возможные перемещения, допускаемые связями, определяются h соотношениями вида

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\,\delta x_1 + B_{11}\,\delta y_1 + C_{11}\,\delta z_1 + \ldots + A_{1n}\,\delta x_n + B_{1n}\,\delta y_n + C_{1n}\,\delta z_n = 0, \\ A_{21}\,\delta x_1 + B_{21}\,\delta y_1 + C_{21}\,\delta z_1 + \ldots + A_{2n}\,\delta x_n + B_{2n}\,\delta y_n + C_{2n}\,\delta z_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{h1}\,\delta x_1 + B_{h1}\,\delta y_1 + C_{h1}\,\delta z_1 + \ldots + A_{hn}\,\delta x_n + B_{hn}\,\delta y_n + C_{hn}\,\delta z_n = 0, \end{array}\right\} \quad (5)$$

где коэффициенты A, B, C суть функции координат и где левые части не являются точными полными дифференциалами, как в предыдущем пункте. Мы видим, что по-прежнему $k = 3n - h$ вариаций δx_ν, δy_ν, δz_ν произвольны. Далее, поступая с этими соотношениями (5) так же, как и с соотношениями (3), мы получим уравнения равновесия в виде

$$\left.\begin{array}{l} X_\nu + \lambda_1 A_{1\nu} + \lambda_2 A_{2\nu} + \ldots + \lambda_h A_{h\nu} = 0, \\ Y_\nu + \lambda_1 B_{1\nu} + \lambda_2 B_{2\nu} + \ldots + \lambda_h B_{h\nu} = 0, \\ Z_\nu + \lambda_1 C_{1\nu} + \lambda_2 C_{2\nu} + \ldots + \lambda_h C_{h\nu} = 0 \\ \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{array}\right\} \quad (6)$$

179. Приложение принципа возможных скоростей к равновесию нитей. Пусть ds — элемент нити и $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$ — проекции равнодействующей приложенных к нему внешних сил. Для возможного перемещения, сообщенного элементу ds, работа этой силы равна

$$(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,ds,$$

где δx, δy, δz должны рассматриваться как функции дуги s, так как каждый элемент нити получает перемещение, изменяющееся с его положением на нити. Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ

$$\mathcal{T} = \int_0^l (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,ds$$

была равна нулю для всех перемещений, допускаемых связями. Допустим для определенности, что нить закреплена обоими концами; тогда δx, δy, δz обращаются в нуль на обоих пределах интеграла. Так как, кроме того, нить нерастяжима, то

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad (1)$$

откуда, выражая, что вариация левой части равна нулю и замечая, что вариация производной равна производной от вариации, например, $\delta\frac{dx}{ds}=\frac{d\,\delta x}{ds}$, получим

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\,\delta x}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{d\,\delta y}{ds}+\frac{dz}{ds}\frac{d\,\delta z}{ds}=0. \tag{2}$$

Это условие показывает, что в качестве δx и δy можно принять произвольные функции от s, обращающиеся в нуль на пределах 0 и l; δz определяется из соотношения (2):

$$\frac{d\,\delta z}{ds}=-\left(\frac{dx}{dz}\frac{d\,\delta x}{ds}+\frac{dy}{dz}\frac{d\,\delta y}{ds}\right).$$

Отсюда, интегрируя и замечая, что δz обращается в нуль вместе с s, получим

$$\delta z=-\int_0^s\left(\frac{dx}{dz}\frac{d\,\delta x}{ds}+\frac{dy}{dz}\frac{d\,\delta y}{ds}\right)ds.$$

Но необходимо, чтобы δz обращалось в нуль и на втором конце, где $s=l$; следовательно, δx и δy должны удовлетворять условию

$$\int_0^l\left(\frac{dx}{dz}\frac{d\,\delta x}{ds}+\frac{dy}{dz}\frac{d\,\delta y}{ds}\right)ds=0. \tag{3}$$

Необходимо теперь выразить, что $\mathcal{T}$ обращается в нуль для любых функций δx, δy, δz, обращающихся в нуль на пределах и удовлетворяющих соотношениям (2) и (3). Обозначим через λ пока произвольную функцию дуги s и через k — постоянную. Имеем

$$\mathcal{T}=\int_0^l\left[(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z)\,ds+\lambda\left(\frac{dx}{ds}\,d\,\delta x+\frac{dy}{ds}\,d\,\delta y+\frac{dz}{ds}\,d\,\delta z\right)+\right.$$
$$\left.+k\left(\frac{dx}{dz}\,d\,\delta x+\frac{dy}{dz}\,d\,\delta y\right)\right].$$

Интегрируя последние члены по частям и полагая $T=-\left(\lambda+k\frac{ds}{dz}\right)$, мы можем написать

$$\mathcal{T}=\int_0^l\left\{\left[X\,ds+d\left(T\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x+\right.$$
$$\left.+\left[Y\,ds+d\left(T\frac{dy}{ds}\right)\right]dy+\left[Z\,ds+d\left(T\frac{dz}{ds}\right)\right]\delta z\right\},$$

так как проинтегрированная часть обращается в нуль на пределах.

Для того чтобы было равновесие, необходимо и достаточно, чтобы это выражение $\mathcal{T}$ было равно нулю, каковы бы ни были функции δx, δy и λ от s. Распорядимся функцией λ так, чтобы обратить в нуль коэффициент при δz. Тогда оставшееся выражение должно обращаться в нуль, каковы бы ни были функции δx и δy в промежутке $(0, l)$; для этого необходимо, чтобы коэффициенты при δx и δy были также равны нулю. (Это рассуждение аналогично рассуждениям в п. 177). Таким образом получаем уравнения равновесия

$$X\,ds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad Y\,ds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad Z\,ds + d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

совпадающие с теми, которые были установлены непосредственно.

Частный случай. Допустим, что X, Y, Z являются частными производными функции $U(x, y, z, s)$ по x, y, z:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Тогда

$$\mathcal{T} = \int_0^l (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,ds = \delta\int_0^l U(x, y, z, s)\,ds,$$

и, следовательно, для получения положения равновесия нужно искать координаты x, y, z в функции величины s, обращающие в максимум или минимум интеграл

$$\int_0^l U(x, y, z, s)\,ds$$

при условии (1). Например, для неоднородной тяжелой нити вес элемента ds имеет вид $g\varphi(s)\,ds$; направив ось z вертикально вверх, имеем

$$U = -gz\varphi(s),$$

и положение равновесия обращает в максимум или минимум интеграл

$$-g\int_0^l z\varphi(s)\,ds,$$

т. е. высоту центра тяжести.

В общем случае, для определения натяжения имеем уравнение

$$dT + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

которое при рассматриваемом предположении обращается в

$$dT + \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = 0.$$

Но при увеличении s на ds имеем

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial s}ds,$$

откуда

$$dT + dU - \frac{\partial U}{\partial s}ds = 0.$$

Следовательно, если U *не зависит* от s, то получаем

$$T + U = h,$$

как мы это видели и ранее (п. 137). В этом частном случае, когда U не зависит от s, только что изложенная теория позволяет непосредственно установить результаты, уже полученные в параграфе III, главы VII; таким образом, эти результаты оказываются связанными с принципом возможных скоростей.

V. Общие теоремы, выводимые из принципа возможных скоростей

180. Связи допускают поступательное перемещение системы параллельно оси. Допустим, что связи допускают поступательное перемещение всей системы параллельно оси, которую мы примем за ось Ox. В основном уравнении статики

$$\sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = 0,$$

приложенном к этой системе, для рассматриваемого частного перемещения нужно положить

$$\delta y_\nu = 0, \quad \delta z_\nu = 0, \quad \delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_n.$$

Вынося в нем за скобку общий множитель δx_ν, получим

$$\sum X_\nu = 0.$$

Для равновесия системы необходимо, следовательно, чтобы сумма проекций на рассматриваемую ось Ox непосредственно приложенных сил равнялась нулю.

181. Связи допускают вращение системы вокруг оси. Допустим, что связи допускают вращение всей системы как целого вокруг оси, которую мы примем за ось Oz. Обозначая через r_ν и θ_ν полярные координаты проекции точки (x_ν, y_ν, z_ν) на плоскость xOy, имеем

$$x_\nu = r_\nu \cos\theta_\nu, \quad y_\nu = r_\nu \sin\theta_\nu.$$

Для того чтобы выразить, что система получает рассматриваемое перемещение, нужно, оставляя r_ν и z_ν постоянными, изменить все полярные углы θ_ν на одну и ту же величину $\delta\theta$. Таким путем для δx_ν, δy_ν, δz_ν получаются значения

$$\delta x_\nu = -r_\nu \sin\theta_\nu \delta\theta = -y_\nu \delta\theta, \quad \delta y_\nu = x_\nu \delta\theta, \quad \delta z_\nu = 0.$$

Сумма возможных работ непосредственно приложенных сил для этого частного перемещения равна

$$\sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = \delta\theta \sum (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu),$$

т. е. она равна произведению $\delta\theta$ на сумму N моментов непосредственно приложенных сил относительно рассматриваемой оси. Для равновесия необходимо, чтобы эта сумма N равнялась нулю.

Мы видим, что понятие момента относительно оси вводится, таким образом, наиболее естественно.

182. Связи допускают винтовое перемещение всей системы. Примем за ось Oz ось винтового движения. Пусть $\delta\theta$ — бесконечно малый угол, на который система поворачивается вокруг оси Oz, а δz — величина скольжения вдоль этой оси. Положим $\delta z = f\delta\theta$, f будет тем, что мы назвали *параметром* винтового движения. Так

Связи	Степени свободы	Возможные перемещения		Условия равновесия (число которых равно числу степеней свободы)
		параллельно	вокруг	
Никаких связей	6	Ox, Oy, Oz	Ox, Oy, Oz	$X=Y=Z=L=M=N=0$
Неподвижная точка O	3	—	Ox, Oy, Oz	$L=M=N=0$
Неподвижная ось Oz	1	—	Oz	$N=0$
Тело вращается вокруг оси Oz и скользит вдоль нее	2	Oz	Oz	$Z=N=0$
Тело покоится на плоскости xOy:				
1) одной точкой O	5	Ox, Oy	Ox, Oy, Oz	$X=Y=L=M=N=0$
2) несколькими точками на оси Ox	4	Ox, Oy	Ox, Oz	$X=Y=L=N=0$
3) несколькими точками, не лежащими на прямой	3	Ox, Oy	Oz	$X=Y=N=0$

как бесконечно малое перемещение каждой точки системы есть геометрическая сумма перемещения вращения и перемещения скольжения, то сумма возможных работ непосредственно приложенных сил равна сумме работ на каждом из указанных перемещений в отдельности. Для этой суммы имеем

$$\mathcal{T} = \delta z \sum Z_\nu + \delta\theta \sum (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu) = \delta\theta\,(N + fZ),$$

где N — сумма моментов относительно оси Oz, а Z — сумма проекций на эту ось. Для равновесия необходимо, следовательно, чтобы

$$N + fZ = 0.$$

Примечание. Выражение $\mathcal{T}$ представляет собой относительный момент двух систем векторов, из которых одна образована непосредственно приложенными силами, а другая имеет центральной осью ось Oz винтового движения, главным вектором $\delta\theta$ и минимальным моментом $\delta z = f\delta\theta$ (п. 28).

183. Приложение к условиям равновесия твердого тела. В таблице на стр. 240 мы обозначаем через X, Y, Z, L, M, N проекции на оси координат главного вектора и главного момента относительно начала O сил, непосредственно приложенных к твердому телу.

Мы указываем, кроме того, число степеней свободы твердого тела, подчиненного различным рассматриваемым связям. Для свободного тела это число равно шести, так как положение свободного твердого тела зависит от трех координат x_0, y_0, z_0 какой-нибудь точки O тела и трех независимых углов (например, углов Эйлера), которые определяют положение прямоугольного триэдра $Oxyz$, связанного с телом, относительно неподвижного триэдра $O_1x_1y_1z_1$.

VI Неудерживающие связи

184. Связи, определяемые равенствами; допускаемые перемещения, характеризуемые неравенствами. Может случиться, что система подчинена связям, определяемым *равенствами*, но что возможные перемещения, допускаемые этими связями, определяются *неравенствами*. В этом случае говорят, что система подчинена *неудерживающим* связям.

Представим себе, например, материальную точку, положенную на горизонтальный стол, который она может покинуть, переместившись вверх. Примем за ось Oz направленную вверх вертикаль. *Предположив, что связь осуществлена*, имеем $z = 0$, но возможные перемещения, допускаемые этой связью, будут таковы, что

$$\delta z \geqslant 0.$$

Представим себе теперь две точки $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, связанные невесомой нерастяжимой нитью длины l; наибольшее расстояние между этими точками равно l, но это расстояние может быть и меньше, так как нить не препятствует точкам приближаться друг к другу. *В предположении, что связь осуществлена*, т. е. что нить натянута, имеем

$$r^2 = l^2,$$

а возможные перемещения, допускаемые этой связью, либо оставляют расстояние r равным l, либо уменьшают его:

$$\delta r \leqslant 0.$$

Так как

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

то эти перемещения определены неравенством

$$(x - x_1)(\delta x - \delta x_1) + (y - y_1)(\delta y - \delta y_1) + (z - z_1)(\delta z - \delta z_1) \leqslant 0.$$

Вообще можно представить себе систему из n точек x_ν, y_ν, z_ν, подчиненную таким связям, что когда они все осуществлены, возможные перемещения, допускаемые этими связями, определяются некоторыми равенствами и некоторыми неравенствами:

$$\left.\begin{array}{l}
A_{11}\,\delta x_1 + B_{11}\,\delta y_1 + C_{11}\,\delta z_1 + \ldots + A_{1n}\,\delta x_n + B_{1n}\,\delta y_n + C_{1n}\,\delta z_n = 0,\\
A_{21}\,\delta x_1 + B_{21}\,\delta y_1 + C_{21}\,\delta z_1 + \ldots + A_{2n}\,\delta x_n + B_{2n}\,\delta y_n + C_{2n}\,\delta z_n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{g1}\,\delta x_1 + B_{g1}\,\delta y_1 + C_{g1}\,\delta z_1 + \ldots + A_{gn}\,\delta x_n + B_{gn}\,\delta y_n + C_{gn}\,\delta z_n = 0;
\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
A_{g+1,\,1}\,\delta x_1 + B_{g+1,\,1}\,\delta y_1 + C_{g+1,\,1}\,\delta z_1 + \ldots\\
\qquad \ldots + A_{g+1,\,n}\,\delta x_n + B_{g+1,\,n}\,\delta y_n + C_{g+1,\,n}\,\delta z_n \leqslant 0,\\
A_{g+2,1}\,\delta x_1 + B_{g+2,\,1}\,\delta y_1 + C_{g+2,\,1}\,\delta z_1 + \ldots\\
\qquad \ldots + A_{g+2,\,n}\,\delta x_n + B_{g+2,\,n}\,\delta y_n + C_{g+2,\,n}\,\delta z_n \leqslant 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{h1}\,\delta x_1 + B_{h1}\,\delta y_1 + C_{h1}\,\delta z_1 + \ldots + A_{hn}\,\delta x_n + B_{hn}\,\delta y_n + C_{hn}\,\delta z_n \leqslant 0.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Мы имеем таким образом h соотношений: g равенств и $h - g$ неравенств. Мы будем предполагать, что левые части всех неравенств либо *отрицательны*, либо равны нулю, чего можно всегда достичь, изменив, в случае необходимости, знаки обеих частей.

Мы ставим себе задачей найти для такого рода систем положения равновесия, при которых все связи осуществлены.

Полезно разбить перемещения, допускаемые связями, на две категории: 1) *неосвобождающие перемещения* и 2) *освобождающие перемещения*. Мы будем называть освобождающими перемещениями такие перемещения, для которых левые части соотношений (2) равны нулю, как и для соотношений (1):

$$A_{g+1,\,1}\,\delta x_1 + \ldots + C_{g+1,\,n}\,\delta z_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Очевидно, что каждому неосвобождающему перемещению соответствует такое же перемещение, ему равное, но противоположное по направлению, так как если левые части равенств (1) и (2) равны нулю для какой-нибудь системы значений δx_ν, δy_ν, δz_ν, то они будут также равны нулю, если у всех δx_ν, δy_ν, δz_ν переменить знаки на обратные.

Наоборот, мы назовем освобождающим перемещением такое перемещение, для которого хотя бы одна из левых частей соотношений (2) не равна нулю, например:

$$A_{g+1,\,1}\,\delta x_1 + \ldots + C_{g+1,\,n}\,\delta z_n < 0.$$

В этом случае перемещение, равное и противоположное, *не допускается* связями, так как если переменить знаки у δx_ν, δy_ν, δz_ν на обратные, то неравенство не будет выполняться.

Теорема о возможной работе для такого рода связей формулируется так:

Для того чтобы в положении, при котором все связи осуществлены, имело место равновесие, необходимо и достаточно, чтобы для всех *возможных перемещений, допускаемых связями, сумма работ заданных сил была равна нулю или была отрицательной, причем нулю она должна быть равна для неосвобождающих перемещений, равна нулю или отрицательной для освобождающих перемещений:*

$$\mathcal{T}_D \leqslant 0.$$

Необходимость условия. Для доказательства, что условие необходимо, достаточно показать, что в случае неудерживающих связей для любого перемещения, допускаемого связями, *сумма возможных работ реакций связей либо равна нулю, либо положительна*: равна нулю для неосвобождающих перемещений, равна нулю или положительна для других перемещений.

В самом деле, возьмем, например, точку, положенную на некоторую поверхность, которую она может покинуть в какую-нибудь сторону. Нормальная реакция поверхности будет, очевидно, направлена в ту сторону, в которую точка может покинуть поверхность. Следовательно, если точке сообщить перемещение, при котором она покидает поверхность (освобождающее перемещение), то работа реакции будет положительна; она будет равна нулю только в том случае, когда реакция также равна нулю. Если точке сообщить перемещение по поверхности (неосвобождающее перемещение), то работа реакции будет равна *нулю*.

Возьмем теперь две точки, связанные не имеющей массы нерастяжимой нитью. Если нить натянута, то реакциями связи будут натяжения T на обоих концах, стремящиеся сблизить точки. Если обе точки переместить таким образом, чтобы расстояние не изменилось (неосвобождающее перемещение), то сумма работ натяжений будет равна *нулю* (п. 88); но если при перемещении точки сближаются (освобождающее перемещение), то сумма работ натяжений будет, очевидно, *положительной*; она будет равна нулю лишь в частном случае, когда натяжение также равно нулю.

Резюмируя сказанное для всех перемещений, допускаемых связями получаем

$$\mathcal{T}_L \geqslant 0,$$

где $\mathcal{T}_L$, как и прежде, обозначает сумму работ реакций связей и знак равенства следует брать для неосвобождающих перемещений.

Установив это, допустим, что система находится в равновесии. Каждая точка, как мы это подробно разобрали в п. 165, будет находиться в равновесии под действием всех приложенных к ней сил как непосредственно заданных, так и реакций связей, и если системе сообщить какое-нибудь возможное перемещение, то получится

$$\mathcal{T}_D + \mathcal{T}_L = 0,$$

где $\mathcal{T}_D$ — сумма работ заданных сил. Но если перемещение допускается связями, то, как мы видели, $\mathcal{T}_L \geqslant 0$ и, следовательно,

$$\mathcal{T}_D \leqslant 0.$$

Таким образом, высказанное условие является необходимым, причем знак равенства соответствует неосвобождающим перемещениям.

Достаточность условия. Для доказательства, так же как и в п. 165, покажем, что если равновесия нет, то существует по крайней мере одно перемещение, допускаемое связями, для которого сумма работ $\mathcal{T}_D$ заданных сил отлична от нуля и положительна. В самом деле, если равновесия нет, то система приходит в движение и совершает перемещение, допускаемое связями. В этом действительном перемещении каждая точка перемещается вдоль равнодействующей всех приложенных к ней сил как непосредственно заданных, так и реакций связей. Работа этой равнодействующей, равная сумме работ составляющих сил, будет, следовательно, положительная, и мы имеем

$$\mathcal{T}_D + \mathcal{T}_L > 0. \tag{3}$$

Но в *действительном перемещении* сумма $\mathcal{T}_L$ работ реакций связей равна *нулю*. Это очевидно, если действительное перемещение является неосвобождающим перемещением, так как к нему может быть приложено все, что было сказано о работе реакций связей, в случае, когда последние выражаются равенствами. Но то же самое будет по-прежнему справедливо и в случае, когда действительное перемещение является освобождающим перемещением; это вытекает из того, что если действительное перемещение является освобождающим перемещением для какой-нибудь связи, то соответствующая реакция связи равна *нулю* и, следовательно, ее работа также равна нулю.

Например, возьмем какую-нибудь точку, лежащую на поверхности, которую она может покинуть в какую-либо сторону. Соответствующая реакция связи будет нормальной реакцией. Если точка приходит в движение под действием приложенных к ней сил, то могут представиться два случая: либо точка переместится по поверхности (неосвобождающее перемещение) и тогда работа реакции будет равна нулю, либо она покинет поверхность (освобождающее перемещение), но тогда реакция будет равна нулю, так как, по предположению, поверхность не удерживает точку и работа реакции будет по-прежнему равна нулю. Теперь возьмем две точки, связанные нитью. Если обе точки под действием приложенных к ним сил приходят в движение, то могут представиться два случая: или нить остается натянутой (равенство) и сумма работ натяжений равна нулю (п. 88), или точки сближаются (неравенство), но тогда нить не будет более натянутой, натяжения будут равны нулю и их работа по-прежнему будет равна нулю.

Резюмируя изложенное, можно сказать, что для *действительного* перемещения сумма работ реакций связей равна нулю,

$$\mathcal{T}_L = 0,$$

и, следовательно, согласно неравенству (3) для *действительного перемещения*

$$\mathcal{T}_D > 0,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Таким образом, доказанное условие является и необходимым и достаточным. Его можно высказать более кратко: *для равновесия необходимо и достаточно, чтобы на всех перемещениях, допускаемых связями, было*

$$\mathcal{T}_D \leqslant 0. \tag{4}$$

Отсюда само собой будет вытекать, что для *неосвобождающих перемещений*

$$\mathcal{T}_D = 0.$$

Действительно, если для неосвобождающего перемещения получится $\mathcal{T}_D < 0$, то, так как противоположное перемещение будет также допускаться связями, для этого нового перемещения получится $\mathcal{T}_D > 0$, и, следовательно, условие (4) не будет более выполняться для всех допускаемых связями перемещений.

185. Аналитические выражения. Пусть на точки наложены связи, выражаемые равенствами и неравенствами такого вида, как (1) и (2). Если обозначить через X_ν, Y_ν, Z_ν проекции равнодействующей заданных сил, приложенных к точке (x_ν, y_ν, z_ν), то для того, чтобы выразить, что имеет место равновесие, надо написать, что для всех перемещений, удовлетворяющих соотношениям (1) и (2), выполняется неравенство

$$\sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) \leqslant 0. \tag{5}$$

Начнем с того, что приравняем нулю сумму в левой части соотношения для всех неосвобождающих перемещений, т. е. для всех перемещений, которые получатся, если приравнять нулю левые части равенств (1) и (2). Таким путем, при помощи методов п. 171 и 177, будут найдены положения равновесия.

После этого останется выбрать среди найденных положений те, при которых для каждого освобождающего перемещения сумма работ заданных сил равна *нулю* или *отрицательна*. Таким путем получатся все возможные положения равновесия, при которых все связи осуществлены.

Допустим, например, что использованы множители Лагранжа. Написав, что при всех неосвобождающих перемещениях сумма работ приложенных сил равна нулю, получим, как в п. 178, следующие необходимые условия равновесия:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu + \lambda_1 A_{1\nu} + \ldots + \lambda_{g+1} A_{g+1,\nu} + \ldots + \lambda_h A_{h\nu} = 0, \\ Y_\nu + \lambda_1 B_{1\nu} + \ldots + \lambda_{g+1} B_{g+1,\nu} + \ldots + \lambda_h B_{h\nu} = 0, \\ Z_\nu + \lambda_1 C_{1\nu} + \ldots + \lambda_{g+1} C_{g+1,\nu} + \ldots + \lambda_h C_{h\nu} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Возьмем теперь какое-нибудь положение равновесия, определяемое этими уравнениями. Чтобы они были применимы, необходимо и достаточно, чтобы множители $\lambda_{g+1}, \lambda_{g+2}, \ldots, \lambda_h$, соответствующие соотношениям (2), были *отрицательны*. Действительно, сообщим системе освобождающее перемещение δx_ν, δy_ν, δz_ν, удовлетворяющее соотношениям (1) и (2). Вычисляя сумму $\sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu)$ при помощи уравнений (6), мы видим, что коэффициенты при $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_g$ равны нулю в силу соотношений (1) и остается

$$\begin{aligned} &\sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = \\ &= -\lambda_{g+1} (A_{g+1,1} \delta x_1 + B_{g+1,1} \delta y_1 + C_{g+1,1} \delta z_1 + \ldots) - \\ &\quad - \lambda_{g+2} (A_{g+2,1} \delta x_1 + \ldots) - \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \\ &\quad - \lambda_h (A_{h1} \delta x_1 + \ldots). \end{aligned} \tag{7}$$

Эта сумма должна быть отрицательная при любых перемещениях, удовлетворяющих соотношениям (2), при которых коэффициенты перед множителями $\lambda_{g+1}, \lambda_{g+2}, \ldots, \lambda_h$ либо *отрицательны*, либо равны *нулю*.

186. Пример. Найдем положение равновесия тяжелой точки m, прикрепленной к неподвижной точке O при помощи невесомой и нерастяжимой нити длины l и лежащей на наружной поверхности неподвижного горизонтального цилиндра вращения.

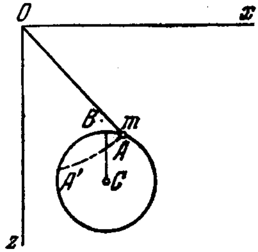


Рис. 121.

Примем точку O за начало; вертикаль, направленную вниз, — за ось Oz; прямое сечение цилиндра — за плоскость zOx; ось Oy будет тогда горизонтальна.

Сечение цилиндра плоскостью zx будет окружностью радиуса R, которую мы предположим целиком расположенной внутри угла xOz (рис. 121). Обозначим через a и c координаты центра C этой окружности. Обозначим далее через B наивысшую точку окружности и предположим, что длина l нити больше длины OB, но меньше длины касательной к окружности, проведенной из точки O, так что когда нить натянута, точка m будет лежать на цилиндре.

Предполагая, что обе связи осуществлены, получим

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-l^2=0,\\ (x-a)^2+(z-c)^2-R^2=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Возможные перемещения, допускаемые первой связью, таковы, что они либо оставляют неизменным, либо уменьшают расстояние Om, перемещения же, допускаемые второй связью, либо оставляют неизменным, либо уменьшают расстояние от точки m до оси цилиндра, так что

$$\delta(x^2+y^2+z^2)\leqslant 0,$$
$$\delta[(x-a)^2+(z-c)^2]\geqslant 0,$$

или, производя дифференцирование и меняя знаки во втором неравенстве

$$\left.\begin{aligned} x\,\delta x+y\,\delta y+z\,\delta z\leqslant 0,\\ -(x-a)\,\delta x-(z-c)\,\delta z\leqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Так как единственной заданной силой является вес, то для равновесия необходимо и достаточно, чтобы при условии осуществления соотношений (8) выполнялось неравенство

$$mg\delta z\leqslant 0 \tag{10}$$

для всех перемещений (9).

Для упрощения вычислений мы применим метод, который, очевидно, может быть распространен на общий случай. Примем в качестве независимых переменных левые части соотношений (9), положив

$$\left.\begin{aligned} x\,\delta x+y\,\delta y+z\,\delta z=\delta\lambda,\\ -(x-a)\,\delta x-(z-c)\,\delta z=\delta\mu, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\delta\lambda$ и $\delta\mu$ — две произвольные бесконечно малые величины. Разрешая эти уравнения относительно δx и δz, имеем

$$\left.\begin{aligned} \delta x=\frac{(c-z)\,\delta\lambda-z\,\delta\mu-(c-z)\,y\,\delta y}{cx-az},\\ \delta z=\frac{(a-x)\,\delta\lambda-x\,\delta\mu-(a-x)\,y\,\delta y}{az-cx}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Для того чтобы получить наиболее общее перемещение, допускаемое связями, можно принять, что δy, $\delta\lambda$ и $\delta\mu$ произвольны при условиях

$$\delta\lambda\leqslant 0,\quad \delta\mu\leqslant 0, \tag{13}$$

являющихся условиями (9), написанными в новых переменных. Для равновесия, согласно соотношению (10), необходимо, чтобы величина $mg\,\delta z$, или, что то же, величина δz, была отрицательна или равна нулю для всех этих перемещений.

Возьмем сначала *неосвобождающие перемещения* $\delta\lambda=0$, $\delta\mu=0$. Для того чтобы было равновесие, необходимо, чтобы для всех этих перемещений величина $mg\,\delta z$ или δz равнялась нулю. Но если $\delta\lambda=0$, $\delta\mu=0$, то для δz из равенства (12) получаем

$$\frac{-(a-x)\,y\,\delta y}{az-cx},$$

и чтобы эта величина была равна нулю при любом δy, необходимо и достаточно, чтобы

$$(a-x)\,y=0.$$

Это необходимое условие равновесия распадается на два: $y=0$ и $a-x=0$. Рассмотрим последовательно каждый из этих случаев.

Первый случай. $y=0$. Полагая в уравнениях связи (8) $y=0$, получим два соотношения

$$x^2+z^2=l^2,$$
$$(x-a)^2+(z-c)^2=R^2,$$

определяющих два положения равновесия в точках A и A' пересечения окружности основания цилиндра с окружностью, лежащей в плоскости xz и описанной из точки O как из центра радиусом, равным l. Обозначим через x, y, z координаты одного из этих положений. Чтобы узнать, пригодно ли оно, дадим точке m в этом положении какое-нибудь освобождающее перемещение, т. е. такое, для которого

$$\delta\lambda \leqslant 0, \quad \delta\mu \leqslant 0.$$

Необходимо, чтобы при таком перемещении работа $mg\,\delta z$ заданной силы была или отрицательна, или равна нулю. Но при $y=0$ из выражения (12) для δz получим

$$\delta z=\frac{(a-x)\,\delta\lambda - x\,\delta\mu}{az-cx},$$

и это выражение должно быть или отрицательным, или равным нулю, когда $\delta\lambda$ и $\delta\mu$ или отрицательны, или равны нулю.

Для положения A величины $az-cx$ и $a-x$ отрицательны, а x положительна; следовательно, δz имеет отрицательные значения при всех освобождающих перемещениях, и положение A *пригодно.*

Для положения A' величины $a-x$, x и $az-cx$ положительны; δz не будет отрицательным при всех отрицательных или равных нулю значениях $\delta\lambda$ и $\delta\mu$. Например, при $\delta\lambda=0$ и $\delta\mu<0$ величина δz получается положительной. Положение A' не пригодно. Это видно сразу, так как если точку m положить на поверхности цилиндра в A', то она упадет.

Второй случай. Положим теперь $x=a$. Тогда из второго из уравнений (8) связей имеем

$$z-c=\pm R.$$

Это показывает, что искомые положения лежат либо на наивысшей образующей $z=c-R$, либо на наинизшей образующей $z=c+R$ цилиндра. Согласно первому соотношению (8) они лежат на пересечении этих образующих со сферою радиуса l, описанной из точки O как из центра. Эта сфера пересекает верхнюю образующую $B\,(z=c-R)$ в двух симметричных относительно плоскости zx точках E и E' и не пересекает нижней образующей $(z=c+R)$. Проверим, будет ли одно из этих положений E и E' пригодно. Координаты этих положений будут

$$x=a, \quad y \lesseqgtr 0, \quad z=c-R. \tag{14}$$

Для того чтобы положение было пригодно, нужно, чтобы для всех освобождающих перемещений получалось

$$mg\,\delta z \leqslant 0.$$

Но значение (12) для δz при условиях (14) для координат рассматриваемых положений будет

$$\delta z=-\frac{x\,\delta\mu}{az-cx}=\frac{\delta\mu}{R}.$$

При всех освобождающих перемещениях $\delta\mu \leqslant 0$ значение δz отрицательно или равно нулю; следовательно, оба положения E и E' пригодны.

Можно к этой задаче применить, в качестве упражнения, метод множителей Лагранжа. Тогда положения равновесия определятся соотношениями

$$\begin{aligned} 0+\lambda_1 x-\lambda_2(x-a)&=0,\\ 0+\lambda_1 y\qquad\qquad &=0,\\ mg+\lambda_1 z-\lambda_2(z-c)&=0, \end{aligned}$$

где λ_1 и λ_2 должны быть *отрицательными* или *равными нулю*.

Примечание. В соответствии с общим методом мы нашли положения равновесия в предположении, что связи осуществлены, т. е. что уравнения связей (8) удовлетворяются.

187. Связи, выражаемые неравенствами в конечной форме. В предыдущих параграфах мы предполагали, что связи выражаются равенствами. Но мы предполагали, что связи осуществляются таким образом, что перемещения, допускаемые связями, выражаются неравенствами. Мы показали, как можно найти все положения равновесия, при которых все связи осуществлены.

Можно поставить более общую задачу следующим образом.

Представим себе систему точек, подчиненных связям, из которых одни выражаются g равенствами в конечной форме:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n)=0,\\ &f_2(x_1, y_1, z_1, \qquad\quad \ldots, x_n, y_n, z_n)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_g(x_1, y_1, z_1, \qquad\quad \ldots, x_n, y_n, z_n)=0, \end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

а другие выражаются $h-g$ соотношениями неравенств тоже в конечной форме:

$$\left.\begin{aligned} &f_{g+1}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)\leqslant 0,\\ &f_{g+2}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)\leqslant 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_h(x_1, y_1, z_1, \quad \ldots, x_n, y_n, z_n)\leqslant 0. \end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Тогда задача нахождения всех положений равновесия системы под действием заданных сил распадается на несколько других задач, исследованных выше.

Мы будем говорить для краткости, что связь f_{g+1} осуществлена, если система находится в положении, при котором функция $f_{g+1}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ равна *нулю* и что указанная связь не осуществлена, если функция f_{g+1} удовлетворяет *неравенству* связи (16)

$$f_{g+1}<0.$$

То же самое будет для остальных связей $f_{g+2}, \ldots, f_h$.

Тогда различные положения равновесия распадаются на следующие:

1°. Могут существовать положения равновесия, при которых все связи $f_{g+1}, f_{g+2}, \ldots, f_h$ осуществлены, а перемещения, допускаемые связями, сохраняют функции $f_1, f_2, \ldots, f_g$ равными нулю, а функции $f_{g+1}, f_{g+2}, \ldots, f_n$ или сохраняют равными нулю, или делают *отрицательными*. При этих условиях перемещения, допускаемые связями, удовлетворяют g равенствам

$$\delta f_1=0,\quad \delta f_2=0,\ \ldots,\quad \delta f_g=0$$

и $h-g$ неравенствам

$$\delta f_{g+1}\leqslant 0,\quad \delta f_{g+2}\leqslant 0,\ \ldots,\quad \delta f_h\leqslant 0.$$

Положения равновесия этого рода будут как раз те, которые выведены методами п. 184.

2°. Могут существовать положения равновесия, при которых одна из связей (16) не осуществлена, а остальные осуществлены. Например, можно искать положения равновесия, при которых

$$f_{g+1} < 0$$

и

$$f_{g+2} = 0, \quad f_{g+3} = 0, \quad \ldots, \quad f_h = 0. \tag{17}$$

Тогда снова получится такая же задача, как в п. 184, при которой осуществлены связи (15) и (17), а допускаемые перемещения удовлетворяют равенствам

$$\delta f_1 = 0, \quad \delta f_2 = 0, \quad \ldots, \quad \delta f_g = 0$$

и неравенствам

$$\delta f_{g+2} \leqslant 0, \quad \delta f_{g+3} \leqslant 0, \quad \ldots, \quad \delta f_h \leqslant 0.$$

Но из этих положений равновесия системы нужно взять только такие, для которых выполняется условие

$$f_{g+1} < 0.$$

3°. Точно так же могут существовать положения равновесия, при которых не осуществлены два, три или вообще p связей (16), например,

$$f_{g+1} < 0, \quad f_{g+2} < 0, \quad \ldots, \quad f_{g+p} < 0, \tag{18}$$

а осуществлены остальные:

$$f_{g+p+1} = 0, \quad f_{g+p+2} = 0, \quad \ldots, \quad f_h = 0. \tag{19}$$

Возможные перемещения, допускаемые связями, удовлетворяют равенствам (15) и неравенствам

$$\delta f_{g+p+1} \leqslant 0, \quad \delta f_{g+p+2} \leqslant 0, \quad \ldots, \quad \delta f_h \leqslant 0. \tag{20}$$

Эти положения равновесия находятся методом п. 184 без условий (18). Однако из найденных таким образом положений равновесия нужно сохранить только те, для которых выполняются неравенства (18).

4°. Могут, наконец, существовать положения равновесия, при которых ни одна из связей $f_{g+1}, f_{g+2}, \ldots, f_h$ не осуществлена. Они найдутся, если определять положения равновесия системы, подчиненной только связям (15). Но из полученных положений равновесия следует сохранить лишь те, для которых выполняются неравенства

$$f_{g+1} < 0, \quad f_{g+2} < 0, \quad \ldots, \quad f_h < 0.$$

Пример. В примере предыдущего пункта мы определили положения равновесия точки, предполагая, что нить натянута и что эта точка лежит на поверхности цилиндра, т. е. предполагая, что осуществлены обе связи

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$
$$(x-a)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0.$$

В более общей постановке можно искать положения равновесия, при которых

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leqslant 0,$$
$$(x-a)^2 + (z-c)^2 - R^2 \geqslant 0.$$

Тогда сначала нужно взять в обоих соотношениях знаки равенства, что даст уже найденные положения равновесия.

Затем нужно будет искать положения равновесия, при которых

$$x^2+y^2+z^2-l^2<0,$$
$$(x-a)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$

т. е. при которых нить не натянута, но точка находится на цилиндре. Тогда в качестве возможных положений равновесия получатся все точки образующей B, расположенные между найденными выше положениями E и E'.

Точно так же нужно будет искать положения, для которых

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0,$$
$$(x^2-a)^2+(z-c)^2-R^2\geqq 0,$$

т. е. нить натянута, но точка находится вне цилиндра. Очевидно, получится вертикальное положение равновесия нити.

Наконец, остается найти положения, для которых

$$x^2+y^2+z^2-l^2<0,$$
$$(x-a)^2+(z-c)^2-R^2>0,$$

т. е. нить не натянута и точка лежит вне цилиндра. Таких положений равновесия не существует.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, что если две точки $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ системы связаны нерастяжимой и невесомой нитью, проходящей через некоторую кривую C, то сумма работ реакций связей (натяжений нити в точках M и M') равна нулю для перемещения, допускаемого связью.

Ответ. Обозначая через $A(a, b, c)$ точку, в которой нить опирается на кривую, и через T натяжение, одинаковое вдоль всей нити, получим, после приведений, для суммы работ натяжений, приложенных в точках M и M', значение

$$T\left[\left(\frac{a-x}{AM}+\frac{a-x'}{AM'}\right)\delta a+\left(\frac{b-y}{AM}+\frac{b-y'}{AM'}\right)\delta b+\left(\frac{c-z}{AM}+\frac{c-z'}{AM'}\right)\delta c\right],$$

равное нулю, так как не имеющий массы элемент ds нити, расположенный в точке A, находится в равновесии под действием двух натяжений на его концах и нормальной реакции кривой, вследствие чего эта реакция является биссектрисой угла MAM'.

2. Проверить тот же вопрос для случая, когда обе точки M и M' связаны невесомой нитью, скользящей без трения по неподвижной поверхности S.

Нить располагается по прямолинейной части MA, затем по поверхности S вдоль геодезической линии AA' и, наконец, снова по прямолинейной части $A'M'$; натяжение нити вдоль всей ее длины имеет одно и то же значение T. Эти свойства вытекают из того, что, поскольку нить не имеет массы, то приложенные к ней силы находятся в равновесии. Обозначая через (a, b, c) и (a', b', c') координаты точек A и A', имеем

$$MA+\breve{AA'}+A'M'=\text{const}.$$

Если сообщить системе возможное перемещение, допускаемое связями, то дуга AA' перейдет в A_1A_1' и при попытке проверить, что сумма работ натяжений в точках M и M' равна нулю, придем к геометрическому соотношению

$$\delta\left(\breve{AA'}\right)+\overline{AA_1}\cos\widehat{A_1AA'}+\overline{A'A_1'}\cos\widehat{A_1'A'A}=0,$$

выражающему свойство геодезических линий поверхности. (Упражнение в конце предыдущей главы для случая $\varphi = 1$.)

3. Диск, ограниченный кривой C, движется в плоскости. Невесомая нить закреплена в точке M контура C диска, обернута вокруг него и затем протянута до точки M' системы, где она закреплена. Проверить, будет ли сумма работ реакций связи равна нулю для перемещения, допускаемого этой связью.

(Достаточно заметить, что связь входит в число связей, рассмотренных в тексте, так как точка M' вынуждена скользить без трения по одной из разверток кривой C. Можно также повторить рассуждения п. 162.)

4. *Равновесие простого домкрата.* Машина состоит из шестерни радиуса a, которую при помощи рукоятки длины b заставляют вращаться вокруг своей оси. Эта шестерня находится в зацеплении с зубчатой рейкой, так что при вращении шестерни вокруг оси рейка перемещается вдоль самой себя. Движущая сила P приложена в конце рукоятки перпендикулярно к ней, а сопротивление R противодействует перемещению рейки. (Условие равновесия: $Pb - Ra = 0$.)

5. *Дифференциальный ворот.* Эта машина состоит из двух неизменно связанных между собой цилиндров с общей осью, но разных радиусов r и r'. Веревка, несущая блок, навериута вокруг обоих цилиндров в противоположных направлениях. Движущая сила P приложена перпендикулярно к рукоятке радиуса a, а сопротивление R вызывается грузом, подвешенным к блоку. [Условие равновесия $2aP = (r - r')R$.]

6. *Принцип минимума суммы квадратов расстояний.* (Мёбиус и Гаусс, Crelle, т. 4.) Дана система точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, находящаяся под действием сил $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Система находится в равновесии в положении m_1, $m_2, \ldots, m_n$, где силы имеют значения $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Отложим от точки m_1 в направлении силы p_1 отрезок $\overline{m_1O_1}$, равный p_1/k, от точки m_2 в направлении p_2 — отрезок $\overline{m_2O_2}$, равный $p_2/k, \ldots$, где k — отличная от нуля постоянная. Возьмем после этого произвольное положение $M_1, M_2, \ldots, M_n$ системы и приложим к точкам $M_1, M_2, \ldots, M_n$ силы $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$, направленные соответственно по прямым $\overline{M_1O_1}, \overline{M_2O_2}, \ldots, \overline{M_nO_n}$ и равные $k\overline{M_1O_1}$, $k\overline{M_2O_2}, \ldots, k\overline{M_nO_n}$. Под действием этих новых сил система будет по-прежнему находиться в равновесии в том же положении $m_1, m_2, \ldots, m_n$, так как в этом специальном положении силы $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ совпадают с $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Так как новая система сил $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ имеет силовую функцию

$$U = -k\left(\overline{M_1O_1^2} + \overline{M_2O_2^2} + \ldots + \overline{M_nO_n^2}\right),$$

то, как мы видим, рассматриваемое положение равновесия обращает, вообще говоря, эту функцию в максимум или минимум и во всяком случае в этом положении равновесия вариация функции U обращается в нуль.

Прилагая теорему к простейшему случаю, мы видим, что если точка m находится в равновесии под действием трех сил $\overline{mO_1}, \overline{mO_2}, \overline{mO_3}$, то это положение равновесия будет тем положением точки M, для которого сумма

$$\overline{MO_1^2} + \overline{MO_2^2} + \overline{MO_3^2}$$

имеет минимум, что является хорошо известным свойством центра тяжести треугольника $O_1O_2O_3$.

7. *Вообще* рассмотрим систему точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots$ $\ldots, M_n(x_n, y_n, z_n)$, подчиненных заданным, не зависящим от времени связям, и находящихся под действием непосредственно приложенных сил, причем для простоты мы будем считать, что силы, действующие на точку M_1, приведены к одной силе $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$, силы, действующие на точку M_2, — к

одной силе $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$, ... Допустим, что эта система имеет определенное положение равновесия, для которого точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ занимают определенные положения $m_1, m_2, \ldots, m_n$ с координатами (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ..., (a_n, b_n, c_n), а соответствующие силы имеют определенные значения p_1, $p_2, \ldots, p_n$ с соответствующими проекциями (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), ..., (A_n, B_n, C_n).

Составим функцию U от $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$, частные производные которой $\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i}$ принимают значения A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, когда система находится в рассматриваемом положении равновесия, т. е. когда координаты $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ принимают значения $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots, a_n, b_n, c_n$. Та же система, находясь под действием сил $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$, имеющих силовую функцию U, будет по-прежнему находиться в равновесии в том же самом положении $m_1, m_2, \ldots, m_n$, так как в этом положении силы $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ совпадают с силами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Следовательно, в общем случае, функция U имеет в этом положении равновесия максимум или минимум и во всяком случае ее вариация в этом положении равна нулю.

8. Двойной тяжелый конус, образованный двумя одинаковыми конусами, соединенными основаниями, положен на две пересекающиеся прямые, одинаково наклоненные к горизонту, причем так, что центр тяжести конуса находится в вертикальной плоскости, делящей пополам угол между обеими прямыми. Найти условия равновесия (система тяжелая, $\delta\zeta = 0$).

Геометрически необходимо и достаточно, чтобы плоскость, проходящая через центр тяжести и две точки касания конуса с прямыми, была вертикальной, или чтобы линия пересечения касательных плоскостей к конусам в точках касания была горизонтальна.

Аналитически, если m обозначает половину угла раствора конусов, α — угол наклона плоскости обеих прямых к горизонту, β — половину угла между вертикальными плоскостями, проведенными через эти прямые, то условие равновесия будет $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} m \operatorname{tg}\beta$. (А. Флёри, Annales de Mathematiques, 1854.)

9. Применив положение о том, что равновесие тяжелой системы получается, если приравнять нулю вариацию высоты G центра тяжести, доказать, что свободной поверхностью находящейся в равновесии тяжелой жидкости является горизонтальная плоскость.

10. Если три точки m_1, m_2, m_3 связаны таким образом, что площадь треугольника m_1, m_2, m_3 постоянна, и если на точки действуют три силы P_1, P_2, P_3, то для равновесия необходимо и достаточно, чтобы эти силы лежали в плоскости треугольника и чтобы они были перпендикулярны противоположным сторонам треугольника и им пропорциональны.

Если четыре точки связаны таким образом, что объем тетраэдра с вершинами в этих точках постоянен, и если на них действуют четыре силы, то для равновесия необходимо и достаточно, чтобы эти силы были перпендикулярны противоположным граням тетраэдра и им пропорциональны (К. Нейман).

11. Однородный тяжелый стержень OA вращается в вертикальной плоскости вокруг своего закрепленного конца O. Нить, прикрепленная к концу A, перекинута через находящийся на одной вертикали с O бесконечно малый блок B и несет на своем конце противовес Q, скользящий без трения по находящейся в той же вертикальной плоскости кривой C.

Какова должна быть эта кривая, чтобы равновесие системы было безразличным? (Подъемный мост Белидора.)

[Необходимо, чтобы центр тяжести системы перемещался горизонтально. Приняв точку B за начало, найдем, что в полярных координатах уравнение кривой имеет вид $r^2 - r(a + b\cos\theta) + c = 0$. Это — овал Декарта; в частном случае, когда $c = 0$, будет улитка Паскаля.]

12. Тот же вопрос в предположении, что кривая C проходит через B и что вместо того, чтобы быть натянутой, нить протянута по кривой (циклоида).

13. Найти положение равновесия однородного тяжелого стержня длины $2a$, расположенного в вертикальной плоскости и опирающегося на неподвижную точку O, по которой он может скользить, а концом A — на вертикальную стену.

($\delta\zeta = 0$. Если b — расстояние от точки O до стены, то для равновесия получается $OA = \sqrt[3]{ab^2}$; эта величина должна быть меньше a.)

14. Однородный тяжелый стержень AB длины $2a$ опирается на край полуокружности, диаметр которой $2R$ горизонтален, а конец его лежит на этой же полуокружности. Найти положение равновесия. (Наклон l стержня дается уравнением $4R\cos^2 l - a\cos l - 2R = 0$; для возможности равновесия необходимо, чтобы было $\frac{a\sqrt{6}}{2} > R > \frac{a}{2}$.

15. В вертикальной плоскости даны две неподвижные кривые C и C'. Две тяжелые точки с массами m и m' скользят без трения по этим кривым и связаны друг с другом невесомой и нерастяжимой нитью, проходящей через бесконечно малый блок O. Одна из этих кривых дана. Какой должна быть другая кривая, чтобы равновесие было безразличным? Если взять горизонтальную полярную ось, то необходимо и достаточно, чтобы

$$m\overline{Om}\sin\theta + m'\overline{Om'}\sin\theta' = \text{const}.$$

16. Рассматриваются два одинаковых однородных стержня AB и AC, связанных шарнирно в точке A и касающихся вертикальной окружности таким образом, что точка A находится на одной вертикали с центром. Найти положение равновесия. (Если $2l$ — длина стержня, α — угол их наклона с горизонтом, R — радиус круга, то $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \frac{l}{R} = 0$. Имеется одно положение равновесия. Устойчиво ли оно?)

17. Равнобедренный тяжелый однородный треугольник, высота которого h и равные стороны имеют длину a, лежит своими тремя вершинами на поверхности сферы. Найти положение равновесия (Вриглей).

18. Равносторонний однородный тяжелый треугольник ABC находится в вертикальной плоскости. Его вершина A скользит без трения по вертикальной прямой Ox, а середина M стороны AB прикреплена к неподвижной точке O этой прямой при помощи невесомой и нерастяжимой нити.

Найти положения равновесия. Исследовать их устойчивость. Если обозначить через α угол OM с осью Ox, то задача приведется к нахождению максимума и минимума функции $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

19. Однородный тяжелый эллиптический диск лежит в вертикальной плоскости и касается горизонтальной оси, по которой он может скользить без трения. По контуру диска обернута нить, несущая на конце заданный груз. Найти положения равновесия системы. (Можно привести эту задачу к следующей: провести к эллипсу параллельные касательную и нормаль таким образом, чтобы отношение их расстояний до центра было заданным.)

20. Однородная тяжелая пластинка $ABCDE$, лежащая в вертикальной плоскости, имеет следующую форму: AB — горизонтальная прямая длины x, BC — вертикаль длины b, CD — горизонталь длины c, меньшей чем x, DE — дуга неизвестной кривой Γ, выходящей из точки D и поднимающейся над CD со стороны точки A; и, наконец, EA — вертикальная прямая. Пластинка может свободно вращаться вокруг точки B, предполагаемой

закрепленной, и находится под действием веса и горизонтальной силы F, приложенной в точке E. Какой должна быть форма кривой Γ, чтобы равновесие имело место при любом положении ограничивающей ординаты EA, т. е. каково бы ни было x (b и c рассматриваем как постоянные)? (Фурман).

Если взять горизонтальную и вертикальную оси с началом в точке D, то уравнение этой кривой получится такое: $y+b=be^{\frac{x^2}{2}+cx}$

21. Найти такие кривые, чтобы однородная тяжелая цепь длины l, скользящая по ним без трения, была в равновесии в *любом положении.*

Ответ. Если взять вертикальную ось Oz и обозначить через $f(s)$ периодическую функцию периода l, то необходимо и достаточно, чтобы координата z какой-нибудь точки кривой была связана с дугой s соотношением $z=f(s)$. Так, можно принять $z=a\sin\frac{2k\pi s}{l}$, где k — целое число.

22. Дана направленная вверх вертикальная прямая OB и два невесомых стержня BD и OC, связанных шарнирно в точке C, расположенной между B и D. Стержень OC вращается вокруг точки O, а конец B стержня BD скользит без трения по неподвижной прямой OB. К точке D подвешен груз. Найти положения равновесия. В каких случаях равновесие будет безразличным?

23. Шесть одинаковых однородных стержней веса p связаны шарнирно своими концами и образуют шестиугольник, лежащий в вертикальной плоскости. Сторона AB этого шестиугольника *закреплена неподвижно в горизонтальном положении*; остальные стороны расположены симметрично относительно вертикали, проходящей через середину AB.

Какую направленную вертикально вверх силу F нужно приложить к середине горизонтальной стороны, противоположной AB, чтобы система была в равновесии? ($F=3p$).

24. *Твердое тело с пятью степенями свободы.* Положение свободного твердого тела в пространстве зависит от шести параметров (п. 183). Если между этими параметрами установить какое-нибудь соотношение, то тело будет иметь только пять степеней свободы и его положение будет зависеть от пяти параметров $q_1, q_2, \ldots, q_5$. Доказать, что если тело поместить теперь в какое-либо определенное положение, то все возможные перемещения, допускаемые наложенными на него связями, должны удовлетворять следующему геометрическому условию. Существует такая неподвижная прямая D, что проекция на нее скорости поступательного движения, сообщенной определенной точке тела, находится в постоянном соотношении с проекцией на ту же ось сообщенной телу мгновенной угловой скорости вращения. Нужно заметить, что координаты x_0, y_0, z_0 определенной точки тела и девять направляющих косинусов осей Ox, Oy, Oz прямоугольного координатного триэдра, связанного с телом, относительно неподвижных осей O_1x_1, y_1, z_1 (п. 51) будут функциями пяти параметров q_i. Тогда, если сообщить этим параметрам произвольные вариации $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_5$ в течение промежутка времени δt, то проекции V_x^0, V_y^0, V_z^0 возможной скорости точки O на оси $Oxyz$ и компоненты p, q, r возможной мгновенной угловой скорости вращения по тем же осям будут линейными однородными функциями от $\frac{\delta q_1}{\delta t}, \frac{\delta q_2}{\delta t}, \ldots, \frac{\delta q_5}{\delta t}$. Исключение этих пяти произвольных величин приведет к линейному однородному уравнению, связывающему величины $V_x^0, V_y^0, V_z^0, p, q, r$, коэффициенты которого будут функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_5$. Интерпретация этого уравнения даст высказанную теорему. (В п. 201 Treatise of natural Phylosophy Тэта и Томсона можно найти описание механизма, позволяющего осуществить такого рода связи.)

ГЛАВА IX

ПОНЯТИЕ О ТРЕНИИ

188. Общие сведения. До сих пор мы рассматривали твердые тела как идеально твердые и идеально отполированные и допускали, что если два тела, находящиеся в покое или в движении, соприкасаются друг с другом в какой-нибудь точке и могут скользить друг по другу, то их взаимодействие нормально к общей касательной плоскости в этой точке.

Это предположение противоречит опыту. Естественные тела не являются ни идеально твердыми, ни идеально гладкими. Когда два естественных тела находятся в соприкосновении, то никогда касание не происходит в одной точке; оба тела испытывают деформации, вообще говоря, очень малые, вследствие которых касание происходит по малой части поверхности. Эти деформации постоянны, когда тела находятся в равновесии, и становятся переменными, когда одно тело скользит по другому. Тогда они вызывают колебания молекул и поэтому развивается тепло или электричество, на возникновение которых затрачивается часть работы движущих сил.

Эти сложные явления становятся доступными для расчета, если предположить, что к нормальной реакции добавляются касательная сила и пары.

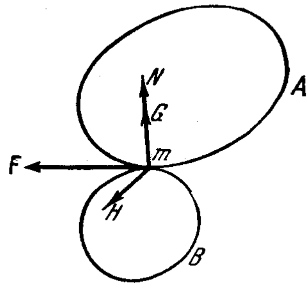


Рис. 122.

Вообразим два движущихся твердых тела A и B (рис. 122), находящихся в соприкосновении. Пусть m — точка тела A, находящаяся в соприкосновении с телом B. Как мы видели в п. 57, относительные скорости различных точек тела A по отношению к телу B, рассматриваемому как неподвижное, будут такими, как если бы тело A обладало: 1) поступательной скоростью, называемой *скоростью скольжения* и совпадающей с относительной скоростью V_r точки m, лежащей в общей касательной плоскости к поверхностям тел в m; 2) мгновенным вращением с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку m; слагающая ω_n этой угловой скорости по общей нормали в m к обеим поверхностям называется *скоростью* *верчения*, а слагающая ω_t, лежащая в касательной плоскости, называется *скоростью качения*. Когда мгновенная угловая скорость ω равна *нулю*, то говорят, что относительное движение тела A по отношению к телу B является *скольжением* в собственном смысле слова; когда относительная скорость точки m равна нулю, то скольжение отсутствует и относительное движение тела A по отношению к телу B является качением и верчением. Следовательно, в общем случае имеют место одновременно скольжение, качение и верчение.

С точки зрения динамической, когда два движущихся твердых тела A и B находятся в соприкосновении и давят друг на друга, то оба тела деформируются и касание не происходит в одной точке (рис. 122). Оба тела соприкасаются по некоторой весьма малой площадке и в каждой точке они воздействуют друг на друга. Согласно теоремам о приведении системы сил, приложенных к твердому телу, совокупность таких действий на какое-нибудь из тел может быть приведена к одной силе, приложенной в произвольно выбранной точке, и к паре. Так как тела соприкасаются по очень малой площадке, то с точки зрения геометрической можно считать, что касание происходит в одной единственной точке m, которую мы будем называть *геометрической* точкой касания. Тогда действие тела B на тело A можно свести к следующим элементам:

1) к силе N, приложенной к телу A в геометрической точке касания m и направленной по нормали к соприкасающимся поверхностям; эта сила является *нормальной реакцией*, препятствующей взаимному проникновению тел;

2) к силе F, приложенной в той же точке m и лежащей в общей касательной плоскости к соприкасающимся поверхностям, проведенной в точке m; эта сила является *трением скольжения*, препятствующим скольжению;

3) к паре G, вектор момента которой нормален к соприкасающимся поверхностям; эта пара является парой *трения верчения*, противодействующей верчению;

4) к паре H, вектор момента которой лежит в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей и направлен по касательной составляющей ω_t мгновенной угловой скорости вращения; эта пара является парой *трения качения*, препятствующей качению.

Действие тела A на тело B выражается силами и парами, противоположными предыдущим. В общем случае влияние пар G и H очень мало по сравнению с влиянием сил N и F. Мы начнем с изучения вопросов, в которых этими парами можно пренебречь, и вернемся в последующих пунктах к специальному изучению трения скольжения и верчения.

Мы предполагали, что оба тела A и B касаются по очень малой площадке, которую можно рассматривать как точку. В некоторых вопросах оба тела могут иметь бесчисленное множество геометрических точек касания; так, например, будет для куба, лежащего на плоскости. Тогда предыдущие соображения должны быть применены к каждой геометрической точке касания.

189. Трение скольжения. Первые опыты по изучению трения скольжения были проделаны Кулоном и были повторены генералом Мореном. Но этот вопрос требует нового исследования. Необходимо различать два случая трения скольжения: 1) трение в состоянии покоя и, в частности, трение в начале движения; 2) трение в состоянии движения.

190. Законы трения скольжения в состоянии покоя. Возьмем тяжелый брусок, лежащий на горизонтальном столе. Система находится в равновесии, и поэтому сила давления стола на брусок имеет в данном случае равнодействующую N, нормальную к столу, равную и противоположную весу P тела (рис. 123). Приложим теперь к телу в вертикальной плоскости, проходящей через его центр тяжести, и как можно ближе к столу горизонтальную силу Q, интенсивность которой постепенно увеличивается, начиная от нуля. Пока эта сила Q очень мала, тело не будет скользить и будет оставаться в равновесии.

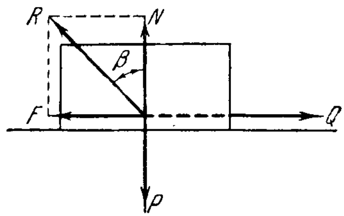


Рис. 123.

Следовательно, необходимо, чтобы реакция R стола на тело была равна и противоположна равнодействующей веса P и силы Q. Эта реакция может быть разложена на две: нормальную N, равную и прямопротивоположную силе P, и касательную F, равную и противоположную силе Q. Эта касательная составляющая и является силой трения. Для угла β между R и нормалью N имеем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{F}{N} = \frac{Q}{P}.$$

Если постепенно увеличивать Q, то наступит момент, когда эта сила достигнет значения Φ, при котором тело приходит в движение. Соответствующее значение Φ силы F называется *трением в начале движения*; соответствующее значение φ угла β, для которого

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Phi}{P},$$

называется *углом трения.*

Можно говорить также, что скольжение начинается лишь с того момента, когда равнодействующая сил P и Q, приложенных к телу, образует с нормалью угол, превосходящий φ.

Кулон измерял значения Φ и φ на опыте, позволявшем осуществить предыдущие условия (на повозке, которую тянули возрастающими силами). Он пришел к следующим трем законам.

1°. Трение в начале движения не зависит от площадей поверхностей, находящихся в соприкосновении.

2°. Оно зависит от природы этих поверхностей.

3°. Оно пропорционально нормальной составляющей реакции, или, что приводится к тому же, нормальной составляющей давления.

Постоянное отношение f силы трения Φ в начале движения к нормальной реакции N, или к нормальному давлению P, называется *коэффициентом трения*:

$$f = \frac{\Phi}{N} = \frac{\Phi}{P}.$$

Угол трения φ определяется тогда формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = f.$$

Угол β, при котором существует равновесие, меньше φ.

Например, если тело и стол сделаны из металла, то при отсутствии смазки

$$f = 0{,}19, \quad \varphi = 10^{0}46'.$$

Примечание. Выше мы говорили, что силу Q нужно прилагать возможно ближе к плоскости. Вот из каких соображений делается это ограничение. Если сила Q приложена слишком высоко, то до того, как она достигнет предельного значения Φ, при котором начнется скольжение, равнодействующая Q и P может выйти за основание тела; тогда она не будет уравновешиваться, и тело опрокинется.

191. Равновесие тел с трением. 1°. *Одна точка касания.* Рассмотрим тело S, положенное на другое тело S', с которым оно соприкасается по очень малой части поверхности. Мы будем предполагать последнюю приведенной к одной точке A. Реакция R тела S' на тело S складывается из нормальной реакции N и касательной реакции F (рис. 124), направление которой неизвестно и *максимум* которой равен fN. Угол β между R и N будет, следовательно, меньше угла трения φ. Для того чтобы тело S было в равновесии, необходимо, чтобы существовало равновесие между непосредственно приложенными к телу S силами и реакцией R, или чтобы силы, приложенные к телу, имели одну равнодействующую, равную и прямо противоположную силе R, т. е. а) проходящую через точку A, б) направленную так, чтобы прижимать тело S к телу S' и в) образующую с нормалью AN угол, меньший, чем угол трения.

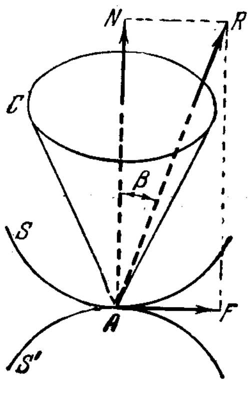


Рис. 124.

Эти необходимые условия достаточны, так как если они выполнены, то можно предположить, что равнодействующая непосредственно приложенных сил перенесена в точку A и разложена на две силы: на нормальную силу P и на касательную силу Q; под действием этих сил скольжения не будет, так как угол равнодействующей с нормалью меньше φ, вследствие чего (рис. 123)

$$\frac{Q}{P}<f, \quad Q<Pf,$$

и касательная составляющая меньше, чем трение в начале движения.

Если рассматривать конус вращения C с осью AN, описанный прямой AD, образующей с AN угол φ, то для равновесия необходимо и достаточно, чтобы силы имели равнодействующую, проходящую через A и лежащую внутри конуса C.

Из предыдущих рассуждений можно заключить также, что любая приложенная к телу сила, проходящая через точку A и образующая с нормалью угол, меньший чем φ, т. е. сила, лежащая внутри конуса C, уравновешивается реакцией тела S', так как эту силу можно разложить так, как мы только что указали.

2°. *Несколько точек касания.* Вообразим тело S, покоящееся в точках $A_1, A_2, \ldots, A_p$ на нескольких телах $S_1, S_2, \ldots, S_p$ с коэффициентами трения, равными соответственно $f_1, f_2, \ldots, f_p$ и с углами трения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. На тело S действуют заданные силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$; требуется определить условия равновесия. Реакция тела S_ν на тело S есть сила R_ν, приложенная в точке A_ν и образующая с нормалью N_ν угол, меньший угла трения φ_ν, т. е. эта сила лежит внутри конуса C_ν с вершиной A_ν, осью N_ν и углом φ_ν. Для того чтобы было равновесие, необходимо и достаточно, чтобы заданные силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ уравновешивались системой сил реакций $R_1, R_2, \ldots, R_p$, удовлетворяющих предыдущим условиям, т. е. чтобы система заданных сил была эквивалентна системе сил $-R_1, -R_2, \ldots, -R_p$, проходящих соответственно через точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$ и лежащих внутри конусов $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Эти последние силы все уравновешиваются реакциями поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

3°. *Бесконечное число точек касания.* Если тело S соприкасается с некоторыми телами по площадкам конечной протяженности, то необходимо и достаточно, чтобы система сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ была эквивалентна системе какого угодно числа сил, пересекающих площадки соприкосновения и образующих с нормалями в точках пересечения углы, меньшие соответствующих углов трения.

Примечание. Эти условия аналитически выражаются при помощи неравенств; поэтому в общем случае существует бесчисленное множество положений равновесия, образующих непрерывные множества.

192. Тяжелое тело, опирающееся на плоскость в нескольких точках и находящееся под действием только одной силы F. Для того чтобы тело было в равновесии, необходимо и достаточно:

1) чтобы сила F была направлена так, чтобы она прижимала тело к плоскости;

2) чтобы она составляла с нормалью угол, меньший угла трения φ;

3) чтобы она пересекала плоскость внутри опорного многоугольника, определяемого, как в п. 112.

Эти условия необходимы. В самом деле, пусть, как и в п. 112, A_1, $A_2, \ldots, A_p$ — точки касания тела с плоскостью и $R_1, R_2, \ldots, R_p$ — реакции плоскости в этих различных точках. Если представить себе ось Oz, направленную нормально к плоскости в сторону, где находится тело, то все эти реакции будут направлены в ту же сторону от плоскости и будут составлять с осью Oz углы меньше φ. Так как совокупность сил $R_1, R_2, \ldots, R_p, F$ находится в равновесии, то реакции $R_1, R_2, \ldots, R_p$ имеют равнодействующую, которая, очевидно, равна и прямо противоположна силе F. Но главный вектор реакций направлен, очевидно, в ту же сторону от плоскости, что и ось Oz, и образует с ней угол, меньший φ; следовательно, сила F направлена в противоположную сторону и тоже образует с осью Oz угол, меньший φ. Чтобы показать необходимость третьего условия, возьмем какую-нибудь сторону A_iA_k опорного многоугольника; сумма моментов сил $R_1, R_2, \ldots, R_p$ и F относительно этой стороны должна равняться нулю; моменты всех сил $R_1, R_2, \ldots, R_p$ относительно этой стороны имеют одинаковые знаки; сила F должна иметь момент противоположного знака и должна поэтому пересекать плоскость в точке A, лежащей по отношению к A_iA_k по ту же сторону, что и остальные точки опоры. Так как это имеет место для каждой из сторон опорного многоугольника, то точка A находится внутри этого многоугольника.

Эти необходимые условия и достаточны. В самом деле, если они выполнены, то можно всегда разложить силу F на одинаково с ней направленные параллельные силы, приложенные в точках опоры $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Все эти составляющие уравновешиваются сопротивлением плоскости.

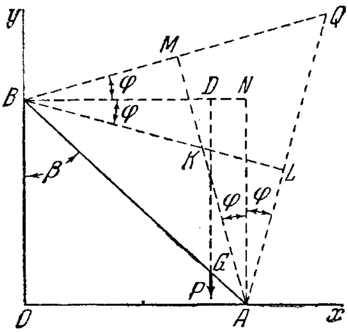


Рис. 125.

193. Лестница. Лестница AB опирается на горизонтальный пол и вертикальную стену; допустим, что средняя линия лестницы лежит в плоскости, перпендикулярной полу и стене (рис. 125); эту плоскость мы примем за плоскость чертежа.

Обозначим через G центр тяжести лестницы и стоящего на ней в произвольном положении человека и найдем условия равновесия, предполагая, что коэффициенты трения в точках A и B равны одной и той же величине f и, следовательно, углы трения имеют одно и то же значение φ.

Если лестница образует со стеной угол β, меньший угла трения φ, то будет иметь место равновесие при любом положении точки G. В самом деле, всегда можно перенести вес P, приложенный в точке G, вдоль его направления и разложить на две силы, из которых одна направлена по DB нормально к стене, а другая по линии DA, образующей с нормалью AN к полу угол DAN, меньший β и, следовательно, меньший угла трения; обе эти составляющие уравновешиваются.

Допустим теперь, что угол лестницы со стеной превышает угол трения φ. Так как вес и реакции стены и пола должны уравновешиваться, то эти три силы пересекаются в одной точке и лежат в плоскости чертежа. Проведем в точках A и B нормали AN и BN к стене и к полу и затем две прямые AKM и ALQ, образующие с AN угол φ, и две прямые BQ и BL, образующие с BN тоже угол φ. Эти четыре прямые, являющиеся прямыми пересечения плоскости чертежа с рассмотренными в общем случае конусами, образуют четырехугольник $MQLK$. Так как реакции стены и пола образуют с нормалями углы, меньшие φ, то их точка пересечения находится внутри четырехугольника $MQLK$. Так как линия действия силы P, т. е. вертикаль, проведенная через точку G, должна проходить через упомянутую точку пересечения реакций стены и пола, то для того, чтобы было равновесие, необходимо, чтобы эта *вертикаль пересекала площадь четырехугольника.* Это условие будет тогда и достаточным, так как если вертикаль G пересекает этот четырехугольник, то, взяв точку D на этой вертикали внутри четырехугольника, мы можем перенести в нее вес P и здесь разложить его на две силы, направленные по DA и DB, которые уравновесятся реакциями стены и пола.

Примем OA и OB за оси Ox и Oy и обозначим через a и b расстояния OA и OB. Ближайшая к стене точка M, будучи пересечением двух прямых

$$BM \quad (y-b=xf) \quad \text{и} \quad AM \quad \left(y=-\frac{x-a}{f}\right),$$

имеет абсциссу

$$x=\frac{a-bf}{1+f^2},$$

являющуюся положительной величиной, так как, по предположению, a/b больше чем f, ибо угол β больше φ. Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы абсцисса ξ центра тяжести G была больше x. Пусть m — масса лестницы и m_1 — масса человека, стоящего на лестнице на расстоянии x_1 от стены. Тогда, чтобы выразить, что ξ больше x, напишем:

$$\frac{m\frac{a}{2}+m_1x_1}{m+m_1}>\frac{a-bf}{1+f^2},$$

откуда можно определить нижнюю границу для x_1. Чтобы при любом положении человека равновесие было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{m\frac{a}{2}}{m+m_1}>\frac{a-bf}{1+f^2}.$$

Эта формула определяет верхнюю границу угла β, тангенс которого равен a/b.

194. Веревка, навернутая на поперечное сечение цилиндра. Пусть веревка положена на поперечное сечение выпуклого цилиндра, по которому она может скользить с трением. Коэффициент трения равен f. Касание происходит по дуге AB (рис. 126); веревка натягивается на концах M_0 и M_1 натяжениями T_0 и T_1, причем $T_1 \geqslant T_0$. Найдем условия равновесия, предполагая, что веревка находится в состоянии, когда она готова начать скользить в сторону AB. Этим самым мы найдем верхний предел, больше которого не должно быть натяжение T_1, чтобы осуществлялось равновесие. Пусть s — дуга AM, ds — элемент, находящийся в точке M, $N\,ds$ — абсолютное значение нормальной реакции цилиндра, которая направлена наружу, $fN\,ds$ — абсолютное значение касательной реакции, которая направлена в сторону MA. На основании естественных уравнений равновесия нити имеем

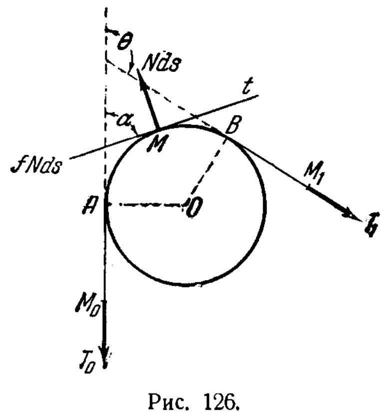


Рис. 126.

$$\frac{dT}{ds}-fN=0, \quad \frac{T}{\rho}-N=0,$$

так как значение реакции, отсчитываемой по главной нормали, равно — $N\,ds$, а отсчитываемой по касательной Mt в сторону возрастания дуг равно — $fN\,ds$. Исключая N, получим

$$\frac{dT}{T}=\frac{f\,ds}{\rho}=f\,d\alpha,$$

так как $\rho=\frac{ds}{d\alpha}$, где α — угол между касательной Mt и фиксированной касательной T_0M_0. Следовательно, интегрируя от точки M_0 до точки M_1 и обозначая через θ угол между конечными касательными, или равный ему угол AOB между конечными нормалями, получим

$$\ln T_1-\ln T_0=f\theta,\quad T_1=T_0e^{f\theta}.$$

Таково верхнее значение, больше которого не должна быть величина T_1, чтобы осуществлялось равновесие. Если веревка обвивается несколько раз вокруг цилиндра, то угол θ может быть больше чем 2π. Эта формула показывает, что малым натяжением T_0 можно уравновесить значительное натяжение T_1, полагая θ достаточно большим. (Пуассон, Traité de Mécanique, § 303.)

Интересные упражнения можно найти в сочинении английского ученого Джеллета.

195. Трение скольжения при движении. В случае движения трение будет вполне определенным. Допустим, что движущееся твердое тело, ограниченное поверхностью S, соприкасается с телом S' в точке A. Если имеется трение, то реакция тела S' на тело S распадается на две силы: нормальную N, которая называется *нормальной реакцией*, и касательную F, которая является силой трения и подчиняется трем следующим законам:

1°. Сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости материальной точки A по отношению к S.

2°. Она не зависит от величины этой скорости.

3°. Она пропорциональна нормальной реакции: $F=fN$; коэффициент f является коэффициентом трения в начале движения.

Согласно опытам Гирна эти законы применимы главным образом в случае *непосредственного* трения (т. е. когда трущиеся поверхности сухие). Они должны быть изменены, если поверхности разделены смазывающим веществом; в этом случае отношение F/N зависит от *скорости* и от N. (См. Comptes Rendus, т. XCIX, стр. 953.)

196. Трение качения в начале и во время движения. Выше (п. 188) мы определили в общем виде пары, представляющие сопротивление качению и верчению. Возьмем простой случай цилиндра. Если цилиндр может катиться и скользить по плоскости, то при вычислениях можно следующим образом учесть деформацию тела и колебания молекул. Пренебрежем протяженностью деформации и допустим, что цилиндр касается плоскости по образующей A. Допустим, кроме того, что на цилиндр действуют силы, лежащие в плоскости поперечного сечения, которую мы примем за плоскость чертежа. Приведем эти силы к точке A. Тогда мы получим одну силу AR, приложенную в точке цилиндра, совпадающей с точкой A, и одну пару G, вектор момента которой перпендикулярен плоскости чертежа. Разложим AR (рис. 127) на две силы: одну AP, нормальную к плоскости, и другую AQ, параллельную плоскости. Сила Q вызывает скольжение цилиндра; пара G вращает его вокруг образующей, по которой происходит касание, т. е. вызывает качение цилиндра по плоскости, так как при качении эта образующая является мгновенной осью вращения.

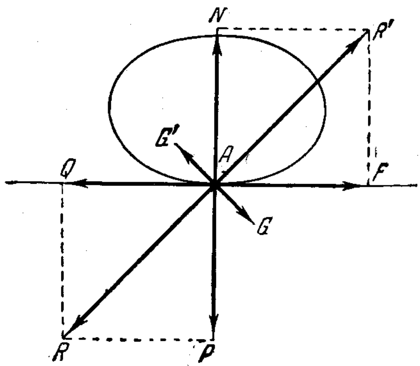


Рис. 127.

Допустим сначала, что пара G равна нулю. Тогда может возникнуть только скольжение; для того чтобы его не было, необходимо и достаточно, чтобы

$$Q < Pf, \tag{1}$$

где f—коэффициент трения скольжения. Допустим, что это условие выполнено, и восстановим пару AG, вектор момента которой нормален к плоскости фигуры. Если нет никакого сопротивления качению, то эта пара, как бы мала она ни была, заставит тело катиться. Опыт, однако, показывает, что это не будет так и что качения не будет, пока момент G пары меньше некоторого предела:

$$G < P\delta, \tag{2}$$

где P, как и выше, обозначает нормальную составляющую силы R, а δ — *линейный коэффициент*, называемый *коэффициентом трения при качении*. Согласно Кулону и Морену этот коэффициент δ не зависит от силы R и радиуса кривизны поперечного сечения катящегося цилиндра, по крайней мере в некоторых пределах.

Если этот коэффициент δ известен, то условиями равновесия цилиндра на плоскости будут уравнения (1) и (2), из которых одно выражает, что нет скольжения, а другое, что нет качения. В этом случае плоскость разовьет реакцию, состоящую из одной силы R', равной и противоположной силе R, и пары G', равной и противоположной паре G. Пара G' возникает вследствие того, что касание имеет в действительности конечную протяженность возле точки A и при приведении сил реакций плоскости к точке A получится сила и пара. Эта пара G' есть пара трения качения.

Полученный результат можно представить еще следующим образом: для того чтобы выразить, что имеется равновесие, нужно выразить, что непосредственно приложенные к цилиндру силы (которые предполагаются лежащими в плоскости поперечного сечения) уравновешиваются нормальной силой N (равной и противоположной силе P) и касательной силой F (равной и противоположной силе Q), приложенными в точке A, и парой с вектором момента G', параллельным образующим. Эти силы и пара удовлетворяют неравенствам

$$F < Nf, \quad G' < N\delta.$$

Может случиться, что одно из условий (1) и (2) выполняется, а другое нет. Тогда в первое мгновение цилиндр катится без скольжения или скользит без качения. Если не выполняется ни одно из этих условий, то одновременно будет и скольжение и качение в том смысле, что элементарное перемещение цилиндра будет складываться из скольжения и вращения вокруг образующей, по которой происходит касание.

Если цилиндр уже находится в движении, то допускают, что при качении реакция плоскости, противодействующая качению, все время имеет максимальное значение, так что во время качения пара, представляющая трение качения, все время равна $N\delta$, где N — нормальная составляющая реакции плоскости. Точно так же, если происходит скольжение, то касательная составляющая F реакции равна все время Nf (п. 195). Если одновременно происходят и качение и скольжение, то необходимо ввести совместно оба трения. В этом случае, обычно, пренебрегают трением качения.

197. Трение верчения. Можно допустить в наиболее простых случаях, что при равновесии момент пары трения верчения меньше чем εN, где ε — линейный коэффициент, аналогичный δ. При движении этот момент равен εN. Для более подробного изучения трения верчения мы отсылаем к докторской диссертации Леоте (Париж, 1876).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Тяжелое твердое тело положено на наклонную плоскость, наклон которой можно изменять. Показать, что скольжение будет происходить в том случае, если наклон плоскости равен углу трения или больше его.

2. Найти условие равновесия клинового пресса, принимая во внимание трение между обеими щеками клина и брусьями (п. 169, рис. 111). Обозначая через f коэффициент трения между обеими щеками и брусьями, получим в предельном случае, когда клин начинает скользить,

$$P = 2R\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}.$$

3. Найти положение равновесия тяжелого однородного стержня AB, концы которого скользят с трением по двум плоскостям, из которых одна горизонтальна, а другая вертикальна. (Необходимо, чтобы вертикаль центра тяжести проходила через общую часть обоих конусов вращения с вершинами в точках A и B, оси которых нормальны к обеим плоскостям, а половины углов при вершинах равны углам трения.)

4. В предыдущей задаче предполагается, что точка B, в которой стержень опирается на вертикальную плоскость, перемещается по вертикали в этой плоскости. Определить: 1) крайние точки, между которыми должна перемещаться точка B по этой вертикали и 2) кривую, внутри которой должна находиться точка A, чтобы было равновесие.

5. Однородный тяжелый цилиндр вращения положен на наклонную плоскость таким образом, что его образующие горизонтальны. Известен коэффициент δ трения качения. Какое наименьшее значение нужно придать наклону плоскости, чтобы началось качение? (В этом упражнении допускается, что качение начинается при меньшем наклоне плоскости, чем при скольжении.)

6. Однородная тяжелая цепь положена на поперечное сечение круглого цилиндра, ось которого горизонтальна, таким образом, что концы свешиваются с обеих сторон цилиндра. Каковы возможные положения равновесия если предположить, что имеется трение?

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ДИНАМИКА ТОЧКИ

ГЛАВА X

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДОВ

I. Общие теоремы

198. Уравнения движения. Интегралы. В главе III мы видели, что если точка M находится в движении под действием некоторых сил, имеющих равнодействующую F, то ускорение j этой точки и сила F имеют одинаковые направления и их величины связаны соотношением

$$F = mj,$$

где m — масса точки. Говоря на языке алгебры, мы получили дифференциальные уравнения движения.

Пусть x, y, z — координаты движущейся точки относительно трех произвольных осей, X, Y, Z — составляющие силы F по этим осям. Проекции силы F равны проекциям ускорения j, умноженным на массу m, и мы получаем таким образом три уравнения движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{1}$$

Если предположить, что точка M совершенно свободна, то действующие на нее силы зависят, в общем случае, от положения, скорости и времени. Следовательно, проекции X, Y, Z равнодействующей являются заданными функциями от x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, t, т. е. от x, y, z, x', y', z', t, если употреблять обозначения Лагранжа для производных: $\frac{dx}{dt} = x'$, ... Тогда уравнения (1) образуют систему трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих x, y, z в функции t. Эту систему можно заменить системой шести совместных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z', \\ &\frac{dx'}{dt} = \frac{X}{m}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{Y}{m}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{Z}{m}, \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

определяющих переменные x, y, z, x', y', z' в функции t. Общие интегралы этих уравнений содержат шесть произвольных постоянных; они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= \psi(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= \omega(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

откуда получаем:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varphi'(t, C_1, \ldots, C_6), \\ y' &= \psi'(t, C_1, \ldots, C_6), \\ z' &= \omega'(t, C_1, \ldots, C_6), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где φ', ψ', ω' обозначают производные от φ, ψ, ω по времени t.

В каждой частной задаче произвольные постоянные должны быть определены при помощи начальных условий. Задаются положение и скорость движущейся точки в момент $t = t_0$, нужно определить $C_1, C_2, \ldots, C_6$ так, чтобы при $t = t_0$ величины x, y, z приняли наперед заданные значения x_0, y_0, z_0, а величины x', y', z' — наперед заданные значения x_0', y_0', z_0'. Чтобы такое определение было возможным, каковы бы ни были заданные начальные значения для x, y, z, x', y', z', необходимо, чтобы можно было разрешить, по крайней мере теоретически, шесть уравнений (2) и (3) относительно $C_1, C_2, \ldots, C_6$, т. е. чтобы эти уравнения (2) и (3), в которых $C_1, C_2, \ldots, C_6$ рассматриваются как неизвестные, не были ни несовместными, ни неопределенными. Тогда для этих шести постоянных получатся значения вида

$$C_k = f_k(t, x, y, z, x', y', z') \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6), \tag{4}$$

которые непосредственно определят численные значения постоянных, когда заданы начальные значения переменных x, y, z, x', y', z'.

Допускается, что *заданным начальным условиям отвечает только одно движение*. Это обстоятельство, в котором мы будем убеждаться во всех примерах, изучаемых дальше, вытекает из теоремы Коши при условии, что X, Y, Z являются регулярными функциями от x, y, z, x', y', z', t. Но это предполагается во всех случаях, встречающихся в явлениях природы. Вследствие этого, если каким-нибудь образом удастся найти какое-нибудь возможное движение, т. е. удовлетворяющее уравнениям движения и начальным условиям, то это движение будет тем, которое действительно совершает точка.

199. Первые интегралы. *Первым интегралом уравнений движения* называется соотношение вида

$$\Phi(t, x, y, z, x', y', z', C) = 0,$$

связывающее t, x, y, z, x', y', z' и *одну произвольную постоян-*

ную C и имеющее место вследствие уравнений движения, каковы бы ни были начальные условия. Можно всегда представить это соотношение, разрешенным относительно C и написать его в виде

$$C = f(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'). \tag{5}$$

Нетрудно непосредственно проверить, что соотношение такого вида является первым интегралом. Дифференцируя по t, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

или, заменяя вторые производные от x, y, z их значениями, взятыми из уравнений движения, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{1}{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x'} X + \frac{df}{\partial y'} Y + \frac{\partial f}{\partial z'} Z\right) = 0.$$

Это последнее уравнение содержит только величины t, x, y, z, x', y', z' и так как оно должно иметь место, каковы бы ни были начальные условия, т. е. каковы бы ни были значения, приписываемые этим величинам, то оно должно удовлетворяться тождественно.

Практическая полезность какого-либо первого интеграла с точки зрения интегрирования уравнений (1) заключается в том, что он позволяет понизить на одну единицу число неизвестных. В самом деле, соотношение (5) позволяет выразить одну из неизвестных x, y, z, x', y', z' как функцию остальных неизвестных и t.

Несколько первых интегралов

$$\left.\begin{aligned} C' &= f_1(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'),\\ C'' &= f_2(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ C^{(\nu)} &= f_\nu(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z') \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

являются *независимыми*, когда из них нельзя исключить все величины x, y, z, x', y', z'. Если такое исключение возможно, то оно приведет к соотношению между постоянными C', C'', ..., $C^{(\nu)}$, которое, очевидно, не может содержать независимую переменную t, являющуюся произвольной. Отсюда следует, что число независимых первых интегралов, которые можно найти, равно шести, так как если ν больше 6, то всегда можно исключить шесть величин x, y, z, x', y', z'.

Если известны ν первых интегралов (6), то в уравнениях (1') можно уменьшить на ν единиц число неизвестных. Действительно, из уравнений (6) можно выразить ν этих неизвестных в функции $6-\nu$ остальных неизвестных и времени t.

Например, шесть уравнений (4), полученных после разрешения общих интегралов уравнений движения относительно произвольных постоянных, образуют шесть независимых первых интегралов.

Наоборот, если известны шесть независимых первых интегралов вида (6), где целое число ν равно шести, то из этих уравнений после разрешения относительно x, y, z, x', y', z' получится общий интеграл уравнений движения.

Аналогичные рассуждения применимы, как мы увидим дальше, и к движению точки по кривой или по поверхности.

По вопросам анализа, с которыми мы здесь столкнулись, мы отсылаем к нашему Cours d'Analyse à l'École Centrale, гл. XXII.

200. Естественные уравнения (Эйлер). Возьмем на траектории начало O дуг. Движение по этой кривой определено, если дуга $OM = s$ является известной функцией времени. Проведем касательную MT в сторону положительных дуг (рис. 128). Условимся считать скорость положительной, если движение происходит в сторону MT, и отрицательной, если оно происходит в обратную сторону. Тогда скорость по величине и знаку будет

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

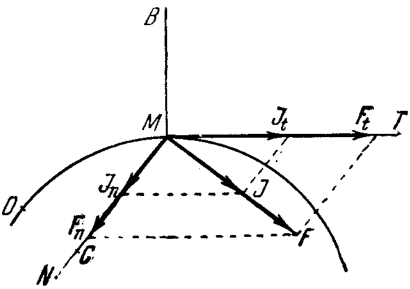


Рис. 128.

Пусть J — ускорение движущейся точки. Как известно, его проекции на касательную и главную нормаль выражаются соответственно формулами (п. 41):

$$J_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad J_n = \frac{v^2}{\rho},$$

а проекция на бинормаль равна нулю. Так как вектор силы равен вектору ускорения, умноженному на массу, то обозначая через F_t, F_n, F_b проекции силы F на касательную, главную нормаль и бинормаль, получим:

$$F_t = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}, \qquad F_n = \frac{mv^2}{\rho}, \qquad F_b = 0.$$

Эти три уравнения образуют систему, эквивалентную трем уравнениям движения. Так как F_n всегда положительно, а F_b всегда равно нулю, то сила всегда лежит в соприкасающейся плоскости траектории и направлена в сторону вогнутости последней.

Если сила все время нормальна к траектории, то $F_t = 0$, скорость постоянна и сила обратно пропорциональна радиусу кривизны.

Если сила все время касательна к траектории, то $F_n = m\frac{v^2}{\rho} = 0$ и так как v не равно нулю, то ρ равно бесконечности, т. е. траектория есть прямая линия.

Можно установить отмеченные уже Маклореном интересные аналогии между этими уравнениями и уравнениями равновесия нити. Мёбиус указал большое число таких аналогий в своей Статике, так же как и Оссиан Бонне в томе IX Journal de Mathématiques и П. Серре в своей Théorie nouvelle des lignes à double courbure (Mallet-Bachelier, 1860). (См. упражнения.)

Мы переходим теперь к выводу теорем, позволяющих во многих случаях найти первые интегралы.

201. Количество движения. *Количеством движения* точки M называют вектор MQ, который направлен по линии скорости в ту же сторону, что скорость, и длина которого равна произведению скорости на массу: mV. Так как проекции скорости на оси равны $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, то проекции количества движения будут

$$m\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{dz}{dt}. \qquad (MQ)$$

Моменты количества движения относительно осей координат равны

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right), \quad m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right), \quad m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right), \qquad (OG')$$

так что момент количества движения относительно точки O есть вектор OG', проекции которого равны только что написанным величинам.

202. Теорема о проекции количества движения. Первое уравнение движения может быть написано так:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=X.$$

Так как ось x произвольна, то это уравнение выражает следующее:

Производная по времени от проекции количества движения на какую-нибудь ось равна проекции на ту же ось равнодействующей всех сил, приложенных к движущейся точке.

В частности, если сумма проекций сил на ось все время равна нулю, то по этой теореме получается первый интеграл. В самом деле, приняв эту ось за ось Ox, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=0, \quad m\frac{dx}{dt}=A,$$

где значение постоянной A равно проекции на ось Ox начального количества движения. Интегрируя вторично, получим

$$mx=At+A',$$

т. е. движение проекции точки на ось Ox является равномерным.

П р и м е р. *Параллельные силы.* Если сила F параллельна определенному направлению, то траектория будет лежать в *плоскости*, параллельной этому направлению. В самом деле, приняв за ось Oz

прямую, параллельную равнодействующей силе F, имеем $X = 0$, $Y = 0$. Следовательно,

$$m\frac{dx}{dt} = A, \quad m\frac{dy}{dt} = B,$$

$$A\,dy - B\,dx = 0, \quad Ay - Bx = C,$$

что является уравнением плоскости, параллельной оси Oz. Эта плоскость, в которой происходит движение, определяется начальными условиями; она является плоскостью, проведенной через начальную скорость параллельно постоянному направлению силы.

203. Теорема о моменте количества движения. Закон площадей. Из уравнений движения можно вывести теорему, аналогичную предыдущей, для момента количества движения. Два уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

путем преобразований приводятся к одному

$$xm\frac{d^2y}{dt^2} - ym\frac{d^2x}{dt^2} = xY - yX,$$

которое можно написать так:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right] = xY - yX,$$

т. е. *производная по времени от момента количества движения относительно какой-нибудь оси (оси Oz) равна моменту равнодействующей всех сил, приложенных к точке, относительно той же оси.*

Из этой теоремы получается первый интеграл уравнений движения в случае, когда $xY - yX = 0$, т. е. когда равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, находится все время в одной плоскости с осью Oz. Этот интеграл будет

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

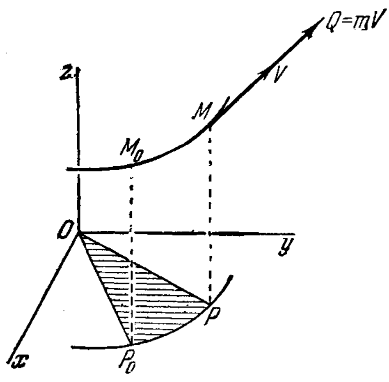


Рис. 129.

Он имеет очень простую геометрическую интерпретацию, а именно: пусть (рис. 129) P — проекция движущейся точки M на плоскость xy и P_0 — начальное положение этой проекции. Рассмотрим сектор, ограниченный проекцией траектории и двумя радиусами OP_0 и OP. Обозначая через S площадь этого сектора, отсчитываемую в направлении положительного вращения вокруг оси Oz, имеем

$$dS = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Следовательно, предыдущее уравнение принимает вид

$$2\frac{dS}{dt}=C,$$

откуда, интегрируя, находим

$$S=\frac{1}{2}C(t-t_0).$$

Другими словами, *площадь S пропорциональна времени, в течение которого она была описана.* В этом случае говорят, что для проекции движения на плоскость xy справедлива *теорема площадей.*

Постоянная площадей C, входящая в предыдущую формулу, равна отношению удвоенной площади, описанной радиусом-вектором OP, к затраченному на это времени. Она определяется начальными условиями, а именно: она равна значению, принимаемому в начале движения величиной $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$, т. е. моменту начальной скорости относительно оси Oz.

Наоборот, если теорема площадей применима к проекции движения на плоскость xOy относительно точки O, то сила находится в одной плоскости с осью Oz, так как уравнение $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C$ после дифференцирования принимает вид

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

откуда

$$xY-yX=0.$$

Пример. *Центральные силы.* Допустим, что равнодействующая F сил, приложенных к точке, является центральной, т. е. ее направление все время проходит через неподвижную точку O. Если эту точку принять за начало, то момент F относительно каждой из трех координатных осей будет равен нулю и теорема площадей будет применима к проекциям движения на каждую из трех координатных плоскостей. В этом случае траектория будет лежать в плоскости, проходящей через центр сил. В самом деле, имеем три уравнения:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C,$$

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=A,$$

$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=B.$$

Умножая их на x, y, z и складывая, найдем

$$Ax+By+Cz=0,$$

т. е. уравнение плоскости, проходящей через точку O. Эта плоскость определяется начальной скоростью и точкой O.

204. Геометрическая интерпретация двух предыдущих теорем. Проведем через точку O вектор OR, равный и параллельный равнодействующей всех сил, приложенных к точке, и вектор OR', равный и параллельный количеству движения точки (рис. 130). Точка R' имеет координаты:

$$\alpha = m\frac{dx}{dt}, \quad \beta = m\frac{dy}{dt}, \quad \gamma = m\frac{dz}{dt}.$$

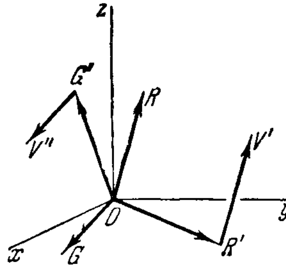


Рис. 130.

Уравнения движения, выражающие теорему проекций количества движения на каждую из координатных осей, имеют вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = X, \quad \frac{d\beta}{dt} = Y, \quad \frac{d\gamma}{dt} = Z$$

и обозначают, что *скорость V' геометрической точки R' в каждый момент времени равна и параллельна силе R.*

Точно так же, пусть OG — момент равнодействующей сил, приложенных к точке M, относительно точки O и пусть OG' — момент количества движения относительно той же точки. Координаты λ, μ, ν точки G' выражаются равенствами

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \\ \mu &= m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \\ \nu &= m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (G')$$

а проекции вектора OG суть

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX. \qquad (G)$$

И мы приходим к уравнению $\frac{d\nu}{dt} = N$; точно так же получаются уравнения

$$\frac{d\lambda}{dt} = L, \quad \frac{d\mu}{dt} = M,$$

выражающие, что *точка G' обладает в каждый момент времени скоростью V'', равной и параллельной вектору OG.* В этом заключается аналогия между обеими предыдущими теоремами.

Например, если равнодействующая сил, действующих на движущуюся точку, проходит через неподвижную точку O, то величины λ, μ, ν будут постоянными и отрезок OG во время движения будет оставаться неподвижным. Мы видели, что в этом случае траектория будет плоской; она будет находиться в плоскости, перпендикулярной к OG.

205. Теорема кинетической энергии. Возьмем уравнения движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

и сложим их почленно, умножив предварительно первое уравнение на dx, второе на dy и третье на dz. Получим

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

Замечая, что квадрат скорости равен

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

можно это уравнение написать следующим образом:

$$d\,\frac{mv^2}{2}=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz. \tag{1}$$

Произведение $\frac{1}{2}mv^2$ *половины массы на квадрат скорости называется кинетической энергией* *). Предыдущее уравнение может быть поэтому выражено следующим образом:

Дифференциал кинетической энергии за промежуток времени dt равен элементарной работе равнодействующей сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени. Действительно, правая часть

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$$

уравнения является элементарной работой силы X, Y, Z на действительном перемещении dx, dy, dz, которое совершает точка за промежуток времени dt. Работу равнодействующей X, Y, Z можно, как мы видели (п. 77), заменить суммой работ отдельных сил, приложенных к движущейся точке.

Уравнение (1) вытекает также сразу из первого из естественных уравнений движения

$$m\,\frac{dv}{dt}=F_t.$$

Умножая на ds и заменяя $\frac{ds}{dt}$ через v, получим уравнение

$$d\,\frac{mv^2}{2}=F_t\,ds,$$

в котором правая часть равна элементарной работе силы F на перемещении ds.

Если уравнение (1) проинтегрировать от момента t_0 до момента t, то, обозначая через v_0 скорость в момент t_0, получим

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{t_0}^{t}X\,dx+Y\,dy+Z\,dz, \tag{2}$$

что выражает следующую теорему:

*) В оригинале вместо названия «кинетическая энергия» автор пользуется устаревшим и вышедшим теперь из употребления названием «живая сила», причем живой силой автор называет величину mv^2. (*Прим. перев.*)

Изменение кинетической энергии точки за произвольный промежуток времени равно полной работе сил, приложенных к точке, за тот же промежуток времени.

С точки зрения оценки полной работы следует, как мы показали в главе IV, различать три случая:

1°. В наиболее общем случае, когда X, Y, Z зависят от x, y, z, x', y', z', t, для вычисления полной работы надо знать выражения координат x, y, z в функции t, т. е. надо знать движение.

2°. В случае, когда X, Y, Z зависят только от x, y, z, для вычисления полной работы достаточно знать траекторию движущейся точки между положением M_0, которое она занимает в момент t_0, и положением M, занимаемым в момент t.

3°. Наконец, если равнодействующая X, Y, Z зависит только от положения движущейся точки и *имеет силовую функцию* $U(x, y, z)$, т. е

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU(x, y, z),$$

то можно вычислить полную работу, зная только положения M_0 и M. В этом случае *теорема кинетической энергии приводит к первому интегралу*. Действительно, выполняя интегрирование в правой части уравнения (2), получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0),$$

или

$$\frac{mv^2}{2} = U(x, y, z) + h,$$

где h обозначает произвольную постоянную $\frac{mv_0^2}{2} - U(x_0, y_0, z_0)$; эта постоянная называется *постоянной кинетической энергии*. Согласно этому уравнению скорость движущейся точки становится тою же самою, что и раньше, каждый раз, когда функция U принимает прежнее значение. Если U является однозначной функцией от x, y, z, то можно говорить, что скорость движущейся точки принимает одинаковые значения, когда она возвращается на одну и ту же поверхность уровня $U(x, y, z) = \text{const}$. Когда функция U многозначна, как, например, $U(x, y, z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, то скорость не обязательно принимает одинаковые значения, когда точка возвращается на одну и ту же поверхность уровня, так как на определенной поверхности уровня функция $U(x, y, z)$, а вследствие этого и полная работа принимают различные значения вдоль пути (см. п. 82).

206. Примеры. 1°. Рассмотрим движущуюся в пустоте совершенно свободную тяжелую точку. Если ось Oz направить вертикально вверх, то так как единственной силой, приложенной к точке, является вес, проекции которого суть

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg,$$

то по теореме кинетической энергии получаем уравнение

$$d\frac{mv^2}{2} = -mg\,dz,$$

правая часть которого является полным дифференциалом, что показывает, как это уже отмечалось много раз, что вес имеет силовую функцию. Интегрируя, получим

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -g(z - z_0), \quad v^2 = 2(-gz + h).$$

Это уравнение показывает, что скорость принимает одно и то же численное значение всякий раз, когда точка находится на одной и той же высоте, т. е. возвращается на ту же поверхность уровня.

Вообще, если точка находится под действием вертикальной силы, являющейся функцией от z, то

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = \varphi(z),$$

откуда

$$d\frac{mv^2}{2} = \varphi(z)\,dz, \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz.$$

Поверхностями уровня по-прежнему являются горизонтальные плоскости. Во всех этих движениях траектории являются плоскими кривыми (п. 202, пример).

2°. Рассмотрим точку M, притягиваемую неподвижным центром O по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния. Притягивающая сила имеет вид $m\mu/r^2$, где μ — постоянная, а r — расстояние OM. Алгебраическое значение этой силы, отсчитываемой в направлении OM, равно $-m\mu/r^2$ и, как мы видели в п. 84, элементарная работа этой силы равна $-\frac{m\mu}{r^2}\,dr$. Следовательно, по теореме кинетической энергии имеем

$$d\frac{mv^2}{2} = -\frac{m\mu}{r^2}\,dr, \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right),$$

или

$$v^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + h\right).$$

Поверхностями уровня являются сферы $\mu/r = \text{const}$; скорость принимает одинаковые численные значения на одинаковых расстояниях от притягивающего центра O.

Вообще, если точка M находится под действием центральной силы, являющейся функцией от r, и алгебраическое значение этой силы, отсчитываемое в направлении OM, есть $\varphi(r)$, то

$$d\frac{mv^2}{2} = \varphi(r)\,dr, \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{r_0}^{r} \varphi(r)\,dr.$$

3°. Рассмотрим тяжелую точку M, притягиваемую неподвижным центром A по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния и отталкиваемую неподвижным центром A' пропорционально расстоянию (рис. 131). Направим ось Oz вертикально вверх, так что элементарная работа веса равна $-mg\,dz$. Если мы обозначим через r расстояние AM, то алгебраическое значение притягивающей силы F, отсчитываемой в направлении AM, есть $-m\mu/r^2$, а элементарная работа равна $-\frac{\mu m}{r^2}dr$. Наконец, если мы обозначим через r' расстояние MA', то алгебраическое значение отталкивающей силы F', пропорциональной расстоянию, есть $m\mu' r'$, а ее элементарная работа равна $m\mu' r' dr'$. По теореме кинетической энергии дифференциал $d\frac{1}{2}mv^2$ равен элементарной работе равнодействующей приложенных к точке сил, т. е. сумме работ составляющих сил, и мы имеем

$$d\frac{mv^2}{2} = -mg\,dz - \frac{m\mu}{r^2}dr + m\mu' r'\,dr'.$$

Правая часть этого равенства является полным дифференциалом, так что существует силовая функция; в этом можно было убедиться и заранее, на основании теорем, установленных в главе IV. Следовательно, интегрируя и деля на m, получим

$$v^2 = 2\left(-gz + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu' r'^2}{2} + h\right).$$

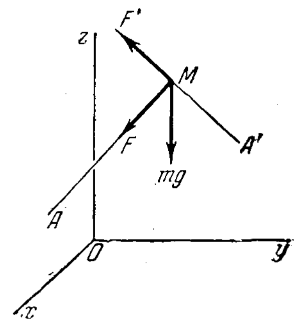


Рис. 131.

Силовая функция здесь по-прежнему однозначна и скорость принимает одинаковые значения каждый раз, когда движущаяся точка проходит через одну и ту же поверхность уровня

$$-gz + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu' r'^2}{2} = \text{const}.$$

Это — поверхности шестого порядка. Они приводятся к сферам, если μ равно нулю, т. е. если отбрасывается притягивающий центр A.

207. Замечание к интегралу кинетической энергии. Интеграл кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} = U(x, y, z) + h$$

показывает, что движущаяся точка не может выйти из области пространства, в которой величина $U(x, y, z) + h$ положительна, так как левая часть равенства существенно положительна. Когда эта область не содержит всего пространства, она, вообще говоря, ограничена поверхностью уровня, имеющей уравнение

$$U(x, y, z) + h = 0.$$

Вид этой поверхности зависит от постоянной кинетической энергии, т. е. от начального положения и от величины начальной скорости, но не от ее направления. В упражнениях будет показано, какими будут эти поверхности в рассмотренных выше примерах.

Это очевидное замечание, важные приложения которого можно найти в трудах Хилла (Acta mathematica, т. VIII), Болена, (там же, т. X), Дарвина (там же, т. XXI, и Mathem. Annalen, т. LI), приводит непосредственно к теореме Лежен-Дирихле об устойчивости равновесия.

208. Устойчивость равновесия свободной материальной точки. Доказательство Лежен-Дирихле. Рассмотрим свободную точку $M(x, y, z)$, находящуюся под действием сил, равнодействующая которых (X, Y, Z) имеет силовую функцию $U(x, y, z)$:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Положения равновесия точки найдутся, если приравнять нулю X, Y, Z, т. е. если искать максимумы и минимумы функции U. *Если в заданном положении O точки функция U имеет максимум, то соответствующее равновесие устойчиво.* Примем это положение O за начало и предположим, что функция U обращается в нуль в точке O, что всегда возможно, так как эта функция определяется с точностью до аддитивной постоянной, которою всегда можно распорядиться так, чтобы функция U обращалась в нуль в заданной точке. Чтобы точнее уяснить понятие максимума, опишем вокруг точки O выпуклую поверхность S, например, сферу или куб с центром O, размеры которых достаточно малы для того, чтобы внутри поверхности S и на ней самой функция U была отрицательна и, за исключением начала O, отлична от нуля.

Выбрав поверхность S сколь угодно малой, покажем, что существуют два положительных числа ε и η, обладающих следующими свойствами: поместив движущуюся точку в начальном положении на расстоянии от O, меньшем чем ε, и сообщив ей начальную скорость, меньшую чем η, мы получим такое движение точки, при котором эта *движущаяся точка останется внутри поверхности S*. В самом деле, функция U на поверхности S отрицательна и отлична от нуля; следовательно, можно указать достаточно малое положительное число p такое, что на поверхности S постоянно будет

$$-U>p, \quad U+p<0.$$

Поместим теперь точку M в начальное положение $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри поверхности S и сообщим ей начальную скорость v_0. Для движения, которое точка начнет совершать, на основании теоремы кинетической энергии будет

$$\frac{mv^2}{2}=U+\left(\frac{mv_0^2}{2}-U_0\right), \tag{1}$$

где U_0 есть значение функции U в точке M_0, причем отрицательное. Определим начальное положение и скорость условием

$$\frac{mv_0^2}{2}-U_0<p, \tag{2}$$

для чего достаточно, например, принять

$$\frac{mv_0^2}{2}<\frac{p}{2}, \qquad -U_0<\frac{p}{2}.$$

Первое из этих неравенств определяет для v_0 верхний предел u, равный $\sqrt{p/m}$; далее, так как функция U непрерывна и обращается в нуль в начале, то существует такое достаточно малое положительное число ε, что если расстояние OM_0 меньше чем ε, то $-U_0$ будет меньше чем $p/2$. Тогда, придавая движущейся точке начальное положение, находящееся от точки O на расстоянии, меньшем чем ε, и сообщая ей начальную скорость, меньшую чем $\sqrt{p/m}$, мы удовлетворим неравенству (2) и вследствие этого, на основании теоремы кинетической энергии (1), удовлетворим также неравенству

$$\frac{mv^2}{2} < U + p, \tag{3}$$

которое показывает, что движущаяся точка не может выйти за поверхность S. В самом деле, если точка достигнет поверхности S, то $U+p$ станет отрицательным и кинетическая энергия, являющаяся существенно положительной величиной, станет меньше отрицательной величины, что является абсурдом. Теорема таким образом доказана. Например, если точка притягивается центром O пропорционально расстоянию, то O является положением устойчивого равновесия (п. 90).

В полученном движении можно указать верхний предел для скорости, так как поскольку U отрицательно, то по формуле (3) $mv^2/2$ меньше чем p и v меньше чем $\sqrt{2p/m}$.

Обратное предложение. Вероятно, что обратное предложение также справедливо. Если в точке, представляющей *изолированное* положение равновесия, производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ обращаются в нуль, но функция U не имеет максимума, то соответствующее равновесие будет неустойчивым. Это предложение для широкого класса случаев доказано Ляпуновым (Journal de Mathématiques, т. III, 1897, стр. 81) *) и Адамаром (там же, стр. 364). Но если рассматриваемое положение равновесия не является *изолированным*, то может случиться, что равновесие будет устойчивым, но функция U не будет максимумом. Это показал Пенлеве (Comptes Rendus, т. 12), 1904), который привел пример:

$$U = \frac{1}{2} m \left(x^5 \sin\frac{1}{x} - y^2 - z^2\right).$$

В этом примере начало координат является положением устойчивого равновесия, но функция U не имеет максимума.

---

*) Русский перевод этой статьи А. М. Ляпунова приложен ко второму и третьему изданиям (Гостехиздат, 1935 г. и 1950 г.) его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения». См. также А. М. Ляпунов, Сочинения, т. II, Изд-во АН СССР, 1956. (*Прим. перев.*)

Примечание. Когда для точки, находящейся под действием силы, не имеющей силовой функции, имеется некоторое положение равновесия, то для того, чтобы узнать, устойчиво оно или нет, надо исследовать движение, которое получит эта точка, если ее удалить на бесконечно малое расстояние от положения равновесия и сообщить ей бесконечно малую скорость.

II. Прямолинейное движение

209. Некоторые случаи, когда движение точки прямолинейно. 1°. *Силы постоянного направления.* Если движущаяся точка, выходящая из некоторого положения M_0, находится под действием силы постоянного направления и если ее начальная скорость V_0 равна нулю или параллельна этому направлению, то траекторией будет прямая D, проведенная из M_0 параллельно заданному направлению. Это свойство можно рассматривать как очевидное из соображений симметрии, так как нет никакой причины, которая заставила бы точку сойти с этой прямой D в ту или другую сторону. Можно это свойство установить также аналитически. Оси координат можно всегда выбрать так, чтобы сила была параллельна оси Ox. Тогда проекции Y и Z силы на оси Oy и Oz будут равны нулю и поэтому

$$\frac{d^2y}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dt}=a, \qquad \frac{dz}{dt}=b,$$

где a и b — проекции начальной скорости на оси Oy и Oz; но так как эта скорость равна нулю или параллельна оси Ox, то a и b равны нулю. А если производные величин y и z равны нулю, то эти величины постоянны,

$$y=y_0, \quad z=z_0$$

и точка перемещается по линии, параллельной оси Ox.

2°. *Центральная сила.* Если точка, выходящая из M_0, находится под действием силы, направление которой все время проходит через неподвижный центр O, и если начальная скорость V_0 равна нулю или направлена по прямой OM_0, то точка останется на прямой OM. Этот результат также очевиден из соображений симметрии. Его можно получить аналитически, приняв O за начало и заметив, что на основании теоремы, изложенной в п. 203 для проекций движения на все три координатные плоскости, имеет место закон площадей. Имеем, например,

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C,$$

где C — момент скорости относительно оси Oz. Но в начальный момент скорость либо равна нулю, либо проходит через точку O. Ее момент относительно оси Oz равен нулю и $C=0$. Следовательно,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

и, интегрируя от начального момента времени до момента t, получим

$$\ln\frac{x}{x_0}=\ln\frac{y}{y_0}, \quad \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}.$$

Точно так же, проектируя на плоскость yOz, найдем

$$\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

Следовательно, точка остается на прямой OM_0.

3°. *Учет сопротивления среды.* Предыдущие теоремы останутся справедливыми и в том случае, если присоединить к рассмотренным силам силу сопротивления среды, направленную в сторону, противоположную скорости. Это по-прежнему вытекает из симметрии и может быть установлено аналитически в качестве упражнения.

4°. *Точка, вынужденная двигаться по прямой.* Можно, наконец, представить себе точку, находящуюся под действием заданных сил и описывающую прямую, например, точку, находящуюся в прямолинейной трубке бесконечно малого поперечного сечения. Тогда со стороны трубки возникает сила реакции, но равнодействующая всех приложенных к точке сил будет направлена по прямой, так как она равна произведению массы на ускорение.

210. Уравнение прямолинейного движения. Простые случаи интегрируемости. Возьмем частный случай, когда движение прямолинейно, и примем прямую, описываемую точкой, за ось Ox. Уравнение движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X. \tag{1}$$

Наиболее общим случаем будет тот, когда X одновременно зависит от x, v и t. В этом случае

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Phi\left(x, \frac{d^2x}{dt}, t\right),$$

так как алгебраическое значение скорости v есть $\frac{dx}{dt}$. Это — дифференциальное уравнение второго порядка, позволяющее определить x в функции t. Общий интеграл содержит две произвольные постоянные:

$$x=f(t, c, c').$$

Эти постоянные определяются из начальных условий:

$$x_0=f(t_0, c, c'), \quad v_0=f'_t(t_0, c, c').$$

Может случиться, что аналитическое выражение силы изменяется в зависимости от положения точки или направления скорости. Пример такого рода встретится в упражнениии 4 п. 211.

Интегрирование дифференциального уравнения (1) приводится к квадратурам, когда X содержит только одну из величин x, v и t.

1°. *Сила зависит только от положения.* Пусть сначала

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi(x).$$

Умножая обе части на $2\frac{dx}{dt}$, получим

$$2m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}=2\varphi(x)\frac{dx}{dt}$$

и, интегрируя, найдем

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+h.$$

Это уравнение представляет собой не что иное, как уравнение кинетической энергии, примененное к рассматриваемому частному случаю. Для определения постоянной положим $x=x_0$, что даст для h значение mv_0^2. Если выполнить вышеуказанную квадратуру, то получатся уравнения вида

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\psi(x),\qquad \frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\psi(x)}.$$

Здесь нет никакой неопределенности в выборе знака, так как при $x=x_0$ должно быть $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=v_0$. Следовательно, перед радикалом нужно ставить тот знак, какой имеет v_0. Если v_0 равно нулю, то движение будет происходить в сторону силы, что опять определяет знак радикала. Тогда можно написать

$$dt=\frac{dx}{\pm\sqrt{\psi(x)}},\qquad t-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{\psi(x)}}.$$

Это уравнение, разрешенное относительно x, выражает закон расстояния; непосредственно оно выражает время, необходимое для перемещения на данное расстояние. Мы исследуем его более подробно дальше (п. 211, пример 6), после того, как рассмотрим несколько простых частных случаев.

2°. *Сила зависит только от скорости.* Допустим теперь, что X есть функция только скорости v. Написав

$$m\frac{dv}{dt}=\varphi(v),\qquad dt=\frac{m\,dv}{\varphi(v)}$$

и проинтегрировав, получим

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{m\,dv}{\varphi(v)} + v_0.$$

Так как $dx = v\,dt$, то

$$dx = \frac{mv\,dv}{\varphi(v)}, \qquad x = \int_{v_0}^{v} \frac{mv\,dv}{\varphi(v)} + x_0.$$

Здесь x и t получились выраженными в функции вспомогательной переменной v. Последнее уравнение $mv\,dv = \varphi(v)\,dx$ вытекает также из теоремы кинетической энергии, так как $\varphi(v)\,dx$ есть элементарная работа силы и $mv\,dv = d\,\frac{1}{2}\,mv^2$.

3°. *Сила зависит только от времени.* Если, наконец, X есть функция только времени t, то имеем

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t).$$

Интегрируя первый раз, получим

$$m\,\frac{dx}{dt} = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt + mv_0.$$

После второго интегрирования найдем

$$mx = \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt\right] dt + mv_0(t - t_0) + mx_0.$$

211. Приложение к движениям, происходящим под действием силы, зависящей только от положения.

1°. *Вертикальное движение тяжелого тела в пустоте.*

В качестве оси примем направленную вверх вертикаль, проходящую через начальное положение точки. Обозначим через v_0 алгебраическое значение начальной скорости, которое предполагается вертикальным. Сила, действующая на точку, равна в каждый момент времени $-mg$, и поэтому уравнение движения будет

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -mg, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -g. \tag{1}$$

Интегрируя первый раз, находим

$$\frac{dx}{dt} = v = -gt + v_0, \tag{2}$$

причем время отсчитывается от того момента, когда точка начинает двигаться. Интегрируя второй раз, получим

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t, \tag{3}$$

если абсциссы отсчитываются от начального положения точки. Если v_0 положительно, то скорость, будучи вначале положительной, затем убывает и обращается в нуль по истечении промежутка времени v_0/g. Начиная с этого момента, скорость становится отрицательной и неограниченно увеличивается по абсолютному значению. Исключая t из равенств (2) и (3), найдем

$$v^2 = v_0^2 - 2gx.$$

К этому же соотношению можно прийти, применяя теорему кинетической энергии, т. е. умножая обе части равенства (1) на $2\frac{dx}{dt}$ и интегрируя.

Таким образом,

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gx}\ .$$

При сделанном нами предположении, что $v_0 > 0$, точка начинает двигаться вверх и в начале движения ее скорость положительна. Следовательно, перед радикалом надо взять знак $+$. Пока x будет увеличиваться до $v_0^2/2g$, скорость будет уменьшаться до нуля, после чего точка начнет падать и тогда перед радикалом надо будет взять знак $-$. Полученное нами выражение для скорости показывает, что на одной и той же высоте, как при движении вверх, так и при движении вниз, точка имеет скорость, одинаковую по абсолютному значению. Точка проходит на этой высоте каждый раз через одну и ту же поверхность уровня.

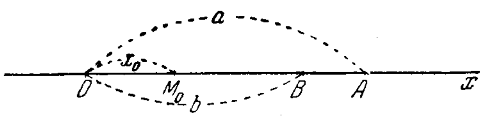


Рис. 132.

2°. *Движение материальной точки, притягиваемой неподвижным центром O пропорционально расстоянию.*

Примем точку O (рис. 132) за начало, а за ось — прямую OM_0, которая будет траекторией. В качестве положительного направления примем OM_0, где M_0 — начальное положение точки, и обозначим через v_0 начальную скорость.

Рассмотрим случай притяжения. В этом случае сила в какой-нибудь момент времени будет равна $-\mu x$, где μ положительно, каково бы ни было положение точки, справа или слева от 0. Полагая $\frac{\mu}{m} = k^2$, получим уравнение движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \tag{1}$$

Это уравнение является линейным уравнением с постоянными коэффициентами без правой части. Его общий интеграл имеет вид

$$x = A\cos kt + B\sin kt,$$

где A и B — две постоянные. Скорость v есть производная от x по t:

$$v = -Ak\sin kt + Bk\cos kt.$$

Для определения постоянных дадим величинам x и v начальные значения x_0 и v_0, которые они имеют при $t = 0$. Получим

$$x_0 = A, \quad v_0 = Bk.$$

Значение x будет тогда

$$x = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt. \tag{2}$$

Следовательно, движение является простым колебанием периода $T = \frac{2\pi}{k}$ (вперед и обратно). Для нахождения амплитуды колебания положим:

$$x_0 = a\cos\alpha, \quad \frac{v_0}{k} = -a\sin\alpha, \quad a = +\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}.$$

Тогда

$$x = a\cos(kt + \alpha). \tag{3}$$

Следовательно, x изменяется от $-a$ до $+a$, т. е. амплитуда равна a.

Если начальная скорость равна *нулю*, то

$$x = x_0 \cos kt.$$

В этом случае время, необходимое точке для достижения положения O, равно четверти периода T, т. е. $\pi/2k$. Оно *не зависит* от x_0. Этот результат выражают, говоря, что движение является *таутохронным*.

Применение теоремы кинетической энергии. Умножая обе части уравнения движения на $2dx$ и интегрируя, получим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = -k^2x^2 + h.$$

При $x = x_0$ должно быть $v = v_0$; следовательно,

$$h = v_0^2 + k^2x_0^2,$$

и h является существенно положительной величиной, большей, чем $k^2x_0^2$ или равной ей; следовательно, мы можем предположить, что $h = k^2a^2$, причем $a \geqslant x_0$. Тогда уравнение движения принимает вид

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2(a^2 - x^2), \qquad \frac{dx}{dt} = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{4}$$

и время t определяется элементарной квадратурой

$$kt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}},$$

приводящейся к арксинусу. Мы приходим, таким образом, с иной точки зрения к уравнению движения (2). Формула (4) показывает, что x может изменяться только между $-a$ и $+a$ для того, чтобы радикал был вещественным. Когда x изменяется от $-a$ до $+a$ перед радикалом (4) следует брать знак $+$, а когда x уменьшается от $+a$ до $-a$, нужно брать знак $-$.

3°. *Точка отталкивается неподвижным центром пропорционально расстоянию.* Уравнение движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k^2x, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - k^2x = 0$$

является линейным с постоянными коэффициентами и его общий интеграл имеет вид

$$x = x_0\frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} + \frac{v_0}{k}\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2},$$

где x_0 и v_0 — начальные абсцисса и скорость. Если

$$v_0 = -kx_0,$$

то уравнение для x принимает вид

$$x = x_0 e^{-kt}.$$

В этом случае точка неограниченно приближается к отталкивающему центру, никогда его не достигая, так как при неограниченном возрастании времени абсцисса x стремится к нулю.

Применение теоремы кинетической энергии. Можно применить другой метод исследования и интегрирования.

Умножим обе части уравнения движения на $2\frac{dx}{dt}$ и проинтегрируем. Получим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2x^2 + h,$$

где $h = v_0^2 - k^2x_0^2$. Следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{k^2x^2 + h}.$$

Допустим сначала, что $v_0 > 0$. Тогда точка будет все время удаляться от отталкивающего центра и ее скорость будет неограниченно возрастать вместе с x.

Допустим теперь, что $v_0 < 0$. Так как в начале движения скорость отрицательна, то перед корнем нужно взять знак —. Пусть $h > 0$. Пока точка приближается к началу 0, ее скорость уменьшается до значения $\sqrt{h}$; с этой скоростью движущаяся точка проходит через начало O и удаляется с неограниченно возрастающей скоростью. Если h отрицательно, то его можно положить равным $-k^2a^2$ и тогда получим

$$\frac{dx}{dt} = -k\sqrt{x^2 - a^2},$$

где a обязательно меньше x_0, так как при $x = x_0$ скорость v_0 вещественна. Следовательно, движущаяся точка приближается к точке A (рис. 133) с абсциссой a и приходит в эту точку за конечный промежуток времени, так как время, необходимое для прохождения отрезка пути $x_0 - x$, равное

$$t = \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{-dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

стремится к некоторому пределу T, когда x стремится к a. По истечении промежутка времени T скорость меняет знак и точка неограниченно удаляется от A с постоянно возрастающей скоростью.

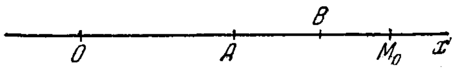


Рис. 133.

Интересно исследовать промежуточный случай, когда $h = 0$, или

$$v_0 = \pm kx_0.$$

Положим

$$v_0 = -kx_0;$$

тогда

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{k^2x^2} = -kx.$$

Скорость неограниченно уменьшается по мере того, как точка неограниченно приближается к началу O. *Но она не может достигнуть его за* *конечный промежуток времени,* так как время, необходимое ей для того, чтобы подойти к началу на расстояние x, равно

$$\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x}\frac{-dx}{x}=\frac{1}{k}\ln\frac{x_0}{x},$$

а это выражение неограниченно возрастает, когда x стремится к нулю. Точка O отличается той особенностью, что она является положением неустойчивого равновесия; движущаяся точка, помещенная в начало O без начальной скорости, останется в покое; но если ее немного удалить, то отталкивание удалит ее еще больше. Чаще всего, когда движущаяся точка приближается к положению неустойчивого равновесия со скоростью, стремящейся к нулю, она к этому положению неограниченно приближается, никогда его не достигая.

4°. *Движение точки, притягиваемой неподвижным центром, обратно пропорционально квадрату расстояния.*

Когда x положителен, тогда $X=-\mu/x^2$; если x отрицателен, то надо принять $X=\mu/x^2$. Мы рассмотрим первый случай. Тогда уравнение движения, если положить $\mu=mk^2$, будет

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k^2}{x^2}.$$

Умножим его на $2\frac{dx}{dt}$ и проинтегрируем. Получим выражение теоремы кинетической энергии

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{2k^2}{x}+h,$$

где $h=v_0^2-\frac{2k^2}{x_0}$. Предположим, что точка выходит из M_0 с начальной скоростью v_0, которая или отрицательна, т. е. направлена к точке O, или равна нулю. Тогда вначале нужно принять

$$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\frac{2k^2}{x}+h},$$

и движущаяся точка будет приближаться к точке O с неограниченно возрастающей скоростью, что физически невозможно, так как тогда удар должен был бы произойти раньше, чем расстояние между обеими точками обратится в нуль.

Если точке сообщается движение в положительную сторону, то сначала надо принять

$$\frac{dx}{dt}=+\sqrt{\frac{2k^2}{x}+h}.$$

Если $h>0$, то по мере того, как x возрастает, скорость v убывает, но остается все время больше чем $\sqrt{h}$; следовательно, точка будет неограниченно удаляться и так как при этом ее скорость стремится к $\sqrt{h}$, то через некоторое время движение можно рассматривать как равномерное.

Если $h=0$, то движущаяся точка обязательно достигнет любого положения на прямой, как бы удалено оно ни было, так как между точкой M_0 и произвольной точкой P с абсциссой p скорость больше чем $\sqrt{2k^2/p}$; из этого следует, что движущаяся точка неограниченно удаляется со скоростью, стремящейся к нулю.

Если h отрицательно, то, полагая $h = -\frac{2k^2}{a}$, приведем уравнение движения к виду

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{\frac{2k^2}{x} - \frac{2k^2}{a}},$$

причем $a > x_0$ (рис. 134), так как радикал должен быть вещественным при $x = x_0$. Скорость будет сначала направлена в положительную сторону и будет уменьшаться, пока x возрастает. Движущаяся точка будет приближаться сколь угодно близко к точке A с абсциссой a и достигнет ее за конечный промежуток времени. После этого движение переменит направление, так как сила — притягивающая и она стремится, как и в случае, когда $v_0 \leqslant 0$, привести точку в начало O.

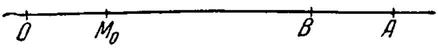


Рис. 134.

Задачу можно рассмотреть еще иначе, выполнив квадратуру, которая определит t в функции x. В самом деле, имеем

$$t = \int_{x_0}^{x} \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k^2}{x} + h}}.$$

Если положить $\frac{2k^2}{x} + h = u^2$, то задача сведется к интегрированию рациональной дроби.

5°. *Точка притягивается неподвижным центром пропорционально n-й степени расстояния*:

$$X = -\mu x^n.$$

В этом случае, если точка помещена без начальной скорости на расстоянии x_0 от начала, то она его достигнет за промежуток времени

$$T = x_0^{\frac{1-n}{2}} \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{m(n+1)}{2\mu}} \int_0^1 z^{\frac{1}{n+1}-1} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

В этом выражении определенный интеграл является эйлеровым интегралом $\mathrm{B}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\right)$. Отсюда ясно, что единственным значением n, при котором T не зависит от x_0, является $n = 1$ (пример 2).

6°. *Исследование общего случая.* Сила имеет вид $X = m\varphi(x)$ и уравнение движения будет

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x).$$

После первого интегрирования получим (теорема кинетической энергии)

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int \varphi(x)\, dx + h = f(x),$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{f(x)}.$$

Допустим для определенности, что $f(x)$ является рациональной дробью. Знак перед корнем в начале движения определяется направлением, в котором точка начинает двигаться.

Допустим, например, что следует взять знак $+$; тогда движущаяся точка будет удаляться в положительном направлении. Единственными особенностями являются нули и бесконечности функции $f(x)$. Допустим, что при возрастании x мы придем сначала к точке, в которой функция f бесконечна. В этом случае движущаяся точка будет перемещаться с неограниченно возрастающей скоростью в положение A, соответствующее этой бесконечности; данный результат и дает решение задачи. (Физически такой случай невозможен). Допустим теперь, что первой особенностью является *простой нуль*. Тогда можно написать

$$f(x) = (a - x)\psi(x),$$

где ψ не обращается в нуль между x_0 и a, и мы получим

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{a - x}\sqrt{\psi(x)}.$$

При этом функция $\psi(x)$ в промежутке от x_0 до a должна быть положительной для того, чтобы $\frac{dx}{dt}$ было вещественным. Движущаяся точка подходит сколь угодно близко к точке A с абсциссой a, так как на отрезке M_0B (рис. 134) скорость не обращается в нуль и, следовательно, превосходит некоторую положительную величину v_1. Поэтому движущаяся точка обязательно достигает положения B. Но она достигает также за конечный промежуток времени и положения A, так как время, необходимое ей для прохождения расстояния от x_0 до x, равное

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a - x}\sqrt{\psi(x)}},$$

остается конечным, когда x стремится к a. В точке A скорость обращается в нуль и дальнейшее движение будет происходить в направлении силы. При этом точка обязательно пойдет обратно, так как если x перейдет через a, то $\frac{dx}{dt}$ станет мнимым. Если особенность $x = a$ будет *двойным* или *кратным корнем*, то движущаяся точка будет сколь угодно близко подходить к точке A, но не достигнет ее за конечный промежуток времени, так как, предполагая корень двойным, имеем

$$f(x) = (a - x)^2\psi(x),$$

и вследствие этого

$$\frac{dx}{dt} = (a - x)\sqrt{\psi(x)},$$

где функция $\psi(x)$ будет по-прежнему положительной между x_0 и a. Время

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(a - x)\sqrt{\psi(x)}},$$

необходимое движущейся точке для прохождения расстояния от x_0 до x, неограниченно возрастает, когда x стремится к a. Можно заметить, что если $x = a$ является двойным корнем, то соответствующее положение является положением неустойчивого равновесия. Действительно,

$$f(x) = (a - x)^2\psi(x)$$

и, кроме того,

$$f(x)=2\int\varphi(x)\,dx+h.$$

Отсюда, дифференцируя, получим для силы выражение

$$X=m\varphi(x)=\frac{m}{2}\left[(a-x)^2\psi'(x)-2(a-x)\psi(x)\right],$$

которое действительно обращается в нуль при $x=a$. Но если сила при $x=a$ обращается в нуль, то соответствующее положение A есть положение равновесия. Оно неустойчиво, так как если точку бесконечно мало удалить от этого положения, сообщив абсциссе x значение, меньшее чем a, но бесконечно к нему близкое, то вышенаписанное выражение, в котором $\psi(x)$ положительно вблизи $x=a$, показывает, что X станет отрицательным; следовательно, точка стремится двигаться в отрицательном направлении и еще более удаляться от положения равновесия.

Часто встречающимся частным случаем является следующий: точка выходит из положения x_0 со скоростью v_0 и первыми особенностями, которые встречаются при увеличении x или при его уменьшении, являются два простых нуля a и c функций $f(x)$, где $a>x_0>c$. Тогда можно написать

$$f(x)=(a-x)(x-c)\psi(x),$$

где $\psi(x)$ — положительно между a и c. В этом случае имеем

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{(a-x)(x-c)}\sqrt{\psi(x)}},$$

где попеременно нужно брать знаки $+$ и $-$, так как, согласно предыдущему движущаяся точка будет колебаться между двумя точками A и C с абсциссами a и c (см. рис. 134). Продолжительность колебания (вперед и назад) равна

$$T=2\int_{c}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-c)}\sqrt{\psi(x)}}.$$

Если, следовательно, x рассматривать как функцию от t (обращение интеграла), то x будет периодической функцией с периодом T. Согласно теореме Фурье x можно разложить в тригонометрический ряд вида

$$x=a_0+a_1\cos\frac{2\pi t}{T}+b_1\sin\frac{2\pi t}{T}+a_2\cos\frac{4\pi t}{T}+b_2\sin\frac{4\pi t}{T}+\ldots,$$

сходящийся при всех значениях t. Определение коэффициентов a_n и b_n представляет большие трудности, кроме случая, когда $\psi(x)$ является относительно x многочленом степени, меньшей или равной двум. Тогда x является круговой или эллиптической функцией аргумента t. По вопросу вычисления этих коэффициентов в общем случае отсылаем к работе Вейерштрасса «Ueber eine Gattung reel periodischer Funktionen» (Monatsbericht der Akad. der Wissen. zu Berlin). Можно получить приближенную формулу для закона движения, применяя метод, указанный Аппеллем (Comptes Rendus, т. 160, 1915, стр. 419).

212. Движения под действием силы, зависящей только от скорости. *Вертикальное движение снаряда в сопротивляющейся среде.* До сих пор мы рассматривали примеры, в которых сила зависела только от положения точки. Перейдем теперь к кругу вопросов, в которых приходится рассматривать материальную точку, находящуюся под действием силы, зависящей только от скорости. Вообразим тяжелое тело, движущееся в такой сопротивляющейся среде, как воздух. Среда оказывает на каждый элемент поверхности тела некоторое действие и все эти действия складываются в одну силу и одну пару, приложенные к телу. В частном случае, когда снаряд является телом вращения и совершает поступательное движение, параллельное оси вращения, из соображений симметрии очевидно, что пара равна нулю и что равнодействующая всех действий среды на элементы поверхности тела является силой, направленной вдоль оси в сторону, противоположную движению. Такое явление можно наблюдать, например, когда шар или снаряд цилиндрическо-конической формы падает в неподвижном воздухе по вертикали.

Займемся этим частным случаем. Согласно теореме движения центра тяжести, которую мы докажем позднее, движение центра тяжести будет таким, как если бы в нем была сосредоточена вся масса тела и если бы в него были перенесены параллельно себе все приложенные к телу внешние силы. Следовательно, центр тяжести движется, как тяжелая точка, находящаяся под действием вертикальной силы R, направленной в сторону, противоположную скорости. Мы приходим таким образом к необходимости исследовать движение материальной точки под действием ее веса и силы сопротивления R. Опыт показывает, что при очень малых скоростях сопротивление почти пропорционально скорости v. Если скорость заметна, но все же меньше чем 200 *м/сек*, то сопротивление изменяется пропорционально v^2. При бо́льших скоростях необходимо ввести члены с v^3 или с v^4. Нельзя, по-видимому, выразить закон сопротивления простой формулой. Сиаччи предложил формулу, совпадение которой с экспериментом заслуживает внимания. Эта формула была исследована Шапелем в Revue d'Artillerie (т. XLVIII, апрель — сентябрь 1896). Мы будем исходить из общего предположения, что сопротивление выражается в функции скорости формулой

$$R = mg\varphi(v),$$

где $\varphi(v)$ — положительная и возрастающая функция от v. Так как тело, если его предоставить самому себе без начальной скорости, будет падать, то сопротивление при $v=0$ должно быть меньше веса, и, следовательно, $\varphi(0) < 1$. Допустим, кроме того, что для каждого положительного значения переменной функция $\varphi(v)$ имеет конечную, положительную и не равную нулю производную. Через λ обозначим то значение v, при котором сопротивление равно весу, т. е. $\varphi(\lambda) = 1$.

1°. *Нисходящее движение.* Предположим, что движение является нисходящим (рис. 135). Примем за начало исходное положение тела, а за ось — вертикаль, направленную вниз. Уравнение движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-R=mg-mg\varphi(v)$$

или

$$\frac{dv}{dt}=g[1-\varphi(v)].$$

Так как $\varphi(\lambda)=1$, то можно написать

$$\frac{dv}{dt}=g[\varphi(\lambda)-\varphi(v)], \tag{1}$$

откуда при помощи квадратуры найдем время в функции скорости:

$$gt=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\varphi(\lambda)-\varphi(v)}. \tag{2}$$

Рис. 135.

Кроме того, заменяя в равенстве (1) dt через dx/v, получим

$$g\,dx=\frac{v\,dv}{\varphi(\lambda)-\varphi(v)}.$$

Таким образом, координата также определяется как функция скорости при помощи квадратуры

$$gx=\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{\varphi(\lambda)-\varphi(v)}. \tag{3}$$

Формула (1) показывает, что $\frac{dv}{dt}$ имеет тот же знак, что и разность $\varphi(\lambda)-\varphi(v)$. Предположим, что начальная скорость, которая по условию положительна, меньше величины λ. Тогда вначале производная $\frac{dv}{dt}$ будет положительна и скорость с течением времени будет возрастать от своего начального значения v_0. Скорость будет увеличиваться до тех пор, пока разность $\varphi(\lambda)-\varphi(v)$ будет оставаться положительной, т. е. пока v не достигнет значения λ. Покажем, что v не может достигнуть значения λ за конечный промежуток времени. В самом деле, в уравнении (2) подынтегральное выражение $\frac{1}{\varphi(\lambda)-\varphi(v)}$ обращается в бесконечность при $v=\lambda$ и притом таким образом, что $\frac{\lambda-v}{\varphi(\lambda)-\varphi(v)}$ стремится к пределу $1/\varphi'(\lambda)$. Вследствие этого интеграл становится бесконечным при $v=\lambda$. Уравнение (3) показывает, что x также становится бесконечным для этого значения скорости v. Отсюда вытекает, что скорость все время возрастает, но стремится к конечному пределу λ.

Если начальная скорость v_0 больше λ, то производная $\frac{dv}{dt}$ будет вначале отрицательной и скорость будет уменьшаться, приближаясь к λ. Так же, как и выше, можно убедиться, что t и x неограниченно возрастают, когда v стремится к λ.

Итак, какова бы ни была скорость в начальный момент, она будет стремиться к одному и тому же пределу λ и по истечении достаточно большого промежутка времени движение станет почти равномерным со скоростью λ. Отсюда следует, что если начальная скорость будет в точности равна λ, то движение будет точно равномерным. Заметим, что дифференциальное уравнение (1) действительно допускает решение $v = \lambda$.

Допустим, что в воздухе падают два одинаковых однородных шара, массы которых различны. При одинаковых скоростях сопротивление будет одинаковым; следовательно,

$$mg\varphi(v) = m_1 g\varphi_1(v). \tag{4}$$

Обозначим через λ и λ_1 предельные скорости для обоих шаров, определяемые уравнениями $\varphi(\lambda) = 1$, $\varphi_1(\lambda_1) = 1$. Легко видеть, что если $m_1 > m$, то $\lambda_1 > \lambda$. В самом деле, полагая в равенстве (4) $v = \lambda$, получим:

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{m}{m_1}.$$

Следовательно, $\varphi_1(\lambda)$ меньше единицы и так как функция φ_1 — возрастающая, то $\lambda_1 > \lambda$. Это показывает, что большей массе соответствует большая предельная скорость, что находится в соответствии с опытом, показывающим, что более тяжелые тела падают в воздухе быстрее.

В качестве упражнения можно положить

$$g\varphi(v) = kv^n.$$

При n целом, квадратуры, которые нужно выполнить, касаются рациональных дробей. Если n — число рациональное, $n = \frac{p}{q}$, то, полагая $v = u^q$, по-прежнему приведем задачу к рациональным дифференциалам.

Если, например, $n = 1$, то уравнение (2) можно проинтегрировать, и мы получим

$$kt = \ln\frac{\lambda - v_0}{\lambda - v},$$

откуда находим первый интеграл

$$\lambda - v = (\lambda - v_0)\,e^{-kt}.$$

Здесь мы действительно приходим к общим результатам: $\lambda - v$ имеет знак $\lambda - v_0$ и когда t неограниченно возрастает, показательная функция стремится к нулю и v стремится к λ. Заменяя v через $\frac{dx}{dt}$ и интегрируя, найдем

$$\lambda t - x = -\frac{1}{k}(\lambda - v_0)\,e^{-kt} + C.$$

Так как при $t=0$ должно быть $x=0$, то

$$C=\frac{\lambda-v_0}{k},\quad \lambda t-x=(\lambda-v_0)\frac{1-e^{-kt}}{k}.$$

Таким образом, для x как функции времени получаем

$$x=\frac{g}{k}\left(t-\frac{1-e^{-kt}}{k}\right)+v_0\frac{1-e^{-kt}}{k},$$

где скорость λ заменена ее значением g/k.

Покажем теперь, что если k стремится к нулю, то уравнение, определяющее x, становится уравнением вида $x=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$, которое определяет свободное падение в пустоте. В самом деле, если в предыдущем равенстве мы заменим e^{-kt} его разложением в ряд, то получим

$$x=g\left[\frac{t^2}{2!}-k\left(\frac{t^3}{3!}+\ldots\right)\right]+v_0\left[t-k\left(\frac{t^2}{2!}-\ldots\right)\right],$$

и если $k=0$, то останется

$$x=v_0t+\frac{1}{2}gt^2.$$

2°. *Восходящее движение.* Направим теперь ось Ox вертикально вверх (рис. 136). По-прежнему $R=mg\varphi(v)$ и уравнение движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg-mg\varphi(v),$$

т. е.

$$\frac{dv}{dt}=-g[1+\varphi(v)],$$

откуда, как и раньше, выведем:

$$gt=-\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{1+\varphi(v)},$$

$$gx=-\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{1+\varphi(v)}.$$

Рис. 136.

В этом случае $\frac{dv}{dt}$ всегда отрицательно и скорость все время уменьшается. Она обращается в нуль по истечении конечного промежутка времени

$$T=-\frac{1}{g}\int_{v_0}^{0}\frac{dv}{1+\varphi(v)},$$

и наибольшая высота, которой достигнет движущаяся точка, будет

$$H=-\frac{1}{g}\int_{v_0}^{0}\frac{v\,dv}{1+\varphi(v)}.$$

Если $\varphi(v)$ равно нулю, то получаются формулы движения в пустоте

$$T_1 = -\frac{1}{g}\int_{v_0}^{0} dv, \quad H_1 = -\frac{1}{g}\int_{v_0}^{0} v\,dv.$$

Когда функция $\varphi(v)$ не равна нулю, то она положительна. Вследствие этого подынтегральное выражение в H всегда меньше подынтегрального выражения в H_1; поэтому H меньше чем H_1 и точка в воздухе поднимается на меньшую высоту, чем в пустоте. Точно так же T меньше чем T_1, и точка затрачивает меньше времени для поднятия на наибольшую высоту, чем при движении в пустоте.

По истечении времени T точка останавливается и затем начинает падать по закону, установленному выше для нисходящего движения при отсутствии начальной скорости. Когда точка проходит через свое начальное положение, она имеет скорость, меньшую чем v_0. В самом деле, она поднимается на меньшую высоту, чем если бы она была брошена вверх в пустоте с той же начальной скоростью; кроме того, она падает тоже медленнее, так как ее падение замедляется сопротивлением воздуха. По этим двум причинам скорость при возвращении будет меньше, чем та же скорость при движении в пустоте, т. е. меньше чем v_0.

Полагая снова $g\varphi(v) = kv^n$, мы сумеем легко выполнить интегрирования в случае $n = 1$. Имеем

$$kt = -\int_{v_0}^{v} \frac{k\,dv}{g + kv} = -\ln \frac{g + kv}{g + kv_0},$$

откуда, потенцируя, получим

$$g + kv = (g + kv_0)\,e^{-kt}. \tag{c}$$

Точка поднимется на максимальную высоту по истечении времени

$$T = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{k}{g}v_0\right).$$

Заменим в уравнении (c) скорость v через $\frac{dx}{dt}$ и проинтегрируем. Получим

$$gt + kx = (g + kv_0)\,\frac{1 - e^{-kt}}{k}.$$

Полагая k стремящимся к нулю, мы придем к формуле движения в пустоте

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Положим теперь $n = 2$. Тогда, заменяя через λ^2 величину g/k, получим

$$kt = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\lambda^2 + v^2} = -\frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{v}{\lambda} + C,$$

откуда, полагая $\beta = C\lambda$, имеем

$$v = \lambda \operatorname{tg}(\beta - t\sqrt{kg}).$$

Постоянная β определится из начального условия $v_0 = \lambda \operatorname{tg} \beta$. Время, необходимое для поднятия на максимальную высоту, на которой $v = 0$, равно $T = \frac{\beta}{\sqrt{kg}}$. Исходя из выражения для скорости, в котором $v = \frac{dx}{dt}$, после квадратуры найдем

$$x = \frac{1}{k} \ln \frac{\cos(\beta - t\sqrt{kg})}{\cos \beta}.$$

3°. *Прямолинейное движение тяжелой материальной точки по наклонной плоскости с учетом трения и сопротивления среды.*

Точка, пущенная из положения O (рис. 137) по линии Ox наибольшего наклона плоскости, опишет прямую, наклон которой к горизонту мы обозначим через i. Силами, приложенными к точке, являются вес mg, сопротивление среды, которое мы будем считать пропорциональным v^n, $R = mkv^n$, направленное в сторону, противоположную скорости, нормальная реакция N плоскости и, наконец, сила трения F, также направленная в сторону, противоположную скорости. Эта сила, согласио экспериментальным законам трения (п. 195), не зависит от скорости точки и пропорциональна нормальной реакции: $F = fN$, где f есть *коэффициент трения.*

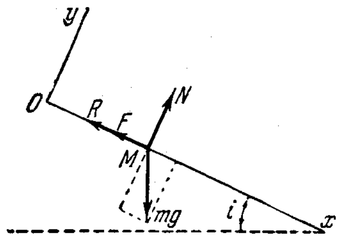


Рис. 137.

Исследуем подробно нисходящее движение. Возьмем ось Ox, направленную вниз, как на чертеже, и перпендикулярную к ней ось Oy. Выписав оба уравнения движения, имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \sin i - R - F, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = N - mg \cos i.$$

Так как y все время равно нулю, то

$$N = mg \cos i, \quad F = fN = fmg \cos i.$$

Заменив R его значением mkv^n, получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (g \sin i - fg \cos i) - kv^n.$$

Необходимо разлнчать три случая в зависимости от того, будет ли первый член положительным, отрицательным или равным нулю.

Первый случай: $\operatorname{tg} i > f$. В этом случае первый член $g \sin i - fg \cos i$ положителен. Обозначая его через g', получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g' - kv^n.$$

Это уравнение идентично уравнению *нисходящего* движения по вертикали в сопротивляющейся среде и отличается от него лишь заменой g через g'. Скорость, следовательно, стремится к $(g'/k)^{\frac{1}{n}}$.

Второй случай: $\operatorname{tg} i < f$. Первый член отрицателен, и, обозначая его через g_1, мы получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g_1 - kv^n,$$

идентичное уравнению *восходящего* движения по вертикали с заменой g на g_1. Скорость будет уменьшаться и обратится в нуль по истечении конечного промежутка времени T. Следовательно, к этому времени точка достигнет некоторого положения A, в котором сопротивление воздуха и трение скольжения при движении уничтожаются, так как скорость обращается в нуль. Точка будет оставаться все время в этом положении, так как если бы она начала двигаться, то сразу возникли бы силы трения и сопротивления среды, которые вновь обратили бы скорость в нуль. Следовательно, в этом положении A имеет место изученное в главе I равновесие между весом и наклонной реакцией плоскости, вызванной трением покоя.

Третий случай: $\operatorname{tg} i = f$. В этом случае получится уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kv^n, \quad \frac{dv}{dt} = -kv^n.$$

Следовательно, скорость будет убывать, так как ее производная отрицательна. Будет ли она обращаться в нуль? Интегрируя, получим

$$kt = \frac{1}{n-1}\left(v^{1-n} - v_0^{1-n}\right),$$

если n отлично от 1, и

$$kt = \ln\frac{v_0}{v},$$

если $n = 1$. Следовательно, если n больше или равно 1, то t неограниченно возрастает, когда v стремится к нулю: движение продолжается неопределенное время со скоростью, стремящейся к нулю.

Если n меньше 1, то t стремится к определенному пределу T, когда v стремится к нулю:

$$kT = \frac{v_0^{1-n}}{1-n}.$$

По истечении этого времени скорость обратится в нуль и точка остановится, так как при скорости, равной нулю, пропадет, как и в предыдущем случае, сопротивление.

Пройденное расстояние x будет конечным или бесконечным в зависимости от того, будет ли n меньше или больше чем 2.

213. Прямолинейное таутохронное движение. Говорят, что прямолинейное движение является *таутохронным*, если точка, начинающая движение без начальной скорости и находящаяся под действием заданных сил, затратит одно и то же время для достижения определенного конечного положения, каково бы ни было ее положение в начальный момент.

1°. ***Равнодействующая сил зависит только от положения точки*** (метод Пюизё). Примем точку прибытия или *точку таутохронизма* за начало O. Пусть X — равнодействующая приложенных к точке сил, x_0 — абсцисса начального положения, которую мы предполагаем положительной. По теореме кинетической энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{x_0}^{x} X\,dx.$$

По предположению, X является функцией от x и, очевидно, отрицательной, так как точка должна двигаться к началу O, каково бы ни было ее начальное положение, для чего сила должна быть везде направленной к O. Положим для краткости

$$\int_0^x X\,dx = -\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — положительная функция, возрастающая вместе с x и обращающаяся в нуль при $x=0$. Уравнение примет вид

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\,[\varphi(x_0) - \varphi(x)].$$

Отсюда для определения времени T, необходимого точке для достижения положения O, можно вывести формулу

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x_0) - \varphi(x)}}.$$

Положим

$$\varphi(x) = z, \quad \varphi(x_0) = z_0, \quad x = \psi(z),$$

где ψ — функция, обратная φ. Получим

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{z_0} \frac{\psi'(z)\,dz}{\sqrt{z_0 - z}}.$$

Для того чтобы движение было таутохронным, необходимо и достаточно, чтобы T не зависело от x_0, т. е. от z_0. Чтобы выразить это, напишем, что производная от T по параметру z_0 равна нулю. Чтобы избавиться от бесконечных членов в выражении этой производной, сделаем пределы не зависящими от z_0, положив $z = z_0 u$. Тогда

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\psi(z_0 u)\sqrt{z_0}\,du}{\sqrt{1-u}},$$

$$\frac{dT}{dz_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\psi''(z_0 u)\,z_0 u + \frac{1}{2}\,\psi'(z_0 u)}{\sqrt{z_0 - z_0 u}}\,du,$$

или, возвращаясь к переменной $z = z_0 u$,

$$\frac{dT}{dz_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{z_0} \frac{z\psi''(z) + \frac{1}{2}\psi'(z)}{z_0\sqrt{z_0 - z}} dz.$$

Это выражение должно быть равно нулю, каково бы ни было z_0, для чего подынтегральная функция должна тождественно обращаться в нуль. В противном случае можно будет выбрать z_0 настолько малым, чтобы в пределах от 0 до z_0 эта функция имела постоянный знак и тогда интеграл не будет равен нулю. Следовательно, функция ψ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$z\psi''(z) + \frac{1}{2}\psi'(z) = 0,$$

из которого получим

$$\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} + \frac{1}{2z} = 0, \quad \psi'(z)\sqrt{z} = C, \quad \psi(z) = 2C\sqrt{z} + C'.$$

Так как $\psi(z)$ обращается в нуль вместе с z, ибо переменные z и x обращаются в нуль одновременно, то $C' = 0$ и $\psi(z) = 2C\sqrt{z}$. Из уравнения $x = \psi(z)$ получим, наконец,

$$x = 2C\sqrt{z}, \quad z = \frac{x^2}{4C^2},$$

откуда видно, что $\varphi(x) = \frac{x^2}{4C^2}$ и

$$X = -\varphi'(x) = -\frac{x}{2C^2}.$$

Следовательно, единственной зависящей только от x силой, вызывающей прямолинейное таутохронное движение, является притяжение, пропорциональное расстоянию. Это движение было рассмотрено выше (п. 211).

2°. *Равнодействующая сил зависит от положения и скорости точки.* Мы ограничимся для этого случая лишь некоторыми библиографическими ссылками. Лагранж указал (Mémoires de Berlin, 1765 и 1770) общий закон силы, при которой таутохронизм будет обязательно иметь место и который как частный случай содержит предыдущий закон. Но, как заметил Бертран, формула Лагранжа не дает всех законов для силы, при которых движение будет таутохронным.

Отметим также статью Бриоши, содержащую формулу, более общую, чем формула Лагранжа (Annali ... da Tortolini, Rome, 1853 и Mécanique de Jullien, т. I), и статью Гатона де ла Гупийера (Journal de Lioville, 2 сер., т. XIII). (См. упражнение 5 и 6.)

214. Дан закон прямолинейного движения, найти силу. Эта задача будет определенной в зависимости от того, будет ли дан общий закон прямолинейного движения с двумя произвольными постоянными или только частный закон движения.

А. Допустим, что дано

$$x = \varphi(t, x_0, v_0), \tag{1}$$

где x_0 — начальное положение точки при $t=0$ и v_0 — начальная скорость. Нужно найти закон силы, способной сообщить заданное движение точке, пущенной из произвольного положения x_0 с произвольной скоростью v_0. Эта задача является определенной. Имеем

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t,\ x_0,\ v_0), \tag{2}$$

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2}=m\varphi''(t,\ x_0,\ v_0).$$

Разрешая уравнения (1) и (2) относительно x_0 и v_0 и подставляя в выражение для X, получим искомый закон

$$X=\Phi\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ t\right).$$

Пример. Если заданное движение определяется формулой

$$x^2=\frac{\mu t^2}{x_0^2}+(x_0+v_0t)^2,$$

то

$$X=\frac{m\mu}{x^3}.$$

Б. Если, наоборот, дан только частный закон движения, не содержащий произвольных постоянных, или содержащий только одну произвольную постоянную, то задача будет неопределенной. Допустим, например, что постоянной нет вовсе и что дано

$$x=\varphi(t). \tag{3}$$

Тогда имеем

$$v=\varphi'(t),\quad X=m\varphi''(t).$$

Из этих уравнений можно бесчисленным множеством способов получить выражение для X в функции x, v и t. Следовательно, существует бесчисленное множество законов для силы, способной произвести заданное частное движение.

Вопрос может стать точнее, если заранее подчинить X некоторым условиям. Так, например, если подчинить выражение X условию, что оно должно зависеть только от положения x, то задача становится определенной, так как надо будет найти t из уравнения движения (3) и внести его в выражение для X. Задача получается тоже определенной, если наложить условие, согласно которому X зависит только от v или только от t.

Пример. Пусть $x=\sin t$. При $t=0$ получаем $x_0=0$, $v_0=1$. Из этого уравнения имеем

$$v=\cos t,\quad X=-m\sin t.$$

Отсюда получаем следующие законы для силы:

$$-m\sin t, \tag{α}$$

$$-m\sqrt{1-v^2}, \tag{β}$$

$$-mx, \tag{γ}$$

$$-\frac{m}{2}(x+\sin t), \tag{δ}$$

. . . .

и далее, комбинируя первое равенство бесчисленным множеством способов. Если мы будем искать наиболее общие движения, производимые этими силами, то получатся весьма различные движения, но все они при частных начальных условиях $x_0=0$, $v_0=1$ обратятся в заданное движение $x=\sin t$. Так, например, для первых четырех законов силы получатся следующие движения:

$$x=\sin t+Ct+C', \tag{α}$$

$$x=\sin(t+C)+C', \tag{β}$$

$$x=C\cos t+C'\sin t, \tag{γ}$$

$$x=C\cos\frac{t}{\sqrt{2}}+C'\sin\frac{t}{\sqrt{2}}+\sin t. \tag{δ}$$

Все эти движения при подходящем выборе постоянных C и C' обращаются в $x=\sin t$.

III. Криволинейное движение. Тяжелая точка в пустоте и в сопротивляющейся среде. Электрическая частица

215. Силы постоянного направления. Допустим, что сила, действующая на материальную точку, все время параллельна некоторому фиксированному направлению. В этом случае траектория будет лежать в плоскости, содержащей начальную скорость и направление силы. Этот результат можно считать очевидным из соображений симметрии (п. 202). Примем плоскость траектории за плоскость xy и направим ось Oy параллельно силе. Тогда уравнения движения будут

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y.$$

Первое из этих уравнений приводится к следующему

$$\frac{dx}{dt}=a, \quad x=at+b,$$

т. е. проекция точки на ось Ox движется по этой оси равномерно. Постоянные a и b определяются из условия, что при $t=t_0$ должно быть $x=x_0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=x'_0$. В наиболее общем случае второе уравнение имеет вид

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\Phi\left(x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ t\right).$$

После замены x выражением $at+b$ оно преобразуется в уравнение вида

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\Psi\left(y,\ \frac{dy}{dt},\ t\right),$$

идентичное с уравнением прямолинейного движения. Если его можно проинтегрировать, то задача будет решена.

216. Естественные уравнения. В рассматриваемом случае естественные уравнения упрощаются. Возьмем прямоугольные оси. Пусть α — угол, образованный скоростью с осью Ox (рис. 138). Проектируя на нормаль, имеем

$$Y \cos = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Второе уравнение получится при проектировании на касательную. Однако проще исходить из найденного выше свойства, что проекция $\frac{dx}{dt}$ скорости равна некоторой постоянной a, откуда

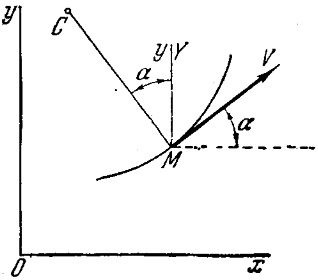


Рис. 138.

$$v \cos \alpha = a.$$

Исключая скорость из обоих уравнений, получим естественное уравнение траектории

$$Y\rho \cos^2 \alpha = \text{const.}$$

Если, например, положить $Y = \text{const.}$, то получится уравнение

$$\rho \cos^2 \alpha = k,$$

являющееся естественным уравнением параболы.

217. Движение тяжелой точки в пустоте. За начало координат примем начальное положение точки, ось y направим вертикально вверх, а ось x — по горизонтали в плоскости траектории. Уравнения движения будут

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

Обозначая через α угол, образованный начальной скоростью v_0 с осью Ox, получим из первого уравиения

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \tag{1}$$

$$x = v_0 t \cos \alpha. \tag{2}$$

Второе уравнение также интегрируется сразу и мы получаем

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha, \tag{1'}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \tag{2'}$$

Уравнения (1) и (1′) определяют скорость:

$$v^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2 = v_0^2 - 2gy. \tag{3}$$

Численное значение скорости в каждый момент времени получается таким, как если бы точка падала без начальной скорости из положения с ордиатой $v_0^2/2g$. Формула (3) непосредственно вытекает из теоремы кинетической энергии.

Исключая t из равенств (2) и (2′), получаем уравнение траектории

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Это — парабола с вертикальной осью, обращенная вогнутостью вниз (рис. 139).

Если угол α отрицательный, то, как видно из равенства (1′), $\frac{dy}{dt}$ будет все время отрицательным. Следовательно, y будет монотонно убывать, и движущаяся точка никогда не пройдет через вершину параболы.

Допустим теперь, что $\alpha > 0$. Тогда $\frac{dy}{dt}$, или, что то же, y', будет вначале положительным, и точка будет подниматься. Она будет подниматься

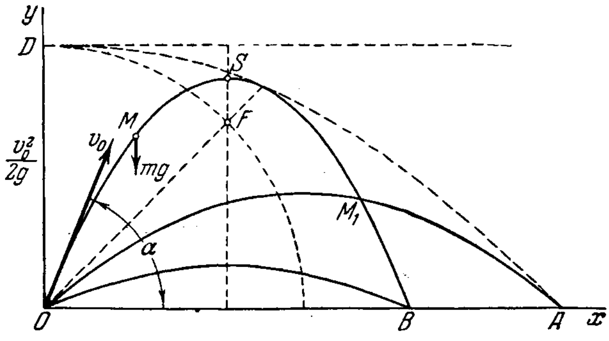


Рис. 139.

до тех пор, пока y' не обратится в нуль, что произойдет по истечении промежутка времени t_0, определяемого уравнением

$$-gt_0 + v_0 \sin \alpha = 0, \quad t_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Так как при этом высота точки достигнет своего максимума, то ее скорость на основании равенства (3) будет иметь минимум. Координаты наивысшей точки S параболы — ее вершины — будут

$$x_0 = v_0 t_0 \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

$$y_0 = -\frac{gt_0^2}{2} + v_0 t_0 \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

По истечении промежутка времени t_0 проекция y' скорости станет отрицательной и движущаяся точка начнет опускаться. На одной и той же высоте, как при движении вверх, так и при движении вниз, точка будет иметь одинаковую по абсолютному значению скорость. В частности, она пройдет через точку A, находящуюся на одной высоте с точкой O, со скоростью v_0. Горизонтальное расстояние OA равно удвоенной абсциссе x_0 вершины:

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Чтобы при заданной начальной скорости расстояние OA имело возможно большее значение, необходимо, чтобы $\sin 2\alpha$ имел максимум, т. е. чтобы угол α был равен 45°. Допустим, что требуется попасть в точку B оси Ox, абсцисса которой меньше, чем $\frac{v_0^2}{g}$. Наклон стрельбы определится формулой

$$\sin 2\alpha = \frac{g}{v_0^2} OB.$$

Отсюда видно, что имеются два решения, оба отличные от 45°. Следовательно, в точку B можно попасть по двум параболам. Легко убедиться, что по нижней параболе точка попадает в цель B за более короткий промежуток времени.

Можно определить геометрически положение параболы, соответствующей заданному углу α. Для этого заметим, что все параболы, которые получаются при изменении угла α, имеют общей директрисой прямую D с ординатой $v_0^2/2g$. В самом деле, параметр параболы, описываемой движущейся точкой, равен $p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$ и так как ордината вершины равна $y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, то уравнение директрисы будет

$$y = y_0 + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Следовательно, это — прямая D, находящаяся на высоте, которую достигнет движущаяся точка, если ее бросить вертикально вверх со скоростью v_0.

Этот результат становится наглядным, если исходить из уравнения (3) кинетической энергии. Так как $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, то это уравнение показывает, что в мнимых точках пересечения траектории с прямой $y = \frac{v_0^2}{2g}$ получается $\frac{dy}{dx} = \pm i$. Следовательно, эта прямая является директрисой параболы.

Установив это, допустим, что дана касательная к траектории в начале координат. Тогда фокус F будет находиться на такой прямой OF, что прямая Ov_0 будет биссектрисой угла FOD. Кроме того, он будет находиться на окружности радиуса OD, описанной из точки O, как из центра. Следовательно, он находится на пересечении этой окружности с прямой OF. Построение показывает, что геометрическим местом фокусов парабол является окружность с центром в точке O радиуса OD.

Поставим себе задачей найти угол, под которым нужно выпустить снаряд, чтобы попасть в заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ плоскости. Введя обозначение $\operatorname{tg} \alpha = u$ и подставив в уравнение траектории координаты x_1, y_1 заданной точки M_1, так как траектория должна пройти через эту точку, получим для определения u уравнение второй степени

$$y_1 = -\frac{g x_1^2}{2v_0^2}(1 + u^2) + u x_1. \tag{1}$$

Условием вещественности корней является выражение

$$\frac{v_0^2}{2g} - y_1 - \frac{g}{2v_0^2} x_1^2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Для его геометрического истолкования рассмотрим параболу, имеющую уравнение

$$\frac{v_0^2}{2g} - y - \frac{g}{2v_0^2}x^2 = 0. \tag{3}$$

Эта парабола имеет параметр v_0^2/g и вершину в точке $x=0$, $y=\frac{v_0^2}{2g}$, т. е. в точке D; следовательно, ее фокус находится в начале координат. Условие вещественности (2) выражает, что точка M_1 должна быть внутри этой параболы («параболы безопасности») или на ней. Если точка M_1 находится внутри параболы безопасности, то уравнение для u имеет два различных вещественных корня и тогда в точку M_1 можно попасть двумя различными способами, выпуская снаряд под двумя различными углами (рис. 139). Если точка M_1 находится на параболе безопасности, то уравнение для u имеет двойной корень и тогда в точку M_1 можно попасть только одним способом. В случае, когда уравнение для u имеет два различных корня, имеются две траектории, проходящие через M_1, соответствующие двум значениям α_1 и α_1' угла α. Время, затрачиваемое на достижение точки M_1 по обеим траекториям, равно соответственно

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos\alpha_1}, \quad t_1' = \frac{x_1}{v_0 \cos\alpha_1'}.$$

Более короткое время соответствует меньшему из углов α_1 и α_1'.

Парабола безопасности является огибающей траекторий, получающихся при изменении угла α, т. е. величины u. В самом деле, для нахождения огибающей кривых, представляемых уравнением (1), в котором u — переменный параметр, достаточно выразить, что это уравнение, рассматриваемое как уравнение относительно u, допускает двойной корень. Но это как раз то, что мы делали для нахождения параболы безопасности.

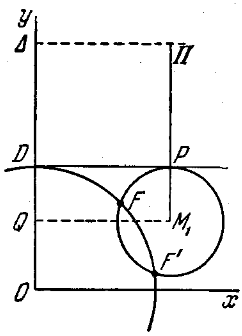


Рис. 140.

Эти результаты могут быть также легко получены и геометрически (рис. 140). Пусть нужно построить параболу, проходящую через две точки и имеющую заданное направление. Ее фокус, как мы видели, находится на окружности радиуса OD с центром в точке O. Он должен также находиться на окружности с центром в точке M_1, через которую должна проходить парабола, и радиусом, равным перпендикуляру M_1P, опущенному из точки M_1 на директрису D. Эти две окружности могут пересечься в двух точках: F и F'. Следовательно, могут быть две параболы. Чтобы эти окружности пересекались, необходимо, чтобы расстояние OM_1 между центрами было меньше суммы и больше разности радиусов. Последнее условие, очевидно, выполняется, так как $OM_1 > OQ$, а OQ есть разность радиусов. Следовательно, достаточно написать

$$OM_1 < OD + M_1P.$$

Проведем прямую Δ на расстоянии $2\,OD$ от оси x и продолжим M_1P до точки пересечения $П$ с этой прямой. Тогда условие, которое должно выполняться, примет вид

$$M_1O < M_1П.$$

Но геометрическое место точек, для которых $M_1O = M_1\Pi$, является параболой с фокусом в начале координат и директрисой Δ; это и будет парабола безопасности. Если точка M_1 находится внутри этой параболы, то в нее можно попасть двумя способами; если она находится на параболе, то имеется только одна траектория, проходящая через эту точку. Для такой точки M_1 фокус траектории и фокус параболы безопасности лежат на одной прямой с точкой M_1. Элементарное построение, определяющее касательную в точке M_1, показывает, что эта касательная является одной и той же для обеих парабол. Отсюда вытекает, что парабола безопасности является огибающей всех траекторий.

218. Определение параллельной силы по заданной траектории. Мы исследовали задачу, заключавшуюся в том, что по заданной силе, параллельной оси Oy, нужно было найти движение, которое эта сила сообщала материальной точке. Можно задаться обратной задачей: зная плоское движение, при котором проекция точки на ось x движется по этой оси равномерно, найти закон сил, параллельных оси y, которые могут вызвать это движение.

Зададимся траекторией $y = f(x)$, по которой движется точка под действием силы, параллельной оси Oy. По предположению, $x = at + b$ и уравнение траектории определит y в функции t, если заменить в нем x его значением. Тогда получим

$$\frac{dy}{dt} = af'(x), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2f''(x).$$

Следовательно, закон силы будет такой:

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2} = ma^2f''(x).$$

Полученное выражение силы можно преобразовать при помощи уравнения траектории. Из этого уравнения можно, например, определить x в функции y и выразить силу через эту одну переменную, но можно также заменить часть значений x через y, а другую часть — через t или $\frac{dy}{dt}$; в общем виде закон изменения силы можно выразить так:

$$Y = ma^2f''(x) + \Psi\left(x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ t\right)[y - f(x)],$$

где Ψ — произвольная функция. Эта сила действительно обращается в $ma^2f''(x)$ на заданной траектории. Если, исходя из одного из этих законов для силы, определить вызванное ею движение, то при подходящем частном выборе начальных условий получится заданная траектория $y = f(x)$.

Возьмем, например, окружность

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Применяя вышесказанное, получим законы

$$Y = \frac{\mu}{y^3}, \quad Y = \frac{\mu}{(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для этих двух законов получатся два совершенно различных семейства конических сечений, но каждое из них содержит окружность $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

219. Криволинейное движение тяжелого тела в сопротивляющейся среде. Когда снаряд находится в движении, его центр тяжести движется так, как если бы в нем была сосредоточена вся масса тела и к нему были приложены все действующие на снаряд внешние силы.

В случае, которым мы занимаемся, на центр тяжести действуют две силы: вес снаряда и сопротивление R среды, которое является равнодействующей поверхностных сил (давлений и трений), перенесенных параллельно им самим в центр тяжести. Эти поверхностные силы, взятые в совокупности, могут, вообще говоря, приводиться к результирующей силе R, приложенной в центре тяжести, и к паре. Если форма снаряда произвольна, то о направлении этой равнодействующей ничего не известно, и эта сила может вывести центр тяжести из вертикальной плоскости, в которой он выпущен в момент $t=0$. Но если снаряд является сферическим и он не вращается, то равнодействующая лежит в вертикальной плоскости, содержащей скорость центра тяжести G и вследствие симметрии траектория этой точки является плоской. Для возможно большего упрощения мы допустим, кроме того, что эта равнодействующая является силой R, направленной в сторону, противоположную скорости v *центра тяжести*. Сила R будет возрастающей функцией скорости v. Мы назовем эту силу R *сопротивлением* воздуха.

Если допустить, что сопротивление R лежит в вертикальной плоскости, проходящей через центр тяжести, то можно доказать аналитически, что траектория плоская. В самом деле, отнесем движение к трем прямоугольным осям Ox, Oy, Oz, причем ось Oz направлена вертикально вверх. Если через R_x, R_y, R_z обозначить проекции силы R, то уравнения движения будут:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=R_x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=R_y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=R_z-mg.$$

Из первых двух выводим

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{R_x}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{R_y}.$$

Но так как предположено, что вектор R прямо противоположен v, то проекции R_x и R_y пропорциональны производным $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$. Вследствие этого предыдущее соотношение принимает вид

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}},$$

откуда, интегрируя, найдем

$$\ln\frac{dy}{dt}=\ln C\frac{dx}{dt}.$$

Потенцируя и снова интегрируя, получим

$$y = Cx + C'.$$

Отсюда следует, что кривая является плоской и ее плоскость вертикальна. Это — плоскость горизонтальной проекции начальной скорости.

Примем эту плоскость за плоскость xy, начальное положение движущейся точки за начало координат, ось Oy направим вертикально вверх, а ось Ox по отношению к Oy направим в ту же сторону, в какую направлена начальная скорость.

Будем исходить из естественных уравнений движения. Обозначим через s дугу OM траектории, через α — угол скорости v с осью Ox и через ρ — радиус кривизны MC (рис. 141). Действующие на точку силы суть вес mg и сопротивление R. Их равнодействующая всегда расположена относительно касательной R со стороны отрицательных y. Но так как эта сила всегда направлена в сторону вогнутости, то траектория направлена вогнутостью в сторону отрицательных y. Следовательно, угол α будет все время уменьшаться. Его начальное значение равно известной величине α_0. В наивысшей точке траектории он обращается в нуль и далее продолжает уменьшаться. Мы увидим в дальнейшем, что его предельное значение равно $-\pi/2$.

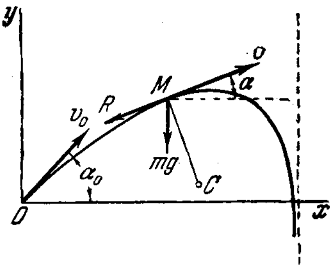


Рис. 141.

Проектируя силы на касательную Mv, получим (п. 200)

$$m\frac{dv}{dt} = F_t = -mg\sin\alpha - R.$$

В этом уравнении R есть функция скорости, которую мы напишем так:

$$R = mg\varphi(v).$$

Поэтому

$$\frac{dv}{dt} = -g[\sin\alpha + \varphi(v)]. \tag{1}$$

Проектируя теперь на нормаль, получим

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg\cos\alpha.$$

Но

$$\rho = -\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\alpha} = -v\frac{dt}{d\alpha}.$$

Здесь нужно взять знак минус, так как с возрастанием s угол α убывает, а ρ есть абсолютное значение радиуса кривизны. Внося это значение в предыдущее уравнение, получим

$$-v\frac{d\alpha}{dt}=g\cos\alpha. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) позволяют найти t и v в функции α. Исключим из них dt, деля их почленно друг на друга; получим уравнение

$$\frac{dv}{v\,d\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\frac{\varphi(v)}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Это — уравнение первого порядка. Отсюда находим v в функции α:

$$v=\psi(\alpha).$$

После этого из уравнения (2) получим

$$t=-\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\psi(\alpha)}{\cos\alpha}\,d\alpha. \tag{4}$$

Можно выразить также x и y в функции α при помощи новых квадратур. В самом деле, имеем:

$$\left.\begin{aligned} dx&=v\cos\alpha\,dt, & x&=-\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}[\psi(\alpha)]^2\,d\alpha,\\ dy&=v\sin\alpha\,dt, & y&=-\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}[\psi(\alpha)]^2\operatorname{tg}\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, если удастся найти функцию $\psi(\alpha)$, то задача приведется к простым квадратурам.

Выражение

$$\frac{dt}{d\alpha}=-\frac{1}{g}\frac{v}{\cos\alpha},$$

определяющее dt, показывает, что когда α больше, чем $-\pi/2$, производная $\frac{dt}{d\alpha}$ отрицательна и с уменьшением α время действительно увеличивается. То же самое справедливо и для x, так как $dx=v\cos\alpha\,dt$. Что касается y, то он сначала увеличивается, пока α не достигает значения $\alpha=0$, после чего $\frac{dy}{dt}$ меняет знак, y уменьшается и движущаяся точка опускается. Для нахождения значений x, y, t, соответствующих наивысшей точке, нужно в интегралах положить $\alpha=0$.

Годограф. Уравнение $v=\psi(\alpha)$ является уравнением в полярных координатах годографа скорости точки, так как v есть радиус-вектор точки годографа, а α — угол, который он образует с осью Ox.

Естественное уравнение. Если функция ψ известна, то легко найти естественное уравнение кривой. Действительно, мы нашли, что

$$\frac{v^2}{\rho} = g\cos\alpha,$$

следовательно,

$$\rho = \frac{v^2}{g\cos\alpha} = \frac{[\psi(\alpha)]^2}{g\cos\alpha}.$$

Случай интегрируемости Лежандра. Мы исследуем со всеми подробностями случай, когда, по предположению, сопротивление определяется формулой

$$\varphi(v) = a + bv^n,$$

где все три постоянные a, b, n положительны. Мы будем предполагать, что *а меньше единицы*, так как в противном случае, если тело отпустить без начальной скорости, его вес будет меньше силы сопротивления mga, и тело не будет падать.

Для рассматриваемого движения уравнение (3) примет вид

$$\frac{dv}{v\,d\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{a+bv^n}{\cos\alpha}.$$

Разделив обе части на $-v_n/n$ и приняв за новую переменную $1/v_n$, получим

$$\frac{d\left(\frac{1}{v^n}\right)}{d\alpha} + \frac{n}{v^n}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{a}{\cos\alpha}\right) + \frac{nb}{\cos\alpha} = 0.$$

Для интегрирования этого линейного уравнения положим

$$\frac{1}{v^n} = pq,$$

после чего получим

$$p\frac{dq}{d\alpha} + q\frac{dp}{d\alpha} + npq\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{a}{\cos\alpha}\right) + \frac{nb}{\cos\alpha} = 0.$$

Выберем q таким образом, чтобы обратить в нуль коэффициент при p; получим уравнение

$$\frac{dq}{q} = -n\operatorname{tg}\alpha\,d\alpha - \frac{na\,d\alpha}{\cos\alpha},$$

допускающее частный интеграл

$$\ln q = n\ln\cos\alpha - na\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$q = \cos^n\alpha\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-na}.$$

При этом значении q нам останется для определения p проинтегрировать уравнение

$$\frac{dp}{d\alpha} = -\frac{nb}{q\cos\alpha}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от α_0 до α и обозначая через q_0 значение q при $\alpha = \alpha_0$ и через v_0 начальную скорость, получим

$$p = \frac{1}{qv^n} = C - nb \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{q \cos \alpha},$$

где постоянная C имеет значение $\frac{1}{q_0 v_0^n}$, в чем убеждаемся, положив $\alpha = \alpha_0$. Подставив сюда найденное выше значение для функции q, получим v в функции α. После этого найдем x, y, t по формулам (4) и (5).

Покажем, что если α убывает до $-\pi/2$, то время неограниченно увеличивается, и y становится бесконечным, но отрицательным, тогда как v и x оба имеют определенные пределы, так что кривая имеет вертикальную асимптоту на конечном расстоянии и движение стремится стать прямолинейным и равномерным.

В самом деле, выражение, определяющее величину $\frac{1}{qv^n}$ после умножения на q, может быть написано следующим образом:

$$\frac{1}{v^n} = \frac{q}{q_0 v_0^n} - nbq \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{q \cos \alpha}.$$

Когда α стремится к $-\frac{\pi}{2}$, q стремится к нулю, так как a меньше 1; с другой стороны, интеграл в правой части обращается при этом в бесконечность. Так как член $\frac{q}{q_0 v_0^n}$ стремится к нулю, то достаточно найти предел второго члена правой части, который может быть написан в виде отношения

$$\frac{-nb \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{q \cos \alpha}}{\frac{1}{q}},$$

принимающего вид $\frac{\infty}{\infty}$. Отношение производных по α равно

$$\frac{nbq\, d\alpha}{\cos \alpha\, dq},$$

или, заменяя $\frac{q\, d\alpha}{dq}$ его вычисленным выше значением, получим

$$\frac{b}{-\sin \alpha - a}.$$

Полагая, наконец, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, найдем, что $1/v^n$ стремится к пределу $\frac{b}{1-a}$, а v — к пределу

$$\lambda = \left(\frac{1-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Интеграл, определяющий x [формула (5)],

$$x = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2\,d\alpha,$$

остается конечным, когда α стремится к $-\pi/2$. Действительно, так как v стремится к конечному пределу λ, то подынтегральное выражение остается конечным и поэтому конечным будет x, который стремится к значению

$$x_1 = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{-\frac{\pi}{2}} v^2\,d\alpha.$$

С другой стороны, t становится бесконечным при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Действительно,

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v\,d\alpha}{\cos\alpha}$$

и подынтегральное выражение обращается в бесконечность при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ и притом таким образом, что $\frac{v}{\cos\alpha}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ стремится к определенному пределу λ. Следовательно, этот интеграл ведет себя вблизи $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, как

$$\int \frac{\lambda\,d\alpha}{\alpha + \frac{\pi}{2}},$$

т. е. обращается в бесконечность. По той же причине выражение

$$y = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \operatorname{tg}\alpha\,d\alpha$$

неограниченно возрастает, когда α стремится к $-\pi/2$. Таким образом, высказанные выше предложения установлены.

Найденной предел λ для скорости, так же как и в случае прямолинейного нисходящего движения, является корнем уравнения

$$\varphi(\lambda) = 1.$$

Примечание. Если в каком-нибудь определенном частном случае желательно выполнить квадратуры или по крайней мере приближенно вычислить значения v, x, y, t вблизи $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, то проще всего положить

$$u = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{du}{u} = \frac{d\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Переменная u, вначале положительная, равна 1 при $\alpha = 0$ и стремится к нулю, когда α стремится к $-\pi/2$.

Значение q принимает вид

$$q = \frac{2^n u^{n-na}}{(1+u^2)^n} = \frac{2^n u^{n'}}{(1+u^2)^n},$$

где показатель n' положителен, так как a меньше 1. Подставляя это значение q в выражение для $\frac{1}{v^n}$, найдем

$$\frac{1}{v^n} = \frac{2^n u^{n'}}{(1+u^2)^n}\left[C - \frac{nb}{2^n}\int_{u_0}^{u} \frac{(1+u^2)^n}{u^{n'+1}}\,du\right].$$

Когда n целое, квадратура может быть выполнена. Это выражение легко поддается разложению в ряд.

Замечание по поводу интегрирования уравнения (3). Мы видели, что задача приводится к квадратурам, если из уравнения (3) удается определить v в функции α. Поэтому представляет интерес исследовать это уравнение и указать случаи интегрируемости. Это сделал Сиаччи в двух статьях в Comptes Rendus, т. CXXXII и CXXXIII, 1901. С другой стороны, для выполнения интегрирования можно привести уравнение (3) при помощи подстановки*)

$$v[\sin\alpha + \varphi(v)] = \frac{1}{z}$$

к уравнению

$$\frac{dz}{dv} = v[\varphi^2(v) - 1]z^3 - [2\varphi(v) + v\varphi'(v)]z^2,$$

т. е. к виду

$$\frac{dz}{dx} = c_0z^3 + c_1z^2 + c_2z + c_3,$$

исследованному многими авторами (Рожер Лиувилль, Comptes Rendus, 6 сентября, 1886; Аппель, Sur les invariants de quelques équations différentielles, Journal de Jordan, т. 5, 1891; Пенлёве, Annales de l'École Normale supérieure, т. VIII, 1891; Эллиот, там же, т. VII, 1890). Следует отметить также работы Драха, определившего все виды функции $\varphi(v)$, при которых уравнение (3) интегрируется в квадратурах (Comptes Rendus, 1914).

220. Движение легкого вращающегося шара в воздухе. Карьер исследовал экспериментально траектории в воздухе легких однородных сферических ядер, вращающихся вокруг оси, перпендикулярной плоскости траектории центра. Он установил вид различных траекторий в зависимости от величины и направления вращения. Результаты даны в статье в Journal de Physique théorique et appliquée, т. V, 1916. Существенным является то, что при постоянном вращении получаются траектории, которые вместо вертикальных асимптот, как это было выше, имеют асимптоты, наклоненные в ту или иную сторону, в зависимости от направления вращения. Причину этих отклонений следует искать главным образом в трении о воздух поверхности ядра. Это трение вызывает элементарные действия, которые, будучи перенесены параллельно самим себе в центр тяжести, имеют равнодействующую, зависящую от направления и скорости вращения. Вид траекторий,

---

*) См. Аппель, Archiv der Mathematik und Physik, т. 5, 1903.

найденный Карьером, можно объяснить, если принять следующую гипотезу о полном эффекте сопротивления и трения воздуха *):

Движение центра тяжести будет таким, как если бы точка с массой m, равной всей массе ядра, находилась под действием своего веса mg и сопротивления $R = mg\varphi(v)$, возрастающего вместе со скоростью v точки, но не направленного в сторону, противоположную скорости, *а образующего с вектором, противоположным скорости v, острый угол ψ, положительный или отрицательный, в зависимости от направления угловой скорости вращения ω. Угол ψ возрастает вместе с ω и обращается в нуль при $\omega = 0$* **).

Эта гипотеза указывает на то, что сопротивление R, которое при $\omega = 0$ прямо противоположно скорости v, отклоняется вследствие вращения в сторону, противоположную направлению вращения, на острый угол ψ, являющийся возрастающей функцией угловой скорости ω и обращающийся в нуль при $\omega = 0$. На малом участке траектории скорость ω и угол ψ остаются приблизительно постоянными.

Обозначая, как и раньше, через α угол между v и Ox и приняв те же оси, что и на рис. 141, получим при $R = mg\varphi(v)$ уравнения движения:

$$\frac{d(v\cos\alpha)}{dt} = -g\varphi(v)\cos(\alpha+\psi), \qquad \frac{d(v\sin\alpha)}{dt} = -g\varphi(v)\sin(\alpha+\psi) - g,$$

откуда, исключая dt, получим дифференциальное уравнение годографа

$$[\varphi(v)\sin\psi - \cos\alpha]\,dv = v\,[\varphi(v)\cos\psi - \sin\alpha]\,d\alpha,$$

определяющее v в функции α, если ψ рассматривать как постоянную. Это уравнение при $\psi = 0$ переходит в классическое уравнение.

В частном случае, когда сила R пропорциональна скорости v,

$$R = mg\frac{v}{\lambda},$$

уравнения движения приводятся к линейным уравнениям, определяющим координаты x и y в функции t.

Случай, когда мгновенное вращение шара имеет произвольное направление. В предыдущих экспериментах ядро вращалось вокруг оси, перпендикулярной плоскости траектории. Производились также эксперименты, в которых мгновенная ось вращения имела произвольное, но известное направление. В этом случае траектория была, вообще говоря, пространственной кривой. Предполагается, что та же самая гипотеза относительно полного эффекта сопротивления среды может быть сделана и для такого рода движений. *Сопротивление $R = mg\varphi(v)$ вместо того, чтобы быть противоположным вектору скорости $\vec{v}$ центра тяжести G, имеет направление, которое находится поворотом вектора $-\vec{v}$ на острый угол ψ вокруг оси $G\omega$ мгновенного вращения шара в сторону, противоположную этому вращению; этот угол ψ является возрастающей функцией от мгновенной угловой скорости ω* и *обращает в нуль при $\omega = 0$*. Таким образом, если ось мгновенного вращения касательна к траектории или угловая скорость равна нулю, то сопротивление будет противоположно скорости.

По затронутым здесь вопросам можно указать на статью лорда Рэлея «On the irregular flight ef a tennis-ball» (Messenger of mathematics, n°. 73, 1877) и на статью Гринхилла (Messenger of mathematics, т. IX, 1880).

---

*) Аппель, Journal de Physique théorique et appliquée, т. VII, 1917 стр. 5 и 49.

**) Этот и следующий результаты являются прямым следствием теоремы Н. Е. Жуковского о подъемной силе. (*Прим. перев.*)

221. Движение наэлектризованной частицы в наложенных друг на друга электрическом и магнитном полях. Рассмотрим материальную частицу M массы m, имеющую заряд ε и движущуюся в пространстве со скоростью v.

Представим себе сначала неподвижные электрические заряды на неподвижных телах, создающие электрическое поле, в котором электрическая сила, действующая на электрический заряд $+1$, помещенный в точке (x, y, z), имеет проекции P, Q, R, определяемые формулами

$$P = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

где V — потенциал электрического поля. Тогда сила, действующая на массу m, несущую заряд ε, будет иметь проекции εP, εQ, εR.

Допустим, что, кроме того, имеется магнитное поле, в котором составляющие вектора напряженности поля H равны H_x, H_y, H_z (направление H считается совпадающим с направлением силы, действующей на *положительный* полюс магнита). Тогда сила F, с которой это поле действует на движущуюся частицу, определяется следующим законом: пусть x, y, z — координаты частицы M; $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ — проекции ее скорости v; c — скорость света; сила F перпендикулярна к плоскости векторов H и v и равна $\frac{Hv\varepsilon}{c}\sin(H, v)$. Если заряд ε положительный, то сила F направлена в сторону, откуда кратчайшее совмещение вектора $\vec{H}$ с $\vec{v}$ видно против хода часовой стрелки (рис. 142); следовательно,

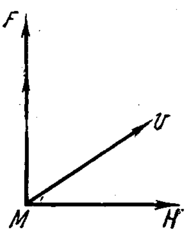


Рис. 142.

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{c}(\vec{H} \times \vec{v}).$$

Если оси координат расположены обычным образом, то проекции силы F будут

$$F_x = \varepsilon\left(Y\frac{dz}{dt} - Z\frac{dy}{dt}\right),$$

и две аналогичные формулы получатся круговой перестановкой букв. Следовательно, уравнения движения частицы будут

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon P + \varepsilon\left(Y\frac{dz}{dt} - Z\frac{dy}{dt}\right), \\ m\frac{dy^2}{dt^2} &= \varepsilon Q + \varepsilon\left(Z\frac{dx}{dt} - X\frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon R + \varepsilon\left(X\frac{dy}{dt} - Y\frac{dx}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если электрическое и магнитное поля произвольны, то об интегрировании этих уравнений сказать ничего нельзя, за исключением того, что непосредственно следует из теоремы кинетической энергии. Эта теорема дает

$$d\frac{mv^2}{2} = \varepsilon(P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

так как работа силы F равна, очевидно, нулю. Следовательно, имеется первый интеграл

$$\frac{mv^2}{2} = -\varepsilon V(x, y, z) + h,$$

где V — потенциал электрического поля. В частном случае, если электрическое поле равно нулю, то скорость постоянна:

$$v^2 = v_0^2.$$

Тогда можно исключить время, вводя дугу траектории s соотношением

$$ds = v_0\, dt.$$

Первый частный случай. Электрическое поле равно нулю, магнитное поле создается единственным магнитным полюсом, помещенным в начале O.

При этих условиях сила магнитного поля X, Y, Z имеет силовую функцию вида $U = \frac{k}{r}$, где r — расстояние $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Тогда уравнения движения, если в них положить

$$dt = \frac{ds}{v_0}, \quad \mu = \frac{mv_0}{\varepsilon k},$$

будут

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{1}{r^3}\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right), \\ \mu \frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{1}{r^3}\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right), \\ \mu \frac{d^2z}{ds^2} &= \frac{1}{r^3}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Прежде всего очевидно, что траектория C является геодезической линией конуса с вершиной в точке O и направляющей C. Действительно, так как скорость постоянна, то сила F направлена по главной нормали к C и, с другой стороны, сила F в точке M перпендикулярна образующей OM и скорости v, т. е. нормальна к рассматриваемому конусу. Но при помощи анализа, принадлежащего Дарбу (примечание VII к т. I «Механики» Депейру), можно показать, что этот конус будет круговым. Из уравнений (2), если сделать над ними преобразования, приводящие к теореме моментов относительно оси Oz, получим

$$\mu\left(x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2}\right) = \frac{z}{r^3}\left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds}\right) - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3}\frac{dz}{ds} =$$

$$= \frac{z}{r^2}\frac{dr}{ds} - \frac{1}{r}\frac{dz}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{z}{r}\right).$$

Следовательно, интегрируя, получим

$$\mu\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{z}{r} + C,$$

и точно так же

$$\mu\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{x}{r} + A,$$

$$\mu\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{y}{r} + B,$$

где A, B, C — постоянные. Если эти уравнения умножить соответственно на z, x, y и сложить, то получится

$$0 = -r + Ax + By + Cz, \tag{3}$$

т. е. уравнение конуса, на котором лежит траектория. Это — конус вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости P, имеющей уравнение

$$Ax + By + Cz = 0,$$

так как уравнение (3) показывает, что конус является геометрическим местом точек, для которых отношение расстояний до точки O к расстояниям до плоскости P, проходящей через точку O, постоянно.

Итак, траектория является геодезической линией кругового конуса с вершиной в точке O. Этот результат, отмеченный Пуанкаре, объясняет интересное явление затягивания катодных лучей магнитным полюсом, открытое в 1895 г. Биркеляндом (Archives des Sciences physiques et naturelles, т. VI, 1898, стр. 205).

Второй частный случай. Постоянные электрическое и магнитное поля. Интегрирование выполняется легко, когда оба поля постоянны. Возьмем оси так, чтобы ось Oz была параллельна силе X, Y, Z магнитного поля и чтобы плоскость zOx содержала постоянную силу P, Q, R электрического поля.

Тогда X, Y, Q будут равны нулю и общие уравнения движения (1) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon P - \varepsilon Z\frac{dy}{dt}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \qquad + \varepsilon Z\frac{dx}{dt}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon R, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где коэффициенты постоянны. Возьмем за начало координат начальное положение движущейся точки в момент $t = 0$. Обозначая через p, r и ω постоянные $\frac{\varepsilon P}{m}$, $\frac{\varepsilon R}{m}$, $-\frac{\varepsilon Z}{m}$, получим после первого интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= pt + \omega y + a, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega x + b, \\ \frac{dz}{dt} &= rt + c, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где a, b, c — постоянные интегрирования, равные проекциям начальной скорости на оси. Далее исключение y приводит к линейному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\left(x - \frac{b}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}\right) = 0,$$

в котором за неизвестную можно принять величину $x - \frac{b}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}$ и из которого получается

$$x = \frac{b}{\omega} + \frac{p}{\omega^2} + A\sin(\omega t + \alpha), \tag{6}$$

где A и α — новые постоянные. После этого из первого уравнения (5) имеем

$$y = -\frac{a}{\omega} - \frac{pt}{\omega} + A\cos(\omega t + \alpha). \tag{6'}$$

Постоянные A и α таковы, что x и y обращаются в нуль при $t = 0$. Интегрируя третье из уравнений (5), получим

$$z = \frac{1}{2} rt^2 + ct.$$

Таким образом мы получили уравнения движения в конечной форме.

Движение можно рассматривать как составленное из равномерного кругового движения и параболического движения с постоянным ускорением, параллельным оси Oz. В самом деле, если положить

$$x_1 = \frac{b}{\omega} + \frac{p}{\omega^2}, \quad y_1 = -\frac{a}{\omega} - \frac{p}{\omega} t, \quad z_1 = \frac{1}{2} rt^2 + ct, \tag{7}$$

$$x_2 = A\sin(\omega t + \alpha), \quad y_2 = A\cos(\omega t + \alpha), \quad z_2 = 0, \tag{8}$$

то можно написать

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2.$$

Точка M_1 с координатами x_1, y_1, z_1 совершает параболическое движение в плоскости, параллельной плоскости zOy, с постоянным ускорением, равным r и параллельным оси Oz. Точка M_2 с координатами x_2, y_2, z_2 описывает в плоскости xOy окружность C_0 радиуса A с центром в точке O, с угловой скоростью ω. Положение точки к моменту времени t может быть получено путем построения результирующей векторов OM_1 и OM_2, т. е. путем проведения через точку M_1 вектора M_1M, равного и параллельного вектору OM_2 (рис. 143).

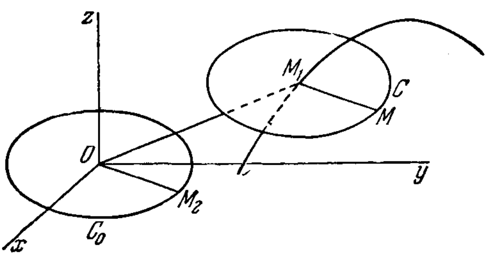


Рис. 143.

Движение точки M можно тогда представить следующим образом: круг C постоянного радиуса A с центром в точке M_1, параллельный плоскости xy, совершает поступательное параболическое движение с постоянным ускорением, а точка M равномерно описывает окружность этого круга по тому же закону, по которому точка M_2 описывает окружность C_0.

Изменяя постоянные p, r, ω или P, R, Z, мы получим частные случаи, приводящие к изящным результатам. Если $R = 0$, т. е. если электрическое поле перпендикулярно магнитному, то $r = 0$ и точка M_1 совершает прямолинейное равномерное движение. Получающаяся в общем случае парабола заменяется сейчас прямой и в зависимости от начальных условий можно в частных случаях получить в качестве траектории винтовую линию, циклоиду и т. д.

Третий частный случай. Исследования Штёрмера о полярных сияниях. На основании идей, высказанных в 1896 г. Биркеландом и в 1900 г. Аррениусом, некоторые физики пришли к мысли, что полярные сияния и соответствующие магнитные возмущения вызываются электрическими частицами (катодными или сходными с ними лучами), приходящими из пространства и движущимися по траекториям, определяемым действием земного магнетизма.

Задача вычисления этих траекторий упрощается, если предположить, что частицы очень далеки от Земли, примерно на расстоянии более миллиона километров. Тогда можно рассматривать магнитное поле Земли как образованное одним элементарным магнитом, помещенным в центре Земли, ось которого совпадает с земной осью. Именно при таких упрощающих предположениях задача рассматривалась Карлом Штёрмером в статье, помещенной в Archives des Sciences physiques et naturelles de Genève, т. XXIV, 1907. Штёрмеру удалось получить важные результаты без интегрирования уравнений задачи. Ему, в частности, удалось объяснить некоторые существенные моменты опытов Биркелянда и более новых опытов Вилляра. Недостаток места не позволяет нам изложить здесь эту теорию, требующую длинных вычислений.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти прямолинейное движение точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния: $X = -\frac{m\mu}{x^3}$.

Ответ.

$$x^2 = -\frac{\mu t^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)^2.$$

2. Найти прямолинейное движение точки между двумя притягивающими центрами, например центрами Земли и Луны, предполагаемыми неподвижными и притягивающими с силами, обратно пропорциональными квадрату расстояния.

Ответ. Обозначая расстояние между обоими неподвижными центрами через a и принимая один из них за начало координат, имеем

$$X = -\frac{mk^2}{x^2} + \frac{mk'^2}{(a-x)^2}.$$

В рассматриваемом случае между обоими центрами имеется положение неустойчивого равновесия E. Если точка не находится в этом положении и ей сообщается начальная скорость в направлении этого положения, достаточно большая для того, чтобы она прошла через это положение, то она упадет во второй притягивающий центр. Если скорость точки обратится в нуль до того, как она достигнет положения E, то она упадет в первый притягивающий центр. Если, наконец, алгебраическое значение скорости обращается в нуль в точке E, то движущаяся точка неограниченно приближается к E со скоростью, стремящейся к нулю, но никогда этого положения не достигнет.

3. Пусть $x = f(t, x_0, v_0)$ — уравнение движения, вызванного силой $X = \varphi(x)$, зависящей только от положения точки, причем x_0 и v_0 — начальные абсцисса и скорость. Доказать, что другая точка с той же массой, абсцисса которой равна

$$x_1 = f\left(\alpha t, x_0, \frac{v_0}{\alpha}\right),$$

где α — постоянная, движется под действием силы $X_1 = \alpha^2 X$, если начальная абсцисса и скорость равны x_0 и v_0.

В частности, если $\alpha = \sqrt{-1}$, то точка, движение которой задается формулой

$$x_1 = f(t\sqrt{-1}, x_0, -v_0\sqrt{-1}),$$

движется под действием силы $X_1 = -X$ (Comptes Rendus, 30 декабря 1878). Применить к случаям

$$X = g, \quad X = -\mu x, \quad X = -\frac{\mu}{x^2}.$$

4. Показать, что если закон таутохронного движения входит в формулу Лагранжа, то при присоединении к действующей силе сопротивления, пропорционального скорости, по-прежнему получится таутохронное движение.

5. В прямолинейном движении выразить скорость v в функции x и x_0 так, чтобы соответствующее движение было таутохронным.

Ответ. Приняв точку таутохронности за начало, предположим, что скорость написана в следующей форме:

$$v = \frac{1}{\varphi\left(x_0, \dfrac{x}{x_0}\right)} = \frac{1}{\varphi(x_0, \xi)},$$

где ξ обозначает отношение $\dfrac{x}{x_0}$. Это выражение v должно, по предположению, обращаться в нуль при $x = x_0$, т. е. при $\xi = 1$. Время, затрачиваемое точкой для достижения начала, равно

$$T = -\int_0^x \varphi(x_0, \xi)\,dx = -\int_0^1 x_0\varphi(x_0, \xi)\,d\xi,$$

где x заменен через $x_0\xi$. Так как интеграл T не зависит от x_0, то его производная

$$\frac{\partial T}{\partial x_0} = -\int_0^1 \frac{\partial\,[x_0\varphi(x_0, \xi)]}{\partial x_0}\,d\xi$$

должна равняться нулю. Обозначим через $\theta(x_0, \xi)$ интеграл

$$\int_0^\xi \frac{\partial\,[x_0\varphi(x_0, \xi)]}{\partial x_0}\,d\xi,$$

так что

$$\frac{\partial\,[x_0\varphi(x_0, \xi)]}{\partial x_0} = \frac{\partial\theta(x_0, \xi)}{\partial\xi}. \tag{1}$$

Функция θ обращается в нуль при $\xi = 0$, и условие таутохронности заключается в том, что θ должна обращаться в нуль также и при $\xi = 1$. Наоборот, если θ есть произвольная функция от x_0 и ξ, обращающаяся в нуль при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, то интеграл $\dfrac{\partial T}{\partial x_0}$ равен нулю. Интегрируя уравнение (1) по x_0 и рассматривая ξ как переменную, не зависящую от x_0, получим

$$x_0\varphi(x_0, \xi) = \int_a^{x_0} \frac{\partial\theta(x_0, \xi)}{\partial\xi}\,dx_0 + \lambda(\xi),$$

где $\lambda(\xi)$ — произвольная функция от ξ, а a — произвольная постоянная. Следовательно, для v получается выражение

$$v = \frac{x_0}{\displaystyle\int_a^{x_0} \frac{\partial\theta(x_0, \xi)}{\partial\xi}\,dx_0 + \lambda(\xi)},$$

где θ — произвольная функция от x_0 и ξ, подчиненная единственному условию, что она обращается в нуль при $\xi = 0$ и $\xi = 1$. После квадратуры надо заменить ξ через x/x_0. Так как скорость должна обращаться в нуль при $\xi = 1$ и должна оставаться конечной, то требуется, кроме того, чтобы знаменатель обращался в бесконечность при $\xi = 1$ и был отличен от нуля при изменении ξ от 1 до 0.

После того как v будет найдено в функции x и x_0, для нахождения закона силы достаточно будет исключить x_0 из v и из $\frac{dv}{dx}$, что можно будет сделать лишь при определенном выборе функции $\theta(x_0, \xi)$. Таким путем получим $\frac{dv}{dx} = f(x, v)$, и для силы получим

$$F = mv\frac{dv}{dx} = mv\, f(x, v).$$

Например, если θ тождественно равно нулю, то мы опять придем к случаю, когда дифференциальное уравнение движения однородно относительно x и v. Бертран уже давно заметил, что общая формула прямолинейного таутохронного движения должна содержать произвольную функцию от двух переменных.

6. *Таутохронные движения* (метод Гишара). Рассмотрим произвольные таутохронные движения. Движущаяся точка выходит из положения x_0 и приходит в начало координат за промежуток времени, который мы можем принять равным единице. Скорость v_0 точки в начале координат изменяется с изменением x_0. Возьмем обратное движение; точка выходит из начала в момент $t = 0$ с переменной начальной скоростью v_0; она достигает положения x_0, изменяющегося вместе с v_0 к моменту времени $t = 1$. Для этого движения имеем

$$v = (1 - t)\, f(t, v_0), \tag{1}$$

где f обращается в v_0 при $t = 0$; более того, f положительно при всяком v_0 и при t, заключенном между 0 и 1. Отсюда, обозначая через γ ускорение, получим:

$$x = \int_0^t (1 - t)\, f(t, v_0)\, dt, \tag{2}$$

$$\gamma = (1 - t)\, f'_t\big(t, v_0\big) - f\big(t, v_0\big). \tag{3}$$

Из формул (1) и (2) находим t и v_0 и подставляем в формулу (3); тогда получим $\gamma = \Pi(x, v)$. Полагая, наконец, $F = -m\Pi(x, v)$, получим таутохронное движение.

7. Найти силы, под действием которых происходят следующие движения:

$$x = x_0 \cos t + v_0 \sin t,$$
$$x = x_0 \cos t + v_0 \sin t + gt^2,$$
$$x^2 = -\frac{\mu t^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)^2.$$

8. Точка, совершающая прямолинейное движение, находится под действием только силы сопротивления $R = m\varphi(v)$, являющейся непрерывной функцией скорости v, существенно положительной и возрастающей вместе с v. Доказать: 1) если $\varphi(0)$ отлично от нуля, то точка в течение конечного промежутка времени, описав конечный путь, остановится; 2) если $\varphi(0)$ равно нулю и притом так, что произведение $v^{-n}\varphi(v)$ стремится к отличному от нуля пределу, когда v стремится к нулю, то точка останавливается, если n меньше единицы, и продолжает неограниченно двигаться со стремящейся к нулю скоростью, когда n равно или больше 1; в этом втором случае путь, пройденный точкой, будет конечным, если n меньше 2, и бесконечным при n, равном или большем 2.

9. Найти движение точки, притягиваемой плоскостью пропорционально расстоянию.

10. Определить движение точки, находящейся под действием силы, параллельной оси Oz и имеющей выражение

$$Z=\frac{\mu}{(Ax+By+Cz+D)^2}$$

или

$$Z=\frac{\mu}{(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F)^{3/2}},$$

где μ, A, B, C, D, E, F — постоянные.

Ответ. Траектории — конические сечения, каковы бы ни были начальные условия.

11. Найти движение тяжелой точки в сопротивляющейся среде при законе сопротивления R, определяемом формулой

$$R=mg(A+B\ln v),$$

где A и B — постоянные.

Этот закон можно рассматривать как предельный случай принятого в тексте закона

$$R=mg(a+bv^n).$$

Для этого достаточно положить $a=A-\frac{B}{n}$, $b=\frac{B}{n}$ и заставить n стремиться к нулю.

12. Завершить вычисления в тексте п. 219, полагая $n=1$ и $a=\frac{1}{2}$. Можно выполнить все квадратуры.

13. Тяжелая точка движется в сопротивляющейся среде. Доказать, что если R обозначает сопротивление, то между ординатой y и абсциссой x точки траектории существует соотношение

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{2gR}{v^4\cos^3\alpha},$$

где v — скорость и α — угол между касательной и горизонталью Ox.

В частности, если сопротивление пропорционально v^4, то дифференциальное уравнение траектории будет

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{k}{\cos^3\alpha}=k\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

(Де Спарр, Comptes Rendus, 23 и 30 мая 1892 и Mémorial de l'Artillerie de la Marine, 1892.)

14. Найти движение тяжелой точки в сопротивляющейся среде при сопротивлении, пропорциональном кубу скорости.

Эта задача может быть разрешена в эллиптических функциях. (См. Аппель и Лякур, Principes de la théorie des fonctions elliptique, стр. 225; см. также две статьи де Спарра, Bulletin de la Société mathématique, 1900 и 1901.)

15. Точка движется в плоскости xOy под действием силы с составляющими

$$X = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Y = \frac{dU}{dx},$$

где U — функция от x и y. Доказать, что уравнения движения имеют первый интеграл

$$m\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = U + h.$$

16. Точка движется в плоскости xOy под действием силы, составляющие которой X и Y являются функциями от x и y, удовлетворяющими условиям

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Доказать, что интегрирование уравнений движения может быть выполнено в квадратурах.

Ответ. В этом случае величина $X + iY$ является функцией $\varphi(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$. Оба уравнения движения можно свести в одно

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \varphi(z),$$

и интегрирование приводится к двум последовательным квадратурам, из которых первая

$$m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0^2 = 2\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

а вторая определяет t в функции z. (Лекорню, Comptes Rendus, т. CI, стр. 1244; Journal de l'École polytechnique, вып. LV.)

17. В более общей постановке, если

$$a\frac{\partial X}{\partial y} = b\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$

где a и b — постоянные, интегрирование уравнений движения приводится к квадратурам.

Ответ. Этот случай приводится к предыдущему при помощи подстановки

$$X = \sqrt{b}\,X', \quad Y = \sqrt{-a}\,Y', \quad x = \sqrt{b}\,x', \quad y = \sqrt{-a}\,y'.$$

18. Точка движется в пространстве под действием силы, составляющие которой X, Y, Z являются функциями от x, y, z, удовлетворяющими соотношениям

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Доказать, что интегрирование уравнений движения приводится к квадратурам.

Ответ. Обозначая через α и α^2 комплексные кубические корни из единицы и полагая

$$x + y + z = p, \quad x + \alpha y + \alpha^2 z = q, \quad x + \alpha^2 y + \alpha z = r;$$
$$X + Y + Z = P, \quad X + \alpha Y + \alpha^2 Z = Q, \quad X + \alpha^2 Y + \alpha Z = R,$$

найдем, что P есть функция только от p, Q — только от q и R — только от z. Тогда уравнения движения эквиваленты трем следующим:

$$m\frac{d^2p}{dt^2} = P, \quad m\frac{d^2q}{dt^2} = Q, \quad m\frac{d^2r}{dt^2} = R,$$

каждое из которых интегрируется в квадратурах. Пример:

$$X = x^2 + 2yz, \quad Y = z^2 + 2xy, \quad Z = y^2 + 2zx.$$

(Comptes Rendus, 19 марта 1877.)

19. Если дана материальная точка, находящаяся под действием силы, зависящей только от положения, то интегралы дифференциальных уравнений движения остаются вещественными при замене t значением $t\sqrt{-1}$ и проекций x_0', y_0', z_0' начальной скорости значениями $-x_0'\sqrt{-1}$, $-y_0'\sqrt{-1}$, $-z_0'\sqrt{-1}$. Полученные таким образом новые выражения являются уравнениями нового движения, которое будет совершать та же самая материальная точка, если при тех же начальных условиях на нее будет действовать сила, равная и противоположная той, которая вызвала первое движение. (Comptes Rendus, 30 декабря 1878.)

20. Тяжелая материальная точка движется в сопротивляющейся среде, сопротивление R которой является функцией скорости v и предполагается направленным в сторону, противоположную скорости v: $R = mg\varphi(v)$. Допустим, кроме того, что функция $\varphi(v)$ непрерывна, положительна и возрастает вместе с v. Доказать следующие общие предложения:

1°. Если $\varphi(0) > 1$, то точка за конечный промежуток времени описывает конечную дугу траектории, заканчивающуюся в точке, где касательная вертикальна и куда движущаяся точка приходит со скоростью, равной нулю. После этого движущаяся точка остается в покое, так как если она будет стремиться начать движение, то возникающее сопротивление будет больше веса. (Этот случай может, например, представиться при движении с трением тяжелой точки по наклонной плоскости.)

2°. Если $\varphi(0) < 1$ (случай артиллерийских снарядов), то движущаяся точка будет описывать кривую с бесконечной ветвью, обладающей вертикальной асимптотой; скорость точки стремится к пределу λ, равному корню уравнения $1 - \varphi(v) = 0$, которое, очевидно, на основании предположений, сделанных относительно функции $\varphi(v)$, обладает только одним корнем.

3°. Если $\varphi(0) = 1$, то v стремится к нулю и x стремится к конечному пределу; но для t и y могут представиться различные случаи в зависимости от закона, по которому $\varphi(v)$ стремится к нулю, когда к нулю стремится v. Если $v^{-n}[1 - \varphi(v)]$ остается конечным, то получаются результаты упражнения 8.

Указание. Применяя уравнение (3), стр. 528, получим уравнение

$$v\cos\alpha = v_0\cos\alpha_0 e^{\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\varphi(v)}{\cos\alpha}d\alpha},$$

которое показывает, что $v\cos\alpha$ стремится к нулю, когда α стремится к $-\frac{\pi}{2}$; разрешая его относительно v, получим выражение, принимающее вид $\frac{0}{0}$ при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. При помощи обычных методов, обозначая через v_1 предел скорости v, выводим условие

$$v_1[1 - \varphi(v_1)] = 0.$$

которое показывает, что v_1 равно нулю или корню уравнения $1-\varphi(v)=0$. Исследование завершается при помощи формул стр. 528 (Морен).

21. *Аналогия между равновесием нити и движением точки.* Эта аналогия получается непосредственно из сравнения естественных уравнений равновесия нити (п. 136) с уравнениями движения точки. Таким путем получаются следующие теоремы.

а) Если каждый элемент нити находится в равновесии под действием силы $F\,ds$ и если натяжение равно T, то материальная точка массы m, описывающая кривую, образованную нитью, со скоростью v, равной kT в каждой точке (k — постоянная), находится под действием силы Φ, направленной противоположно силе F и равной по величине mk^2FT или $mkFv$. Можно, наоборот, перейти от движения точки к равновесию нити. Для этого достаточно положить $T=\frac{v}{k}$ и силу F равной численно $\frac{\Phi}{mkv}$ и направленной противоположно силе Φ.

б) Материальная точка, находящаяся под действием вертикальной силы, направленной вверх и пропорциональной скорости, описывает цепную линию.

в) Нить, у которой каждый элемент ds находится под действием силы, обратно пропорциональной ее натяжению $F\,ds=\frac{k\,ds}{T}$, принимает форму параболы. (Можно также говорить, что эта сила $F\,ds$ изменяется пропорционально горизонтальной проекции ds, так как $T\frac{dx}{ds}=C$.)

г) Если уравнения равновесия нити преобразовать так, как при получении законов площадей (п. 203) и кинетической энергии (п. 205), то получатся теоремы, выражаемые уравнениями

$$T\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=C,$$

$$dT+X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0,$$

из которых первое имеет место, когда вдоль всей нити момент силы относительно оси Oz равен нулю (п. 131).

д) Аналогичные теоремы можно вывести и для равновесия нити на поверхности, если сравнивать с движением точки по поверхности. (См. Мёбиус, Statique, часть вторая, глава VII и Поль Серре, Théorie des lignes à double courbure, Mallet-Bachelier, 1860.)

22. Если несколько масс $m, m', m'', \ldots$, находящихся соответственно под действием сил $F, F', F'', \ldots$, зависящих только от координат, выходят из одной и той же точки A с одинаковыми по направлению, но разными по величине скоростями $v_0, v_0', v_0'', \ldots$ и описывают одну и ту же кривую ABC, то произвольная масса M, находящаяся под действием равнодействующей сил $\alpha F, \alpha' F', \alpha'' F'', \ldots$, где $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ — положительные или отрицательные постоянные, и выходящая из точки A со скоростью V_0, имеющей то же направление, что и $v_0, v_0', \ldots$, опишет ту же самую кривую, если только начальная кинетическая энергия массы M определяется формулой

$$MV_0^2=\alpha m v_0^2+\alpha' m' v_0'^2+\alpha'' m'' v_0''^2+\ldots$$

(Бонне, Примечание ко второму тому «Аналитической механики» Лагранжа.) Эта теорема доказывается при помощи естественных уравнений движения.

23. Если равнодействующая F сил, приложенных к свободной точке, принадлежит неподвижному линейному комплексу, то момент количества движения относительно этого комплекса постоянен.

Ответ. По предположению, существуют постоянные a, b, c, p, q, r такие, что

$$pX+qY+rZ+a(yZ-zY)+b(zX-xZ)+c(xY-yX)=0.$$

Заменяя X, Y, Z через mx'', my'', mz'' и интегрируя, получим

$$px'+qy'+rz'+a(yz'-zy')+b(zx'-xz')+c(xy'-yx')=\text{const.},$$

что и выражает подлежащее доказательству свойство.

24. Найти движение наэлектризованной частицы, находящейся под действием неподвижной электрической массы, помещенной в точке O, и единственного неподвижного магнитного полюса, также находящегося в точке O.

Ответ. Точка описывает на круговом конусе с вершиной в точке O траекторию, которая при развертывании конуса переходит в коническое сечение с фокусом в точке O; движение подчинено закону площадей. (См. Аппель, Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto, т. IV, 1909.)

ГЛАВА XI

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ СИЛЫ. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ

I. Центральные силы

222. Уравнения движения. Сила называется *центральной*, если ее направление все время проходит через неподвижную точку. Эта точка называется *центром силы*. Примем центр силы за начало координат и условимся обозначать через F абсолютное значение силы, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли сила *отталкивающей* или *притягивающей*. Мы видели ранее (п. 203), что в случае действия центральной силы траектория точки является плоской кривой, плоскость которой проходит через центр силы. Эта плоскость определяется начальным положением и начальной скоростью движущейся точки. Если начальная скорость направлена по радиусу-вектору, то плоскость эта становится неопределенной, но тогда движение будет прямолинейным и будет происходить по радиусу-вектору.

Возьмем плоскость траектории за плоскость xy. Тогда проекции силы, согласно принятому условию относительно знака F, будут $F\frac{x}{r}$ и $F\frac{y}{r}$. Мы можем воспользоваться общими уравнениями плоского движения; однако проще исходить из уравнений, получаемых по *закону площадей* и по *теореме кинетической энергии*.

Интеграл площадей

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

если пользоваться полярными координатами, может быть написан следующим образом:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C. \tag{1}$$

Мы видим, что C есть момент начальной скорости относительно оси Oz. Пусть v_0 — начальная скорость и p_0 — расстояние до нее от начала. Тогда абсолютное значение постоянной C равно p_0v_0; при этом нужно взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли происходить движение в сторону положительного или отрицательного вращения вокруг оси Oz. Пусть r_0, θ_0 — координаты точки M_0,

η_0 — угол между начальной скоростью M_0v_0 и продолжением OM_0 (рис. 144). Имеем

$$p_0 = r_0 \sin \eta_0,$$

и поэтому абсолютное значение постоянной площадей будет

$$C = r_0 v_0 \sin \eta_0.$$

Если условиться считать угол η_0 положительным от продолжения M_0O' радиуса-вектора в сторону положительных вращений, то это равенство будет справедливо и по знаку, так как r_0 и v_0 считаются положительными, и знак постоянной C совпадает со знаком $\sin \eta_0$. Эта постоянная C может обратиться в нуль только тогда, когда нулю равен один из множителей r_0, v_0 или $\sin \eta_0$. В последнем случае движение будет происходить по радиусу-вектору.

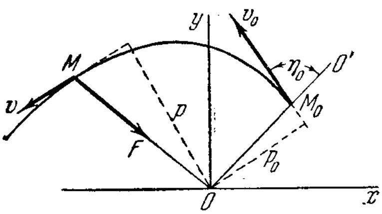


Рис. 144.

Применим теперь теорему кинетической энергии. Получим

$$\frac{d(mv^2)}{2} = F\,dr. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) вполне определяют движение. Они служат для нахождения r и θ в функции времени.

Скорость имеет выражение

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

При помощи равенства (1) из этого выражения можно исключить $d\theta$ или dt, после чего получаем:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}, \tag{3}$$

или

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right], \tag{4}$$

если заменить $\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ через $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2$.

Наиболее простой случай будет тогда, когда сила зависит только от расстояния r. Тогда задача приведется к квадратурам, так как $F\,dr$ будет полным дифференциалом и из уравнения (2) получим v^2 в функции r; подставляя это значение v^2 в уравнения (3) и (4), найдем t и θ при помощи квадратур.

Вернемся к общему случаю. Мы можем получить еще два важных уравнения, заменяя v^2 его значениями (3) и (4) в уравнении кинетической энергии. Взяв сначала равенство (3) и написав уравнение кинетической энергии в виде

$$\frac{1}{2}\frac{dmv^2}{dt}=F\frac{dr}{dt},$$

мы получим

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{C^2}{r^2}\right]\right\}=F\frac{dr}{dt};$$

выполнив дифференцирование и разделив на $\frac{dr}{dt}$, найдем

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{C^2}{r^3}\right)=F,$$

что мы представим в виде

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=F+m\frac{C^2}{r^3}. \tag{5}$$

Это уравнение определяет относительное движение точки по радиусу-вектору. Оно показывает, что *движение происходит так, как если бы радиус-вектор был неподвижен, а сила, действующая на точку, была увеличена на* mC^2/r^3. Это же уравнение определяет r в функции t, когда F зависит только от r или от r и t.

Используем теперь для подстановки в уравнение кинетической энергии выражение (4). Написав уравнение кинетической энергии в виде $\frac{1}{2}\frac{dmv^2}{d\theta}=F\frac{dr}{d\theta}$, мы получим

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{mC^2}{2}\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]\right\}=F\frac{dr}{d\theta}.$$

Выполним дифференцирование и заменим производную $\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$ ее значением $-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$; разделив затем на $\frac{dr}{d\theta}$, мы получим следующую формулу, установленную Бине:

$$F=-\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right). \tag{6}$$

Это уравнение может служить для определения r в функции θ, т. е. для нахождения уравнения траектории, если F зависит только от r или же и от r и от θ. Знаки обеих частей уравнения (6) показывают, что сила всегда направлена в сторону вогнутости траектории; в самом деле, как известно, величина $\left(\frac{1}{r}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)$ отрицательна или положительна в зависимости от того, будет или не будет траектория обращена к полюсу своей выпуклостью. Если в каком-нибудь положении движущейся точки сила равна нулю, то в этом положении траектория имеет точку перегиба.

223. Сила есть функция только расстояния. Исследуем полнее важный случай, когда

$$F=\varphi(r).$$

Уравнение (2) интегрируется сразу, и мы получаем

$$\frac{mv^2}{2}=\int\varphi(r)\,dr+h.$$

Чтобы найти зависимость между r и t, заменим v^2 его значением (3) и мы получим уравнение вида

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\psi(r),\qquad dt=\frac{dr}{\pm\sqrt{\psi(r)}}.$$

Следовательно, t определяется простой квадратурой. После этого легко найдется уравнение траектории; в самом деле, из уравнения (1) имеем

$$d\theta=\frac{C}{r^2}\,dt=\frac{C\,dr}{\pm r^2\sqrt{\psi(r)}},$$

и для нахождения θ надо выполнить квадратуру.

Теперь нужно определить знак, который следует брать перед корнем. Он определяется следующими условиями. Известно, что проекция скорости на радиус-вектор равна $\frac{dr}{dt}$; знание начальной скорости позволяет знать знак величины $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$; вначале надо брать перед корнем этот знак и сохранять его до тех пор, пока $\psi(r)$ не обратится в нуль, а затем определится и знак, который нужно будет взять впоследствии. Никакой трудности не возникает, когда $\psi(r_0)$ равно нулю, т. е. когда начальная скорость перпендикулярна радиусу-вектору. Тогда рассмотрим уравнение движения по радиусу-вектору; начальная скорость $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ этого движения равна нулю, и это движение будет происходить так, как если бы радиус-вектор был неподвижен, а сила была равна $F+\frac{mC^2}{r^3}$; если эта воображаемая сила вначале положительна, то r будет вначале возрастать и нужно брать знак плюс; если она отрицательна, то r будет сначала уменьшаться и нужно брать знак минус. Допустим, наконец, что $F_0+\frac{mC^2}{r_0^3}=0$. В этом случае для наблюдателя, связанного с радиусом-вектором, точка остается неподвижной, так как она движется по радиусу-вектору так, как если бы он был неподвижен, а точка предоставлена самой себе в положении, в котором воображаемая сила равна нулю. Траектория будет окружностью радиуса r_0, и в силу закона площадей движение будет равномерным.

Посмотрим теперь, какие начальные условия нужно сообщить точке, чтобы осуществить это круговое движение. Необходимо, чтобы начальная скорость была перпендикулярна радиусу-вектору, т. е. чтобы $\gamma_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, откуда $C = \pm r_0 v_0$, и чтобы $F_0 + \frac{mC^2}{r_0^3} = 0$, откуда, заменяя C его значением, найдем

$$v_0 = \sqrt{\frac{-F_0 r_0}{m}}.$$

Это значение будет вещественным только тогда, когда F_0 отрицательно, т. е. когда сила — притягивающая.

Пример. Наиболее важными приложениями предыдущей теории являются случаи, когда сила пропорциональна расстоянию и когда сила обратно пропорциональна квадрату расстояния. Второй случай будет подробно рассмотрен в теории движения планет; займемся здесь первым случаем и рассмотрим сначала точку, притягиваемую точкой O (рис. 145) с силой, пропорциональной расстоянию;

$$F = -mk^2 r, \quad v^2 = -k^2 r^2 + h.$$

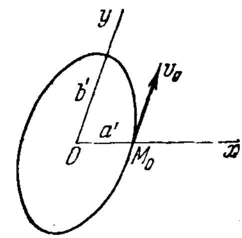


Рис. 145.

Вышеизложенные общие методы позволяют найти уравнение траектории и время. Но проще исходить из уравнений движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y,$$

которые будут такими же и в косоугольных координатах. Общие интегралы этих линейных уравнений с постоянными коэффициентами будут

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt, \quad y = y_0 \cos kt + \frac{y_0'}{k} \sin kt,$$

где x_0', y_0' — проекции на оси координат скорости движущейся точки в момент $t = 0$ (п. 211). Если, в частности, принять за ось Ox начальный радиус вектор, а за ось Oy прямую, параллельную начальной скорости, то получим

$$x_0 = r_0, \quad y_0' = v_0, \quad y_0 = x_0' = 0,$$

$$x = r_0 \cos kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt,$$

откуда для траектории находим уравнение

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{k^2 y^2}{v_0^2} = 1,$$

являющееся *уравнением эллипса, отнесенного к двум сопряженным диаметрам* $2a'$ и $2b'$, где *длины* $a' = r_0$ и $b' = \frac{v_0}{k}$. Продолжительность обращения по эллипсу равна $\frac{2\pi}{k}$. Так как за начальный момент времени может быть принят произвольный момент, то мы видим, что скорость точки в произвольном положении равна kb', где b' — длина полудиаметра, параллельного скорости, т. е. сопряженного радиусу-вектору.

Если движущаяся точка *отталкивается* центром O пропорционально расстоянию, $F = mk^2r$, то получатся уравнения движения, которые могут быть выведены из предыдущих заменой k коэффициентом $k\sqrt{-1}$. Следовательно, выбрав оси, как и выше, получим

$$x = r_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}, \quad y = \frac{v_0}{k} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}.$$

Траектория будет гиперболой

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{k^2 y^2}{v_0^2} = 1$$

с центром в точке O. Скорость в какой-нибудь точке будет по-прежнему равна произведению k на длину полудиаметра, параллельного скорости.

224. Сила вида $r^{-2}\varphi(\theta)$. Якоби показал, что можно привести задачу к квадратурам в случае, когда центральная сила выражается формулой вида $F = r^{-2}\varphi(\theta)$, т. е. когда сила является однородной функцией декартовых координат x, y с показателем однородности -2. В этом случае из формулы

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)$$

получаем для определения траектории уравнение

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\varphi(\theta)}{mC^2},$$

которое является линейным с постоянными коэффициентами и со второй частью. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta + \psi(\theta),$$

где A и B — произвольные постоянные, а $\psi(\theta)$ — частный интеграл уравнения, который всегда может быть найден при помощи квадратур.

Пусть, например, $F = -m\mu r^{-2}(\cos 2\theta)^{-\frac{3}{2}}$, где μ — вещественная положительная или отрицательная постоянная. В этом случае дифференциальное уравнение будет

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}(\cos 2\theta)^{-\frac{3}{2}},$$

его общий интеграл имеет вид

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta - \frac{\mu}{C^2}\sqrt{\cos 2\theta},$$

или, в декартовых координатах,

$$(1 - Ax - By)^2 = \frac{\mu^2}{C^4}(x^2 - y^2).$$

Это — уравнение конического сечения, касающегося двух прямых OP и OQ (рис. 146). Уравнение прямых имеет вид $x^2 - y^2 = 0$. Эти прямые касаются сечения в точках, где они пересекаются с прямой $1 - Ax - By = 0$, которая изменяется вместе с начальными условиями. Начальное положение движущейся точки лежит обязательно или в углу POQ, или в углу, противоположном ему относительно вершины, так как вне этих углов выражение F комплексно. Допустим для определенности, что кривая является эллипсом. Если μ положительно, то траектория состоит из части дуги QMP, так как она должна быть обращена вогнутостью к точке O; когда движущаяся точка приходит в одно из положений P или Q, то сила обращается в бесконечность, и задача теряет смысл. Если μ отрицательно, то движущаяся точка описывает часть дуги QNP.

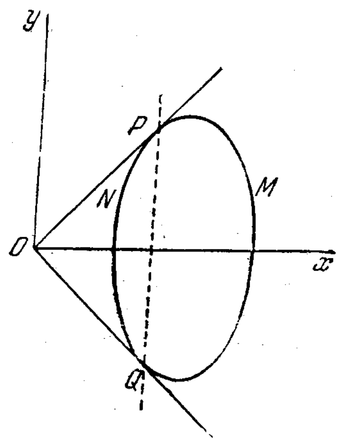


Рис. 146.

Время может быть определено из уравнения площадей

$$dt = \frac{r^2\,d\theta}{C},$$

в котором r^2 следует заменить его значением в функции θ. Если постоянные A и B специальным образом не подобраны, то получающийся интеграл будет *эллиптическим*.

Примечание. Точно так же приводится к квадратурам и более общая задача, когда выражение силы имеет вид

$$F = r^{-2}\varphi(\theta) + kr^{-3},$$

где k — постоянная. При этом по-прежнему придется интегрировать линейное относительно $1/r$ уравнение с постоянными коэффициентами и со второй частью.

225. Обратная задача. Определение центральной силы, когда задана траектория. Поставим себе следующую задачу.

Точка описывает плоскую траекторию по закону площадей относительно некоторого неподвижного центра. Найти силу, вызывающую это движение.

Прежде всего, эта сила — центральная. В самом деле, примем неподвижную точку за начало; тогда по закону площадей имеем уравнение

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

откуда, дифференцируя, получим

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Это уравнение показывает, что ускорение, а следовательно, и сила все время проходят через начало. Пусть F — алгебраическое значение силы. Тогда на основании равенства (6)

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

По условию известно уравнение траектории $f(r, \theta) = 0$, которое определяет $\frac{1}{r}$ в функции θ: $\frac{1}{r} = \varphi(\theta)$. Следовательно, получаем

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}[\varphi(\theta) + \varphi''(\theta)].$$

Если на характер силы F заранее не налагается никаких ограничений, то задача представляет неопределенность, так как r и θ связаны заданным уравнением, вследствие чего можно преобразовать бесчисленным множеством способов выражение для F. Можно, и это обычно требуется, выразить F в функции одного только r, для чего нужно исключить θ из предыдущего уравнения и из уравнения траектории.

Примеры. 1°. Рассмотрим случай конического сечения, описываемого по закону площадей относительно фокуса и обращенного к этому фокусу вогнутостью. Приняв фокус за полюс, имеем уравнение конического сечения

$$r = \frac{1 + e\cos\theta}{p},$$

где p — *параметр* и e — *эксцентриситет*. Отсюда находим

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{p},$$

$$F = -\frac{mC^2}{pr^2}.$$

Следовательно, сила является притягивающей, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния.

2°. Если ту же задачу рассматривать для ветви гиперболы, обращенной выпуклостью к фокусу, так что ее уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{e\cos\theta - 1}{p},$$

то

$$F = \frac{mC^2}{pr^2}.$$

Таким образом, для силы получается тот же закон, но она будет отталкивающей.

3°. Большинство встречающихся в подобных задачах кривых заключено в уравнении

$$r^k = a\cos k\theta + b,$$

где a, b, k — постоянные. Если предположить, что эти кривые описываются по закону площадей относительно начала, то для силы, выраженной в функции r, получится

$$F = -C^2\left[\frac{(k+1)(a^2-b^2)}{r^{2k+3}} + \frac{(k+2)\,b}{r^{k+3}}\right].$$

(Частные случаи: при $k=-1$ имеем конические сечения с фокусом в полюсе; при $k=-2$ имеем конические сечения с фокусом в це́нтре; при $k=1$ имеем *улитку Паскаля*; при $k=2$, $b=0$ имеем *лемнискату*, ...)

II. Движение планет

226. Следствия из законов Кеплера. Во всем последующем изложении речь будет идти только о движении центра тяжести планет. Согласно теореме, которую мы докажем впоследствии, центр тяжести движется, как точка, в которой сосредоточена вся масса планеты и в которую перенесены параллельно самим себе все приложенные к планете силы.

Законы движения планет выведены Кеплером из наблюдений Тихо Браге. Эти законы следующие:

1°. *Планеты описывают вокруг Солнца плоские кривые по закону площадей*;

2°. *Эти кривые являются эллипсами с фокусом в Солнце*;

3°. *Квадраты звездных времен обращения планет пропорциональны кубам больших осей их орбит.*

Из этих законов Ньютон вывел закон для силы, вызывающей эти движения.

Так как траектория плоская и имеет место закон площадей относительно центра Солнца, то сила является центральной, проходящей через эту точку. Так как траектория является эллипсом с фокусом в Солнце, то сила, действующая на планету, обратно пропорциональна квадрату расстояния от планеты до Солнца. Для этой силы мы получили выражение (первый пример предыдущего пункта)

$$F = -\frac{mC^2}{pr^2},$$

где C — постоянная площадей, а p — параметр конического сечения. Полагая $\mu = \dfrac{C^2}{p}$, можно написать

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}.$$

Последний закон Кеплера показывает, что μ не зависит от рассматриваемой планеты. В самом деле, постоянная площадей C равна удвоенному отношению площади, описанной радиусом-вектором, к затраченному на это времени; если T — продолжительность обращения, то радиус-вектор описывает за время T площадь πab; следовательно,

$$C = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Так как p равно $\dfrac{b^2}{a}$, то для μ получаем выражение

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

По закону, о котором мы говорили, отношение $\frac{a^3}{T^2}$ будет одинаковым для всех планет; поэтому сила для любой планеты будет

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}.$$

Итак, каждая планета притягивается к центру Солнца силой, пропорциональной массе планеты и обратно пропорциональной квадрату расстояния от планеты до Солнца.

227. Прямая задача. После установления этого результата Ньютон обратился к следующей задаче.

Найти движение материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Центральная сила выражается формулой

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}.$$

По закону кинетической энергии имеем

$$d\frac{v^2}{2} = -\frac{\mu}{r^2}\,dr, \qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} + h.$$

Но по теории центральных сил [формула (4)]

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

Подставляя это значение v^2 в предыдущее равенство, получим

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{C^2}\left(\frac{2\mu}{r} + h\right).$$

Это — дифференциальное уравнение траектории; его можно представить так:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}.$$

Положим

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \rho\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}.$$

Тогда уравнение для ρ будет

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 1 - \rho^2, \qquad d\theta = \frac{\pm\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

откуда, интегрируя, найдем

$$\theta - \alpha = \pm \arccos\rho, \qquad \rho = \cos(\theta - \alpha).$$

Уравнение траектории принимает вид

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{C^2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}}\cos(\theta-\alpha),$$

где корень можно всегда предполагать положительным, так как, если бы он был отрицательным, то, прибавляя π к произвольной постоянной α, мы сделаем его положительным. Получилось уравнение конического сечения, имеющего фокус в полюсе. Действительно, известно, что общее уравнение конических сечений с полюсом в фокусе есть

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos(\theta-\alpha),$$

где p — параметр, а e — эксцентриситет. Сравнивая два последних уравнения, найдем

$$p=\frac{C^2}{\mu},$$

что уже было установлено ранее, и

$$e=p\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}}$$

и, наконец, подставляя сюда значение p, получим

$$e=\sqrt{1+\frac{hC^2}{\mu^2}}.$$

Это выражение определяет вид конического сечения, который зависит только от знака постоянной h кинетической энергии.

Если h отрицательно, то траектория есть эллипс, так как $e<1$. Если h равно нулю или положительно, то траектория — парабола или гипербола. Значение постоянной h кинетической энергии равно

$$v_0^2-\frac{2\mu}{r_0}.$$

Оно зависит только от численного значения начальной скорости, но не от ее направления. Следовательно, если при определенных начальных условиях траектория есть эллипс, то она останется эллипсом, если движущуюся точку бросить из того же положения и с той же скоростью, но в любом другом направлении.

Вычисления, которые мы произвели, содержат неявно и случай отталкивания. Для исследования этого случая достаточно во всех формулах считать μ отрицательным. При этом условии постоянная h будет обязательно положительной и всегда будет получаться ветвь гиперболы. Эта ветвь гиперболы обращена своей выпуклостью к началу, так как сила направлена в сторону вогнутости траектории.

Займемся случаем эллипса, полагая $h < 0$, и выразим элементы траектории через начальные значения переменных. Мы нашли

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}},$$

откуда

$$h = \frac{\mu^2}{C^2}(e^2 - 1) = \frac{\mu}{p}(e^2 - 1),$$

или, вводя полуоси эллипса,

$$h = \frac{\mu}{\frac{b^2}{a}}\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) = -\frac{\mu}{a}.$$

Это последнее соотношение определяет большую ось эллипса, которая зависит только от постоянной уравнения кинетической энергии. После этого малая ось определится формулой

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu}.$$

Вычислив таким образом большую полуось a, можно легко построить эллипс, зная начальное положение M_0 и начальную скорость v_0. Для этого нужно взять точку P, симметричную фокусу относительно касательной v_0, соединить точку P с точкой M_0 и отложить на прямой PM_0 длину $PM_0O' = 2a$; точка O' будет вторым фокусом эллипса.

228. Кометы. Кеплер не изучал движения комет, считая их мимолетными метеорами. Ньютон, заметив, что материальная точка, притягиваемая Солнцем обратно пропорционально квадрату расстояния, может описывать не только эллипс, но и параболу, и ветвь гиперболы с фокусом в Солнце, пришел к мысли, что кометы, так же как и планеты, описывают эллипсы, в фокусе которых находится Солнце. Он только предположил, что в то время как планеты описывают лежащие почти в одной плоскости эллипсы с малыми эксцентриситетами кометы описывают очень вытянутые эллипсы, лежащие в произвольных плоскостях. Они появляются у нас редко потому, что мы их видим только на части траектории, наиболее близкой к Солнцу. Так как большая ось орбиты кометы очень велика, то эта близкая к Солнцу часть орбиты почти такая же, как если бы большая ось была бесконечной, т. е. эллипс был бы параболой с теми же фокусом и вершиной. Ньютон пришел таким образом к мысли, что вблизи Солнца комета должна описывать по закону площадей дугу параболы с фокусом в Солнце. Ему представился случай проверить эти догадки на комете, появившейся в 1680 г. Галлей, современник Ньютона, произвел такую же проверку на двадцати четырех кометах. Все последующие наблюдения также подтвердили взгляды Ньютона.

Вообразим комету массы m, описывающую по закону площадей дугу параболы с фокусом в центре Солнца. Эта комета будет находиться под действием силы, направленной к Солнцу, выражение которой, как мы показали выше, имеет вид

$$F = -\frac{mC^2}{p}\frac{1}{r^2},$$

где p — параметр дуги параболы. Для другой кометы, с массой m', мы точно так же получим силу

$$F' = -\frac{m'C'^2}{p'}\frac{1}{r'^2}.$$

Наблюдения показывают, что отношения C^2/p и C'^2/p' равны между собой и имеют общее значение, равное величине $\frac{4\pi^2a^3}{T^2}$ для какой-нибудь планеты. Следовательно, выражение центральной силы, действующей на комету, так же, как и для планет, будет

$$F = -\frac{m\mu}{r^2},$$

где коэффициент μ имеет одно и то же значение для всех комет и для всех планет.

Мы приходим таким образом к результату, что Солнце притягивает произвольную точку массы m, находящуюся на расстоянии r от центра, с силой, равной по абсолютной величине $\frac{m\mu}{r^2}$, где μ — коэффициент притяжения, присущий Солнцу и представляющий притяжение Солнцем материальной точки с массой, равной единице, находящейся на единичном расстоянии от центра.

229. Спутники. Наблюдения показывают, что спутники в своих движениях вокруг планет следуют очень близко законам Кеплера. Отсюда вытекает, что каждая планета притягивает своих спутников с силой, пропорциональной их массе и обратно пропорциональной квадрату их расстояний до центра планеты. Притяжение планет действует также и на тела, лежащие на их поверхности. Оно, как мы видели в главе III, приводит к понятию о силе тяжести. С каждой планетой связан некоторый коэффициент притяжения λ таким образом, что притяжение этой планетой точки массы m_1, помещенной на расстоянии r_1 от центра, равно $\frac{\lambda m_1}{r_1^2}$. Этот коэффициент λ изменяется при переходе от одной планеты к другой.

Таким образом, именно притяжение Земли, которому подвергаются тела, находящиеся на ее поверхности, заставляет их падать вертикально, когда они отпущены без начальной скорости, или описывать дугу параболы, когда они брошены под углом. Эта парабола является не чем иным, как частью очень вытянутого эллипса, фокус которого находится в центре Земли. Это вытекает из того, что притяжение Землей внешней материальной точки является почти таким же, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре. Следовательно, сила, удерживающая Луну на ее орбите, будет той же природы, что и сила тяжести.

Ньютон проверил это следующим образом. Пусть a_1 — большая полуось лунной орбиты, T_1 — продолжительность обращения и m_1 — масса Луны. Притяжение Луны Землею выражается так:

$$F = -\frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}\frac{m_1}{r_1^2}.$$

Так как эксцентриситет лунной орбиты весьма мал, то будем эту орбиту рассматривать как окружность с центром в центре Земли. Тогда $r_1 = a_1$ и

$$F = -\frac{4\pi^2 a_1}{T_1^2} m_1.$$

С другой стороны, тяжелая точка массы m_1, находящаяся на поверхности Земли, т. е. на расстоянии от центра, равном радиусу ρ Земли, находится под действием притягивающей силы, которая, как мы увидим дальше, мало отличается от веса и которую мы отождествим с весом

$$F' = -m_1 g.$$

Так как эти две силы находятся в отношении, обратном квадратам расстояний a_1 и ρ, то, принимая во внимание, что $a_1 = 60\rho$, получим

$$\frac{F'}{F} = \frac{a_1^2}{\rho^2} = 60^2,$$

откуда

$$g = \frac{4\pi^2\rho}{T_1^2} 60^3.$$

Но

$$2\pi\rho = 4 \cdot 10^7 \text{ м},$$

$$T = 27 \textit{ сут. } 7 \textit{ час. } 43 \textit{ мин.} = 39643 \cdot 60 \textit{ сек.}$$

Подставляя и выполняя вычисления, найдем значение $g = 9{,}7\ \frac{м}{сек^2}$, мало отличающееся от среднего ускорения силы тяжести на поверхности Земли $g = 9{,}8\ \frac{м}{сек^2}$. Небольшое различие вызвано сделанными приближениями и полностью исчезает при более точных вычислениях.

230. Всемирное притяжение. Таким образом, Солнце притягивает планеты, кометы и вообще все тела; планеты в свою очередь притягивают своих спутников, тела, находящиеся на их поверхности и вообще все тела; они должны, следовательно, притягивать также и

Солнце. С Солнцем и с каждой из планет связан определенный коэффициент притяжения.

Пусть M — масса Солнца; m, m', m'', ... — массы различных планет; μ — коэффициент притяжения Солнца и λ, λ', λ'', ... — коэффициенты притяжения планет. Если Солнце и планета m находятся на расстоянии r, то притяжение Солнцем планеты равно по абсолютной величине $\frac{m\mu}{r^2}$, а притяжение планетой Солнца равно $\frac{M\lambda}{r^2}$. В силу закона равенства действия и противодействия эти два притяжения должны быть равны и, следовательно,

$$m\mu = M\lambda, \qquad \frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m}.$$

Сопоставляя Солнце с планетами, мы получим ряд равных отношений

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda'}{m'} = \frac{\lambda''}{m''} = \ldots = f,$$

где через f обозначено общее значение этих отношений. Тогда величина притяжения Солнцем произвольной планеты может быть написана так:

$$\frac{fMm}{r^2},$$

где M — масса Солнца, m — масса планеты и f — коэффициент, одинаковый для всех планет.

Этот результат, обобщенный Ньютоном, выражает закон *всемирного тяготения.*

Две материальные точки с массами m и m', помещенные на расстоянии r друг от друга, притягиваются с силой $\frac{fmm'}{r^2}$. Постоянный коэффициент f есть притяжение единицы массы единицей массы на единице расстояния.

Первое экспериментальное определение постоянной всемирного тяготения было получено из опытов Кавендиша (Phylosophical Transactions, 1798). Эта постоянная была очень точно измерена в опытах Корню и Байля (Comptes Rendus, m. LXXVI и LXXXVI).

Мемуар Кавендиша переведен на французский язык и опубликован в XVII выпуске Journal de l'École polytechnique (1815). Бюржесс в Comptes Rendus за 21 и 28 августа 1899 г. указал способ определения постоянной f.

В системе CGS имеем:

$$f = 0{,}68 \cdot 10^{-7} = \frac{1}{3862^2}.$$

Подробности относительно измерения f можно найти в Cours de Physique Виоля (т. 1, стр. 294).

Средняя плотность Земли. Определение постоянной f весьма важно, так как, зная ее, можно определить массу и, следовательно, среднюю плотность Земли. В теории притяжения доказывается, что шар, образованный концентрическими однородными слоями, притягивает внешнюю точку так, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре. Допуская, что Земля приближенно удовлетворяет этому условию, и обозначая через m и ρ массу и радиус Земли, найдем, что притяжение Землей единицы массы, находящейся на ее поверхности, равно $f\frac{m}{\rho^2}$. С другой стороны, это притяжение, как мы это увидим в теории относительного равновесия (глава XXII), мало отличается от веса g единицы массы. Следовательно, имеем приближенно

$$f\frac{m}{\rho^2}=g,$$

откуда находим m.

Зная массу Земли, можно определить ее среднюю плотность, вычислив плотность, которую должен иметь однородный шар, радиус и масса которого равны радиусу и массе Земли. Эта средняя плотность, отнесенная к воде, равна 5,5. Она значительно больше плотности поверхностных слоев. Отсюда следует, что слои Земли, лежащие на большой глубине, имеют значительно бо́льшую плотность, чем поверхностные слои.

Размерность f; естественный час. Значение коэффициента f зависит от выбора основных единиц длины, времени и массы. Так как для притяжения двух масс

$$F=f\frac{mm'}{r^2},$$

то отсюда получаем

$$f=\frac{Fr^2}{mm'}.$$

Следовательно, если взять единицу длины в λ раз меньшую, единицу времени в τ раз меньшую и единицу массы в μ раз меньшую, то новое значение f, как мы видели в п. 76, будет

$$f\frac{\lambda^3}{\mu\tau^2}.$$

Допустим, что мы условились раз навсегда принимать за единицу массы массу куба со стороной, равной единице длины, заполненного каким-нибудь определенным веществом, например водой при 4°; тогда

$$\mu=\lambda^3$$

и f не будет изменяться с изменением единицы длины, а будет изменяться лишь с изменением единицы времени. Если единицу времени взять в τ раз меньшую, то f перейдет в $\frac{f}{\tau^2}$. Взяв в качестве единицы времени секунду среднего времени, получим:

$$f=\frac{1}{3862^2}$$

и, выбрав в τ раз меньшую единицу времени, получим для f значение

$$\frac{1}{3862^2\tau^2}.$$

Примем $\tau = \frac{1}{3862}$. Тогда f будет иметь значение 1. Новая единица времени будет равна 3862 секундам среднего времени; она мало отличается от часа. Липпман предложил называть ее *естественным часом* (Comptes rendus, 8 мая 1899).

На основании сказанного естественным часом является единица времени, которую нужно принять для того, чтобы при произвольной единице длины и при единице массы, равной массе единичного куба воды, для постоянной всемирного тяготения получилось значение $f = 1$.

231. Двойные звезды. Закон тяготения, открытый Ньютоном, распространяется за пределы солнечной системы. В самом деле, весьма вероятно, что этот закон управляет движением двойных звезд. Вот что показывают наблюдения этих движений. Заметим, прежде всего, что наблюдения непосредственно дают нам не действительную орбиту звезды-спутника вокруг главной звезды, а проекцию этой орбиты на касательную плоскость к небесной сфере, т. е. на плоскость, проведенную через главную звезду E перпендикулярно радиусу TE, соединяющему Землю T с этой звездой. Эта проекция и является видимой орбитой звезды-спутника. Наблюдения показывают, что

1) видимая орбита описывается по закону площадей вокруг главной звезды E;

2) эта орбита является эллипсом, в котором главная звезда E занимает произвольное положение, отличное от фокуса.

То обстоятельство, что имеет место закон площадей для проекции движения на плоскость, проведенную через звезду E перпендикулярно к радиусу TE, соединяющему Землю со звездой, показывает (п. 203), что сила, действующая на звезду-спутник, постоянно пересекает прямую TE. Так как это справедливо для всех двойных звезд и так как положение, занимаемое в пространстве Землей, никак не связано с двойными звездами, то естественно допустить, что сила, действующая на звезду-спутник, постоянно пересекает главную звезду E. Так как сила центральная, то траектория будет плоской и так как ее проекция — эллипс, то она сама является эллипсом. В таком случае можно попытаться дать себе отчет и в природе силы, вызывающей это движение. Так как на каждую звезду-спутник действует сила, направленная к главной звезде и заставляющая звезду-спутник описывать эллипс, то закон этой силы, очевидно, таков, что движение спутника по коническому сечению, не зависит от того, каковы были начальные условия движения спутника. Для нахождения этой силы необходимо решить следующую задачу.

232. Задача Бертрана. *Найти закон центральных сил, зависящих только от положения движущейся точки, и заставляющих ее описывать коническое сечение, каковы бы ни были начальные условия.*

Эта задача была поставлена Бертраном в т. LXXXIV Comptes Rendus и разрешена одновременно Дарбу и Альфеном. Дарбу изложил свое решение в примечании в конце «Механики» Депейру. Мы изложим решение Альфена с некоторыми изменениями, позволяющими упростить вычисления. Этот метод Альфена основан на составлении дифференциального уравнения конических сечений.

Общее уравнение конического сечения, разрешенное относительно y,

$$y = \alpha x + \beta + \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$$

содержит пять произвольных коэффициентов α, β, a, b, c. Дифференцируя дважды и обозначая через y', y'', ... производные от y по x, найдем

$$y'' = (ac - b^2)(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, величина $y''^{-\frac{2}{3}}$ является многочленом второй степени относительно x и ее третья производная равна нулю. Таким путем получается данное Альфеном дифференциальное уравнение конического сечения:

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Это — уравнение пятого порядка.

Установив это, рассмотрим точку массы 1, находящуюся под действием центральной силы F_1, зависящей только от координат (x_1, y_1) точки приложения относительно двух прямоугольных осей O_1x_1, O_1y_1, имеющих начало в точке O_1, через которую проходит сила. Если время обозначить через t_1, то уравнения движения будут

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} = F_1 \frac{x_1}{r_1}, \quad \frac{d^2y_1}{dt_1^2} = F_1 \frac{y_1}{r_1}, \tag{1}$$

где

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Интеграл площадей имеет вид

$$x_1 \frac{dy_1}{dt_1} - y_1 \frac{dx_1}{dt_1} = \alpha.$$

Сделаем преобразование *)

$$x = \frac{x_1}{y_1}, \quad y = \frac{1}{y_1} \tag{2}$$

и положим

$$dt = -\frac{dt_1}{y_1^2}.$$

Тогда получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y_1 \frac{dx_1}{dt_1} - x_1 \frac{dy_1}{dt_1}}{y_1^2} \frac{dt_1}{dt} = \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{y_1^2} \frac{dy_1}{dt_1} \frac{dt_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt_1}.$$

Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt_1^2} \frac{dt_1}{dt} = -F \frac{y_1^3}{r_1}. \tag{3}$$

Эти уравнения показывают, что зависимость движения точки (x, y) от времени t такова же, как материальной точки, находящаяся под действием силы

$$Y = -F_1 \frac{y_1^3}{r_1}, \tag{4}$$

*) См. Appell, De l'homographie en Mécanique (Comptes rendus, 4 февраля 1899 и American Journal of Mathematics, т. XII и XIII).

постоянно параллельной оси Oy. Эта сила Y является функцией от x_1 и y_1 и, следовательно, на основании соотношений (2) — также функцией от x и y. Если точка (x_1, y_1) описывает коническое сечение, то точка (x, y) также описывает коническое сечение, являющееся гомографическим преобразованием первого, и наоборот. Таким образом, мы привели задачу к отысканию закона параллельных сил Y, заставляющих их точку приложения описывать коническое сечение при любых начальных условиях. Эта задача может быть разрешена следующим образом.

Так как уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y,$$

то $\dfrac{dx}{dt}=\alpha$ и дифференциальное уравнение траектории будет

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\alpha^2}Y, \tag{5}$$

где Y — функция от x и y. Обозначим через $y', y'', \ldots$ производные от y по x. Выражение (5) для y'' должно удовлетворять дифференциальному уравнению $\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'''=0$ конических сечений, каковы бы ни были начальные условия. Обозначив через μ постоянную, положим

$$Y^{-\frac{2}{3}}=\mu^{-\frac{2}{3}}\varphi(x, y), \quad Y=\mu\,[\varphi(x, y)]^{-\frac{3}{2}}. \tag{6}$$

Тогда $[\varphi(x, y)]'''=0$. Произведя действия, получим:

$$\left[\varphi(x, y)\right]'=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y',$$

$$\varphi''=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2y'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+y'^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+y''\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\varphi'''=\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+3y'\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}+3y'^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}+y'^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+$$
$$+3y''\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+y'\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+y'''\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Так как на основании равенств (5) и (6)

$$y''=\frac{\mu}{\alpha^2}\varphi^{-\frac{3}{2}}, \quad y'''=-\frac{3}{2}\frac{\mu}{\alpha^2}\varphi^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),$$

то уравнение $\varphi'''=0$ напишется так:

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+3y'\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}+3y'^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}+y'^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+$$
$$+\frac{3\mu}{2\alpha^2}\varphi^{-\frac{5}{2}}\left(2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{3\mu y'}{2\alpha^2}\varphi^{-\frac{5}{2}}\left[2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]=0.$$

Это условие должно выполняться при любых начальных условиях, поэтому оно должно тождественно удовлетворяться, каковы бы ни были x, y, y'

и α, так как в начале движения эти четыре величины произвольны. Имеем, следовательно,

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=0, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}=0, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=0, \tag{7}$$

$$2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \quad 2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \tag{8}$$

Условия (7) показывают, что φ является многочленом второй степени от x и y:

$$\varphi(x,\ y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F.$$

Этот многочлен должен удовлетворять условиям (8); здесь необходимо различать два случая в зависимости от того, равен ли коэффициент C нулю или нет.

1°. $C \gtrless 0$. Тогда $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2C$ и второе из тождеств (8) дает выражение

$$\varphi=\frac{1}{C}(Bx+Cy+E)^2,$$

которое удовлетворяет, как это можно непосредственно проверить, также и первому из тождеств (8).

2°. $C=0$. Тогда из второго тождества (8) имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$, т. е. φ не зависит от y. Следовательно,

$$B=C=E=0,$$

$$\varphi=Ax^2+2Dx+F$$

и первое из тождеств (8), очевидно, удовлетворяется.

Таким образом, имеется два закона параллельных сил, отвечающих требованиям задачи. Эти законы на основании равенства (6) выражаются формулами:

$$1)\ Y=\frac{\mu C^{\frac{3}{2}}}{(Bx+Cy+E)^3},$$

$$2)\ Y=\frac{\mu}{(Ax^2+2Dx+F)^{3/2}}.$$

Следовательно, имеется также два закона для центральных сил, удовлетворяющих требованиям задачи. На основании формул преобразования (2) и (4),

$$x=\frac{x_1}{y_1}, \quad y=\frac{1}{y_1}, \quad F_1=-\frac{Yr_1}{y_1^3},$$

эти силы определяются формулами:

$$1)\ F_1=-\frac{\mu r_1 C^{\frac{3}{2}}}{(Bx_1+Ey_1+C)^3},$$

$$2)\ F_1=-\frac{\mu r_1}{\left(Ax_1^2+2Dx_1y_1+Fy_1^2\right)^{3/2}}.$$

Это и будут два закона сил, открытых Дарбу и Альфеном.

Если перейти к полярным координатам $x_1 = r_1 \cos\theta$, $y_1 = r_1 \sin\theta$, то получатся два следующих закона сил:

$$-\frac{\mu' r_1}{(Br_1 \cos\theta + Er_1 \sin\theta + C)^3}, \quad -\frac{\mu}{r_1^2 (A\cos^2\theta + 2D\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta)^{3/2}},$$

где вместо $\mu C^{\frac{3}{2}}$ написано μ'..

Если допустить, что действие звезды на какую-нибудь материальную точку зависит только от расстояния r между точкой и звездой, а не от направления θ радиуса-вектора, то обе силы не должны зависеть от θ, и тогда для первой силы требуется, чтобы $B = E = 0$, а для второй, — чтобы $D = 0$, $A = F$. Вместе с тем эти случаи являются единственными, когда для обоих законов сил существует силовая функция. Законы сил при этом будут

$$-\frac{\mu'}{C^3} r_1, \quad -\frac{\mu}{A^{3/2}} \frac{1}{r_1^2}.$$

При первом законе, когда сила пропорциональна расстоянию, точка приложения будет описывать коническое сечение с центром в центре сил. Это не будет справедливым для двойных звезд, так как если центр действительной траектории звезды-спутника совпадает с главной звездой, то то же будет и для видимой траектории.

Таким образом, остается только второй закон, согласно которому сила изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Это—закон Ньютона. Согласно этому закону звезда-спутник будет описывать вокруг главной звезды эллипс, в фокусе которого находится главная звезда. Для нахождения действительной траектории спутника необходимо разрешить следующую задачу геометрии.

Зная проекцию эллипса на плоскость и зная, что один из его фокусов находится в определенной точке E плоскости, определить этот эллипс в пространстве.

Задача имеет два решения, симметричных относительно плоскости проекции.

233. Краткие указания по поводу некоторых других задач. Руководствуясь аналогичными идеями, Бертран решил следующую задачу:

Зная, что сила, вызывающая движение планеты вокруг Солнца, зависит только от расстояния и такова, что она заставляет свою точку приложения описывать замкнутую кривую, каковы бы ни были начальные условия, если только скорость не превосходит некоторого предела, найти закон этой силы.

Бертран доказал (Comptes rendus, т. LXXVII), что единственными законами, удовлетворяющими этим условиям, являются

$$-\mu r, \quad -\frac{\mu}{r^2},$$

из которых первый не подходит по причинам, указанным выше.

В т. LXXXIV Comptes rendus Бертран решил еще следующую задачу.

Зная, что сила, действующая на точку, зависит только от положения точки и заставляет ее описывать коническое сечение с фокусом в определенной точке S, каковы бы ни были начальные условия, найти закон этой силы.

Он доказал, что сила должна обязательно проходить через точку S и быть обратно пропорциональной квадрату расстояния. Следовательно, если принять первый закон Кеплера как общий закон и допустить, кроме того, что сила, действующая на планету, зависит только от ее положения, то только из этих предположений вытекает закон Ньютона.

В связи с этой работой Бертран поставил следующую задачу:

Зная, что сила, зависящая только от положения точки, заставляет точку при любых начальных условиях описывать коническое сечение, найти закон этой силы.

Эта задача была сведена Альфеном и Дарбу (Comptes Rendus, т. LXXXIV) к частной задаче, решение которой было изложено выше (п. 232). Альфен доказал аналитически, что если сила, зависящая только от положения точки, заставляет точку при всех обстоятельствах описывать плоскую траекторию, то сила является либо центральной, либо параллельной постоянному направлению. Дарбу дал элементарное доказательство этого предложения (примечание, помещенное в «Механике» Депейру).

Наконец Кёнигс (Bulletin de la Société mathématique, т. XVII) исследовал вопрос о том, какой должна быть центральная сила, зависящая от расстояния, чтобы ее точка приложения описывала при любых начальных условиях алгебраическую кривую. Он пришел к законам $-\mu r$ и $-\mu/r^2$.

III. Элементарные сведения из небесной механики

234. Задача n тел. Мы только что видели, каким путем Ньютон пришел к закону всемирного тяготения. Теперь речь идет о том, чтобы, исходя из этого закона, объяснить движение небесных тел и, в частности, тел, образующих солнечную систему: Солнца, планет, их спутников и комет. При изучении относительных движений этих тел можно совершенно пренебречь действием звезд вследствие огромных расстояний до звезд по сравнению с размерами солнечной системы *).

Двумя основными задачами небесной механики являются следующие: 1) найти движение центров тяжести небесных тел; 2) найти движения небесных тел вокруг их центров тяжести.

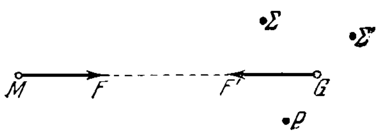


Рис. 147.

Мы ограничимся здесь некоторыми указаниями о первой задаче. Рассмотрим группу, образованную планетой P и ее спутниками Σ, Σ', ... (рис. 147). Движение центра тяжести G этой группы будет таким, как если бы в нем были сосредоточены массы планеты и всех ее спутников и в него были бы перенесены параллельно самим себе все действующие на группу внешние силы. Пусть M — любая другая точка солнечной системы. Так как ее расстояние от различных точек группы P, Σ, Σ', ... очень велико по сравнению с размерами группы, то равнодействующая F сил притяжений, действию которых подвергается точка M со стороны группы, будет почти такой, как если бы группа была заменена одной точкой той же массы, помещенной в G; доказывается в теории притяжения. Наоборот, притяжения, которые оказывает точка M на различные точки группы

*) Автор всюду употребляет выражение «центр тяжести» вместо «центр инерции» или «центр масс». (*Примеч. перев.*)

P, Σ, Σ', ..., будут силами, равными и противоположными предыдущим; если их перенести параллельно им самим в точку G, то они будут иметь равнодействующую F', равную и прямо противоположную силе F. Следовательно, действие группы P, Σ, Σ', ... на точку M и движение центра тяжести G группы будут почти такими, как если бы вся масса группы была сосредоточена в ее центре тяжести.

Поэтому можно вначале рассматривать солнечную систему, как образованную ограниченным числом материальных точек, притягивающихся по закону Ньютона и помещенных: одна — в центре тяжести Солнца, другая — в центре тяжести Меркурия, третья — в центре тяжести Венеры, четвертая — в центре тяжести Земли и Луны, пятая — в центре тяжести Марса и его двух спутников и т. д.

Полагая число групп равным n, мы получим, написав уравнения движения n центров тяжести, $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка, — по три для каждого центра тяжести. Эти уравнения, интегрирование которых составляет *задачу n тел*, допускают семь известных первых интегралов, которые мы укажем как приложения общих теорем о движении системы. Современные средства анализа не допускают выполнения интегрирования этих уравнений. Тем не менее в небесной механике оказалось возможным при помощи этих уравнений вычислить с достаточной степенью точности движение центров тяжести небесных тел благодаря тому, что массы всех тел солнечной системы очень малы по сравнению с массой Солнца. Так, масса Юпитера, наибольшая во всей системе, не составляет тысячной доли массы Солнца. Приведя число тел к трем, получим знаменитую *задачу трех тел*.

235. Задача двух тел. Рассмотрим Солнце и определенную планету, как две материальные точки, совпадающие с их центрами тяжести. Так как массы остальных тел солнечной системы очень малы по сравнению с массой Солнца, то в первом приближении мы положим их равными нулю. Другими словами, допустим, что солнечная система состоит из Солнца и одной единственной планеты. Мы приходим таким образом к простой задаче двух тел, для которой можно найти все интегралы. В небесной механике исследуется, каким образом, после того как эти интегралы будут вычислены, надо их изменить, чтобы рассчитать действия остальных тел солнечной системы.

Пусть M и m — массы Солнца S и планеты P, а α, β и γ, x, y, z — их координаты. Так как абсолютное значение силы притяжения обеих точек равно $\frac{fMm}{r^2}$, то проекции силы, действующей на Солнце S, будут

$$\frac{fMm}{r^2}\,\frac{x-\alpha}{r}, \quad \frac{fMm}{r^2}\,\frac{y-\beta}{r}, \quad \frac{fMm}{r^2}\,\frac{z-\gamma}{r},$$

а проекции силы, действующей на планету P, будут иметь те же выражения, но с обратными знаками. Тогда будем иметь уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2\alpha}{dt^2}&=\frac{fMm}{r^2}\,\frac{x-\alpha}{r},\\ M\frac{d^2\beta}{dt^2}&=\frac{fMm}{r^2}\,\frac{y-\beta}{r},\\ M\frac{d^2\gamma}{dt^2}&=\frac{fMm}{r^2}\,\frac{z-\gamma}{r};\end{aligned}\right\}\qquad (S)$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{fMm}{r^2}\,\frac{\alpha-x}{r},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{fMm}{r^2}\,\frac{\beta-y}{r},\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{fMm}{r^2}\,\frac{\gamma-z}{r}.\end{aligned}\right\}\qquad (P)$$

Легко проинтегрировать эту систему, определяющую α, β, γ, x, y, z в функции t, присоединяя к ней соотношение

$$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2.$$

Сложим почленно соответствующие уравнения систем (S) и (P). Тогда получим три уравнения вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+M\frac{d^2\alpha}{dt^2}=0,\ \ldots,$$

которые, если обозначить через ξ, η, ζ координаты центра тяжести системы, т. е.

$$\xi=\frac{M\alpha+mx}{M+m},\ \ldots,$$

преобразуются к виду:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=0.$$

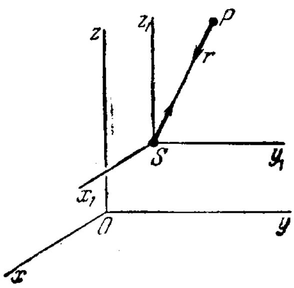


Рис. 148.

Эти три уравнения показывают, что центр тяжести системы совершает прямолинейное равномерное движение, т. е. выражают лишь частный случай общей теоремы о движении центра тяжести.

Найдем теперь относительное движение точки P по отношению к S. Для этого перенесем оси в точку S (рис. 148) и пусть x_1, y_1, z_1 — новые координаты планеты P:

$$x_1=x-\alpha,\quad y_1=y-\beta,\quad z_1=z-\gamma.$$

Если из уравнений (S) вычесть уравнения (P), сократив их предварительно на M и m, то они примут вид:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{f(M+m)}{r^2}\frac{x_1}{r},$$
$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{f(M+m)}{r^2}\frac{y_1}{r},$$
$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{f(M+m)}{r^2}\frac{z_1}{r}.$$

Это — уравнения относительного движения. Их вид показывает, что точка x_1, y_1, z_1 движется относительно точки S так, как если бы последняя была неподвижна, имела бы массу $M+m$ вместо M и продолжала бы притягивать точку P по закону Ньютона. Действительно, вышенаписанные уравнения являются уравнениями движения точки массы m, притягиваемой к неподвижному началу силой $\frac{f(M+m)m}{r^2}$, имеющей вид $\frac{\mu m}{r^2}$, где $\mu = f(M+m)$.

Отсюда следует, что к этому движению применим первый закон Кеплера: относительная траектория является коническим сечением, имеющим фокус в точке S и описываемым по закону площадей. Так как речь идет о планете, то это коническое сечение является эллипсом, и если вычислить элементы этого эллипса, то, обозначив через a большую полуось и через T — период обращения, мы получим соотношение, связывающее эти два элемента:

$$\mu = f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Мы замечаем, что отношение a^3/T^2 не зависит от m.

Если коэффициент f известен (п. 230), то из этого соотношения можно получить приближенное значение для $M+m$.

Для другой планеты с той же степенью приближения имеем

$$f(M+m_1) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2},$$

откуда выводим

$$\frac{a^3}{T^2} : \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m_1}{M}}.$$

Так как отношения m/M и m_1/M будут порядка тысячных долей, то мы видим, что член в правой части очень близок к единице. Вследствие этого третий закон Кеплера является только приближенным законом.

236. Масса планеты, обладающей спутником. Полученная нами формула

$$f(M+m)=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}$$

позволяет, как показал Ньютон, вычислить массу планеты, обладающей спутником.

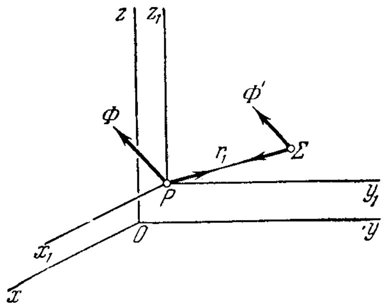


Рис. 149.

Пусть m и m_1 — массы планеты P и ее спутника Σ (рис. 149). Силы Φ и Φ' — действия Солнца и других планет на рассматриваемую планету и ее спутник — почти параллельны и пропорциональны массам, так как расстояние r_1 от планеты до ее спутника очень мало по сравнению с расстояниями от этой же планеты до других тел солнечной системы. Поэтому если мы обозначим через X, Y, Z проекции сил притяжения этими другими телами единицы массы планеты, то уравнения движения планеты и ее спутника будут:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=mX+\frac{fmm_1}{r_1^2}\,\frac{x_1-x}{r_1},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=mY+\frac{fmm_1}{r_1^2}\,\frac{y_1-y}{r_1},\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=mZ+\frac{fmm_1}{r_1^2}\,\frac{z_1-z}{r_1} \end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{P})$$

и

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}&=m_1X-\frac{fmm_1}{r_1^2}\,\frac{x_1-x}{r_1},\\ m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}&=m_1Y-\frac{fmm_1}{r_1^2}\,\frac{y_1-y}{r_1},\\ m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}&=m_1Z-\frac{fmm_1}{r_1^2}\,\frac{z_1-z}{r_1}. \end{aligned}\right\}\qquad (\Sigma)$$

Перенесем оси параллельно самим себе в точку P и пусть x_1', y_1', z_1' — новые координаты спутника Σ:

$$x_1'=x_1-x,\quad y_1'=y_1-y,\quad z_1'=z_1-z.$$

После сокращения на множители m и m_1 мы получим, вычитая уравнения (P) из уравнений (Σ), три уравнения относительного движения

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_1'}{dt^2} &= -\frac{f(m+m_1)}{r_1^2}\frac{x_1'}{r_1},\\ \frac{d^2y_1'}{dt^2} &= -\frac{f(m+m_1)}{r_1^2}\frac{y_1'}{r_1},\\ \frac{d^2z_1'}{dt^2} &= -\frac{f(m+m_1)}{r_1^2}\frac{z_1'}{r_1},\end{aligned}\right\} \qquad (\Sigma_1)$$

в которых силы Φ и Φ' исчезли.

Из уравнений (Σ_1) видно, что спутник описывает вокруг планеты эллипс так, как если бы эта планета была неподвижной и притягивала свой спутник с силой $\frac{f(m+m_1)m_1}{r_1^2}$. Если обозначить через a_1 большую полуось орбиты спутника, а через T_1 — его период обращения, то получим

$$f(m+m_1) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}.$$

Так как, с другой стороны, для самой планеты

$$f(m+M) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

то, деля эти равенства почленно друг на друга, получим

$$\frac{m}{M}\,\frac{1+\frac{m_1}{m}}{1+\frac{m}{M}} = \frac{a_1^3}{T_1^2} : \frac{a^3}{T^2}.$$

Если масса спутника очень мала по сравнению с массой планеты, то отношение $\frac{1+m_1/m}{1+m/M}$ почти равно единице и мы приближенно имеем

$$\frac{m}{M} = \frac{a_1^3}{T_1^2} : \frac{a^3}{T^2},$$

что позволяет вычислить отношение массы планеты к массе Солнца.

При выводе последней формулы мы предположили, что масса m_1 очень мала по сравнению с массой m. Этого нельзя сделать, если мы пожелаем применить наши вычисления к системе, образованной Землей и Луной. В этом случае прибегают к другому приему.

Формула

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \qquad (1)$$

справедлива всегда. С другой стороны, если на поверхности Земли взять материальную точку с массой, равной 1, то можно будет определить, как мы это покажем впоследствии, силу притяжения A этой точки Землею. Известно, что если считать Землю сферической и состоящей из однородных концентрических слоев, то ее притяжение будет равно притяжению материальной точки массы m, находящейся в центре Земли. Другими словами, для силы притяжения имеем

$$A = \frac{fm}{\rho^2}, \tag{2}$$

где ρ — радиус Земли. Исключая f из равенств (1) и (2), находим искомое соотношение

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 A \rho^2} - 1.$$

По вопросу об определении масс небесных тел мы отсылаем к заметке Тиссерана, опубликованной в l'Annuaire du Bureau des Longitudes за 1894.

237. Определение времени в эллиптическом движении. Вернемся опять к задаче двух тел и вспомним, что планета P массы m движется относительно осей, имеющих неизменные направления и проведенных через центр S Солнца так, как если бы Солнце было неподвижным, но имело массу, равную своей истинной массе M, увеличенной на m. Планета движется тогда вокруг Солнца как материальная точка массы m, находящаяся под действием центральной силы

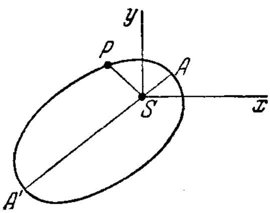


Рис. 150.

$$F = -f\frac{(M+m)\,m}{r^2} = -\frac{\mu m}{r^2},$$

где

$$\mu = f(M+m).$$

Орбитой является эллипс с фокусом в точке S, плоскость которого мы примем за плоскость xy. Обозначая через p параметр этого эллипса, через a — его большую полуось и через e — его эксцентриситет, мы получим, как это было показано в п. 227, следующие выражения для постоянной площадей C и постоянной h кинетической энергии

$$C^2 = \mu p = \mu a(1-e^2), \quad h = -\frac{\mu}{a}.$$

Вершина A (рис. 150), ближайшая к Солнцу, называется *перигелием*, а вершина A' — *афелием*. Обозначим через ω угол, образованный радиусом-вектором перигелия и осью Sx, а через w — угол ASP между радиусом-вектором $r = SP$ планеты и прямой SA; этот угол называется *истинной аномалией*. Полярный угол xSP связан с аномалией очевидным соотношением $\theta = w + \omega$, где ω — постоянная.

Вычислим теперь время, затрачиваемое планетой для достижения какой-нибудь точки траектории. Мы нашли

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

а, с другой стороны, для скорости после исключения $d\theta$ при помощи теоремы площадей $r^2\,d\theta = C\,dt$ получается выражение

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

Разрешая уравнение относительно $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ и заменяя C^2 его значением $\mu a(1-e^2)$, получаем:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu a(1-e^2)}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

что может быть написано так:

$$\left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{a}[-(a-r)^2 + a^2e^2].$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = \pm\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.$$

Обозначим через τ момент прохождения планеты через перигелий. Тогда r после момента τ будет сначала увеличиваться, $\frac{dr}{dt}$ будет положительным и в вышенаписанном равенстве нужно будет взять знак $+$. Этот знак нужно сохранять, пока r возрастает от своего минимального значения $r = a - c = a(1-e)$ до своего максимального значения $r = a(1+e)$. Положим

$$a - r = ae\cos u,$$

что возможно, так как $a - r$ все время меньше, чем ae; переменная u за полный период обращения изменяется от 0 до 2π. Тогда получим уравнение

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = a(1 - e\cos u)\,du,$$

которое непосредственно интегрируется, и так как при $t=\tau$ величина u обращается в нуль, то

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}(t-\tau) = u - e\sin u.$$

Таким образом, t выражено в функции u, а u связано с r соотношением

$$r = a(1 - e\cos u). \tag{1}$$

Если надо вычислить положение движущейся точки в момент t, то первое из этих уравнений определит u, а второе позволит вычислить r.

Введенный нами угол u называется *эксцентрической аномалией*. Обычно пишут левую часть уравнения, связывающего r и u, в виде $n(t-\tau)$, полагая

$$n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}.$$

Тогда $n(t-\tau)$ есть то, что называют *средней аномалией*. Так как для μ было найдено значение

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

то $n = \frac{2\pi}{T}$, где T — период обращения, и уравнение для u принимает вид

$$n(t-\tau) = u - e\sin u; \tag{2}$$

оно показывает, что действительно должно быть $n = \frac{2\pi}{T}$, так как правая часть увеличивается на 2π одновременно с u, т. е. после каждого оборота. Коэффициент $n = \frac{2\pi}{T}$ называется *средним движением*. Полученное нами уравнение носит название *уравнения Кеплера*.

Мы выразили r в функции u; остается теперь выразить в функции u истинную аномалию w. Для этого будем исходить из уравнения эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}.$$

В этом уравнении числитель равен параметру p. Приравнивая это значение r найденному выше значению $a(1-e\cos u)$, получим уравнение

$$1 - e\cos u = \frac{1-e^2}{1+e\cos w},$$

откуда находим:

$$1 - \cos w = 2\sin^2\frac{w}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e\cos u} = \frac{2a(1+e)\sin^2\frac{u}{2}}{r},$$

$$1 + \cos w = 2\cos^2\frac{w}{2} = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u} = \frac{2a(1-e)\cos^2\frac{u}{2}}{r}$$

и, извлекая квадратные корни, получаем

$$\sqrt{r}\sin\frac{w}{2}=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{u}{2},\quad \sqrt{r}\cos\frac{w}{2}=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{u}{2}. \quad (3)$$

Эти формулы, удобные для вычислений при помощи логарифмов, позволяют определить r и w в функции u. Делением получаем из них соотношение

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2},$$

связывающее истинную и эксцентрическую аномалии.

238. Геометрический метод. Для определения положения планеты на ее орбите в момент времени t можно применить геометрический метод, который указывает смысл введенных выше переменных. Известно, что эллипс можно рассматривать как проекцию описанного круга, который нужно повернуть вокруг большой оси AA' на угол, косинус которого равен b/a. Пусть M — точка эллипса и M' — соответствующая точка описанного круга (рис. 151). Тогда

$$\text{пл}\ (MFA)=\frac{b}{a}\ \text{пл}\ (M'FA).$$

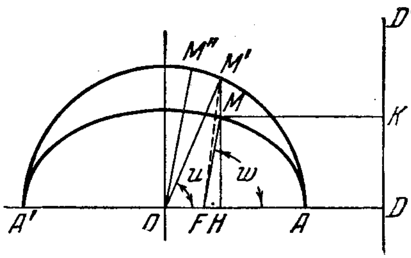


Рис. 151.

Угол MFA есть угол w, названный ранее *истинной аномалией*, а угол $M'OA$ равен *эксцентрической аномалии* u. В самом деле, площадь сектора $M'FA$ равна

$$M'FA=M'OA-M'OF=\frac{1}{2}a^2u-\frac{1}{2}a^2e\sin u,$$

т. е.

$$M'FA=\frac{a^2}{2}(u-e\sin u),$$

и, следовательно,

$$MFA=\frac{ab}{2}(u-e\sin u).$$

Площадь этого сектора пропорциональна времени, затрачиваемому на то, чтобы описать ее. Следовательно, если обозначить через $(t-\tau)$ это время, а через T период обращения, то должно быть

$$\frac{\text{пл}\ (MFA)}{t-\tau}=\frac{\pi ab}{T}.$$

Заменяя MFA его значением, получим

$$\frac{\frac{ab}{2}(u-e\sin u)}{t-\tau}=\frac{\pi ab}{T},$$

откуда

$$\frac{2\pi}{T}(t-\tau)=u-e\sin u.$$

Полагая $n=2\pi/T$, мы придем к уравнению Кеплера

$$u-e\sin u=n(t-\tau).$$

Для нахождения геометрического смысла средней аномалии $n(t-\tau)$ вообразим движущуюся точку, выходящую из A одновременно с планетой и пробегающую описанную окружность равномерно, причем так, чтобы прийти в A' одновременно с планетой. К моменту t эта точка будет в M''; угол $\zeta=M''OA$ будет средней аномалией. В самом деле,

$$\zeta=\frac{2\pi}{T}(t-\tau)=n(t-T).$$

Этот угол ζ меньше угла u, если $\sin u$ положителен (рис. 151).

Что касается выражения r в функции u, то оно получается из того, что отношение расстояний от точки эллипса до фокуса и до соответствующей директрисы DD' равно e. Следовательно, имеем

$$r=e\overline{MK}=e(\overline{OD}-\overline{OH})=e\left(\frac{a}{e}-a\cos u\right)=a(1-e\cos u),$$

так как расстояние OD от центра до директрисы равно a/e.

239. Аналитические преобразования. Для вычисления положения планеты в момент t необходимо сначала найти эксцентрическую аномалию u при помощи уравнения Кеплера

$$u=\zeta+e\sin u \quad [\zeta=n(t-\tau)]. \tag{1}$$

После этого найдутся все остальные координаты, которые все выражаются в функции u. Какова бы ни была дуга ζ, уравнение (1) Кеплера имеет один корень, который мы обозначим через u. В самом деле, ζ заключается между двумя целыми числами, кратными π:

$$k\pi<\zeta<(k+1)\pi.$$

В функции $\varphi(u)=u-e\sin u-\zeta$ положим $u=k\pi$; тогда получим

$$\varphi(k\pi)=k\pi-\zeta<0,$$

в то время как

$$\varphi[(k+1)\pi]=(k+1)\pi-\zeta>0.$$

Следовательно, между $k\pi$ и $(k+1)\pi$ всегда имеется вещественный корень. Более того, этот корень будет единственным, так как производная $\varphi'(u)=1-e\cos u$ всегда положительна, поскольку e заключается между 0 и 1.

1°. *Последовательные приближения.* Единственный вещественный корень уравнения (1) можно вычислить последовательными приближениями следующим образом.

Пусть u_0 — произвольная вещественная дуга. Положим

$$u_1=e\sin u_0+\zeta,$$

$$u_2=e\sin u_1+\zeta,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{i+1}=e\sin u_i+\zeta.$$

Кёнигс указал следующий метод, позволяющий доказать, что величины $u_1, u_2, \ldots, u_n$ действительно стремятся к искомому корню u и оценить предел ошибки при замене u_n через u. Этот метод является приложением к уравнению Кеплера общих результатов. заключающихся в работах Кёнигса по функциональным уравнениям (Annales de l'École Normale, 1884 и 1885).

Обозначая через u единственный вещественный корень, имеем

$$\frac{u_{i+1}-u}{u_i-u}=\frac{e\sin u_i+\zeta-u}{u_i-u}.$$

Но так как

$$\zeta-u=-e\sin u,$$

то можно также написать

$$\frac{u_{i+1}-u}{u_i-u}=e\,\frac{\sin u_i-\sin u}{u_i-u}=e\cos\frac{u_i+u}{2}\,\frac{\sin\frac{u_i-u}{2}}{\frac{u_i-u}{2}}.$$

Так как модули величин

$$\cos\frac{u_i+u}{2}\quad\text{и}\quad\frac{\sin\frac{u_i-u}{2}}{\frac{u_i-u}{2}}$$

меньше единицы, то

$$\left|\frac{u_{i+1}-u}{u_i-u}\right|\leqslant e.$$

Отсюда умножением выводим

$$\left|\frac{u_n-u}{u_0-u}\right|\leqslant e^n.$$

Но e заключается между 0 и 1, а e^n стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает; следовательно, предел u_n равен искомому корню u. Таким образом, последовательность величин $u_0, u_1, \ldots, u_n$ имеет предел u. Более того, предыдущее неравенство показывает, что эти величины непрерывно *приближаются* к своему пределу u. Этот факт замечателен, так как u_0 выбрано совершенно произвольно. Если каким-нибудь образом удалось найти приближенное значение для u, то его можно принять за u_0 и тогда $u_1, u_2, \ldots$ будут еще более приближаться к u. Допустим, что в качестве u_0 принято, как это часто делают, само значение ζ. Мы нашли

$$\left|\frac{u_n-u}{u_0-u}\right|<e^n.$$

Но из соотношения

$$u-e\sin u=\zeta$$

получается

$$|\zeta-u|<e$$

и, следовательно.

$$|u_n-u|<e^{n+1}.$$

Мы нашли, таким образом, оценку совершаемой ошибки. Например, для Земли приблизительно $e=\frac{1}{60}$ и достаточно трех действий ($n=3$), чтобы получить u с семью точными десятичными знаками.

2°. *Номограмма.* Д'Окань, прилагая к уравнению Кеплера общие методы номографии, дал в Bulletin de la Société mathématique de France (т. XXII, 1894) номограмму для решения этого уравнения. Эта номограмма позволяет быстро получить первое приближенное значение для неизвестной, исходя из которого можно, применяя строгие методы, найти более точные приближения.

3°. *Ряд Лагранжа.* При помощи ряда Лагранжа можно получить разложения u, $\sin u$, $\cos u$, $u-\zeta$, r, ... по возрастающим степеням e. Рассмотрим уравнение вида

$$u=\zeta+ef(u),$$

определяющее u в функции переменных ζ и e; обозначим через u тот из корней этого уравнения, который стремится к ζ, когда e стремится к нулю. Лагранж поставил себе задачей разложить заданную функцию $F(u)$ этого корня в ряд, расположенный по возрастающим положительным степеням e. Он дал для этого формулу

$$F(u)=F(\zeta)+ef(\zeta)F'(\zeta)+\frac{e^2}{2!}\frac{d[f^2(\zeta)F'(\zeta)]}{d\zeta}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{e^m}{m!}\frac{d^{m-1}[f^m(\zeta)F'(\zeta)]}{d\zeta^{m-1}}+\ldots$$

Мы отсылаем за доказательством этой формулы к курсу анализа Эрмита и к мемуару Руше (Journal de l'École Polytechnique, вып. XXXIX).

В уравнении Кеплера имеем

$$f(\zeta)=\sin\zeta$$

и за функцию $F(u)$ можно последовательно принимать эксцентрическую аномалию u, или радиус-вектор $a(1-e\cos u)$, или любую другую функцию u, разлагающуюся по степеням e. Так, например,

$$u=\zeta+e\sin\zeta+\frac{e^2}{2!\,2}\,2\sin 2\zeta+\frac{e^2}{3!\,2^2}(3^2\sin 3\zeta-3\sin\zeta)+\ldots,$$

$$\cos u=\cos\zeta+\frac{e}{2}(\cos 2\zeta-1)+\frac{e^2}{2\cdot 2^2}(3\cos 3\zeta-3\cos\zeta)+\ldots.$$

Лаплас первый нашел, что эти разложения сходятся до тех пор, пока e остается меньше 0, 662743... Коши подтвердил этот результат более прямым методом.

4°. *Функции Фурье — Бесселя.* Предыдущие разложения сходятся для планет, но перестают сходиться для некоторых периодических комет, описывающих вокруг Солнца очень вытянутые эллипсы. Тогда можно применить для $\cos u$, $\sin u$, ..., $\cos ju$, $\sin ju$, где j — целое положительное число, метод разложения в ряды по функциям *Фурье — Бесселя*, пригодные для всех значений эксцентриситета, заключенных между 0 и 1. Чтобы показать идею этих разложений, заметим сначала, что уравнение Кеплера

$$u-e\sin u=\zeta$$

определяет u как нечетную функцию переменного ζ, так как это уравнение не перестает удовлетворяться при одновременной перемене знаков у ζ и u. Более того, если средняя аномалия ζ увеличивается на 2π, то на столько же увеличивается и эксцентрическая аномалия u. Вследствие этого $\cos ju$ и и $\sin ju$, где j — целое положительное число, будут функциями переменного ζ не изменяющими своих значений, когда ζ увеличивается на 2π, причем первая будет четной, а вторая — нечетной. Известно, что любая конечная и непрерывная вещественная функция переменной ζ, не изменяющаяся, когда ζ увеличивается на 2π, разлагается по формуле Фурье в ряд по синусам и косинусам $i\zeta$, где $i=1, 2, \ldots$ В случае, когда разлагаемая функция от ζ — четная, разложение содержит только косинусы и свободный член;

в случае, когда эта функция нечетная, разложение содержит только синусы и не имеет свободного члена.

Следовательно, для $\cos ju$ и $\sin ju$ мы получаем, используя обозначения из первого тома Небесной механики Тиссерана, разложения следующего вида:

$$\cos ju = \frac{1}{2} p_0^{(j)} + p_1^{(j)} \cos \zeta + p_2^{(j)} \cos 2\zeta + \ldots + p_i^{(j)} \cos i\zeta + \ldots, \qquad (a)$$

$$\sin ju = \qquad q_1^{(j)} \sin \zeta + q_2^{(j)} \sin 2\zeta + \ldots + q_i^{(j)} \sin i\zeta + \ldots \qquad (b)$$

Здесь коэффициенты определяются известными формулами

$$\frac{\pi}{2} p_i^{(j)} = \int_0^\pi \cos ju \cos i\zeta \, d\zeta, \qquad \frac{\pi}{2} q_i^{(j)} = \int_0^\pi \sin ju \sin i\zeta \, d\zeta,$$

из которых первая может быть получена сразу умножением обеих частей разложения (a) на $\cos i\zeta \, d\zeta$ и интегрированием от 0 до π, после чего все члены правой части, кроме члена, соответствующего $p_i^{(j)}$, обратятся в нули. Мы займемся сейчас вычислением коэффициентов $p_i^{(j)}$; коэффициенты $q_i^{(j)}$ вычислятся аналогичным образом. Прежде всего, полагая $i = 0$, имеем

$$\frac{\pi}{2} p_0^{(j)} = \int_0^\pi \cos ju \, d\zeta,$$

или, заменяя ζ переменной $u - e \sin u$ и замечая, что если u изменяется от 0 до π, то ζ будет изменяться тоже от 0 до π, имеем

$$\frac{\pi}{2} p_0^{(j)} = \int_0^\pi \cos ju \,(1 - e \cos u)\, du.$$

Этот интеграл равен нулю при $j > 1$; при $j = 1$ он равен $-\pi e/2$. Следовательно,

$$p_0^{(1)} = -e, \quad p_0^{(j)} = 0 \qquad (j > 1).$$

Далее, интегрируя по частям, находим ($i > 0$)

$$\frac{\pi}{2} p_i^{(j)} = \int_0^\pi \cos ju \cos i\zeta \, d\zeta = \frac{1}{i} \Big| \cos ju \sin i\zeta \Big|_0^\pi - \frac{j}{i} \int_0^\pi \sin ju \sin i\zeta \, d\zeta.$$

Проинтегрированная часть равна нулю; после замены в другой части произведения синусов разностью косинусов и величины ζ ее значением $u - e \sin u$ найдем

$$p_i^{(j)} = \frac{j}{i\pi} \int_0^\pi \cos [(i - j) u - ie \sin u] \, du - \frac{j}{i\pi} \int_0^\pi \cos [(i + j) u - ie \sin u] \, du.$$

Сюда и входят функции Фурье — Бесселя, которые можно определить следующим образом. Пусть k — целое число и x — параметр. Выражение

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$$

определяет функцию Фурье — Бесселя. Существует, следовательно, бесчисленное множество функций Фурье — Бесселя, соответствующих всем положительным, или отрицательным, или нулевым значениям целого числа k. Легко видеть, что всегда можно считать k положительным. В самом деле, меняя φ на $\pi - \varphi'$, получим $d\varphi = -d\varphi'$ и из написанного выше интеграла находим:

$$J_k(x) = \frac{(-1)^k}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(-k\varphi' - x\sin\varphi')\,d\varphi' = (-1)^k J_{-k}(x).$$

Эта формула позволяет переходить от отрицательных индексов к положительным. Функция $J_k(x)$ является целой трансцендентной функцией от x, содержащей x^k множителем; раскладывая эту функцию по степеням x, найдем

$$J_k(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1\cdot(k+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1\cdot 2(k+1)(k+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1\cdot 2\cdot 3(k+1)(k+2)(k+3)} + \ldots\right].$$

Согласно этим обозначениям мы получаем следующие значения для коэффициентов $p_i^{(j)}$:

$$p_i^{(j)} = \frac{j}{i}\left[J_{i-j}(ie) - J_{i+j}(ie)\right].$$

Точно так же находим

$$q_i^{(j)} = \frac{j}{i}\left[J_{i-j}(ie) + J_{i+j}(ie)\right].$$

Подставляя эти значения в выражения для $\cos ju$ и $\sin ju$, мы получим искомые разложения, сходящиеся при всех значениях e между 0 и 1. Так, например,

$$\cos u = -\frac{e}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left[J_{i-1}(ie) - J_{i+1}(ie)\right]\frac{\cos i\zeta}{i}.$$

Если в этом разложении найти коэффициенты при e, e^2, ..., то мы снова получим те же значения, что и в написанной ранее формуле Лагранжа. Тем не менее оба эти разложения совершенно различны. Разложение Лагранжа расположено по степеням e и сходится только при значениях e, меньших некоторого предела; только что полученное разложение расположено по косинусам и синусам целых кратностей ζ и сходится при всех значениях e от 0 до 1.

Более подробные сведения о функциях Фурье — Бесселя можно найти в сочинении Тодгунтера, On Laplace's, Lame's and Bessel's Functions и в Traité de Mécanique céléste Тиссерана, из которой мы многое заимствовали. До Бесселя эти функции встречаются у Фурье. По этому вопросу можно указать на статью Аппеля и на несколько статей Пере, Акимова и Жуковского (Comptes rendus годы 1915, 1916, 1917).

240. Элементы эллиптического движения. Эллиптическое движение планеты определяется в пространстве шестью постоянными. Проведем через центр S Солнца (рис. 152) три оси Sx, Sy, Sz с неизменными направлениями. В настоящее время обычно принимают за плоскость xy плоскость эклиптики на 1 января 1850 г., за положительные оси Sx и Sy — прямые, направленные в точку весеннего равноденствия и в точку летнего солнцестояния той же эпохи, и за положительную ось Sz направление на северный полюс эклиптики. Плоскость орбиты планеты пересекает плоскость xy по линии NN', которая называется *линией узлов*. Точка N пересечения орбиты с плоскостью эклиптики является восходящим узлом. Это — точка, которую пересекает планета, когда ее координата z переходит от отрицательных значений к положительным. Другой узел N' является нисходящим. Для определения плоскости орбиты задают угол $\theta = xSN$, который считается положительным от Sx к Sy и называется *долготой восходящего узла*, и угол наклонения φ между плоскостью орбиты и плоскостью эклиптики; этот угол φ измеряется углом между перпендикулярами в точке N к прямой SN, из которых один лежит в плоскости эклиптики и направлен в сторону движения Земли, т. е. от Sx к Sy, а другой лежит в плоскости орбиты и направлен в сторону движения планеты (или кометы). После того как плоскость орбиты установлена, надо определить положение и размеры эллипса. Пусть A — перигелий; обозначим через ω сумму углов xSN и NSA, причем последний угол отсчитывается от SN в сторону движения; угол ω называется *долготой перигелия*. Угол NSA равен $\omega - \theta$. Этот угол определяет положение эллипса; для определения размеров этого эллипса задают его большую полуось a и его эксцентриситет e. Наконец, для указания закона, по которому планета описывает свою орбиту, задают период обращения T или среднее движение $n = \frac{2\pi}{T}$ и момент τ прохождения через перигелий. Заметим, что a и T не независимые величины, так как они связаны установленным ранее соотношением (п.236):

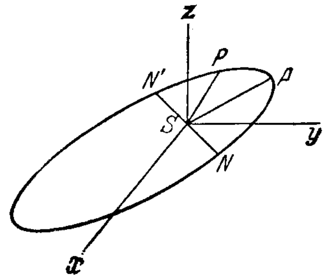


Рис. 152.

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

где M — масса Солнца, а m — масса планеты. Итак, для определения движения планеты или периодической кометы необходимо знать шесть *постоянных* θ, φ, ω, a, e, τ, которые называются *шестью элементами эллиптического движения*. Вместо τ часто вводят элемент ε, определяемый формулой

$$\omega - n\tau = \varepsilon$$

и называемый *средней долготой в нулевую эпоху*. Тогда прямоугольные координаты x, y, z планеты определяются в функции t и шести эллиптических элементов формулами вида

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t,\ \theta,\ \varphi,\ \omega,\ a,\ e,\ \varepsilon), \\ y &= f_2(t,\ \theta,\ \varphi,\ \omega,\ a,\ e,\ \varepsilon), \\ z &= f_3(t,\ \theta,\ \varphi,\ \omega,\ a,\ e,\ \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

которые нам нет надобности здесь приводить.

241. Метод вариации постоянных. Если бы солнечная система состояла из Солнца и только одной планеты, то шесть элементов эллиптического движения сохраняли бы в течение неопределенного времени свои значения. Но, как мы видели, эллиптическое движение является лишь первым приближением для движения планеты. Действие других планет на рассматриваемую планету сказывается в возмущении этого эллиптического движения. Для представления возмущенного движения, которое является действительным движением планеты и которое несколько отличается от эллиптического движения, сохраняют формулы (A), рассматривая в них шесть элементов θ, φ, ω, a, e, ε *не как постоянные, но как функции от* t. С течением времени под действием других планет эти элементы будут получать приращения $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\omega$, δa, δe, $\delta\varepsilon$, которые называются *возмущениями элементов* и которые вызовут соответствующие возмущения координат x, y, z. Раздел небесной механики, посвященный вычислению этих приращений, называется *теорией возмущений*.

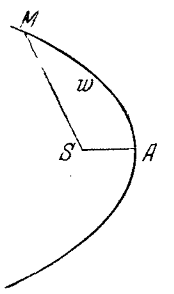


Рис. 153.

242. Параболическое движение комет. Представим себе комету M, описывающую параболу, фокус которой находится в центре Солнца, что имеет место для огромного большинства комет. Обозначая через w угол, образованный радиусом-вектором $SM = r$ с радиусом-вектором SA перигелия (рис. 153), напишем:

$$r = \frac{p}{1 + \cos w} = \frac{p}{2\cos^2\dfrac{w}{2}}.$$

На основании интеграла площадей имеем

$$r^2\,dw = C\,dt = \sqrt{f(M+m)p}\;dt,$$

где m — масса кометы, а M — масса Солнца. Действительно, из рассмотренной нами задачи двух тел вытекает, что комета движется вокруг Солнца так, как если бы Солнце было неподвижно, а сила, с которой оно притягивает комету, равнялась

$$-\frac{f(M+m)m}{r^2}=-\frac{\mu m}{r^2}.$$

Постоянная площадей будет тогда $C=\sqrt{\mu p}=\sqrt{f(M+m)p}$. Следовательно,

$$\frac{2\sqrt{f(M+m)}}{p^{3/2}}\,dt=\frac{dw}{2\cos^4\frac{w}{2}}=\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{w}{2}\right)d\left(\operatorname{tg}\frac{w}{2}\right),$$

откуда, интегрируя и обозначая через τ момент прохождения через перигелий, найдем

$$\frac{2\sqrt{f(M+m)}}{p^{3/2}}(t-\tau)=\operatorname{tg}\frac{w}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{w}{2}.$$

Таково уравнение третьей степени относительно $\operatorname{tg}\frac{w}{2}$, которое необходимо решить, чтобы найти положение планеты в момент t. Уравнение имеет только один вещественный корень. Полагая в этом уравнении $p=2q$ и замечая, что $\sqrt{M+m}$ можно заменить через $\sqrt{M}$, так как массой m кометы можно вполне пренебречь по сравнению с массой Солнца, мы можем представить уравнение в виде

$$\frac{t-\tau}{q^{3/2}}=\sqrt{\frac{2}{fM}}\left(\operatorname{tg}\frac{w}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{w}{2}\right).$$

Существуют численные таблицы корней этого уравнения для ряда значений левой части, причем масса M Солнца принята равной 1.

243. Параболические элементы. Для определения параболической орбиты кометы задают пять независимых элементов θ, φ, ω, τ и q, из которых первые четыре имеют те же значения, что и для планет, а $q=\frac{p}{2}$ обозначает *расстояние перигелия* (см. «Небесную механику» Тиссерана).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для движения точки, притягиваемой к неподвижному центру O силой $F=-mk^2r$, пропорциональной расстоянию, было показано, что траектория является эллипсом с центром в точке O и что скорость точки в произвольном положении M пропорциональна полудиаметру b', сопряженному с OM: $v=kb'$. Показать, что, пользуясь этими результатами, можно с помощью теорем площадей и кинетической энергии доказать теоремы Аполлония.

Ответ. Пусть $OM=r=a'$. Теорема площадей выражается равенством $pv=C$. Но это произведение pv равно взятой k раз площади параллелограмма, построенного на a' и b'. По теореме кинетической энергии $v^2+k^2r^2=h$, откуда $k^2(a'^2+b'^2)=h$.

2. Найти движение точки под действием центральной силы, выраженной формулой

$$F = m\left(\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3}\right),$$

где a и b — постоянные.

Ответ. Для нахождения траектории нужно проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{b}{C^2}\right) + \frac{a}{C^2} = 0,$$

которое является линейным с постоянными коэффициентами относительно $1/r$. Форма общего интеграла меняется в зависимости от знака $1 + \frac{b}{C^2}$. Когда эта величина равна нулю, $1/r$ будет многочленом второй степени относительно θ; когда она положительна и квадратный корень из нее рационален, траектория есть алгебраическая кривая.

3. Найти движение точки, когда

$$F = \frac{m(a + b\cos 2\theta)}{r^2}.$$

Ответ. Надо проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{a + b\cos 2\theta}{C^2} \quad (C \text{ — постоянная площадей}).$$

Его интеграл имеет вид

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta - \frac{a}{C^2} + \frac{b}{3C^2}\cos 2\theta.$$

Траектория является алгебраической кривой четвертой степени при любых значениях A, B, C, если только b не равно нулю. В последнем случае траектория будет коническим сечением, так как закон притяжения станет законом Ньютона.

После этого при помощи квадратуры можно определить t из интеграла площадей.

4. Найти движение точки, когда

$$F = \frac{m\mu}{r^2(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{m\mu}{r^2(\alpha\cos 2\theta + \beta\sin 2\theta + \gamma)^{3/2}},$$

где a, b, c — постоянные, а α, β, γ имеют значения: $\alpha = \frac{a-c}{2}$, $\beta = b$, $\gamma = \frac{a+c}{2}$. (Это один из законов центральной силы, найденных Дарбу и Альфеном.)

Ответ. Если положить $\psi(\theta) = \alpha\cos 2\theta + \beta\sin 2\theta + \gamma$, то придется проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\mu}{C^2}[\psi(\theta)]^{-\frac{3}{2}}.$$

Если $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$ или $b^2 - ac$ отличны от нуля, то, как легко убедиться, это уравнение допускает частный интеграл вида

$$\frac{1}{r} = \lambda\sqrt{\psi(\theta)}, \quad \lambda = \frac{\mu}{C^2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}.$$

Следовательно, уравнение траектории будет

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta + \lambda\sqrt{\psi(\theta)}$$

с произвольными постоянными A, B, C или A, B, λ. Это — коническое сечение, касающееся двух неподвижных прямых, определяемых уравнением

$$\psi(\theta) = 0 \quad \text{или} \quad \alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy + \gamma(x^2 + y^2) = 0.$$

Если $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$ или $b^2 - ac = 0$, то $\psi(\theta) = \omega^2(\theta)$, где функция $\omega(\theta)$ имеет вид $k\cos\theta + l\sin\theta$. Уравнение имеет частное решение вида $\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{\omega(\theta)}$ и траектория будет

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{\lambda}{\omega(\theta)}.$$

Это — уравнение конического сечения, касающегося в начале координат неподвижной прямой $\omega(\theta) = 0$ или $kx + ly = 0$.

5. Доказать, что если удастся найти траекторию точки, движущейся под действием центральной силы $F = m\Phi(1/r, \theta)$, то удастся найти траекторию и в том случае, когда сила

$$F_1 = m\Phi\left(\frac{1}{r} - a\cos\theta - b\sin\theta, \theta\right)(1 - ar\cos\theta - br\sin\theta)^{-2},$$

где a и b — постоянные.

Ответ. Предполагается, что можно проинтегрировать уравнение

$$C^2\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) = -r^2\Phi\left(\frac{1}{r}, \theta\right),$$

и нужно доказать, что тогда можно проинтегрировать уравнение

$$C^2\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) = -\frac{r^2}{(1 - ar\cos\theta - br\sin\theta)^2}\Phi\left(\frac{1}{r} - a\cos\theta - b\sin\theta, \theta\right).$$

Но второе уравнение приводится к первому подстановкой

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + a\cos\theta + b\sin\theta.$$

6. Зная, что под действием силы $F = m\mu r$ точка описывает коническое сечение с центром в начале координат, найти траекторию точки, движущейся под действием силы

$$F_1 = \frac{m\mu}{r^2\left(\frac{1}{r} - a\cos\theta - b\sin\theta\right)^3}$$

(второй из законов силы, найденных Дарбу и Альфеном).

Ответ. Этот вопрос является приложением задачи 5. Общее уравнение траектории, описываемой под действием силы F_1, имеет вид

$$\frac{1}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta + \sqrt{\alpha\cos^2\theta + 2\beta\cos\theta\sin\theta + \gamma\sin^2\theta},$$

где α, β, γ — три произвольные постоянные. Эта траектория является таким коническим сечением, что поляра начала координат относительно него является фиксированной прямой $ax + by - 1 = 0$.

7. *Годограф.* При движении планеты вокруг Солнца откладывают от центра Солнца отрезки, равные и параллельные скоростям планеты в ее различных положениях. Найти геометрическое место концов этих отрезков, называемое *годографом скорости.*

Ответ. Годографом является окружность, центр которой находится на ординате фокуса и которая содержит фокус внутри себя. Это можно доказать, опираясь на соотношение $pv = C$, или на то, что геометрическое место проекций фокуса на касательные есть круг, или на то, что фигура, обратная кругу, есть круг.

8. Для нахождения годографа скорости точки, описывающей плоскую кривую по закону площадей вокруг центра O, надо: а) построить подеру $r(\varphi)$ этой кривой относительно центра O (геометрическое место оснований, опущенных из центра O на касательные к кривой); б) найти инверсию подеры [кривую $\rho(\varphi)$, где $\rho = k^2 r$, $k = \text{const.}$ — радиус инверсии]; в) повернуть инверсию подеры на 90° вокруг O.

Для того чтобы годограф был окружностью, необходимо и достаточно, чтобы подера траектории была окружностью. В этом случае сама траектория будет коническим сечением с фокусом в точке O и сила будет обратно пропорциональна квадрату расстояния.

9. Точка описывает по закону площадей окружность, проходящую через центр площадей O. Найти закон силы: 1) в функции расстояния r, 2) в виде $\varphi(\theta)/r^2$.

Ответ.
$$1)\ -\frac{m\mu}{r^5};\quad 2)\ -\frac{m\mu}{r^2\cos^3\theta}.$$

10. Найти движение точки под действием центральной силы $F = -2m\mu/r^5$, $\mu > 0$.

Ответ. По теореме кинетической энергии имеем $v^2 = \frac{\mu}{r^4} + h$. Нужно различать случаи, когда величина $h = v_0^2 - \frac{\mu}{r_0^4}$ положительна, отрицательна или равна нулю. Пусть $h < 0$. Тогда дифференциальное уравнение траектории будет
$$d\theta = \frac{C\,dr}{\sqrt{hr^4 - C^2r^2 + \mu}} = \frac{C\,dr}{\sqrt{h(r^2 - a^2)(r^2 + b^2)}},$$
где явно указано, что один из корней многочлена относительно r^2 положителен, а другой отрицателен.

Полагая $r = a\cos\varphi$ и $\frac{\sqrt{-h(a^2+b^2)}}{C} = g$, найдем в нормальной форме
$$g\,d\theta = \pm\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},\quad k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, $\varphi = \operatorname{am}[g(\theta - \theta_0)]$ и уравнение траектории получается в виде
$$r = a\,\operatorname{cn}[g(\theta - \theta_0)].$$

Время можно определить по формулам
$$C\,dt = r^2\,d\theta,\quad Ct = a^2\int \operatorname{cn}^2[g(\theta - \theta_0)]\,d\theta,$$
где интеграл может быть выражен через функции Θ и H Якоби.

Если положить $b=\infty$, $h=0$, $hb^2=-\mu a^2=-C^2$, $k^2=0$, то, как вытекает из соотношений между коэффициентами и корнями, получится окружность $r=a\cos(\theta-\theta_0)$.

11. *Функции Бесселя.* Доказать следующие соотношения:

$$kJ_k(x)=\frac{x}{2}[J_{k+1}(x)+J_{k-1}(x)], \tag{1}$$

$$\frac{dJ_k(x)}{dx}=\frac{1}{2}[J_{k-1}(x)-J_{k+1}(x)] \tag{2}$$

и

$$\frac{d^2J_k(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ_k(x)}{dx}+\left(1-\frac{k^2}{x^2}\right)J_k(x)=0. \tag{3}$$

Эти соотношения можно легко проверить, если заменить функции J их выражениями в виде определенных интегралов. Возьмем, например, первое. Действие сведется к доказательству соотношения

$$\int\limits_0^\pi k\cos(k\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi-\frac{x}{2}\int\limits_0^\pi\{\cos[(k+1)\varphi-x\sin\varphi]+$$
$$+\cos[(k-1)\varphi-x\sin\varphi]\}\,d\varphi=0$$

или, заменяя сумму двух косинусов произведением косинусов, к доказательству соотношения

$$\int\limits_0^\pi\cos(k\varphi-x\sin\varphi)(k\,d\varphi-x\cos\varphi\,d\varphi)=0.$$

Это соотношение очевидно, так как после интегрирования получается выражение $\sin(k\varphi-x\sin\varphi)$, обращающееся в нуль на пределах.

12. Развернуть $J_k(x)$ в ряд по целым возрастающим положительным степеням x.

Ответ. Можно воспользоваться выражением $J_k(x)$ в виде определенного интеграла; коэффициенты разложения будут содержать интегралы вида

$$\int\limits_0^\pi\cos k\varphi\sin^m\varphi\,d\varphi,\qquad\int\limits_0^\pi\sin k\varphi\sin^m\varphi\,d\varphi,$$

которые легко вычисляются заменой $\sin^m\varphi$ синусами и косинусами углов, кратных φ.

Можно также воспользоваться дифференциальным уравнением (3), подставляя в него $J_k(x)$ в виде ряда

$$J_k(x)=x^k\left(a_0+a_1\frac{x}{1}+a_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+a_\nu\frac{x^\nu}{\nu!}+\ldots\right)$$

и вычисляя коэффициенты при помощи рекуррентных формул.

13. Теорема Эйлера. Время $\mathcal{T}$, затрачиваемое кометой для прохождения по параболической траектории от точки P до точки P', можно найти из формулы

$$6\sqrt{f(M+m)}\,\mathcal{T}=(r+r'+\sigma)^{\frac{3}{2}}\mp(r+r'-\sigma)^{\frac{3}{2}},$$

где r и r' — радиусы-векторы обоих положений P и P', а σ — хорда PP'.

(Мы докажем эту теорему ниже, в п. 304. См. также Тисеран Mécanique céléste, стр. 112.)

14. Точка, притягиваемая неподвижным центром по закону Ньютона, описывает гиперболическую траекторию. Вычислить также положение в каждый момент времени.

Применить тот же метод, что и для эллипса (п. 237); это введет логарифмы и показательные функции вместо функций тригонометрических и им обратных.

15. Метод последовательных приближений для решения уравнения Кеплера (п. 239). Пусть u — корень уравнения. Доказать следующие предложения.

1) На тригонометрической окружности отложим от начала A дуг две равные и противоположные по знаку дуги AM и AM', равные по абсолютному значению $\frac{\pi}{2} - e$. Если конец дуги ζ лежит на дуге MAM', то $\cos u$ положителен; если нет, то отрицателен.

2) Если $\cos u$ положителен, что зависит от расположения ζ, то все значения последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *начиная с некоторого момента*, будут приближаться к u, причем или все с избытком или все с недостатком.

3) Если, наоборот, $\cos u$ отрицателен, то приближенные значения корня u, начиная с некоторого момента, будут *попеременно* приближаться к u то с избытком, то с недостатком, наподобие непрерывных дробей.

16. Притягивающий центр с абсциссой ξ колеблется на оси Ox по закону $\xi = a \cos nt$. Этот центр притягивает свободную материальную точку M пропорционально расстоянию. Найти движение точки M.

(Проекция траектории на плоскость yz будет эллипсом с центром в точке O.)

17. Найти движение точки, вызванное центральной силой, пропорциональной $v^2 r/\rho$, где v — скорость точки, r — расстояние от нее до центра сил и ρ — радиус кривизны траектории. (Резаль, Comptes rendus, т. XC, стр. 769.)

18. Найти движение точки, находящейся под действием центральной силы постоянной величины. Исследовать траекторию. (θ определяется как функция r эллиптическим интегралом. Ниже, при изложении естественных уравнений движения точки на поверхности, мы увидим, что к этой задаче можно привести исследование движения тяжелой точки по конусу вращения с вертикальной осью.)

19. Найти движение материальной точки, находящейся под действием центральной силы

$$F = -m\left[\frac{2k^2(a^2+b^2)}{r^3} - \frac{3k^2a^2b^2}{r^7}\right],$$

где a — начальное расстояние точки от притягивающего центра. Начальная скорость перпендикулярна начальному радиусу-вектору и равна k/a.

(Траектория является инверсией эллипса относительно его центра.)

20. Найти движение точки, находящейся под действием центральной силы

$$F = -\frac{m\mu}{r^2\cos^3\theta}.$$

(Траектория — коническое сечение; частный случай законов, найденных Альфеном и Дарбу.)

21. *Центральные силы с сопротивлением среды.* Точка массы 1 движется под действием центральной силы F и сопротивления R, касательного к траектории. Доказать, что траектория плоская. Далее. приняв плоскость траектории за плоскость xy и обозначив через S величину $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$, через p — расстояние от центра сил O до касательной и через ρ — радиус кривизны, доказать формулы $F = -\frac{r}{p^3}\frac{S^2}{\rho}$, $R = -\frac{S}{p^2}\frac{dS}{ds}$.

(Можно исходить из тождества $\frac{dx}{dt} = \frac{S\,dx}{x\,dy - y\,dx}$, которое нужно продифференцировать, вспомнив, что $x\,dy - y\,dx = p\,ds$, $dy\,d^2x - dx\,d^2y = \frac{ds^3}{\rho}$, $v = \frac{ds}{dt} = \frac{S}{p}$.) В частности, если $R = kv^2$, то получается интеграл $S = Ae^{-ks}$, заменяющий интеграл площадей, причем s — описанная дуга кривой. (Сиаччи, Comptes rendus, т. LXXXVIII.)

22. Доказать, что если в предыдущем упражнении предположить, что сопротивление пропорционально скорости, $R = kv$, то будет существовать интеграл

$$S = Ce^{-kt}.$$

(Эллиот.)

23. Найти движение точки массы 1 под действием центральной силы равной $-\frac{\mu_1}{r^2} - \frac{3\mu^2}{r^4}$. Этот закон сил, с достаточной для астрономии точностью, является приближенным выражением притяжения удаленной точки сфероидом. (Гюльден, Comptes rendus, т. XCL, стр. 957.)

24. Определить движение материальной точки, притягиваемой неподвижным центром, пропорционально расстоянию, при воздействии сопротивления среды, пропорционального скорости.

(Траектория плоская; для определения x и y в функции от t получаются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

25. Материальная точка, притягиваемая массой M, описывает круговую орбиту радиуса a. Обозначим через θ период обращения, приняв за единицу времени естественный час ($f = 1$). Имеем $\theta = 2\pi\sqrt{a^3/M}$. Если M — масса куба воды со стороной a, то $M = a^3$, $\theta = 2\pi$. Тогда материальная точка будет стрелкой абсолютных часов; за каждую единицу времени она будет описывать дугу, равную радиусу. (Липпман, Comptes rendus, 8 мая 1899.)

26. Исследовать изменение элементов траектории планеты или кометы под действием сопротивления среды, определяемого равенством $R = k\frac{v^n}{r^{n'}}$. Показать, что большая ось постоянно убывает; что эксцентриситет не изменяется, если $n + n' = 1$, и уменьшается, если $n + n' > 1$; что круговое движение устойчиво в обоих этих случаях.

(Нужно продифференцировать по a и v^2 формулы п. 237, вводя $\cos u$.) (А. Веронне, Comptes rendus, т. CLXXII, CLXXVII.)

ГЛАВА XII

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ ИЛИ ДВИЖУЩЕЙСЯ КРИВОЙ

I. Движение по неподвижной кривой

244. Уравнения движения. Пусть дана кривая, по которой движется точка, и MF — результирующая действующих на эту точку внешних сил. Точка оказывает на кривую некоторое давление и кривая действует на точку равной и прямо противоположной реакцией, которая будет нормальна к кривой, если предположить, что отсутствует трение. Вследствие этого точка может рассматриваться как свободная в пространстве при условии, что к ней прилагаются сила F и реакция MN (рис. 154). Так как положение точки на кривой зависит только от одного параметра, то для определения движения достаточно только одного уравнения, не содержащего реакции. Это уравнение мы *получим по теореме кинетической энергии в виде*

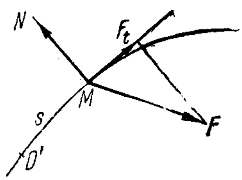


Рис. 154.

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Уравнение не содержит реакции N, так как последняя, оставаясь нормальной к перемещению, не производит никакой работы.

Для завершения вычислений нужно выразить координаты точки кривой в функции некоторого параметра q:

$$x = \varphi(q), \quad y = \psi(q), \quad z = \omega(q).$$

Тогда имеем

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \omega'^2)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2, \qquad (1)$$

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = (X\varphi' + Y\psi' + Z\omega')\,dq = Q\,dq, \qquad (2)$$

где Q обозначает выражение $X\varphi' + Y\psi' + Z\omega'$. В наиболее общем случае, который может представиться, сила зависит от положения движущейся точки, ее скорости и времени. Тогда компоненты X,

Y, Z, а следовательно, и Q будут функциями от $q, \frac{dq}{dt}$ и t, и уравнение кинетической энергии, написанное в виде

$$d\left[\frac{m}{2}(\varphi'^2+\psi'^2+\omega'^2)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right]=Q\,dq,$$

будет дифференциальным уравнением второго порядка, определяющим q в функции t.

В частном случае, когда сила зависит только от положения точки, Q будет функцией только от q, и интегрирование уравнения приводится к квадратурам. Действительно, уравнение кинетической энергии будет

$$d\frac{mv^2}{2}=Q\,dq, \quad \frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{q_0}^{q}Q\,dq.$$

Из этого уравнения можно найти $\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$ в функции q, для чего нужно заменить v^2 его значением (1). Получим

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2=f(q), \quad \frac{dq}{dt}=\pm\sqrt{f(q)}, \quad t-t_0=\pm\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{f(q)}}.$$

Таким образом, задача решается двумя последовательными квадратурами. Выражение $\frac{dq}{dt}$ содержит два знака. В начале движения известно, какой знак нужно взять, так как знак начальной скорости определяет знак начального значения $\frac{dq}{dt}$. Этот знак нужно сохранять до тех пор, пока $\frac{dq}{dt}$ не обратится в нуль; если по истечении конечного промежутка времени функция $f(q)$ обратится в нуль, то скорость тоже обратится в нуль; тогда направление касательной составляющей силы определит направление движения, а следовательно, и знак $\frac{dq}{dt}$.

Если существует силовая функция $U(x, y, z)$, то первое интегрирование производится сразу. Имеем

$$\frac{mv^2}{2}=U(x, y, z)+h,$$

где значение h равно $\frac{mv_0^2}{2}-U(x_0, y_0, z_0)$. После замены x, y, z их выражениями через q, вычисления завершаются так, как указано выше.

245. Устойчивость равновесия. Допустим, что сила X, Y, Z зависит только от положения движущейся точки. Тогда величина Q будет функцией только от q и для нахождения положений равновесия нужно найти значения q, обращающие Q в нуль (п. 92). Эта задача сводится к тем же вычислениям, что и при нахождении максимума и минимума функции

$$U(q)=\int Q\,dq,$$

определенной с точностью до аддитивной постоянной. Мы хотим доказать, следуя Лежен-Дирихле, что если для какого-нибудь значения $q=a$ эта функция U действительно имеет максимум, то соответствующее положение равновесия *устойчиво*.

Мы можем для упрощения положить $a=0$, так как это равносильно замене параметра q новым параметром $q-a$. Мы можем также предположить, что функция $U(q)$ обращается в нуль в рассматриваемом положении равновесия при $q=0$, так как это сводится к подходящему выбору произвольной постоянной, которую можно добавить к U, т. е. нужно принять

$$U(q)=\int_0^q Q\,dt.$$

Тогда при $q=0$ функция $U(q)$ будет иметь максимум, равный нулю; это значит, что если ε — произвольная положительная постоянная, меньшая некоторой, наперед заданной величины, то при всех значениях q, отличных от нуля и удовлетворяющих единственному условию

$$-\varepsilon\leqslant q\leqslant\varepsilon, \tag{1}$$

функция $U(q)$ будет отрицательной.

Считая, что число ε выбрано сколь угодно малым, сместим точку из положения равновесия в некоторое начальное положение, соответствующее значению q_0 параметра q, заключенному между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, и сообщим ей начальную скорость v_0. Докажем, что можно найти два, таких положительных числа α и β, что при выполнении только двух условий

$$v_0<\alpha,\qquad -\beta<q_0<\beta,$$

точка в своем последующем движении не выйдет за крайние положения, соответствующие значениям $\pm\varepsilon$ параметра q, и даже не достигнет этих положений. В самом деле, так как величины $U(\varepsilon)$ и $U(-\varepsilon)$ отрицательны и не равны нулю, то можно найти положительное число p, которое будет одновременно меньше, чем $-U(\varepsilon)$ и меньше, чем $-U(-\varepsilon)$, так что сумма $U(q)+p$, будучи положительной при $q=0$, станет отрицательной при $q=\pm\varepsilon$. При движении точки, согласно теореме кинетической энергии, будет

$$\frac{mv^2}{2}=U(q)+\frac{mv_0^2}{2}-U(q_0).$$

Определим v_0 и q_0 из условий

$$\frac{mv_0^2}{2} < \frac{p}{2}, \quad -U(q_0) < \frac{p}{2}.$$

Из первого неравенства получаем для v_0 верхний предел α, равный $\sqrt{p/m}$; второе неравенство в силу непрерывности функции $U(q)$, обращающейся в нуль при $q=0$, требует, чтобы q_0 было по абсолютному значению меньше некоторого положительного предела β. Тогда, если эти начальные условия выполнены, получим

$$\frac{mv^2}{2} < U(q) + p.$$

Отсюда видно, что q не может достигнуть пределов $\pm\varepsilon$, так как, если q достигнет какого-нибудь из этих пределов, то кинетическая энергия $mv^2/2$, являющаяся существенно положительной величиной, должна оставаться меньше правой части, которая при $q = \pm\varepsilon$ становится отрицательной, что является абсурдом. Следовательно, равновесие действительно устойчиво.

Примечание. Когда сила зависит от скорости, величина Q зависит по-прежнему от q и еще от $\frac{dq}{dt}$. Для нахождения положений равновесия нужно найти значения q, обращающие в нуль Q при условии, что $\frac{dq}{dt} = 0$. Если какое-нибудь положение равновесия будет найдено, то для того, чтобы узнать, устойчиво оно или неустойчиво, нужно будет исследовать движение точки, предположив, что она бесконечно мало смещена из этого положения равновесия и что ей сообщена бесконечно малая скорость. Примером того, как это нужно делать, служит теория математического маятника, подверженного действию сопротивления среды, пропорционального скорости. В дальнейшем мы дадим систематическое изложение исследования малых движений около положения устойчивого равновесия.

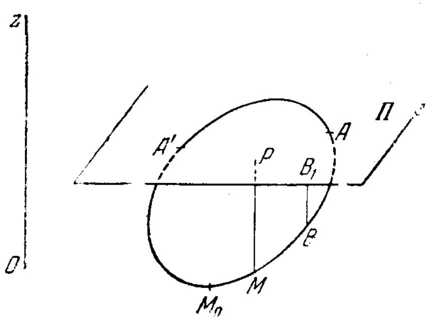


Рис. 155.

246. Движение тяжелой точки по неподвижной кривой. Возьмем три прямоугольные оси, причем ось Oz направим вертикально верх. Проекции силы равны (рис. 155)

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-mg,$$

элементарная работа силы тяжести есть $-mg\,dz$, и уравнение кинетической энергии будет

$$\frac{v^2}{2} = -gz + h,$$

что можно написать в виде

$$v^2 = 2g(a - z),$$

где обозначено

$$\frac{h}{g} = a.$$

Рассмотрим плоскость П, уравнение которой $z = a$. Расстояние MP от движущейся точки до этой плоскости равно $a - z$, так что скорость определяется формулой

$$v^2 = 2g\overline{PM}.$$

Отсюда видно, что численное значение скорости будет такое, как при падении точки по вертикали из P в M без начальной скорости.

Допустим, что рассматриваемая кривая замкнута. Могут представиться два случая в зависимости от того, будет ли плоскость П пересекать эту кривую или нет. Каково бы ни было начальное положение M_0 точки, ей всегда можно сообщить такую достаточно большую начальную скорость v_0, чтобы плоскость П была расположена сколь угодно высоко, так как

$$a = \frac{v_0^2}{2g} + z_0.$$

Допустим, что v_0 настолько велико, что плоскость П находится над кривой. Тогда скорость никогда не обратится в нуль и движущаяся точка будет бесконечное число раз оборачиваться по своей траектории. Движение будет периодическим, наибольшая скорость будет в наинизшей точке, а наименьшая — в наивысшей.

Допустим теперь, что плоскость П пересекает кривую. Пусть A и A' — две последовательные точки пересечения. Допустим, что точка начинает движение из наинизшего положения M_0 дуги AMA' в сторону A. Легко видеть, что движущаяся точка подойдет к положению A сколь угодно близко; в самом деле, скорость между M_0 и B будет все время больше, чем $\sqrt{2g\overline{BB_1}}$, где $\overline{BB_1}$ — расстояние от точки B до плоскости П, и точка обязательно придет в положение B за конечный промежуток времени. Если касательная в A не горизонтальна, то движущаяся точка достигнет этого положения. Действительно,

$$v^2 = 2g(a - z) \quad \text{или} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(a - z),$$

откуда

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{ds}{\pm\sqrt{a - z}}.$$

Будем отсчитывать дуги от положения M_0, а время от начального момента. Так как s должно возрастать вместе с t, то в написанном уравнении нужно взять знак плюс, и мы получим

$$\sqrt{2g}\,t=\int_{z_0}^{z}\frac{ds}{\sqrt{a-z}}=\int_{z_0}^{z}\frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{a-z}}\,dz.$$

Если касательная в точке A не горизонтальна, то $\frac{ds}{dz}$ будет оставаться конечным при $z=a$ и подынтегральное выражение будет обращаться в бесконечность порядка $1/2$. Следовательно, этот интеграл остается конечным, когда z стремится к a. Время T, нужное для достижения точки A, будет тогда определяться формулой

$$\sqrt{2g}\,T=\int_{z_0}^{z=a}\frac{ds}{\sqrt{a-z}}.$$

После достижения положения A движущаяся точка будет возвращаться к M_0, куда она придет со скоростью v_0 и дальше будет двигаться по дуге M_0A' аналогичным образом в течение времени T_1, если касательная в точке A' не горизонтальна. Движение будет, следовательно, колебанием между точками A и A', и продолжительность каждого простого колебания будет $T+T'$.

Можно указать два предела, между которыми должно заключаться T; эти два предела будут тем ближе друг к другу, чем меньше дуга M_0A. Если положить

$$\frac{dz}{ds}=\gamma,$$

то, как известно, будет

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны и γ' — косинус угла, который образует этот радиус кривизны с осью Oz; этот косинус положителен, так как угол острый. Пусть k и K — пределы для γ'/ρ на рассматриваемой дуге; тогда между точками M_0 и A будет

$$K\geqslant\frac{d^2z}{ds^2}\geqslant k,$$

откуда, интегрируя, заключаем, что

$$\frac{dz}{ds}-Ks\leqslant 0,$$

так как эта функция, обращающаяся в нуль при $s=0$, согласно предыдущему неравенству, монотонно убывает. Вследствие этого монотонно убывающей будет и первообразная функция $z-\frac{K}{2}s^2$. Написав, что она больше своего конечного значения, получим

$$z-\frac{K}{2}s^2>a-\frac{K}{2}l^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a-z}}>\sqrt{\frac{2}{K}}\frac{1}{\sqrt{l^2-s^2}},$$

где l — длина дуги M_0A. Заменяя в выражении для T величину $1/\sqrt{a-z}$ правой частью этого неравенства, получим

$$\sqrt{2g}\,T>\sqrt{\frac{2}{K}}\int_0^l\frac{ds}{\sqrt{l^2-s^2}},\qquad T>\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{Kg}}.$$

Точно так же, исходя из неравенства $\frac{d^2z}{ds^2}-k\geqslant 0$, найдем

$$T<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{kg}}.$$

Если уменьшать начальную скорость таким образом, чтобы плоскость П приближалась к точке M_0, то обе величины K и k будут одновременно стремиться к одному и тому же пределу, а именно, к значению γ'/ρ в наинизшей точке, которое мы отметим индексом нуль. Поэтому, когда колебание будет иметь бесконечно малую амплитуду, продолжительность одного простого полуразмаха будет равна $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{g\gamma_0'}}$, а продолжительность простого размаха будет равна $\pi\sqrt{\frac{\rho_0}{g\gamma_0'}}$, если для части M_0A' траектории величина γ'/ρ имеет тот же предел, что и для части M_0A. В частности, если траектория является окружностью радиуса R в вертикальной плоскости, то получится известное выражение для продолжительности бесконечно малого размаха $\pi\sqrt{R/g}$.

Вернемся теперь к колебаниям конечной амплитуды и рассмотрим случай, когда касательная в точке A горизонтальна. Вспомним формулу, определяющую время:

$$\sqrt{2g}\,t=\int_{z_1}^{z}\frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{a-z}}\,dz.$$

Когда z стремится к a, тогда s стремится к длине l дуги M_0A, а стоящие под знаком интеграла выражения $1/\sqrt{a-z}$ и $\frac{ds}{dz}$ неограниченно возрастают. Приняв s за независимую переменную, получим

$$\sqrt{2g}\,t=\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{a-z}}.$$

Пусть λ — порядок малости величины $a-z$ относительно $s-l$ вблизи $s=l$. Тогда подынтегральное выражение будет обращаться в бесконечность порядка $\lambda/2$ относительно $\frac{1}{s-l}$. Если $\lambda/2 \geqslant 1$, то интеграл, определяющий t, будет неограниченно возрастать; если, напротив, $\lambda/2 < 1$, то интеграл останется конечным. Первый случай представится для обыкновенной точки, для которой $\lambda = 2$; в этом можно убедиться, рассматривая z как функцию от s и разлагая ее по формуле Тэйлора вблизи $s=l$ и замечая, что $\frac{dz}{ds}$ обращается, по предположению, в нуль при $s=l$. Второй случай может представиться для точки возврата, для которой в общем случае $\lambda = {}^3/_2$. Если, следовательно, A является обыкновенной точкой с горизонтальной касательной, то движущаяся точка будет неограниченно приближаться к этому положению, никогда его не достигая. Если A является точкой возврата, то движущаяся точка может достигнуть точки возврата A со скоростью, равной нулю, после чего она остановится в этом положении равновесия. Такой пример мы найдем в упражнении 5.

247. Нормальная реакция. Естественные уравнения. Если применить естественные уравнения движения (п. 209), то получатся: во-первых, одно уравнение, определяющее движение, и, во-вторых, два уравнения, определяющие нормальную реакцию.

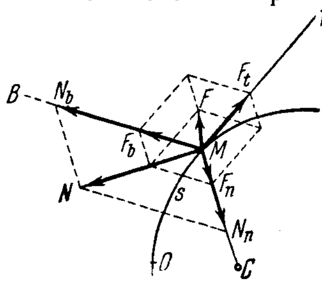


Рис. 156.

Проведем в точке M касательную MT в сторону возрастания дуг. Пусть $MC=\rho$ — радиус главной кривизны (рис. 156); проведем бинормаль MB. Так как единственными силами, действующими на точку M, будут сила F и нормальная реакция N, то естественные уравнения движения для рассматриваемого случая будут:

$$F_t = m\frac{dv}{dt}, \tag{1}$$

$$F_n + N_n = m\frac{v^2}{\rho}, \tag{2}$$

$$F_b + N_b = 0. \tag{3}$$

Первое из этих уравнений, являющееся не чем иным, как уравнением кинетической энергии в другой форме, определяет движение по кривой, так как оно не содержит реакции; два других определяют составляющие N_n и N_b реакции. Вычисление упрощается, если имеется силовая функция U. В этом случае уравнение кинетической энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = U + h$$

и, внося это значение v^2 в уравнение (2), можно будет определить реакцию, не зная движения.

Уравнение (1), написанное в виде

$$F_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d(mv^2)}{ds},$$

действительно идентично с уравнением кинетической энергии. Оно показывает, что движение не изменится, если деформировать кривую, не изменяя ее длины, и изменять при этом силу таким образом, чтобы не изменялась ее касательная составляющая. Эта операция отразится только на нормальной реакции. В частности, таким путем можно, не изменяя движения, преобразовать кривую линию в прямую и свести задачу к вопросу прямолинейного движения.

Дополнение. В качестве дополнения к сказанному выше, докажем следующую теорему:

Пусть свободная точка, начинающая двигаться из положения M_0, с последовательными начальными скоростями v'_0, $v''_0, \ldots$, под действием сил, соответственно равных F', $F'', \ldots$, описывает одну и ту же траекторию C. Допустим теперь, что эта точка начинает движение по неподвижной кривой, имеющей форму траектории C, и что при этом на точку одновременно действуют силы $\alpha' F'$, $\alpha F'', \ldots$, где α', $\alpha'', \ldots$ — постоянные; тогда *в этом движении нормальная реакция кривой будет направлена по главной нормали и будет обратно пропорциональна радиусу кривизны.*

Пусть v', $v'', \ldots$ — скорости, которыми последовательно обладает точка в серии свободных движений. Естественные уравнения какого-нибудь из этих движений, например первого, будут

$$\left.\begin{array}{l} F'_t = m\dfrac{dv'}{dt} = mv'\dfrac{dv'}{ds}, \quad F'_n = m\dfrac{v'^2}{\rho}, \quad F'_b = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

При несвободном движении в уравнения войдут нормальные реакции неподвижной кривой, и уравнения движения примут вид

$$mv\frac{dv}{ds} = \alpha' F'_t + \alpha'' F''_t + \ldots,$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = N_n + \alpha' F'_n + \alpha'' F''_n + \ldots,$$

$$0 = N_b + \alpha' F'_b + \alpha'' F''_b + \ldots$$

Отсюда, на основании уравнений (1) получим сначала $N_b = 0$, а затем

$$v\frac{dv}{ds} = \alpha' v'\frac{dv'}{ds} + \alpha'' v''\frac{dv''}{ds} + \ldots$$

и, интегрируя, найдем

$$v^2 = c + \alpha' v'^2 + \alpha'' v''^2 + \ldots,$$

где постоянная c имеет значение

$$v_0^2 - \alpha' v_0'^2 - \alpha'' v_0''^2 - \ldots$$

Наконец,

$$\frac{mv^2}{\rho} = N_n + \alpha' \frac{mv'^2}{\rho} + \alpha'' \frac{mv''^2}{\rho} + \ldots,$$

$$N = \frac{m}{\rho}(v^2 - \alpha' v'^2 - \alpha'' v''^2 - \ldots) = \frac{m}{\rho} C.$$

Это равенство совместно с равенством $N_b = 0$ и доказывает теорему, которую мы имели в виду.

Начальными скоростями можно распорядиться таким образом, чтобы постоянная c была равна нулю. В этом случае реакция будет все время равняться нулю и точка свободно опишет заданную кривую. Этот последний результат установил Бонне.

Например, материальная точка может свободно описывать один и тот же эллипс под действием пяти следующих сил: притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояния со стороны каждого из фокусов, притяжения, пропорционального расстоянию со стороны центра и, наконец, притяжений со стороны осей, обратно пропорциональных кубу расстояний. Если, следовательно, заставить точку описывать эллипс под одновременным действием всех этих пяти сил при произвольных начальных условиях, то давление на эллипс будет обратно пропорционально радиусу кривизны.

248. Математический маятник. Математический маятник состоит из тяжелой материальной точки, движущейся без трения по окружности, расположенной в вертикальной плоскости (рис. 157).

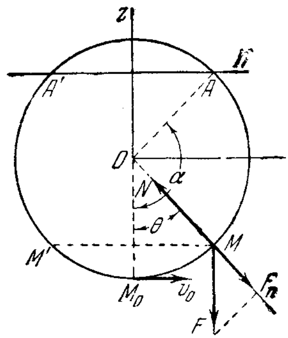


Рис. 157.

Возьмем оси, указанные на чертеже, и допустим, что точка приведена в движение из самого низкого положения M_0 $(z_0 = -l)$ с начальной скоростью v_0. По теореме кинетической энергии имеем

$$v^2 = 2g(a - z), \quad a = -l + \frac{v_0^2}{2g}.$$

1°. Допустим сначала, что прямая H $(z = a)$ пересекает окружность в двух точках A и A', т. е. что $a < l$, или $v_0 < 2\sqrt{lg}$. Тогда, как мы видели, движение будет изохронным колебанием между точками A и A'. Для исследования движения примем в качестве переменной угол $M_0OM = \theta$. Имеем:

$$z = -l\cos\theta, \quad a = -l\cos\alpha,$$

где α — угол наибольшего отклонения M_0OA.

В этой переменной выражение скорости будет

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$

и уравнение кинетической энергии примет вид

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Уравнение можно переписать так:

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

откуда

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Мы взяли знак плюс, предположив, что точка поднимается. Отсчитывая время от момента, когда точка выходит из M_0, получим

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^{\theta} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Полагая

$$\sin\frac{\theta}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2},$$

получим далее

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \qquad \left(k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Следовательно, задача свелась к эллиптическому интегралу, и только что написанное уравнение может быть заменено следующим *):

$$u = \operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

т. е.

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)} = \operatorname{dn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Таким образом, координаты $l\sin\theta$ и $l\cos\theta$ движущейся точки выражены как однозначные функции времени.

Для нахождения времени T, затрачиваемого точкой для перехода из M_0 в A, надо изменять θ от 0 до α, и, следовательно, u от 0 до 1. Полагая, как обычно,

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

получим для T значение $K\sqrt{l/g}$ и продолжительность простого колебания будет $2K\sqrt{l/g}$. Если эту величину добавить к t, то точка займет положение M', симметричное с M, и $\sin\theta$ изменит свой знак, что является проверкой известной формулы

$$\operatorname{sn}(x + 2K) = -\operatorname{sn} x.$$

---

*) См. Аппель и Лякур, Principes de la théorie des fonctions elliptiques.

Полезно знать разложение величины T по степеням $\sin\frac{\alpha}{2}$, т. е. величины K по возрастающим степеням k. Для получения этого разложения напишем по формуле бинома

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}}=1+\frac{1}{2}k^2u^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2u^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}k^{2n}u^{2n}+\ldots$$

и, опираясь на легко устанавливаемую формулу

$$\int_0^1\frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n},$$

получим

$$K=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\ldots\right]$$

и, следовательно,

$$T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+\ldots\right].$$

Для бесконечно малых колебаний ($\alpha=0$) получаем, таким образом,

$$T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Для колебаний с незначительной амплитудой можно заменить $\sin\frac{\alpha}{2}$ углом $\frac{\alpha}{2}$ и ограничиться только двумя первыми членами разложения. Получим

$$T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right).$$

2°. Нам нужно теперь рассмотреть случай, когда прямая П не пересекает окружности, т. е. когда $a>l$. Уравнение кинетической энергии $v^2=2g(a-z)$ может быть написано в виде

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g(a+l\cos\theta)=2g\left(a+l-2l\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

или, положив $k^2=\frac{2l}{a+l}$, в виде

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g(a+l)\left(1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Величина k^2 меньше 1, так как a больше l. Разрешая это уравнение относительно dt и полагая $\lambda=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2g(a+l)}}{l}$, получим

$$\lambda\,dt=\frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}},\qquad \lambda t=\int_0^\theta\frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Примем, наконец, $u = \sin\frac{\theta}{2}$ в качестве новой переменной. Тогда

$$\lambda t = \int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad u = \operatorname{sn}(\lambda t),$$

т. е. $\sin\frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}(\lambda t)$. Отсюда найдем

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2(\lambda t)} = \operatorname{cn}(\lambda t).$$

Время T, необходимое точке для достижения наиболее высокого положения, получится при изменении θ от 0 до π или при изменении u от 0 до 1; следовательно

$$\lambda T = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right] = K.$$

3°. Остается, наконец, рассмотреть промежуточный случай, когда прямая II касается заданной окружности, т. е. когда $a = l$. Тогда интегрирование можно выполнить при помощи показательных функций, так как модуль k^2 предыдущих эллиптических функций делается равным 1. В самом деле, вернемся к уравнению кинетической энергии $v^2 = 2g(a-z)$. Напишем

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(l + l\cos\theta) = 4gl\cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Интегрируя, получим

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как t должно обращаться в нуль одновременно с θ. Когда t неограниченно возрастает, θ, возрастая, стремится к пределу π; движущаяся точка неограниченно приближается к наивысшему положению, никогда его не достигая. Оно является положением *неустойчивого* равновесия.

Вычисление реакции. Реакция в каждой точке направлена по радиусу окружности; она считается положительной в сторону центра и отрицательной в противоположном направлении. Пусть тогда N — ее алгебраическое значение; второе естественное уравнение принимает вид

$$F_n + N = \frac{mv^2}{\rho},$$

так как N совпадает со своей проекцией на главную нормаль. С другой стороны (рис. 157),

$$F_n = -mg\cos\theta = \frac{mgz}{l},$$

$$v^2 = 2g(a-z),$$

и радиус кривизны ρ равен длине l маятника; поэтому

$$N = \frac{2mg}{l}(a-z) - \frac{mgz}{l} = \frac{mg}{l}(2a-3z).$$

Следовательно, когда точка поднимается по окружности, реакция уменьшается, и ее максимум, существенно положительный, имеет место в наиболее низкой точке. Эта реакция обращается в нуль и меняет знак в точках, в которых окружность пересекается с прямой $z = \frac{2a}{3}$.

Если сообщить точке движение в трубке, изогнутой по окружности, то, как вытекает из изложенного выше, точка будет давить на внешнюю стенку трубки, когда реакция N положительна, и на внутреннюю, когда реакция отрицательна. Чаще всего движущаяся точка связывается с неподвижной точкой при помощи гибкой нити. Когда реакция положительна, нить остается натянутой; если же после обращения в нуль реакция должна стать отрицательной, то точка будет стремиться приблизиться к центру, и нить не сможет удержать ее на окружности. Если пренебречь массой нити, то точка покинет окружность в положении K, где $N = 0$ и начнет свободно перемещаться под действием веса; следовательно, она опишет параболу, касающуюся окружности в точке, где обе кривые имеют общий радиус кривизны. В самом деле, скорость точки, так же как и действующие на нее силы, с момента, когда она покидает окружность, будут изменяться непрерывно; естественное уравнение, определяющее mv^2/ρ, показывает, что радиус кривизны также изменяется непрерывно, и вследствие этого обе кривые будут действительно соприкасающимися в точке K. Парабола, имеющая вертикальную ось, определяется из условия касания в рассматриваемой точке *).

Найдем теперь, какие условия должны дополнительно выполняться, чтобы точка или покинула окружность, или осталась на ней. Рассмотрим прямые $\Delta\left(z = \frac{2a}{3}\right)$ и $\Pi\,(z = a)$ (рис. 157). Если a отрицательно, то реакция никогда не обратится в нуль, так как прямая Δ будет расположена над прямой Π. Точка, колеблясь между A и A', никогда этой прямой не достигнет и реакция будет везде положительная. Точно так же, если $2a/3$ больше чем l, то прямая Δ будет вне окружности и реакция не обратится в нуль; точка будет периодически непрерывным образом описывать окружность. Следовательно реакция может обратиться в нуль, только если

$$0 < a < \frac{3l}{2},$$

или, заменяя a его значением, если

$$\sqrt{2gl} < v_0 < \sqrt{5gl},$$

где v_0, как и выше, обозначает скорость в самой низкой точке.

249. Движение математического маятника в сопротивляющейся среде. Если не пренебрегать сопротивлением среды, в которой происходит движение, то достаточно к силам N и $-mg$, действующим на точку, добавить третью силу R, направленную по касательной к траектории в сторону, противоположную движению, и возрастающую вместе со скоростью.

Уравнение кинетической энергии или первое естественное уравнение

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t$$

представится тогда в виде

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta - R,$$

*) Речь идет о касании второго порядка. (*Прим. перев.*)

в котором силы спроектированы на касательную, направленную в сторону положительных дуг.

1°. Рассмотрим случай малых колебаний в среде, в которой сопротивление пропорционально скорости. При этих предположениях имеем

$$\frac{R}{ml} = 2k\frac{d\theta}{dt},$$

и уравнение движения после замены $\sin\theta$ на θ примет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2k\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Это уравнение одинаково пригодно как для восходящего движения, так и для нисходящего, так как знак силы R изменяется с направлением движения. Уравнение движения является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования положим

$$\theta = e^{rt},$$

и тогда для нахождения r получим уравнение

$$r^2 + 2kr + \frac{g}{l} = 0,$$

$$r = -k \pm \sqrt{k^2 - \frac{g}{l}}.$$

Если предположить сопротивление небольшим, то оба эти корня будут комплексными и мы можем написать

$$r = -k \pm \mu i, \quad \mu^2 = \frac{g}{l} - k^2,$$

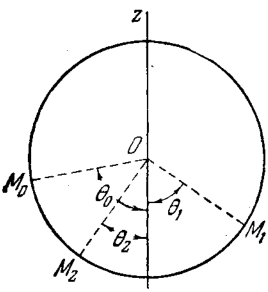


Рис. 158.

так что общий интеграл уравнения движения будет

$$\theta = e^{-kt}(A\cos\mu t + B\sin\mu t).$$

Угловую скорость найдем из равенства

$$\frac{d\theta}{dt} = e^{-kt}[(B\mu - Ak)\cos\mu t - (A\mu + Bk)\sin\mu t].$$

Допустим, что движущаяся точка опускается без начальной скорости из положения M_0; пусть θ_0 — угол начального отклонения. Полагая в предыдущих формулах $t = 0$, мы видим, что

$$A = \theta_0, \quad B = \frac{k\theta_0}{\mu}.$$

При этих значениях постоянных для угловой скорости получим

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta_0(k^2 + \mu^2)}{\mu}e^{-kt}\sin\mu t.$$

Движущаяся точка, выходя из M_0, опишет дугу окружности и дойдет до точки M_1 (рис. 158), в которой скорость обращается в нуль. Продолжительность t_1 этого полуразмаха есть первое значение переменной t, обращающее в нуль $\frac{d\theta}{dt}$, т. е. $t_1 = \frac{\pi}{\mu}$. После этого точка будет двигаться обратно до положения M_2, в которое она придет к моменту $t_2 = \frac{2\pi}{\mu}$ и т. д. Колебания будут изохронными, как и в пустоте, но продолжительность каждого из этих колебаний несколько увеличится, так как $\mu < \sqrt{g/l}$ и, следовательно, $\pi/\mu > \pi\sqrt{l/g}$.

Для изучения изменения амплитуды возьмем снова выражение для θ:

$$\theta = e^{-kt}\left(\theta_0 \cos \mu t + \frac{k\theta_0}{\mu} \sin \mu t\right).$$

Полагая $t_1 = \frac{\pi}{\mu}$, найдем

$$\theta_1 = -e^{-\frac{k\pi}{\mu}}\theta_0.$$

Следовательно, $\theta_1 < \theta_0$. К моменту $t_2 = \frac{2\pi}{\mu}$ будет $\theta_2 = \theta_0 e^{-2k\pi/\mu}$ и т. д. Следовательно, амплитуды изменяются по закону геометрической прогрессии со знаменателем $-e^{-k\pi/\mu}$.

2°. Уравнение движения легко интегрируется в случае колебаний с конечной амплитудой и в случае сопротивления, пропорционального квадрату скорости. Для восходящего движения имеем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta - k^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

а уравнение нисходящего движения получится, если заменить k^2 величиной $-k^2$. Примем за новую переменную $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$. Имеем

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta'}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{d\theta}\theta' = \frac{1}{2}\frac{d(\theta'^2)}{d\theta}$$

и уравнение движения станет линейным относительно θ'^2:

$$\frac{1}{2}\frac{d(\theta'^2)}{d\theta} + k^2\theta'^2 = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Уравнение без правой части имеет общий интеграл $\theta'^2 = Ae^{-2k^2\theta}$. Будем искать частный интеграл полного уравнения в виде $\theta'^2 = \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta$. Легко видеть, что для того, чтобы удовлетворялось предложенное уравнение, достаточно взять

$$\lambda = \frac{2g}{l(4k^4+1)}, \quad \mu = -\frac{4k^2g}{l(4k^4+1)}$$

и общий интеграл будет

$$\theta'^2 = Ae^{-2k^2\theta} + \frac{2g}{l(4k^4+1)}\cos\theta - \frac{4k^2g}{l(4k^4+1)}\sin\theta.$$

Отсюда можно найти θ при помощи квадратуры, которая для случая очень малых амплитуд может быть выполнена в конечной форме.

250. Циклоидальный маятник. Под этим термином мы понимаем материальную точку, перемещающуюся без трения по циклоиде с горизонтальной осью, расположенной в вертикальной плоскости и обращенной вогнутостью вверх.

Примем за начало самую низкую точку кривой и за ось z — направленную вверх вертикаль; пусть R — радиус образующего круга.

Напомним прежде всего некоторые элементарные свойства циклоиды. Рассмотрим какое-нибудь положение образующего круга и соответствующее положение точки M, описывающей циклоиду. Нормалью к кривой будет прямая MB (рис. 159), центр кривизны находится в точке E, симметричной к M относительно B, и геометрическое место центров кривизны E является циклоидой, одинаковой с заданной и с вершинами в точках A и A'. Наконец, касательная MC равна половине дуги OM, которую мы обозначим через s.

В прямоугольном треугольнике BMC имеем

$$MC^2 = BC \cdot CP,$$

т. е.

$$\frac{s^2}{4} = 2Rz, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{s}{4R}.$$

Проекция веса на касательную, равная $-mg\frac{dz}{ds}$, будет $-mg\frac{s}{4R}$. Следовательно, уравнение кинетической энергии, или естественное уравнение, будет

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4R}s.$$

Мы вновь получили такое же уравнение, как и в случае прямолинейного движения материальной точки, притягиваемой неподвижным центром пропорционально расстоянию. Общий интеграл этого уравнения будет

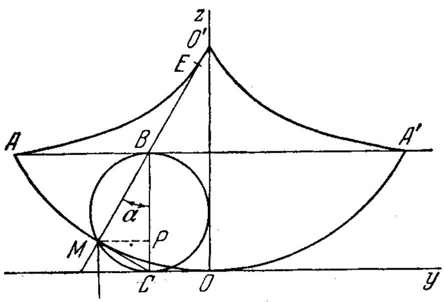


Рис. 159.

$$s = A\cos t\sqrt{\frac{g}{4R}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{4R}};$$

он приводится к виду

$$s = s_0\cos t\sqrt{\frac{g}{4R}},$$

если в начальный момент дуга $s = s_0$, а начальная скорость равна нулю. При этих условиях время, необходимое для достижения наиболее низкой точки, равно $T = \pi\sqrt{R/g}$. Период колебания не зависит, следовательно, от начального положения точки, т. е. от амплитуды: движение будет *таутохронным*.

Гюйгенс осуществил циклоидальный маятник следующим образом: в точке возврата O' развертки он закрепил нить длины $4R$, равной дуге $O'A$ развертки. По указанным выше свойствам, если нить заставить последовательно огибать обе дуги $O'A$ и $O'A'$, то конец M нити опишет рассматриваемую циклоиду.

Нормальная реакция. Одно из естественных уравнений движения будет

$$F_n + N = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Но

$$v^2 = 2g(a - z), \quad \rho = 2\overline{MB}, \quad F_n = -mg\cos\alpha = -mg\frac{2R - z}{MB},$$

где через α обозначен угол между нормалью и вертикальной линией и $2R - z$

равно проекции MB на вертикаль. Тогда

$$N=\frac{mg(a-z)}{MB}+\frac{mg(2R-z)}{MB}.$$

В частном случае, когда точка отпускается без начальной скорости из точки возврата, имеем $a=2R$, первое отношение станет равным второму и реакция будет

$$N=2\frac{mg(2R-z)}{MB}=-2F_n,$$

т. е. она будет по модулю равна, а по направлению противоположна удвоенной нормальной составляющей веса (Эйлер).

251. Движение тяжелой точки по кривой, расположенной в вертикальной плоскости, при действии трения и сопротивления среды. Допустим, для определенности, что кривая обращена вогнутостью вверх и что точка движется в направлении, противоположном направлению $O'S$, принятому за положительное направление отсчета дуг (рис. 160).

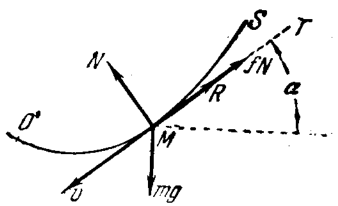


Рис. 160.

Обозначим через α угол между горизонталью и касательной MT, проведенной в сторону положительных дуг. Силами, действующими на точку, будут вес mg, нормальная реакция N, сила трения fN (п. 195) и сопротивление среды $R=m\varphi(v)$. Последние две силы направлены в сторону, противоположную скорости, т. е. по касательной MT. Естественными уравнениями будут:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\alpha+fN+m\varphi(v),$$

$$\frac{mv^2}{\rho}=N-mg\cos\alpha.$$

Исключая N из этих двух уравнений и заменяя $\frac{d^2s}{dt^2}$ производной $\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d(v^2)}{ds}$, получим уравнение

$$\frac{d(v^2)}{ds}=-2g(\sin\alpha-f\cos\alpha)+2f\frac{v^2}{\rho}+2\varphi(v). \qquad (1)$$

Вдоль кривой переменные α и ρ являются известными функциями дуги s. Мы имеем, следовательно, дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее v в функции s. После того, как эта функция будет найдена, величина t выразится через s при помощи квадратуры. Если сопротивление равно нулю или пропорционально квадрату скорости $[\varphi(v)=kv^2]$, то уравнение будет линейным относительно v^2 и можно будет закончить вычисления.

Точка кривой, в которой $\sin\alpha - f\cos\alpha$ обращается в нуль, является предельным положением равновесия для движущейся точки, если принимать во внимание трение и считать при этом f коэффициентом трения в момент начала движения (п. 190).

252. Таутохроны. Выше мы нашли, что движение тяжелой точки по циклоиде является таутохронным. Рассмотрим общий случай движения точки по любой заданной материальной кривой, под действием сил, тоже заданных. Говорят, что кривая является *таутохроной*, если на ней существует точка O' такая, что движущаяся точка, предоставленная самой себе без начальной скорости, приходит в положение O' за одно и то же время, каково бы ни было ее начальное положение. Точка O' называется *точкой таутохронизма*.

Необходимо различать два случая, а именно: будет ли точка находиться под действием сил, зависящих только от ее положения, или зависящих также и от скорости.

Первый случай. Силы зависят только от положения. Тогда возникает следующая задача

Пусть $F(X, Y, Z)$, где X, Y, Z — функции только x, y, z — суть заданные силы. По какой кривой нужно заставить двигаться без трения точку, чтобы движение было таутохронным?

Допустим, что одна из этих таутохронных кривых найдена, и будем отсчитывать дуги от точки таутохронизма O'. Имеем уравнение движения

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}.$$

Вдоль кривой координаты x, y, z являются функциями дуги s. Следовательно, X, Y, Z будут также определенными функциями от s и в уравнении правая часть F_t является функцией от s. Это уравнение будет тогда совпадать с уравнением прямолинейного движения, происходящим по оси $O's$ под действием силы F_t, зависящей только от положения точки. Требуется, чтобы это движение было таутохронным. Но мы видели, на основании метода Пюизё (п. 213), что необходимое и достаточное условие таутохронизма заключается в том, что сила F_t должна быть вида $-k^2s$, где k^2 — положительная постоянная. Следовательно, для того, чтобы предложенная кривая была таутохроной, необходимо и достаточно, чтобы

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = -k^2s. \qquad (1)$$

Всякая кривая, удовлетворяющая этому единственному условию, будет таутохроной. Точка таутохронизма $s = 0$ будет, очевидно, положением устойчивого равновесия для точки, движущейся по этой кривой.

Чтобы закончить решение, можно произвольно задаться вторым условием. Вот, например, два различных способа выбора этого дополнительного условия.

1°. Можно заставить кривую находиться на заданной поверхности

$$f(x, y, z) = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение и уравнение (1) совместно с очевидным уравнением

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

определяют x, y, z в функции t. Интегрирование этих уравнений введет еще две произвольные постоянные, кроме k^2, которая уже выбрана произвольно. Если сила имеет силовую функцию, то уравнение (1) сразу проинтегрируется, так как тогда

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU(x, y, z) = -k^2 s\,ds,$$

откуда

$$U(x, y, z) = -\frac{k^2 s^2}{2} + C.$$

2°. Вместо того, чтобы заставлять кривую находиться на заданной поверхности, можно потребовать, чтобы она была также таутохроной с той же самой точкой таутохронизма для другого закона силы X_1, Y_1, Z_1, зависящей только от положения движущейся точки. Для этого необходимо и достаточно, чтобы, кроме уравнения (1), удовлетворялось еще уравнение

$$X_1 \frac{dx}{ds} + Y_1 \frac{dy}{ds} + Z_1 \frac{dz}{ds} = -k_1^2 s. \qquad (1')$$

Оба уравнения (1) и (1′) совместно с уравнением (3) определяют x, y, z в функции s. Полученная кривая будет таутохроной и для силы $\lambda X + \mu X_1, \ldots$, где λ и μ — положительные постоянные.

Если вторая сила имеет силовую функцию U_1 так же, как и первая, то будет еще

$$U_1(x, y, z) = -\frac{k_1^2 s^2}{2} + C_1,$$

и тогда искомая кривая будет находиться на поверхности

$$k_1^2 [U(x, y, z) - C] = k^2 [U_1(x, y, z) - C_1].$$

Второй случай. Силы зависят от скорости. Допустим, что сила X, Y, Z может зависеть, но может и не зависеть от скорости. Кроме того, имеется сила сопротивления среды, которая является функцией скорости: $R = \varphi(v)$, где v равно $\frac{ds}{dt}$. Уравнение движения по искомой кривой будет

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} + \varphi\left(\frac{ds}{dt}\right),$$

где x, y, z — функции от s. Правая часть, в которой первые члены зависят от x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, может быть выражена в функции s и $\frac{ds}{dt}$. Тогда уравнение будет совпадать с уравнением прямолинейного движения точки по оси $O's$ под действием силы, зависящей от положения и скорости. Для этого случая не известны необходимые и достаточные условия таутохронизма; известно лишь, что таутохронизм будет иметь место, если сила следует некоторым определенным законам, например законам, установленным Лагранжем (п. 213). Следовательно, для нахождения таутохронных кривых нужно приравнять, если это возможно, выражение

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}+\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

одному из этих законов сил, например, закону Лагранжа.

Мы не рассматриваем здесь подробно этот случай, так же как и случай, когда к сопротивлению среды добавляется трение. Мы отсылаем читателя к статье Дарбу (Mécanique de Despeyrous, т. 1, добавление XIII), к статье Гатона де ля Гупийера (Journal de Liouville, т. XIII, серия 2) и к статье Адамара (Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 7 февраля 1895).

253. Приложения. 1°. *Тяжелая точка, движущаяся при отсутствии сопротивления среды и трения.* Прежде всего можно свести нахождение пространственных таутохронных кривых под действием веса к нахождению плоских кривых. В самом деле, вообразим пространственную таутохронную кривую C и рассмотрим цилиндр, проектирующий эту кривую на горизонтальную плоскость. Если развернуть этот цилиндр на вертикальную плоскость, удерживая его образующие вертикально, то кривая C перейдет в плоскую кривую C' той же длины, а касательная, составляющая F_t веса точки, не изменится. Вследствие этого движение не изменится, и новая кривая будет таутохроной. Обратная операция позволяет переходить от плоской кривой C' к пространственной C.

Докажем, что единственной таутохронной кривой для веса в вертикальной плоскости является циклоида.

Примем за начало точку таутохронизма на таутохронной кривой, а ось z направим вертикально вверх. Так как заданная сила является весом, то для рассматриваемого случая $X=0$, $Y=0$, $Z=-mg$ и касательная составляющая F_t силы равна $-mg\frac{dz}{ds}$. Эта составляющая должна иметь вид $-k^2s$. Следовательно, обозначая через h^2 положительную постоянную, имеем

$$\frac{dz}{ds}=h^2s, \quad z=\frac{h^2s^2}{2}$$

без добавления постоянной, так как z обращается в нуль одновременно с s. Это уравнение характеризует циклоиду с горизонтальным основанием и с вершиной в начале.

2°. *Два закона сил.* Мы видели, что таутохронная кривая определяется с точностью до постоянных, когда требуют, чтобы таутохронизм имел место отдельно для двух различных законов сил при одной и той же точке таутохронизма для обоих законов.

Найдем, например, кривую, которая является таутохроной: 1) для силы тяжести и 2) для силы притяжения, имеющей постоянную интенсивность f и исходящей от вертикальной оси. Примем эту ось за ось Oz, считая ее направленной вверх. Мы можем всегда выбрать начало и ось Ox таким образом, чтобы точка таутохронизма лежала на оси Ox на расстоянии a от начала.

Так как в рассматриваемом случае первая сила имеет силовую функцию $-gz$, а вторая — силовую функцию $-fr$, где r — расстояние от движущейся точки до оси Oz, то имеем два условия таутохронизма:

$$-gz = -\frac{k^2s^2}{2}, \quad -fr = -\frac{h^2s^2}{2} - fa,$$

так как при $s = 0$ должно быть $z = 0$ и $r = a$.

Эти уравнения можно представить в более простом виде:

$$z = \frac{s^2}{2b}, \quad r - a = \frac{s^2}{2c}, \tag{1}$$

где b и c — положительные постоянные.

Исключение s^2 показывает, что кривая должна лежать на поверхности

$$r = a + \frac{b}{c} z, \tag{2}$$

являющейся круговым конусом с осью Oz. Чтобы закончить определение кривой, введем цилиндрические координаты r, θ и z.

Элемент ds^2 дается равенством

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2. \tag{3}$$

Выразим s и z в функции r при помощи предыдущих формул. Из уравнения (2) и из второго уравнения (1) имеем

$$z = \frac{c}{b}(r - a), \quad s = \sqrt{2c(r - a)}.$$

Подставляя в равенство (3) и сокращая, получим уравнение горизонтальной проекции

$$\theta = \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}} \int_a^r \sqrt{\frac{\alpha - r}{r - a}}\,\frac{dr}{r},$$

где α — положительная постоянная, большая чем a. Так как кривая выходит из точки таутохронизма $r = a$, $\theta = 0$, то нижний предел интегрирования принят равным a.

Горизонтальная проекция кривой заключена между двумя окружностями $r = a$ и $r = \alpha$. Она касается первой из них и нормальна ко второй, на которой она имеет точки возврата. Интегрирование при помощи очевидной подстановки

$$\frac{\alpha - r}{r - a} = u^2$$

приводится к интегралу от рациональной функции.

254. Брахистохрона для силы тяжести. Найдем сначала брахистохрону для *силы тяжести. Даны две точки A и B, из которых более высокой является точка A. Найдем, при помощи какой кривой C нужно соединить эти две точки для того, чтобы тяжелая материальная точка, пущенная из точки A без начальной* *скорости, скользя по этой кривой, достигла точки B за наиболее короткий промежуток времени.*

Эта кривая является брахистохроной для силы тяжести или кривой наиболее быстрого ската (рис. 161).

Примем за начало точку A, за ось z — вертикаль Az, направленную вниз, за плоскость xz — вертикальную плоскость, содержащую обе точки A и B. Если тяжелая точка массы m скользит без трения по кривой C при начальной скорости в точке A, равной нулю, то ее скорость в положении m определяется по закону кинетической энергии:

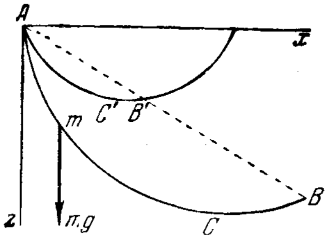


Рис. 161.

$$v^2 = 2gz.$$

Заменяя v через $\frac{ds}{dt}$, где ds — элемент дуги, имеем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gz, \quad \sqrt{2g}t = \int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{\sqrt{z}},$$

где t — время, необходимое точке для прихода в B.

Для того чтобы это время было наименьшим, необходимо определить кривую C таким образом, чтобы обратить в минимум написанный выше интеграл, который можно представить в виде

$$\int_{(A)}^{(B)} \varphi(x, y, z)\, ds,$$

где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Мы нашли ранее (глава VII, § III), что кривая, обращающая в минимум интеграл такого вида, является фигурой равновесия нити под действием силы с силовой функцией $-\varphi(x, y, z)$, при этом натяжение нити равно $\varphi(x, y, z)$. Три дифференциальных уравнения, которые мы установили для этой кривой, приводятся, как мы видели, к двум.

Для задачи, которую мы сейчас рассматриваем, $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ и сила, действующая на нить, вертикальна, так как $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$; поэтому фигура равновесия будет лежать в вертикальной плоскости, проходящей через обе заданные точки. Если эту плоскость принять за плоскость xz, то для нахождения кривой достаточно будет одного уравнения. Мы возьмем первое из общих уравнений

$$d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, ds = 0,$$

которое приводится к виду

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{z}}\frac{dx}{ds} = C,$$

откуда

$$dx^2 = c^2 z\, ds^2 = c^2 z\,(dx^2 + dz^2).$$

Переменные разделяются и, полагая $\frac{1}{c^2} = 2R$, получим

$$dx = dz \sqrt{\frac{z}{2R - z}}.$$

Это — дифференциальное уравнение циклоиды, основанием которой является ось Ox. Легко найти уравнения кривой в обычной форме, полагая

$$z = R(1 - \cos\theta);$$

тогда

$$dx = 2R\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta, \quad x = x_0 + R(\theta - \sin\theta).$$

Так как циклоида должна проходить через точку A, то $x_0 = 0$ и A является точкой возврата (рис. 161). Для окончательного определения циклоиды C, проходящей через обе точки A и B, нужно построить какую-нибудь циклоиду C' с основанием Ax и точкой возврата A, соединить A и B прямой, пересекающей циклоиду C' в точке B' и произвести затем над циклоидой C' преобразование подобия, приняв за центр точку O и за отношение подобия отношение AB' к AB.

Мы предположили для упрощения, что начальная скорость, с которой точка выходит из положения A, равна нулю. Если мы хотим найти кривую наибыстрейшего ската из A в B, предполагая, что точка начинает двигаться из A по этой кривой с начальной скоростью v_0, то достаточно будет заменить интеграл

$$\int \frac{ds}{\sqrt{z}}$$

интегралом

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z + \frac{v_0^2}{2g}}}.$$

Кривая будет по-прежнему циклоидой с горизонтальным основанием, но это основание будет находиться на высоте $z = -\frac{v_0^2}{2g}$.

Оссиан Бонне непосредственно доказал, что циклоида действительно осуществляет наименьшее время ската.

255. Брахистохроны в общем случае. Рассмотрим точку, находящуюся под действием силы F, имеющей силовую функцию $U(x, y, z)$. Найдем кривую C, которою нужно соединить две точки A и B для того, чтобы точка, двигающаяся по этой кривой и вышедшая из A с *заданной начальной скоростью* v_0, пришла в B за наиболее короткий промежуток времени (рис. 161). Эта кривая C является брахистохроной для заданного закона силы. Обозначая через x_0, y_0, z_0 координаты точки A, имеем по теореме кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=U(x, y, z)-U(x_0, y_0, z_0),$$

или, полагая

$$h=\frac{mv_0^2}{2}-U(x_0, y_0, z_0), \quad v=\frac{ds}{dt},$$

имеем

$$\sqrt{\frac{1}{m}}\,dt=\frac{ds}{\sqrt{2U(x, y, z)+2h}}, \qquad \sqrt{\frac{1}{m}}\,t=\int\limits_{(A)}^{(B)}\frac{ds}{\sqrt{2U(x, y, z)+2h}}.$$

Таков будет интеграл, который требуется обратить в минимум. Он принадлежит к общему типу, изученному в главе VII, § III, если в последнем положить

$$\varphi(x, y, z)=\frac{1}{\sqrt{2U(x, y, z)+2h}}.$$

Согласно тому, что мы получили в главе VII для кривых, обращающих в минимум интеграл

$$\int\limits_{(A)}^{(B)}\varphi(x, y, z)\,ds,$$

искомая кривая является фигурой равновесия гибкой нити под действием силы F_1 с проекциями

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}, \quad -\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}, \quad -\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}},$$

причем натяжение нити равно $\dfrac{1}{\sqrt{2(U+h)}}$.

Получаемые таким путем уравнения даны Рожером (Journal de Liouville, 1848).

Известно, что задачу можно свести к квадратурам, если фиктивная сила F_1, а следовательно, и сила F являются зависящими от расстояния силами притяжения неподвижной точкой, или прямой, или плоскостью.

Теорема Эйлера. *При движении по брахистохроне нормальная реакция направлена по главной нормали; она равна по модулю и противоположна по направлению удвоенной нормальной составляющей действующей силы.*

В самом деле, будем рассматривать кривую как фигуру равновесия нити. Составляющие фиктивной силы F_1, действующей на нить, которою мы, по предположению, заменяем кривую, будут:

$$X_1=[2(U+h)]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$Y_1=[2(U+h)]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$Z_1=[2(U+h)]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial U}{\partial z},$$

а натяжение нити будет

$$T=\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}.$$

С другой стороны, сила, фактически действующая на движущуюся точку, имеет проекции

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Естественные уравнения равновесия нити здесь имеют вид

$$(F_1)_b=0,\qquad (F_1)_n=-\frac{T}{\rho}.$$

Так как проекции силы F_1, на декортовы оси равны проекциям силы F, умноженным на $[2(U+h)]^{-3/2}$, то так же будут преобразовываться и проекции на нормаль и бинормаль. Следовательно,

$$F_b=0,\quad [2(U+h)]^{-\frac{3}{2}}F_n=-\frac{1}{\rho\sqrt{2(U+h)}},\tag{1}$$

откуда

$$F_n=\frac{-2(U+h)}{\rho}$$

или, на основании теоремы кинетической энергии,

$$F_n=-m\frac{v^2}{\rho}.\tag{2}$$

Возьмем теперь естественные уравнения движения. Имеем

$$F_b+N_b=0,\quad F_N+N_n=m\frac{v^2}{\rho}$$

или, принимая во внимание равенства (1) и (2),

$$N_b=0,\quad N=-2F_n.$$

Эти два равенства и доказывают высказанное предложение, которое мы уже проверили для циклоиды (п. 250). По поводу этой теоремы можно указать на статью Андуайе (Comptes rendus, т. C).

Гатон де ля Гупийер дополнил исследование брахистохрон, разобрав случай одновременного действия сил, зависящих от скорости, и сил трения и разрешив обратную брахистохронам задачу (Mémoires de l'Académie, т. XXVII и XXVIII).

256. Приложение теорем Томсона и Тэта к брахистохронам. В главе VII мы указали несколько интересных свойств кривых, обращающих в минимум интеграл вида

$$I=\int_{(A)}^{(B)}\varphi(x,\ y,\ z)\,ds.\tag{1}$$

Эти свойства, если их, в частности, приложить к брахистохронам, получают простое выражение. Брахистохроны в случае сил, имеющих силовую функцию $U(x,\ y,\ z)$, получаются как кривые, обращающие в минимум интеграл

$$t=\int_{(A)}^{(B)}\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}\,ds,\tag{2}$$

где h имеет определенное значение. Если эта постоянная выбрана, то во всех рассматриваемых движениях начальное положение и величина начальной скорости связаны соотношением

$$\frac{v_0^2}{2} - U(x_0,\ y_0,\ z_0) = h.$$

Следовательно, интеграл (1) совпадает тождественно с интегралом (2), если принять

$$\varphi(x,\ y,\ z) = \frac{1}{\sqrt{2[U(x,\ y,\ z)+h]}},$$

и значение интеграла I вдоль участка AB какой-нибудь кривой будет в точности равно времени t, которое понадобится точке массы единицы, чтобы переместиться по этой кривой под действием рассматриваемой силы и при указанных начальных условиях из A в B.

Брахистохроны будут тогда кривыми, которые раньше были названы *кривыми* C (п. 146), зависящими от четырех произвольных постоянных. Например, если принять $U = -gz$, $h = 0$, то брахистохроны будут циклоидами, лежащими в вертикальных плоскостях ниже плоскости xy и имеющими точки возврата на плоскости xy.

Возвращаясь к общему случаю, мы можем основную формулу Тэта и Томсона выразить так:

Пусть ACB и $A_1C_1B_1$ — две бесконечно близкие брахистохроны, описываемые точкой массы 1, — *первая за время t, а вторая за время $t + \delta t$; тогда имеем* (п. 147)

$$\delta t = -\frac{\overline{AA_1}}{\sqrt{2(U_A+h)}}\cos\widehat{BAA_1} - \frac{\overline{BB_1}}{\sqrt{2(U_B+h)}}\cos\widehat{ABB_1},$$

где U_A и U_B являются значениями функции U на концах A и B.

Тогда из формулы Тэта и Томсона, полученной в п. 147, вытекают следующие результаты:

1°. Если заданы две неподвижные поверхности S и Σ, то кривая, которую нужно провести между ними таким образом, чтобы движущаяся по ней при указанных начальных условиях точка описала ее за минимальное время, является брахистохроной, которая одновременно нормальна к обеим поверхностям. Теорема остается справедливой, если одна или обе эти поверхности заменяются кривой или точкой.

Например, если даны точка A и плоскость P, то кривая, которую нужно провести от A до плоскости таким образом, чтобы пущенная по этой кривой из A без начальной скорости тяжелая точка достигла плоскости за кратчайший промежуток времени, является циклоидой с горизонтальным основанием, лежащей в вертикальной плоскости, имеющей в A точку возврата и пересекающей нормально плоскость P.

2°. Если взять брахистохроны, нормальные к поверхности S и по каждой из них в момент $t = 0$ пустить при указанных начальных условиях одинаковые материальные точки, то в любой момент времени t все эти точки будут находиться на поверхности S', также нормальной к брахистохронам. (Эта теорема была указана уже Эйлером.)

Например, если взять все циклоиды, имеющие в точке A точку возврата и вертикальную касательную Az, и по каждой из них в момент $t = 0$ пустить из A без начальной скорости тяжелую точку, то в момент t все эти точки будут находиться на поверхности S', нормальной ко всем циклоидам. В данном примере поверхность S сводится к точке A; поверхность S' будет, очевидно, поверхностью вращения вокруг Az.

Мы предлагаем в качестве упражнения проверить это утверждение.

3°. Наконец, формула Тэта и Томсона позволяет высказать для брахистохрон теоремы, аналогичные свойствам разверток, если заменить в классических формулировках длины дуг промежутками времени, которые затрачивает для их описания точка, скользящая по ним без трения. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе, который мы предлагаем в качестве упражнения.

257. Брахистохроны на заданной поверхности. Требуется среди кривых, лежащих на заданной поверхности $f(x, y, z)=0$ и соединяющих две точки A и B, найти такую, которая обращает интеграл

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{\sqrt{2(U+h)}}$$

в минимум. Эта задача получится такая же, как и рассмотренная в п. 149, если подставить $\varphi(x, y, z)$ вместо $\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}$. Она приводится к нахождению равновесия нити на заданной поверхности.

II. Движение материальной точки на изменяемой кривой

258. Уравнения движения. Рассмотрим точку, скользящую без трения по кривой, положение и форма которой изменяются с течением времени. В неподвижных осях уравнения этой кривой будут

$$f(x, y, z, t)=0, \quad f_1(x, y, z, t)=0.$$

Нормальная реакция N кривой имеет проекции

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}, \tag{N}$$

и точку можно рассматривать как свободную, но находящуюся под действием равнодействующей F заданных сил и реакции N. Тогда уравнения движения будут:

$$\left.\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X+\lambda \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y+\lambda \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z+\lambda \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эти три уравнения совместно с уравнениями кривой определяют x, y, z, т. е. движение точки, и λ, λ_1, т. е. реакцию, в функции времени. Следует заметить, что реакция не исчезает в уравнении кинетической энергии. В этом можно убедиться аналитически, умножая уравнения (1) соответственно на dx, dy, dz и складывая. В полученном равенстве коэффициенты при λ и λ_1 не будут равны нулю. В самом деле, когда t увеличивается на dt, тогда x, y, z увеличиваются на dx, dy, dz и так как функция $f(x, y, z, t)$ должна оставаться равной нулю, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0.$$

Следовательно, коэффициент при λ обращается в $-\frac{\partial f}{\partial t}dt$. Точно так же коэффициент при λ_1 обращается в $-\frac{\partial f_1}{\partial t}dt$.

Этот результат ясен и геометрически, так как действительное перемещение точки происходит не по касательной к движущейся кривой и работа реакции не равна нулю. Для исключения реакции пользуются методом, рассматриваемым ниже.

259. Уравнения Лагранжа. Пусть q — параметр, определяющий положение точки на кривой C. К моменту t координаты какой-нибудь точки кривой и, в частности, движущейся точки будут

$$x=\varphi(q, t), \quad y=\psi(q, t), \quad z=\omega(q, t).$$

Движение точки будет известно, если будет известно, как изменяется q с течением времени.

Умножим уравнения движения (1) соответственно на $\frac{\partial x}{\partial q}$, $\frac{\partial y}{\partial q}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$ и сложим. Коэффициенты при λ и λ_1 обратятся в нуль, так как они будут отличаться множителем от косинусов углов, образуемых касательной к кривой C с нормалями к каждой из поверхностей $f=0$, $f_1=0$. Тогда останется

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q}\right)=Q, \tag{2}$$

где положено

$$Q=X\frac{\partial x}{\partial q}+Y\frac{\partial y}{\partial q}+Z\frac{\partial z}{\partial q}.$$

Это и есть уравнение движения, определяющее значение параметра q, служащего для фиксирования положения точки на кривой в функции времени. Чтобы придать этому уравнению более удобную форму, мы применим к нему важное преобразование, введенное Лагранжем, с которым мы снова встретимся в самой общей задаче динамики голономных систем.

Обозначим через q' производную параметра q по времени и через x', y', z' проекции скорости точки на оси координат. Согласно формуле $x=\varphi(q, t)$, абсцисса движущейся точки зависит от времени и непосредственно, и через параметр q, потому что последний в свою очередь является функцией от t. Имеем

$$x'=\frac{\partial x}{\partial q}q'+\frac{\partial x}{\partial t}. \tag{3}$$

Рассматривая x' как функцию трех переменных q, q', t, имеем очевидные равенства

$$\frac{\partial x'}{\partial q'} = \frac{\partial x}{\partial q}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} q' + \frac{\partial^2 x}{\partial q \, \partial t}.$$

Последняя формула показывает, что

$$\frac{\partial x'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right).$$

В самом деле, $\frac{\partial x}{\partial q}$ зависит от t и непосредственно и через q; поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} q' + \frac{\partial^2 x}{\partial q \, \partial t}.$$

Для y и z получаются аналогичные формулы:

$$\frac{\partial y'}{\partial q'} = \frac{\partial y}{\partial q}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right),$$

$$\frac{\partial z'}{\partial q'} = \frac{\partial z}{\partial q}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right).$$

Установив это, мы можем уравнение (2) написать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x' \frac{\partial x}{\partial q} + y' \frac{\partial y}{\partial q} + z' \frac{\partial z}{\partial q}\right)\right] -$$

$$- m\left[x' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) + y' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right) + z' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)\right] = Q,$$

так как $\frac{d^2 x}{dt^2}$ равно $\frac{dx'}{dt}$, ... Заменяя в последнем уравнении $\frac{\partial x}{\partial q}$, $\frac{\partial y}{\partial q}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$ полученными выше значениями $\frac{\partial x'}{\partial q'}$, $\frac{\partial y'}{\partial q'}$, $\frac{\partial z'}{\partial q'}$, а производные $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)$ их значениями $\frac{\partial x'}{\partial q}$, $\frac{\partial y'}{\partial q}$, $\frac{\partial z'}{\partial q}$, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'}\right)\right] - m\left(x' \frac{\partial x'}{\partial q} + y' \frac{\partial y'}{\partial q} + z' \frac{\partial z'}{\partial q}\right) = Q$$

или, обозначая через T кинетическую энергию точки,

$$T = \frac{1}{2} m\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right),$$

окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \qquad (4)$$

Это и есть уравнение движения по Лагранжу. После замены x', y', z' их значениями по формуле (3) и ей аналогичными, величина T станет функцией от q, q' и t, причем второй степени относительно q'.

Как только эта функция будет вычислена, можно будет сразу составить уравнение (4).

Написанное выше значение Q можно определить следующим образом. Представим себе, что движущейся точке сообщено возможное перемещение, которое получится, если кривую C сделать неподвижной в занимаемом ею в момент t положении и переместить точку по этой кривой. Или аналитически представим себе, что точке сообщено перемещение, которое получится, если t считать постоянным, а параметр q увеличить на δq. Тогда будет

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q}\delta q, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial q}\delta q, \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial q}\delta q.$$

Для этого возможного перемещения работа заданной силы X, Y, Z равна

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \left(X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q}\right)\delta q = Q\delta q.$$

Следовательно, величина Q является коэффициентом при δq в выражении возможной работы.

Если существует силовая функция $U(x, y, z)$, или же, вообще, если X, Y, Z будут частными производными по x, y, z какой-то функции $U(x, y, z, t)$, содержащей время, то будет также

$$Q = \frac{\partial U}{\partial q},$$

где последняя производная вычислена в предположении, что в функции $U(x, y, z, t)$ координаты заменены их выражениями через q и t. Действительно, так как U зависит от q через x, y, z, то, очевидно, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q} =$$
$$= X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} = Q.$$

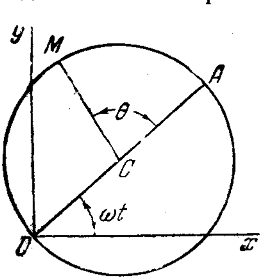


Рис. 162.

260. Задача. *Материальная точка скользит без трения по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости xOy и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг одной из своих точек O, которая закреплена неподвижно. Исследовать движение точки, предполагая, что на нее не действует никакая непосредственно приложенная сила.*

Пусть A — точка окружности, диаметрально противоположная неподвижной точке; угол xOA изменяется пропорционально времени. Отсчитывая t от того момента, когда этот угол равен нулю, найдем (рис. 162):

$$\widehat{xOA} = \omega t.$$

Пусть C — центр окружности, а M — движущаяся точка. Мы будем определять положение точки M на окружности углом $\widehat{ACM} = \theta$, который будет играть роль параметра q. Проектируя контур OCM на оси, получим $z = 0$ и

$$x = R\cos\omega t + R\cos(\theta + \omega t),$$
$$y = R\sin\omega t + R\sin(\theta + \omega t).$$

Обозначая через x', y', θ' производные от x, y, θ по t, имеем:

$$x' = -R\omega\sin\omega t - R(\theta' + \omega)\sin(\theta + \omega t),$$
$$y' = R\omega\cos\omega t + R(\theta' + \omega)\cos(\theta + \omega t),$$
$$T = \frac{mR^2}{2}[\omega^2 + (\theta' + \omega)^2 + 2\omega(\theta' + \omega)\cos\theta],$$
$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = mR^2(\theta' + \omega + \omega\cos\theta), \quad \frac{\partial T}{\partial\theta} = -mR^2\omega(\theta' + \omega)\sin\theta.$$

Так как заданных сил нет, то

$$Q = 0.$$

Следовательно, уравнение (4) после всех приведений будет иметь вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\sin\theta.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения математического маятника

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

мы видим, что относительное движение точки M для наблюдателя, который движется вместе с окружностью, будет движением математического маятника, причем точка A будет играть для него роль наиболее низкой точки. Продолжительность двойного бесконечно малого размаха, равная $2\pi\sqrt{l/g}$, будет здесь $2\pi/\omega$; она в точности равна продолжительности одного оборота окружности. Продолжительность конечных колебаний будет больше.

Для вычисления нормальной реакции N будем исходить из общих уравнений движения, которые в данном случае имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\cos(\theta + \omega t), \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\sin(\theta + \omega t),$$

так как точка находится под действием только силы N. Из этих уравнений находим

$$N = -m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\cos(\theta + \omega t) + \frac{d^2y}{dt^2}\sin(\theta + \omega t)\right],$$

что можно написать так

$$N = -m\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\cos(\theta + \omega t) + \frac{dy}{dt}\sin(\theta + \omega t)\right] +$$
$$+ m(\theta' + \omega)\left[-\frac{dx}{dt}\sin(\theta + \omega t) + \frac{dy}{dt}\cos(\theta + \omega t)\right].$$

Заменяя в этой формуле $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ их значениями, получим

$$N = mR[\omega^2\cos\theta + (\theta' + \omega)^2].$$

Это выражение зависит от θ'. Реакция, следовательно, не будет одинаковой при прохождении движущейся точки через одну и ту же точку окружности в одну или другую сторону, так как знак θ' не будет одинаковым в обоих случаях.

Если движущаяся точка отталкивается от центра O силой, пропорциональной расстоянию $OM = r$, то эта сила, равная fmr, будет иметь силовую функцию $U = \frac{fmr^2}{2}$, которая, будучи выражена через θ, примет вид

$$U = 2fmR^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Тогда

$$Q = \frac{\partial U}{\partial \theta} = -fmR^2 \sin \theta$$

и уравнение движения сохранит вид уравнения движения математического маятника, для которого g/l будет равно $(\omega^2 + f)$.

261. Случай неподвижной кривой. Само собой понятно, что изложенный метод, будучи общим, применим и к движению точки по неподвижной кривой. При этом обычно можно выбрать параметр q таким образом, чтобы x, y, z, выраженные в функции q, не содержали явно t:

$$x = \varphi(q), \quad y = \psi(q), \quad z = \omega(q);$$

тогда

$$T = \frac{m}{2}\left(\varphi'^2 + \psi'^2 + \omega'^2\right) q'^2,$$

т. е. T будет однородной функцией второго порядка относительно q'. Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

должно совпадать с уравнением кинетической энергии, так как при неподвижной кривой применение теоремы кинетической энергии приводит к единственному уравнению движения. Это легко проверить. В самом деле, умножая уравнение Лагранжа на q', получим

$$q' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - q' \frac{\partial T}{\partial q} = Qq',$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(q' \frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{dq'}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'} - q' \frac{\partial T}{\partial q} = Qq'.$$

Но вследствие однородности функции T произведение $q' \frac{\partial T}{\partial q'}$ равно $2T$ и более того, так как T зависит от t только через q и q', то

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q'} \frac{dq'}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t} q'.$$

Поэтому уравнение принимает вид

$$\frac{d(2T)}{dt} - \frac{dT}{dt} = Qq'$$

или

$$dT = Q\,dq,$$

что действительно является уравнением кинетической энергии.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Материальная точка, вынужденная двигаться по окружности, притягивается или отталкивается одной из точек этой окружности. Найти, каким должен быть закон силы, чтобы реакция была постоянной.

2. Две материальные точки A и B с одинаковыми массами, вынужденные скользить без трения одна по оси Ox, а другая по оси Oy, притягиваются друг к другу с произвольной силой, являющейся функцией $f(r)$ их взаимного расстояния r. Они начинают движение без начальной скорости. Доказать, что они одновременно достигнут начала координат [лиценциатская *), Бордо].

3. Определить такую кривую, чтобы тяжелая точка, скользящая по этой кривой без трения, приобретала в каждый момент скорость, вертикальная составляющая которой имеет постоянное значение (лиценциатская, Париж).

4. Материальная точка массы m прикреплена к концу невесомой нити, навернутой на плоскую кривую C; точка отталкивается центром кривизны кривой C, соответствующим той ее точке, в которой нить отделяется от этой кривой. Сила отталкивания есть функция расстояния от движущейся точки до центра кривизны.

1°. Составить общие уравнения, определяющие закон движения и натяжение нити.

2°. В случае, когда отталкивающая сила пропорциональна расстоянию, а точка вначале лежит на кривой C и не имеет начальной скорости, обратить внимание на вид закона движения и выражения натяжения нити.

3°. Допустив, наконец, что отталкивание обратно пропорционально квадрату расстояния, определить кривую, для которой предыдущий закон (2°) сохраняет силу (лиценциатская, Пуатье).

5. В вертикальной плоскости рассматривается кривая, являющаяся огибающей отрезка прямой постоянной длины, один конец которого скользит по горизонтальной прямой Ox, а другой — по вертикальной прямой Oz. Исследовать движение тяжелой точки, скользящей без трения по этой кривой. В частности, найти время, затрачиваемое движущейся точкой для достижения точки возврата на оси Ox, если она начала двигаться из наиболее низкой точки с такой начальной скоростью, что постоянная кинетической энергии равна нулю ($v^2 = 2gz$).

6. Найти такую кривую, лежащую в вертикальной плоскости, что если по ней заставить двигаться материальную точку, то реакция этой кривой должна находиться в постоянном отношении k к нормальной составляющей силы тяжести ($k = 1$ — прямая, $k = 2$ — циклоида, ...).

7. Тяжелая точка начинает двигаться без начальной скорости по внешней части параболы, лежащей в вертикальной плоскости и имеющей горизонтальную ось. Найти точку, в которой движущаяся точка покидает параболу (точку срыва).

---

*) То есть задача, предложенная на экзаменах на степень лиценциата. (*Прим. перев.*)

Если через h обозначить высоту начального положения над осью, то ордината y искомой точки будет положительным корнем уравнения

$$y^3+3p^2y-2p^2h=0 \qquad (p \text{ — параметр}).$$

8. Если два маятника с грузами M_1 и M_2, находящимися на одной и той же окружности C, выходят в разные моменты из одного и того же начального положения с одинаковыми скоростями, то прямая M_1M_2, соединяющая грузы, огибает окружность C'. Допустим, что маятники совершают круговое движение, и обозначим через T продолжительность обращения каждого из маятников, а через τ — промежуток времени, отделяющий начала их движений. Если τ соизмеримо с T, то прямые, соединяющие положения маятников в моменты t, $t+\tau$, $t+2\tau$, $t+3\tau$, ..., образуют многоугольник, вписанный в C и описанный около C'. (Это упражнение является не чем иным, как применением метода Якоби для вывода теоремы Понселе; см. Альфен, Traité des fonctions elliptiques.)

9. Рассмотрим неподвижные прямые, проходящие через точку A, и допустим, что в момент t_0 из A по всем этим прямым начинают двигаться без начальной скорости одинаковые точки, притягиваемые неподвижным центром O пропорционально расстоянию. Доказать, что все эти точки одновременно приходят в положения, совпадающие с проекциями точки O на пробегаемые ими прямые.

• **10.** Материальная точка остается на кривой, определяемой уравнением вида

$$s^2=\varphi(z),$$

где z — ордината, s — дуга, отсчитываемая от некоторой точки кривой, а φ — произвольная функция.

Требуется исследовать движение этой точки, предполагая:

1) что она находится под действием силы, параллельной оси z и определяемой равенством

$$Z=-\frac{1}{2}k^2\varphi'(z),$$

где k — заданная постоянная;

2) что она испытывает, кроме того, сопротивление, пропорциональное скорости. Результат применить к случаю, когда

$$\varphi(z)=a^{2-n}z^n-a^2=a^{2-n}(z^n-a^n),$$

где a — заданная длина.

Исследовать частный случай, когда отсутствует начальная скорость, и определить время, необходимое точке для достижения положения $s=0$, соответствующего $z=a$. Рассмотреть случай, когда $n=2$. (Лиценциатская.)

11. Найти плоскую таутохрону для точки, притягиваемой неподвижным центром, лежащим в плоскости таутохроны, с силой, пропорциональной расстоянию r (п. 252).

Требуется найти кривую, для которой $r\,dr=ks\,ds$. Рассматривая кривую как огибающую движущейся прямой

$$x\cos\alpha-y\sin\alpha=\varphi'(\alpha),$$

получим для определения функции $\varphi(\alpha)$ линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$(1-k^2)\varphi''(\alpha)-k\varphi(\alpha)=0.$$

Это уравнение интегрируется в тригонометрических или показательных функциях. В первом случае имеем эпициклоиду. (Пюизё, Journal de Liouville, т. IX.)

12. *Задача Абеля.* Определить кривую, лежащую в вертикальной плоскости и обладающую следующим свойством: на этой кривой существует такая неподвижная точка O, что тяжелая точка, пущенная без начальной скорости по кривой из начального положения, находящегося на высоте h над O, приходит в точку O за время T, являющееся наперед заданной функцией $T = \varphi(h)$.

[Пусть $s = \psi(z)$ — соотношение между дугой OM кривой, отсчитываемой от точки O, и ординатой точки M. Имеем

$$\sqrt{2g}\,\varphi(h) = \int_0^h \frac{\psi'(z)\,dz}{\sqrt{h-z}}.$$

Пусть u — вещественная переменная, большая чем h. Абель умножает обе части равенства на $\frac{dh}{\sqrt{u-h}}$ и интегрирует по h от 0 до u:

$$\sqrt{2g}\int_0^u \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{u-h}} = \int_0^u \frac{dh}{\sqrt{u-h}} \int_0^h \frac{\psi'(z)\,dz}{\sqrt{h-z}}.$$

Переменив порядок интегрирования в правой части, найдем для интеграла этой части значение $\pi\psi(u)$. Искомая функция будет выражаться определенным интегралом, содержащим заданную функцию φ. Например, если $\varphi(h) = \text{const.}$, то опять получится циклоида.]

13. Определить таутохрону для тяжелой точки в вертикальной плоскости, принимая во внимание трение и сопротивление среды, пропорциональное v^3. (Задача приводится к линейному уравнению относительно v^2.)

14. *Задача Эйлера и Саладини.* Какую кривую нужно провести в вертикальной плоскости из точки O, чтобы тяжелая точка, пущенная по этой кривой из O без начальной скорости, пришла в произвольное положение M на этой кривой за то же время, какое ей потребовалось бы, если бы она скользила вдоль хорды OM? (Получается лемниската; Эйлер, т. II его Механики, 1736; Саладини, Mémoires de l'Istituto nazionale italiano, 1804; см. статью Фуре «Bulletin de la Société mathématique», т. XX.)

15. *Задача Бонне.* Доказать, что найденная в предыдущем упражнении лемниската будет обладать тем же свойством, если вес заменить силой притяжения к точке O, пропорциональной расстоянию (Journal de Mathématique pures et appliquées, т. IX, стр. 116).

16. *Задачи Фуре.* 1°. Материальная точка, находящаяся в плоскости под действием силы, имеющей определенную силовую функцию, выходит из начала O с заданной начальной скоростью. Найти систему подобных кривых (C), проходящих через начало O, причем таких, чтобы точка, двигающаяся по какой-нибудь из этих кривых, описывала, начиная от точки O, любую дугу в такое же время, какое ей понадобилось бы для пробега соответствующей хорды.

2°. Дана на плоскости система кривых (C), проходящих через точку O и гомотетичных относительно этой точки. Найти силу, имеющую силовую функцию, под действием которой движущаяся точка, получив заданную начальную скорость, описывает, начиная от точки O, произвольную дугу любой из кривых (C) за то же время, какое ей потребовалось бы для описания соответствующей хорды.

Первая из этих задач имеет решение лишь при условии, что начальная скорость равна нулю и что силовая функция в полярных координатах имеет вид $\psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]\varphi^2(\theta)$; уравнение искомых кривых будет тогда

$$r^2 = k^2\varphi(\theta)\, e^{-\int \frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)}\, d\theta},$$

где k — произвольная постоянная.

Вторая задача также невозможна, если начальная скорость не равна нулю. Если уравнение кривой имеет вид $r = k\omega(\theta)$, то силовая функция получится, если в написанном выше выражении, в котором ψ — произвольная функция, положить

$$\varphi(\theta) = \omega(\theta)\, e^{-\int \sqrt{\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2+1}\, d\theta}.$$

(Фуре, Comptes rendus, т. CIII, стр. 1114 и 1174; Journal de l'École Polytechnique, вып. 56.)

17. *Синхронные кривые и поверхности.* В плоскости дано семейство проходящих через точку O кривых C, уравнения которых зависят от одного параметра. В момент $t = 0$ по каждой из этих кривых из точки O начинают двигаться одинаковые материальные точки с одинаковой для всех заданной начальной скоростью v_0, находящиеся под действием силы, имеющей заданную силовую функцию. Найти кривую S, представляющую собою геометрическое место этих точек в один и тот же момент t.

Эти кривые S образуют семейство, зависящее от параметра t; их называют *кривыми, синхронными* первым.

Если кривые C, проходящие через точку O, расположены в пространстве и зависят от двух параметров и если пустить по этим кривым в момент $t = 0$ со скоростью v_0 материальные точки, находящиеся под действием сил, имеющих данный потенциал, то геометрическим местом таких точек к моменту t будет поверхность S, называемая *синхронной поверхностью.*

18. *Примеры синхронных кривых.* Скорость v_0 предполагается равной нулю; силой является вес; кривые C являются прямыми, проходящими через начало и лежащими в вертикальной плоскости (кривые S — окружности), (Эйлер).

Сила является весом, а кривые C суть циклоиды в вертикальной плоскости с горизонтальными основаниями и точками возврата в точке O. [Синхронные кривые S ортогональны к циклоидам; это вытекает (п. 256) из того, что циклоиды C являются брахистохронами для рассматриваемого закона сил.] (Эйлер).

Сила является притяжением к точке O, пропорциональным расстоянию, а кривые C суть окружности $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, где a — переменный параметр. (Синхронные кривые S суть прямые, проходящие через начало.) (Легу, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, т. VI.)

19. *Даны в плоскости два семейства кривых* (A) *и* (C), *проходящих через точку O. Можно ли найти такую потенциальную силу F, чтобы под ее действием материальная точка, выходящая с определенной скоростью из начала O и движущаяся по какой-нибудь из кривых* (C), *приходила в любую точку M этой кривой за такое же время, за какое она пришла бы в M, двигаясь вдоль проходящей через M кривой семейства* (A).

Кривые (A) можно назвать *траекториями*, а кривые (C) *синодальными линиями*; при этом очевидно, что их роли можно поменять. Задача может быть всегда решена бесчисленным множеством способов. Задача Фуре относится к случаю, когда траектории прямолинейны и синодальные кривые подобны относительно точки O. (Де Сен-Жермен, Bulletin des Sciences Mathématiques, 1889.)

20. Доказать, что между траекториями, синхронными и синодальными кривыми существует следующее соотношение: пусть MA, MB, MC — соответственные касательные, проведенные в сторону движения к тем из этих линий, которые пересекаются в точке M. Тогда

$$2\widehat{AMB} = \pi + \widehat{AMC}$$

и

$$2\widehat{CMB} = \pi + \widehat{CMA}.$$

(Фуре, Comptes rendus. т. CIII и де Сен-Жермен, Bulletin des Sciences mathématiques, 1889.)

21. Доказать, что если синхронные кривые ортогональны к траекториям, то последние совпадают с синодальными кривыми и обращаются в брахистохроны для рассматриваемых сил. (Там же.)

22. Найти движение тяжелой материальной точки по прямой, неизменно связанной с вертикальной осью, вокруг которой она вращается с постоянной угловой скоростью.

23. Найти движение тяжелой материальной точки по вертикальной окружности, неизменно связанной с вертикальной осью, вокруг которой она вращается с постоянной угловой скоростью. Предполагается, что проекция оси на плоскость окружности проходит через ее центр.

24. Показать, что задача о таутохроне для случая, когда существует силовая функция, приводится к интегрированию одного дифференциального уравнения с частными производными второй степени и первого порядка. (Кёнигс, Comptes rendus, 1 мая 1893.)

ГЛАВА XIII

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ ИЛИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

I. Общие положения

262. Уравнения движения. Дана поверхность S, которая может изменять как свое положение, так и свою форму, и пусть

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{1}$$

—уравнение этой поверхности в прямоугольных координатах. В частном случае, когда поверхность неподвижна, это уравнение не будет содержать времени t. Материальная точка M с координатами x, y, z скользит без трения по этой поверхности и находится под действием заданных сил, равнодействующая которых F имеет проекции X, Y, Z. Требуется найти движение точки. Со стороны поверхности на точку будет действовать нормальная реакция N, проекции которой будут величинами вида

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{N}$$

Точку можно рассматривать как свободную, находящуюся под действием сил F и N. Уравнения движения будут

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2}$$

Эти уравнения совместно с уравнением (1) поверхности образуют систему четырех уравнений, определяющих x, y, z и λ в функции t.

Для нахождения уравнений, определяющих x, y, z в функции t, необходимо из уравнений (2) исключить λ, что приведет к двум уравнениям. После того, как движение будет найдено, значение λ, а следовательно, и величина реакции, найдется из любого уравнения системы (2) или из комбинации этих уравнений.

263. Уравнения Лагранжа. Метод Лагранжа, который мы сейчас изложим, сходен с тем, которым мы пользовались для изучения движения точки по кривой (п. 259). Всегда возможно выразить координаты точки поверхности S и, в частности, движущейся точки M, в функции двух параметров q_1 и q_2:

$$x = \varphi(q_1, q_2, t), \quad y = \psi(q_1, q_2, t), \quad z = \omega(q_1, q_2, t). \tag{3}$$

Эти выражения таковы, что если из них исключить q_1 и q_2, то вновь получится уравнение (1) поверхности. Они содержат явно время t, которое входит в уравнение (1). В частном случае, когда поверхность S неподвижна, уравнение (1) не будет содержать времени и можно будет распорядиться так, чтобы выражения (3) для x, y, z также не содержали времени явно.

Чтобы знать движение, достаточно знать, как выражаются через t параметры q_1, q_2, определяющие положения движущейся точки. Для нахождения q_1 и q_2 требуются два уравнения, которые могут быть составлены следующим образом. Умножив уравнения (2) соответственно на $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ и сложив их, получим:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=Q_1, \tag{4}$$

где

$$Q_1=X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}.$$

В этом равенстве коэффициент λ_1 исчез вследствие соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}=0,$$

которое выражает, что нормаль к поверхности нормальна и к кривой, которую опишет точка (3), если, сохраняя постоянными q_2 и t, изменять только параметр q_1; эта кривая лежит на поверхности S. Точно так же, умножая уравнения движения (2) соответственно на $\frac{\partial x}{\partial q_2}$, $\frac{\partial y}{\partial q_2}$, $\frac{\partial z}{\partial q_2}$ и складывая, получим уравнение

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)=Q_2, \tag{4'}$$

где

$$Q_2=X\frac{\partial x}{\partial q_2}+Y\frac{\partial y}{\partial q_2}+Z\frac{\partial z}{\partial q_2}.$$

Уравнения (4) и (4') и будут определять q_1 и q_2 в функции t. Их можно написать в значительно более простой форме. Обозначим через q_1' и q_2' производные от q_1 и q_2 по t и через x', y', z' проекции $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ скорости точки. Уравнение (4) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x'\frac{\partial x}{\partial q_1}+y'\frac{\partial y}{\partial q_1}+z'\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]-$$
$$-m\left[x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)+y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)+z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]=Q_1, \tag{5}$$

так как, очевидно,

$$\frac{d}{dt}\left(mx'\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)-mx'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)=m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_1}, \ \ldots$$

Но, на основании равенств (3), x зависит от t и непосредственно и через q_1 и q_2, которые являются функциями от t; следовательно,

$$x'=\frac{\partial x}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x}{\partial q_2}q_2'+\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{6}$$

Точно так же $\frac{\partial x}{\partial q_1}$ зависит от t и непосредственно и через q_1 и q_2; следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}q_1'+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\,\partial q_2}q_2'+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\,\partial t}.$$

В выражении (6) будем рассматривать x' как функцию переменных q_1, q_2, q_1', q_2', t. Тогда найдем, что

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1'}=\frac{\partial x}{\partial q_1},\qquad \frac{\partial x'}{\partial q_1}=\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}q_1'+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\,\partial q_2}q_2'+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\,\partial t},$$

т. е.

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1'}=\frac{\partial x}{\partial q_1},\qquad \frac{\partial x'}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right).$$

Аналогичные вычисления приводят к следующим результатам:

$$\frac{\partial y'}{\partial q_1'}=\frac{\partial y}{\partial q_1},\qquad \frac{\partial y'}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right),$$

$$\frac{\partial z'}{\partial q_1'}=\frac{\partial z}{\partial q_1},\qquad \frac{\partial z'}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right).$$

Заменяя в уравнении движения (5) величины

$$\frac{\partial x}{\partial q_1},\quad \frac{\partial y}{\partial q_1},\quad \frac{\partial z}{\partial q_1},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right),\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right),\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$$

найденными для них сейчас значениями, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1'}+y'\frac{\partial y'}{\partial q_1'}+z'\frac{\partial z'}{\partial q_1'}\right)\right]-m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1}+y'\frac{\partial y'}{\partial q_1}+z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right)=Q_1$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,$$

где положено

$$T=\frac{m}{2}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right).$$

Точно так же, преобразуя уравнение (4′), найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2. \qquad (7')$$

Уравнения (7) и (7′) являются уравнениями движения по Лагранжу. Чтобы получить их, достаточно вычислить величину T, равную кинетической энергии точки; в этой величине нужно заменить x', y', z' их значениями, такими, как (6), чтобы выразить T через q_1, q_2, q_1', q_2' и t; после этого можно составить уравнения (7) и (7′).

В этих уравнениях правые части Q_1 и Q_2 вычислены выше. Их можно определить еще следующим образом: сообщим точке возможное перемещение по поверхности S, т. е. такое, которое получится, если, оставляя t постоянным, дать величинам q_1 и q_2 приращения δq_1 и δq_2. Проекции этого возможного перемещения на оси координат будут

$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2,$$

$$\delta y=\frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2,$$

$$\delta z=\frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2.$$

Отсюда, учитывая найденные выше значения Q_1 и Q_2, получим для возможной силы F выражение

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2.$$

Таким образом, для нахождения величин Q_1 и Q_2 достаточно определить коэффициенты при δq_1 и δq_2 в выражении возможной работы силы F на произвольном перемещении, осуществляемом на поверхности S в положении, которое эта поверхность занимает в момент t.

Чтобы получить, в частности, Q_1, нужно сообщить точке возможное перемещение, которое получится, если, оставляя постоянными q_2 и t, изменить только q_1 на величину ее вариации δq_1; тогда соответствующая возможная работа силы F будет $Q_1\delta q_1$. Точно так же, чтобы получить Q_2, нужно взять возможное перемещение, при котором постоянны q_1 и t_2; работа силы F будет тогда равна $Q_2\delta q_2$.

Если существует силовая функция $U(x, y, z)$ или выполняется более общее условие, согласно которому X, Y, Z являются частными производными функции $U(x, y, z, t)$, содержащей время, то

$$Q_1=\frac{\partial U}{\partial q_1}, \qquad Q_2=\frac{\partial U}{\partial q_2}.$$

Действительно, $U(x, y, z, t)$ зависит от q_1 и q_2 через x, y, z и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}=X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}=Q_1.$$

Аналогичное выражение получим и для Q_2.

264. Приложения. 1°. *Движение точки на неподвижной плоскости в полярных координатах.* Найдем движение точки на плоскости xOy, приняв за параметры q_1 и q_2 две полярные координаты r и θ. Формулы, определяющие x, y, z в функции двух параметров, для рассматриваемого случая будут следующие:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=0.$$

Допустим, что на точку действует сила F, лежащая в плоскости и имеющая проекции (X, Y, O). Функция T будет

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(r'^2+r^2\theta'^2),$$

а уравнения движения —

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_1,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_2.$$

Так как $q_1=r$, $q_2=\theta$, то

$$Q_1=X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}=X\cos\theta+Y\sin\theta,$$

$$Q_2=X\frac{\partial x}{\partial q_2}+Y\frac{\partial y}{\partial q_2}=-Xr\sin\theta+Yr\cos\theta.$$

Функции Q_1 и Q_2 можно найти и непосредственно. Обозначим через R и P составляющие силы по радиусу-вектору в направлении возрастания r и по прямой, к нему перпендикулярной в направлении возрастания θ. На перемещении δr вдоль радиуса-вектора (q_2=const.) работа силы F, равная сумме работ сил P и R, приводится к виду $R\,\delta r$, так как работа силы P равна нулю (рис. 163). Следовательно,

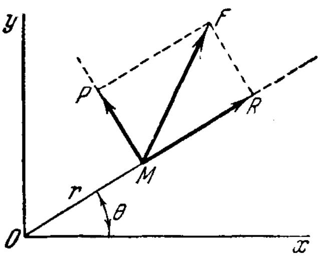


Рис. 163.

$$Q_1=R.$$

Точно так же для возможного перемещения, которое получается, если предположить, что q_1, т. е. r, остается постоянным, а θ изменяется, и которое происходит по окружности радиуса OM и равно $r\,\delta\theta$, работа силы F сводится к работе силы P и равна $Pr\,\delta\theta$. Имеем, следовательно

$$Q_2=Pr.$$

Учитывая найденные значения T_1Q_1 и Q_2, получим уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}(mr')-mr^2\theta'^2=R,\quad \frac{d}{dt}(mr^2\theta')=Pr.$$

Когда сила является центральной, P все время равно нулю, и мы получаем

$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta')=0,\quad r^2\theta'=C$$

(закон площадей).

2°. *Найти движение без трения тяжелой точки на плоскости, равномерно вращающейся вокруг горизонтальной оси, лежащей в этой плоскости.*

Будем отсчитывать время от того момента, когда вращающаяся плоскость совпадает с плоскостью xOy, которую мы предполагаем горизонтальной, принимая ось вращения за ось x. Если θ — угол yOR между движущейся плоскостью и плоскостью xy (рис. 164), то $\theta = \omega t$, где ω — угловая скорость вращения. Уравнение вращающейся плоскости ROx будет тогда

$$y \sin \omega t - z \cos \omega t = 0.$$

Применяя общие формулы (262), получим уравнения движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \sin \omega t,$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg - \lambda \cos \omega t,$$

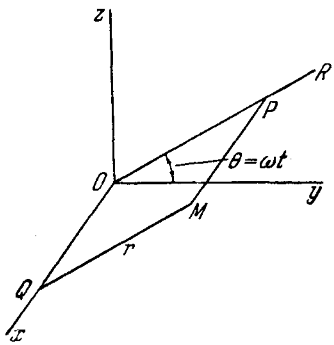


Рис. 164.

причем нормальная реакция будет в точности равна величине λ. Для фиксирования положения точки M на движущейся плоскости воспользуемся координатами x и r в системе осей Ox, OR, причем x будет играть роль параметра q_1, а r — роль параметра q_2. Формулы преобразования будут

$$x = x, \quad y = r \cos \omega t, \quad z = r \sin \omega t,$$

и для функции T получим

$$T = \frac{1}{2} m (x'^2 + r'^2 + \omega^2 r^2).$$

Для действующей силы mg существует силовая функция

$$U = -mgz = -mgr \sin \omega t.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = mx', \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = m\omega^2 r,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial r} = -mg \sin \omega t.$$

Уравнения движения будут

$$\frac{dx'}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = -g \sin \omega t.$$

Первое из этих уравнений показывает, что проекция Q точки M на ось x движется равномерно. Второе уравнение, будучи линейным с постоянными коэффициентами, интегрируется и имеет общий интеграл

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

Для нахождения уравнения проекции траектории на плоскость yz достаточно заменить в этом соотношении ωt углом θ. Тогда

$$r = Ae^{\theta} + Be^{-\theta} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \theta.$$

Представляет интерес частный случай, когда начальные условия таковы, что A и B равны нулю; для этого достаточно, чтобы точка была брошена от оси вращения таким образом, чтобы ее проекция на прямую R имела начальную скорость, равную $g/2\omega$. Тогда уравнение проекции траектории на плоскость yz будет

$$r = \frac{g}{2\omega^2} \sin \theta.$$

Это — окружность, касающаяся в точке O оси Oy. Траектория будет винтовой линией.

Для вычисления нормальной реакции возьмем снова одно из уравнений движения:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \sin \omega t.$$

Заменяя в нем y его значением $r \cos \omega t$, имеем

$$m \left(\frac{d^2r}{dt^2} \cos \omega t - 2\omega \frac{dr}{dt} \sin \omega t - \omega^2 r \cos \omega t\right) = \lambda \sin \omega t.$$

Отсюда, вспоминая уравнение, определяющее r,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r - g \sin \omega t,$$

получим

$$\lambda = -mg \cos \omega t - 2m\omega \frac{dr}{dt}.$$

Эта формула, в которой r следует заменить его значением через t, определяет в функции t нормальную реакцию, которая в рассматриваемом случае совпадает с λ.

II. Случай неподвижной поверхности

265. Применение теоремы кинетической энергии. Указанный нами общий метод применим всегда. Но если поверхность неподвижна, то возможны упрощения, которые следует указать. В этом случае уравнение поверхности имеет вид

$$f(x, y, z) = 0,$$

и действительное перемещение, которое совершает точка, будет перпендикулярно к нормальной реакции N. Если применить теорему кинетической энергии, то работа этой нормальной реакции будет равна нулю, и мы получим уравнение

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz,$$

не зависящее от реакции. Этим уравнением можно всегда заменить одно из уравнений Лагранжа. Мы убедимся сейчас, что оно действительно представляет следствие уравнений Лагранжа.

Если поверхность движется, то нормальная реакция не исключится при применении теоремы кинетической энергии, так как действительное перемещение dx, dy, dz точки не будет перпендикулярным к нормальной реакции. В самом деле, в момент t поверхность будет в положении S и точка в положении M на поверхности S; к моменту $t+dt$ поверхность будет в S' и точка в M' на поверхности S'; перемещение MM' не будет перпендикулярно к реакции N.

Вернемся к случаю неподвижной поверхности. Из уравнения кинетической энергии сразу получаем первый интеграл, если существует силовая функция $U(x, y, z)$:

$$\frac{mv^2}{2}=U+h.$$

Может еще случиться, что $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ не является полным дифференциалом, но становится таковым в силу соотношения $f(x, y, z)=0$. Если, например, точка поверхности определяется двумя параметрами q_1 и q_2, то

$$x=\varphi(q_1, q_2), \quad y=\psi(q_1, q_2), \quad z=\omega(q_1, q_2),$$

и выражение $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$, если заменить в нем X, Y, Z, x, y, z их значениями в функции q_1 и q_2, обращается в $Q_1dq_1+Q_2dq_2$. Если выражение $Q_1dq_1+Q_2dq_2$ является полным дифференциалом функции $U(q_1, q_2)$, то интеграл кинетической энергии будет иметь вид

$$\frac{mv^2}{2}=U(q_1, q_2)+h$$

или

$$T=U+h,$$

ибо T как раз и есть кинетическая энергия.

Этим последним уравнением можно заменить наиболее сложное из уравнений Лагранжа, и таким путем получатся два уравнения для определения q_1 и q_2 в функции t.

Пример. *Рассмотреть движение точки на поверхности геликоида с направляющей плоскостью, когда точка притягивается или отталкивается осью геликоида с силой, пропорциональной расстоянию* (рис. 165).

Пусть r и θ — полярные координаты точки M геликоида, лежащей на образующей CD. Декартовы координаты этой точки будут:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad z=k\theta.$$

Сила, действующая на точку, равна $F = m\mu r$ и направлена по CD. Известно, что в этом случае имеется силовая функция

$$U = m\mu \frac{r^2}{2}.$$

Определяя точку поверхности параметрами r и θ, которые заменяют q_1 и q_2, имеем

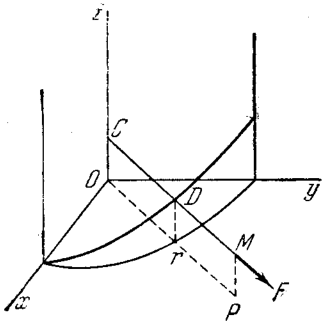


Рис. 165.

$$T = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + k^2\theta'^2) =$$
$$= \frac{m}{2}[r'^2 + (r^2 + k^2)\theta'^2].$$

Уравнения движения Лагранжа будут поэтому следующие:

$$\frac{dr'}{dt} - r\theta'^2 = \mu r, \quad \frac{d}{dt}[(k^2 + r^2)\theta'] = 0.$$

Второе из этих уравнений показывает, что

$$(r^2 + k^2)\theta' = C.$$

Вместо первого уравнения воспользуемся интегралом кинетической энергии

$$r'^2 + (r^2 + k^2)\theta'^2 - \mu r^2 = h.$$

Исключив θ' из двух последних уравнений, получим уравнение движения по радиусу-вектору:

$$r'^2 + \frac{C^2}{r^2 + k^2} - \mu r^2 = h,$$

или

$$(r^2 + k^2)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (h + \mu r^2)(r^2 + k^2) - C^2.$$

Таким образом, t выражается через r при помощи квадратуры. Точно так же найдем, что θ выражается через r при помощи второй квадратуры. Для этого достаточно в последнем уравнении заменить dt его значением

$$\frac{1}{C}(r^2 + k^2)\,d\theta.$$

При исследовании формы кривой необходимо различать два случая в зависимости от того, положительно или отрицательно μ (отталкивание или притяжение). Если μ положительно, то кривая может иметь бесконечные ветви, что видно из того, что при неограниченном возрастании r величина $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ не перестает быть положительной. Наоборот, если μ отрицательно, то r может возрастать только в некоторых пределах. В частном случае, когда $\mu = 0$, точка перемещается по поверхности без непосредственно приложенной силы (по инерции). Тогда t выразится через r эллиптическим интегралом. В этом частном случае точка, как мы увидим дальше (п. 270), будет описывать геодезическую линию геликоида.

266. Вывод уравнения кинетической энергии из уравнений Лагранжа. Если поверхность неподвижна, то выражения x, y, z в функции q_1 и q_2 могут быть выбраны таким образом, чтобы они не содержали t явно. Тогда T будет однородной квадратичной функцией величин q_1' и q_2' и на основании теоремы об однородных функциях получим тождество

$$q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'} = 2T.$$

Установив это, возьмем оба уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2$$

и сложим их, умножив предварительно первое на q_1', а второе на q_2'. Мы получим одно уравнение, которое может быть написано следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) -$$
$$-\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'} \frac{dq_1'}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_2'} \frac{dq_2'}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2} q_2'\right) = Q_1 q_1' + Q_2 q_2'.$$

Первая скобка равна $2T$, а вторая равна $\frac{dT}{dt}$, так как T зависит от t через q_1', q_2', q_1, q_2. Следовательно, предыдущее уравнение можно написать в виде

$$\frac{d(2T)}{dt} - \frac{dT}{dt} = Q_1 q_1' + Q_2 q_2',$$

или, умножая его на dt, получим

$$dT = Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2,$$

что и является уравнением кинетической энергии, так как $Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2$ есть элементарная работа силы (X, Y, Z). Если $Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2$ является полным дифференциалом функции $U(q_1, q_2)$, то интеграл кинетической энергии будет

$$T = U + h.$$

Он заменит одно из уравнений Лагранжа.

267. Устойчивость равновесия в случае существования силовой функции U. Как мы видели в статике, для нахождения значений q_1 и q_2, соответствующих положению равновесия точки, необходимо составить два уравнения: $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$. В частном случае, когда $Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2$ является дифференциалом функции $U(q_1, q_2)$, уравнения равновесия совпадают с уравнениями, которые нужно написать при нахождении максимума или минимума функции $U(q_1, q_2)$.

Мы хотим доказать, следуя Лежен-Дирихле, что если для какой-нибудь системы значений $q_1 = a_1$, $q_2 = a_2$ функция U имеет максимум, то соответствующее равновесие устойчиво. Доказательство совпадает с данным ранее (п. 208) для свободной точки. Укажем его в немногих словах. Можно всегда предполагать, что максимум имеет место при $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, так как это приведет к выбору новых параметров $q_1 - a_1$ и $q_2 - a_2$, и что этот максимум $U(0, 0)$ равен нулю, так как это равносильно вычитанию из $U(q_1, q_2)$ некоторой постоянной, что допустимо, поскольку эта функция определяется с точностью до постоянной. Согласно определению максимума, функция U будет тогда отрицательной и отличной от нуля вблизи рассматриваемого положения равновесия P. Проведем на поверхности малую замкнутую кривую C, окружающую P. На этой кривой функция U отрицательна и не равна нулю. Следовательно, существует такое малое положительное число p, что функция $U + p$ будет на кривой C тоже отрицательна. Сместим теперь точку из положения равновесия P в близкое положение M_0, лежащее внутри C, где U принимает значение U_0, и сообщим ей скорость v_0. Получим

$$\frac{mv^2}{2} = U + \frac{mv_0^2}{2} - U_0.$$

Выберем начальное положение и начальную скорость так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{mv_0^2}{2} < \frac{p}{2}, \quad -U_0 < \frac{p}{2},$$

что вследствие непрерывности потребует, чтобы v_0 и расстояние PM_0 были меньше некоторых пределов. При этих условиях точка не выйдет за кривую C и даже ее не достигнет, так как из уравнения кинетической энергии получаем неравенство

$$\frac{mv^2}{2} < U + p,$$

а $U + p$ делается отрицательным на граничной кривой C.

268. Нормальная реакция. После того как движение станет известным, для нахождения реакции достаточно будет найти λ из какого-нибудь одного уравнения движения (2) (п. 262). Допустим, что точка свободно положена на поверхность, т. е. что она может сойти с нее в какую-нибудь сторону. Для того чтобы точка оставалась на поверхности, необходимо, чтобы реакция была направлена в ту сторону, куда точка может от поверхности удалиться. По одну сторону поверхности функция $f(x, y, z)$ положительна, а по другую сторону отрицательна. Для того чтобы реакция была, например, направлена в область положительных f, необходимо, как мы это видели в статике в связи с равновесием точки на поверхности, чтобы коэффициент λ был положителен. Если λ в какой-нибудь момент обращается в нуль и меняет знак, то точка покидает поверхность и задача сводится к случаю свободной точки.

269. Естественные уравнения и нормальная реакция. Отметим на траектории, лежащей на поверхности, начало дуг A (рис. 166). Пусть M — произвольное положение движущейся точки. Проведем через эту точку касательную MT в направлении возрастающих дуг, и пусть C — центр кривизны нормального сечения поверхности, касающегося MT, $R = MC$ — его радиус кривизны. За положительное направление нормали к поверхности мы примем направление MC. Пусть также MC' — главная нормаль траектории и $\rho = MC'$ — ее радиус кривизны. Обозначим через θ угол между соприкасающейся плоскостью TMC' траектории и нормалью к поверхности. На основании теоремы Менье имеем

$$\rho = R\cos\theta.$$

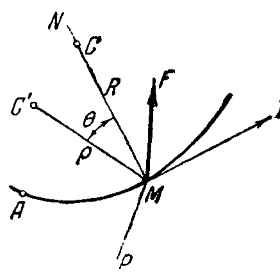


Рис. 166.

Проектируя направление MC' на касательную плоскость, мы получим полупрямую MP, на которой мы будем рассматривать направление проекции отрезка MC' как положительное. Пусть теперь F_t, F_n, F_p — проекции силы F на прямые MT, MC, MP, а N — алгебраическое значение нормальной реакции. Мы знаем, что равнодействующая сил F и N разлагается на две силы, из которых одна равна $m\dfrac{dv}{dt}$ и направлена по MT, а другая равна $m\dfrac{v^2}{\rho}$ и направлена по MC'; эта система двух сил эквивалентна системе, образованной силами F и N. Приравнивая суммы проекций сил каждой из этих систем на оси MT, MP, MC, имеем:

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \quad \frac{mv^2}{\rho}\sin\theta = F_p, \quad \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta = F_n + N.$$

Этим уравнениям можно придать более простую форму. Обозначим через ρ_g радиус геодезической кривизны $\dfrac{\rho}{\sin\theta}$ и воспользуемся найденным выше соотношением $\dfrac{\rho}{\cos\theta} = R$. Тогда предыдущие уравнения примут вид

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \quad \frac{mv^2}{\rho_g} = F_p, \quad \frac{mv^2}{2R} = F_n + N.$$

Если имеется силовая функция, то $\dfrac{mv^2}{2} = U + h$, и последняя из предыдущих формул позволит вычислить нормальную реакцию без предварительного определения движения при условии, что известен радиус кривизны R.

Из этих уравнений можно вывести интересное следствие. Подвергнем поверхность такой деформации, чтобы длины начерченных на ней линий не изменились. При таком преобразовании радиусы геодезической кривизны не изменяются. Если, следовательно, изменить силу F таким образом, чтобы не изменилась ее проекция на касательную плоскость, то первые два из написанных выше уравнений, определяющие движение, не изменятся и движение будет таким же, как и в первом случае. Изменится только нормальная реакция. Мы видим, таким образом, что траектория тяжелой точки, двигающейся на вертикальном цилиндре, получится навертыванием на этот цилиндр параболы с вертикальной осью. Точно так же траектория тяжелой точки на круговом конусе с вертикальной осью получится навертыванием на этот конус плоской траектории точки, движущейся под действием постоянной центральной силы.

270. Геодезические линии. Наиболее простым будет тот случай, когда на точку, положенную на неподвижную поверхность, не действуют никакие силы. Тогда уравнение кинетической энергии будет $d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=0$; оно показывает, что скорость остается постоянной. Траектория точки будет геодезической линией поверхности, так как ее соприкасающаяся плоскость должна содержать единственную действующую на точку силу — нормальную реакцию. Это следует также и из второго естественного уравнения, которое обращается в $\frac{mv^2}{\rho_g}=0$, откуда вытекает $\frac{1}{\rho_g}=0$, так как v постоянно, а условие $\frac{1}{\rho_g}=0$ характеризует геодезические линии. Последнее естественное уравнение позволяет вычислить нормальную реакцию $N=\frac{mv^2}{R}$. Можно заметить, что в рассматриваемом случае $\theta=0$, вследствие чего $R=\rho$ и нормальная реакция имеет значение $\frac{mv^2}{\rho}$. Она изменяется обратно пропорционально радиусу кривизны траектории.

Общие уравнения движения приводятся теперь к виду

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

При помощи уравнения $ds=v_0\,dt$ здесь можно исключить время, для чего достаточно в предыдущих формулах заменить dt^2 через $\left(\frac{ds}{v_0}\right)^2$.

Примечание. Если поверхность имеет прямолинейные образующие, то они будут одними из возможных траекторий, так как если точку пустить по какой-нибудь образующей, то она будет продолжать двигаться по ней в силу закона инерции, а реакция поверхности будет равна нулю.

Пример. *Геодезические линии эллипсоида.* Приложим предыдущие результаты к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0. \tag{1}$$

Мы пишем здесь в знаменателях a, b, c, чтобы те же вычисления в зависимости от знаков a, b, c давали геодезические линии эллипсоида или гиперболоида.

Уравнения движения могут быть написаны так:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mu\frac{x}{a}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\mu\frac{y}{b}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=\mu\frac{z}{c}. \tag{2}$$

Как всегда, имеем первый интеграл $v=v_0$. Для нахождения второго используем метод Дарбу. Продифференцировав два раза подряд уравнение (1), получим

$$\frac{x}{a}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{y}{b}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{z}{c}\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{a}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0$$

или в силу уравнений (2)

$$\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=-\left[\frac{1}{a}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]. \tag{3}$$

Умножим теперь уравнения (2) соответственно на $\frac{1}{a}\frac{dx}{dt}$, $\frac{1}{b}\frac{dy}{dt}$, $\frac{1}{c}\frac{dz}{dt}$ и сложим. Получим

$$\mu\left(\frac{x}{a^2}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dt}+\frac{z}{c^2}\frac{dz}{dt}\right)=$$
$$=\frac{1}{a}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{b}\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{c}\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{4}$$

Если мы разделим почленно уравнение (4) на уравнение (3), то получим

$$\frac{\frac{x}{a^2}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dt}+\frac{z}{c^2}\frac{dz}{dt}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}=\frac{\frac{1}{a}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{b}\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{c}\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}}{-\left[\frac{1}{a}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]}.$$

Каждый из числителей с точностью до постоянного множителя равен производной от знаменателя; следовательно, найденное уравнение можно проинтегрировать и получить

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left[\frac{1}{a}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\text{const}.$$

Исключая время при помощи уравнения кинетической энергии $\frac{ds}{dt}=v_0$, получим

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left[\frac{1}{a}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]=\text{const}. \tag{5}$$

Таково дифференциальное уравнение геодезических линий эллипсоида. Простая геометрическая интерпретация этого уравнения приведет к теореме, установленной Иоахимсталем: если p — расстояние от центра эллипсоида до касательной плоскости в точке M геодезической линии, D — длина полудиаметра, параллельного касательной, проведенной в точке M к геодезической линии, то вдоль всей этой линии произведение pD постоянно. Действительно, так как направляющие косинусы касательной в точке M равны $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, то координаты конца параллельного полудиаметра будут

$$D\frac{dx}{ds}, \quad D\frac{dy}{ds}, \quad D\frac{dz}{ds}.$$

Написав, что эта точка принадлежит эллипсоиду, имеем

$$\frac{1}{D^2}=\frac{1}{a}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Уравнение касательной плоскости в точке M будет

$$\frac{xX}{a}+\frac{yY}{b}+\frac{zZ}{c}-1=0;$$

расстояние от начала координат до этой плоскости определяется формулой

$$\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$

откуда на основании равенства (5) действительно получаем

$$pD=\text{const}.$$

Эта теорема применима также и к линиям кривизны эллипсоида. Действительно, мы увидим дальше, что эти линии соответствуют особым решениям уравнения (5). (Д а р б у, Mécanique de Despeyroux, т. 1.)

Для завершения интеграции нужно выразить координаты x, y, z точки эллипсоида через ее эллиптические координаты q_1, q_2. Тогда переменные q_1, q_2 разделятся и интегрирование приведется к квадратурам. К этому вопросу мы вернемся вновь при рассмотрении приложения метода интегрирования Якоби (глава XVI).

271. Применение уравнений Лагранжа. Обычно для нахождения геодезических линий предпочтительнее поступать следующим образом, используя уравнения Лагранжа. Пусть

$$x=\varphi(q_1, q_2), \quad y=\psi(q_1, q_2), \quad z=\omega(q_1, q_2)$$

— выражения координат точки поверхности в функции двух параметров.

Тогда квадрат линейного элемента произвольной кривой, проведенной на поверхности, выразится так

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=a_{11}\,dq_1^2+2a_{12}\,dq_1\,dq_2+a_{22}\,dq_2^2.$$

Если для упрощения мы положим массу точки равной 1, то получим

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\left(a_{11}q_1'^2+2a_{12}q_1'q_2'+a_{22}q_2'^2\right),$$

и уравнения движения будут

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=0.$$

Одно из этих уравнений, более сложное, будет в дальнейшем заменяться интегралом кинетической энергии $T=h$, или

$$\frac{1}{2}\left(a_{11}q_1'^2+2a_{12}q_1'q_2'+a_{22}q_2'^2\right)=h.$$

Мы имеем таким образом два уравнения (из которых одно второго порядка, а другое первого), определяющие q_1, q_2 в функции t.

Пример. *Поверхность такова, что при подходящем выборе криволинейных координат, определяющих ее различные точки, можно выражение линейного элемента ds привести к виду*

$$ds^2=u\,(du^2+dv^2).$$

Требуется найти конечное уравнение геодезических линий. Во что преобразуются эти линии, если сделать карту, на которой каждой точке поверхности с координатами u, v будет соответствовать *точка плоскости с прямоугольными координатами, имеющими те же самые значения*? (лиценциатская, Париж, 1887).

Обозначая через u' и v' производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ и полагая массу точки равной 1, получим

$$T=\frac{1}{2}\,u\,(u'^2+v'^2)$$

и так как нет непосредственно приложенных сил, то уравнения Лагранжа будут

$$\frac{d}{dt}(uu')-\frac{1}{2}u'^2-\frac{1}{2}v'^2=0, \quad \frac{d}{dt}(uv')=0. \tag{1}$$

Мы знаем заранее первый интеграл этих уравнений, а именно интеграл кинетической энергии $T=h$, или

$$\frac{u}{2}\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]=h. \tag{2}$$

Второе из уравнений (1) дает другой первый интеграл

$$u\frac{dv}{dt}=C. \tag{3}$$

Исключая dt из этих двух уравнений и полагая $\frac{C^2}{h}=2a$, получим дифференциальное уравнение геодезических линий

$$dv=\sqrt{a}\,\frac{du}{\sqrt{u-a}}.$$

Отсюда, интегрируя и обозначая через b другую постоянную интегрирования, получим

$$(v-b)^2=4a\,(u-a).$$

Это и есть уравнение искомых геодезических линий в конечной форме. Если u и v рассматривать как прямоугольные координаты точки плоскости, то кривые будут параболами, имеющими директрису на оси v. Поверхность, для которой мы нашли геодезические линии, развертывается на поверхность вращения. (См. Дарбу, Théorie générale des surfaces, часть 3, гл. II.)

272. Бесконечно малые колебания тяжелой точки около наинизшей точки поверхности. Рассмотрим на поверхности точку O, в которой касательная плоскость горизонтальна и поверхность в окрестности этой точки расположена над этой касательной плоскостью. Это положение O является положением устойчивого равновесия для тяжелой материальной точки, движущейся без трения по поверхности. Мы исследуем бесконечно малые колебания около этого положения равновесия. Примем точку O за начало координат, ось Oz направим вертикально вверх, а оси Ox и Oy — по касательным к линиям кривизны, проходящим через точку O. Если координату z поверхности разложить для малых значений x и y по формуле Маклорена, то уравнение поверхности будет иметь вид

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}+\varphi(x, y),$$

где добавочный член $\varphi(x, y)$, по крайней мере, третьего порядка относительно x и y, а p и q — оба главных радиуса кривизны поверхности в точке O. Так как материальная точка является тяжелой, то имеется силовая функция

$$U=-gz,$$

которую мы написали в предположении, что $m=1$. Функция Лагранжа T имеет вид

$$T=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2),$$

где

$$z'=\frac{xx'}{p}+\frac{yy'}{q}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'.$$

При малых колебаниях около рассматриваемого положения равновесия x и y остаются очень малыми; составляющие x' и y' скорости также очень малы, так как сама скорость, как мы видели (п. 267), очень мала. Мы будем рассматривать x, y, x', y' как величины одного и того же порядка. В выражении T будут тогда содержаться два члена второго порядка и третий член z'^2 четвертого порядка. Мы пренебрежем им по сравнению с двумя первыми и получим

$$T=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2).$$

Если в выражении U заменить z его значением, то разложение U начнется двумя членами второго порядка, которые мы только и сохраним, пренебрегая членами более высокого порядка. Получим

$$U=-g\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right).$$

Уравнения Лагранжа в применении к переменным x и y, играющим роль параметров q_1 и q_2, будут

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Но поскольку T не содержит ни x, ни y, они примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{p}x, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{g}{q}y.$$

Эти уравнения сразу интегрируются:

$$x=A\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{p}}+\alpha\right), \quad y=B\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{q}}+\beta\right), \tag{1}$$

где A, B, α, β — произвольные постоянные, которые должны быть определены по начальным условиям. Таким образом, мы получили бесконечно малые колебания. Координата x принимает свое первоначальное значение через промежуток времени $2\pi\sqrt{\frac{p}{g}}$, а координата y — через промежуток $2\pi\sqrt{\frac{q}{g}}$. Если эти два периода соизмеримы, то горизонтальная проекция траектории будет алгебраической кривой, которая получается исключением t из уравнений (1). Траектория будет трансцендентной, если оба периода несоизмеримы. В этом случае движение обладает некоторыми своеобразными особенностями. Рассмотрим в плоскости xy прямоугольник, образованный прямыми $x=\pm A$, $y=\pm B$. Кривая, определяемая уравнениями (1), касается бесчисленное множество раз сторон этого прямоугольника. Так, эта кривая касается стороны $x=A$ (рис. 167) при всех значениях t вида

$$t\sqrt{\frac{g}{p}}+\alpha=2k\pi \qquad (k \text{ — целое}).$$

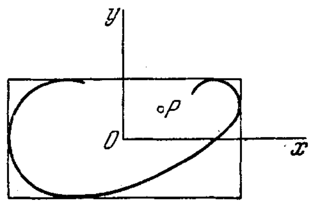


Рис. 167.

Более того, траектория некоторым образом как бы покрывает всю площадь этого прямоугольника. Мы это докажем, установив, что для *произвольной* точки P с координатами ξ и η внутри прямоугольника существует бесчисленное множество значений t, при которых движущаяся точка подходит к P на расстояние, меньшее любого заданного числа. Пусть в самом деле, λ и μ — дуги, определяемые формулами

$$\xi=A\cos(\lambda+\alpha), \quad \eta=B\cos(\mu+\beta).$$

Если переменному t придать значение вида

$$t=\sqrt{\frac{p}{g}}(\lambda+2k\pi) \qquad (k \text{ — целое число}),$$

то абсцисса x движущейся точки будет равна ξ, а ее ордината y будет иметь вид

$$y=B\cos\left[\sqrt{\frac{p}{q}}(\lambda+2k\pi)+2k'\pi+\beta\right],$$

где k' — произвольное целое число. По предположению, числа p и q несоизмеримы; следовательно, можно определить два целых числа k и k' таким образом, что

$$\sqrt{\frac{p}{q}}(\lambda+2\pi k)+2k'\pi$$

будет отличаться сколь угодно мало от любого заданного числа и, в частности, от μ. При соответствующих значениях t координата y будет отличаться сколь угодно мало от $B\cos(\mu+\beta)$, т. е. от η, и так как при этом x будет равняться ξ, то движущаяся точка пройдет сколь угодно близко от P.

III. Движение на поверхности вращения

273. Геодезические линии поверхностей вращения. Мы ставили целью составить два уравнения, не содержащих нормальной реакции, и получили в качестве таковых уравнение кинетической энергии и одно из уравнений Лагранжа. В случае движения точки на поверхности вращения мы всегда будем иметь два не зависящих от реакции уравнения, применив теорему кинетической энергии и теорему момента количества движения относительно оси вращения, так как нормальная реакция лежит в одной плоскости с осью вращения и ее момент относительно этой оси равен нулю. Приложим, в частности, этот метод к определению геодезических линий поверхностей вращения.

Примем ось вращения за ось z. Если уравнение меридиана в плоскости xz есть $z=\varphi(x)$, то уравнение поверхности будет, очевидно, $z=\varphi(r)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ есть расстояние от точки до оси. Обозначим через r и θ полярные координаты проекции P движущейся точки на плоскость xOy. Для координат точки поверхности получим следующие выражения в функции двух параметров q_1 и q_2:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=\varphi(r).$$

Выражение квадрата линейного элемента будет

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\left(1+\varphi'^2\right)dr^2+r^2\,d\theta^2,$$

где $\varphi'=\varphi'(r)$. Так как мы ищем геодезические линии, то займемся исследованием движения точки, скользящей по поверхности без воздействия какой бы то ни было заданной силы. На эту точку будет действовать только реакция. Тогда по теореме кинетической энергии имеем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=v_0^2.$$

Далее теорема момента количества движения показывает, что для проекции движения на плоскость xy справедлив закон площадей (п. 203), т. е.

$$r^2\,d\theta=C\,dt.$$

Из этих двух уравнений получаются два первых интеграла.

Покажем, что интегрирование приводится к квадратурам. В самом деле, интеграл кинетической энергии после замены ds^2 его значением принимает вид

$$dr^2\left(1+\varphi'^2\right)+r^2\,d\theta^2=v_0^2\,dt^2.$$

Чтобы получить проекцию траектории на плоскость xy, исключим отсюда dt при помощи уравнения площадей. Тогда найдем

$$dr^2\left(1+\varphi'^2\right)+r^2\,d\theta^2=\frac{v_0^2}{C^2}\,r^4\,d\theta^2;$$

или, полагая $\dfrac{v_0^2}{C^2}=\dfrac{1}{k^2}$ и разрешая относительно $d\theta$, получим

$$d\theta=\pm\frac{k\,dr}{r}\sqrt{\frac{1+\varphi'^2}{r^2-k^2}}. \tag{G}$$

Знак, который нужно взять, определится из рассмотрения направления начальной скорости. Уравнение геодезической линии в конечной форме будет

$$\theta=\int\frac{k\,dr}{r}\sqrt{\frac{1+\varphi'^2}{r^2-k^2}}+\beta.$$

Это уравнение содержит две постоянные k и β, которые можно, например, определить из условия, что геодезическая линия проходит через две заданные точки. Из этих двух постоянных лишь первая влияет на форму кривой; изменение второй постоянной дает поворот геодезической линии вокруг оси поверхности.

Обозначив через $d\sigma$ элемент дуги меридиана, получим

$$d\sigma^2=dr^2+dz^2=\left(1+\varphi'^2\right)dr^2,$$

и дифференциальное уравнение геодезических линий можно будет написать в другом виде:

$$d\theta=\pm\frac{k\,d\sigma}{r\sqrt{r^2-k^2}}.$$

Примечание. В рассматриваемом случае имеем

$$T=\frac{1}{2}\left[\left(1+\varphi'^2\right)r'^2+r^2\theta'^2\right],$$

где φ' — функция от r. Одно из уравнений Лагранжа будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta'}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=0.$$

Так как T не содержит θ, то $\dfrac{\partial T}{\partial\theta}$ равно нулю и мы получим

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'}=C,\quad r^2\theta'=C.$$

Таким образом, мы снова приходим к уравнению площадей.

274. Формула Клеро. Если обозначить через i угол, под которым геодезическая линия поверхности вращения пересекает меридиан, проходящий через точку M этой линии, а через r — расстояние от точки M до оси, то для всех точек линии выполняется соотношение

$$r \sin i = k. \tag{1}$$

В самом деле, если рассматривать точку, описывающую геодезическую линию при предыдущих условиях, то момент количества движения, или, что приводится к тому же, момент скорости точки относительно оси будет постоянным. Постоянное значение этого момента как раз равно постоянной C площадей на плоскости, перпендикулярной оси, так как момент скорости относительно оси Oz равен $r^2 \frac{d\theta}{dt}$. Разложим скорость v движущейся точки M на две составляющие, из которых одна $v \sin i$ касается параллели, проходящей через точку M, а другая $v \cos i$ касается меридиана. Момент скорости относительно оси вращения равен сумме моментов этих двух составляющих, но так как момент второй равен нулю, то, следовательно, момент скорости равен моменту $rv \sin i$ только первой составляющей. Следовательно,

$$rv \sin i = C.$$

Но так как $v = v_0$, то отсюда получается уравнение (1), причем постоянная k имеет значение $\frac{C}{v_0}$ и поэтому совпадает с той, которая входит в уравнение геодезической линии (п. 273).

Примечание. Соотношение (1) не характеризует геодезических линий. Если линия удовлетворяет этому уравнению, то она является либо *геодезической линией*, либо *параллелью*. Действительно, уравнение (1), очевидно, удовлетворяется для параллели, так как для нее $r = k$, $i = \frac{\pi}{2}$. Это решение является особым интегралом $r = k$, $dr = 0$ уравнения (G).

275. Упражнение. Геодезические линии поверхности, образованной вращением равносторонней гиперболы вокруг своей асимптоты. Уравнение поверхности будет

$$z = \frac{a^2}{r}.$$

Поэтому в приведенных выше формулах нужно заменить $\varphi(r)$ через $\frac{a^2}{r}$ и для проекций геодезических линий получится уравнение

$$\theta = \int \sqrt{\frac{1 + \frac{a^4}{r^4}}{r^2 - k^2}} \frac{k\,dr}{r} + \beta.$$

Для того чтобы θ было вещественным, необходимо, чтобы r было больше k; следовательно, кривая находится вне круга радиуса k. Можно, однако, полагать $r = k$, так как при этом значении подынтегральное выражение обращается в бесконечность вместе с $\frac{1}{\sqrt{r-k}}$ и интеграл остается конечным. Повернув оси на подходящий угол вокруг оси Oz (рис. 168), можно добиться того, чтобы θ равнялось нулю при $r = k$, и мы получим

$$\theta = \int_k^r \sqrt{\frac{1+\frac{a^4}{r^4}}{r^2-k^2}}\,\frac{k\,dr}{r}.$$

Начиная от значения k, r может неограниченно возрастать без нарушения вещественности θ; при этом θ, возрастая вместе с r, будет иметь некоторый предел, так как при неограниченном возрастании r подынтегральное выражение стремится к нулю, как и $\frac{1}{r^2}$. Этот предел ψ будет

$$\psi = \int_k^\infty \sqrt{\frac{1+\frac{a^4}{r^4}}{r^2-k^2}}\,\frac{k\,dr}{r}.$$

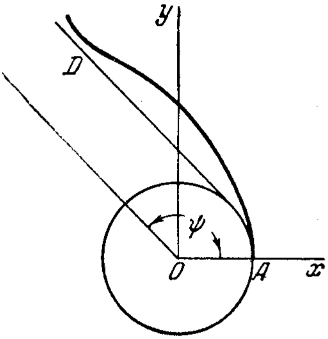


Рис. 168.

Чтобы узнать, существует ли асимптота, параллельная этому направлению ψ, достаточно, как известно, выяснить, будет ли полярная подкасательная $r^2\frac{d\theta}{dt}$ иметь предел при бесконечном r. Этот предел, если он существует, равен расстоянию от полюса до асимптоты. В данном случае выражение

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = kr\sqrt{\frac{1+\frac{a^4}{r^4}}{r^2-k^2}}$$

имеет предел k. Следовательно, кривая имеет асимптоту D, касающуюся окружности радиуса k. Можно доказать, что угол ψ больше, чем $\frac{\pi}{2}$. Полагая для этого $\frac{k}{r} = u$, имеем

$$\psi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+\frac{a^4}{k^4}u^4}{1-u^2}}\,du.$$

Если $k = \infty$, то $\psi = \frac{\pi}{2}$; когда k уменьшается, этот угол увеличивается, и если предположить, что k становится очень малым, то подынтегральное выражение будет становиться все большим и большим и ψ будет неограниченно возрастать. Следовательно, ψ имеет какое-то значение, заключенное между $\frac{\pi}{2}$ и ∞. Взяв перед интегралом знак —, мы получим вторую ветвь кривой, симметричную первой относительно оси x.

Таким же путем можно исследовать геодезические линии поверхностей вращения второго порядка, детальный анализ которых можно найти в Traité des fonctions elliptiques, т. II, глава VI, Альфена. Для произвольных поверхностей вращения получается, что если меридиан имеет бесконечные ветви, то и геодезические линии имеют бесконечные элементы. Если на поверхности имеется самая короткая параллель, то эта параллель будет геодезической линией, и в общем случае будут существовать геодезические линии, асимптотически к ней приближающиеся. Для подробного изучения этих кривых отсылаем к Leçons sur la théorie des surfaces Дарбу (часть 3).

276. Движение тяжелой точки на поверхности вращения, ось которой Oz вертикальна. Интегрирование уравнений движения приводится к квадратурам. Прежде всего по теореме кинетической энергии имеем

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mg\,dz,$$

где $v^2 = 2gz + h$, причем ось z направлена вниз. Теорема площадей справедлива, и мы имеем

$$r^2\,d\theta = C\,dt.$$

Если уравнение поверхности есть $z = \varphi(r)$, то

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(1 + \varphi'^2\right) + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Исключая из этих трех уравнений время и скорость, получим

$$dr^2\left(1 + \varphi'^2\right) + r^2\,d\theta^2 = [2g\varphi(r) + h]\,\frac{r^4\,d\theta^2}{C^2}.$$

Переменные сразу разделяются и θ выражается через r при помощи квадратуры:

$$\theta = \int \sqrt{\frac{1 + \varphi'^2}{[2g\varphi(r) + h]\,r^2 - C^2}}\,\frac{C\,dr}{r}.$$

Точно так же интегрирование приводится к квадратурам всякий раз, когда движущаяся точка находится под действием силы, имеющей силовую функцию, зависящую только от r.

Для алгебраической поверхности Кобб указал случаи, при которых задача приводится к эллиптическим функциям (Acta mathematica, т. X).

Интересное аналитическое исследование движения тяжелой точки на поверхности вращения можно найти в статье Отто Штауде (Acta mathematica, т. XI).

Примечание. Тяжелая точка, движущаяся по поверхности вращения, может описывать параллель поверхности лишь в том случае, когда вершина конуса нормалей вдоль этой параллели находится над ней.

В самом деле, уравнение поверхности имеет вид

$$z = \varphi(r), \quad \text{или} \quad z - \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

Обращаясь к общим уравнениям движения на поверхности, имеем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\lambda\frac{x}{r}\varphi'(r),\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-\lambda\frac{y}{r}\varphi'(r),\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=mg+\lambda.$$

Для того чтобы траектория была параллелью $z=z_0$, необходимо, чтобы эти уравнения удовлетворялись при условии $z=z_0$, $x=r_0\cos\theta$, $y=r_0\sin\theta$. С другой стороны, по теореме площадей $r_0^2\frac{d\theta}{dt}=C=r_0v_0$, где начальная скорость v_0 обязательно касается параллели; отсюда $\theta=\frac{v_0t}{r_0}$. Поэтому обязательно должно быть

$$\lambda=-mg,\quad -\frac{v_0^2}{r_0^2}x=g\frac{x}{r_0}\varphi'(r_0),\quad -\frac{v_0^2}{r_0^2}y=g\frac{y}{r_0}\varphi'(r_0).$$

Эти два последних уравнения приводятся к следующему:

$$\frac{v_0^2}{r_0^2}=-g\frac{\varphi'(r_0)}{r_0}.$$

Следовательно, $\varphi'(r_0)$ должно быть отрицательным. Если это условие выполнено, то вершина конуса нормалей находится над параллелью. Если точке, находящейся на параллели, сообщить скорость

$$v_0=\sqrt{-gr_0\varphi'(r_0)},$$

то она будет двигаться по этой параллели.

Этот результат легко проверяется геометрически. Для этого достаточно выразить, что равнодействующая веса и нормальной реакции направлена к центру параллели и равна $\frac{mv_0^2}{r_0}$.

277. Сферический маятник. Сферический маятник состоит из тяжелой точки, движущейся без трения по неподвижной сфере. Примем за начало координат центр сферы и направим ось z вертикально вверх. В цилиндрических координатах уравнение сферы будет

$$r^2+z^2=l^2,$$

где l — длина маятника.

Точка находится под действием двух сил: силы тяжести и нормальной реакции сферы; следовательно, по теореме кинетической энергии имеем

$$v^2=2gz+h,$$

так как работа реакции равна нулю. Более того, так как обе силы лежат в одной плоскости с осью Oz, то можно применить закон площадей к проекции движения на плоскость xOy:

$$r^2\,d\theta=C\,dt.$$

Эти три уравнения определяют z, r и θ в функции t.

Найдем сначала z. Для этого нужно исключить r и θ. Уравнение кинетической энергии можно переписать так:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=2gz+h.$$

Из уравнения сферы $r=\sqrt{l^2-z^2}$ получим

$$dr=\frac{-z\,dz}{\sqrt{l^2-z^2}}.$$

С другой стороны, из уравнения площадей имеем

$$d\theta=\frac{C\,dt}{r^2}=\frac{C\,dt}{l^2-z^2}.$$

Подставляя в уравнение кинетической энергии, получим

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\cdot(2gz+h)(l^2-z^2)-C^2.$$

Полагая

$$\varphi(z)=(2gz+h)(l^2-z^2)-C^2,$$

найдем окончательно:

$$l\frac{dz}{dt}=\pm\sqrt{\varphi(z)},\quad t=\int\limits_{z_0}^{z}\frac{l\,dz}{\pm\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Таким образом, время выражается через z эллиптическим интегралом. Знак перед радикалом определяется начальными условиями. Сомнение может возникнуть лишь в том случае, когда $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0=0$; тогда нужно будет выяснить, должно ли z увеличиваться или, наоборот, уменьшаться для того, чтобы $\varphi(z)$ оставалось положительным.

Формула $d\theta=\frac{C\,dt}{r^2}$ показывает, что проекция движущейся точки на плоскость xOy все время поворачивается в одну и ту же сторону вокруг оси z, если только C не равно нулю; в последнем случае θ будет оставаться постоянным, и мы получим математический маятник. Если в этой формуле заменить r^2 и dt их выражениями через z, то получим

$$d\theta=\frac{\pm C l\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Таким образом, t и θ определены в функции z; после этого r найдется из уравнения сферы. Чтобы уравнения были вещественными, необходимо, чтобы многочлен $\varphi(z)$ был положителен. Этот многочлен имеет три вещественных корня. Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить вместо z последовательно значения $-\infty$, $-l$, z_0, $+l$, для которых $\varphi(z)$ примет соответственно значения $+\infty$, $-C^2$, $\varphi(z_0)$, $-C^2$, и заметить, что так как z_0 является начальным значением z, то $\varphi(z_0)$ будет положительным, так как начальное значение $\frac{dz}{dt}$ вещественно. Следовательно, имеются два вещественных корня α и β в промежутках $(+l, z_0)$ и $(z_0, -l)$ и один корень γ в промежутке $(-l, -\infty)$. Сумма попарных произведений этих корней равна $-l^2$; следовательно,

$$\gamma(\alpha+\beta)=-(l^2+\alpha\beta).$$

Так как α и β заключены между $-l$ и $+l$, то $l^2+\alpha\beta$ положительно, но γ отрицательно и поэтому $\alpha+\beta$ положительно; следовательно, параллель, равноотстоящая от параллелей $z=\alpha$ и $z=\beta$, лежит всегда ниже центра, и корень α всегда положителен. Переменная z, начальное значение которой z_0 лежит между α и β, остается всегда заключенной в этом промежутке, так как, если бы она из него вышла, то $\varphi(z)$ стало бы отрицательным.

Допустим для определенности, что z, начиная с $z=z_0$, сначала убывает. Тогда перед радикалом нужно будет взять знак минус и z будет уменьшаться до значения β, так что когда точка достигнет параллели BB' ($z=\beta$) в B_1, ее траектория будет иметь горизонтальную касательную, так как в этом положении $\frac{dz}{dt}$ обращается в нуль, а производная $\frac{d\theta}{dt}$ отлична от нуля. Начиная с этого момента, движущаяся точка будет продолжать поворачиваться вокруг оси z в том же направлении, но она будет при этом опускаться до параллели $z=\alpha$, описывая дугу, касающуюся в A_1 этой параллели (рис. 169). После этого она будет подниматься до параллели $z=\beta$ и т. д. Время, затрачиваемое точкой для перехода из A_1 в B_2, будет

$$T=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{l\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

и оно будет таким же, как и время, необходимое для описания дуг B_1A_1, B_2A_2 и т. д.

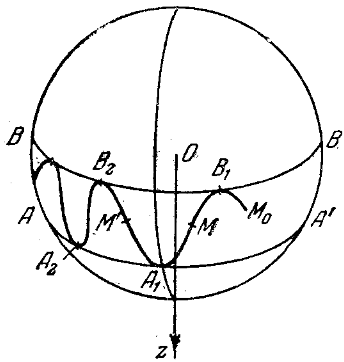


Рис. 169.

Если начальная скорость точки направлена вдоль одной из крайних параллелей, то в начале движения будет $\frac{dz}{dt}=0$. Это — сомнительный случай, о котором мы говорили выше. Если точка начинает движение по параллели $z=\beta$, то z должно возрастать и перед радикалом нужно взять знак плюс; во втором случае, когда движение начинается вдоль параллели $z=\alpha$, нужно взять знак минус.

Меридианные сечения, проходящие через точки касания траектории с крайними параллелями являются для траектории плоскостями симметрии. В самом деле, рассмотрим две точки M и M' ветвей A_1B_1 и A_2B_2, лежащие на одной параллели. Если θ, θ', θ_1 — значения θ, соответствующие точкам M, M' и A_1, то имеем

$$\theta_1-\theta=\int_{z}^{\alpha}\frac{Cl\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{\varphi(z)}}$$

и

$$\theta'-\theta_1=-\int_{\alpha}^{z}\frac{Cl\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{\varphi(z)}}=\theta_1-\theta.$$

Следовательно, обе точки M и M' действительно симметричны относительно меридиана точки A_1. Кроме того, промежутки времени, затрачиваемые движущейся точкой для пробега дуг MA_1 и A_1M', одинаковы, так как они оба имеют одно и то же значение

$$\int_{z}^{\alpha}\frac{l\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Построим теперь проекцию траектории на плоскость xy. Мы будем различать два случая в зависимости от того, лежат ли крайние параллели на одной полусфере, или нет.

Первый случай. Обе крайние параллели лежат на нижней полусфере. Расположенная ниже окружность $z=\alpha$ проектируется внутрь окружности $z=\beta$; кривая, касающаяся поочередно этих окружностей, имеет вид, изображенный на рис. 170; кроме того, мы увидим, что эта кривая не может иметь точек перегиба. Наблюдателю, расположенному на оси z, кажется, что движущаяся точка описывает овал, который перемещается в направлении движения. Ниже мы покажем, что угол B_1OA_1 больше прямого.

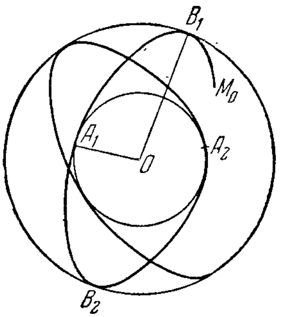


Рис. 170.

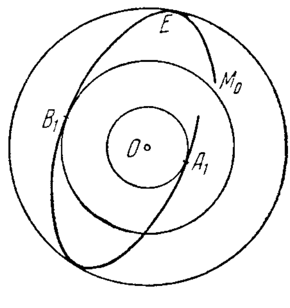


Рис. 171.

Второй случай. Допустим теперь, что обе крайние окружности расположены по разные стороны экватора. Проекция окружности $z=\alpha$ будет по-прежнему лежать внутри окружности $z=\beta$, так как $\alpha+\beta>0$. С другой стороны, проекция траектории должна касаться экватора в точке E. Она имеет указанную на рис. 171 форму; при этом она может иметь точки перегиба.

Доказательством высказанного выше свойства, что угол $\Psi=B_1OA_1$ всегда больше прямого, мы обязаны Пьюизё (Journal de Liouville, 1842). Этот угол имеет значение

$$\Psi=\int_\beta^\alpha \frac{Cl\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Мы обозначили через α, β, γ корни функции $\varphi(z)$ и, следовательно, имеем тождество

$$\varphi(z)=(2gz+h)(l^2-z^2)-C^2=2g(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Раньше, приравнивая друг другу члены с z, мы получили

$$\gamma=-\frac{l^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Теперь мы можем написать, заменяя γ этим значением,

$$\varphi(z)=\frac{2g}{\alpha+\beta}(\alpha-z)(z-\beta)[z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta].$$

Полагая в этом тождестве $z=l$, получим

$$-C^2=\frac{2g}{\alpha+\beta}(\alpha-l)(l-\beta)(l+\alpha)(l+\beta).$$

Обозначая

$$A=\sqrt{(l-\alpha)(l-\beta)},\quad B=\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)},$$

имеем

$$C=AB\sqrt{\frac{2g}{\alpha+\beta}},$$

и поэтому

$$\Psi=\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{lAB\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)\,[z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta]}}.$$

Для оценки пределов этого интеграла определим пределы, между которыми заключен последний множитель $z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta$. Допустим, что найдены два положительных числа P и Q таких, что для значений z, заключенных между α и β, выполняется неравенство

$$P\geqslant z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta\geqslant Q.$$

Тогда интеграл Ψ будет заключен между двумя пределами, которые получатся, если в нем величину $z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta$ последовательно заменить величинами P и Q:

$$\frac{AB}{\sqrt{P}}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{l\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}}<\Psi<\frac{AB}{\sqrt{Q}}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{l\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}}.$$

Определенный интеграл, входящий в это неравенство, содержит квадратный корень из квадратного трехчлена и может быть поэтому легко вычислен. Для него получается значение $\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$, и предыдущее неравенство принимает вид

$$\frac{\pi}{2\sqrt{P}}(A+B)<\Psi<\frac{\pi}{2\sqrt{Q}}(A+B).$$

Первый выбор пределов P и Q, который сразу приводит к теореме Пьюизё, будет следующий: множитель $z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta$ убывает или возрастает одновременно с z, потому что коэффициент $\alpha+\beta$ положителен; так как z заключен между $+l$ и $-l$, то этот множитель заключен между $l(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta$ и $-l(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta$, т. е. между B^2 и A^2. Следовательно, можно принять $P=B^2$, $Q=A^2$, и мы видим, что Ψ заключено в пределах $\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{B}{A}\right)$ и $\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{A}{B}\right)$, каждый из которых больше чем $\pi/2$. Если начальная скорость очень велика, то оба эти предела будут очень близки к π. Действительно, при неограниченном возрастании v_0 величины h и C^2 также неограниченно возрастают, и уравнение $\varphi(z)=0$ после деления всех его членов на h принимает вид

$$l^2-z^2-p^2=0,$$

где p^2 — некоторая постоянная. При этих условиях корень γ многочлена $\varphi(z)$ обращается в бесконечность, а корни α и β стремятся к корням только что написанного трехчлена, которые равны и противоположны по знаку. Следовательно, в предельном случае имеем $\beta=-\alpha$ и оба найденных нами предела для Ψ равны π. Таким образом, мы видим, что когда v_0 неограниченно возрастает, то Ψ стремится к π; траектория стремится тогда обратиться в большой круг. Альфен доказал (Traité des fonctions elliptiques, т. II), что угол Ψ

не может стать больше предела π. Сен-Жермен установил это же свойство более элементарным путем (Bulletin des Sciences mathématiques, 1896, 1898, 1901 и Mémoires de l'Académie de Caen, 1901).

Вернемся на время к общему случаю. Мы можем найти более узкие пределы для значения Ψ. В самом деле, так как множитель $z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta$ возрастает или убывает вместе с z, то в интеграле, определяющем Ψ, этот множитель будет заключен между крайними значениями, которые он принимает при $z=\alpha$ и $z=\beta$. Мы можем, следовательно, принять

$$P=\alpha^2+2\alpha\beta+l^2, \quad Q=\beta^2+2\alpha\beta+l^2,$$

и тогда получим

$$\frac{\pi}{2}\frac{(A+B)}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta+l^2}}<\Psi<\frac{\pi}{2}\frac{(A+B)}{\sqrt{\beta^2+2\alpha\beta+l^2}}.$$

Когда β стремится к α, оба эти предела становятся равными и мы имеем

$$\lim_{\beta\to\alpha}\Psi=\frac{\pi}{2}\frac{2l}{\sqrt{3\alpha^2+l^2}}.$$

Эта формула позволяет определить значение Ψ, когда траектория заключена между двумя бесконечно близкими параллелями. Если, кроме того, обе эти бесконечно близкие параллели находятся вблизи самой низкой точки сферы, то α будет очень мало отличаться от l, а Ψ — от $\pi/2$. В этом последнем случае траектория близка к маленькому эллипсу. Такой же результат мы получим дальше при рассмотрении бесконечно малых колебаний.

278. Вычисление нормальной реакции. Будем считать нормальную реакцию положительной, если она направлена к центру сферы. Общая формула

$$N+F_n=\frac{mv^2}{R},$$

установленная раньше (п. 269), сразу позволяет найти N. В самом деле, радиус R равен радиусу l сферы, $v^2=2gz+h$ и F_n есть проекция веса mg на радиус, равная $-\frac{mgz}{l}$; следовательно, имеем

$$N=\frac{m}{l}(2gz+h)+\frac{mgz}{l}=\frac{m}{l}(3gz+h).$$

Эта реакция будет такой же линейной функцией от z, как и в случае математического маятника. Если точка прикреплена невесомой гибкой нитью к центру сферы, то она покинет эту сферу в тот момент, когда реакция обратится в нуль. После этого реакция становится отрицательной, и точка падает, описывая параболу, соприкасающуюся с прежней ее траекторией на сфере.

Если точка не может покинуть сферу, если она, например, находится между двумя бесконечно близкими жесткими сферическими оболочками, то она будет давить на внешнюю оболочку, когда реакция положительна, и на внутреннюю, когда реакция отрицательна. В этом случае горизонтальная проекция траектории будет иметь точку перегиба в том месте, где N обращается в нуль. Действительно, в произвольном положении движущейся точки соприкасающаяся плоскость траектории содержит равнодействующую сил N и mg; в точке же, где $N=0$, соприкасающаяся плоскость содержит только вес mg; следовательно, она будет вертикальна, и горизонтальная проекция рассматриваемой точки будет точкой перегиба. Этот случай не может иметь места, когда α и β оба положительны, так как тогда z будет оставаться положительным и реакция $\frac{mv^2}{l}+\frac{mgz}{l}$ будет существенно положительной (см. упражнение 24).

279. Интегрирование в эллиптических функциях. Полученные нами формулы могут быть преобразованы таким образом, чтобы переменные выражались однозначными функциями t. Этим мы сейчас и займемся. Мы нашли

$$dt=\frac{l\,dz}{\pm\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Будем отсчитывать время от того момента, когда точка проходит через самое низкое положение A_1. Мы должны будем взять перед радикалом знак минус, вследствие чего получим:

$$t=-\int_{\alpha}^{z}\frac{l\,dz}{\sqrt{2g(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma)}},$$

$$\frac{\sqrt{2g}}{l}t=-\int_{\alpha}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma)}}.$$

Для приведения этого интеграла к канонической форме, положим

$$\alpha-z=(\alpha-\beta)u^2.$$

Так как z изменяется между предельными значениями α и β, то u колеблется между 0 и 1. Из последнего равенства выводим

$$z=\alpha-(\alpha-\beta)u^2,\quad dz=-2(\alpha-\beta)u\,du$$

и, подставляя в значение для t, получим

$$\frac{\sqrt{2g}}{l}t=\int_{0}^{u}\frac{2du}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

где положено

$$k^2=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}.$$

Величина k^2 существенно положительна и меньше 1, так как α — наибольший из трех корней: $\alpha>\beta>\gamma$. Полагая, наконец,

$$\lambda=\frac{\sqrt{2g(\alpha-\gamma)}}{2l},$$

имеем

$$\lambda t=\int_{0}^{u}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

т. е.

$$u=\operatorname{sn}\lambda t,$$

откуда

$$z=\alpha-(\alpha-\beta)\operatorname{sn}^2\lambda t.$$

Таким образом, z является двоякопериодической функцией переменного t. Один из периодов вещественный и равен

$$\frac{2}{\lambda}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Заметим, что $\sqrt{\alpha - z}$, $\sqrt{z-\beta}$, $\sqrt{z-\gamma}$ являются однозначными функциями времени. В самом деле,

$$\sqrt{\alpha - z} = \sqrt{\alpha - \beta}\,\mathrm{sn}\,\lambda t,$$
$$\sqrt{z-\beta} = \sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{1-u^2} = \sqrt{\alpha-\beta}\,\mathrm{cn}\,\lambda t,$$
$$\sqrt{z-\gamma} = \sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{1-k^2u^2} = \sqrt{\alpha-\gamma}\,\mathrm{dn}\,\lambda t.$$

Чтобы выразить x и y как функции времени, вспомним, что мы получили

$$d\theta = \frac{C\,dt}{l^2 - z^2}.$$

Если теперь заменить здесь z полученным для него ранее значением, то $\frac{d\theta}{dt}$ станет рациональной функцией от $\mathrm{sn}\,\lambda t$; разложив ее на простые дроби по методу Эрмита, можно будет выполнить интегрирование так, как это указывается в теории эллиптических функций. Получающаяся таким путем функция θ не будет однозначной, но можно показать, что x и y получатся однозначными функциями времени t. Действительно, имеем

$$x + iy = re^{\theta i} = \sqrt{l^2 - z^2}\, e^{i\int \frac{C\,dt}{l^2 - z^2}}.$$

Можно доказать, что показательная функция не имеет критических точек, кроме как при значениях t, соответствующих значениям $z = \pm l$, и что произведение

$$\sqrt{l^2 - z^2}\, e^{i\int \frac{C\,dt}{l^2 - z^2}}$$

не имеет этих критических точек и будет однозначной функцией от t. Отсюда получится, что и вещественная часть x и мнимая часть y будут обе однозначными функциями от t. Этот метод принадлежит Тиссо (Journal de Liouville, 1852).

Эрмит дал прямое доказательство этого же самого свойства (Crelle, m. 85).

Непосредственное отыскание функций x и y сводится к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка, являющегося частным случаем уравнения Ляме, исследованного Эрмитом (Sur quelques applications des fonctions elliptiques). Действительно, мы установили ранее, что если N обозначает реакцию, то

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Nx}{l}, \quad N = \frac{m}{l}(3gz + h),$$

и поэтому

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\,\frac{3gz + h}{l^2}.$$

Заменив в этой формуле z найденным выше значением, мы получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\,\frac{3g\,[\alpha - (\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2\lambda t] + h}{l^2}.$$

Это — линейное уравнение, частные интегралы которого определяют не только $x(t)$, но и $y(t)$, так как уравнение для y

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{Ny}{l}$$

будет таким же, как и уравнение для x. Если теперь положить $\lambda t=t'$, то предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{d^2x}{dt'^2}=x\,(6k^2\operatorname{sn}^2 t'+h'),$$

где h' обозначает постоянную. Это — уравнение Ляме

$$\frac{d^2x}{dt'^2}=x\,[n\,(n+1)\,k^2\operatorname{sn}^2 t'+h'],$$

в котором $n=2$.

280. Теорема Гринхилла. Мы обязаны Гринхиллю следующим интересным замечанием. Если сферическому маятнику сообщить на уровне центра горизонтальное движение, то существует линейная комбинация интегралов, определяющих θ и t, являющаяся псевдоэллиптическим интегралом, т. е. таким, который может быть выражен в элементарных функциях. В самом деле, так как начальные значения z и y в момент $t=0$ приняты равными нулю, то, обозначая через v_0 начальную скорость, которая предполагается горизонтальной, имеем

$$C=lv_0,\quad h=v_0^2,$$

$$\theta=\int\limits_0^z\frac{l^2v_0\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{z\left[2g\,(l^2-z^2)-v_0^2z\right]}},$$

$$t=\int\limits_0^z\frac{l\,dz}{\sqrt{z\left[2g\,(l^2-z^2)-v_0^2z\right]}}.$$

Из этих уравнений, как легко проверить, имеем

$$\theta-\frac{v_0}{2l}\,t=\arcsin\frac{v_0\sqrt{z}}{\sqrt{2g\,(l^2-z^2)}},$$

или, обозначая через φ угол маятника с вертикалью, т. е. вводя $z=l\cos\varphi$, получим

$$\sin\varphi\sin\left(\theta-\frac{v_0}{2l}\,t\right)=\frac{v_0}{\sqrt{2gl}}\sqrt{\cos\varphi}.$$

Это соотношение совместно с тем, которое определяет z или $l\cos\varphi$ через эллиптические функции от t, позволяет выразить x, y, z как однозначные функции от t.

281. Бесконечно малые колебания. Вводя нормальную реакцию N, имеем следующие уравнения движения маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Nx}{l},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{Ny}{l},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=mg-\frac{Nz}{l}. \tag{1}$$

Если колебания достаточно малы, то x и y будут оставаться очень малыми. Мы будем рассматривать их как бесконечно малые первого порядка и будем пренебрегать членами второго порядка. Ограничиваясь такой степенью приближения, получим $z=l$, так как по формуле Тэйлора имеем

$$z=\sqrt{l^2-(x^2+y^2)}=l\left(1-\frac{x^2+y^2}{2l^2}+\dots\right),$$

и второй член разложения есть член второго порядка. Таким образом, приближение, о котором мы говорим, сводится к допущению, что движущаяся точка не покидает касательной плоскости. Последнее из уравнений (1) упрощается:

$$N=mg.$$

Подставляя это значение в два первых, получим уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{l}x,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{g}{l}y,$$

совпадающие с уравнениями движения точки под действием центральной силы, пропорциональной расстоянию. Траектория будет эллипсом с центром на оси z. Это видно из того, что полученные линейные уравнения имеют общие интегралы

$$x=A\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+B\sin t\sqrt{\frac{g}{l}},\qquad y=A'\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+B'\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Допустим, что при $t=0$

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad \frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{dy}{dt}=v_0,$$

что равносильно проведению плоскости zOx через одну из вершин малого эллипса. Тогда получатся следующие значения постоянных:

$$A=x_0,\quad A'=0,\quad B=0,\quad B'=v_0\sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда

$$x=x_0\cos t\sqrt{\frac{g}{l}},\quad y=v_0\sqrt{\frac{g}{l}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Исключая t, получим непосредственно уравнение эллипса [1]). Период обращения равен $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Можно улучшить приближение, сохранив члены второго порядка. Для этого достаточно во вторых частях уравнений (1) заменить N его значением, полученным из первого приближения. Это вычисление выполнено Тиссераном (Bulletin des sciences mathématiques, 1881).

Другие методы приближения даны Резалем (Mécanique générale, т. 1, стр. 180) и де-Спарром (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1892).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точка M с массой, равной 1, двигается по поверхности, заданной в прямоугольных координатах уравнением

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}(e^z+e^{-z})^2.$$

---

[1]) О степени точности этого результата см. Крылов А. Н., ЖРФХО, т. 609, 128 и Лекции о приближенных вычислениях, изд. 5, Москва 1950, § 82 (*Прим. перев.*).

Она притягивается каждым элементом оси z с силой, равной отношению длины элемента к четвертой степени расстояния до точки M. Исследовать движение, которое может получить точка, и найти проекцию траектории на плоскость xy. Исследовать случай, когда в начальный момент точка находится на оси x и имеет скорость, равную $\sqrt{\frac{8}{3}}$ и образующую с плоскостью xy угол, равный 45° (лиценциатская, Кан).

2. Невесомая точка движется по сфере $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ под действием силы, направленной нормально к плоскости xy и равной $\frac{mk^2}{z^3}$, где k^2 — постоянная. Найти движение и нормальную реакцию.

(Траектория — сферическое коническое сечение.)

3. Рассмотрим материальную точку M с массой, равной 1, находящуюся под действием силы F, проекции которой на три прямоугольные оси координат равны частным производным силовой функции $U(x, y, z)$. Уравнение $U=\text{const}$ представляет поверхность уровня, пересечение которой с произвольной поверхностью S можно назвать линией уровня на поверхности S. Определить эту последнюю поверхность таким образом, чтобы точка M, вынужденная на ней оставаться и предоставленная без начальной скорости действию силы F, описывала траекторию C, ортогональную всем линиям уровня. Если, например, на точку M действует только вес, то она должна падать на искомой поверхности вдоль линии наибольшего ската.

Доказать, что синус угла, под которым поверхность уровня пересекает поверхность S, изменяется в различных точках линии пересечения в отношении, обратном силе F. (А. де Сен-Жермен, Journal de Math., октябрь, 1876.)

4. Свободная точка, находящаяся под действием только сопротивления среды, описывает прямую. Доказать, что точка, движущаяся по поверхности и находящаяся под действием только сопротивления среды и трения, описывает геодезическую линию.

5. Тяжелая материальная точка, оставаясь на поверхности сферы радиуса a, притягивается пропорционально расстоянию неподвижной точкой B, находящейся на вертикали Oz и проходящей через центр O сферы; расстояние $OB=b$. Даны значение μ притяжения на единицу расстояния, ускорение g силы тяжести, начальная скорость k движущейся точки, предполагаемая горизонтальной, и, наконец, начальное расстояние h от точки до горизонтальной плоскости Oxy, проходящей через центр сферы. Требуется: 1) найти границы, между которыми изменяется во время движения координата z точки; 2) определить движение в частном случае, когда притяжение неподвижной точки B в центре сферы равно и противоположно весу.

6. Найти движение точки, движущейся на сфере и притягивающейся диаметральной плоскостью пропорционально расстоянию. Задача сводится к интегрированию уравнения Ляме. [Кобб, Comptes rendus, т. CVIII.]

7. *Геодезические линии эллипсоида.* Как следствие доказанного в тексте (п. 279) соотношения $pD=\text{const.}$, доказать следующие предложения.

Если O и O' — две шаровые точки эллипсоида, не лежащие на одном диаметре, то MO и MO' — геодезические линии, соединяющие точку M с этими точками, а эти две линии одинаково наклонены к каждой из линий кривизны, проходящей через точку M.

Если точка M описывает линию кривизны, то сумма или разность дуг геодезических линий $MO \pm MO'$ — постоянна. (См. Journal de Liouville, 1846.)

8. Найти геодезические линии тора. (Резаль, Comptes rendus, т. XC, стр. 937.)

9. Найти геодезические линии поверхности, образованной вращением цепной линии вокруг основания (θ определяется через r эллиптическим интегралом первого рода, который сразу приводится к нормальной форме).

9 bis. Найти геодезические линии однополостного гиперболоида, образованного вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$. Обозначая через e эксцентриситет гиперболы, получим для проекций геодезических линий такое уравнение:

$$d\theta = \frac{k\,dr}{r}\sqrt{\frac{e^2r^2 - a^2}{(r^2 - a^2)(r^2 - k^2)}}.$$

Следовательно, θ выражается интегралом, который приводится к эллиптическим. Кривая имеет форму, аналогичную указанной в п. 275. При $k = a$ она асимптотически приближается к горловому кругу $r = a$; при $k = \frac{a}{e}$ кривая обращается в образующую.

10. *Кривизна геодезических линий поверхностей вращения.* Пусть R и R' — главные радиусы кривизны в точке поверхности вращения, r — радиус соответствующей параллели, i — наклон рассматриваемой геодезической линии к меридиану, ρ — ее радиус кривизны. Вывести формулу

$$\frac{r^2}{R} + \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)k^2 = \frac{r^2}{\rho},$$

где k, как и в тексте, представляет собою постоянное значение произведения $r \sin i$ вдоль рассматриваемой геодезической линии. (Р е з а л ь, Nouvelles Annales, фев., 1887.)

11. По поверхности двигается тяжелая точка. Доказать, что можно взять начальную скорость настолько большой, что траектория на некотором расстоянии от начального положения точки будет сколь угодно мало отличаться от геодезической линии.

12. Найти геодезические линии поверхности вращения

$$16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2).$$

Можно положить

$$r = \frac{a}{4}\cos u, \quad z = a\left(\sin\frac{u}{2} - \cos\frac{u}{2}\right).$$

Эти геодезические линии имеют вид пространственной восьмерки; все они замкнуты и имеют одинаковую длину. (Т а н н е р и, Bulletin des Sciences mathématiques, 1892, стр. 190.)

13. Даны две тяжелые точки, притягивающиеся друг к другу пропорционально расстоянию. Первая из них двигается по вертикали, а другая на плоскости, образующей с горизонтом угол α. Найти движение этой системы двух точек.

Рассмотреть частный случай, когда: а) $m' = m$; б) начальное положение совпадает с положением равновесия; в) проекции начальной скорости второй точки на горизонталь и на линию наибольшего наклона плоскости равны, каждая, начальной скорости первой точки; г) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.

Рассмотреть также случай, когда плоскость горизонтальна, т. е. $\alpha = 0$.

14. *Движение точки на сфере под действием силы, постоянно лежащей в плоскости меридиана, проходящего через движущуюся точку.* Предполагается, что радиус сферы равен единице и что положение точки определяется долготой θ и углом φ, дополнительным к широте; на точку действует сила, постоянно находящаяся в плоскости меридиана; обозначим через F проекцию силы на касательную плоскость к сфере, причем F считается положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли эта составляющая направлена в сторону возрастающих или убывающих значений φ.

Доказать справедливость следующих формул, аналогичных соответствующим формулам в теории центральных сил и, в частности, формуле Бине:

$$\sin^2\varphi\,d\theta = C\,dt, \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F\,d\varphi,$$

$$F = -\frac{mC^2}{\sin^2\varphi}\left(\operatorname{ctg}\varphi + \frac{d^2\operatorname{ctg}\varphi}{d\theta^2}\right).$$

(П. Серре, Théorie géométrique et mécanique, etc., стр. 195.)

Пример. Если F имеет значение $\frac{m\mu}{\sin^2\varphi}$, то траектория будет сферическим коническим сечением с фокусом в полюсе (аналогия с движением планет).

15. Установить формулы такого же, как в примере 14, характера для движения точки на поверхности вращения под действием силы, постоянно находящейся в плоскости меридиана движущейся точки.

16. *Преобразование движений.* В неподвижной плоскости дана материальная точка массы 1, находящаяся под действием силы F, проекции которой X и Y суть функции только координат x и y движущейся точки. Уравнения движения будут

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

Заменив независимую переменную t переменной t_1, связанной с t соотношением

$$k\,dt_1 = \frac{dt}{(a''x + b''y + c'')^2},$$

сделаем гомографическое преобразование

$$x_1 = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad y_1 = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}.$$

Доказать, что точка (x_1, y_1) двигается во времени t_1, как точка массы 1, находящаяся под действием силы F_1, проекции которой X_1, Y_1 зависят только от x_1 и y_1. Траектория точки (x_1, y_1) является гомографическим преобразованием траектории точки (x, y) и направление силы F_1 есть гомографическое преобразование направления силы F.

Если сила F — центральная, то сила F_1 тоже центральная или параллельная постоянному направлению. (Аппель, Comptes rendus, т. CVIII, стр. 224.)

17. Доказать обратное: если надо найти наиболее общее преобразование вида

$$x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y), \quad dt_1 = \lambda(x, y)\,dt$$

такое, что новая сила F_1 зависит только от координат x_1 и y_1, и это имеет место, какова бы ни была сила F, зависящая от x и y, то получается только вышеуказанное гомографическое преобразование. (American Journal, т. XII.)

18. *Преобразование сферического движения в плоское.* Даны сфера (S) радиуса 1 и касающаяся ее плоскость (P); каждой точке M_1 на сфере ставится в соответствие проекция M этой точки на плоскость (P) при помощи радиуса, идущего от центра к M_1; это хорошо известная в теории географических карт так называемая *центральная проекция*; она ставит в соответствие любой прямой плоскости (P) большие круги на сфере (S) и наоборот. С точки зрения аналитической, если точку касания плоскости (P) и сферы (S) принять за полюс полярных координат на плоскости и на сфере, то, обозначая через ρ и ω полярные координаты точки M на плоскости, а через φ и θ — полярные координаты точки M_1 на сфере (φ — дополнение широты и θ — долгота), получим следующие формулы преобразования:

$$\rho = \operatorname{tg} \varphi, \quad \omega = \theta. \tag{a}$$

Уравнения Лагранжа плоского движения будут

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = R, \quad \frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\omega}{dt}\right) = \Omega, \tag{b}$$

где R и Ω — функции от ρ и ω. Точно так же, если рассматривается на сфере точка массы 1, перемещающаяся в течение времени t_1, то уравнения движения будут

$$\frac{d^2\varphi}{dt_1^2} - \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\theta}{dt_1}\right)^2 = \Phi, \quad \frac{d}{dt_1}\left(\sin^2\varphi\,\frac{d\theta}{dt_1}\right) = \Theta, \tag{c}$$

где Φ и Θ — функции от φ и θ. Доказать, что если над уравнениями плоского движения (b) сделать преобразование центральных проекций, определяемое формулами (a), и если между t и t_1 установить соотношение

$$dt_1 = \cos^2\varphi\, dt,$$

то уравнения (b) примут вид уравнений (c), где

$$\Phi = \frac{R}{\cos^2\varphi}, \quad \Theta = \frac{\Omega}{\cos^2\varphi}.$$

Следовательно, любому движению на плоскости соответствует движение на сфере и обратно. Траекторией одной из точек будет преобразование при помощи центральных проекций траектории второй точки (А п п е л ь, American Journal, т. XIII). Приложить это преобразование к примеру 14.

19. Доказать более общее предложение, что таким же путем можно преобразовать движение точки на поверхности постоянной кривизны в движение на плоскости. (Д о т е в и л л ь, Annales de l'École Normale supérieure, 1890.)

20. Точка, на которую не действует никакая заданная сила, движется на плоскости, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, с которой она неизменно связана. Найти движение и вычислить реакцию (де Сен-Жермен).

21. Найти длину кривой, описываемую сферическим маятником в горизонтальной проекции и в стереографической проекции в случае Гринхилла (п. 280) (Гринхилл).

22. Установить уравнения движения точки на поверхности с трением. (А п п е л ь, Comptes rendus, 15 фев., 1892; см. также М а й е р, Sächsische Gesellschaft, 5 июня, 1893.)

23. Найти движение с трением тяжелой точки на круговом цилиндре с вертикальной осью. (Д е С е н - Ж е р м е н, Bulletin des Sciences mathématiques, август, 1892.)

24. Доказать, что если точка, движущаяся по поверхности без трения, находится под действием силы постоянного направления, то проекция траектории на плоскость, перпендикулярную силе, имеет точку перегиба: 1) когда реакция обращается в нуль; 2) когда соприкасающаяся плоскость траектории нормальна к поверхности (де С п а р р, т. CXIX). Это будут два случая, когда соприкасающаяся плоскость траектории вертикальна.

ГЛАВА XIV

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ СВОБОДНОЙ ТОЧКИ

282. Уравнения Лагранжа. В предыдущих главах мы вывели для точки, движущейся по неподвижной или движущейся поверхности или по кривой, уравнения движения, указанные Лагранжем. Тот же метод позволяет написать уравнения движения свободной точки, причем в любой системе координат. Этот метод тем более важен, что он применим к движению произвольной голономной системы.

Допустим, что декартовы координаты x, y, z движущейся точки относительно трех прямоугольных осей координат выражены через новые координаты q_1, q_2, q_3 формулами

$$x = \varphi(q_1, q_2, q_3), \quad y = \psi(q_1, q_2, q_3), \quad z = \omega(q_1, q_2, q_3).$$

Требуется написать уравнения движения в новой системе координат, т. е. написать дифференциальные уравнения, определяющие q_1, q_2, q_3 в функции времени. Для этого можно было бы взять те же уравнения движения, которые определяют x, y, z в функции t и преобразовать их к новым переменным, определяемым вышенаписанными формулами. Но такое вычисление было бы слишком длинным, а метод Лагранжа имеет целью именно избежать длинные вычисления. Этот метод применим также и в том случае, когда декартовы координаты являются заданными функциями не только трех новых координат q_1, q_2, q_3, но и времени. С точки зрения геометрической это означает, что указанный метод применим также и в случае, когда новая система координат подвижна, причем движение ее известно.

Поэтому, чтобы исследовать наиболее общий случай, мы предположим, что x, y, z являются заданными функциями параметров q_1, q_2, q_3 и времени t:

$$x = \varphi(q_1, q_2, q_3, t), \quad y = \psi(q_1, q_2, q_3, t), \quad z = \omega(q_1, q_2, q_3, t).$$

Чтобы найти уравнения движения в новой системе координат, т. е. дифференциальные уравнения, определяющие q_1, q_2, q_3 в функции времени, напишем уравнения движения в декартовых координатах

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Умножим, соответственно, эти уравнения на $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ и почленно сложим их. Получим

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=Q_1, \tag{1}$$

где положено

$$Q_1=X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}.$$

Так как X, Y, Z являются заданными функциями координат x, y, z и их производных по t, то легко вычислить Q_1 в функции q_1, q_2, q_3 и их производных по t. Далее для вычисления левой части заметим, что предыдущее уравнение может быть написано в виде

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]-$$
$$-m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)+\frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]=Q_1. \tag{2}$$

Для упрощения записи Лагранж обозначает:

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dz}{dt}=z',$$
$$\frac{dq_1}{dt}=q_1', \quad \frac{dq_2}{dt}=q_2', \quad \frac{dq_3}{dt}=q_3'.$$

Тогда, взяв производные по t от обеих частей уравнения

$$x=\varphi(q_1, q_2, q_3, t),$$

получим

$$x'=\frac{\partial x}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x}{\partial q_2}q_2'+\frac{\partial x}{\partial q_3}q_3'+\frac{\partial x}{\partial t}.$$

Отсюда, так же как и в п. 263, выводим формулы

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}=\frac{\partial x'}{\partial q_1'}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial x'}{\partial q_1}.$$

Точно так же получаются тождества

$$\frac{\partial y}{\partial q_1}=\frac{\partial y'}{\partial q_1'}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial y'}{\partial q_1},$$
$$\frac{\partial z}{\partial q_1}=\frac{\partial z'}{\partial q_1'}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial z'}{\partial q_1}.$$

Поэтому, уравнение (2) можно написать так

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1'}+y'\frac{\partial y'}{\partial q_1'}+z'\frac{\partial z'}{\partial q_1'}\right)\right]-$$
$$-m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1}+y'\frac{\partial y'}{\partial q_1}+z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right)=Q_1. \tag{2'}$$

Положим теперь

$$T=\frac{1}{2}m\left(x'^2+y'^2+z'^2\right).$$

Следовательно, T обозначает кинетическую энергию точки. Если заменить x', y', z' их значениями (3), то T станет функцией переменных q_1, q_2, q_3, t, q'_1, q'_2, q'_3. При таком обозначении непосредственно видно, что уравнение (2′) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1.$$

Путем таких же вычислений получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_3}=Q_3.$$

Выражение T содержит q_1, q_2, q_3 и их первые производные; отсюда следует, что полученные нами уравнения Лагранжа будут второго порядка. Следовательно, их общие интегралы содержат шесть произвольных постоянных, которые определяются из начальных условий.

Если известно выражение ds^2 в системе координат q_1, q_2, q_3, то можно сразу найти T, так как $T=\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$.

Вычисление правых частей. В равенствах, выражающих Q_1, Q_2, Q_3, можно заменить X, Y, Z их значениями, но часто можно вычисление упростить. Допустим сначала, что имеется силовая функция U. В этом случае

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

и поэтому

$$Q_1=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}.$$

Если теперь предположить, что в выражении силовой функции U координаты x, y, z заменены их значениями в функции q_1, q_2, q_3, то предыдущее уравнение запишется следующим образом:

$$Q_1=\frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Точно так же будет

$$Q_2=\frac{\partial U}{\partial q_2},\qquad Q_3=\frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

Эти формулы пригодны и тогда, когда X, Y, Z являются частными производными по x, y, z функции $U(x, y, z, t)$, содержащей явно время, хотя в этом случае нельзя больше говорить, что сила имеет силовую функцию.

В наиболее общем случае можно также упростить вычисление величин Q_1, Q_2, Q_3. Дадим в уравнениях преобразования координат

$$x = \varphi(q_1, q_2, q_3, t), \quad y = \psi(q_1, q_2, q_3, t), \quad z = \omega(q_1, q_2, q_3, t)$$

времени t определенное значение и допустим, что q_1, q_2, q_3 получают произвольные возможные приращения δq_1, δq_2, δq_3. Тогда приращения координат x, y, z будут:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\delta q_3,$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\delta q_3,$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\delta q_3.$$

Элементарная работа силы на соответствующем возможном перемещении равна

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

или в силу предыдущих равенств

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + Q_3\delta q_3.$$

И если предположить, что возможное перемещение совершается по кривой $q_2 = \text{const.}$, $q_3 = \text{const.}$, то элементарная работа будет равна $Q_1\delta q_1$, что и позволяет определить Q_1. Точно так же получаются Q_2 и Q_3.

Мы видим, таким образом, что имеется полная аналогия с уравнениями, найденными для движения по кривой и по поверхности. Единственное различие заключается в числе параметров q_1, q_2, ..., которое для точки на кривой равно 1, для точки на поверхности равно 2 и для свободной точки равно 3.

283. Интеграл кинетической энергии. В случае, когда существует силовая функция $U(x, y, z)$, по теореме кинетической энергии получим первый интеграл

$$T = U + h,$$

где T обозначает кинетическую энергию. Этот интеграл, являясь следствием уравнений движения, является также следствием уравнений Лагранжа и может заменить одно из них.

Проверим непосредственно, что интеграл кинетической энергии действительно является следствием уравнений Лагранжа. Остановимся лишь на более простом случае, когда x, y, z, выраженные через q_1, q_2, q_3, не содержат явно t. В этом случае для x', y', z' получатся выражения вида

$$x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial x}{\partial q_3} q_3',$$

и T будет однородной функцией второй степени относительно q_1', q_2', q_3'. По теореме об однородных функциях имеем

$$q_1'\frac{\partial T}{\partial q_1'}+q_2'\frac{\partial T}{\partial q_2'}+q_3'\frac{\partial T}{\partial q_3'}=2T. \tag{1}$$

После этого возьмем уравнения Лагранжа, в которых Q_1, Q_2, Q_3 заменены через $\frac{\partial U}{\partial q_1}$, $\frac{\partial U}{\partial q_2}$, $\frac{\partial U}{\partial q_3}$, и, умножив их предварительно на q_1', q_2', q_3', сложим. Получим

$$q_1'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)+q_2'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right)+q_3'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_3'}\right)-$$
$$-q_1'\frac{\partial T}{\partial q_1}-q_2'\frac{\partial T}{\partial q_2}-q_3'\frac{\partial T}{\partial q_3}=q_1'\frac{\partial U}{\partial q_1}+q_2'\frac{\partial U}{\partial q_2}+q_3'\frac{\partial U}{\partial q_3}. \tag{2}$$

Правая часть этого уравнения равна, очевидно, $\frac{dU}{dt}$, так как U зависит от t только через q_1, q_2, q_3. Что касается левой части, то ее можно написать так:

$$\frac{d}{dt}\left(q_1'\frac{\partial T}{\partial q_1'}+q_2'\frac{\partial T}{\partial q_2'}+q_3'\frac{\partial T}{\partial q_3'}\right)-$$
$$-\left(q_1''\frac{\partial T}{\partial q_1'}+q_2''\frac{\partial T}{\partial q_2'}+q_3''\frac{\partial T}{\partial q_3'}+q_1'\frac{\partial T}{\partial q_1}+q_2'\frac{\partial T}{\partial q_2}+q_3'\frac{\partial T}{\partial q_3}\right),$$

где q_1'', q_2'', q_3'' — вторые производные от q_1, q_2, q_3 по времени.

На основании уравнения (1), полученного из теоремы об однородных функциях, первая скобка равна $2T$. Что касается второй скобки, то она является развернутым выражением производной $\frac{dT}{dt}$, так как T зависит от t через параметры q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3', и уравнение (2) приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}(2T)-\frac{dT}{dt}=\frac{dU}{dt},$$

т. е.

$$dT=dU, \quad T=U+h,$$

что и является интегралом кинетической энергии. В приложениях наиболее сложное из трех уравнений Лагранжа заменяют этим первым интегралом.

284. Приложение. Задача. *Найти движение материальной точки, которая притягивается или отталкивается неподвижной осью с силой, являющейся заданной функцией расстояния* (рис. 172).

Мы уже видели (п. 84), что в этом случае имеется силовая функция $\int \Phi\, dr$, которую мы обозначим через $mf(r)$.

Мы будем определять положение точки ее цилиндрическими координатами r, θ, z. Тогда получим

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2).$$

Вследствие этого, уравнения Лагранжа после сокращения на m будут

$$\frac{d}{dt} r' - r^2\theta'^2 = f'(r),$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0,$$

$$\frac{d}{dt} z' = 0.$$

Интегрируя два последних уравнения, получим

$$r^2\theta' = C, \qquad (1)$$

$$z' = a. \qquad (2)$$

Заменим теперь первое уравнение Лагранжа интегралом кинетической энергии. Имеем

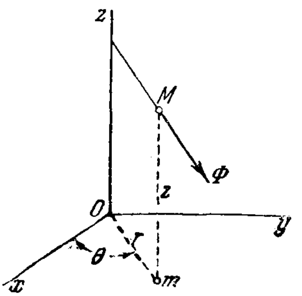


Рис. 172.

$$\frac{1}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + r'^2) = f(r) + h.$$

Если заменить здесь z' и θ' их значениями из равенств (1) и (2), то получим

$$\frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{C^2}{r^2} + a^2\right) = f(r) + h. \qquad (3)$$

Это — уравнение вида

$$r'^2 = \varphi(r),$$

из которого можно определить время простой квадратурой.

Можно было сразу написать уравнения (1), (2) и (3), не пользуясь уравнениями Лагранжа. В самом деле, так как сила все время пересекает ось Oz, то к проекции движения на плоскость xy применим закон площадей, что приводит к уравнению (1). Так как составляющая силы по оси Oz равна нулю, то $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, $z' = a$ и мы получаем уравнение (2). Наконец, уравнение (3) есть не что иное, как уравнение кинетической энергии.

Исключив из уравнений (1) и (2) время, мы получим дифференциальное уравнение

$$r^2\,d\theta = \frac{C}{a}\,dz,$$

которому удовлетворяют траектории каков бы ни был закон сил. Если это уравнение написать в декартовых координатах, то получится

$$x\,dy - y\,dz = k\,dz.$$

Такое уравнение уже встречалось в упражнении 6 в конце главы I как дифференциальное уравнение кривых, касательные к которым являются прямыми нулевого момента.

285. Сферические координаты. Пусть ρ, θ, ω — координаты точки M (рис. 173). Положим

$$\rho = q_1, \quad \theta = q_2, \quad \omega = q_3.$$

Тогда имеем

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \left(\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \omega'^2\right),$$

и, следовательно, уравнения Лагранжа будут

$$\frac{d}{dt}(m\rho') - m\rho\,(\theta'^2 + \omega'^2 \sin^2 \theta) = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\theta') - m\rho^2\omega'^2 \sin\theta\cos\theta = Q_2,$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2 \sin^2\theta\omega') = Q_3.$$

Для вычисления Q_1, Q_2, Q_3 применим указанный ранее метод. Обозначим через R, Q, P составляющие силы F соответственно по радиусу-вектору r, по перпендикуляру к плоскости zOM и по перпендикуляру к плоскости составляющих R, Q; величины P, Q, R считаются положительными, когда они направлены в сторону возрастания соответствующих координат q, ω или θ. Для возможного перемещения вдоль радиуса-вектора ($q_2 = \text{const.}$, $q_3 = \text{const.}$) элементарная работа равна $R\,\delta r$ и, следовательно,

$$Q_1 = R.$$

На перемещении $\rho\,\delta\theta$, для которого ρ и ω остаются постоянными, элементарная работа равна $P\rho\,\delta\theta$. Имеем поэтому

$$Q_2 = P\rho.$$

Если, наконец, оставлять неизменными ρ и θ, то перемещение будет совершаться по окружности с центром в точке O' и радиусом $\rho\sin\theta$; элементарная работа будет, следовательно, равна $Q\rho\sin\theta\,\delta\omega$, и мы получим

$$Q_3 = Q\rho\sin\theta.$$

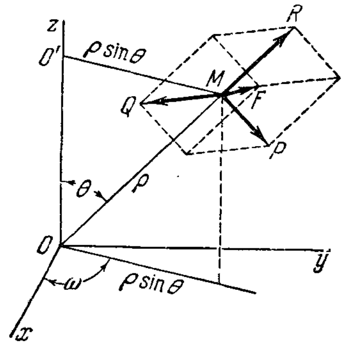


Рис. 173.

Если сила F пересекает ось z, то Q будет равно нулю, и из третьего уравнения Лагранжа найдем

$$m\rho^2 \sin^2\theta\omega' = \text{const}.$$

Это уравнение выражает, что проекция точки на плоскость xy движется по закону площадей.

286. Эллиптические координаты в пространстве. В эллиптической системе координат точка M в пространстве определяется параметрами трех пересекающихся в этой точке поверхностей второго порядка, софокусных заданной. Пусть

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0 \tag{1}$$

— уравнение поверхностей второго порядка, софокусных поверхности

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

Если для определенности мы положим $a > b > c$, то при $\lambda < c$ уравнение (1) представит вещественный эллипсоид, при $b > \lambda > c$ оно представит однополостный гиперболоид, при $a > \lambda > b$ — двуполостный гиперболоид и, наконец, при $\lambda > a$ — мнимый эллипсоид. Через каждую точку пространства проходят три таких софокусных поверхности. В самом деле, если x, y, z рассматривать как заданные величины, то уравнение (1), третьей степени относительно λ, будет иметь три вещественных корня, из которых один меньше c, другой заключен между c и b, и третий — между b и a. Это можно проверить, подставляя в левую часть уравнения указанные ниже значения λ и замечая, что знаки левой части будут определяться следующей таблицей, в которой ε — очень малое положительное число:

Значения параметра λ	$-\infty$	$c-\varepsilon$	$c+\varepsilon$	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$a-\varepsilon$	$a+\varepsilon$	$+\infty$
Соответствующие знаки левой части уравнения (1)	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
Положение корней		q_3		q_2		q_1		

Обозначим эти три корня в порядке убывания их величин через q_1, q_2, q_3. В случае $\lambda = q_1$ получается двуполостный гиперболоид, в случае $\lambda = q_2$ — однополостный гиперболоид и в случае $\lambda = q_3$ — эллипсоид.

Как хорошо известно, эти три поверхности пересекают друг друга ортогонально. Например, две поверхности

$$f_1 = \frac{x^2}{a - q_1} + \frac{y^2}{b - q_1} + \frac{z^2}{c - q_1} - 1 = 0,$$

$$f_2 = \frac{x^2}{a - q_2} + \frac{y^2}{b - q_2} + \frac{z^2}{c - q_2} - 1 = 0$$

пересекаются ортогонально, так как условие

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0,$$

как это можно непосредственно проверить, идентично уравнению

$$\frac{-f_2}{-q_2} = 0.$$

Три величины q_1, q_2, q_3 называются *эллиптическими координатами* точки $M(x, y, z)$.

Чтобы выразить декартовы координаты x, y, z через q_1, q_2, q_3, заметим, что q_1, q_2, q_3 являются тремя корнями уравнения (1) относительно λ. Поэтому имеем тождественно

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c - \lambda} - 1 = \frac{(\lambda - q_1)(\lambda - q_2)(\lambda - q_3)}{(a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda)} =$$

$$= \frac{(\lambda - q_1)(\lambda - q_2)(\lambda - q_3)}{f(\lambda)}. \qquad (2)$$

Умножая обе части этого тождества на $a - \lambda$ и полагая затем $\lambda = a$, получим

$$x^2 = \frac{(a - q_1)(a - q_2)(a - q_3)}{(b - a)(c - a)}.$$

Точно так же найдем

$$y^2 = \frac{(b-q_1)(b-q_2)(b-q_3)}{(c-b)(a-b)},$$

$$z^2 = \frac{(c-q_1)(c-q_2)(c-q_3)}{(a-c)(b-c)}.$$

Вычислим теперь в этой системе координат выражение для ds^2. Взяв логарифмические производные обеих частей написанных выше равенств, имеем:

$$2\frac{dx}{x} = \frac{dq_1}{q_1-a} + \frac{dq_2}{q_2-a} + \frac{dq_3}{q_3-a},$$

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dq_1}{q_1-b} + \frac{dq_2}{q_2-b} + \frac{dq_3}{q_3-b},$$

$$2\frac{dz}{z} = \frac{dq_1}{q_1-c} + \frac{dq_2}{q_2-c} + \frac{dq_3}{q_3-c}.$$

Отсюда для $4ds^2$ получится выражение вида

$$4(dx^2 + dy^2 + dz^2) = M_1\,dq_1^2 + M_2\,dq_2^2 + M_3\,dq_3^2.$$

В нем нет членов с $dq_1\,dq_2, \ldots$, так как поверхности пересекаются ортогонально. Легко проверить соотношение

$$\frac{x^2}{(a-q_1)(a-q_2)} + \frac{y^2}{(b-q_1)(b-q_2)} + \frac{z^2}{(c-q_1)(c-q_2)} = 0,$$

которое выражает, что коэффициент при $dq_1\,dq_2$ равен нулю. Величины M_1, M_2, M_3 имеют следующие значения:

$$M_1 = \frac{x^2}{(q_1-a)^2} + \frac{y^2}{(q_1-b)^2} + \frac{z^2}{(q_1-c)^2}, \ldots$$

Если взять производные от обеих частей тождества (2) по λ и затем положить $\lambda = q_1$, то, заметив, что в результате этой подстановки все члены второй части, содержащие множителем $\lambda - q_1$, обратятся в нуль и поэтому не будет надобности их вычислять, найдем

$$M_1 = \frac{(q_1-q_2)(q_1-q_3)}{f(q_1)},$$

где $f(\lambda)$ обозначает произведение $(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$. Точно так же получим

$$M_2 = \frac{(q_2-q_3)(q_2-q_1)}{f(q_2)},$$

$$M_3 = \frac{(q_3-q_1)(q_3-q_2)}{f(q_3)}.$$

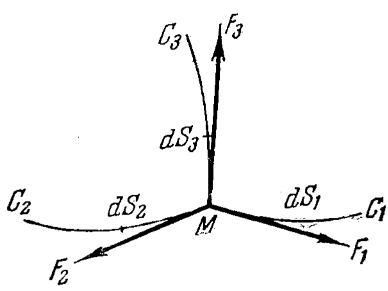


Рис. 174.

Заметим, что если, в частности, рассмотреть дугу кривой C_1 пересечения двух поверхностей $q_2 = \text{const.}$ и $q_3 = \text{const.}$ (рис. 174), то дифференциал ds_1 этой дуги получится, если положить

$$dq_2 = dq_3 = 0.$$

Отсюда

$$ds_1 = \frac{1}{2}\sqrt{M_1}\,dq_1.$$

Точно так же, обозначая через ds_2 и ds_3 дуги кривых C_2 и C_3, по которым пересекаются поверхности $q_1 = \text{const.}$, $q_3 = \text{const.}$ и поверхности $q_1 = \text{const.}$, $q_2 = \text{const.}$, получим

$$ds_2 = \frac{1}{2}\sqrt{M_2}\,dq_2, \qquad ds_3 = \frac{1}{2}\sqrt{M_3}\,dq_3.$$

Тогда дугу ds любой кривой можно рассматривать как диагональ прямоугольного параллелепипеда со сторонами ds_1, ds_2, ds_3.

Величина T выражается в виде

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{8}\left(M_1 q_1'^2 + M_2 q_2'^2 + M_3 q_3'^2\right),$$

и уравнения Лагранжа теперь легко составить. Так как вид левых частей этих уравнений очевиден, то ограничимся определением правых частей.

Разложим силу F на три составляющие F_1, F_2, F_3, касающиеся соответственно кривых C_1, C_2, C_3, считая эти составляющие положительными в направлении перемещения точки M вдоль каждой из этих кривых при увеличении только одной эллиптической координаты и при сохранении постоянными двух других. Сообщим точке M возможное перемещение δs_1, при котором q_2 и q_3 остаются постоянными, а q_1 увеличивается на δq_1. Тогда возможная работа силы F будет с одной стороны равна $Q_1\,\delta q_1$. С другой стороны, так как работы сил F_2 и F_3 будут на рассматриваемом перемещении равны нулю, то работа силы F будет равна

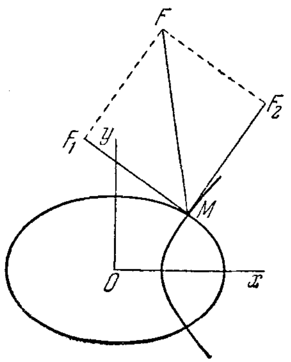


Рис. 175.

$$F_1\,\delta s_1 = \frac{F_1}{2}\sqrt{M_1}\,\delta q_1.$$

Следовательно, имеем

$$Q_1 = \frac{F_1\sqrt{M_1}}{2},$$

и точно так же

$$Q_2 = \frac{F_2\sqrt{M_2}}{2}, \qquad Q_3 = \frac{F_3\sqrt{M_3}}{2}.$$

287. Эллиптические координаты в плоскости xy. Эти координаты можно вывести из предыдущих формул. Чтобы получить точку M на плоскости xOy, достаточно в этих формулах положить $z = 0$, $q_3 = c$. Тогда точка M будет определяться двумя эллиптическими координатами q_1 и q_2, которые являются корнями уравнения второй степени относительно λ

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1,$$

представляющего софокусные конические сечения. Через каждую точку M плоскости проходят два таких конических сечения: гипербола, соответствующая значению q_1 параметра λ, и эллипс, соответствующий значению q_2. Тождество (2) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} - 1 = -\frac{(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)}{(a-\lambda)(b-\lambda)}.$$

Можно также получить либо непосредственно, либо как предельный случай предыдущих формул, формулы преобразования координат:

$$x^2 = \frac{(a-q_1)(a-q_2)}{a-b}, \quad y^2 = \frac{(b-q_1)(b-q_2)}{b-a}.$$

Выражение ds^2 квадрата элемента дуги на плоскости xOy будет

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left(N_1\, dq_1^2 + N_2\, dq_2^2\right),$$

где

$$N_1 = \frac{q_2-q_1}{(q_1-a)(q_1-b)}, \quad N_2 = \frac{q_1-q_2}{(q_2-a)(q_2-b)}.$$

Отсюда

$$T = \frac{m}{8}\left(N_1 q_1'^2 + N_2 q_2'^2\right).$$

Наконец, если силу F, действующую на точку M в плоскости xOy, разложить на две составляющие, направленные по касательным к проходящим через точку M гиперболе и эллипсу (рис. 175), то получим

$$Q_1 = \frac{F_1\sqrt{N_1}}{2}, \quad Q_2 = \frac{F_2\sqrt{N_2}}{2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть zOz' — вертикальная однородная ось, продолженная неограниченно в обе стороны. Все элементы этой оси притягивают материальную точку M пропорционально их массам и обратно пропорционально четвертой степени расстояния. Кроме того, на точку M действует ее вес. Исследовать движение, предполагая, что проекция начальной скорости точки M на плоскость MOz вертикальна. Траектория определится, если рассматривать ее как пересечение цилиндра, параллельного Oz, и поверхности вращения, имеющей Oz осью. Рассмотреть частный случай, когда начальная скорость горизонтальна (лиценциатская, Монпелье).

2. В уравнениях равновесия свободной нити под действием силы, имеющей силовую функцию $U(x, y, z)$, сделана замена переменной

$$\frac{ds}{T} = dt, \quad T = -(U+h).$$

Эти уравнения обратятся в дифференциальные уравнения движения точки с массой 1 под действием силы, имеющей силовую функцию $\frac{1}{2}(U+h)^2$.

Используя сказанное, распространить уравнения Лагранжа на равновесие нити, находящейся под действием силы, имеющей силовую функцию (Comptes rendus, т. XCVI, стр. 688).

ГЛАВА XV

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

288. Принцип Даламбера. Принцип Даламбера позволяет свести процесс составления уравнений динамики к составлению уравнений статики.

Этот принцип, который мы здесь изложим для свободной материальной точки и для точки, движущейся по поверхности или по кривой, применим к любой задаче динамики. Он позволит нам подвести итог всей теории движения точки.

Рассмотрим материальную точку M массы m, находящуюся под действием сил, равнодействующая которых R имеет проекции R_x, R_y, R_z. Уравнения движения этой точки могут быть написаны так:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}+R_x=0, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}+R_y=0, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}+R_z=0. \qquad (1)$$

Будем рассматривать наряду с векторами, представляющими приложенные к точке M силы, вектор MI с проекциями $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$. Этот вектор, численно равный произведению массы на ускорение и направленный противоположно ускорению, называется *силой инерции*, хотя это никоим образом не будет силой, приложенной к точке. Тогда уравнения выражают, что геометрическая сумма векторов MR и MI равна нулю, или, что *в каждый момент времени существует равновесие между силой инерции и силами, действительно приложенными к точке.*

Вывод уравнений движения из принципа Даламбера. На основании только что сказанного, для нахождения уравнений движения точки при любых условиях достаточно выразить, что имеет место равновесие между всеми силами, приложенными к точке, и силой инерции. Но это можно сделать методами статики. Можно, например, применить теорему о возможной работе. Для этого нужно различать среди сил, приложенных к точке, силы заданные и реакции связей. Через X, Y, Z мы обозначим проекции заданных сил.

Чтобы написать, что существует равновесие между силами, действующими на точку, и силой инерции, достаточно написать, что на всех возможных перемещениях δx, δy, δz, допускаемых связями, существующими в момент t, сумма работ заданных сил (X, Y, Z) и силы инерции $\left(-m\frac{d^2x}{dt}, -m\frac{d^2y}{dt^2}, -m\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ равна нулю:

$$\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0. \qquad (2)$$

Следует различать три случая:

1°. *Свободная точка.* δx, δy, δz произвольны. Если, как в п. 282, применяется произвольная система координат q_1, q_2, q_3, то, заменяя q_1, q_2, q_3 вариациями δq_1, δq_2, δq_3, получим:

$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial x}{\partial q_3}\delta q_3,$$

где δq_1, δq_2, δq_3 произвольны.

Подставляя δx, δy, δz в равенство (2) и приравнивая результат нулю при произвольных δq_1, δq_2, δq_3, получим уравнения движения в форме, указанной в п. 282, из которых мы вывели уравнения Лагранжа для свободной точки.

2°. *Точка на поверхности.* Пусть

$$f(x, y, z, t)=0$$

есть уравнение поверхности, которая для общности предполагается движущейся. Давая переменному t определенное значение, мы видим, что δx, δy, δz должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0,$$

выражающему, что возможное перемещение допускается связью, существующей в момент t. Если, как в п. 263, выразить координаты точки поверхности в функциях двух параметров, то получим

$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2, \ \ldots$$

и соотношение (2) должно иметь место, каковы бы ни были δq_1 и δq_2. Таким путем получатся уравнения движения в форме (4) п. 263.

3°. *Точка на кривой.* Пусть

$$f(x, y, z, t)=0, \quad f_1(x, y, z, t)=0$$

— уравнения кривой. Величины δx, δy, δz должны удовлетворять двум условиям

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z=0.$$

Допустим, что координаты точки кривой выражены в функции одного параметра:

$$x=\varphi(q, t), \quad y=\psi(q, t), \quad z=\omega(q, t).$$

Тогда наиболее общее перемещение на кривой в положении, которое она занимает в момент t, получится, если дать величине q приращение δq. Поэтому имеем

$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial q}\delta q, \quad \delta y=\frac{\partial y}{\partial q}\delta q, \quad \delta z=\frac{\partial z}{\partial q}\delta q,$$

и уравнение (2), после сокращения на множитель δq, примет вид

$$m\left(\frac{d^2x}{dt}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q}\right)=X\frac{\partial x}{\partial q}+Y\frac{\partial y}{\partial q}+Z\frac{\partial z}{\partial q},$$

из которого мы вывели уравнение Лагранжа (п. 259).

289. Замечание о силе инерции. Допустим, что материальная точка, находящаяся под действием сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и поставленная в некоторые начальные условия, начинает двигаться. Отбросим теперь силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$, возьмем материальную точку в руку и сообщим ей рукой то же самое движение. Тогда действие руки на точку будет в каждый момент t равно равнодействующей R сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, действовавших при первом эксперименте, или равно mj, где j — ускорение. Следовательно, по закону равенства действия и противодействия, давление точки на руку в каждый момент времени равно и противоположно силе R или mj; таким образом, это давление равно силе инерции. Необходимо, однако, заметить, что это давление будет силой, действующей на руку, но не на точку.

290. Принцип наименьшего действия. Этот принцип может быть приложен к движению точки под действием силы, имеющей силовую функцию, причем точка либо может быть свободной, либо должна скользить по неподвижной поверхности. Принцип позволяет объединить уравнения движения в одно, написав, что вариация некоторого интеграла равна нулю. Во втором томе мы укажем другие принципы, как, например, принцип Гамильтона, принцип Гаусса, которые применимы в более общих случаях. Принцип наименьшего действия был указан Мопертюи. Пример его можно найти в работе Эйлера De motu projectorum. Лаплас, Лагранж, Пуассон излагали этот принцип в форме, способной вызвать возражения. Якоби первый изложил его в строгом виде. В Sitzungsberichte Берлинской Академии (1887) можно найти интересную статью Гельмгольца по истории принципа наименьшего действия.

Свободная точка. Если свободная точка находится под действием силы, имеющей силовую функцию $U(x, y, z)$, то интеграл кинетической энергии имеет вид

$$mv^2=2[U(x, y, z)+h], \quad mv_0^2=2[U(x_0, y_0, z_0)+h]. \qquad (1)$$

В принципе наименьшего действия сравниваются лишь такие движения, для которых постоянная h имеет одинаковые значения. Таким образом, везде в дальнейшем h является *определенной* постоянной. Следовательно, можно по произволу задать начальное положение x_0, y_0, z_0 движущейся точки, и тогда ее начальная скорость определится по величине (но не по направлению) из второго соотношения (1). Положения движущейся точки и кривые, которые мы рассматриваем, расположены, разумеется, в области пространства, где функция

$$U(x, y, z)+h$$

положительна.

Пусть A и B — две неподвижные точки. Тэт и Томсон называют *действием* вдоль кривой C, соединяющей эти две точки, интеграл

$$\mathcal{A} = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(U+h)}\, ds, \tag{2}$$

где вместо $U(x, y, z)$ мы пишем U. Предполагается, что этот интеграл берется вдоль кривой C, элемент дуги которой обозначен через ds. Принцип наименьшего действия может быть сформулирован следующим образом.

Кривые, соединяющие две неподвижные точки A и B и обладающие тем свойством, что вариация действия равна нулю при переходе от одной из этих кривых к любой другой, бесконечно близкой и проходящей через те же точки, являются траекториями, которые фактически опишет материальная точка, начавшая движение из одной из этих неподвижных точек в таком направлении, что она приходит во вторую.

Можно также сказать, что если среди всех кривых, идущих от точки A к точке B, отыскивать кривые, для которых действие имеет минимум, то эти кривые среди траекторий, соединяющих точки A и B. Это следует из того, что для нахождения таких кривых нужно прежде всего приравнять нулю вариацию действия.

Чтобы доказать это предложение, заметим, что интеграл $\mathcal{A}$ будет вида

$$\int_{(A)}^{(B)} \varphi(x, y, z)\, ds,$$

где

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{2(U+h)}. \tag{3}$$

Следовательно, чтобы получить дифференциальные уравнения кривых, которые могут обратить интеграл $\mathcal{A}$ в минимум, нужно применить уравнения (3) п. 146, заменив в них φ его значением (3). Таким путем мы получим для искомых кривых дифференциальное уравнение

$$d\left[\sqrt{2(U+h)}\,\frac{dx}{ds}\right] - \frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{ds}{\sqrt{2(U+h)}} = 0, \tag{4}$$

и два аналогичных. Примем за независимую переменную величину t, определенную соотношением

$$dt = \frac{\sqrt{m}\, ds}{\sqrt{2(U+h)}}. \tag{5}$$

Тогда дифференциальные уравнения (4) кривых, которые могут обратить интеграл $\mathcal{A}$ в минимум, станут следующими:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Это — уравнения движения свободной точки, причем уравнение (5) является уравнением кинетической энергии с частным значением h. Таким образом, теорема доказана.

Итак, кривые, дающие для действия $\mathcal{A}$ относительный *минимум*, т. е. значение, меньшее, чем вдоль всякой кривой, бесконечно близкой, нужно искать среди траекторий, идущих от A к B. Вопрос о том, дает ли найденная траектория, соединяющая две точки A и B, относительный минимум для $\mathcal{A}$, в действительности не является существенным с точки зрения самого принципа. Он аналогичен вопросу, дает ли в действительности геодезическая линия, соединяющая две фиксированные точки на заданной поверхности, относительный минимум для расстояния двух точек на поверхности (см. Дарбу, Théorie des surfaces, ч. 3, глава V). Так как коэффициент при ds в интеграле $\mathcal{A}$ положителен, то действие всегда положительно и всегда существуют кривые, идущие от A к B, вдоль которых имеет место минимум интеграла $\mathcal{A}$. Эти кривые образуются траекториями. Существует также между A и B кривая, которая дает абсолютный минимум. Эта последняя кривая, обязательно составленная из дуг, дающих каждая в отдельности относительный минимум, состоит, следовательно, из дуг траекторий.

Не существует кривых, дающих для интегралов $\mathcal{A}$ относительный максимум, так как если C есть произвольная дуга, проведенная между A и B, то всегда можно построить бесконечно близкую кривую C', вдоль которой действие будет больше, чем вдоль C. Для этого достаточно взять в качестве C' синусоидальную кривую с бесконечно малыми амплитудами, проходящую C.

Точка на поверхности. Пусть на неподвижной поверхности S дана точка, находящаяся под действием силы, имеющей силовую функцию $U(x, y, z)$. Для нее по-прежнему имеем интеграл кинетической энергии (1). Будем сравнивать между собой движения, которые совершаются на поверхности S при одном и том же значении постоянной h. Тогда имеем следующую теорему.

Кривые, проведенные на поверхности между двумя неподвижными точками A и B и обладающие тем свойством, что вариация действия равна нулю при переходе от одной из этих кривых ко всякой другой бесконечно близкой кривой, проведенной на поверхности между теми же точками, являются траекториями движущейся точки, соединяющими эти две неподвижные точки.

Следовательно, если мы ищем кривые, идущие на поверхности от A к B, вдоль которых действие имеет минимум, то их надо выбирать среди траекторий.

Чтобы доказать это, достаточно приложить к случаю $\varphi = \sqrt{2(U+h)}$ уравнения, которые мы дали (п. 149) для кривых, лежащих на поверхности, и обращающих $\int \varphi\, ds$ в минимум. Эти уравнения, так же как и выше, непосредственно преобразуются в уравнения движения точки на поверхности с заданной постоянной h кинетической энергии.

Например, если на точку не действует никакая сила ($U = 0$), то траекториями будут кривые, которые получатся, если искать кривые, обращающие в минимум интеграл $\int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{2h}\, ds$, т. е. если искать наиболее короткие линии на поверхности. Получатся, следовательно, геодезические линии (п. 270).

Справедливо более общее предложение, что задача отыскания траекторий на поверхности S при заданной силовой функции U эквивалентна задаче отыскания геодезических линий на другой поверхности S'. В самом деле, представим себе вспомогательную поверхность S', на которой линейный элемент определяется равенством

$$ds'^2 = 2(U+h)\, ds^2,$$

где ds — линейный элемент поверхности S. Тогда нахождение траекторий на поверхности S приведется к нахождению кривых, обращающих $\int ds'$ в минимум, т. е. к нахождению геодезических линий на поверхности S'.

Если мы на минуту вернемся к случаю свободной точки, находящейся под действием силы, имеющей силовую функцию, то мы увидим, что на основании принципа наименьшего действия задача определения траекторий точки является распространением на случай трех переменных задачи о геодезических линиях.

Мы не станем входить в подробности этой теории, относящейся больше к геометрии, чем к механике, отсылая читателя к главам VI и VII второго тома сочинения Дарбу «Leçons sur la Théorie des surfaces».

Мы вернемся, однако, к этому принципу в аналитической механике.

УПРАЖНЕНИЯ

1. *Формулы Тэта и Томсона.* Если взять две бесконечно близкие траектории AB и A_1B_1, то вариация действия при переходе от первой ко второй будет

$$\delta\mathcal{A} = -\sqrt{2(U_A+h)}\cdot AA_1 \cos \widehat{A_1AB} - \sqrt{2(U_B+h)}\cdot BB_1 \cos \widehat{B_1BA},$$

где U_A и U_B являются значениями функции U в точках A и B [эта формула совпадает с установленной в п. 147, если только заменить φ выражением $\sqrt{2(U+h)}$].

2. *Теорема Тэта и Томсона* (п. 147, 2°). Если из различных точек M_0 поверхности S по нормалям к ней начинают двигаться одинаковые материальные точки, для каждой из которых силовая функция есть U, а настоящая кинетической энергии есть h, и если на каждой траектории взять дугу M_0M_1 такую, что действие на участке от M_0 до M_1 этой траектории имеет определенное значение, одинаковое для всех траекторий, то геометрическим местом точек M_1 будет поверхность S_1, нормальная к траекториям. Важный частный случай этой теоремы получится, если предположить, что поверхность S вырождается в сферу с нулевым радиусом. Тогда все траектории будут выходить из одной определенной точки M_0 со скоростью, определенной по величине, но переменного направления.

Если потребовать, чтобы движение было плоским или происходило на поверхности, то формулировка, очевидно, останется той же, если заменить поверхности S и S_1 кривыми.

Если $U=0$, то эти теоремы переходят в классические теоремы о параллельных поверхностях или параллельных кривых на поверхности.

3. *Свойство, аналогичное свойству разверток.* Если рассматривать траектории AB, нормальные в точке A к неподвижной кривой и касающиеся в точке B другой кривой D, и если обозначить через $A'B'$ и $A''B''$ два положения траектории, то можно высказать следующую теорему: *действие вдоль дуги $A''B''$ равно действию вдоль дуги $A'B'$, сложенному с действием вдоль дуги $B'B''$ огибаемой кривой D.*

Та же теорема имеет место и при движении точки на поверхности для траекторий, нормальных к неподвижной кривой.

Если $U=0$, то эти теоремы переходят в классические теоремы о развертках.

4. Приложить принцип наименьшего действия к движению тяжелой точки в пустоте в вертикальной плоскости (п. 217, рис. 139). Действие будет тогда иметь вид

$$\int \sqrt{2h-2gy}\, ds.$$

Возьмем в плоскости две точки, из которых одна — начало O, а другая — точка M_1. Кривая, для которой действие от O до M_1 имеет минимум, есть одна из траекторий, по которой движется тяжелая точка, брошенная из O со скоростью $v_0=\sqrt{2h}$, причем так, что она достигает точки M_1. Если M_1 находится внутри параболы безопасности — огибающей траекторий, выходящих из точки O, то существуют две траектории, ведущие из точки O в точку M_1. Доказать, что относительный минимум имеет место для той параболы, для которой точка приходит в M_1 до касания с параболой безопасности (на рис. 139 это — внутренняя парабола) (правило Якоби). Если точка M_1 достаточно близка к точке O, то дуга OM_1 внутренней параболы также дает абсолютный минимум для действия, но этого не будет, если точка M_1 близка к параболе безопасности. Так, если точка M_1 находится на параболе безопасности, например в точке A, то траектория OA по-прежнему дает для действия относительный минимум, но не абсолютный. Это можно доказать, опираясь на результаты предыдущего упражнения, если приложить их к параболе безопасности, которая рассматривается как обобщенная развертка точки O. (Рассуждения совпадают с теми, которые дал Дарбу, Leçons sur la Théorie des surfaces, ч. 3, гл. V.)

5. Если в предыдущем примере точка M_1 находится вне параболы безопасности, то не существует траектории, идущей от O к M_1, но в то же время должна существовать кривая, обращающая действие между O и M_1 в минимум. Доказать, что эта кривая образована двумя перпендикулярами, опущенными из точек O и M_1 на прямую $2h - 2gy = 0$ и частью этой прямой, заключенной между этими перпендикулярами (результат, аналогичный результату п. 148).

6. Исследование траекторий тяжелой точки на вертикальной плоскости xOy производится так же, как исследование геодезических линий на поверхности S', линейный элемент которой определяется формулой

$$ds'^2 = (2h - 2gy)(dx^2 + dy^2).$$

Доказать, что эта поверхность развертывается на поверхность вращения, и составить уравнение меридиана. Если положить $2h - 2gy = u$, $2gx = v$, то вновь получится упражнение п. 271.

7. Приложить принцип наименьшего действия к движению планет и разрешить для этого движения вопросы, аналогичные предыдущим (4, 5 и 6). (См. Якоби, Vorlesungen über Dynamik *), лекция 6.)

8. Пусть $\varphi(x, y, z)$ — положительная функция от x, y, z, а A и B — две неподвижные точки. Кривые C, соединяющие эти точки, вдоль которых интеграл $\int \varphi(x, y, z)\, ds$ имеет минимум, суть: 1) фигуры равновесия нити, для которой натяжение есть φ, а силовая функция $-\varphi$; 2) брахистохроны для точки массы 1, когда силовая функция равна $\frac{1}{\varphi^2(x, y, z)}$, а начальная скорость в точке x_0, y_0, z_0 равна $\frac{\sqrt{2}}{\varphi(x_0, y_0, z_0)}$; 3) траектории свободной точки массы 1 для силовой функции $\varphi^2(x, y, z)$ при начальной скорости, равной $\sqrt{2}\cdot\varphi(x_0, y_0, z_0)$. (См. Андуайе, Comptes rendus, т. C, стр. 1577; Викер, т. CVI, стр. 458.)

9. Те же теоремы имеют место и для кривых, проведенных на неподвижной поверхности и обращающих $\int \varphi\, ds$ в минимум.

10. Кривая, описываемая точкой под действием заданной силовой функции, обращающая в минимум интеграл $\int v^n\, ds$, где $v = \sqrt{2(U + h)}$, имеет в каждой точке K радиуса кривизны ρ, направленный по той же прямой, что и радиус кривизны ρ_1 траектории, которую движущаяся точка описала бы, если бы она оказалась в положении K свободной; при этом $\rho = \rho_1/h$ и когда $n < 0$ откладывается в сторону, противоположную той, куда отложен радиус кривизны ρ_1.

Наиболее интересным случаем будет тот, для которого $n = -1$; тогда кривая будет брахистохроной. Таким образом вновь устанавливается связь

*) Имеется русский перевод (ОНТИ, 1936). (*Прим. перев.*)

между траекториями и брахистохронами, указанная в упражнении 8. (Викер, Savants étrangers и статья Жордана, Comptes rendus, т. CVIII, стр. 330.)

11. Вывести из принципа наименьшего действия уравнения Лагранжа.

Возьмем, например, случай свободной точки, отнесенной к системе координат q_1, q_2, q_3. Функция U будет функцией этих координат, а

$$ds^2 = a_{11}\,dq_1^2 + \ldots + 2a_{12}\,dq_1\,dq_2 + \ldots$$

Теперь нужно определить q_1, q_2, q_3 в функции вспомогательного переменного q таким образом, чтобы интеграл

$$\int_a^b \sqrt{2(U+h)}\,\frac{ds}{dq}\,dq$$

был минимумом. Делая в полученных уравнениях замену переменной по формуле (5) на странице 811, получим уравнения Лагранжа. Согласно упражнению 8 мы приходим, таким образом, к возможности приложения уравнений Лагранжа к фигуре равновесия нити. (Comptes rendus. т. XCVI, стр. 668.)

ГЛАВА XVI

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРЕМА ЯКОБИ. ПРИЛОЖЕНИЯ

291. Историческая справка. Уравнения движения свободной точки или точки, движущейся по поверхности или по кривой как подвижным, так и неподвижным, были составлены Лагранжем в одинаковой для всех этих случаев форме с той лишь разницей, что число параметров, подлежащих определению в функции времени, равно трем для свободной точки, двум для точки на поверхности, и одному для точки на кривой (пп. 259, 263, 282). Мы увидим дальше, что уравнения самой общей задачи динамики системы могут быть составлены в этой же форме, но число параметров будет каким угодно, при условии, что *связи могут быть выражены в конечной форме и что эти параметры действительно являются координатами*.

Излагаемые ниже преобразования и теоремы применимы только в том случае, когда проекции X, Y, Z равнодействующей заданных сил, приложенных к точке, суть частные производные функции $U(t, x, y, z)$, которая может содержать явно время t. Уравнения Лагранжа будут тогда иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=\frac{\partial U}{\partial q_\nu}, \quad q'_\nu=\frac{dq_\nu}{dt}, \tag{1}$$

где $\nu=1, 2, 3$ для свободной точки, $\nu=1, 2$ для точки на поверхности и $\nu=1$ для точки на кривой. Мы будем вести изложение, предположив для определенности, что точка свободна, $\nu=1, 2, 3$; тогда будут три уравнения и три параметра q_1, q_2, q_3. Но, как мы увидим, выкладки не будут зависеть от числа уравнений (1).

Преобразование, начатое Пуассоном и законченное Гамильтоном, позволяет написать уравнение в форме, которая содержит частные производные только от одной функции и которая очень удобна для теоретических исследований.

Эта форма привела Якоби к замечательной теореме об интегрировании уравнений движения.

I. Канонические уравнения. Теорема Якоби

292. Преобразование Пуассона и Гамильтона. Пуассону принадлежит идея принять за переменные величины

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial q_3'}. \tag{2}$$

Эти уравнения, будучи линейными относительно q_1', q_2', q_3', так как T есть квадратичная функция этих величин, могут быть разрешены относительно q_1', q_2', q_3' в виде:

$$\left.\begin{aligned} q_1' &= f_1(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t), \\ q_2' &= f_2(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t), \\ q_3' &= f_3(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Посмотрим, во что обратятся уравнения Лагранжа, если в них заменить q_1', q_2', q_3' этими выражениями.

Прежде всего, первые члены уравнений (1) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu'}\right)$ обратятся просто в $\frac{dp_\nu}{dt}$.

Для преобразования второго члена $-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}$ дадим в выражении T переменным q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 произвольные бесконечно малые приращения δq_1, δq_2, δq_3, δp_1, δp_2, δp_3, оставляя переменную t постоянной. При этом величины q_1', q_2', q_3' получат приращения $\delta q_1'$, $\delta q_2'$, $\delta q_3'$, определяемые соотношениями (3), в которых t остается постоянным.

Тогда функция T, зависящая от q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 и t, получит приращение δT, определяемое формулой

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3 + \frac{\partial T}{\partial q_1'}\delta q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'}\delta q_2' + \frac{\partial T}{\partial q_3'}\delta q_3',$$

или в силу уравнений (2)

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3 + p_1\,\delta q_1' + p_2\,\delta q_2' + p_3\,\delta q_3',$$

что можно написать так

$$\begin{aligned} \delta T = \delta\left(p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3'\right) &+ \\ + \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 &+ \frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3 - q_1'\,\delta p_1 - q_2'\,\delta p_2 - q_3'\,\delta p_3. \end{aligned}$$

Полагая для краткости

$$K = p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3' - T,$$

представим это равенство в виде

$$\delta K=-\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1-\frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2-\frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3+q_1'\delta p_1+q_2'\delta p_2+q_3'\delta p_3,$$

что является первым выражением для дифференциала δK. С другой стороны, допустим, что K выражено при помощи системы новых переменных q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t. Когда q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 получают рассматриваемые произвольные приращения, тогда δK определяется формулой

$$\delta K=\frac{\partial K}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial K}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial K}{\partial q_3}\delta q_3+\frac{\partial K}{\partial p_1}\delta p_1+\frac{\partial K}{\partial p_2}\delta p_2+\frac{\partial K}{\partial p_3}\delta p_3.$$

Это выражение должно совпадать с первым, каковы бы ни были δq_1, δq_2, δq_3, δp_1, δp_2, δp_3. Следовательно,

$$-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=\frac{\partial K}{\partial q_\nu},\quad q_\nu'=\frac{\partial K}{\partial p_\nu}\qquad (\nu=1,\ 2,\ 3). \tag{4}$$

В этих уравнениях частные производные берутся в предположении, что T выражено через q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3', а K выражено через q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3. В силу уравнений (4) уравнения Лагранжа (1) принимают вид

$$\frac{dp_\nu}{dt}+\frac{\partial K}{\partial q_\nu}=\frac{\partial U}{\partial q_\nu},\quad \frac{dq_\nu}{dt}=\frac{\partial K}{\partial p_\nu}\qquad (\nu=1,\ 2,\ 3). \tag{5}$$

Рассмотрим разность

$$H=K-U.$$

Функция U, зависящая только от x, y, z, t, выражается через t и через переменные q_1, q_2, q_3, в то время как K зависит от времени, от переменных q_1, q_2, q_3 и еще от переменных p_1, p_2, p_3. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial K}{\partial p_\nu}=\frac{\partial H}{\partial p_\nu},\quad \frac{\partial K}{\partial q_\nu}-\frac{\partial U}{\partial q_\nu}=\frac{\partial H}{\partial q_\nu}$$

и уравнения (5), если полагать последовательно $\nu=1$, 2, 3, обратятся в следующие:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1}, && \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2}, && \frac{dq_3}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_3};\\ &\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_1}, && \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_2}, && \frac{dp_3}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_3}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Это и будут канонические уравнения движения, данные Гамильтоном. Они будут первого порядка и число их равно шести. Они определяют шесть переменных q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 в функции времени и шести произвольных постоянных. Для определения движения системы достаточно найти значения параметров q_1, q_2, q_3 в функции времени, так как только они участвуют в определении положения точки.

293. Частный случай, когда выражения x, y, z через q_1, q_2, q_3 не содержат явно времени. Вычисления упрощаются, если определение новых координат q_1, q_2, q_3 не зависит от времени, т. е. если выражения x, y, z через q_1, q_2, q_3 не содержат t. Тогда будет

$$K = T.$$

В самом деле, в этом случае T будет однородной функцией второго порядка относительно q_1', q_2', q_3' и мы получим (пп. 261, 265, 283)

$$q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'} + q_3' \frac{\partial T}{\partial q_3'} = 2T.$$

Но на основании уравнений (2) левая часть представляет собой не что иное, как $p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3'$. Следовательно,

$$K = p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3' - T = 2T - T = T,$$

и функция Гамильтона H принимает вид

$$T - U.$$

В этом случае преобразования, которые надо выполнить, чтобы перейти от квадратичной формы T, выраженной через q_1', q_2', q_3', к форме T, выраженной через p_1, p_2, p_3, совпадают с теми, которые надо выполнить для перехода от квадратичной формы к форме сопряженной, как, например, для перехода от уравнения конического сечения в точечных однородных координатах к его уравнению в однородных тангенциальных координатах.

Если положить

$$2T = a_{11} q_2'^2 + a_{22} q_2'^2 + a_{33} q_3'^2 + 2a_{12} q_1' q_2' + 2a_{23} q_2' q_3' + 2a_{31} q_3' q_1',$$

или в более сжатой форме

$$2T = \sum a_{ik} q_i' q_k' \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

то получим

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = a_{11} q_1' + a_{12} q_2' + a_{13} q_3',$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = a_{21} q_1' + a_{22} q_2' + a_{23} q_3',$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial q_3'} = a_{31} q_1' + a_{32} q_2' + a_{33} q_3'.$$

Отсюда, обозначая через D дискриминант квадратичной формы, т. е. определитель девяти величин a_{ik}, а через $A_{ik}=\frac{\partial D}{\partial a_{ik}}$ — минор, соответствующий элементу a_{ik}, получим

$$q'_\nu=\frac{1}{D}(A_{\nu 1}p_1+A_{\nu 2}p_2+A_{\nu 3}p_3) \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3),$$

и поэтому

$$2T=p_1q'_1+p_2q'_2+p_3q'_3=\sum\frac{A_{ik}}{D}p_ip_k \qquad (A_{ik}=A_{ki}).$$

294. Примечание. Для того чтобы выполнить преобразование Гамильтона, нужно было предположить, что уравнения (2) разрешимы относительно q'_1, q'_2, q'_3. Такое разрешение всегда возможно. Возьмем, например, случай, когда равенства, определяющие значения новых переменных, не содержат явно времени. Тогда T будет однородной функцией второго порядка, т. е. квадратичной формой относительно q'_1, q'_2, q'_3, и определитель из коэффициентов при неизвестных в уравнениях (2) будет дискриминантом этой квадратичной формы. Если он равен нулю, то можно найти систему значений $(q'_1)^0$, $(q'_2)^0$, $(q'_3)^0$ для q'_1, q'_2, q'_3, не равных одновременно нулю, для которых все частные производные от T относительно этих переменных обращаются в нуль. Но это невозможно, так как на основании соотношения

$$2T=q'_1\frac{\partial T}{\partial q'_1}+q'_2\frac{\partial T}{\partial q'_2}+q'_3\frac{\partial T}{\partial q'_3}$$

эти значения переменных обратят в нуль и функцию T, а так как T является кинетической энергией, то оно не может обратиться в нуль при вещественных значениях q'_1, q'_2, q'_3, т. е. при действительном движении точки. Мы видим, таким образом, что рассматриваемый определитель действительно всегда отличен от нуля и разрешение уравнений (2) всегда возможно.

Если выражения x, y, z через q_1, q_2, q_3 содержат явно время, т. е.

$$x=\varphi(q_1,q_2,q_3,t), \qquad y=\psi(q_1,q_2,q_3,t), \qquad z=\omega(q_1,q_2,q_3,t),$$

то кинетическая энергия

$$T=\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}q'_2+\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}q'_3+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\ldots\right]$$

не будет больше однородной относительно q'_1, q'_2, q'_3. Но определитель коэффициентов при q'_1, q'_2, q'_3 в уравнениях (2) будет тогда дискриминантом квадратичной формы

$$T_1=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}q'_2+\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}q'_3\right)^2+\ldots\right],$$

получаемой, если взять в T члены второго порядка. Этот дискриминант не может быть равен нулю, ибо в противном случае функция T_1 обращалась бы в нуль при вещественных значениях q'_1, q'_2, q'_3, не равных нулю одновременно. Но тогда существовало бы возможное перемещение точки, получающееся, если, оставляя t постоянным, изменить q_1, q_2, q_3, и для этого перемещения возможная кинетическая энергия $\frac{1}{2}m\frac{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}{dt^2}$ была бы равна нулю, что невозможно.

295. Интеграл кинетической энергии. Мы видели раньше, что в случае, когда существует силовая функция $U(x, y, z)$, имеется интеграл кинетической энергии вида

$$T-U=h.$$

Мы убедились в этом (пп. 261, 265, 283), предполагая, что выражения x, y, z через q_1, q_2, q_3 не зависят от времени. Таким образом, получается первый интеграл канонических уравнений, который может быть выведен из них непосредственным вычислением.

Чтобы убедиться в этом, предположим по-прежнему, что выражения x, y, z через q_1, q_2, q_3 не содержат t. В этом случае ни T, ни U, ни H, которое равно $T-U$, не содержат t. Если теперь предположить, что в функции H параметры q_1, q_2, q_3 и величины p_1, p_2, p_3 заменены выражениями, которые они должны принять в функции времени в силу уравнений (6), то на основании теоремы о сложных функциях получим

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{dp_3}{dt}.$$

Но на основании канонических уравнений имеем

$$\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\frac{dq_\nu}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{dp_\nu}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}-\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial H}{\partial q_\nu}=0$$

и остается

$$\frac{dH}{dt}=0 \quad \text{или} \quad H=h, \quad \text{или} \quad T-U=h.$$

Если выражения x, y, z через q_1, q_2, q_3 зависят от времени, то H не будет больше равно $T-U$ и не будет существовать интеграл $H=h$. В этом случае H будет содержать явно время и полная производная $\frac{dH}{dt}$, взятая в предположении, что q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 рассматриваются как функции t, будет содержать еще один член, а именно: частную производную $\frac{\partial H}{\partial t}$ от функции H по содержащейся в ней явно переменной t, и после предыдущих сокращений получится

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

296. Пример. Центральная сила — функция расстояния. Приведем для примера к каноническому виду уравнения движения точки на плоскости под действием центральной силы, являющейся функцией расстояния. Примем центр сил за начало координат и введем полярные координаты r и θ, которые будут играть роль параметров q_1 и q_2. Полагая массу равной единице, получим для кинетической энергии выражение

$$T=\frac{1}{2}(r'^2+r^2\theta'^2).$$

Силовая функция U является функцией переменного r, т. е. $U=\Psi(r)$. Так как T однородно относительно r' и θ', то

$$H=T-U=\frac{1}{2}(r'^2+r^2\theta'^2)-\Psi(r).$$

Переменные p_1 и p_2 определяются уравнениями

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial r'}=r', \quad p_2=\frac{\partial T}{\partial \theta'}=r^2\theta',$$

откуда получаем

$$r'=p_1, \quad \theta'=\frac{p_2}{r^2}.$$

Следовательно, выражение H в этих новых переменных будет иметь вид

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{r^2}\right)-\Psi(r)$$

и канонические уравнения будут

$$\frac{dr}{dt}=p_1, \quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{p_2}{r^2},$$

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{p_2^2}{r^3}+\Psi'(r), \quad \frac{dp_2}{dt}=0.$$

Эти уравнения определяют r, θ, p_1 и p_2 в функции t. Из последнего уравнения имеем $p_2=C$, и, подставляя во второе, получим $r^2\frac{d\theta}{dt}=C$, что является уравнением площадей. Исключая p_1 из первого и третьего и заменяя p_2 величиной C, получим уравнение

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{C^2}{r^3}+\Psi'(r),$$

которое было выведено непосредственно в главе XI, как уравнение, определяющее движение по радиусу-вектору.

Теорема кинетической энергии выражается уравнением $T-U=h$ или $H=h$.

II. Теорема Якоби

297. Теорема Якоби. В канонических уравнениях (6) H является функцией второй степени относительно p_1, p_2, p_3. Теорема Якоби справедлива для любых уравнений вида (6), в которых H является произвольной заданной функцией от p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, t. Мы будем писать ее в виде $H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, t)$, чтобы сделать явными входящие переменные. Основа теоремы Якоби заключается в том, что канонические уравнения являются уравнениями характеристик дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right)=0, \tag{J}$$

определяющего V в функции q_1, q_2, q_3, t, рассматриваемых как независимые переменные. Левая часть этого уравнения получается, если к члену $\frac{\partial V}{\partial t}$ добавляется функция, в которую обращается H, когда в нем заменяют p_1, p_2, p_3 производными $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$, $\frac{\partial V}{\partial q_3}$.

Гамильтон показал, что если известен общий интеграл уравнений движения, представленных в канонической форме, то из него можно вывести полный интеграл этого уравнения с частными производными. Якоби дополнил эту теорему, доказав, что, обратно, если известен какой-нибудь полный интеграл этого уравнения с частными производными, то из него можно получить общий интеграл уравнений движения. Как мы только что говорили, это уравнение с частными производными, которое мы будем называть *уравнением Якоби*, подобрано таким образом, что уравнения движения (6) являются для него дифференциальными уравнениями характеристик согласно известному методу интегрирования уравнений с частными производными первого порядка. Мы не будем, однако, пользоваться этим методом.

Выясним сначала, какую форму должен иметь общий интеграл канонических уравнений. Уравнения (6) образуют систему шести уравнений первого порядка, определяющих q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 в функции t. Их общий интеграл представляется уравнениями вида

$$q_\nu = F_\nu(t,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3),$$
$$p_\nu = G_\nu(t,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3)$$

($\nu = 1,\ 2,\ 3$) с шестью произвольными постоянными a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

Уравнение с частными производными первого порядка (J) определяет некоторую функцию V переменных q_1, q_2, q_3, t, рассматриваемых как независимые. Известно, что по Лагранжу *полным интегралом уравнения с частными производными первого порядка* называется решение этого уравнения, содержащее столько произвольных постоянных, сколько в нем содержится независимых переменных. В рассматриваемом случае полный интеграл должен содержать четыре произвольных постоянных. Но уравнение (J) содержит только производные от V. Поэтому, если оно обладает каким-нибудь решением V, то оно будет иметь и другое решение $V + \text{const}$. Следовательно, для того, чтобы иметь полный интеграл, достаточно найти решение

$$V(q_1,\ q_2,\ q_3,\ t,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \qquad \text{(C)}$$

с тремя произвольными постоянными a_1, a_2, a_3, *из которых ни одна не является аддитивной*; тогда функция $V + \text{const.}$ будет полным интегралом. Эта последняя постоянная, которую можно всегда добавить, не играет никакой роли в теореме Якоби. Последняя формулируется следующим образом: *если для уравнения* (J) *найден полный интеграл вида* (C), *то конечные уравнения движения*, *дающие общий интеграл системы канонических уравнений, будут*

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}=b_1,\quad \frac{\partial V}{\partial a_2}=b_2,\quad \frac{\partial V}{\partial a_3}=b_3, \tag{J$_1$}$$

$$p_1=\frac{\partial V}{\partial q_1},\quad p_2=\frac{\partial V}{\partial q_2},\quad p_3=\frac{\partial V}{\partial q_3}, \tag{J$_2$}$$

где b_1, b_2, b_3 — произвольные постоянные.

Три уравнения (J_1), разрешенные относительно q_1, q_2, q_3, определяют эти величины как функции времени и шести постоянных a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3. Если эти значения подставить в уравнения (J_2), то последние определяют p_1, p_2, p_3 в функции времени и тех же постоянных. Необходимо показать, что полученные таким образом выражения являются общим интегралом канонических уравнений

$$\frac{dq_\nu}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\nu},\quad \frac{dp_\nu}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\qquad (\nu=1,\ 2,\ 3). \tag{6}$$

Уравнения (J_1) образуют систему трех совместных уравнений относительно q_1, q_2, q_3, t, определяющих q_1, q_2, q_3 в функции t. Будем искать производные от q_1, q_2, q_3 по t по теореме о неявных функциях, для чего продифференцируем уравнения (J_1), рассматривая в них q_1, q_2, q_3 как функции t. Таким путем получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}&=0,\\
\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}&=0,\\
\frac{\partial^2 V}{\partial a_3\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_3\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_3\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_3\,\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из этих трех уравнений первой степени можно найти $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, $\frac{dq_3}{dt}$ и нужно убедиться в том, что значения этих производных удовлетворяют уравнениям (6), т. е., что они равны соответственно производным $\frac{\partial H}{\partial p_1}$, $\frac{\partial H}{\partial p_2}$, $\frac{\partial H}{\partial p_3}$. Но так как в общем случае система уравнений первого порядка имеет только одно решение, то достаточно убедиться, что уравнения (7) удовлетворяются, если в них вместо $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, $\frac{dq_3}{dt}$ подставить $\frac{\partial H}{\partial p_1}$, $\frac{\partial H}{\partial p_2}$, $\frac{\partial H}{\partial p_3}$. Достаточно, например, проверить, выполняется ли тождество

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3}=0 \tag{8}$$

после того как в нем величины q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 будут заменены их значениями в функции t и шести произвольных постоянных, полученными из уравнений (J_1) и (J_2). Но мы сейчас докажем, что это уравнение является тождеством относительно q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3, если в нем заменить p_1, p_2, p_3 их значениями (J_2). В самом деле, если в уравнение (J) подставить вместо v полный интеграл (C), то полученное от этой подстановки равенство будет тождественно равно нулю, каковы бы ни были $q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3$. Частные производные этого равенства относительно каждой из величин $q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3$ будут также тождественно равны нулю. Напишем, что частная производная по a_1 уравнения (J) равна тождественно нулю:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial t}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_1}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_2}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_3}=0, \quad (8')$$

так как левая часть равенства (J) зависит от a_1 через член $\frac{\partial V}{\partial t}$ и величины $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}$, входящие в H. Это тождество (8′) в точности выражает то, что мы хотим доказать, а именно, что выражение (8) является тождеством, когда в нем p_1, p_2, p_3 заменены значениями (J_2). Точно так же убеждаемся, что подстановка значений $\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3}$ вместо $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \frac{dq_3}{dt}$ в два других уравнения (7) обращают их в тождества.

Мы доказали, что значения q_1, q_2, q_3, определяемые уравнениями (J_1), удовлетворяют уравнениям $\frac{dq_\nu}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\nu}$; остается убедиться в том, что значения p_1, p_2, p_3, определяемые уравнениями (J_2), удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp_\nu}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\nu}.$$

Проверим это для p_1. Так как $\frac{\partial V}{\partial q_1}$ зависит от t непосредственно и через q_1, q_2, q_3, то из уравнений (J_2) получим

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}.$$

Требуется показать, что полученное выражение для $\frac{dp_1}{dt}$ совпадает с выражением $-\frac{\partial H}{\partial q_1}$ в силу равенств (J_1) и (J_2). Но мы только что доказали, что $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \frac{dq_3}{dt}$ совпадают тождественно с $\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3}$; подставляя эти значения в вышенаписанное выражение для $\frac{dp_1}{dt}$ и приравнивая результат величине $-\frac{\partial H}{\partial q_1}$, мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3}=-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad (9)$$

которое должно быть тождеством в силу равенств (J_1) и (J_2). Покажем, как мы это делали выше, что оно тождественно удовлетворяется при замене p_1, p_2, p_3 значениями (J_2). Действительно, если подставить в левую часть уравнения Якоби (J) полный интеграл V, то результат такой подстановки будет тождественно равен нулю при любых значениях q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3. Следовательно, производная этой левой части по q_1 будет также тождественно равна нулю. Написав это, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_1}+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q_1}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q_2}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_2}+\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial q_3}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_3}=0, \qquad (9')$$

выражающее, что равенство (9) обращается в тождество, если в нем вместо p_1, p_2, p_3 подставить $\dfrac{\partial V}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial V}{\partial q_2}$, $\dfrac{\partial V}{\partial q_3}$.

Таким образом, теорема Якоби доказана. Интегрирование уравнений движения сведено, следовательно, к нахождению полного интеграла уравнения (J). Наоборот, если бы мы пожелали классическими методами проинтегрировать уравнение Якоби, то нам пришлось бы сначала проинтегрировать канонические уравнения. Можно, сказать, что две задачи анализа: интегрирование канонических уравнений и нахождение полного интеграла уравнения (J) — эквивалентны в том смысле, что решение одной задачи влечет за собой и решение другой.

Примечание. Мы допустили, что система уравнений первой степени (7) относительно $\dfrac{dq_1}{dt}$, $\dfrac{dq_2}{dt}$, $\dfrac{dq_3}{dt}$ имеет только одно решение, т. е. что определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial q_3}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial q_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial q_3}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_3\,\partial q_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_3\,\partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_3\,\partial q_3} \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Но этот определитель является функциональным определителем производных $\dfrac{\partial V}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial V}{\partial q_2}$, $\dfrac{\partial V}{\partial q_3}$, рассматриваемых как функции от a_1, a_2, a_3. Если этот определитель равен нулю, то $\dfrac{\partial V}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial V}{\partial q_2}$, $\dfrac{\partial V}{\partial q_3}$ будут связаны соотношением вида

$$\Phi\left(\frac{\partial V}{\partial q_1},\ \frac{\partial V}{\partial q_2},\ \frac{\partial V}{\partial q_3}\right)=0 \qquad (10)$$

с коэффициентами, не зависящими от a_1, a_2, a_3, т. е. являющимися функциями от q_1, q_2, q_3, t. Но тогда функция V не будет больше полным интегралом уравнения Якоби, так как она удовлетворяет не только уравнению Якоби, но еще и уравнению (10), которое не содержит t и поэтому отличается от уравнения Якоби. Но, как известно, существенным свойством полного интеграла является то, что по исключении содержащихся в нем постоянных мы придем к заданному уравнению с частными производными, но не к какому-либо другому. Поэтому определитель Δ не может равняться нулю (см. Гурса, Equations aux dérivées partielles, стр. 97).

Из того, что Δ не равно нулю, можно заключить также, что шесть постоянных, входящих в интегралы (J_1) и (J_2) канонических уравнений, действительно различны, т. е. что можно определить a_1, a_2, a_3 таким образом, чтобы при $t = t_0$ величины q_1, q_2, q_3 приняли произвольные значения, после чего можно определить b_1, b_2, b_3 так, чтобы при $t = t_0$ величины p_1, p_2, p_3 тоже приняли любые наперед заданные значения.

298. Частный случай, когда t не входит явно в коэффициенты уравнения Якоби. Такой случай имеет место в механике, когда выражения x, y, z через q_1, q_2, q_3 не содержат явно времени и когда имеется силовая функция $U(x, y, z)$. Тогда, как мы видели в п. 293,

$$H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) = T - U, \tag{11}$$

где T — квадратичная форма от p_1, p_2, p_3. В этом случае можно удовлетворить уравнению Якоби функцией V вида

$$V = -ht + W, \tag{12}$$

где h — постоянная, а W — функция от q_1, q_2, q_3, но не от t.

Подставляя эту функцию V в уравнение (J) Якоби и замечая, что

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\nu} = \frac{\partial W}{\partial q_\nu},$$

мы получим для определения W уравнение

$$-h + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3\right) = 0. \tag{J'}$$

Достаточно будет определить полный интеграл $W(q_1, q_2, q_3, \alpha, \beta, h)$ этого уравнения (J′), содержащий, кроме h, две постоянные α и β, из которых ни одна не является аддитивной. Тогда, приняв

$$V = -ht + W(q_1, q_2, q_3, \alpha, \beta, h),$$

получим полный интеграл уравнения Якоби с тремя постоянными α, β, h, играющими роль постоянных a_1, a_2, a_3.

Интегралы (J_1) и (J_2) уравнений движения, если через α', β' и $-t_0$ обозначить другие постоянные, играющие роль b_1, b_2, b_3, будут тогда иметь вид:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha', \qquad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta', \qquad -t + \frac{\partial W}{\partial h} = -t_0, \tag{J_1'}$$

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}, \qquad p_3 = \frac{\partial W}{\partial q_3}. \tag{J_2'}$$

Первые два уравнения (J_2'), не содержащие t, определяют траекторию движущейся точки в системе координат q_1, q_2, q_3. Третье уравнение определяет время, затрачиваемое для прихода в какое-нибудь место на этой траектории.

Постоянная h будет тогда постоянной интеграла кинетической энергии. Действительно, уравнение (J′) в силу значений величин $\frac{\partial W}{\partial q_1}$, $\frac{\partial W}{\partial q_2}$, $\frac{\partial W}{\partial q_3}$ в уравнении (J_2') обращается в следующее:

$$H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) - h = 0,$$

т. е. в интеграл кинетической энергии (п. 295).

299. Геометрическое свойство траекторий. Докажем следующее геометрическое свойство: *Если постоянным* α, β, h *придать произвольные фиксированные значения, а постоянные* α', β' *изменять, то траектории, определяемые двумя первыми уравнениями* (J_1'), *будут нормальны к поверхностям, имеющим уравнение* $W = \text{const}$.

Эту теорему легко доказать, если воспользоваться декартовыми координатами, как мы это покажем в следующем пункте в качестве упражнения. Здесь мы докажем эту теорему в любой системе координат, чтобы иметь способ доказательства, который мог бы быть пригоден в дальнейшем при рассмотрении движения системы.

Заметим, что необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух бесконечно малых перемещений dx, dy, dz и δx, δy, δz имеет вид

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0.$$

Если мы, в частности, допустим, что dx, dy, dz являются действительным перемещением движущейся точки по траектории за промежуток времени dt, а δx, δy, δz — произвольное перпендикулярное к нему перемещение, то, разделив условие ортогональности на dt и обозначив через x', y', z' производные от x, y, z по t, мы можем написать его в виде

$$x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z = 0. \tag{13}$$

При переходе от декартовых координат к новым координатам q_1, q_2, q_3 мы полагали

$$x = \varphi(q_1, q_2, q_3), \quad y = \psi(q_1, q_2, q_3), \quad z = \omega(q_1, q_2, q_3).$$

Отсюда

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} q_3', \ \ldots$$

Далее

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \delta q_3, \ \ldots,$$

где δq_1, δq_2, δq_3 — бесконечно малые вариации координат q_1, q_2, q_3, соответствующие перемещению δx, δy, δz. Если вспомнить, что кинетическая энергия выражается в виде

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} q_3'\right)^2 + \ldots\right],$$

то условие ортогональности (13), как это легко проверить, можно представить в виде

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'}\delta q_1+\frac{\partial T}{\partial q_2'}\delta q_2+\frac{\partial T}{\partial q_3'}\delta q_3=0,$$

или, на основании принятых ранее обозначений, в виде

$$p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+p_3\delta q_3=0. \tag{14}$$

Вернемся теперь к интересующей нас теореме. Мы хотим доказать, что траектория точки, определенная как указано в формулировке, нормальна к той из поверхностей

$$W(q_1,\ q_2,\ q_3,\ \alpha,\ \beta,\ h)=\text{const.}, \tag{15}$$

которая проходит через рассматриваемое положение движущейся точки. Для этого достаточно показать, что скорость x', y', z' движущейся точки перпендукулярна к любому перемещению δq_1, δq_2, δq_3, происходящему по поверхности (15), т. е. удовлетворяющему условию

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial W}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial W}{\partial q_3}\delta q_3=0. \tag{16}$$

Другими словами, достаточно показать, что это условие (16) необходимо влечет за собой условие ортогональности (14). Но это очевидно на основании теоремы Якоби, так как значения p_1, p_2, p_3, вытекающие из этой теоремы [уравнения (J_2') предыдущего пункта], будут

$$p_1=\frac{\partial W}{\partial q_1},\quad p_2=\frac{\partial W}{\partial q_2},\quad p_3=\frac{\partial W}{\partial q_3}.$$

Следовательно, условие (16) влечет за собой равенство (14) и скорость точки, будучи нормальной к любому перемещению, совершаемому по поверхности $W=\text{const.}$, нормальна к этой поверхности.

300. Декартовы координаты в пространстве. Предположим, для простого примера, что q_1, q_2, q_3 обозначают декартовы координаты:

$$x=q_1,\quad y=q_2,\quad z=q_3,$$
$$x'=q_1',\quad y'=q_2',\quad z=q_3'$$

и примем для простоты массу материальной точки, равной единице. Тогда

$$T=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2),$$

и если допустить, что существует силовая функция $U(x,\ y,\ z)$, то функция Гамильтона будет

$$H=T-U.$$

Необходимо выразить эту функцию через переменные x, y, z и вспомогательные переменные p_1, p_2, p_3, определяемые формулами

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial x'} = x', \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial y'} = y', \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial z'} = z',$$

так чтобы функция Гамильтона приняла вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) - U(x, y, z).$$

Вследствие этого канонические уравнения будут

$$\frac{dx}{dt} = p_1, \qquad \frac{dy}{dt} = p_2, \qquad \frac{dz}{dt} = p_3,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{dp_3}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Исключение переменных p из этих уравнений приведет, очевидно, к обычным уравнениям движения.

Посмотрим, что дает в этом случае метод Якоби. Этот метод состоит в том, что нужно найти для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] - U(x, y, z) = 0$$

полный интеграл, т. е. интеграл, содержащий три не аддитивные постоянные. Так как время не входит явно в это уравнение, то можно положить

$$V = -ht + W(x, y, z),$$

где h — постоянная, и достаточно, чтобы функция W удовлетворяла соотношению

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] = U + h. \tag{J''}$$

Если для этого уравнения с тремя переменными будет найден полный интеграл

$$W(x, y, z, \alpha, \beta, h),$$

содержащий две новые постоянные α и β, из которых ни одна не является аддитивной, то теорема Якоби показывает, что конечные уравнения движения будут

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta', \quad -t + \frac{\partial W}{\partial h} = -t_0.$$

Два первых уравнения представляют траекторию, а последнее определяет время, затрачиваемое движущейся точкой для прихода в какое-нибудь положение на ее траектории. Кроме того, для p_1, p_2, p_3 получаем значения

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial V}{\partial z},$$

и так как p_1, p_2, p_3 равны здесь x', y', z', а V равно $-ht + W(x, y, z)$, то имеем

$$x' = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad y' = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad z' = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Эти формулы определяют проекции скорости точки, выраженные в функции ее координат через частные производные одной функции W. Так как эта функция удовлетворяет уравнению (J''), то

$$\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)=U+h,$$

что представляет собой не что иное, как интеграл кинетической энергии. Следовательно, h, как мы уже видели, является постоянной интеграла кинетической энергии.

Мы можем, между прочим, легко проверить геометрическое свойство траекторий. Дадим постоянным α, β, h какие-нибудь определенные значения. Написанные выше выражения для x', y', z' через частные производные функции W показывают, что в каждой точке (x, y, z) скорость нормальна к той из поверхностей $W=\text{const}$., которая проходит через эту точку. Но скорость касается той из траекторий

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\alpha', \quad \frac{\partial W}{\partial \beta}=\beta',$$

которая получается, если α' и β' подобраны так, чтобы эта траектория проходила через рассматриваемое положение движущейся точки. Следовательно, все траектории, получающиеся при изменении α' и β', нормальны к поверхностям $W=\text{const}$. Это и является геометрическим свойством траекторий, установленным выше в общей системе координат q_1, q_2, q_3.

III. Плоское движение. Движение по поверхности

301. Общие положения. Очевидно, что все вышеизложенное прилагается к движению на плоскости или к более общему случаю, — движению на поверхности, при условии использования двух координат q_1 и q_2 вместо трех. Функция

$$H=K-U=p_1q_1'+p_2q_2'-T-U$$

зависит тогда от p_1, p_2, q_1, q_2 и t, и уравнение Якоби имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, q_1, q_2, t\right)=0. \tag{J}$$

Если известен полный интеграл $V(q_1, q_2, t, a_1, a_2)$ с двумя произвольными постоянными a_1, a_2, из которых ни одна не является аддитивной, то конечные уравнения движения будут

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}=b_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_2}=b_2,$$

$$p_1=\frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad p_2=\frac{\partial V}{\partial q_2}.$$

Если система координат q_1, q_2 определена независимо от времени и если функция U не зависит явно от времени, то время t не будет входить в коэффициенты уравнения (J). Тогда можно положить

$$V=-ht+W(q_1, q_2, \alpha, h),$$

где $W(q_1, q_2, \alpha, h)$ — полный интеграл уравнения

$$-h+H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, q_1, q_2\right)=0 \tag{J'}$$

с неаддитивной постоянной α. Уравнения движения будут тогда

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\alpha', \quad -t+\frac{\partial W}{\partial h}=-t_0,$$

причем первое из них является уравнением траектории. Кроме того,

$$p_1=\frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2=\frac{\partial W}{\partial q_2}.$$

Траектории, получающиеся при изменении α', нормальны к кривым $W=\text{const}$.

Рассуждения, совпадающие с изложенными ранее для движения свободной точки, позволяют установить и эту теорему.

Условие ортогональности скорости x', y', z' и перемещения δx, δy, δz будет

$$x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z=0. \tag{a}$$

На поверхности в рассматриваемом случае будем иметь

$$x=\varphi(q_1, q_2), \quad y=\psi(q_1, q_2), \quad z=\omega(q_1, q_2),$$

$$x'=\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}q_2', \ \ldots,$$

$$\delta x=\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2, \ \ldots$$

Кроме того,

$$T=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}q_2'\right)^2+\ldots\right].$$

Условие (a) можно тогда написать так:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'}\delta q_1+\frac{\partial T}{\partial q_2'}\delta q_2=0,$$

или

$$p_1\delta q_1+p_2\delta q_2=0. \tag{a'}$$

Чтобы установить, что траектории $\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\alpha'$ ортогональны к кривым

$$W(q_1, q_2, \alpha, h)=\text{const.}, \tag{b}$$

достаточно показать, что скорость точки ортогональна к перемещению δq_1, δq_2, лежащему на этой кривой, т. е. к перемещению, удовлетворяющему соотношению

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial W}{\partial q_2}\delta q_2=0. \tag{c}$$

Но по теореме Якоби $\frac{\partial W}{\partial q_1}$ и $\frac{\partial W}{\partial q_2}$ равны p_1 и p_2 и, следовательно, условие (с) влечет за собой условие ортогональности (а').

302. Параболическое движение тяжелой точки в пустоте. Примем, как и в п. 217, горизонтальную ось в плоскости траектории за ось Ox, направленную вверх вертикаль — за ось Oy и введем декартовы координаты x и y. Полагая $m=1$, найдем $U=-gy$, и уравнение, определяющее функцию W, напишется так:

$$-h+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]+gy=0.$$

Так как x не входит в коэффициенты, то существует решение вида

$$W=\alpha x+\varphi(y).$$

Действительно, подставляя это выражение для W в уравнение, получим

$$-h+\frac{1}{2}\left[(\alpha^2+\varphi'^2(y)\right]+gy=0,$$

откуда, разрешая относительно $\varphi'(y)$ и интегрируя по y для нахождения $\varphi(y)$, получаем решение

$$W=\alpha x+\int\sqrt{2h-\alpha^2-2gy}\,dy.$$

Уравнение траектории будет тогда

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\alpha', \qquad x-\alpha\int\frac{dy}{\sqrt{2h-\alpha^2-2gy}}=\alpha' \tag{1}$$

и время t можно определить из формулы

$$-t+\frac{\partial W}{\partial h}=-t_0, \qquad -t+\int\frac{dy}{\sqrt{2h-\alpha^2-2gy}}=-t_0. \tag{2}$$

Выполняя квадратуру, получим уравнение

$$x+\frac{\alpha}{g}\sqrt{2h-\alpha^2-2gy}=\alpha'.$$

Возводя это уравнение в квадрат, представим его в виде трехчлена второй степени относительно x, из которого можно определить y. Таким образом, мы непосредственно убеждаемся, что траектория (1) является действительно параболой с вертикальной осью. Что касается уравнения, определяющего t, то, исключив интеграл из равенств (1) и (2), мы можем написать его в виде

$$t-t_0=\frac{x-\alpha'}{\alpha}.$$

Это уравнение выражает, что горизонтальная проекция точки совершает равномерное движение. Кроме того, уравнения $p_1=\frac{\partial W}{\partial q_1}$, $p_2=\frac{\partial W}{\partial q_2}$ в данном случае будут $x'=\alpha'$, $y'=\sqrt{2h-\alpha^2-2gy}$.

Траектории, соответствующие изменению α', получаются одна из другой поступательным перемещением, параллельным оси Ox. Все эти параболы касаются прямой с ординатой $\frac{2h - \alpha^2}{2g}$, являющейся геометрическим местом их вершин. Кривые $W = \text{const.}$ суть полукубические параболы (рис. 176)

$$\alpha x - \frac{1}{3g}(2h - \alpha^2 - 2gy)^{\frac{3}{2}} = \text{const.},$$

получаемые все из одной поступательным перемещением, параллельным оси Ox. Все эти полукубические параболы нормальны к прямой AB с ор-

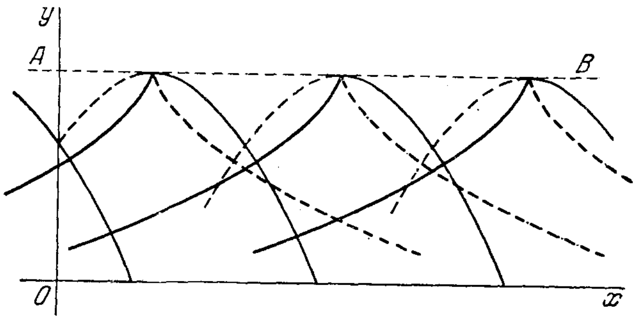


Рис. 176.

динатой $\frac{2h - \alpha^2}{2g}$, и эти прямые являются геометрическим местом их точек возврата. Они ортогональны к предыдущим параболам на основании теоремы п. 301.

303. Центральная сила — функция расстояния. Мы видели (п. 296), что если начало координат взять в центре сил и если силовая функция равна $\Psi(r)$, то в полярных координатах r и θ функция H будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right) - \Psi(r).$$

Применим метод Якоби. Уравнение, определяющее W, для которого требуется найти полный интеграл, будет следующего вида:

$$-h + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right] - \Psi(r) = 0.$$

Так как в это уравнение не входит явно θ, то будем искать интеграл в виде

$$W = \alpha\theta + R,$$

где R зависит только от r. Тогда нужно, чтобы эта функция R удовлетворяла обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-h + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right] - \Psi(r) = 0,$$

откуда находим

$$R = \int \sqrt{2(\Psi + h) - \frac{\alpha^2}{r^2}}\, dr.$$

Следовательно, полный интеграл уравнения Якоби для W имеет вид

$$W = \alpha\theta + \int \sqrt{2(\Psi + h) - \frac{\alpha^2}{r^2}}\, dr$$

и конечные уравнения движения будут

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \theta - \alpha \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2(\Psi + h) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} = \alpha',$$

$$\frac{\partial W}{\partial h} = \int \frac{dr}{\sqrt{2(\Psi + h) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} = t - t_0.$$

Первое уравнение определяет траекторию, а второе — время, необходимое точке для достижения заданного положения на этой кривой.

Значения p_1 и p_2, если это понадобится, найдутся из равенств:

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2(\Psi + h) - \frac{\alpha^2}{r^2}}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \alpha.$$

Последнее уравнение показывает, что α есть не что иное, как постоянная площадей, так как p_2 равно $r^2\theta'$.

Из теоремы кинетической энергии мы знаем, что H должно оставаться постоянным в течение всего времени движения. Мы можем проверить это предложение, воспользовавшись полученными сейчас формулами. Действительно, если мы в выражении

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right) - \Psi(r)$$

заменим переменные p_1 и p_2 их значениями, то получим

$$H = \frac{1}{2}\left[2(\Psi + h) - \frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right] - \Psi = h,$$

что и подтверждает, что h действительно является постоянной интеграла кинетической энергии, как мы это доказали ранее.

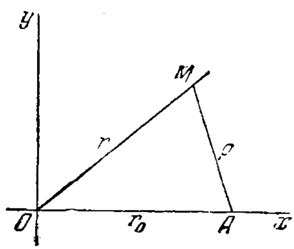


Рис. 177.

Траектории, получающиеся при изменении α', что равносильно вращению одной из них вокруг полюса, ортогональны к кривым $W = \text{const.}$; эти кривые также получаются вращением какой-нибудь одной вокруг полюса.

304. Уравнения движения планеты в форме Якоби. Возьмем начало координат в Солнце, плоскость траектории примем за плоскость xy и обозначим через r расстояние MO от планеты до Солнца (рис. 177). Весь вопрос сводится к нахождению полного интеграла уравнения

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h, \tag{1}$$

так как сила притяжения равна $-\frac{\mu}{r^2}$ и поэтому силовая функция равна $\frac{\mu}{r}$. Следуя методу предыдущего примера, мы найдем полный интеграл, который будет уравнением движения планеты в классической форме.

Якоби нашел другой полный интеграл следующим образом. Пусть A — произвольная точка на оси x и $OA = r_0$. Обозначим через ρ расстояние MA, так что

$$\rho = \sqrt{(x-r_0)^2+y^2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

и положим

$$\sigma = r+\rho, \quad \sigma' = r-\rho.$$

Покажем, что функция

$$W = \int_{\sigma'}^{\sigma} \sqrt{\frac{\mu}{s+r_0}+\frac{1}{2}h}\, ds$$

представляет собою полный интеграл уравнения (1) с произвольной постоянной r_0, отличной от аддитивной. В самом деле, так как σ и σ' зависят от x и y через r и ρ, то имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial x} &= \left(\frac{x}{r}+\frac{x-r_0}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\sigma+r_0}+\frac{1}{2}h} - \left(\frac{x}{r}-\frac{x-r_0}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\sigma'+r_0}+\frac{1}{2}h},\\
\frac{\partial W}{\partial y} &= \left(\frac{y}{r}+\frac{y}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\sigma+r_0}+\frac{1}{2}h} - \left(\frac{y}{r}-\frac{y}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\sigma'+r_0}+\frac{1}{2}h},
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

откуда, возводя в квадрат, складывая и замечая, что члены, содержащие произведение двух квадратных корней, уничтожаются, получаем

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \left[2+\frac{2x(x-r_0)+2y^2}{r\rho}\right]\left(\frac{\mu}{\sigma+r_0}+\frac{1}{2}h\right)+ \\ +\left[2-\frac{2x(x-r_0)+2y^2}{r\rho}\right]\left(\frac{\mu}{\sigma'+r_0}+\frac{1}{2}h\right).$$

В этом выражении коэффициент при h равен двум; чтобы вычислить коэффициент при μ, заметим, что имеем тождественно

$$2-\frac{2x(x-r_0)+2y^2}{r\rho} = \frac{2\rho r - r^2-\rho^2+r_0^2}{r\rho} = -\frac{(\sigma'+r_0)(\sigma'-r_0)}{r\rho},$$

$$2+\frac{2x(x-r_0)+2y^2}{r\rho} = \frac{2\rho r + r^2+\rho^2-r_0^2}{r\rho} = \frac{(\sigma+r_0)(\sigma-r_0)}{r\rho},$$

откуда найдем, что члены с μ приводятся к $\frac{2\mu}{r}$.

Таким образом, мы убеждаемся, что функция W является интегралом уравнения Якоби (1) с постоянной r_0. Уравнения движения в конечной форме теперь будут

$$\frac{\partial W}{\partial r_0} = k, \quad t-t_0 = \frac{\partial W}{\partial h}. \tag{3}$$

Первое уравнение представляет собою траекторию. Написав его в развернутом виде, найдем:

$$-\frac{x-r_0}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma+r_0}+\frac{1}{2}h}-\frac{x-r_0}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma'+r_0}+\frac{1}{2}h}-$$

$$-\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{\frac{1}{2}\mu\,ds}{(s+r_0)^2\sqrt{\frac{\mu}{s+r_0}+\frac{1}{2}h}}=k,$$

так как σ и σ' зависят от r_0 и

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r_0}=\frac{\partial\rho}{\partial r_0}=-\frac{x-r_0}{\rho},\qquad \frac{\partial\sigma'}{\partial r_0}=-\frac{\partial\rho}{\partial r_0}=\frac{x-r_0}{\rho}.$$

Выражение под знаком интеграла представляет собою производную от

$$-\sqrt{\frac{\mu}{s+r_0}+\frac{1}{2}h},$$

и уравнение траектории после приведений принимает вид

$$\left(1-\frac{x-r_0}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\sigma+r_0}+\frac{1}{2}h}-\left(1+\frac{x-r_0}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\sigma'+r_0}+\frac{1}{2}h}=k. \qquad (4)$$

Приведем это уравнение к такому виду, чтобы оно содержало только расстояния от движущейся точки до двух неподвижных точек O и A. Исходя из тождеств

$$r^2-\rho^2=2xr_0-r_0^2,\quad x-r_0=\frac{r^2-r_0^2-\rho^2}{2r_0},$$

$$1-\frac{x-r_0}{\rho}=\frac{2r_0\rho-r^2+r_0^2+\rho^2}{2\rho r_0}=\frac{(\sigma+r_0)(-\sigma'+r_0)}{2\rho r_0},$$

$$1+\frac{x-r_0}{\rho}=\frac{2r_0\rho+r^2-r_0^2-\rho^2}{2\rho r_0}=\frac{(\sigma-r_0)(\sigma'+r_0)}{2\rho r_0},$$

напишем уравнение

$$\frac{(\sigma+r_0)(\sigma'-r_0)}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma+r_0}+\frac{1}{2}h}+$$

$$+\frac{(\sigma-r_0)(\sigma'+r_0)}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma'+r_0}+\frac{1}{2}h}=k', \qquad (4')$$

где k' — новая постоянная. Это является, следовательно, уравнением траектории в биполярной системе координат с полюсами в точках O и A.

Такой вид уравнения непосредственно показывает, что траектория проходит через точку A, так как, освободившись от знаменателя ρ и положив $\rho=0$, $r=r_0$ и, следовательно, $\sigma=\sigma'=r_0$, мы, очевидно, удовлетворим этому уравнению.

На основании того, что мы знаем о движении планет, это уравнение представляет собою коническое сечение, род которого зависит только от знака постоянной h кинетической энергии (п. 227).

Чтобы вычислить время, затрачиваемое планетой для достижения какой-нибудь точки ее орбиты, достаточно написать второе из уравнений (3), которое на основании значения W представится в виде легко вычисляемой квадратуры

$$t-t_0=\frac{1}{4}\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{ds}{\sqrt{\frac{\mu}{s+r_0}+\frac{1}{2}h}}. \tag{5}$$

Эта формула выражает через радиусы-векторы r и ρ время, отсчитываемое от момента, когда планета проходит через точку A, так как в этой точке $\rho=0$, $\sigma=\sigma'$ и $t-t_0$ обращается в нуль.

В случае параболической орбиты h равно нулю (п. 227). Тогда получается формула, установленная Эйлером, но часто несправедливо приписываемая Ламберту. В этом случае

$$t-t_0=\frac{1}{4\sqrt{\mu}}\int_{\sigma'}^{\sigma}(s+r_0)^{\frac{1}{2}}\,ds=\frac{1}{6\sqrt{\mu}}\left[(\sigma+r_0)^{\frac{3}{2}}-(\sigma'+r_0)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$\sqrt{\mu}\,(t-t_0)=\frac{(r+\rho+r_0)^{\frac{3}{2}}-(r-\rho+r_0)^{\frac{3}{2}}}{6}.$$

Эта формула определяет время, затрачиваемое точкой для перехода из положения A в положение M, выраженное в функции радиусов-векторов r_0 и r точек A и M и хорды $AM=\rho$.

Следует заметить, что в этой формуле перед вторым корнем надо сохранять знак минус до тех пор, пока корень не обратится в нуль, т. е. до тех пор, пока угол AOM остается меньше 180°, так как в треугольнике AOM сторона ρ может стать равной сумме двух других сторон только тогда, когда угол AOM становится равным 180°. После этого нужно изменить знак второго корня. Эта формула играет важную роль в методе Ольберса определения орбит комет (см. Т и с с е р а н, Mècanique célèste т. I, стр. 114). В случае, когда h отлично от нуля, формула (5) после квадратуры представит собою обобщение формулы Эйлера на случай эллиптических и гиперболических орбит, данное впервые Гауссом. (См. Я к о б и, Vorlesungen über Dynamik, лекция 25.)

305. Геодезические линии поверхностей Лиувилля. Приложение к эллипсоиду. Лиувилль заметил, что можно при помощи квадратур найти геодезические линии поверхностей, для которых квадрат линейного элемента, при подходящем выборе параметров q_1 и q_2, может быть представлен в форме

$$ds^2=(A_1-A_2)\left(B_1\,dq_1^2-B_2\,dq_2^2\right),$$

где A_1 и B_1 зависят только от q_1, а A_2 и B_2 — только от q_2. Чтобы получить геодезические линии, достаточно найти траектории материальной точки массы 1, движущейся по поверхности и не подверженной действию никакой силы. Тогда

$$T=\frac{1}{2}(A_1-A_2)\left(B_1q_1'^2-B_2q_2'^2\right),$$

$$p_1=(A_1-A_2)B_1q_1',\quad p_2=-(A_1-A_2)B_2q_2',$$

$$H=T-U=T=\frac{1}{2}\frac{1}{A_1-A_2}\left(\frac{p_1^2}{B_1}-\frac{p_2^2}{B_2}\right).$$

Уравнение Якоби, если в нем положить $V = -ht + W$, будет, следовательно,

$$\frac{1}{B_1}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{1}{B_2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 = 2h(A_1 - A_2),$$

или

$$\frac{1}{B_1}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - 2hA_1 = \frac{1}{B_2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - 2hA_2.$$

Приравняв каждую из этих двух величин одной и той же постоянной 2α, легко получим полный интеграл W, образованный суммой двух функций, из которых одна зависит только от q_1, а другая только от q_2. Этот интеграл есть

$$W = \int \sqrt{2B_1(hA_1 + \alpha)}\, dq_1 + \int \sqrt{2B_2(hA_2 + \alpha)}\, dq_2.$$

Уравнение геодезических линий будет тогда $\dfrac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha'$, а время определится из формулы $t - t_0 = \dfrac{\partial W}{\partial h}$:

$$\int \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{2(hA_1 + \alpha)}}\, dq_1 + \int \frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{2(hA_2 + \alpha)}}\, dq_2 = \alpha', \tag{1}$$

$$t - t_0 = \int \frac{A_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{2(hA_1 + \alpha)}}\, dq_1 + \int \frac{A_2\sqrt{B_2}}{\sqrt{2(hA_2 + \alpha)}}\, dq_2.$$

Так как по теореме кинетической энергии скорость точки постоянна, то

$$ds = \sqrt{2h}\, dt, \quad s - s_0 = \sqrt{2h}\,(t - t_0).$$

Второе соотношение определяет дугу геодезической линии.

Приложим этот метод к эллипсоиду. Пусть

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \tag{2}$$

— уравнение эллипсоида с тремя неравными осями. Рассмотрим софокусные поверхности

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c - \lambda} - 1 = 0.$$

Через каждую точку пространства проходят три такие поверхности, соответствующие трем значениям q_1, q_2, q_3 величины λ (п. 286). В частности, через точку M, взятую на эллипсоиде (2), проходит сам рассматриваемый эллипсоид, соответствующий значению $\lambda = 0$ ($q_3 = 0$), и две другие софокусные поверхности, соответствующие значениям q_1 и q_2 величины λ. Мы примем эти два параметра q_1 и q_2 за координаты точки M на поверхности. Согласно теореме Дюпена, кривые $q_1 = \text{const.}$ и $q_2 = \text{const.}$ являются линиями кривизны эллипсоида. Для величины ds^2 в эллиптических координатах мы нашли ранее (п. 286) выражение вида

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left(M_1\, dq_1^2 + M_2\, dq_2^2 + M_3\, dq_3^2\right).$$

Так как сейчас $q_3 = 0$, то $dq_3 = 0$. Тогда, заменяя M_1 и M_2 их значениями при $q_3 = 0$, получим

$$ds^2 = \frac{q_1 - q_2}{4}\left[\frac{q_1\, dq_1^2}{(a - q_1)(b - q_1)(c - q_1)} - \frac{q_2\, dq_2^2}{(a - q_2)(b - q_2)(c - q_2)}\right].$$

Эта величина ds^2 действительно имеет форму, данную Лиувиллем, причем

$$A_1 = \frac{q_1}{4}, \qquad A_2 = \frac{q_2}{4},$$

$$B_1 = \frac{q_1}{(a-q_1)(b-q_1)(c-q_1)}, \quad B_2 = \frac{q_2}{(a-q_2)(b-q_2)(c-q_2)}.$$

Подставляя эти значения в общие уравнения (1), получим уравнение геодезических линий и дуги этих кривых в форме, данной Якоби. Эти уравнения содержат ультраэллиптические интегралы. Вейерштрасс дал обращение этих интегралов, выразив q_1 и q_2 в виде однозначных функций некоторого параметра.

Более подробные сведения о поверхностях Лиувилля можно найти в «Leçons sur la Théorie générale des surfases» Дарбу (часть 3, глава I) и в премированной работе Кёнигса (Savants étrangers, 1894).

IV. Движение в пространстве

306. Движение планеты в сферических координатах по Якоби («Vorlesungen», лекция 24). Примем за плоскость xy плоскость эклиптики, за ось x — прямую, соединяющую Солнце с точкой весеннего равноденствия, и определим положение планеты ее сферическими координатами r, φ, ψ, где ψ — долгота планеты, а φ — ее широта (рис. 177a). Оси ориентированы, как в астрономии. Переменные r, φ, ψ играют роль параметров q_1, q_2, q_3.

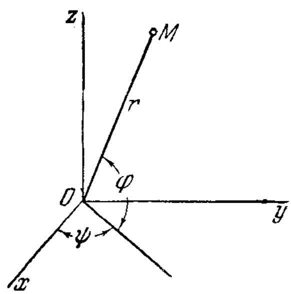


Рис. 177а.

Для силовой функции имеем $U = \frac{\mu}{r}$, причем масса планеты принята равной единице. Из выражения ds^2 в сферических координатах непосредственно имеем

$$T = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\psi'^2\cos^2\varphi).$$

Далее

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = r', \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = r^2\varphi',$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = r^2\psi'\cos\varphi.$$

Подставляя найденные отсюда значения r', φ', ψ' в T, получим

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2\cos^2\varphi}\right) - \frac{\mu}{r}.$$

Следовательно, уравнение с частными производными для W будет

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right] = \frac{\mu}{r} + h. \qquad (1)$$

Для данного частного вида уравнения (1) можно найти полный интеграл в виде

$$W = R + \Phi + \Psi,$$

где R, Φ, Ψ являются соответственно функциями переменных r, φ, ψ.

Для того чтобы W удовлетворяло уравнению (1), необходимо, чтобы было

$$\frac{1}{2}\left(R'^2 + \frac{1}{r^2}\Phi'^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\Psi'^2\right) = \frac{\mu}{r} + h.$$

Это уравнение после выделения членов с r можно написать таким образом:

$$\Phi'^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\Psi'^2 = r^2\left(2h + \frac{2\mu}{r} - R'^2\right).$$

Левая часть зависит только от φ и ψ, а правая только от r; следовательно, это равенство возможно лишь в том случае, когда каждая часть в отдельности равна одной и той же постоянной величине G^2, так как в уравнении (1) переменные r, φ, ψ независимы. Следовательно, имеем

$$R'^2 = 2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}, \quad R = \int\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}\,dr$$

и

$$\Phi'^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\Psi'^2 = G^2$$

или

$$\Psi'^2 = (G^2 - \Phi'^2)\cos^2\varphi.$$

Повторяя те же рассуждения, что и выше, мы увидим, что обе части последнего равенства должны в отдельности равняться одной постоянной L^2, вследствие чего

$$\Psi' = L, \quad \Psi = L\psi$$

и

$$\Phi'^2 = G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}, \quad \Phi = \int\sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi.$$

Таким образом, полный интеграл уравнения (1) есть

$$W = \int\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}\,dr + L\psi + \int\sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi$$

и конечные уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial G} = C, \quad \frac{\partial W}{\partial L} = \psi_0, \quad \frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0,$$

т. е.

$$-G\int^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} + G\int^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}} = C, \tag{I}$$

$$\psi - L\int^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}} = \psi_0, \tag{II}$$

$$\int^{r}\frac{dr}{\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} = t - t_0. \tag{III}$$

Два первых уравнения, не содержащих t, определяют траекторию. Чтобы дополнить решение, укажем на смысл входящих в эти формулы постоянных.

Мы знаем, что для планеты орбита является эллиптической; наибольший и наименьший радиусы-векторы, соответствующие афелию и перигелию, равны $a(1+e)$ и $a(1-e)$; с другой стороны, уравнение (III) показывает, что

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}.$$

Следовательно, корни подкоренного выражения должны соответствовать максимуму и минимуму радиуса-вектора; поэтому эти корни равны $a(1+e)$ и $a(1-e)$ и на основании зависимости между корнями и коэффициентами получаем

$$h = \frac{-\mu}{2a}, \quad G^2 = \mu a(1-e^2) = \mu p, \quad G = \sqrt{\mu p}.$$

Найдем теперь смысл величины L. Для того чтобы из уравнения (II) можно было получить вещественное значение для ψ, когда задана функция φ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi} \geqslant 0$$

и для каждого значения φ, удовлетворяющего этому условию, соответствующее значение φ, определяемое из уравнения (I), должно быть обязательно вещественным, так как орбита является вещественным эллипсом. Поэтому φ имеет верхний предел $\arccos\frac{L}{C}$ и может этого предела достигать. Но, очевидно, что наибольшим значением угла φ является угол i между плоскостью орбиты и плоскостью эклиптики, и мы должны иметь

$$\frac{L}{G} = \cos i, \quad L = \sqrt{\mu p}\cos i.$$

Нам нужно теперь установить нижние пределы интегралов. Мы примем для этих пределов $r = a(1-e)$, что соответствует перигелию, и $\varphi = 0$, что соответствует узлу N. Тогда уравнение (III) показывает, что t_0 есть время прохождения через перигелий, а уравнение (II), — что ψ_0 есть долгота узла.

Для вычисления C допустим, что планета находится в перигелии. Тогда уравнение (I) обратится в следующее:

$$G\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}} = C,$$

где φ_1 — широта перигелия. Принимая во внимание соотношение $L = G\cos i$, мы можем написать

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 i}} = C$$

или, интегрируя,

$$\arcsin\left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin i}\right) = C, \quad \sin\varphi_1 = \sin i \sin C.$$

Пусть N и P (рис. 177б) являются точками пересечения радиусов-векторов восходящего узла и перигелия со сферой радиуса 1, имеющей центр в точке O, а $PQ = \varphi_1$ — широта перигелия. В треугольнике NPQ имеем

$$\sin\varphi_1 = \sin NP \sin i.$$

что показывает, что C равно NP, т. е. углу между радиусами-векторами перигелия и восходящего узла.

307. Движение точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами, обратно пропорционально квадрату расстояния. Задача движения точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами с силой обратно пропорциональной квадрату расстояния, была впервые приведена к квадратурам Эйлером для случая плоского движения. Лагранж дал общее решение, которое Якоби связал с методами интегрирования, излагаемыми в этой главе. Эллиптические квадратуры, встречающиеся в интегралах, дали Лежандру важный пример для приложения его теории эллиптических интегралов.

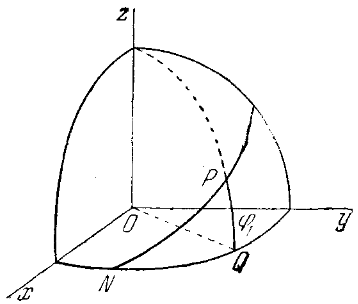


Рис. 177б.

Этому же вопросу посвящены диссертации Серре, Дебова и Андраде*) (во Франции) и работа Кёнигсбергера (в Германии), озаглавленная «De motu puncti versus duo centra attracti» (Берлин, 1860) и содержащая приведение эллиптических интегралов к функциям Θ.

Примем за ось Ox (рис. 178) прямую, соединяющую оба притягивающих центра O_1 и O_2, за начало координат — точку, лежащую посредине между ними, и обозначим через $2c$ расстояние O_1O_2. Пусть Oy_1 и Oz_1 — две другие неподвижные оси, образующие с осью Ox прямоугольный триедр. Для определения положения в пространстве движущейся точки M введем сначала угол θ, который образует плоскость MO_1O_2, проведенная через движущуюся точку и ось Ox, с плоскостью xOy_1; этот угол измеряется углом между осью Oy_1 и следом Oy плоскости MO_1O_2 на плоскости y_1Oz_1.

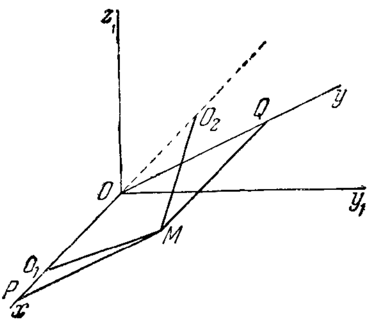


Рис. 178.

Определив таким образом плоскость yOx, мы обозначим для фиксирования положения движущейся точки на этой плоскости через x и y ее декартовы координаты OP и OQ относительно осей xOy и через q_1 и q_2 ее эллиптические координаты в той же плоскости, определенные системой софокусных конических сечений с фокусами O_1 и O_2 (п. 287). Координаты точки M относительно неподвижных осей суть x, y_1, z_1, и мы имеем

$$y_1 = y \cos \theta, \quad z_1 = y \sin \theta.$$

Отсюда для квадрата линейного элемента получаем

$$ds^2 = dx^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + y^2 \, d\theta^2.$$

Если мы теперь воспользуемся для определения положения точки (x, y) в плоскости xOy эллиптическими координатами q_1 и q_2, являющимися корнями уравнения

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} - 1 = 0 \qquad (a - b = c^2),$$

*) Andrade, Journal de l'École Polytéchnique, вып. 60, 1890.

то по установленным ранее формулам (п. 287)

$$x^2 = -\frac{(a-q_1)(a-q_2)}{b-a}, \quad y^2 = -\frac{(b-q_1)(b-q_2)}{a-b},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{1}{4}\left(N_1 dq_1^2 + N_2 dq_2^2\right),$$

имеем:

$$N_1 = \frac{q_2 - q_1}{f(q_1)}, \quad N_2 = \frac{q_1 - q_2}{f(q_2)}, \quad f(\lambda) = (a-\lambda)(b-\lambda).$$

Следовательно, в рассматриваемой системе координат квадрат линейного элемента равен

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left(N_1\, dq_1^2 + N_2\, dq_2^2\right) + y^2\, d\theta^2,$$

где N_1, N_2 и y^2 должны быть заменены их выражениями через q_1 и q_2, написанными выше.

Примем массу точки за единицу. Тогда кинетическая энергия будет

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(N_1 q_1'^2 + N_2 q_2'^2\right) + \frac{1}{2} y^2 \theta'^2,$$

где θ и θ' играют роль параметров q_3 и q_3'. Если через r_1 и r_2 обозначить расстояние от движущейся точки до обоих фокусов, то алгебраические значения сил притяжения со стороны этих фокусов равны $-\frac{\mu_1}{r_1^2}$ и $-\frac{\mu_2}{r_2^2}$, а сумма их элементарных работ $\frac{\mu_1}{r_1^2}\delta r_1 - \frac{\mu_2^2}{r_2^2}\delta r_2$ есть полный дифференциал силовой функции

$$U = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}.$$

Но так как квадрат большой полуоси эллипса, проходящего через точку M, равен $a - q_1$, то сумма $r_1 + r_2$ расстояний от точки M до обоих фокусов будет

$$r_1 + r_2 = 2\sqrt{a - q_1}.$$

Точно так же квадрат поперечной полуоси гиперболы, проходящей через точку M, равен $a - q_2$, и мы имеем

$$r_1 - r_2 = 2\sqrt{a - q_2},$$

откуда

$$r_1 = \sqrt{a-q_1} + \sqrt{a-q_2}, \quad r_2 = \sqrt{a-q_1} - \sqrt{a-q_2}.$$

После приведения к общему знаменателю, получим

$$U = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = \frac{U_2 - U_1}{q_2 - q_1},$$

где для краткости положено

$$U_1 = -(\mu_1 + \mu_2)\sqrt{a - q_1}, \quad U_2 = -(\mu_1 + \mu_2)\sqrt{a - q_2},$$

так что U_1 зависит только от q_1, а U_2 — только от q_2, что весьма существенно для дальнейшего. Вспомогательные переменные p_1, p_2, p_3 равны здесь частным производным от T по q_1', q_2' и θ':

$$p_1 = \frac{1}{4} N_1 q_1', \quad p_2 = \frac{1}{4} N_2 q_2', \quad p_3 = y^2\theta'.$$

Разрешая эти уравнения относительно q_1', q_2' и θ' и подставляя затем в функцию Гамильтона $H = T - U$, получим

$$H = \frac{2p_1^2}{N_1} + \frac{2p_2^2}{N_2} + \frac{p_3^2}{2y^2} - \frac{U_2 - U_1}{q_2 - q_1}.$$

Заменяя N_1, N_2 и y^2 их значениями в функции q_1 и q_2 и замечая, что можно написать

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{a-b}{(b-q_1)(b-q_2)} = \frac{a-b}{q_2-q_1}\left(\frac{1}{b-q_1} - \frac{1}{b-q_2}\right),$$

мы представим окончательно функцию H в виде

$$H = \frac{1}{q_2-q_1}\left[2f(q_1)p_1^2 - 2f(q_2)p_2^2 + \frac{a-b}{2}\left(\frac{1}{b-q_1} - \frac{1}{b-q_2}\right)p_3^2 - U_2 + U_1\right].$$

Теперь легко написать уравнение Якоби; мы напишем сразу уравнение для W, получающееся, как и раньше (стр. 481), путем подстановки $V = -ht + W$:

$$-h + \frac{1}{q_2-q_1}\left[2f(q_1)\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - 2f(q_2)\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{a-b}{2}\left(\frac{1}{b-q_1} - \frac{1}{b-q_2}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - U_2 + U_1\right] = 0.$$

Можно найти полный интеграл вида

$$W = \alpha\theta + R_1 + R_2,$$

где R_1 зависит только от q_1, а R_2 — только от q_2. Действительно, подставляя в предыдущее равенство это выражение W и освобождаясь от знаменателей, мы получим для определения R_1 и R_2 уравнение, которое можно написать в виде

$$hq_1 + 2f(q_1)\left(\frac{dR_1}{dq_1}\right)^2 + \frac{(a-b)\alpha^2}{2(b-q_1)} + U_1 =$$
$$= hq_2 + 2f(q_2)\left(\frac{dR_2}{dq_2}\right)^2 + \frac{(a-b)\alpha^2}{2(b-q_2)} + U_2,$$

где правая часть зависит только от q_1, а левая часть — только от q_2. Так как в уравнении с частными производными параметры q_1 и q_2 являются независимыми переменными, то единственный способ, которым можно удовлетворить этому последнему соотношению, не устанавливая зависимости между q_1 и q_2, заключается в приравнивании каждой части в отдельности одной и той же постоянной 2β. Разрешим после этого полученные таким образом уравнения относительно $\frac{dR_1}{dq_1}$ и $\frac{dR_2}{dq_2}$. Тогда, полагая

$$2S_1 = 2\beta - hq_1 - \frac{(a-b)\alpha^2}{2(b-q_1)} - U_1,$$

$$2S_2 = 2\beta - hq_2 - \frac{(a-b)\alpha^2}{2(b-q_2)} - U_2,$$

мы получим

$$dR_1 = \sqrt{\frac{S_1}{f(q_1)}}\,dq_1, \quad dR_2 = \sqrt{\frac{S_2}{f(q_2)}}\,dq_2.$$

Эти выражения определяют R_1 и R_2 в квадратурах и для искомого полного интеграла получается выражение

$$W = \alpha\theta + \int \sqrt{\frac{S_1}{f(q_1)}}\,dq_1 + \int \sqrt{\frac{S_2}{f(q_2)}}\,dq_2$$

с тремя произвольными постоянными α, β и h, из которых ни одна не является аддитивной. Для получения траекторий нужно теперь приравнять постоянным α' и β' частные производные от W по α и β:

$$\left.\begin{aligned} &\theta - (a-b)\,\alpha \int \frac{dq_1}{4(b-q_1)\sqrt{S_1 f(q_1)}} - \\ &\quad - (a-b)\,\alpha \int \frac{dq_2}{4(b-q_2)\sqrt{S_2 f(q_2)}} = \alpha', \\ &\int \frac{dq_1}{\sqrt{S_1 f(q_1)}} + \int \frac{dq_2}{\sqrt{S_2 f(q_2)}} = \beta'. \end{aligned}\right\} \qquad (T)$$

Второе из этих уравнений, устанавливающее соотношение между q_1 и q_2, представляет относительную траекторию в движущейся плоскости xOy; первое уравнение определяет угол вращения этой плоскости. Чтобы получить время, приравняем частную производную от W по h разности $t - t_0$:

$$-\frac{1}{4}\int \frac{q_1\,dq_1}{\sqrt{S_1 f(q_1)}} - \frac{1}{4}\int \frac{q_2\,dq_2}{\sqrt{S_2 f(q_2)}} = t - t_0.$$

Таким образом, задача приведена к квадратурам. Эти квадратуры являются эллиптическими, как в этом можно убедиться, полагая $q_1 - a = s_1^2$ и $q_2 - a = s_2^2$, так чтобы S_1 и S_2 стали рациональными относительно s_1 и s_2.

Что касается выражений для вспомогательных переменных p_1, p_2, p_3, то для их нахождения нужно взять частные производные от W по q_1, q_2, θ:

$$p_1 = \sqrt{\frac{S_1}{f(q_1)}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{S_2}{f(q_2)}}, \quad p_3 = \alpha.$$

Последняя формула выясняет смысл постоянной α. В самом деле, из уравнения, определяющего p_3, мы имели $p_3 = y^2\theta'$ (стр. 874). Следовательно, интеграл $p_3 = \alpha$ дает

$$y^2\theta' = \alpha,$$

что выражает возможность применения закона площадей к проекции движения на плоскость y_1Oz_1, так как y и θ являются полярными координатами проекции движущейся точки на эту плоскость. Это обстоятельство можно было предвидеть заранее, так как силы, действующие на точку, пересекают ось Ox.

В частном случае, когда начальная скорость точки пересекает ось Ox, траектория будет, очевидно, находиться в плоскости $M_1O_1O_2$, определяемой начальным положением точки и обоими притягивающими центрами. В этом можно убедиться и из уравнений. В самом деле, постоянная α будет в этом случае равна нулю и первое из уравнений (T) траектории обратится в следующее:

$$\theta = \alpha'.$$

Это показывает, что плоскость yOx останется неподвижной. Второе из уравнений (T) определит траекторию в эллиптических координатах.

Интегрирование уравнения Эйлера. Допустим, что не только $\alpha=0$, но и $\mu_1=\mu_2=0$. Тогда плоскость yOx будет неподвижной, траектория будет плоской и так как сил нет, то эта траектория будет прямой линией на плоскости yOx. При этих предположениях второе из уравнений (T) после замены $f(q_1)$ и $f(q_2)$ их выражениями примет вид

$$\int\frac{dq_1}{\sqrt{(2\beta-hq_1)(a-q_1)(b-q_1)}}+\int\frac{dq_2}{\sqrt{(2\beta-hq_2)(a-q_2)(b-q_2)}}=\beta'. \quad (E)$$

Следовательно, это уравнение представляет прямую, и оно может быть отождествлено с уравнением прямой линии в эллиптических координатах, которое будет, очевидно, алгебраическим относительно q_1 и q_2. Таким путем мы воспроизвели, следуя Лагранжу, очень важный результат, данный Эйлером и выражающий, что уравнение (E) допускает алгебраический интеграл. На этом результате основывается сложение эллиптических функций.

Примечание. Таким же путем можно привести к квадратурам задачу о движении точки, находящейся под действием сил, которые в примененных нами координатах имеют силовую функцию вида

$$\frac{U_1-U_2}{q_1-q_2},$$

где U_1 — произвольная функция только переменного q_1, а U_2 — функция только переменного q_2. Например, эта форма силовой функции сохранится, если к предыдущим силам (притяжениям к неподвижным центрам O_1 и O_2 по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния) присоединить силу притяжения к точке O, пропорциональную расстоянию, силу притяжения, перпендикулярную к плоскости y_1Oz_1 и обратно пропорциональную кубу расстояния x, и силу притяжения, перпендикулярную оси Ox и обратно пропорциональную кубу расстояния y.

Отметим, в заключение, работу Вельде «Ueber einen Specialfall der Bewegung eines Punktes welcher von zwei festen Centren angezogen wird» (Берлин, изд-во Р. Гартнера, 1889) (Bulletin des Sciences mathématiques, 1890 стр. 125). Вельде рассматривает задачу *плоского движения* в предположении что силы притяжения к фокусам O_1 и O_2 равны соответственно $-\frac{\mu_1}{r_1^2}-\mu r_1$, $-\frac{\mu_2}{r_2^2}-\mu r_2$ и что движущаяся точка притягивается центром O пропорционально расстоянию.

308. Эллиптические координаты в пространстве. Мы нашли (п. 286) что

$$T=\frac{1}{8}\left(M_1q_1'^2+M_2q_2'^2+M_3q_3'^2\right).$$

Тогда

$$p_1=\frac{1}{4}M_1q_1',\quad p_2=\frac{1}{4}M_2q_2',\quad p_3=\frac{1}{4}M_3q_3'.$$

Допустим, что силовая функция имеет вид

$$U=\frac{U_1}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)}+\frac{U_2}{(q_2-q_3)(q_2-q_1)}+\frac{U_3}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)},$$

где U_1 — функция одной только переменной q_1, U_2 — функция одной только переменной q_2 и U_3 — только переменной q_3. Имеем

$$H = 2\left(\frac{p_1^2}{M_1} + \frac{p_2^2}{M_2} + \frac{p_3^2}{M_3}\right) - U.$$

Если мы подставим вместо M_1, M_2, M_3 их значения (п. 286), то уравнение для W будет следующее:

$$-h + 2\left[\frac{f(q_1)}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{f(q_2)}{(q_2-q_3)(q_2-q_1)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{f(q_3)}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2\right] - U = 0.$$

Для нахождения полного интеграла этого уравнения при сделанных относительно U предположениях заметим, следуя Якоби, что при любых значениях постоянных α и β выполняется тождество

$$\frac{2\alpha + 2\beta q_1 + hq_1^2}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)} + \frac{2\alpha + 2\beta q_2 + hq_2^2}{(q_2-q_3)(q_2-q_1)} + \frac{2\alpha + 2\beta q_3 + hq_3^2}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)} = h,$$

в чем можно убедиться, написав, что сумма вычетов рациональной относительно q функции

$$\frac{2\alpha + 2\beta q + hq^2}{(q-q_1)(q-q_2)(q-q_3)}$$

равна h. Тогда уравнение для W при замене h этим выражением может быть написано следующим образом:

$$\frac{2f(q_1)\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - 2\alpha - 2\beta q_1 - hq_1^2 - U_1}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)} + \frac{2f(q_2)\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - \ldots - U_2}{(q_2-q_3)(q_2-q_1)} +$$
$$+ \frac{2f(q_3)\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2 - \ldots - U_3}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)} = 0.$$

Это уравнение имеет, очевидно, интеграл

$$W = \int \sqrt{\frac{S_1}{f(q_1)}}\, dq_1 + \int \sqrt{\frac{S_2}{f(q_2)}}\, dq_2 + \int \sqrt{\frac{S_3}{f(q_3)}}\, dq_3,$$

где положено

$$2S_i = 2\alpha + 2\beta q_i + hq_i^2 - U_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Действительно, это выражение для W обращает в нуль каждый из трех членов уравнения с частными производными. Для нахождения траекторий приравняем теперь постоянным α' и β' частные производные от W по α и β:

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{S_1 f(q_1)}} + \int \frac{dq_2}{\sqrt{S_2 f(q_2)}} + \int \frac{dq_3}{\sqrt{S_3 f(q_3)}} = \alpha',$$

$$\int \frac{q_1\, dq_1}{\sqrt{S_1 f(q_1)}} + \int \frac{q_2\, dq_2}{\sqrt{S_2 f(q_2)}} + \int \frac{q_3\, dq_3}{\sqrt{S_3 f(q_3)}} = \beta'.$$

В частном случае, когда нет сил, т. е.

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0,$$

эти уравнения должны представлять прямую линию в пространственных эллиптических координатах. Они эквивалентны двум алгебраическим соотношениям между q_1, q_2, q_3, что составляет первое обобщение результата Эйлера, указанное в конце предыдущего упражнения, и частный случай теоремы Абеля, приложенной к ультраэллиптическим интегралам первого рода. Что касается времени, то мы получим его, приравнивая $t - t_0$ частной производной $\frac{\partial W}{\partial h}$.

В виде упражнения будет показано, что силовая функция принимает вышеуказанную форму, когда на движущуюся точку одновременно действуют притяжение к центру, пропорциональное расстоянию, и притяжения, нормальные к трем главным плоскостям софокусных поверхностей и изменяющиеся в отношении, обратном кубу расстояний.

V. Приложения к принципу наименьшего действия, к брахистохронам, к равновесию нитей

309. Наименьшее действие. Свободная точка. Допустим, что на свободную точку массы 1 действует сила, имеющая силовую функцию $U(x, y, z)$. Мы видели, что если постоянная живых сил h имеет определенное значение, то траектории, проходящие через две заданные точки A и B, являются кривыми, обращающими в нуль вариацию действия

$$\mathcal{A} = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(U+h)}\, ds. \tag{1}$$

Эти траектории легко найти, если известен полный интеграл уравнения Якоби относительно W в произвольной системе координат:

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3\right) - h = 0. \tag{2}$$

Для дальнейшего полезно написать это уравнение в явной форме. Мы видели (п. 293), что T является квадратичной формой от p_1, p_2, p_3:

$$2T = \sum \frac{A_{ik}}{D} p_i p_k \qquad (A_{ik} = A_{ki});$$

кроме того, $H = T - U$. Уравнение Якоби, получающееся заменой p_1, p_2, p_3 производными $\frac{\partial W}{\partial q_1}$, $\frac{\partial W}{\partial q_2}$, $\frac{\partial W}{\partial q_3}$, имеет вид

$$\sum \frac{A_{ik}}{D} \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial q_k} = 2(U+h) \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Пусть теперь $W(q_1, q_2, q_3, \alpha, \beta, h)$ — полный интеграл этого уравнения, а W_0 и W_1 — значения, которые он принимает в точках A и B. Мы знаем, что уравнения траекторий в конечной форме суть

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta' \tag{4}$$

с четырьмя постоянными α, β, α', β'.

Чтобы найти траектории, проходящие через точки A и B, надо определить эти постоянные, подставив в уравнения (4) координаты точек A и B. Тогда будет

$$\frac{\partial W_0}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial W_0}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial W_1}{\partial \beta} = \beta'. \tag{5}$$

Вычитая, получим

$$\frac{\partial (W_1 - W_0)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial (W_1 - W_0)}{\partial \beta} = 0. \tag{6}$$

Эти два последних уравнения определяют α и β, а предыдущие уравнения (5) определяют α' и β'. Каждой системе значений α и β, заданной уравнениями (6), соответствует траектория, проходящая через точки A и B, для которой справедлива следующая замечательная теорема: значение действия вдоль траектории AB определяется формулой

$$\mathcal{A} = W_1 - W_0.$$

В самом деле, найдем, каково будет элементарное приращение dW функции W, соответствующее бесконечно малому перемещению dq_1, dq_2, dq_3, совершаемому по этой траектории. Мы можем предположить, что q_1, q_2, q_3 являются координатами материальной точки, брошенной таким образом, чтобы она описала рассматриваемую траекторию. Тогда

$$dW = \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial W}{\partial q_3} dq_3 \tag{6'}$$

или, подставляя $q_1' dt$, $q_2' dt$, $q_3' dt$ вместо dq_1, dq_2, dq_3 и p_1, p_2, p_3 вместо $\frac{\partial W}{\partial q_1}$, $\frac{\partial W}{\partial q_2}$, $\frac{\partial W}{\partial q_3}$, получим

$$dW = \left(p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3'\right) dt.$$

Так как p_1, p_2, p_3 суть частные производные от T по q_1', q_2', q_3' и так как кинетическая энергия T равна $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, то на основании теоремы об однородных функциях имеем

$$dW = 2T\, dt = \frac{ds}{dt} ds.$$

Но по теореме кинетической энергии скорость $\frac{ds}{dt}$ равна $\sqrt{2(U+h)}$; отсюда

$$dW = \sqrt{2(U+h)}\, ds.$$

Следовательно, значение действия, вычисленного вдоль траектории от A до B, окончательно будет

$$\mathcal{A} = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(U+h)}\, ds = \int_{(A)}^{(B)} dW = W_1 - W_0,$$

что и надо было доказать.

310. Точка на поверхности. Те же заключения справедливы и для движения точки по плоскости или по произвольной неподвижной поверхности, когда существует силовая функция.

Кинетическая энергия будет тогда квадратичной формой относительно q_1', q_2' или относительно p_1, p_2:

$$2T = a_{11} q_1'^2 + 2a_{12} q_1' q_2' + a_{22} q_2'^2 = \frac{1}{D}\left(A_{11} p_1^2 + 2A_{12} p_1 p_2 + A_{22} p_2^2\right), \tag{7}$$

где

$$D = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad A_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = -a_{12}, \quad A_{22} = a_{11};$$

H равно $T-U$ и уравнение Якоби для W будет

$$\frac{1}{D}\left[A_{11}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+2A_{12}\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial W}{\partial q_2}+A_{22}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\right]=2(U+h). \tag{8}$$

Если $W(q_1, q_2, \alpha, h)$ есть полный интеграл, то уравнение траекторий будет $\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\alpha'$ и действие вдоль траектории, идущей от A до B, равно W_1-W_0, причем α определяется уравнением $\frac{\partial(W_1-W_0)}{\partial\alpha}=0$. (Более подробное исследование этих свойств см. в «Leçons sur la Théorie des surfaces» Дарбу, т. II, главы VI и VII).

311. Параболическое движение. Для параболического движения тяжелой точки в вертикальной плоскости мы нашли (п. 302)

$$W=\alpha x-\frac{1}{3g}(2h-\alpha^2-2gy)^{\frac{3}{2}}.$$

Значение действия вдоль одной из двух параболических траекторий, идущих от точки (x_0, y_0) к точке (x_1, y_1), равно

$$\mathcal{A}=\alpha(x_1-x_0)-\frac{1}{3g}\left[(2h-\alpha^2-2gy_1)^{\frac{3}{2}}-(2h-\alpha^2-2gy_0)^{\frac{3}{2}}\right],$$

где α — один из двух корней уравнения

$$x_1-x_0+\frac{\alpha}{g}\left[(2h-\alpha^2-2gy_1)^{\frac{1}{2}}-(2h-\alpha^2-2gy_0)^{\frac{1}{2}}\right]=0. \tag{9}$$

Это уравнение после приведения к рациональному виду будет биквадратным относительно α. После того как одно из значений α^2 будет выбрано, знак величины α определится из уравнения (9), в котором член x_1-x_0 и коэффициент при $\frac{\alpha}{g}$ имеют известные знаки.

312. Брахистохроны и фигуры равновесия нитей в случае силовой функции. Задача рефракции.. Если мы для краткости заменим в предыдущих равенствах $2(U+h)$ величиной φ^2, где φ — функция координат, то увидим, что результаты, полученные для свободной точки, могут быть выражены следующим образом. Кривые, соединяющие две точки A и B и обращающие в минимум интеграл

$$I=\int_{(A)}^{(B)}\varphi\,ds, \tag{10}$$

будут известны, если известен полный интеграл $W(q_1, q_2, q_3, \alpha, \beta)$ уравнения Якоби (3) относительно W, в котором $2(U+h)$ заменено величиной φ^2:

$$\sum\frac{A_{ik}}{D}\frac{\partial W}{\partial q_i}\frac{\partial W}{\partial q_k}=\varphi^2 \qquad (i, k=1, 2, 3). \tag{11}$$

Их уравнения будут

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\alpha', \qquad \frac{\partial W}{\partial\beta}=\beta',$$

и значение интеграла I вдоль одной из этих кривых равно W_1-W_0, причем постоянные α и β вычисляются, как и раньше, при помощи уравнений (6).

Например, в прямоугольных декартовых координатах достаточно знать полный интеграл уравнения

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=\varphi^2.$$

Точно так же, чтобы найти на неподвижной поверхности кривые, соединяющие две точки A и B и обращающие в минимум интеграл I, достаточно иметь полный интеграл $W(q_1, q_2, \alpha)$ уравнения Якоби (8) относительно W, в котором нужно заменить $2(U+h)$ величиной φ^2. Получится уравнение

$$\frac{1}{D}\left[A_{11}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+2A_{12}\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial W}{\partial q_2}+A_{22}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\right]=\varphi^2. \tag{12}$$

Искомые кривые будут тогда иметь уравнение $\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\alpha'$, и интеграл (10) вдоль одной из этих кривых равен W_1-W_0.

Но мы видели, что к нахождению кривых, обращающих в минимум интеграл вида (10), можно свести три следующие задачи:

1) *определение фигуры равновесия нити, свободной или лежащей на поверхности, когда действуют силы, имеющие силовую функцию* (п. 146);

2) *общую задачу рефракции* (п. 150);

3) *определение брахистохрон для точки, свободной или движущейся по поверхности, когда существует силовая функция* (пп. 255 и 257).

Эти задачи могут быть, следовательно, приведены к нахождению полного интеграла уравнения с частными производными вида (11) или (12). Значение интеграла (10) вдоль одной из этих кривых, идущих от A к B, есть W_1-W_0. В частном случае брахистохрон значение этого интеграла определяет время, затрачиваемое точкой для пробега дуги AB брахистохроны. (См. Клебш, Journal de Crelle, т. 57, стр. 93; Аппель, Comptes rendus, 12 марта 1883 и Annales de la Faculté de Toulouse, 1887; Андуайе, Comptes rendus, m. C, стр. 1577; Марколонго, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, июль, 1888.)

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если в канонических уравнениях положить $t=-t'$, то уравнения сохранят ту же форму, но p будут играть роль параметра q и наоборот. Сделать отсюда вывод, что для получения интегралов уравнений движения достаточно знать полный интеграл уравнения с частными производными

$$-\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(p_1, p_2, p_3, \frac{\partial V}{\partial p_1}, \frac{\partial V}{\partial p_2}, \frac{\partial V}{\partial p_3}, t\right)=0$$

и написать интегралы уравнений движения.

2. Тот же вопрос для движения точки по поверхности или по кривой.

3. Применить метод Якоби к следующим примерам.

а) Движение точки, находящейся под действием силы, постоянной по величине и направлению, и силы притяжения к неподвижному центру по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния. Этот случай является предельным для задачи, разобранной в п. 307; достаточно предположить один из притягивающих центров в бесконечности; софокусные конические сечения обратятся тогда в софокусные параболы. (Селлерье, Bulletin des Sciences mathématiques, 1891; Сен-Жермен, Nouvelles Annales, 1892.)

б) Движение сферического маятника.

4. Привести к канонической форме уравнения движения точки по неподвижной или движущейся кривой. Применить затем теорему Якоби. (Достаточно применить общие теоремы, допустив, что параметры сводятся к одному q_1.)

5. Рассмотреть приложение метода Якоби к математическому маятнику.

6. Рассмотреть приложение метода Якоби к задаче п. 260.

В этой задаче, полагая $m=1$, имеем

$$T=\frac{R^2}{2}(\theta'^2+2a\theta'+2a\omega), \qquad a=\omega(1+\cos\theta).$$

Имеется только один параметр θ, играющий роль параметра q_1; кроме того, $U=0$. Нужно положить

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial\theta'}=R^2(\theta'+a),$$

$$H=p_1\theta'-T-U=\frac{R^2}{2}(\theta'^2-2a\omega),$$

или, в функции p_1,

$$H=\frac{R^2}{2}\left[\left(\frac{p_1}{R^2}-a\right)^2-2a\omega\right].$$

Уравнение Якоби будет

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{R^2}{2}\left[\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}-a\right)^2-2a\omega\right]=0.$$

Оно имеет полный интеграл

$$V=R^2\left(-ht+\int a\,d\theta+\int\sqrt{2a\omega+2h}\,d\theta\right)$$

с постоянной h. Тогда уравнение движения будет

$$\frac{dV}{dh}=\text{const.}=-R^2t_0, \qquad t-t_0=\int\frac{d\theta}{\sqrt{2a\omega+2h}}.$$

Из вида a следует, что это уравнение идентично уравнению движения математического маятника.

7. Дана поверхность, линейный элемент которой может быть приведен к форме Лиувилля (п. 305). Обозначим через i угол, который образует в каждой точке определенная геодезическая линия с кривой $q_2=\text{const.}$, проходящей через эту точку. Доказать, что вдоль всей этой линии

$$A_1\sin^2 i+A_2\cos^2 i=\text{const.}$$

(Лиувилль, Journal de Mathématiques, 1844.)

8. Приложить метод п. 305 к нахождению геодезических линий на плоскости, пользуясь эллиптическими координатами на плоскости.

Дифференциальное уравнение геодезических линий (прямых линий) будет в этом случае уравнением Эйлера. Тогда уравнение прямой в эллиптических координатах будет интегралом уравнения Эйлера (Лагранж, см. п. 307). Уравнение, определяющее дугу геодезической линии (305), будет выражать теорему сложения для эллиптических интегралов второго рода. (Дарбу, Leçons sur la Théorie générale des surfaces, т. III, стр. 13.)

9. Приложить метод п. 305 к нахождению геодезических линий сферы, пользуясь эллиптическими координатами на сфере. (См. Дарбу, там же, т. II, стр. 422.) Имеем

$$ds^2=(\cos 2\mu-\cos 2\nu)\left(\frac{d\mu^2}{\cos 2\mu-\cos 2c}+\frac{d\nu^2}{\cos 2c-\cos 2\nu}\right).$$

Формула относительно дуги геодезической линии (большого круга) даст тогда формулу сложения для эллиптических интегралов третьего рода. (Дарбу, там же, т. III, стр. 13.)

10. Приложить метод Якоби к нахождению по п. 312 фигуры равновесия однородной тяжелой цепочки.

11. Пользуясь обозначениями п. 305, доказать, что можно привести к квадратурам задачу движения точки по поверхности Лиувилля, когда силовая функция имеет вид $\frac{U_1 - U_2}{q_1 - q_2}$, где U_1 зависит только от q_1, а U_2 — только от q_2.

Рассмотреть, в частности, движение на эллипсоиде точки, притягиваемой центром пропорционально расстоянию (Якоби). Доказать, что в этом движении давление точки на эллипсоид изменяется пропорционально кубу расстояния от центра до касательной плоскости, проведенной к эллипсоиду в движущейся точке. (Астор, Bulletin des Sciences mathématiques, 1889, стр. 294.)

12. *Метод Эллиота для случая сопротивления, пропорционального скорости.* Мы допустили в предыдущей главе, что составляющие X, Y, Z равнодействующей заданных сил, приложенных к движущейся точке, суть частные производные некоторой функции $U(x, y, z, t)$. Мы обязаны Эллиоту остроумным замечанием, что уравнения движения можно привести к каноническому виду и вследствие этого применить метод Якоби также и в том случае, когда к силе X, Y, Z присоединена сила сопротивления, пропорциональная скорости. Возьмем, например, движение точки массы 1 по неподвижной или движущейся поверхности $f(x, y, z, t) = 0$ под действием силы с проекциями $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ и сопротивления, пропорционального скорости, с проекциями $-k\frac{dx}{dt}$, $-k\frac{dy}{dt}$, $-k\frac{dz}{dt}$ (k — постоянная). Уравнения движения будут

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots \tag{1}$$

Сделаем замену независимой переменной, положив $t' = e^{-kt}$ и, следовательно, приняв t' за новую переменную. Имеем

$$\frac{dx}{dt} = -kt'\frac{dx}{dt'}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = k^2t'\frac{dx}{dt'} + k^2t'^2\frac{d^2x}{dt'^2}$$

и первое уравнение примет вид

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = \frac{1}{k^2t'^2}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\lambda}{k^2t'^2}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Два других уравнения преобразуются аналогичным образом. Следовательно, если положить

$$U'(x, y, z, t') = \frac{1}{k^2t'^2}U(x, y, z, t), \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{k^2t'^2}$$

и

$$t = -\frac{1}{k}\ln t',$$

то уравнения примут вид

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = \frac{\partial U'}{\partial x} + \lambda'\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots \tag{2}$$

т. е. обратятся в уравнения движения точки *без сопротивления среды* на поверхности $f\left(x, y, z, -\frac{1}{k}\ln t'\right)=0$. К этому последнему движению можно применить методы Пуассона, Гамильтона и Якоби. После того, как будут найдены в конечной форме общие интегралы уравнений движения (2), достаточно будет заменить в них t' через e^{-kt}, чтобы получить общие интегралы предложенных уравнений движения (1).

Этот же метод преобразования можно применить, очевидно, к движению свободной точки, или точки, скользящей по неподвижной или движущейся кривой, когда на нее действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости. (Эллиот, Comptes rendus, 1893; Annales de l'École Normale, август, 1893.)

13. Приложить предыдущий метод Эллиота к следующим примерам.

1°. Точка движется по неподвижной поверхности, для которой

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

причем силовая функция равна U и на точку действует пропорциональная скорости V сила сопротивления среды, равная kV.

Ответ. Если $W(u, v, \alpha, \beta)$ — полный интеграл уравнения

$$G\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} + E\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 + (EG-F^2)(2kW-2U)=0,$$

то уравнения движения суть

$$e^{kt}\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha', \quad e^{kt}\frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta'.$$

2°. Точка движется по неподвижной кривой, для которой $ds^2 = E\,du^2$, при сопротивлении среды, равном kV.

Ответ. Если $W(u, \alpha)$ есть интеграл уравнения

$$\frac{1}{E}\left(\frac{dW}{du}\right)^2 + 2kW - 2U = 0,$$

то конечное уравнение движения есть

$$e^{kt}\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha'.$$

3°. Завершить вычисления для случая свободной материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной расстоянию, и подверженной сопротивлению среды, пропорциональному скорости. (Эллиот, Annales de l'École Normale, август, 1893.)

14. *Приведение уравнений равновесия свободной нити к канонической форме.* Пусть дана свободная нить, элемент ds которой находится под действием силы, имеющей проекции $\frac{\partial U}{\partial x}ds$, $\frac{\partial U}{\partial y}ds$, $\frac{\partial U}{\partial z}ds$, где U — заданная функция от x, y, z, s. Если через q_1, q_2, q_3 обозначить координаты x, y, z, а через p_1, p_2, p_3 — величины $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$, то получим $T=\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$. Если, наконец, положить

$$H=U+T=U(q_1, q_2, q_3, s)+\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2},$$

то уравнения равновесия могут быть приведены к канонической форме

$$\frac{dq_\nu}{ds}=\frac{\partial H}{dp_\nu}, \quad \frac{\partial p_\nu}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu=1, 2, 3).$$

Применить к этим уравнениям теорему Якоби. Таким путем получится другое доказательство теоремы Клебша (Journal de Crelle, т. 57). (См. Comptes rendus, т. XCVI, 1883, стр. 688 и статью Марколонго «Rendiconti della R. Academia delle Scienze de Napoli», 1888.)

15. Привести точно так же к канонической форме уравнения равновесия нити, скользящей по поверхности. (Comptes rendus, т. XCVI, 1883, стр. 688.)

16. Доказать, что определитель коэффициентов при q_1', q_2', q_3' в уравнениях (2) п. 292 равен квадрату функционального определителя величин x, y, z, рассматриваемых как функции параметров q_1, q_2, q_3.

17. Материальная точка скользит без трения по поверхности однородного эллипсоида вращения и притягивается элементами этого эллипсоида по закону Ньютона. Найти движение. (Якоби, Crelle, т. 24.)

(По теории притяжения, сила притяжения точки эллипсоидом имеет проекции $X=-fx$, $Y=-fy$, $Z=-gz$, где f и g — постоянные, а ось Oz является осью вращения.

18. Найти движение точки, находящейся под действием ньютоновского притяжения к двум подвижным центрам, описывающим неподвижную окружность таким образом, что они постоянно находятся на двух концах одного и того же диаметра, а движущаяся точка всегда находится в плоскости, определенной этим диаметром и осью окружности. (Дебов, Journal de Liouville, т. XIII_1.)

19. В случае эллиптических координат на плоскости задача интегрирования уравнений движения точки приводится к квадратурам, когда силовая функция имеет вид

$$U=\frac{\begin{vmatrix} 1 & U_1 \\ 1 & U_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & q_1 \\ 1 & q_2 \end{vmatrix}}.$$

В пространстве задача приводится к квадратурам, когда силовая функция имеет вид

$$J=\frac{\begin{vmatrix} 1 & q_1 & U_1 \\ 1 & q_2 & U_2 \\ 1 & q_3 & U_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 \\ 1 & q_2 & q_2^2 \\ 1 & q_3 & q_3^2 \end{vmatrix}},$$

где функции U_1, U_2, U_3 являются каждая функцией соответственно параметров q_1, q_2 и q_3. (Лиувилль, Journal de Liouville, т. XII_1.)

Убедиться, что к этой форме можно привести силовую функцию, обратно пропорциональную степени движущейся точки относительно одной из софокусных поверхностей, например,

$$U = \frac{k}{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1}$$

$\left(\text{получится, что } U_1, U_2, U_3 \text{ равны } \frac{C}{q_1}, \frac{C}{q_2}, \frac{C}{q_3}, \text{ где } C \text{ — постоянная}\right)$. (Bulletin de la Société mathématique de France, т. XIX, стр. 102.)

К этой форме можно привести силовую функцию для точки, скользящей по эллипсоиду и притягиваемой центром пропорционально расстоянию (см. Лиувилль, Journal de Liouville, т. XII); тот же вопрос исследован Шельбахом (Crelle, т. 44, стр. 380).

20. При системе плоских эллиптических координат предполагается, что движущаяся точка находится под действием силы, имеющей силовую функцию $\frac{U_1 - U_2}{q_1 - q_2}$, где U_1 и U_2 зависят соответственно от q_1 и q_2. Во что обратится задача, когда оба фокуса будут неограниченно сближаться до слияния в точке O?

Ответ. Полагая в формуле п. 287 $a = b + \varepsilon$, где ε — бесконечно мало, получим $q_1 = a - \mu\varepsilon$, $q_2 = a - r^2$, $x^2 = \mu r^2$, $y = (1 - \mu) r^2$, $U = \frac{\psi(\mu) - \varphi(r^2)}{r^2}$, где r — радиус-вектор, исходящий из центра. Следовательно, U есть сумма двух членов, из которых один зависит только от r, а второй однороден относительно координат с показателем однородности -2. (Лиувилль, Journal de Liouville, т. XI_1.)

21. Система эллиптических координат и ее предельные случаи являются единственными вещественными системами, допускающими приведение квадрата линейного элемента плоскости к форме Лиувилля

$$ds^2 = [\varphi(\alpha) - \psi(\beta)]\,[\varphi_1(\alpha)\,d\alpha^2 - \psi_1(\beta)\,d\beta^2]$$

(предельными случаями являются: прямоугольные координаты, когда оба фокуса находятся в бесконечности, параболические координаты, когда только один из фокусов находится в бесконечности, и, наконец, полярные координаты, когда оба фокуса сливаются). (Лиувилль, Journal de Liouville, т. XI и XII. См. премированные работы, Comptes rendus, séance publique, декабрь 1892, стр. 1122.)

22. Зная полный интеграл $W(x, y, z, \alpha, \beta, h)$ уравнения с частными производными п. 300, можно всегда вывести из него другой интеграл W' того же уравнения, который обращается в нуль на заданной поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$. (Метод Лагранжа получения общего интеграла из полного.) Если этот интеграл определен, то траектории, нормальные к заданной поверхности, будут нормальны к поверхностям $W' = \text{const.}$, и действие на отрезке одной из этих траекторий между двумя из этих поверхностей будет одинаковым для всех траекторий. (См. Дарбу, Leçons sur la Théorie générale des surfaces, т. II, гл. VI и VII.)

23. В плоском движении силовая функция предполагается вида

$$U = Ax^{\frac{1}{m}} + By^{\frac{1}{n}},$$

где A и B — произвольные постоянные, а m и n — целые числа. Доказать, что уравнение Якоби для W имеет полный интеграл, алгебраический относительно x и y.

Вывести отсюда, что можно получить бесконечное число ортогональных алгебраических систем, включающих в себя и заданную алгебраическую кривую (Дарбу, Leçons sur la Théorie générale des surfaces, т. II, гл. VI, п. 549).

24. *Теорема о произвольном решении W уравнения с частными производными Якоби.*

Пусть $W(x, y, z)$ — произвольное решение уравнения с частными производными, содержащее или не содержащее постоянных. Кривые, нормальные к поверхностям

$$W(x, y, z) = \text{const.},$$

являются траекториями, которые получатся, если точку поместить в произвольном месте одной из поверхностей, например $W = 0$, и пустить ее нормально к поверхности с такой скоростью, чтобы постоянная кинетической энергии имела определенное значение h.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ