

В. С. Анищенко

ЗНАКОМСТВО  
С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ

*Лекции соросовского профессора*

Институт компьютерных исследований  
2002

УДК 537.86  
ББК 22.33

---

Интернет-магазин

**MANIFESTS**

<http://shop.rcdf.ru>

- физика
  - математика
  - биология
  - техника
- 

**A67 Анищенко В.С.**

Знакомство с нелинейной динамикой: Лекции соросовского профессора: Учеб. пособие. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 144 с.

В учебном пособии приведены тексты девяти лекций, написанных автором по программе “Соросовские профессора”. Лекции посвящены фундаментальным основам нелинейной динамики систем с конечным числом степеней свободы. Рассматриваются и анализируются понятия динамической системы, устойчивости и бифуркаций, детерминированного хаоса, синхронизации, стохастического резонанса. Обсуждаются проблемы диагностики и реконструкции динамических систем по экспериментальным данным.

Пособие ориентировано на студентов, дипломников и аспирантов естественно-научных специальностей университетов.

*Издание осуществлено при частичной поддержке  
гранта CRDF REC-006*

**ISBN 5-93972-116-8**

© В.С. Анищенко, 2002

© Оформление Д.В. Соколов, 2002

© Институт компьютерных исследований, 2002

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>6</b>
<b>Лекция 1. Динамические системы</b>	<b>10</b>
Введение . . . . .	11
Динамическая система и ее математическая модель . . . . .	11
Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений . . . . .	13
Классификация динамических систем . . . . .	14
Колебательные системы и их свойства . . . . .	15
Фазовые портреты типовых колебательных систем . . . . .	17
Автоколебательные системы . . . . .	22
Регулярные и странные аттракторы динамических систем . . . . .	24
Заключение . . . . .	26
<b>Лекция 2. Устойчивость, бифуркации, катастрофы</b>	<b>27</b>
Введение . . . . .	28
Линейный анализ устойчивости . . . . .	29
Бифуркации динамических систем . . . . .	31
“Мягкие” и “жесткие” бифуркации. Катастрофы . . . . .	34
Заключение . . . . .	36
<b>Лекция 3. Детерминированный хаос</b>	<b>37</b>
Введение . . . . .	38
Детерминированность . . . . .	38
Хаос . . . . .	39
Устойчивость и неустойчивость . . . . .	40
Нелинейность . . . . .	41
Неустойчивость и нелинейное ограничение . . . . .	41

Детерминированный хаос . . . . .	43
Перемешивание . . . . .	44
Вероятностные свойства детерминированных систем . . . . .	47
Детерминированный хаос — математическая экзотика... . . . .	47
Странные аттракторы . . . . .	49
Выводы . . . . .	50
<b>Лекция 4. Гиперболические аттракторы... . . . .</b>	<b>51</b>
Введение . . . . .	52
Что такое аттрактор? . . . . .	53
Регулярные аттракторы . . . . .	54
Странные (хаотические) аттракторы . . . . .	55
Грубые гиперболические аттракторы . . . . .	55
Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Ло- ренца . . . . .	58
Заключение . . . . .	64
<b>Лекция 5. Аттракторы негиперболических динамических систем . . . . .</b>	<b>65</b>
Введение . . . . .	66
Квазиаттракторы и их свойства . . . . .	66
Странные нехаотические и хаотические нестранные . . . . .	73
Хаотические нестранные аттракторы . . . . .	74
Странные нехаотические аттракторы . . . . .	75
Заключение . . . . .	78
<b>Лекция 6. Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью . . . . .</b>	<b>80</b>
Введение . . . . .	81
Общие уравнения генераторов с 1.5 степенями свободы . . . . .	82
Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью . . . . .	84
Заключение . . . . .	91
<b>Лекция 7. Синхронизация колебаний . . . . .</b>	<b>92</b>
Введение . . . . .	93
Синхронизация периодических колебаний... . . . .	93
Синхронизация генератора Ван дер Поля в присутствии шума... . . . .	100
Синхронизация сердечного ритма . . . . .	101
Заключение . . . . .	105

---

<b>Лекция 8. Стохастический резонанс и стохастическая...</b>	<b>106</b>
Введение . . . . .	107
Механизм СР . . . . .	109
СР для сложных сигналов . . . . .	112
Явление стохастической синхронизации . . . . .	112
СР и СС как явления самоорганизации . . . . .	114
Заключение . . . . .	115
<b>Лекция 9. Динамический хаос и диагностика в биологии</b>	<b>116</b>
Введение . . . . .	117
Количественные характеристики хаотических сигналов . . . . .	119
Динамические болезни . . . . .	121
Моделирование динамики сердечного ритма . . . . .	122
Степень хаотичности как критерий диагностики . . . . .	125
Заключение . . . . .	128
<b>Лекция 10. Реконструкция динамических систем</b>	<b>129</b>
Введение . . . . .	130
Определение размерности вложения и реконструкция... . . . .	133
Реконструкция динамической системы . . . . .	135
Пример реконструкции динамической системы . . . . .	137
Заключение . . . . .	140
<b>Заключение</b>	<b>141</b>
<b>Литература</b>	<b>142</b>

# Предисловие

Настоящая книга представляет собой введение в круг основных понятий и проблем, составляющих предмет изучения новой специальной дисциплины — *нелинейной динамики*. Знакомство с нелинейной динамикой предполагает определенные знания общих курсов физики и математики по программе высших учебных заведений. Поэтому книга в первую очередь ориентирована на студентов естественных специальностей университетов, изучающих основы теории колебаний, теории динамических систем, теорию устойчивости и бифуркаций, основы информатики и математического моделирования. Перечисленные дисциплины включены в качестве разделов в более общую теорию самоорганизации или синергетику. В связи с привлечением и использованием идей синергетики в различных областях как естественных, экономических, так и гуманитарных наук, книга будет полезна студентам, изучающим биологию, химию, экономику, экологию, социологию, менеджмент и другие дисциплины. Это обусловлено фундаментально общими закономерностями, с которыми приходится иметь дело при математическом моделировании соответствующих систем и процессов в указанных областях знаний.

Перед студентами высшей школы на третьем курсе неизбежно возникает важная проблема выбора конкретной специализации в рамках общей специальности. От того, какое именно научное направление специализации предпочтет и посвятит ему оставшиеся два-три года учебы в вузе студент, зависит очень многое. Нередко принятое молодым человеком решение определяет всю его дальнейшую судьбу, делает его счастливым или неудовлетворенным в профессиональной жизни. Поэтому к принятию решения о выборе научной специализации необходимо подходить ответственно. Настоящая книга как учебное пособие по нелинейной динамике поможет студентам более осознанно остановить свой выбор на специализации в этой области.

Несколько слов об истории создания этой книги. Она включает десять лекций, которые были написаны в период 1995–2000 гг. для “Соросовского образовательного журнала” в соответствии с требованиями программы “Соросовские профессора”. Лекции я читал школьным учителям на конференциях соросовских учителей, абитуриентам и студентам физического факультета СГУ. Получилось так, что лекции выстроены в некий взаимосвязанный цикл, являющийся введением в основные проблемы нелинейной динамики. И я решил их опубликовать без каких-либо изменений и дополнений. Хочу поблагодарить руководство программы “Соросовские профессора” за разрешение на публикацию лекций, так как авторские права на их использование принадлежат Международному Фонду Дж. Сороса.

Очень кратко о содержании лекций. Нелинейная динамика — это наука, изучающая структуру и свойства эволюционных процессов в нелинейных динамических системах. Особенностью, присущей исключительно нелинейным системам, является возможность реализации в них множества различных режимов функционирования, которые зависят от начального состояния, параметров системы и внешних воздействий. В частности, в нелинейных системах возможны режимы детерминированного хаоса в виде незатухающих апериодических колебаний, напоминающих случайный процесс. Интерес к изучению свойств нелинейных систем главным образом обусловлен тем, что реальный мир, окружающая нас природа и общество в своем существовании и развитии подчиняются нелинейным законам. Линейные закономерности также имеют место, однако они представляют собой лишь частный случай (или приближение) более общих нелинейных законов.

Первая лекция посвящена динамическим системам. Понятие динамической системы в математическом смысле слова является основой моделирования, а значит, и предсказания эволюции состояния во времени. Задача предсказания будущего по известному настоящему является основной задачей науки вообще и нелинейной динамики в частности. Одним из замечательных свойств нелинейных систем является смена режимов их функционирования при изменении управляющих параметров. Системы демонстрируют бифуркации и катастрофы. Один режим теряет устойчивость, гибнет, ему на смену приходит другой и т.д. На языке математики описание этих свойств динамических систем дается теорией устойчивости и бифуркаций, описываемой во второй лекции. В нелинейных динамических системах, как было установлено сравнительно недавно, возможны режимы колебаний, близкие по характеристикам к случайным процессам. Описанию фундаментального явления

детерминированного хаоса посвящена третья лекция. В четвертой и пятой лекциях обсуждается важное понятие аттрактора нелинейной диссипативной динамической системы как математического образа установившегося режима ее функционирования. Если периодическим автоколебаниям в классической теории отвечает математический образ в виде предельного цикла Пуанкаре, то общее понятие аттрактора служит образом любого режима установившихся колебаний. Структура и свойства аттрактора определяют соответствующие свойства автоколебательных процессов нелинейной динамической системы. В шестой лекции последовательно выводятся уравнения модифицированного генератора с инерционной нелинейностью, который вот уже более 20 лет служит одной из базовых моделей хаоса в автономных системах. Уравнения генератора базируются на классических моделях Ван дер Поля и К. Теодорчика, являются физически обоснованными, что позволяет использовать эту систему не только в численных, но в радиофизических экспериментах. Седьмая лекция посвящена описанию одного из фундаментально важных нелинейных эффектов — синхронизации колебаний. Показано, что принципиальные свойства феномена синхронизации в равной степени демонстрируют простейший физический генератор и сложнейшая в природе сердечно-сосудистая система организма человека. Одним из замечательных свойств нелинейных систем является их возможность улучшать характеристики или демонстрировать принципиально новые качества при воздействии шума. Восьмая лекция иллюстрирует ряд интересных свойств нелинейных систем, индуцированных внешним шумовым воздействием на систему. Рассмотрены явления стохастического резонанса и стохастической синхронизации. Изучение сложных колебательных процессов в нелинейных системах, включая режимы детерминированного хаоса, потребовало от исследователей введения совокупности новых характеристик как динамических, так и статистических для их описания и классификации. Учитывая, что реальные колебательные процессы в живых системах далеки от регулярных, естественно было применить накопленный опыт анализа характеристик хаотических колебаний для диагностики сигналов медико-биологической природы. Этому кругу вопросов посвящена девятая лекция. И, наконец, в десятой лекции обсуждается проблема реконструкции динамических систем по экспериментальным данным. Предлагаются новые современные методы решения классической задачи восстановления модельной динамической системы по одномерной реализации процесса во времени.

Учитывая реальные сложности в обеспечении научных библиотек современной специальной литературой, в книге приводятся ссылки



на минимальное число статей и книг, которые имеются в библиотеках. Заинтересованному читателю можно порекомендовать монографию В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасовой, В. В. Астахова “Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем” (Изд-во Саратов. ун-та, 1999 г.). В указанной монографии каждой из лекций настоящей книги соответствует подробная глава с достаточно полной библиографией.

В заключение хочу отметить, что материалы лекций, представленных в учебном пособии, базируются не только на достижениях мировой науки в этой области, но и включают результаты оригинальных исследований лаборатории нелинейной динамики СГУ за последние пятнадцать лет. Всем сотрудникам лаборатории я хотел бы выразить искреннюю благодарность. Особо хочу поблагодарить А. В. Климшина и Г. И. Стрелкову за большой труд по подготовке рукописи к печати.

*Профессор В. С. Анищенко*

# Лекция 1

## Динамические системы

*В лекции дается математическое определение понятия динамической системы. На примере динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, иллюстрируются все четыре типа решений: состояние равновесия, устойчивое периодическое решение, квазипериодическое и хаотическое решения. Вводится понятие странного аттрактора, обсуждаются основные свойства регулярных и хаотических решений.*

*In this lecture a mathematical definition of a dynamical system is formulated. Using dynamical systems, which are described by ordinary differential equations, all of four types of solutions: an equilibrium state, a stable periodic solution, quasiperiodic and chaotic solutions — are illustrated. A definition of a strange attractor is introduced, fundamental properties of periodic and chaotic solutions are discussed.*

## Введение

Одной из важных научных проблем естествознания является решение задачи предсказания поведения изучаемого объекта во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии. Эта задача сводится к нахождению некоторого закона, который позволяет по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени  $t_0$  в точке пространства  $x_0$  определить его будущее в любой момент времени  $t > t_0$ . В зависимости от степени сложности самого объекта этот закон может быть детерминированным или вероятностным, может описывать эволюцию объекта только во времени, только в пространстве, а может описывать пространственно-временную эволюцию.

Проблема предсказания эволюции объекта в естествознании представляет собой безусловно математическую задачу. Математическая логика требует от нас четкой формулировки предмета и задачи исследования. С этой целью необходимо сформулировать определение изучаемого объекта и указать его свойства. Предметом нашего анализа будут не системы и объекты вообще, а так называемые “динамические системы” в математическом понимании этого термина [1–5].

## Динамическая система и ее математическая модель

Под *динамической системой* понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени, и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы и его называют законом эволюции. Динамические системы — это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описание динамических систем в смысле задания закона эволюции также допускает большое разнообразие: оно осуществляется с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, с помощью теории графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид *математической модели* соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (*координаты*) системы, определяющие однозначно ее *состояние*, и указан *закон эволюции* состояния во времени.

В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели. Исследование реальных систем идет по пути изучения соответствующих математических моделей, совершенствование и развитие которых определяется анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем понимать именно ее математическую модель. Исследуя одну и ту же динамическую систему (к примеру, движение маятника), в зависимости от степени учета различных факторов мы получим различные математические модели. В качестве примера рассмотрим модель нелинейного консервативного осциллятора:

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad \dot{x} = d^2x/dt^2. \quad (1.1)$$

Как известно, функция  $\sin x$  аналитическая и ее разложение в ряд Тейлора выглядит так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}. \quad (1.2)$$

При малых  $x \ll 1$ ,  $\sin x \simeq x$ . С увеличением  $x$  требуется учет второго, третьего и т.д. членов ряда, чтобы с заданной точностью аппроксимировать  $\sin x$ . Поэтому в случае  $x \ll 1$  мы получаем самую простую модель математического маятника:

$$\ddot{x} + x = 0. \quad (1.3)$$

Следующим приближением будет модель нелинейного маятника:

$$\ddot{x} + x - \frac{x^3}{6} = 0, \quad (1.4)$$

и так далее. На рис. 1.1 приведены результаты аппроксимации функции  $\sin x$  конечным числом членов ряда для  $n = 1, 3, \dots, 43$ . Для каждого конкретного значения  $n$  мы будем получать новую динамическую систему, в заданном приближении описывающую процесс колебаний физического маятника.

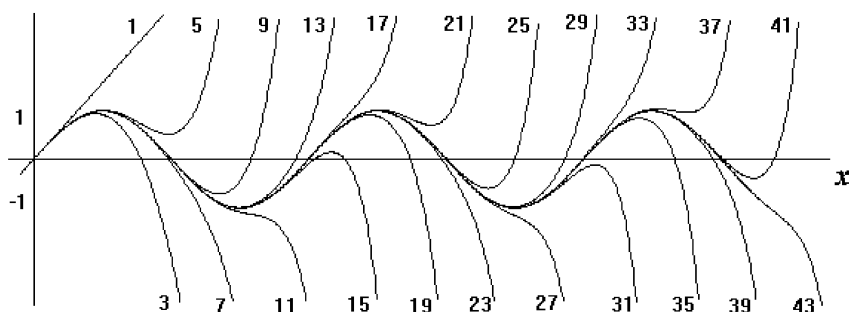


Рис. 1.1. Аппроксимация функции  $\sin x$  конечным числом членов ряда (1.2) для  $n = 1, 3, \dots, 43$ .

## Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Применительно к таким системам сохранились представления и терминология, первоначально возникшие в механике. В рассматриваемом случае для определения динамической системы необходимо указать объект, допускающий описание состояния заданием величин  $x_1, x_2, \dots, x_N$  в некоторый момент времени  $t = t_0$ . Величины  $x_i$  могут принимать произвольные значения, причем двум различным наборам величин  $x_i$  и  $x'_i$  отвечают два разных состояния. Закон эволюции динамической системы во времени записывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.5)$$

Если рассматривать величины  $x_1, x_2, \dots, x_N$  как координаты точки  $x$  в  $N$ -мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде этой точки. Последнюю называют изображающей, а чаще — *фазовой точкой*, а пространство состояний — *фазовым пространством* динамической системы. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой *фазовой траекторией*. В фазовом пространстве системы уравнениями (1.5) определяется векторное поле скоростей, сопоставляющее каждой точке  $x$  выходящий из нее вектор скорости  $\mathbf{F}(x)$ , компоненты которого даются правыми ча-

стями уравнений (1.5):

$$[f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), f_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, f_N(x_1, x_2, \dots, x_N)]. \quad (1.6)$$

Динамическая система (1.5) может быть записана в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  — вектор-функция размерности  $N$ .

Необходимо уточнить взаимосвязь понятий числа степеней свободы и размерности фазового пространства динамической системы. Под *числом степеней свободы* понимается наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния системы. Под координатами первоначально понимались именно пространственные переменные, характеризующие взаиморасположение тел и объектов. В то же время для однозначного решения соответствующих уравнений движения необходимо, помимо координат, задать соответствующие начальные значения импульсов или скоростей. В связи с этим система с  $n$  степенями свободы характеризуется фазовым пространством размерности в два раза большей ( $N = 2n$ ).

## Классификация динамических систем

Если динамическая система задана уравнением (1.7), то постулируется, что каждому  $x(t_0)$  в фазовом пространстве ставится в соответствие состояние  $x(t)$  ( $t > t_0$ ), куда за время  $t - t_0$  переместится фазовая точка, движущаяся в соответствии с уравнением (1.7). В операторной форме (1.7) можно записать в виде

$$x(t) = \mathbf{T}_t x(t_0), \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{T}_t$  — закон (оператор) эволюции. Если этот оператор применить к начальному состоянию  $x(t_0)$ , то мы получим  $x(t)$ , то есть состояние в момент времени  $t > t_0$ . Так как  $x(t_0)$  и  $x(t)$  принадлежат одному и тому же фазовому пространству динамической системы, то математики говорят в данной ситуации: оператор  $\mathbf{T}_t$  отображает фазовое пространство системы на себя. В соответствии с этим можно называть оператор  $\mathbf{T}_t$  оператором отображения или просто отображением. Если известно отображение для моментов времени  $t > 0$  и  $s > 0$ , то соответствующее отображение для момента времени  $t + s$  в определенных случаях может быть получено в соответствии с правилом:

$$\mathbf{T}_t \mathbf{T}_s = \mathbf{T}_{t+s}, \quad t > 0, \quad s > 0. \quad (1.9)$$

Динамические системы можно классифицировать в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства. Если оператор предусматривает исключительно линейные преобразования начального состояния, то он называется линейным. Линейный оператор обладает свойством суперпозиции:  $\mathbf{T}[x(t) + y(t)] = \mathbf{T}x(t) + \mathbf{T}y(t)$ . Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется нелинейной. Различают непрерывные и дискретные операторы и соответственно *системы с непрерывным и дискретным временем*. Системы, для которых отображение  $\mathbf{x}(t)$  с помощью оператора  $\mathbf{T}$  может быть определено для любых  $t > t_0$  (непрерывно во времени), называют также *потоками* по аналогии со стационарным течением жидкости. Если оператор отображения определен на дискретном множестве значений времени, то соответствующие динамические системы называют *каскадами*, или системами с дискретным временем.

Способы задания оператора отображения  $\mathbf{T}$  также могут различаться. Оператор  $\mathbf{T}$  можно задать в виде дифференциального или интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т.д.

В зависимости от того, какой ряд значений могут принимать фазовые координаты, определяющие состояние системы, различают *непрерывное и дискретное фазовые пространства*.

## Колебательные системы и их свойства

Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Колебательные системы с точки зрения их математических моделей разделяют на определенные классы. Различают *линейные* и *нелинейные* колебательные системы, *сосредоточенные* и *распределенные*, *консервативные* и *диссипативные*, *автономные* и *неавтономные*. Особый класс представляют так называемые *автоколебательные системы*. Основные свойства указанных систем подробно обсуждаются в учебниках по теории колебаний.

Колебательная система называется *линейной* или *нелинейной* в зависимости от того, линейна или нелинейна описывающая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных. Однако, в силу принципиальной важности линейных систем при исследовании вопросов устойчивости колебаний, а также в силу возможности использования принципа суперпозиции решений такая классификация оправдана.

Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют *сосредоточенными*

или *точечными* системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться как сосредоточенная либо как распределенная. Математические модели *распределенных* систем — это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения ее состояния. В теории электрических колебаний систему рассматривают как сосредоточенную в тех случаях, когда длина волны колебаний существенно превышает геометрические размеры самой системы. Если размеры прибора соизмеримы с длиной волны генерируемых колебаний, то систему необходимо рассматривать как распределенную.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. *Консервативные* системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют *гамильтоновыми*. Для консервативных систем с  $n$  степенями свободы определяется так называемый *гамильтониан* системы  $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , где  $q_i$  — обобщенные координаты,  $p_i$  — обобщенные импульсы системы,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Гамильтониан полностью характеризует динамическую природу системы и с физической точки зрения в большинстве случаев представляет собой ее полную энергию. Эволюция во времени консервативных систем описывается уравнениями механики Гамильтона

$$\dot{q}_i = \partial \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / \partial q_i. \quad (1.10)$$

Из уравнений (1.10) следует

$$\sum_{i=1}^n (\partial \dot{q}_i / \partial q_i + \partial \dot{p}_i / \partial p_i) = 0. \quad (1.11)$$

В терминах обобщенных фазовых координат соотношение (1.11) можно представить как

$$\sum_{i=1}^N \partial \dot{x}_i / \partial x_i = 0, \quad (1.12)$$

что означает равенство нулю дивергенции векторного поля скоростей. Движение изображающих точек в фазовом пространстве интерпретируется в данном случае как стационарное течение несжимаемой жидкости, подчиняющееся уравнению непрерывности. Отсюда следует, что



элемент фазового объема в консервативных системах не изменяется во времени.

Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются соответственно *неконсервативными*. Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются *диссипативными*. В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное. Принципиальной особенностью диссипативных систем является зависимость элемента фазового объема от времени. В системах с поглощением энергии фазовый объем во времени уменьшается, в системах с отрицательным трением — увеличивается.

Динамические системы называются *автономными*, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат.

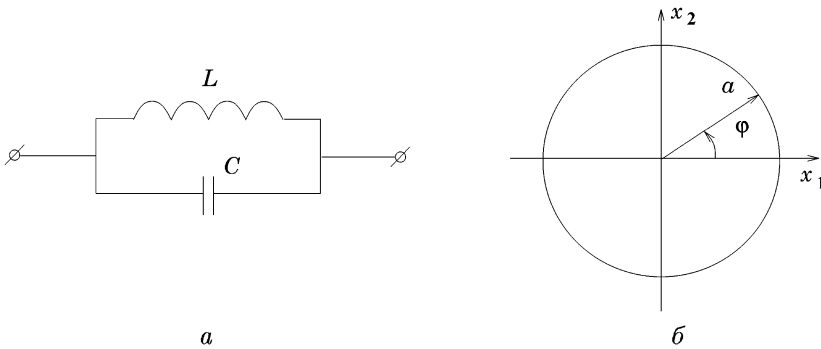
Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний неконсервативны. Среди них выделяется особый класс так называемых *автоколебательных* систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики установившихся колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в некоторых пределах не зависят от выбора исходного начального состояния [6].

## Фазовые портреты типовых колебательных систем

**Геометрическое представление колебаний.** Метод анализа колебательных процессов с помощью исследования фазовых траекторий динамической системы был введен в теорию колебаний Л.И. Мандельштамом и А.А. Андроновым и с тех пор стал привычным инструментом при исследовании самых различных колебательных явлений.

Обсудим несколько простых, но типичных примеров представления динамических процессов в виде траекторий изображающей точки в фазовом пространстве.

**Консервативный осциллятор.** Рассмотрим линейный осциллятор без потерь, уравнения которого можно сформулировать на при-



**Рис. 1.2.** *a* — колебательный контур, моделируемый уравнениями (1.16); *b* — фазовый портрет колебаний при заданном уровне энергии.

мере колебательного  $LC$ -контра (рис. 1.2,*a*), предположив амплитуду колебаний достаточно малой. Выбрав в качестве переменной заряд  $q$  на конденсаторе, с помощью уравнений Кирхгофа получим

$$\ddot{q} + (LC)^{-1}q = 0. \quad (1.13)$$

Домножив (1.13) на  $L\dot{q}$ , получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0, \quad (1.14)$$

то есть для любого момента времени выполняются равенства

$$E = E_L + E_C = \text{const}, \quad E_L = L\dot{q}^2/2, \quad E_C = q^2/2C, \quad (1.15)$$

отражающие постоянство во времени полной энергии осциллятора (суммы магнитной  $E_L$  и электрической  $E_C$  энергий). В более удобных координатах уравнения консервативного осциллятора можно записать следующим образом, введя замену времени  $\tau = t/\sqrt{LC}$ :

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{x}^2 + x^2 = a^2, \quad a = \text{const}. \quad (1.16)$$

Для фазовых координат  $x_1 = x$  и  $x_2 = \dot{x}$  запишем уравнения в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2. \quad (1.17)$$

Фазовый портрет системы (1.17) представляет собой окружность радиуса  $a$  с центром в начале координат. Точка в фазовом пространстве, в

которой вектор фазовой скорости обращается в нуль, называется особой, и в данном случае нуль координат есть *особая точка* типа *центр*.

Наличие интеграла движения у консервативной системы 2-го порядка, отражающее в данном примере факт сохранения энергии (1.15), дает возможность описать ее с помощью уравнения 1-го порядка. Действительно, определив новую переменную  $\varphi$  соотношениями

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad x_2 = a \sin \varphi, \quad (1.18)$$

получим уравнения 
$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{a} = 0, \quad (1.19)$$

которые и представляют закон движения фазовой точки. Во времени эволюционирует одна переменная  $\varphi$ , и фазовое пространство консервативного осциллятора, таким образом, одномерно. Гармоническим колебаниям осциллятора отвечает равномерное движение изображающей точки по окружности радиуса  $a$ , как это показано на рис. 1.2,б.

Если консервативная система нелинейна, то ее фазовый портрет усложняется. Проиллюстрируем это на примере уравнения

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \quad (1.20)$$

В фазовых переменных  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$  уравнение (1.20) записывается следующим образом:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1. \quad (1.21)$$

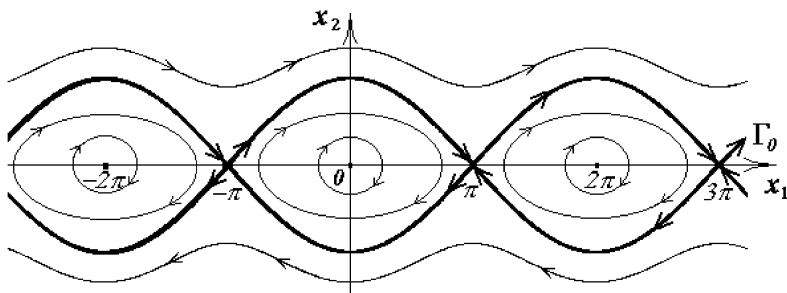


Рис. 1.3. Фазовый портрет осциллятора (1.20).

Состояния равновесия нелинейного маятника на фазовой плоскости расположены вдоль оси  $x_1$  ( $x_2 = 0$ ) в точках  $x_1 = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ . Соответствующий фазовый портрет системы представлен на рис. 1.3. Видно, что особые точки  $x_1 = 0, \pm2\pi, \pm4\pi, \dots$  — типа центр, а  $x_1 = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$  — неустойчивые точки типа *седло*.

Вблизи центров фазовый портрет соответствует линейному осциллятору: траектории представляют собой замкнутые кривые, близкие к окружностям, отражающим характер малых по амплитуде колебаний, близких к гармоническим. Через неустойчивые точки проходят особые интегральные кривые  $\Gamma_0$ , называемые *сепаратрисами* седла. Они разделяют фазовое пространство на области с различным поведением. С увеличением энергии маятника его колебания от квазигармонических вблизи точек типа центр эволюционируют к нелинейным периодическим колебаниям вблизи сепаратрис. Дальнейшее увеличение энергии приведет к вращательному движению (движения вне сепаратрис). Ситуация, когда энергия маятника соответствует движению по сепаратрисе, называется негрубой. Малейшие отклонения энергии в ту или иную сторону приводят к качественно различным типам движения: колебательному или вращательному.

Как видно из рис. 1.3, состояние маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия  $x_1$  и скоростью  $x_2$ , но для значений  $x_1$ , отличающихся на целое число  $2n\pi$ , динамика системы идентична. Поэтому плоскость переменных  $x_1, x_2$  не является, строго говоря, фазовой плоскостью системы в силу отсутствия однозначности. Пока речь идет о движениях, изображающие траектории которых лежат внутри сепаратрисного контура, то есть о колебаниях в окрестности центра, неясностей не возникает. Но в случае, если энергия системы превышает критическое значение и движение становится вращательным, фазовая плоскость не годится для однозначного описания и в рассмотрение вводят *цилиндрическое* фазовое пространство [6].

**Линейный осциллятор с затуханием.** Диссипация энергии, обусловленная наличием потерь, оказывает принципиальное влияние на характер движения системы. Наиболее простые закономерности проявляются в системах с полной диссипацией энергии, когда силы трения действуют по всем степеням свободы, а поступление энергии извне отсутствует. Рассмотрим процессы в линейном диссипативном осцилляторе, когда сила трения пропорциональна скорости изменения координаты. Примером такой системы служит колебательный контур, содержащий активное сопротивление  $R$ . Уравнение контура

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0 \quad (1.22)$$

заменой переменных сводится к безразмерной форме

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0, \quad 2\delta = R\sqrt{L/C}, \quad \tau = t/\sqrt{LC}. \quad (1.23)$$

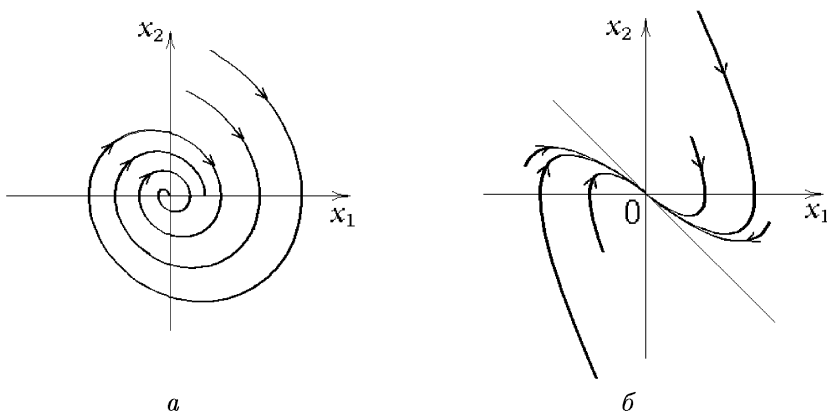
При  $\delta = 0$  имеем консервативный линейный осциллятор, рассмотренный выше. Введение малого трения качественно меняет фазовый портрет системы. Для  $0 < \delta < 1$  решением уравнения (1.23) является

$$x = Ae^{-\delta\tau} \cos(\omega\tau + \psi), \quad \omega = (1 - \delta^2)^{1/2}, \quad (1.24)$$

где  $A$  и  $\psi$  — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. На фазовой плоскости для любых начальных данных имеют место скручивающиеся спирали, по которым фазовые точки асимптотически приближаются к началу координат, характеризуя затухающий колебательный процесс. Ноль координат является особой точкой системы, которая в случае  $\delta < 1$  есть *устойчивый фокус* (рис. 1.4,а). Если коэффициент трения  $\delta > 1$ , процесс в системе аperiodический:

$$x = A_1e^{\lambda_1\tau} + A_2e^{\lambda_2\tau}, \quad \lambda_{1,2} = [-\delta \pm (\delta^2 - 1)^{1/2}]/2, \quad (1.25)$$

и фазовые траектории имеют вид семейства характерных кривых, по которым, как и в предыдущем случае, изображающие точки стремятся к нулю координат (рис. 1.4,б). Особая точка в указанных условиях является *устойчивым узлом*.



**Рис. 1.4.** Фазовый портрет диссипативного осциллятора (1.23) с параметром  $\delta < 1$  (а) и  $\delta > 1$  (б).

Итак, при любых значениях физических параметров системы, когда  $\delta > 0$ , диссипативный маятник характеризуется единственным глобально устойчивым состоянием равновесия в нуле фазовых координат.

Независимо от выбора начальных условий наблюдается затухающее колебательное или апериодическое движение. При  $t \rightarrow \infty$  любая (!) изображающая точка стремится к началу координат в устойчивый фокус или узел.

Описанное свойство является общим для динамических систем с полной диссипацией энергии. Положения равновесия типа устойчивого фокуса или узла являются здесь *глобально притягивающими* в том смысле, что фазовые траектории из любой точки фазового пространства асимптотически к ним стремятся. Стационарные незатухающие колебания в линейных диссипативных системах оказываются невозможными. С физической точки зрения это понятно — нет условий поддержания колебаний. Энергия, расходуемая на преодоление сил трения, не восполняется.

## Автоколебательные системы

Возможность существования периодического асимптотически устойчивого движения, которое изображается изолированной замкнутой траекторией в фазовом пространстве системы, к которой со временем притягиваются траектории из некоторой окрестности независимо от начальных условий, обеспечивается только в нелинейных диссипативных системах. Этот тип динамических систем настолько важен при изучении колебательных процессов, что для его выделения А.А. Андронов предложил специальный термин — автоколебательные системы [6]. Математическим образом автоколебаний служит *предельный цикл Пуанкаре* — замкнутая изолированная траектория в фазовом пространстве, отвечающая периодическому движению.

В качестве примера динамической системы с предельным циклом Пуанкаре рассмотрим классический нелинейный осциллятор Ван дер Поля, уравнение колебаний которого

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = 0. \quad (1.26)$$

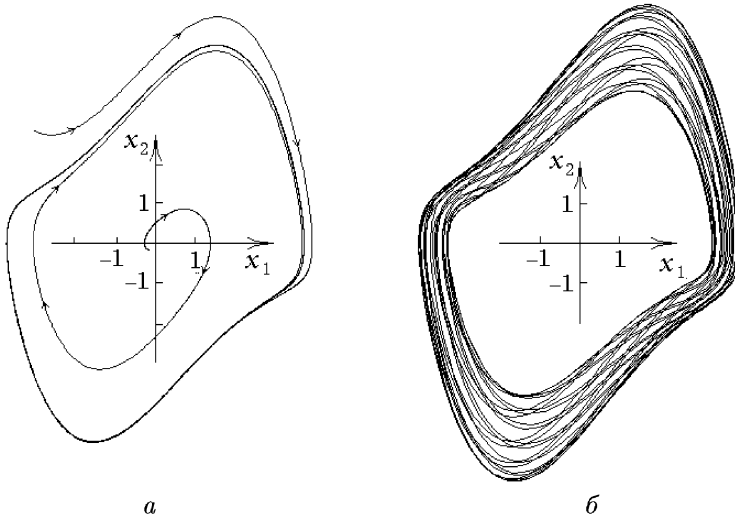
Параметр  $a$ , характеризующий подкачку энергии в систему от внешнего источника, является существенным параметром осциллятора и называется *параметром возбуждения*. Из сравнения уравнений (1.26) и (1.23) следует, что осциллятор Ван дер Поля описывает более сложный колебательный контур, характер и значение диссипации в котором зависят от переменной  $x$ . В фазовых координатах уравнение колебаний осциллятора (1.26) представляется как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a(1 - bx_1^2)x_2 - x_1, \quad (1.27)$$

причем

$$a(1 - bx_1^2) \neq 0. \quad (1.28)$$

Аналитически уравнения (1.27) не решаются и исследования проводятся с использованием численных методов. В практически важном случае ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) уравнения (1.27) имеют единственное устойчивое решение в виде *предельного цикла*  $\Gamma$ , изображенного на рис. 1.5,а.



**Рис. 1.5.** Предельный цикл системы (1.26); расчет для значений параметров  $a = 1$ ,  $b = 0.3$  (а). Проекция двумерного тора на плоскость переменных  $x_1$ ,  $x_2$ ; численное интегрирование уравнений (1.29) для значений параметров  $a = 1$ ,  $b = 0.3$ ,  $B = 1.0$ ,  $\varphi_0 = 0$  (б).

Положение равновесия в начале координат, в котором вблизи нуля можно пренебречь нелинейностью, при  $a > 0$  является неустойчивым фокусом. Траектории из окрестности состояния равновесия асимптотически стремятся к предельному циклу. Как показывает анализ, предельный цикл является устойчивой изолированной структурой, притягивающей к себе траектории из любой точки на фазовой плоскости.

Таким образом, в динамических системах с нелинейной зависимостью диссипации энергии от переменной, совершающей колебания, впервые появляется принципиально новый тип устойчивого предельного множества фазовых траекторий: предельный цикл. Расчеты свиде-

тельствуют, что на предельном цикле за время периода колебаний доли рассеиваемой и вносимой энергии строго компенсируются.

Наконец, рассмотрим еще один случай типичной структуры в фазовом пространстве динамической системы, возникающей, например, при периодическом возмущении системы с устойчивым предельным циклом. Добавим в уравнение (1.26) источник гармонического воздействия сравнительно малой амплитуды  $B$  и частоты  $p$ , которую будем считать рационально не связанной с частотой периодических колебаний автономного осциллятора:

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = B \sin(p\tau + \varphi_0). \quad (1.29)$$

Периодическая модуляция предельного цикла автономной системы приводит к тому, что фазовая траектория с заданной частотой  $p$  вращается вокруг предельного цикла и лежит на двумерной поверхности, представляющей собой *поверхность тора*. Аналогично случаю предельного цикла эта поверхность будет устойчивым предельным множеством, к которому стягиваются со временем все траектории из некоторой окрестности тора (как изнутри него, так и снаружи!). Нетрудно представить себе, что минимальная размерность фазового пространства, в которое можно вложить *двумерный тор*, равна трем. На рис. 1.5,б показана проекция на плоскость переменных  $x_1, x_2$  фазовой траектории на двумерном торе, полученная численным интегрированием системы (1.29).

## Регулярные и странные аттракторы динамических систем

Движения диссипативных систем целесообразно разделить на два класса: *переходных, нестационарных* движений, отвечающих процессу релаксации от начального к предельному множеству состояний, и класс *установившихся, стационарных* движений, фазовые траектории которых целиком принадлежат предельным множествам. Важными с физической точки зрения являются *притягивающие предельные множества — аттракторы*. С течением времени произвольное начальное состояние из некоторой области притяжения  $G$ , включающей в себя аттрактор  $G_0$ , релаксирует к  $G_0$ . Движение, которому отвечает фазовая траектория в области притяжения, есть переходной процесс. Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий инвариантному предельному множеству, то есть аттрактору  $G_0$ . Подробнее этот вопрос обсуждается в Лекциях 4 и 5.

Результатом исследований последних лет явилось обнаружение принципиально новых типов движений в динамических системах, по



сравнению с рассмотренными выше. Таким движениям в фазовом пространстве размерности  $N \geq 3$  соответствуют сложным образом устроенные притягивающие множества, траектории изображающих точек которых не принадлежат ни к одному из описанных выше типов аттракторов. Фазовые траектории представляются здесь в виде бесконечной нигде не пересекающейся линии. При  $t \rightarrow \infty$  траектория не покидает замкнутой области и не притягивается к известным типам аттракторов (см. Лекцию 3).

Именно с существованием таких траекторий связывают возможность хаотического поведения детерминированных динамических систем с размерностью фазового пространства  $N \geq 3$ .

Впервые подобные свойства динамической системы в 1963 г. обнаружил Э. Лоренц при численном исследовании динамики трехмерной модели тепловой конвекции. Спустя восемь лет в теоретической работе Д. Рюэля и Ф. Такенса притягивающая область в фазовом пространстве динамической системы, характеризующаяся режимом установившихся непериодических колебаний, была названа *странным аттрактором*. Этот термин был сразу воспринят исследователями и утвердился для обозначения математического образа режима нерегулярных колебаний детерминированных динамических систем.

Аттракторы в виде состояний равновесия, предельных циклов или  $l$ -мерных торов называют *простыми* или *регулярными*, подчеркивая тем самым, что движения на них отвечают сложившимся представлениям об устойчивом по Ляпунову детерминированном поведении динамической системы. Со *странным* аттрактором связывается реализация нерегулярного (в смысле отсутствия периодичности) колебательного режима, который во многом сходен с нашими представлениями о стационарных случайных процессах.

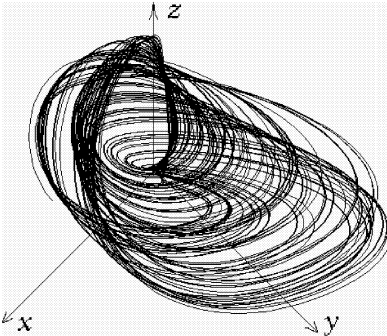
Однако термин “случайный” имеет вполне определенный смысл. Случайное движение непредсказуемо либо предсказуемо с определенной вероятностью. Другими словами, траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом экспериментах. Примером служит классическое движение броуновской частицы. В случае странного аттрактора имеется строгая предсказуемость в смысле детерминированности закона эволюции. Решение уравнений (как и для регулярных аттракторов) подчиняется теореме единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных “шумоподобных” автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа *динамическая сто-*

частичность, детерминированный хаос и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуаций в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории [2,5].

Примером системы с хаотическим аттрактором являются уравнения генератора с инерционной нелинейностью (генератора Анищенко–Астахова, 1981) [3]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gI(x)x^2, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$



**Рис. 1.6.** Хаотический аттрактор в модели генератора Анищенко–Астахова (1.30).

Результаты численного решения уравнения (1.30) для значений параметров  $m = 1.5$ ,  $g = 0.2$  приведены на рис. 1.6, который также иллюстрирует хаотический аттрактор, как образ неперiodических автоколебаний в детерминированной системе.

детерминированной системе.

## Заключение

В настоящей лекции приведено общее определение динамической системы и детально описаны динамические системы в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлено, что такие динамические системы имеют четыре типа решений: состояние равновесия, периодическое движение, квазипериодическое движение и хаотическое. Этим решениям соответствуют аттракторы системы в виде устойчивого равновесия, предельного цикла, квазипериодического аттрактора ( $p$ -мерного тора) и хаотического или странного аттрактора. Важным является то, что простейшие типы квазипериодических и хаотических аттракторов могут реализоваться в динамических системах с размерностью фазового пространства не менее трех.

## Лекция 2

# Устойчивость, бифуркации, катастрофы

*Излагаются основные идеи и принципы подхода к анализу устойчивости и бифуркаций режимов функционирования динамических систем.*

*In this lecture we present the main ideas and approaches to the analysis of stability and bifurcations of different regimes of dynamical systems functioning.*

## Введение

Наши представления об устойчивости того или иного режима функционирования динамической системы интуитивно формируются в процессе познания природы и жизни. Первые шаги маленького ребенка дают ему вполне реальные представления об устойчивости при ходьбе, хотя они (представления) еще неосознанны. Глядя на знаменитую картину П. Пикассо “Девочка на шаре”, мы как бы на себе ощущаем, что положение равновесия девочки неустойчиво. Взрослея, мы уже можем рассуждать об устойчивости корабля в бушующем море, об устойчивости экономики по отношению к действиям управленцев, об устойчивости нашей нервной системы к стрессорным возмущениям и т.д. В каждом конкретном случае речь идет об отличающихся свойствах, специфических для рассматриваемых систем. Однако, если внимательно вдуматься, то можно найти нечто общее, присущее любой системе. Это общее заключается в том, что когда мы говорим об устойчивости, то понимаем при этом характер реакции динамической системы на малое возмущение ее состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать во времени — система неустойчива. В противном случае малые возмущения затухают со временем — система устойчива.

Анализ устойчивости режима функционирования динамической системы является чрезвычайно важным с практической точки зрения. Устойчивость таких систем как автомобиль, воздушный или морской лайнеры по отношению к возмущениям, которые всегда сопровождают их движение, безусловно жизненно важный фактор в самом прямом смысле этого слова.

Еще более важной проблемой является анализ устойчивости сложных многокомпонентных систем. Наблюдая за эволюцией живой и неживой природы, мы можем подметить одно интересное свойство: развитие той или иной сложной системы всегда сопровождается потерей устойчивости одними режимами ее функционирования и рождением новых, устойчивых. Одни формации (или структуры) гибнут, рождаются новые, которые видоизменяются, совершенствуются и затем вновь уступают место новым. Изменения могут накапливаться плавно, а могут происходить скачком в виде катастроф. Формирование новых структур всегда сопровождается потерей устойчивости (даже разрушением!) предшествующих. И здесь скрыта важная проблема: проблема перехода системы из одного режима функционирования в другой, отличающийся принципиально, режим. Предшествующий режим потерял устойчивость, но что при этом может произойти? Система выбирает новый

устойчивый режим, который может наследовать некоторые свойства предыдущего, а может быть и резко отличным. В таких случаях говорят о бифуркациях динамических систем.

Приведенные рассуждения являются качественными и приобретают вполне определенный смысл лишь в том случае, когда нам удастся перевести их на формальный язык математики. Основы строгой математической теории устойчивости были заложены в трудах крупного русского математика А.М. Ляпунова около 100 лет назад; развитие качественной теории и теории бифуркаций динамических систем связано с именами российских ученых А.А. Андронова, В.И. Арнольда и их учеников.

Попытаемся простыми и понятными примерами проиллюстрировать содержание и методы решения задач об устойчивости и бифуркациях динамических систем [3–5,7,8].

## Линейный анализ устойчивости

Любая динамическая система (физическая, химическая, механическая и т.д.) ассоциируется в нашем представлении с эволюцией во времени. Предвидя возражения, укажем, что и состояние равновесия, то есть стационарное состояние, при котором скорость изучаемого процесса равна нулю, также можно трактовать как предельный случай эволюции системы во времени. В естествознании типичной моделью динамической системы является обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = F(x, \mu), \quad (2.1)$$

где  $x(t)$  — переменная состояния,  $F$  — некоторая функция состояния, характеризующая закон эволюции,  $\mu$  — параметр системы. Если задано начальное состояние  $x(t_0)$ , то существует единственное решение уравнения (2.1), которое предсказывает будущее состояние  $x(t)$  для любых  $t > t_0$ . Если число переменных состояния равно двум (или более), то моделью будет система двух (или более) уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \mu). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Число параметров также может быть больше, чем один.

В связи с тем, что проблема устойчивости связана с анализом реакции системы на малое возмущение ее состояния, на первом этапе

она может быть исследована в рамках линейного приближения. Поясним это. Пусть  $x^0(t)$  есть некоторое частное решение уравнения (2.1). Устойчивость этого решения (состояния) мы хотим исследовать. Введем в рассмотрение переменную  $y(t)$ , которая задает малое отклонение от частного решения:

$$y(t) = x(t) - x^0(t), \quad (2.3)$$

(здесь  $x(t)$  — возмущенное решение).

Наша задача состоит в исследовании эволюции во времени малого возмущения  $y(t)$ , которая подчиняется уравнению (2.1). Разложим функцию  $F$  в степенной ряд в окрестности частного решения  $x^0(t)$ :

$$F(y) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^0(t)} y(t) + \left. \frac{d^2F}{dx^2} \right|_{x=x^0(t)} y^2(t) + \dots \quad (2.4)$$

Производные функции  $F$  должны вычисляться в точках, соответствующих частному решению.

Перепишем уравнение (2.1) для возмущения  $y(t)$  с учетом (2.4):

$$\dot{y}(t) = F(y, \mu) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^0(t)} y(t) + \Phi(y), \quad (2.5)$$

где

$$\Phi(y) = \left. \frac{d^2F}{dx^2} \right|_{x=x^0(t)} y^2(t) + \dots \quad (2.6)$$

Слагаемые  $\Phi(y)$  включают все члены с  $y^n$  ( $n \geq 2$ ), то есть учитывают нелинейные добавки. По определению переменная  $y(t)$  есть малое отклонение от частного решения. Поэтому нелинейными членами в уравнении (2.5) в первом приближении можно пренебречь.

Таким образом, для эволюции малого возмущения мы получаем линейное уравнение:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad \text{где } A(t) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^0(t)}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим пример. Пусть динамическая система задана уравнением:

$$\dot{x} = a - bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (2.8)$$

Найдем стационарные состояния этой системы и исследуем их устойчивость. В стационарном состоянии изменений во времени нет, значит

$\dot{x} = 0$  и мы получаем:

$$x_{1,2}^0 = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим уравнение для возмущений (2.7) применительно к первому стационарному состоянию  $x_1^0$ .

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -(2bx_1^0)y = (-2\sqrt{ab})y = \lambda y, \\ \lambda &= \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_1^0} = -2\sqrt{ab}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Решением уравнения (2.10) будет  $y = \exp(\lambda t)$ . Возмущение  $y$  экспоненциально затухает во времени ( $\lambda$  есть отрицательное число). Это означает, что состояние  $x_1^0$  устойчиво! Так как второе состояние  $x_2^0$  отличается от первого только знаком, то решение уравнения (2.10) в этом случае будет экспоненциально нарастающим во времени. Стационарное состояние  $x_2^0$  неустойчиво!

Достаточно простая идея предсказания устойчивости по линейному приближению оказалась весьма плодотворной. Используя математический формализм, можно обобщить результат (2.7) на случай двух и более переменных состояния. Например, в случае  $N = 2$  уравнение (2.7) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $a_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x_i=x_i^0}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Если одномерное уравнение (2.1) описывает эволюцию исключительно в окрестности стационарных состояний, то уравнение (2.2) может иметь в качестве решения не только стационарные, но и периодические решения. С увеличением размерности исходной системы (2.1) в общем случае усложняются и типы возможных решений. Это создает определенные проблемы в исследовании устойчивости: ведь для решения уравнений для возмущений типа (2.7) необходимо знать частное решение  $x^0(t)$ ! С применением современных компьютеров эти трудности легко преодолимы.

## Бифуркации динамических систем

Если внимательно присмотреться к окружающей нас природе, то можно, в частности, сделать следующее интересное наблюдение. Жизнь

на планете Земля возможна лишь благодаря тепловому излучению Солнца, которое служит источником энергии. Летом эта энергия в северном полушарии больше, чем зимой. И картина летней природы при этом заметно отличается от зимней. Давайте рассмотрим в качестве примера объем воды в озере. Количественной мерой привносимой солнечной энергии является температура воды (точнее, энергия пропорциональна температуре). Летом вода в озере теплая и можно купаться. С наступлением осени температура воды постепенно уменьшается. Купаться уже не хочется, однако вода и при более низкой, но плюсовой температуре, остается водой! Глубокой осенью верхний слой воды в озере остывает до нулевой температуры и вдруг превращается в лед! Далее и при  $-20^\circ\text{C}$  лед остается льдом. Что же произошло? При прохождении температуры через нуль вода резко изменила свои свойства: она из жидкого состояния перешла в твердое. И не плавно, а скачком.

Если рассматривать температуру воды как некий параметр системы, то хорошо известно, что с изменением параметра вода резко меняет свои свойства при переходе через  $0^\circ\text{C}$ , через  $100^\circ\text{C}$ , когда вода превращается в пар. Есть и другие особые значения температуры воды. Оказывается, что большинство интересных физических задач при их математическом описании приводят к дифференциальным уравнениям, зависящим от одного или нескольких параметров.

Рассмотрим в качестве примера уравнения колебаний обыкновенного маятника или (что с математической точки зрения полностью идентично) параллельного  $RLC$ -контура:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) содержит два параметра:  $\alpha$  — параметр затухания, характеризующий трение, и  $\omega_0$  — параметр, определяющий частоту колебаний. Если потери энергии отсутствуют, параметр затухания  $\alpha = 0$ , то решением уравнения (2.12) будут гармонические незатухающие колебания. При малом трении  $0 < \alpha < 1$  движение системы будет колебательным с амплитудой, которая уменьшается во времени по экспоненциальному закону. Наконец, при достаточно большом трении ( $\alpha > 1$ ) движение маятника будет аperiодическим, затухающим во времени. Уже в этом простом примере выделяются два особых значения параметра  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ , отклонения от которых качественно меняют свойства системы.

Изменение параметра в уравнении может вызвать потерю устойчивости одного состояния (или режима функционирования) системы и



переход ее в другое, отличное от первого, состояние. Это явление называется *бифуркацией* (от слова раздвоение), а значение параметра, при котором оно происходит — *точкой бифуркации*. Состояние системы ниже точки бифуркации и выше ее при изменении параметра все-таки меняется. Ясно, что вода при температуре  $+3^\circ\text{C}$  и  $+22^\circ\text{C}$  — это разные состояния. Но при этом вода остается водой! В математике и физике существует понятие грубости или структурной устойчивости. Суть этого понятия в том, что при малом изменении параметра грубая система хоть и изменяет в деталях режим функционирования, но не принципиально. С этой точки зрения для грубых систем переход через точку бифуркации означает смену одного структурно устойчивого режима на другой. При этом в точке бифуркации система не является грубой: малое изменение параметра в ту или иную сторону приводит к резким изменениям состояния.

Давайте вернемся к нашему примеру с устойчивостью стационарных состояний в системе (2.8). Мы условились, что в уравнении (2.8) параметры  $a$  и  $b$  положительны. Устойчивость определяется знаком производной правой части уравнения (2.8) в стационарной точке, то есть знаком величины  $\lambda$  (2.10). При положительных значениях параметров  $a$  и  $b$  эта производная всегда отлична от нуля. А что если мы будем уменьшать значение параметра  $a$ ? Как видно из (2.10) при  $a = 0$  (независимо от величины  $b > 0$ ) величина  $\lambda$  обращается в нуль, возмущение  $y$  не нарастает и не затухает! Мало того, при  $a = 0$  в системе два состояния равновесия как бы сливаются в одно ( $x = 0$ )! Далее, если,  $a < 0$ , то состояние равновесия нет вовсе! Действительно, в этом случае  $x_{1,2}^0 = \pm j\sqrt{\frac{|a|}{b}}$ , то есть становятся чисто мнимыми.

Приведем теперь результаты математического анализа этой бифуркации, которая известна как бифуркация “*двукратное равновесие*”. Вновь рассмотрим уравнение (2.8). Пусть  $x^0(a)$  есть грубое состояние равновесия, то есть  $\lambda(a) \neq 0$ . Это означает, что при малой вариации параметра  $a$  равновесие  $x^0(a)$  продолжает существовать как устойчивое или неустойчивое.

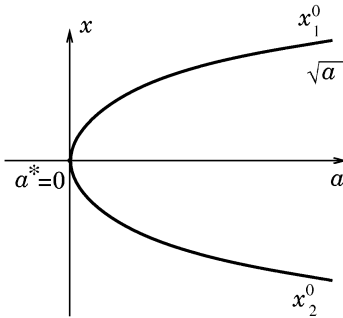
При некотором значении параметра  $a = a^*$  собственное число  $\lambda(a^*)$  в положении равновесия может обратиться в нуль:

$$\lambda(a) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^0} = 0, \quad a = a^*. \quad (2.13)$$

Для реализации бифуркации “двукратное равновесие” необходимо, что-

бы вторая производная была отлична от нуля

$$\left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x^0} \neq 0. \quad (2.14)$$



**Рис. 2.1.** Бифуркация “двукратное равновесие”. При  $a > 0$  в системе (2.8) два стационарных состояния  $x_1^0$  и  $x_2^0$ , при  $a = 0$  они сливаются в одно и при  $a < 0$  стационарные состояния исчезают.

Для выполнения условий (2.13) и (2.14) в общем случае необходимо, чтобы исходное уравнение в правой части включало как минимум квадратичное нелинейное слагаемое, как в нашем примере (2.8).

Если условия (2.13) и (2.14) выполнены, то  $x^0$  есть двукратный корень исходного уравнения (2.8).

Значение параметра  $a^*$ , при котором выполняется условие (2.13), является точкой бифуркации. До точки бифуркации  $a > a^*$  мы имеем 2 состояния равновесия. В точке бифуркации  $a = a^*$  они сливаются в одно, далее при  $a < a^*$  состояний равновесия в системе не будет! В нашем случае (2.8)  $a^* = 0$ .

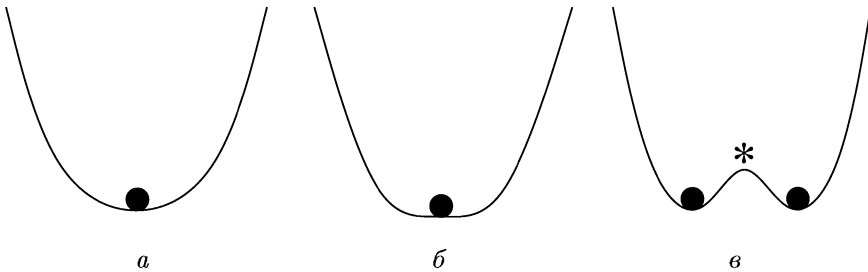
Результаты можно представить графически (см. рис. 2.1).

## “Мягкие” и “жесткие” бифуркации.

### Катастрофы

Несмотря на многолетнюю историю существования и развития классической теории устойчивости и бифуркаций, наступил момент (как это часто бывает), когда к этой теории было вдруг привлечено всеобщее внимание. Причиной тому послужили популярно изложенные версии работ французского математика Рене Тома по так называемой теории катастроф. Теория катастроф в начале семидесятых годов стала модной, понятной (как им казалось!) для неспециалистов и универсальностью своих претензий стала напоминать псевдонаучные теории прошлых времен. В чем же суть дела? Появление теории катастроф Р. Тома специалистами было воспринято нормально. Ряд результатов этой теории заслуживает самого глубокого уважения. Но “философского” открытия здесь нет. Поясним, почему.

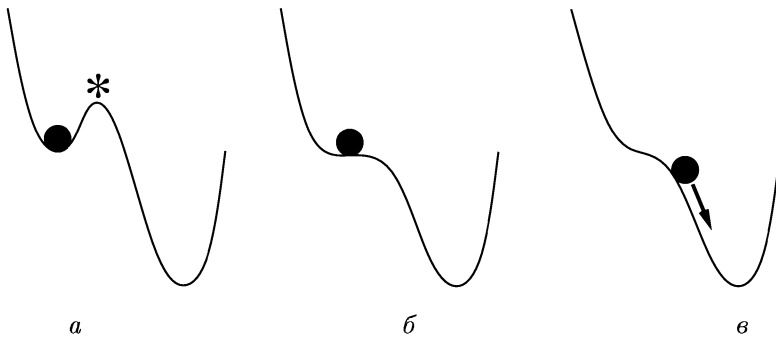
Суть дела заключается в том, что речь идет все о тех же бифуркациях, но при этом выбирается один из типов — так называемые *жесткие бифуркации*. Для пояснения рассмотрим два простых примера. В первом случае (см. рис. 2.2) в результате бифуркации исходное стационарное состояние теряет устойчивость и рождаются два новых устойчивых стационарных состояния. При этом вновь появившиеся два стационарных состояния (рис. 2.2,в) расположены в непосредственной близости от исходного состояния, которое потеряло устойчивость (помечено звездочкой). Бифуркации такого типа называют *мягкими*, имея в виду то, что вновь родившийся режим функционирования системы как бы появляется из режима, потерявшего устойчивость, и сосуществует рядом с ним.



**Рис. 2.2.** Пример мягкой бифуркации. Стационарное состояние (а) теряет устойчивость (б) и вблизи него появляются два новых устойчивых стационарных состояния (в).

Другой пример бифуркации качественно представлен на рис. 2.3. При  $\mu < \mu^*$  (рис. 2.3,а) шарик находится в устойчивом стационарном состоянии. При этом существует еще одно, неустойчивое состояние (помечено звездочкой). В точке бифуркации  $\mu = \mu^*$  устойчивое и неустойчивое состояния сливаются в одно (рис. 2.3,б). Далее они исчезают и система выбирает новый режим (например, как это показано на рис. 2.3,в), который существенно отличается от предыдущего и не находится в непосредственной близости от исходного режима. Такой тип бифуркаций называют *жестким* и именно жесткие бифуркации явились предметом анализа в теории катастроф.

Рассмотренный выше пример бифуркации “двукратное равновесие” в системе (2.8) представляет собой типичный пример жесткой бифуркации, который качественно проиллюстрирован на рис. 2.3.



**Рис. 2.3.** Жесткая потеря устойчивости стационарным состоянием, катастрофа. Качественная иллюстрация бифуркации “двукратное равновесие” (рис. 2.1).

## Заключение

В результате безусловно упрощенного, качественного описания проблемы устойчивости и бифуркаций динамических систем можно, тем не менее, сделать определенные выводы. Эволюция любых систем сопровождается потерей устойчивости одними режимами функционирования и бифуркационными переходами их в новые. Эти “фазовые переходы” могут осуществляться плавно, мягко, а могут происходить скачкообразно, в виде катастроф. Строгий математический анализ устойчивости и бифуркаций позволяет сегодня практически рассматривать широкий спектр проблем, связанных с исследованиями бифуркационных переходов в различных динамических системах. Но при этом необходимо опираться на строгие математические результаты и использовать обоснованные методы теоретического и качественного анализа.

## Лекция 3

# Детерминированный хаос

*Методом качественного анализа дается обоснование возможности существования неперiodических режимов колебаний в детерминированных динамических системах. Приводится определение детерминированного хаоса и обсуждаются его свойства.*

*In this lecture the substantiation of the possibility of existence of non-periodical regimes in deterministic dynamical systems is given by means of the qualitative analysis. The definition of the term “deterministic chaos” is presented and then its properties are discussed.*

## Введение

Хаотические процессы в детерминированных нелинейных диссипативных системах — одна из фундаментальных проблем современного естествознания, являющаяся предметом пристального внимания исследователей [3–5, 9–14]. Убедительно доказано, что в таких системах причина генерирования сложных колебательных процессов, которые могут не отличаться по физическим характеристикам от истинно случайных, кроется не в большом числе степеней свободы и не в наличии флуктуаций, как ранее полагалось, а в экспоненциальной неустойчивости режимов, порождающей чувствительную зависимость от точности задания начального состояния системы. Возможность подобных явлений прекрасно понимал и предвидел А. Пуанкаре. В неустойчивых системах "... совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которого мы не можем предусмотреть. ... Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное". Так писал он еще в 1908 г. в книге "Наука и метод". Развитие идей А. Пуанкаре в настоящее время привело к созданию фундамента хаотической динамики детерминированных систем. Как оказалось, необходимым условием возникновения хаоса в дифференциальных системах является размерность фазового пространства  $N \geq 3$ , и возбуждение незатухающих хаотических пульсаций становится принципиально возможным в генераторах всего с полутора степенями свободы.

В системах с одной степенью свободы, фазовым пространством которых служит двумерная плоскость, возможные динамические режимы исчерпываются состояниями равновесия и периодическими колебаниями (предельными циклами). Это обстоятельство многие годы служило психологическим барьером, преодолению которого не помогали даже очевидные (сейчас!) экспериментальные результаты. Ограниченность "нелинейного мышления" на базе фазовой плоскости понимали многие ведущие ученые, однако ввиду отсутствия соответствующего математического аппарата обоснованный выход с плоскости в пространство трех и более измерений был практически невозможен.

## Детерминированность

Что же представляет собой явление детерминированного хаоса? Попробуем ответить на этот вопрос. Вначале необходимо внести ясность в

понимание терминов *детерминированность* и *хаос*, а затем определить содержание термина *детерминированный хаос*. Во всех случаях, когда говорят о детерминированности, подразумевают однозначную взаимосвязь причины и следствия (см. Лекцию 1). В применении к эволюционным законам это означает, что если задано некоторое начальное состояние системы при  $t = t_0$ , то оно *однозначно* определяет состояние системы в любой момент времени  $t > t_0$ . Например, если тело движется равноускоренно, то его скорость определяется детерминированным законом:

$$v(t) = v(t_0) + at. \quad (3.1)$$

При задании начальной скорости  $v(t_0)$  мы однозначно определяем значение скорости  $v(t)$  в любой момент времени  $t > t_0$ .

В общем случае, зависимость будущего состояния  $x(t)$  от начального  $x(t_0)$  можно записать в виде:  $x(t) = F[x(t_0)]$ , где  $F$  — детерминированный закон (или оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния  $x(t_0)$  в будущее состояние  $x(t)$  для любого  $t > t_0$ . Этот закон может представлять собой функцию, дифференциальное или интегральное уравнение, просто некоторое правило, заданное таблицей или графиком и т.д. Важно главное: закон  $F$  *однозначно* трансформирует начальное состояние (причину) в будущее состояние (следствие).

## Хаос

Теперь внесем ясность в понятие *хаос*. Давайте проведем мысленный эксперимент с броуновской частицей. Поместим частицу в начальный момент  $t = t_0$  в раствор жидкости и с помощью микроскопа начнем фиксировать ее положение во времени, отмечая координаты частицы через равные интервалы времени  $\Delta t$ . Нетрудно убедиться, что под действием случайных толчков со стороны окружающих молекул частица будет совершать нерегулярные блуждания, которые характеризуются запутанной траекторией. Повторим эксперимент несколько раз подряд, осуществляя в пределах возможностей воспроизводство начальных условий опыта. Каковы будут результаты? Их, главным образом, два. Первый — каждый раз траектория движения частицы будет сложной, непериодической. Второй — любая попытка однозначного повторения опыта приведет к отрицательному результату. Каждый раз при повторении опыта с одинаковыми (в пределах наших возможностей) начальными

условиями мы будем получать различные траектории движения частицы, которые даже близко не напоминают друг друга!

Классическое явление движения броуновской частицы дает нам четкие физические представления о хаосе как о непредсказуемом, случайном процессе. Таким образом, если мы говорим о хаосе, мы подразумеваем, что изменение во времени состояния системы является случайным (его нельзя однозначно предсказать) и невоспроизводимым (процесс нельзя повторить) [12].

Приведенные выше размышления приводят нас к убеждению, что понятия *детерминизм* и *хаос* есть прямопротивоположные по смыслу. Детерминизм ассоциируется с полной однозначной предсказуемостью и воспроизводимостью, хаос — с полной непредсказуемостью и невоспроизводимостью. Возникает закономерный вопрос, что понимается под термином *детерминированный хаос*, где объединены два противоположных по смыслу понятия? Ответить на этот вопрос не просто, но возможно. Попытаемся это сделать.

## Устойчивость и неустойчивость

Нам понадобится рассмотреть понятие *устойчивости* (*неустойчивости*) движения системы. Начнем с простейшего, рассмотрев состояние покоя или равновесия системы. Поместим маленький шарик в нижнюю точку внутри полый сферы. Слегка толкнем его и пронаблюдаем за движением. После совершения нескольких затухающих колебаний шарик вновь займет положение на дне сферы. В этом случае положение равновесия *устойчиво*: малые возмущения исходного состояния затухают во времени. Если мы поместим шарик на вершину сферы (снаружи), то реакция на малое возмущение будет иной: при любом сколь-угодно малом отклонении шарика от состояния равновесия он скатывается с вершины. Это положение равновесия *неустойчиво*: малые возмущения исходного состояния нарастают во времени.

Физический смысл понятия *устойчивость* (*неустойчивость*), рассмотренный нами применительно к состоянию равновесия, сохраняется и в отношении любого другого режима. Режим функционирования динамической системы называют *устойчивым*, если малые возмущения в окрестности этого режима затухают во времени, стремясь к нулю. Если этого не происходит и малые отклонения от режима функционирования системы нарастают во времени, такой режим будет *неустойчивым* (см. Лекцию 2).



## Нелинейность

Теперь обсудим другое важное свойство сложных систем — *нелинейность*. Пусть мы имеем дело с неустойчивым режимом. Слегка нарушив режим малым воздействием, мы поначалу будем фиксировать нарастание возмущения. Будет ли оно бесконечным? В реальной жизни — никогда! Отклонение будет нарастать до тех пор, пока не вступит в действие некий механизм нелинейного ограничения процесса нарастания возмущения. Что это такое? Ответим на этот вопрос с физической и математической точек зрения.

С физической точки зрения нарастание амплитуды не может происходить до бесконечности. На первом этапе, когда отклонение от исходного состояния мало, оно может нарастать. А дальше? Дальше, в силу ограниченности энергетических ресурсов системы, это нарастание должно прекратиться или смениться уменьшением амплитуды отклонения. Любой новый режим должен иметь конечную амплитуду и управляют этими процессами нелинейные законы. Мы говорим о нелинейности в том случае, когда свойства системы непосредственно зависят от ее состояния. Приведем пример. Пусть зависимость амплитуды отклонения  $f(x)$  от исходного состояния  $x$  определяется следующим соотношением:

$$f(x) = kx - bx^3, \quad (3.2)$$

где  $k$  и  $b$  — постоянные положительные коэффициенты. Если  $x \ll 1$ , то  $bx^3 \ll kx$  и

$$f(x) \cong kx. \quad (3.3)$$

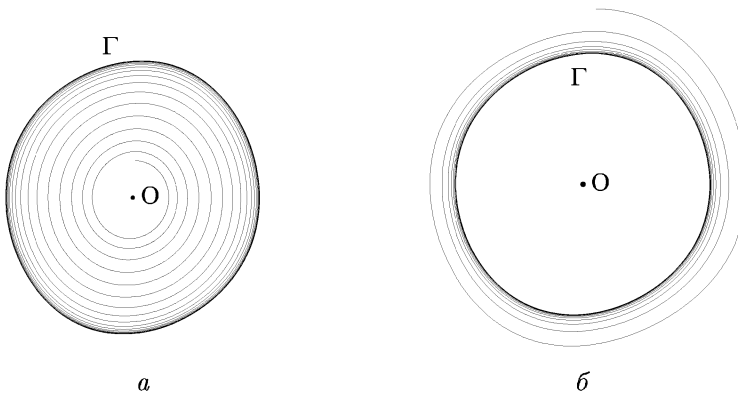
В случае (3.3)  $f(x)$  линейно растет с ростом  $x$ . Если же  $x$  становится сравнимым с единицей, то членом  $bx^3$  пренебрегать уже нельзя. В случае (3.2) рост отклонения  $f(x)$  за счет члена  $kx$  начнет испытывать нелинейное ограничение в силу вычитания величины  $bx^3$ . При некоторых значениях  $x$  величина отклонения (3.2) вновь будет близка к нулю и все начнется сначала: отклонение начнет нарастать, достигнет максимума и затем, испытывая ограничение, опять уменьшится. Система будет как бы автоматически себя регулировать, так как ее свойства зависят от ее текущего состояния.

## Неустойчивость и нелинейное ограничение

Теперь рассмотрим неустойчивую детерминированную систему с учетом действия механизма нелинейного ограничения нарастаний возмущений. Для простоты рассмотрим состояние равновесия, которому

отвечает точка в пространстве фазовых координат системы. Выведем систему из равновесия малым отклонением. Это возмущение начнет нарастать в силу неустойчивости. Далее нарастание возмущения начнет замедляться (вступит в силу механизм нелинейного ограничения). Что можно ожидать в этой ситуации? Во-первых: в силу нелинейного ограничения отклонение уменьшится строго до нуля. Система вернется в исходное состояние равновесия. Теоретически это возможно, однако очень маловероятно, так как исходное состояние равновесия неустойчиво. Более вероятна вторая ситуация: система вернется в малую окрестность исходного состояния (подойдет очень близко к состоянию неустойчивого равновесия) и вновь (в силу неустойчивости) начнет от него удаляться. Этот процесс будет длиться бесконечно во времени! Но реализация этого процесса требует некоторых специальных условий.

Предположим, что мы имеем дело с двумерной дифференциальной динамической системой. Пространство ее состояний — фазовая плоскость с координатами  $x$  и  $y$ . Если малое возмущение состояния равновесия в такой системе будет нарастать, а далее в результате нелинейного ограничения уменьшаться, то возможны два варианта: появление новых устойчивых состояний равновесия вблизи неустойчивого, либо выход траектории на новый режим, отвечающий периодическим колебаниям.

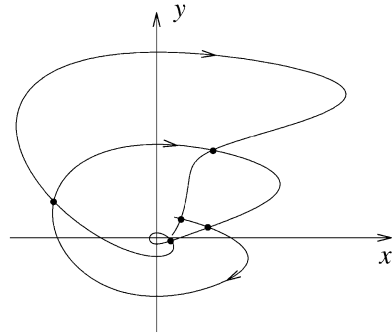


**Рис. 3.1.** Рождение устойчивого предельного цикла  $\Gamma$  в окрестности неустойчивого равновесия  $O$ . Поведение траекторий при малых (*a*) и при больших (*б*) отклонениях от равновесия.

Второй вариант иллюстрирует рис. 3.1. При малых амплитудах возмущения (рис. 3.1,*a*) траектория по спирали удаляется от точки равно-

веса  $O$ . При больших отклонениях (рис. 3.1,б) траектория возвращается. В результате вместо потерявшего устойчивость состояния равновесия появляется новый режим — периодические автоколебания, которым отвечает предельный цикл  $\Gamma$  на фазовой плоскости.

Неустойчивость состояния равновесия в двумерной системе при наличии механизма нелинейного ограничения нарастания возмущений порождает новый режим — режим устойчивых периодических колебаний. Если мы вообразим себе иную ситуацию, когда отклонение от состояния равновесия вначале нарастает, а затем в силу нелинейности вновь стремится к нулю, мы придем к противоречию: фазовая траектория обязана будет самопересекаться (рис. 3.2)! Но это будет означать, что существуют различные начальные условия, приводящие в процессе эволюции к одинаковым состояниям! Это невозможно в силу понятия детерминизма, которое в данном примере проявляется в содержании теоремы единственности решения: при заданных начальных условиях решение существует и оно *единственное*, другого не дано.



**Рис. 3.2.** Поведение динамической системы, которое невозможно реализовать на плоскости в силу пересечения фазовых траекторий. Реально эта картина получается путем проекции трехмерной траектории на плоскость двух переменных

### Детерминированный хаос

Картина принципиально изменится, если мы рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется тремя независимыми переменными (фазовыми координатами). Другими словами, давайте повторим наши рассуждения, осуществив выход с плоскости в трехмерное фазовое пространство. Ничто не запрещает нам реализовать ситуацию рис. 3.2 в пространстве трех измерений. Траектория раскручивается в трехмерном пространстве, удаляясь от точки  $O$  по спирали. Достигнув некоторых значений и испытывая действие механизма нелинейного ограничения, траектория вновь вернется в окрестность исходного состояния. Далее, ввиду неустойчивости, процесс будет повторяться (см. рис. 1.6). Возможны два варианта: траектория, спустя конечное вре-

мя, замкнется, демонстрируя наличие некоторого сложного, но периодического процесса; траектория будет воспроизводить некий аperiodический процесс, если при  $t \rightarrow \infty$  замыкания не произойдет. Второй случай и отвечает режиму детерминированного хаоса! Действительно, работает основной принцип детерминизма: будущее однозначно определено начальным состоянием. Однако, процесс эволюции системы сложный, неperiodический. Чисто внешне он ничем не отличается от случайного! Однако при более детальном анализе вскрывается одно важное отличие этого процесса от случайного: этот процесс воспроизводим! Действительно, повторив еще раз начальное состояние, в силу детерминированности мы вновь однозначно воспроизведем ту же самую траекторию независимо от степени ее сложности. Значит этот неperiodический процесс не является хаотическим в смысле определения хаоса, данного нами выше? Да, это сложный, похожий на случайный, но тем не менее детерминированный процесс. Важно здесь то, что он характеризуется неустойчивостью, и это обстоятельство позволяет нам понять еще одно принципиально важное свойство систем с детерминированным хаосом — *перемешивание*.

## Перемешивание

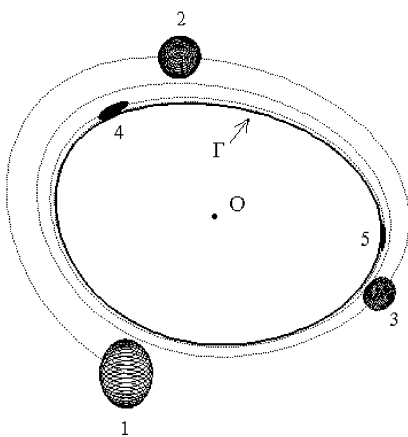
Мы установили, что в диссипативных системах, размерность фазового пространства которых  $N \geq 3$ , теоретически возможен режим сложных неperiodических пульсаций. Этот тип движения детерминирован и характеризуется неустойчивостью. К чему это приводит? Давайте рассуждать. Вначале поговорим об устойчивых режимах движения в детерминированных диссипативных динамических системах.

Рассмотрим в качестве начального состояния не точку с определенными координатами в пространстве состояний  $\mathbf{x}^0$ , а малую сферу радиуса  $\epsilon > 0$ , окружающую эту точку. Любая точка внутри сферы характеризует малое отклонение от  $\mathbf{x}^0$ . Сфера включает совокупность возможных отклонений от исходного состояния, не превышающих по модулю  $\epsilon$ . Теперь применим оператор эволюции и проследим за трансформацией этой сферы. В силу устойчивости выбранного нами режима любое малое отклонение во времени должно затухать! Это означает, что под действием детерминированного закона эволюции шарик радиуса  $\epsilon$  во времени будет сжиматься и при  $t \rightarrow \infty$  его радиус уменьшится до нуля! Сказанное выше иллюстрирует рис. 3.3. Исходный фазовый объем в диссипативных системах во времени уменьшается. Это означает в данном случае, что малые возмущения в итоге будут затухать и система вновь вернется в исходный режим, который является устойчивым.

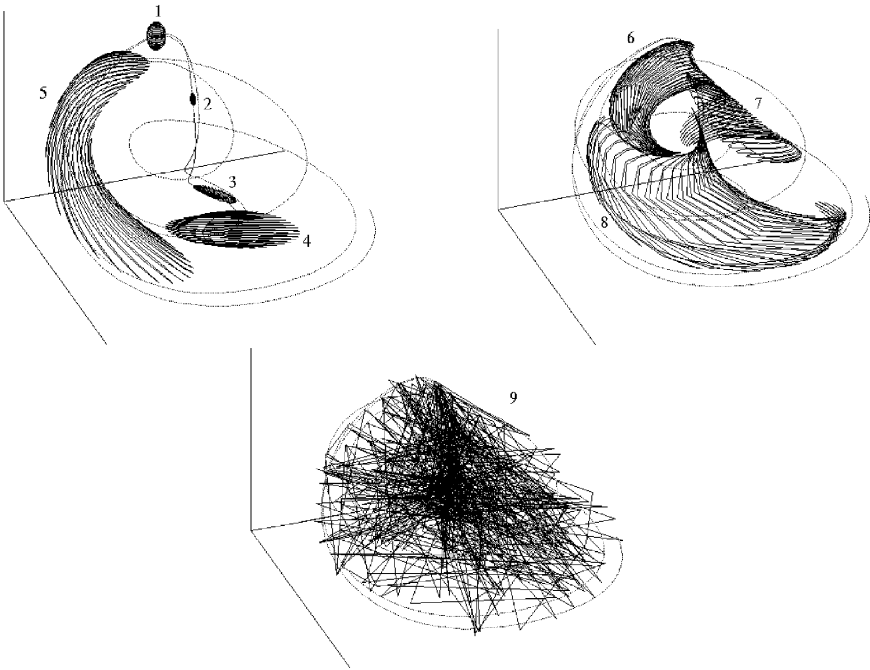
А если исходный режим неустойчив? Что будет в этом случае? Фазовый объем может увеличиваться до бесконечности, если неустойчивая система линейна. Но если система нелинейна и диссипативна, то процесс эволюции начального малого фазового объема будет весьма нетривиальным. Попробуем это понять.

Неустойчивость режима ведет к росту возмущений. Это одно обстоятельство. Второе — диссипативные системы вне зависимости от вида устойчивости вызывают уменьшение элемента фазового объема во времени до нуля, что связано с потерями энергии. Как совместить эти два фактора? Существует единственное решение этой дилеммы: элемент фазового объема по некоторым направлениям должен растягиваться, а по другим сжиматься. Причем, степень сжатия в среднем должна обязательно превалировать над степенью расширения, чтобы в итоге фазовый объем во времени уменьшался! В нелинейных диссипативных системах это оказывается возможным. Вышесказанное иллюстрирует рис. 3.4. В силу наличия механизма нелинейного ограничения фазовая траектория сложного режима колебаний сосредоточена в ограниченной области фазового пространства (см. рис. 1.6). При этом любая малая окрестность исходного начального состояния эволюционирует так, как показано на рис. 3.4, и в итоге перемешивается по всей области, занятой траекторией. Этот процесс весьма трудно представить себе наглядно.

Проведем мысленный эксперимент. В стакан с водой поместим маленькую чайнку и размешаем воду чайной ложкой, вызвав неустойчивость. Чайнка будет при этом двигаться по сложной спиралеобразной траектории, которая обусловлена движением воды в стакане. При этом в любой заданный момент времени мы теоретически можем зафиксировать ее координаты  $\mathbf{x}(t)$  в объеме воды! Теперь вместо чайнки поместим в стакан с водой очень маленькую капельку чернил и вновь размешаем воду чайной ложкой. Что при этом произойдет? Чернила практически



**Рис. 3.3.** Сжатие первоначальной области неопределенности 1 во времени в случае, когда цикл  $\Gamma$  является устойчивым предельным режимом.



**Рис. 3.4.** Эволюция малого первоначального фазового объема 1 во времени в системе со странным аттрактором, иллюстрирующая перемешивание. Исходный объем 1 сжимается по одним и растягивается по другим направлениям (2, 3, 4), изгибается (5, 6), “складывается” (7, 8) и в итоге перемешивается по аттрактору (9).

равномерно разбегутся по всему объему воды, слегка окрасив ее! Частички чернил, первоначально сосредоточенные в маленьком объеме капельки, спустя время перемешивания можно будет обнаружить в *любой* части объема воды в стакане! В жизни этот процесс мы привыкли называть перемешиванием. В математике это понятие также существует и, с точки зрения физической интерпретации, оказывается весьма близким по смыслу. Действительно, поток воды в стакане, созданный движением чайной ложки, можно интерпретировать как действие детерминированного эволюционного оператора динамической системы. Чайника при этом будет двигаться по сложной, но детерминированной (хотя и очень запутанной) траектории. А капелька чернил, которую можно интерпретировать как некий маленький объем в фазовом пространстве вокруг

чайники, под действием оператора эволюции перемешается по всему объему воды!

## **Вероятностные свойства детерминированных систем**

Таким образом, в неустойчивых режимах в детерминированных нелинейных системах с перемешиванием мы можем предсказать будущее состояние однозначно только в случае строгого задания начальных условий. Однако, если учесть сколь угодно малую, но конечную ошибку (то есть рассмотреть капельку чернил вместо чайники), то детерминированное предсказание становится невозможным. Малая область первоначальной неопределенности размывается за счет перемешивания на конечную область в фазовом пространстве. Теперь мы имеем дело с процессом, который ассоциируется с настоящей случайностью, с настоящим хаосом!

Основным свойством динамических систем, демонстрирующих режим детерминированного хаоса, является чувствительная зависимость режима функционирования к сколь угодно малым изменениям начальных условий. Именно это обстоятельство ведет по сути дела к потере детерминированной предсказуемости и необходимости вводить вероятностные характеристики для описания динамики таких систем. В этом смысле становится понятным термин “детерминированный хаос”, который характеризует рождение случайного, непредсказуемого поведения системы, которое управляется детерминированными законами.

Неопределенность в задании начального состояния — ситуация вполне реальная с точки зрения физики. Действительно, в силу конечной точности регистрации состояния любыми приборами, оно определяется с конечной (пусть сколь угодно малой) ошибкой. Это означает, что мы должны анализировать эволюцию во времени не начальной точки, а начальной области вокруг этой точки. В силу перемешивания мы столкнемся с процессом, подробно описанным выше.

## **Детерминированный хаос — математическая экзотика или типичное свойство материального мира?**

Путем простейших рассуждений мы пришли к выводу о возможности режима детерминированного хаоса в нелинейных системах с дис-

сипацией энергии. В современной науке этот эффект строго обоснован теоретически и достоверно подтвержден экспериментально. Может возникнуть вопрос, не является ли этот феномен математической экзотикой в том смысле, что его реализация теоретически возможна, но практически — маловероятна? Нет, и еще раз нет! После открытия детерминированного хаоса, ясного понимания свойств эффекта и разработки методов его диагностики хаос был обнаружен практически во всех областях современного естествознания: в физике, радиотехнике, химии, биологии, механике, экономике и др. Может возникнуть естественный вопрос, почему до недавнего времени этот типичный режим функционирования динамических систем не был обнаружен и описан? Этому есть объяснение.

Хотя теоретически подавляющее число реальных материальных систем и процессов нелинейны, существует широкий класс процессов, достаточно корректно описываемых в линейном или квазилинейном приближении. Линейная теория динамических систем и процессов разработана достаточно полно и позволяет дать их исчерпывающее описание, хорошо согласующееся с экспериментом. Но детерминированный хаос — явление, присущее исключительно нелинейным системам! А в отношении нелинейной теории дела обстоят намного хуже. Пока не существует, например, общей теории решения нелинейных дифференциальных уравнений. Анализ динамики нелинейных систем и сейчас требует искусства, творческого подхода, индивидуального в каждом конкретном случае.

Именно отсутствие строгих теоретических результатов применительно к нелинейным системам сдерживало открытие и понимание этого универсального явления. Экспериментаторы давно сталкивались с проявлением хаоса. Однако ограниченность теоретических знаний, обусловленная влиянием линейной и квазилинейной структуры научного мышления, приводила к ошибкам в трактовке наблюдаемых результатов. Делался вывод о том, что шумоподобные колебания обусловлены либо действием флуктуаций, либо огромным числом степеней свободы системы, либо неисправностью измерительной аппаратуры.

Сейчас положение изменилось. Наша жизнь все более настоятельно требует количественного учета таких факторов, как сверхвысокая плотность, сверхвысокая температура, давление, сверхвысокие скорости, плотности населения и т.д. А как известно, учет этих факторов требует принципиально нелинейного подхода к описанию эволюционных процессов. Эти процессы моделируются и анализируются с помощью компьютеров, для которых нелинейность модели не является препят-



ствием для ее детального анализа. И выяснилось, что в таких системах хаотический режим функционирования скорее правило, чем исключение!

## Странные аттракторы

Математическим образом режима функционирования диссипативной динамической системы служит *аттрактор* — предельное множество траекторий в фазовом пространстве системы, к которому стремятся все траектории из некоторой окрестности этого множества. Если это предельное множество есть устойчивое состояние равновесия — аттрактор системы будет просто неподвижной точкой, если это устойчивое периодическое движение — аттрактором будет замкнутая кривая, называемая предельным циклом. Раньше считалось, что аттрактор есть образ исключительно устойчивого режима функционирования системы. Сейчас мы понимаем, что режим детерминированного хаоса тоже аттрактор в смысле определения предельного множества траекторий в ограниченной области фазового пространства (см. рис. 1.6). Однако такой аттрактор имеет два существенных отличия: траектория такого аттрактора непериодическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима первоначально нарастают). Именно эти отличия и привели к необходимости ввести в рассмотрение новый термин. С легкой руки известного математика Ф. Такенса такие аттракторы стали называть *странными*.

Каков критерий “странности”? Как установлено теоретиками, основным критерием странности аттрактора является неустойчивость траектории. Причем неустойчивость обязана быть экспоненциальной! Это означает, что малое возмущение режима  $D(O)$  должно во времени увеличиваться по экспоненте:

$$D(t) = D(O) e^{\lambda t}, \quad \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(O)}, \quad (3.4)$$

где  $\lambda$  — показатель Ляпунова.

Оказалось, что положительность величины  $\lambda$  говорит не только об экспоненциальной неустойчивости режима колебаний, но доказывает наличие в системе перемешивания. Если установлено, что исследуемый режим имеет положительный показатель Ляпунова  $\lambda > 0$ , то следствием будут: непериодичность в зависимости от времени любой из координат состояния, сплошной спектр мощности (в спектре колебаний присутствуют все частоты из некоторого интервала) и спадающая во време-

ни автокорреляционная функция. До недавнего времени с таким поведением указанных характеристик однозначно связывали представления о случайном процессе. Теперь мы знаем, что подобными свойствами может обладать процесс, порождаемый детерминированными законами. Это обстоятельство и послужило основанием называть такие процессы детерминированным хаосом.

## Выводы

В результате простого качественного рассмотрения особенностей нелинейных диссипативных динамических систем мы пришли к ряду новых принципиальных выводов. Вот основные из них:

- В дифференциальных системах с размерностью фазового пространства  $N \geq 3$  теоретически возможны установившиеся непериодические режимы колебаний.
- Принципиальной особенностью таких колебаний является их неустойчивость, что приводит к чувствительной зависимости динамики системы от малых возмущений.
- Неустойчивость нелинейной системы в совокупности с ограниченностью энергии колебаний может вызывать перемешивание.
- Наличие перемешивания приводит к необходимости введения статистического описания динамики детерминированных систем со странными аттракторами как наиболее удобного.

Перечисленные результаты убеждают нас в том, что режимы функционирования детерминированных нелинейных систем со странными аттракторами действительно обладают рядом специфических свойств, совокупность которых включается в понятие “детерминированный хаос”.

## Лекция 4

# Гиперболические (странные) аттракторы динамических систем

*В лекции дается определение аттрактора диссипативной динамической системы с конечным числом степеней свободы. Формулируются условия грубой гиперболичности, рассматриваются квазигиперболические аттракторы и их основные свойства.*

*In the lecture the definition of an attractor of a dissipative dynamical system with a finite number of freedom degrees is given. The conditions of robust hyperbolicity are formulated and quasi-hyperbolic attractors and their major properties are considered.*

## Введение

Одним из основных методов исследования автоколебательных систем является формулировка и анализ решений уравнений, описывающих их динамику. Поэтому математический раздел “динамические системы” является одним из основных при фундаментальной подготовке по теории колебаний. Автоколебательные режимы могут иметь место исключительно в нелинейных и диссипативных динамических системах.

В силу сжатия фазового объема предельное множество фазовых траекторий в диссипативных системах всегда будет иметь нулевой объем. Однако структура предельного множества при этом может быть различной: точка, линия, поверхность или множество поверхностей, имеющее в сечении Пуанкаре структуру типа канторовой. Эти отличия в структуре предельного множества фазовых траекторий составляют основу классификации типов аттракторов динамических систем [15].

Долгое время с образом динамического хаоса связывался так называемый *странный аттрактор*. Все нетривиальные режимы автоколебаний, общим свойством которых являлось отсутствие периодичности во времени, ассоциировались именно со странным аттрактором. Позднее выяснилось, что хаотические автоколебания по своим свойствам могут существенно различаться, что обуславливает различия в структуре соответствующих им аттракторов. Оказалось, что странный аттрактор есть образ некоторого “идеального” хаоса, удовлетворяющего ряду математических требований. Было установлено, что в реальных системах режим странного (в строгом смысле) аттрактора не реализуется. То, что мы наблюдаем в экспериментах, чаще всего отвечает режимам *квазигиперболического* аттрактора или *квазиаттрактора*. Квазиаттракторы более сложно устроены. Отличительной особенностью гиперболических, квазигиперболических аттракторов и квазиаттракторов является *экспоненциальная неустойчивость* фазовых траекторий и дробная размерность. Экспоненциальная неустойчивость является критерием хаотического поведения системы. Дробная метрическая размерность свидетельствует о том, что аттрактор – сложный геометрический объект [3, 4].

В настоящей лекции приводятся определения и свойства гиперболических и почти гиперболических аттракторов дифференциальных и дискретных диссипативных нелинейных динамических систем с конечным числом степеней свободы.

## Что такое аттрактор?

Изменение во времени состояния автономной динамической системы описывается либо системой обыкновенных дифференциальных уравнений, либо системой дискретных отображений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_N, \mu_1, \dots, \mu_k) \quad (4.1)$$

или

$$\begin{aligned} x_{n+1}^i &= f_i(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N, \mu_1, \dots, \mu_k), \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь  $x_i(t)$  (или  $x_n^i$ ) — переменные, однозначно описывающие состояние системы (ее фазовые координаты);  $\mu_l$  ( $l = 1, 2, \dots, k$ ) — параметры системы;  $f_i(x, \mu)$  — в общем случае нелинейные функции. Решение системы (4.1) существует, единственно для данных начальных условий  $x_i(0)$  (или  $x_0^i$ ) и гладко зависит от изменения начального состояния (теорема Коши).

Будем говорить исключительно об автоколебательных режимах движения системы (4.1). Это означает, что в системе существуют установившиеся колебания, характеристики которых не зависят в определенных пределах от выбора начального состояния. В качестве предельного случая сюда же мы отнесем и режим устойчивого состояния равновесия.

Обратимся к фазовому пространству  $\mathbf{R}^N$  системы (4.1), зафиксировав значения всех параметров системы  $\mu_k$ . Пусть имеется некоторая конечная (или бесконечная) область  $G_1$ , принадлежащая  $\mathbf{R}^N$ , которая включает в себя подобласть  $G_0$ . Области  $G_1$  и  $G_0$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1) для любых начальных условий  $x_i(0)$  (или  $x_0^i$ ) из области  $G_1$  при  $t \rightarrow \infty$  (или  $n \rightarrow \infty$ ) все фазовые траектории рано или поздно достигают области  $G_0$ ;
- 2) область  $G_0$  представляет собой минимальное компактное подмножество в фазовом пространстве системы;
- 3) если фазовая траектория принадлежит области  $G_0$  в момент времени  $t = t_1$  ( $n = n_1$ ), то она будет принадлежать  $G_0$  всегда, то есть для любых  $t \geq t_1$  ( $n > n_1$ ) фазовая траектория будет находиться в области  $G_0$ .

Если эти условия выполняются, то область  $G_0$  называется *аттрактором динамической системы* (4.1). Другими словами, аттрактор  $G_0$  —

это инвариантное относительно закона (4.1) минимальное предельное множество траекторий системы, куда стремятся и там остаются любые траектории из области  $G_1$ , охватывающей  $G_0$ . Область  $G_1$  называется *областью (или бассейном) притяжения аттрактора  $G_0$* . В области  $G_1$  могут существовать исключительно переходные, нестационарные типы движений. Предельное множество  $G_0$  отвечает установившимся (предельным) типам движения.

## Регулярные аттракторы

До открытия детерминированного хаоса было известно всего три типа устойчивых установившихся решений динамической системы (4.1): состояние равновесия, когда после переходного процесса система достигает стационарного (не меняющегося во времени) состояния, устойчивое периодическое решение и устойчивое квазипериодическое решение. Соответствующими аттракторами дифференциальной системы в этих случаях являются: точка в фазовом пространстве, предельный цикл и предельный  $n$ -мерный тор. Сигнатура спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) фазовой траектории в этих случаях будет [3]:

$$\begin{aligned} & \text{“ - ”, “ - ”, } \dots, \text{ “ - ” — состояние равновесия,} \\ & \text{“ 0 ”, “ - ”, “ - ”, } \dots, \text{ “ - ” — предельный цикл,} \\ & \underbrace{\text{“ 0 ”, “ 0 ”, } \dots, \text{ “ 0 ”}}_n, \text{ “ - ”, } \dots, \text{ “ - ” — } n\text{-мерный тор, } n \geq 2. \end{aligned}$$

Непериодическим решениям системы (4.1) могут соответствовать странные хаотические аттракторы сложной геометрической структуры, которые имеют, по крайней мере, один положительный ляпуновский показатель и, как следствие, дробную размерность, определяемую по формуле Каплана–Йорка [3]:

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (4.2)$$

где  $j$  — наибольшее целое число, для которого  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$ . Ляпуновская размерность  $D$ , рассчитанная по формуле (4.2), представляет собой одну из фрактальных размерностей множества и служит оценкой снизу для метрической размерности аттрактора. Если применить фор-

муду (4.2) к указанным трем типам аттракторов, то мы получим нулевую размерность для точки,  $D=1$  — для предельного цикла и  $D=n$  — для  $n$ -мерного тора. Во всех случаях фрактальная размерность строго совпадает с метрической размерностью аттракторов. То обстоятельство, что указанные типы решений являются асимптотически устойчивыми, а размерность  $D$  дается целым числом и строго совпадает с метрической, позволяет назвать указанные типы аттракторов регулярными. Нарушение одного из сформулированных условий исключает аттрактор из класса регулярных. Как стало ясным, нерегулярные (хаотические) аттракторы требуют введения специальной классификации [4,15].

## Странные (хаотические) аттракторы

Новый тип аттрактора динамической системы (4.1) был впервые обнаружен Лоренцем в 1963 г. при численном исследовании знаменитой теперь модели Лоренца. Строгое математическое доказательство существования непериодических решений системы (4.1) было дано в 1971 году Рюзлем и Такенсом, ими же было введено понятие странного аттрактора как образа детерминированного хаоса. С тех пор явление детерминированного хаоса и понятие странного аттрактора во многих работах практически однозначно связывают друг с другом. Однако при более детальном рассмотрении это оказывается не всегда справедливым и требует пояснений.

### Грубые гиперболические аттракторы

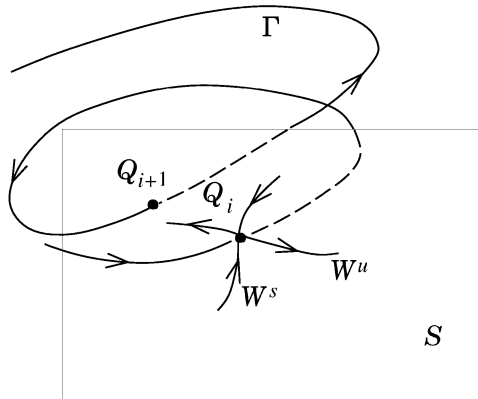
Доказательство существования странного аттрактора было дано в жестком предположении, что динамическая система (4.1) является грубой гиперболической. Что это означает? Система является гиперболической, если все фазовые траектории седловые. Точка как образ траектории в сечении Пуанкаре в гиперболической системе всегда является седлом. Грубость означает, что при малом возмущении правых частей (4.1) и вариации управляющих параметров в конечной области их значений все траектории продолжают оставаться седловыми.

Гиперболические аттракторы должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) состоять из континуума “неустойчивых листов” или кривых, всюду плотных в аттракторе, вдоль которых близкие траектории экспоненциально расходятся;

- 2) в окрестности любой точки иметь геометрию произведения канторова множества на интервал;
- 3) иметь окрестность в виде расщепленных устойчивых слоев, вдоль которых близкие траектории сходятся к аттрактору.

Таким образом, грубость означает, что свойства 1–3 сохраняются при возмущениях.



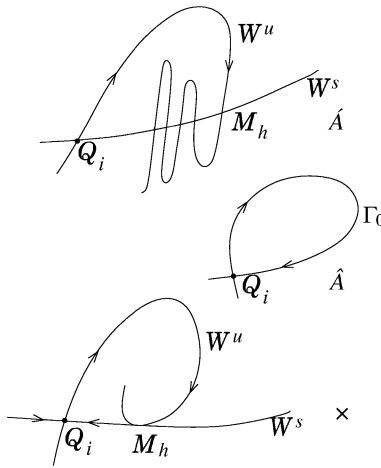
**Рис. 4.1.** Седловая точка  $Q_i$  как образ гиперболической траектории в сечении Пуанкаре.

На рис. 4.1 представлена седловая траектория  $\Gamma$  и соответствующие точки  $Q_i$  ее пересечения с секущей поверхностью Пуанкаре  $S$ . Данный рисунок иллюстрирует также локальное поведение устойчивых и неустойчивых многообразий седловой точки  $Q_i$ .

Однако того, что локально точка  $Q_i$  пересечения  $\Gamma$  с  $S$  является грубым седлом, оказывается недостаточно для грубой гиперболичности. Необходимы некоторые условия относительно глобальных (нелокальных) свойств устойчивых и неустойчивых многообразий.

Обратимся к рис. 4.2. В силу наличия аттрактора устойчивые и неустойчивые многообразия  $W^s$  и  $W^u$  обязаны быть сосредоточены в области  $G_0$ . При этом они могут пересекаться с образованием гомоклинических точек (поверхностей), образуя так называемые гомоклинические структуры, которые в грубых гиперболических системах обязаны быть грубыми. Это означает, что с топологической точки зрения структура пересечения  $W^s$  и  $W^u$  должна соответствовать рис. 4.2,а и не меняться качественно при возмущениях. Случаи рис. 4.2,б





**Рис. 4.2.** Возможные случаи пересечения устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой точки  $Q_i$  в сечении Пуанкаре.

и  $\epsilon$  исключаются из рассмотрения, так как характеризуют два негрубых явления: явление замыкания многообразий с образованием петли (рис. 4.2, б) и явление касания устойчивого и неустойчивого многообразий (рис. 4.2, в). Если нелокальные свойства многообразий при возмущениях динамической системы приводят к негрубым ситуациям, изображенным на рис. 4.2, б и в, возможны бифуркации решений. В грубых гиперболических системах никаких бифуркаций происходить не должно. При возмущениях системы траектория  $\Gamma$  всегда остается седловой, что соответствует случаю рис. 4.2, а. Как мы увидим в дальнейшем, негрубые случаи рис. 4.2, б и в являются причиной появления более сложных устроенных хаотических притягивающих множеств — так называемых квазиаттракторов. Странные (в смысле Рюэля–Тakens) аттракторы всегда являются грубыми гиперболическими предельными множествами.

Основной чертой, отличающей странные хаотические аттракторы от регулярных, является экспоненциальная неустойчивость фазовой траектории на аттракторе. Спектр ляпуновских экспонент в этом случае включает, как минимум, один положительный показатель. В соответствии с (4.2) фрактальная размерность аттрактора всегда больше двух и в общем случае не будет выражаться целым числом. Минимальная размерность фазового пространства, в которое можно “вложить” странный

аттрактор, оказывается равной трем. Таким образом, режим детерминированного хаоса можно наблюдать в дифференциальных динамических системах размерности  $N \geq 3$ .

В математике известны, по крайней мере, два примера грубых гиперболических аттракторов: аттрактор Смейла–Вильямса и аттрактор Плыкина. К сожалению, в реальных системах естествознания режим строго гиперболического грубого хаоса до сих пор не обнаружен. Истинно “странные” аттракторы являются идеальной, но недостижимой пока моделью детерминированного хаоса.

### **Квазигиперболические аттракторы.**

#### **Аттракторы типа Лоренца**

Условия гиперболичности аттрактора, сформулированные выше, для реальных динамических систем не выполняются. Вместе с тем известны динамические системы, аттракторы которых являются близкими к гиперболическим. Такие аттракторы являются хаотическими, не включают устойчивых регулярных аттракторов и сохраняют эти свойства при возмущениях. С математической же точки зрения, для таких систем нарушается, по крайней мере, одно из трех условий гиперболичности, сформулированных выше.

Мы будем называть почти гиперболические аттракторы квазигиперболическими. Известны квазигиперболические аттракторы Лози, Бельха и аттракторы типа Лоренца [4]. Для указанных аттракторов существуют строгие доказательства того, что они являются квазигиперболическими в указанном выше смысле. Целесообразно выявить и систематизировать отличительные экспериментальные характеристики квазигиперболических аттракторов, которые можно использовать для их диагностики при компьютерном моделировании.

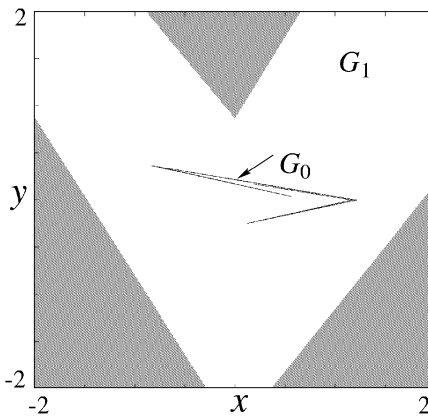
**Квазигиперболический аттрактор в системе Лози.** Обоснование существования квазигиперболического аттрактора в динамической системе требует доказательства двух положений: 1) в аттракторе все фазовые траектории являются неустойчивыми; 2) при вариации параметров системы устойчивых траекторий не возникает. Эта сугубо математическая задача в силу нелинейности динамической системы не может быть решена в общем виде. Однако применительно к некоторым конкретным динамическим системам эта задача, к счастью, имеет решение.

Рассмотрим наиболее простой пример — *аттрактор Лози* в двумер-

ной дискретной динамической системе:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - a|x_n| + y_n, \\y_{n+1} &= bx_n.\end{aligned}\quad (4.3)$$

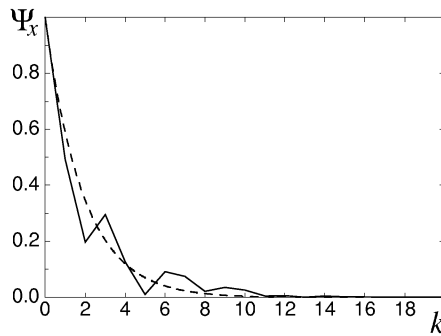
Система (4.3) представляет собой нелинейное взаимно однозначное диссипативное (для  $b < 1!$ ) отображение, которое в силу диффеоморфизма является в строгом смысле отображением Пуанкаре некоторой дифференциальной системы с размерностью фазового пространства  $N = 3$ . Поэтому свойства, обнаруженные и доказанные для этой системы, будут достоверно применимы к потоку в  $\mathbf{R}^3$ .



**Рис. 4.3.** Аттрактор Лози  $G_0$  и бассейн его притяжения  $G_1$  для  $a = 1.5$  при  $b = 0.3$  (траектории из серой области имеют в качестве аттрактора бесконечность).

Теоретически установлено, что в системе (4.3) в области значений  $1.3 < a < 1.8$  существует единственный хаотический аттрактор, который не содержит устойчивых неподвижных точек. Этот аттрактор известен в литературе как квазигиперболический аттрактор Лози, для которого нарушается 2-е условие гиперболичности.

На рис. 4.3 приведен аттрактор Лози и область (бассейн) его притяжения. Аттрактор Лози  $G_0$  — единственное притягивающее множество в интервале  $1.3 < a < 1.8$  при  $b = 0.3$  с однородным бассейном притяжения  $G_1$ . Любая начальная точка  $(x_0, y_0)$ , принадлежащая бассейну притяжения  $G_1$ , со временем стремится к аттрактору Лози.

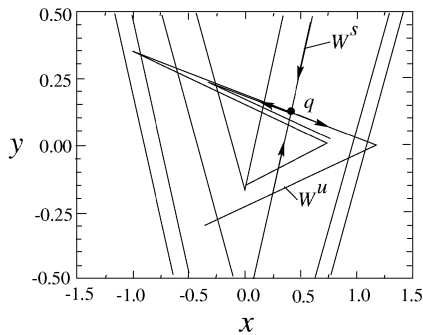


**Рис. 4.4.** Автокорреляционная функция для  $a = 1.75$ . Пунктирной линией показана аппроксимация экспоненциальной функцией ( $\lambda_1 = 0.53$  — старший ляпуновский показатель, соответствующий параметру  $a$ ).

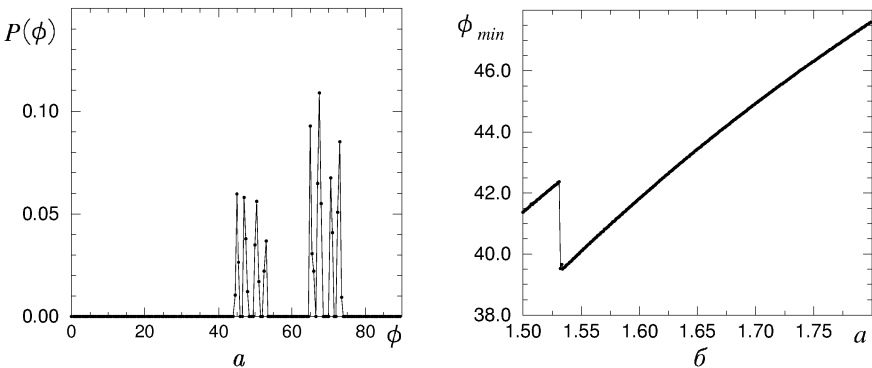
Характерной является зависимость старшего показателя Ляпунова от параметра  $a$ . При фиксированном  $b = 0.3$  аттрактор Лози возникает жестко при  $a_{кр} = 1.3$  и остается хаотическим во всей области существования  $1.3 < a < 1.8$ . Зависимость  $\lambda_1(a)$  не имеет провалов до нуля и представляет собой гладкую положительно определенную функцию. Этот результат отражает факт отсутствия устойчивых неподвижных точек (окон устойчивости) в области существования аттрактора Лози.

Спектр мощности  $S(\omega)$ , рассчитанный по координате  $x_n$  в области существования аттрактора Лози, является гладкой функцией и не включает явных выбросов на каких-либо характерных частотах. Вследствие этого автокорреляционная функция (АКФ) процесса  $x_n$  спадает по закону, близкому к экспоненциальному (рис. 4.4).

Как уже отмечалось, для грубых гиперболических аттракторов должно выполняться условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловой траектории. Сопоставление рис. 4.3 и 4.5 показывает, что устойчивые многообразия седловых циклов определяют границы бассейна притяжения аттрактора, а сам хаотический аттрактор располагается вдоль неустойчивых сепаратрис, повторяя их форму. Из рис. 4.5 видно, что пересечение многообразий всюду трансверсально и появление гомоклинических траекторий не ведет к рождению устойчивых периодических орбит. Гиперболическое хаотическое множество — единственное притягивающее предельное множество в фазовом пространстве системы (4.3).



**Рис. 4.5.** Поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седлового состояния равновесия  $q$  отображения Лози при  $a = 1.7$ ,  $b = 0.3$ .



**Рис. 4.6.** Распределение вероятностей угла  $\phi$  между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий хаотической траектории на аттракторе Лози для  $a = 1.7$ ,  $b = 0.3$  (а); зависимость минимального угла  $\phi_{min}$  от параметра системы  $a$  при  $b = 0.3$  (б).

Система Лози является одной из простейших, для которых условие гиперболичности траекторий на хаотическом аттракторе можно проверить в численном эксперименте. С этой целью была разработана специальная программа, позволяющая рассчитать вероятность  $P(\phi)$  угла  $\phi$  между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий седловой траектории  $(x_n, y_n)$  при  $n \rightarrow \infty$  (рис. 4.6,а) [4]. Расчеты углов были проведены для 18000 точек на аттракторе. Из графика видно, что существует некоторое минимальное значение, принимаемое углом  $\phi$ , и оно отлично от нуля. Минимальное значение  $\phi_{min}$  зависит от параметра

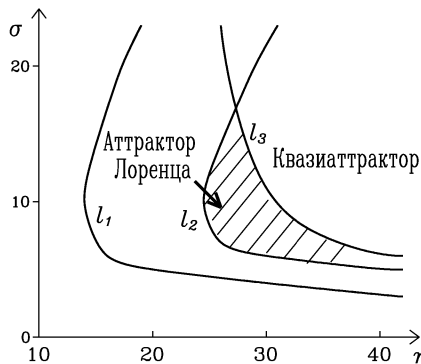
ров отображения (рис. 4.6,б). Во всем интервале значений  $a$ , где существует хаотический аттрактор, минимальный угол между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий фазовой траектории больше  $40^\circ$  и в нуль не обращается. Многообразия хаотических траекторий ведут себя так же, как и многообразия седлового цикла: они всегда трансверсальны.

**Аттрактор Лоренца.** Рассмотрим пример квазигиперболического аттрактора в дифференциальной системе — в системе Лоренца. Для аттрактора Лоренца, как и для аттрактора Лози, нарушается одно из требований гиперболичности (условие 2). Аттракторы типа Лоренца обнаружены в ряде систем и являются типичным примером квазигиперболических аттракторов. Доказано, что аттрактор Лоренца включает только седловые траектории, при вариации параметров бифуркации в нем отсутствуют, устойчивые точки или циклы не возникают. Аттрактор Лоренца характеризуется качественно теми же свойствами, что и аттрактор Лози, и рассматривается как классический пример квазигиперболического хаоса.

Уравнения Лоренца были получены из уравнений Навье–Стокса в задаче о тепловой конвекции и имеют вид

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (4.4)$$

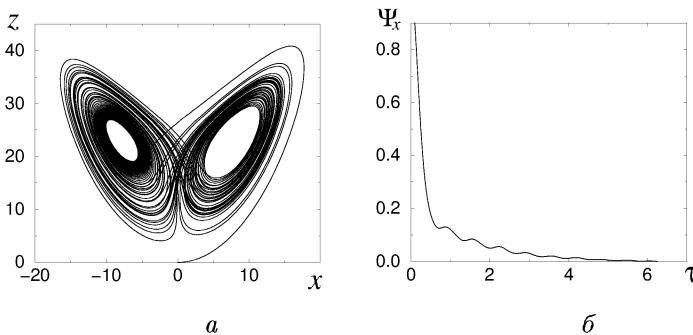
где  $\sigma$ ,  $b$  и  $r$  — управляющие параметры. К уравнениям типа (4.4) сводятся некоторые модели лазеров, а также модель дискового динамо [3,4,9].



**Рис. 4.7.** Бифуркационная диаграмма системы Лоренца на плоскости параметров  $r$  и  $\sigma$  для  $b = 8/3$ .

Отметим, что в системе (4.4) режим квазигиперболического хаоса реализуется в конечной области значений ее управляющих параметров. На рис. 4.7 представлена бифуркационная диаграмма системы (4.4). Существованию аттрактора Лоренца отвечает заштрихованная область в параметрическом пространстве. Фазовый портрет аттрактора Лоренца представлен на рис. 4.8,а. Вне указанной области свойства хаотического аттрактора будут иными: аттрактор Лоренца трансформируется в квазиаттрактор.

Назовем типичные свойства аттрактора Лоренца: спектр ЛХП не изменяется при вариации начальных условий, так как аттрактор Лоренца является единственным, бассейном притяжения которого служит все фазовое пространство; спектр ЛХП практически не меняется, если варьировать управляющие параметры системы в области существования аттрактора Лоренца. Эти свойства наглядно иллюстрируют грубость аттрактора Лоренца с точки зрения эксперимента: структура аттрактора сохраняется при вариации параметров и начальных условий, бифуркации аттрактора отсутствуют.



**Рис. 4.8.** Фазовый портрет (а) и автокорреляционная функция (б) аттрактора Лоренца при  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  и  $b = 8/3$ .

Следствием хаотической динамики является характерный вид автокорреляционной функции. Автокорреляционная функция аттрактора Лоренца экспоненциально спадает с увеличением времени практически монотонно, что иллюстрирует рис. 4.8,б. Сравнение графиков автокорреляционных функций аттракторов Лоренца и Лози свидетельствует о качественной эквивалентности динамических процессов в почти гиперболических системах.

## **Заключение**

В лекции мы рассмотрели свойства грубых гиперболических диссипативных динамических систем и привели определение аттрактора. С целью понимания основных отличий хаотических решений от регулярных, проанализированы понятия регулярного и хаотического аттракторов. В качестве математического образа хаотических автоколебаний рассмотрены понятия грубого гиперболического и квазигиперболического аттракторов и проанализированы их основные свойства. Гиперболические и квазигиперболические аттракторы отражают классические свойства детерминированного хаоса, но являются в определенной степени идеальной моделью хаоса. Это отражается в основных свойствах гиперболических аттракторов: гиперболический аттрактор всегда единственный, имеет однородный бассейн притяжения, не меняет своей структуры при вариации параметров системы и начального состояния. В то же время гиперболический аттрактор характеризуется экспоненциальной неустойчивостью фазовых траекторий на нем и фрактальной геометрией, то есть является странным в сравнении с регулярным аттрактором.

Как будет показано в следующей лекции, более реалистической моделью хаоса являются так называемые негиперболические динамические системы и соответствующие им хаотические аттракторы, имеющие более сложную структуру и иные свойства.



## Лекция 5

# Аттракторы негиперболических динамических систем

*В лекции дается определение квазиаттрактора как математического образа динамического хаоса в фазовом пространстве негиперболических динамических системы. На примере дискретной и дифференциальной динамических систем иллюстрируются основные свойства квазиаттракторов. Приводятся определения и описываются свойства нестранных хаотических и странных нехаотических аттракторов.*

*In the lecture we formulate a definition of a quasiattractor as the mathematical image of dynamical chaos in the phase space of nonhyperbolic dynamical systems. General properties of quasiattractors are illustrated with some discrete and differential dynamical systems. Definitions and properties of nonstrange chaotic and strange nonchaotic attractors are described.*

## Введение

Рассмотренные в предыдущей лекции гиперболические аттракторы динамических систем являются математической идеализацией и, как правило, не соответствуют реальности. На практике наиболее распространены динамические системы, в которых реализуются негрубые гомоклинические траектории типа изображенных на рис. 4.2, б и в. В соответствии с теорией Ньюхауса следствием негрубой гомоклиники является рождение множества устойчивых периодических аттракторов с исчезающе малыми бассейнами притяжения. Периодические аттракторы сосуществуют в фазовом пространстве системы наряду с хаотическими и резко усложняют структуру аттрактора реальной динамической системы. Для описания структуры и свойств хаоса вводится определение квазиаттрактора как математического образа хаоса в негиперболических динамических системах [3,4,15].

Как показали исследования, квазиаттракторы являются типичными притягивающими множествами и более адекватно иллюстрируют свойства экспериментально наблюдаемых хаотических режимов колебаний. В настоящей лекции мы дадим определение и проиллюстрируем на ряде примеров свойства негиперболических аттракторов.

## Квазиаттракторы и их свойства

В системах с квазиаттракторами реализуются режимы детерминированного хаоса, характеризуемые экспоненциальной неустойчивостью траекторий и фрактальной структурой аттрактора. С этой точки зрения характеристики указанных режимов автоколебаний идентичны основным характеристикам грубых гиперболических аттракторов и квазигиперболических аттракторов. Однако есть весьма существенное различие, которое требует понимания во избежание неверной трактовки экспериментальных результатов. Отличительной чертой квазиаттракторов является одновременное сосуществование счетного множества различных хаотических и регулярных притягивающих подмножеств в ограниченном элементе объема фазового пространства системы при фиксированных значениях ее параметров. Эта совокупность всех сосуществующих предельных множеств траекторий в ограниченной области  $G_0$  фазового пространства, куда стремятся все или почти все траектории из области  $G_1$ , включающей  $G_0$ , и называется *квазиаттрактором* динамической системы. Отсюда следует чрезвычайно сложная структура вложенных бассейнов их притяжения. Но этим сложность не ограничивается. При конечной вариации параметров системы в силу эффектов го-

моглинического касания реализуются каскады различных бифуркаций как регулярных, так и хаотических аттракторов. Соответственно осуществляется бифуркационная перестройка их бассейнов притяжения. Причиной сложности квазиаттракторов являются эффекты гомолинического касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых траекторий или возникновение петли сепаратрисы седло-фокуса, которые имеют место на множестве значений параметров ненулевой меры. Другими словами, нарушается условие трансверсальности многообразий.

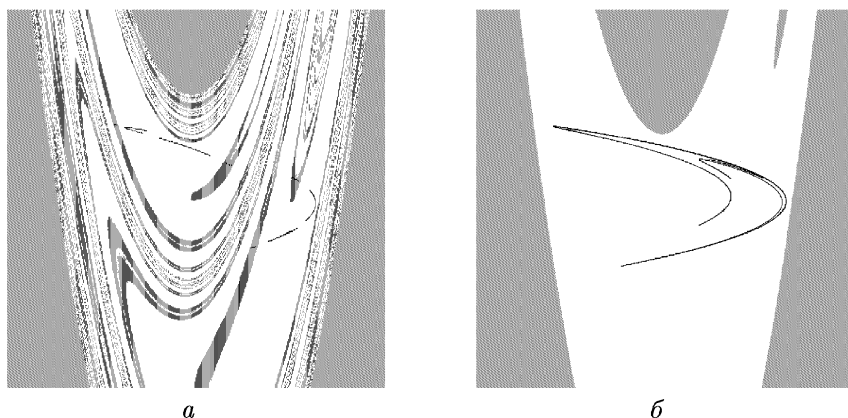
Если при этом учесть, что бассейны притяжения сосуществующих предельных множеств могут иметь фрактальную структуру и составлять чрезвычайно узкие области в фазовом пространстве, то становится понятно, насколько важны проблемы точности расчетов на ЭВМ и влияния флуктуаций.

**Квазиаттрактор в отображении Хенона.** Рассмотрим структуру и свойства квазиаттрактора известной модели Хенона:

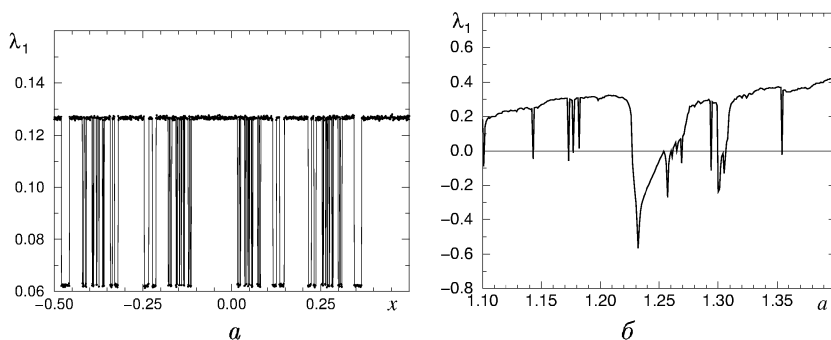
$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= bx_n.\end{aligned}\tag{5.1}$$

При  $0 < b < 1$  отображение (5.1) является диссипативным и характеризуется наличием квазиаттрактора. Отображение (5.1) взаимно однозначно, то есть является диффеоморфизмом. Отображение Хенона отличается от отображения Лози тем, что в качестве нелинейности включает гладкую квадратичную функцию.

Рассмотрим фазовые портреты притягивающих множеств системы (5.1) вместе с бассейнами притяжения и их эволюцию при вариации параметра  $a$  для  $b = 0.3$ . Рис. 5.1, *a* иллюстрирует режим сосуществования двух хаотических притягивающих подмножеств на фазовой плоскости. Видна сложная структура вложенных бассейнов их притяжения. Если менять начальные условия, то наблюдается резкое чередование двух режимов. На рис. 5.2, *a* представлены результаты расчета старшего показателя Ляпунова для  $a = 1.078$  в зависимости от изменения начального значения координаты  $x$  при фиксированном  $y$ . Максимальный показатель  $\lambda_1$  случайным образом "скачет" между значениями  $\lambda_1 = 0.126$  и  $\lambda_1 = 0.062$ , свидетельствуя о переходах системы с одного хаотического аттрактора на другой. Если сравнить эти результаты с видом структуры бассейнов притяжения (рис. 5.1, *a*), то становится понятным, почему это происходит. Изменение начальных условий приводит к пересечению границ соответствующих бассейнов притяжения.



**Рис. 5.1.** Аттракторы, реализующиеся в системе Хенона, и структура бассейнов их притяжения в фазовом пространстве  $(x_n, y_n)$  при  $b = 0.3$  для  $a = 1.078$  (а) и для  $a = 1.32$  (б).



**Рис. 5.2.** Зависимость старшего ляпуновского показателя системы Хенона от начальных значений координаты  $x$  при  $y = 0.5$  и  $b = 0.3$  для  $a = 1.078$  (а) и от параметра  $a$  при  $b = 0.3$  (б).

Бассейн аттрактора для  $a = 1.32$  (рис. 5.1,б) выглядит однородным, что должно свидетельствовать о наличии лишь одного аттрактора. Однако известно, что в системе сосуществуют устойчивые циклы больших периодов с очень узкими бассейнами притяжения, которые в численном счете не регистрируются.

Если менять управляющий параметр  $a$  в области квазиаттрактора  $1.1 < a < 1.4$ , то наблюдается чередующаяся картина смены регулярных и хаотических аттракторов. Результаты расчетов старшего ляпу-

новского показателя  $\lambda_1$  в зависимости от  $a$  представлены на рис. 5.2,б: зависимость  $\lambda_1(a)$  характеризуется наличием как положительных, так и отрицательных значений  $\lambda_1$ , что свидетельствует о нерегулярном чередовании хаотических и периодических аттракторов в системе при вариации параметра.

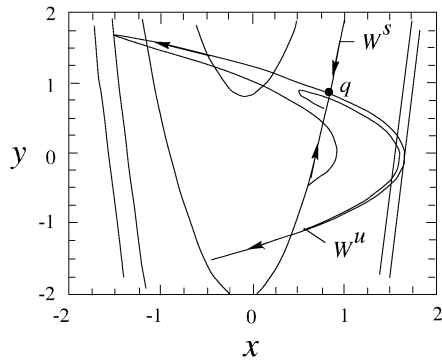
В хаотических аттракторах модели Хенона отмечаются и другие характерные особенности: спектры мощности в зависимости от тактности лент хаотических аттракторов имеют  $\delta$ -выбросы на кратных частотах, а АКФ может вообще не спадать до нуля в случае, если тактность ленты равна 2 и больше.

В аттракторе Хенона нарушается условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов на счетном множестве значений параметров, при которых имеет место касание многообразий. На рис. 5.3 представлены расчеты устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловой точки. В некоторых точках устойчивая  $W^s$  и неустойчивая  $W^u$  сепаратрисы касаются друг друга, угол между ними равен нулю. Если проследить за эволюцией угла между многообразиями вдоль хаотической траектории, то можно рассчитать распределение вероятностей угла  $\phi$  между многообразиями  $P(\phi)$ .

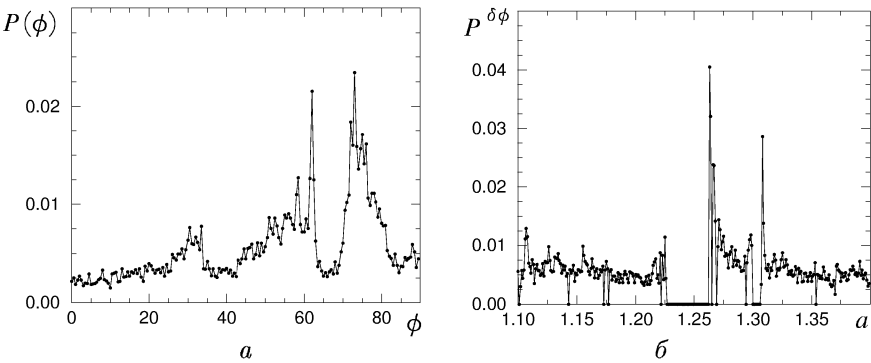
Результаты представлены на рис. 5.4,а и свидетельствуют о том, что вероятность обращения значения угла  $\phi$  в нуль достоверно отлична от нуля, то есть касание имеет отличную от нуля вероятность.

Если изменять параметр  $a$  системы и вычислять вероятность  $P^{\delta\phi}$  принятия углом между многообразиями значения вблизи нуля ( $\delta\phi \leq 1^\circ$ ), то получим результаты, представленные на рис. 5.4,б.

Как видно из графика, существует счетное множество значений параметра, при которых вероятность  $P^{\delta\phi}$  обращается в нуль. Эти значения параметра  $a$  четко соответствуют наличию периодических аттракторов отображения (ср. с данными рис. 5.2,б). Обращение  $P^{\delta\phi}$  в нуль, вообще говоря, может свидетельствовать о реализации режима гипер-



**Рис. 5.3.** Поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седловой точки  $q$  отображения Хенона при  $a = 1.3$ ,  $b = 0.3$ .



**Рис. 5.4.** Распределение вероятностей угла  $\phi$  между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий хаотической траектории аттрактора Хенона для  $a = 1.179$  при  $b = 0.3$  (а); зависимость вероятности  $P^{\delta\phi}$  попадания угла  $\phi$  между многообразиями в малую окрестность нуля ( $\delta\phi \leq 1^\circ$ ) от управляющего параметра системы  $a$  при  $b = 0.3$  (б).

болического хаоса, однако в проведенных экспериментах это условие соответствовало реализации режимов регулярных циклов отображения Хенона\*.

Наконец, обсудим свойство квазиаттрактора, весьма важное в плане анализа и трактовки экспериментальных результатов. Обратимся к рис. 5.1. Структура бассейнов притяжения свидетельствует о высокой чувствительности системы к точности задания начальных условий. Проведем следующий эксперимент. Выберем значение параметра  $a = 1.078$ , при котором в (5.1) сосуществуют 2 хаотических аттрактора. На рис. 5.5, а и б представлены плотности распределения вероятностей  $p(x_n, y_n)$  для аттракторов. Добавим в уравнения (5.1) аддитивный, близкий к белому, шум интенсивности  $D = 5 \cdot 10^{-6}$ . Воздействие слабого шума индуцирует объединение аттракторов в один (рис. 5.5, в). Результирующий режим не зависит от того, какой из аттракторов был выбран первоначально путем задания соответствующих начальных данных.

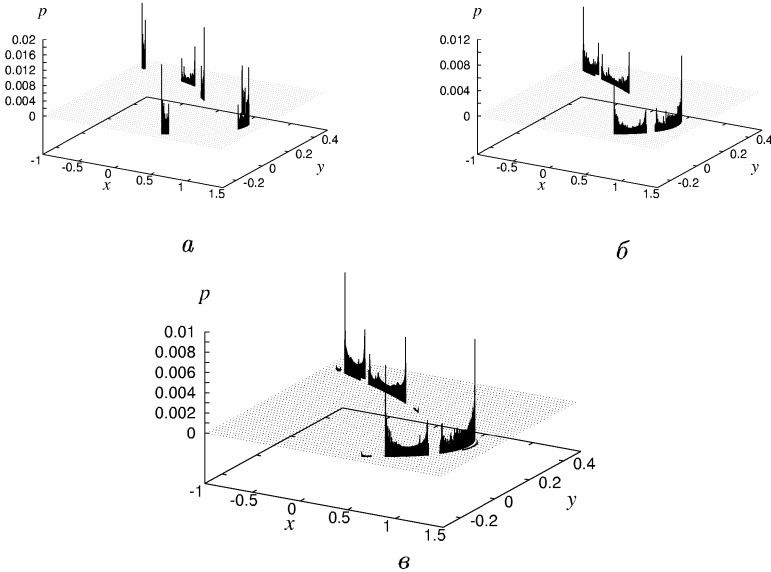
Отметим, что при  $b \rightarrow 0$  модель Хенона (5.1) переходит в известную одномерную модель логистического отображения:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2. \quad (5.2)$$

Отображение (5.2) необратимо и диффеоморфизмом не является. Тем

\*В силу специфики алгоритма вычислений вероятность приравнивалась нулю, если фазовая траектория не имела неустойчивого направления.

не менее, свойства аттракторов модели (5.2) качественно будут повторять все вышеперечисленные свойства отображения Хенона.



**Рис. 5.5.** Плотности распределения вероятностей  $p(x, y)$  на хаотических аттракторах, сосуществующих в системе Хенона при  $a = 1.08$ , в отсутствие шума (а, б); эффект воздействия шума интенсивности  $D = 5 \cdot 10^{-6}$  на приведенные распределения вероятностей (в).

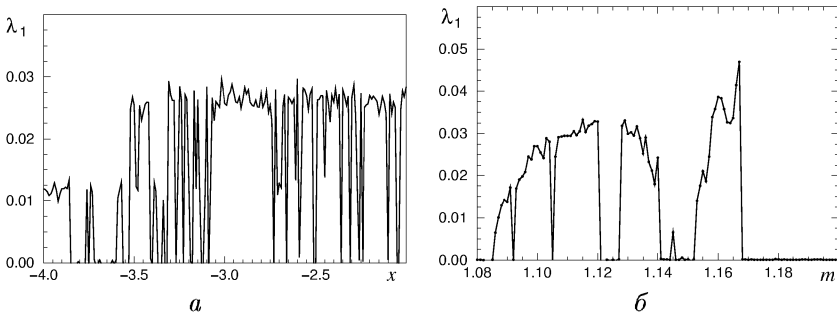
**Квазиаттрактор в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью.** Рассмотрим дифференциальную динамическую систему (генератор Анищенко–Астахова [3]), иллюстрирующую механизм рождения и типичные свойства квазиаттрактора в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса состояния равновесия. Эта модель представляет собой трехмерную двухпараметрическую дифференциальную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= tx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gI(x)x^2, \quad \text{где } I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Зафиксируем значения параметров  $m = 2.412$ ,  $g = 0.097$  и вычислим зависимость старшего показателя спектра ЛХП от начальных условий.

Результаты представлены на рис. 5.6, *а* и свидетельствуют о сосуществовании двух хаотических и периодического режимов колебаний.

При изменении параметров системы совокупность ее предельных множеств претерпевает бифуркации. Иллюстрацией этого факта может служить график зависимости старшего показателя спектра ЛХП от параметра  $m$ , представленный на рис. 5.6, *б*. Обращение в нуль показателя  $\lambda_1$  свидетельствует о рождении одного из множеств предельных циклов, претерпевающих каскады бифуркаций удвоения периода. Бифуркации аттракторов сопровождаются изменением структуры бассейнов их притяжения, которые приобретают фрактальные свойства.



**Рис. 5.6.** Зависимости старшего показателя Ляпунова от начальных значений координаты  $x$  при  $m = 2.412$ ,  $g = 0.097$  (*а*) и от параметра  $m$  при  $g = 0.3$  (*б*).

Присутствие в квазиаттракторе устойчивых и седловых циклов наряду с хаотическими предельными множествами проявляется в структуре автокорреляционной функции, которая в среднем экспоненциально спадает во времени, и в структуре спектра мощности, являющегося сплошным. Однако в структуре АКФ присутствуют периодические компоненты и в спектре заметны резкие выбросы на некоторых характерных частотах. Эти особенности АКФ и спектра хаотического режима являются типичными и существенно отличают квазиаттрактор от аттрактора Лоренца, также как квазиаттрактор Хенона от квазигиперболического аттрактора Лози.

Фрактальность границ бассейнов притяжения и свойство системы, обусловленное множеством бифуркаций режимов при малом шевелении параметров, приводят к высокой чувствительности системы к внешним шумовым возмущениям подобно аттрактору Хенона. Безусловно, фундаментальной причиной совокупности указанных свойств квазиаттрак-



тора является счетное множество гомоклинических касаний устойчивых и неустойчивых многообразий, в силу которого системы типа (5.3) являются негрубыми. В системе Хенона эффекты гомоклинического касания можно наблюдать в численном эксперименте, в трехмерных системах это более сложная задача. Однако данные рис. 5.6 являются, безусловно, следствием эффекта гомоклинического касания и могут рассматриваться в качестве типичных характеристик квазиаттрактора.

## Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы

Хаотические аттракторы описанных выше трех типов объединяют два принципиальных свойства: сложная геометрическая структура (как следствие — дробная метрическая размерность) и экспоненциальная неустойчивость индивидуальных траекторий. Именно эти свойства используются экспериментаторами в качестве критериев при диагностике режимов детерминированного хаоса.

Однако нерегулярные аттракторы как математические образы сложной динамики вышеописанными типами хаотических аттракторов не исчерпываются. Выяснилось, что хаотическое поведение в смысле наличия перемешивания и геометрическая “странность” аттрактора могут не соответствовать друг другу. Странные в геометрическом понимании аттракторы могут не быть хаотическими ввиду отсутствия экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий. С другой стороны, есть примеры перемешивающих диссипативных систем, аттракторы которых не являются в строгом смысле странными, то есть не характеризуются фрактальной структурой и дробной метрической размерностью [4].

Другими словами, существуют конкретные примеры диссипативных динамических систем, аттракторы которых характеризуются следующими свойствами:

- 1) при регулярной геометрической структуре с точки зрения целочисленной метрической размерности индивидуальные фазовые траектории в среднем экспоненциально неустойчивы;
- 2) при сложной геометрической структуре траектории асимптотически устойчивы; перемешивание отсутствует.

Первый тип называют *хаотическим нестранным аттрактором (ХНА)*, второй — *странным нехаотическим аттрактором (СНА)*.

**Хаотические нестранные аттракторы**

Хаотические аттракторы, не являющиеся с точки зрения их геометрии странными, известны относительно давно, однако изучены недостаточно. В качестве примера динамической системы с ХНА можно привести модифицированное отображение Арнольда. Это отображение представляет собой известное “cat map” с добавлением нелинейного периодического слагаемого:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n, \quad \text{mod } 1, \\y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \quad \text{mod } 1.\end{aligned}\tag{5.4}$$

При условии, что  $\delta < 1/2\pi$ , отображение (5.4) есть диффеоморфизм на торе. Другими словами, отображение (5.4) взаимно однозначно (обратимо) и переводит единичный квадрат на плоскости  $(x_n, y_n)$  в себя. Отображение (5.4) является диссипативным, то есть при каждой итерации элемент площади сжимается. Это свойство легко доказать, если вычислить якобиан преобразования (5.4):

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\pi\delta \sin 2\pi y_n \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta < \frac{1}{2\pi}.\tag{5.5}$$

Среднее по времени значение  $|J| < 1$ . При этом сигнатура спектра ляпуновских экспонент представляет собой “+”, “-”, то есть фиксируется наличие перемешивания.

Казалось бы, мы имеем дело с обычным хаотическим странным аттрактором. Но это не так. Главной отличительной особенностью рассматриваемого случая является то, что, несмотря на сжатие площади, движение изображающей точки отображения (5.4) является эргодическим. Точка при  $n \rightarrow \infty$  посещает любой элемент единичного квадрата, представляющего полную развертку двумерного тора! Свидетельством этого факта является то, что метрическая размерность аттрактора (емкость по Колмогорову) равна 2. Плотность точек аттрактора, хотя и неравномерна в единичном квадрате, нигде не обращается в нуль. Таким образом, несмотря на сжатие, аттрактором системы (5.4) является весь единичный квадрат. В этом смысле аттрактор Арнольда не является странным, так как ему нельзя приписать фрактальную геометрию.

Несмотря на то, что точки практически полностью покрывают квадрат (как видно из фазового портрета аттрактора на рис. 5.7), плотность их распределения явно неоднородна! Количественной мерой этой неоднородности является величина информационной размерности  $1 < D_I < 2$ . Например, для значений  $\delta = 0.05$   $D_I \simeq 1.96$ , для

$\delta = 0.10$   $D_I \simeq 1.84$ . При этом, как уже говорилось, емкость  $D_C = 2.0$  (это строгий результат Синая). В результате неоднородности плотности распределения вероятностей точек на аттракторе значения всех вероятностно-метрических размерностей аттрактора Арнольда будут лежать в интервале  $1 < D < 2$ . Эти размерности учитывают не только геометрические, но и динамические свойства аттрактора.

ХНА обнаружены в ряде других отображений на торе. Можно предположить, что эргодические хаотические движения типичны для диффеоморфизмов на торе. Факт существования ХНА в таких отображениях позволяет предполагать, что есть потоковые (дифференциальные) системы в  $\mathbf{R}^N$  ( $N \geq 4$ ), имеющие режимы ХНА. Однако до настоящего времени ХНА в дифференциальных динамических системах не обнаружены. В связи с этим, в частности, до сих пор является открытым вопрос о возможности существования хаотического аттрактора на поверхности трехмерного тора, вложенного в фазовое пространство размерности  $N \geq 4$ .



**Рис. 5.7.** Хаотический нестранный аттрактор в отображении Арнольда при  $\delta = 0.15$ .

### Странные нехаотические аттракторы

Как мы уже говорили, хаотические аттракторы обладают геометрической "странностью" и перемешиванием. Другими словами, сложная динамика перемешивающей системы порождает и геометрическую сложность соответствующего аттрактора. Тем не менее, в случае ХНА мы вынуждены разделить эти свойства: перемешивание может не приводить к геометрической "странности" аттрактора. Здесь мы рассмотрим возможность реализации противоположной ситуации, когда система демонстрирует сложный непериодический режим колебаний, асимптотически устойчивый (без перемешивания), а аттрактор при этом явно не является регулярным с точки зрения его геометрической структуры.

Примеры негрубых странных нехаотических аттракторов (СНА) привести нетрудно. По сути дела любой странный хаотический аттрак-

тор в критической точке перехода к хаосу являет собой пример СНА. В критической точке ляпуновский показатель равен нулю (хаоса нет!). По определению такой аттрактор является СНА. Однако он негрубый. С точки зрения физики интерес представляют грубые аттракторы, которые существуют на множестве значений параметров ненулевой меры и сохраняют свою структуру при возмущениях. Как оказалось, динамические системы с грубыми СНА существуют как в дифференциальных, так и в дискретных динамических системах [4,15].

СНА типичны для динамических систем с квазипериодическим возбуждением. Уместно уточнить, что мы понимаем под аттрактором автономной системы. Предположим, что автономная динамическая система в  $\mathbf{R}^N$  находится под действием периодической силы с периодом  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Будем анализировать сечение Пуанкаре через период внешней силы. В секущей поверхности  $t = nT_0$  мы каждый раз (при любом  $n$ ) будем наблюдать некоторое множество точек. Аттрактором в этом случае называют проекцию этого множества точек в секущих, полученное для последовательности  $n \rightarrow \infty$ , на исходную секущую поверхность при  $n = 1$ .

Впервые СНА был обнаружен и исследован в отображении

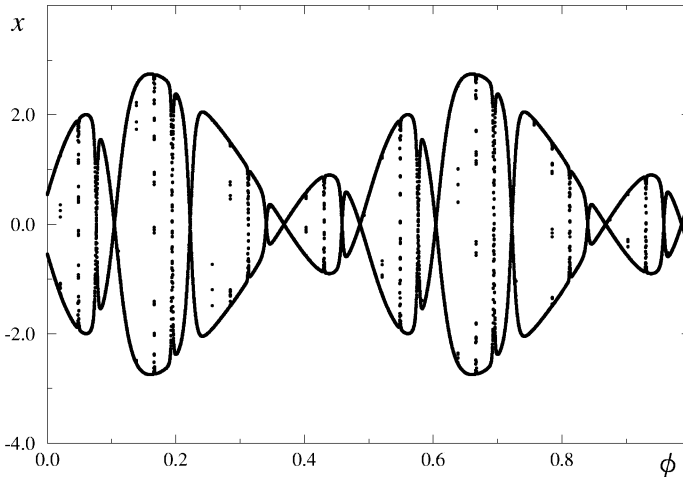
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda \tan(x_n) \cos 2\pi\phi_n, \\ \phi_{n+1} &= \omega + \phi_n, \quad \text{mod } 1. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Иррациональное значение параметра  $\omega$  чаще всего выбирается равным так называемому *золотому сечению*:  $\omega = 0.5(\sqrt{5} - 1)$ . Для значений  $\lambda > 1$  в отображении (5.6) строго доказано существование СНА (рис. 5.8). Но СНА обнаружены также при введении квазипериодического воздействия в отображение окружности, логистическое отображение, отображение Хенона и др.

Ряд особенностей СНА является основанием для выделения этих объектов в отдельный класс.

**Геометрические характеристики СНА.** Аттрактор (например, на фазовой плоскости) образуется кривой бесконечной длины, недифференцируемой на плотном множестве точек. Эта кривая, подобно кривой Пеано, плотно покрывает часть фазовой плоскости так, что метрическая размерность (емкость) СНА оказывается строго равной 2. Но, в отличие от отображения (5.4), в этом случае все же нельзя считать, что часть плоскости является аттрактором, так как совокупная мера точек, принадлежащих аттрактору, равна нулю. Этот факт отражается в равенстве информационной размерности  $D_I$  единице (что соответствует

линии, но не плоскости). В связи с отсутствием положительного показателя в спектре ЛХП ляпуновская размерность СНА равна единице. Несмотря на целочисленную метрическую размерность, СНА, как правило, демонстрирует самоподобие структуры и вследствие этого — свойства скейлинга. Совокупность указанных свойств позволяет говорить о “странной” геометрии СНА.



**Рис. 5.8.** Странный нехаотический аттрактор в отображении (5.6) для  $\lambda = 1.5$ .

**Спектр ЛХП странного нехаотического аттрактора.** Динамика системы в режиме СНА не является хаотической ввиду отсутствия перемешивания. Экспоненциальной неустойчивости траекторий на аттракторе в среднем нет. В спектре ЛХП отсутствует положительный показатель. Сигнатура спектра ЛХП фазовых траекторий на СНА не отличается от соответствующей сигнатуры спектра ЛХП квазипериодического движения. Однако СНА нельзя считать квазипериодическим аттрактором, в частности, потому, что локальный (рассчитанный на конечном времени) старший показатель спектра ЛХП траектории на СНА будет положительным (доказано, что вероятность того, что старший локальный ляпуновский показатель будет положительным, отлична от нуля).

**Спектр и автокорреляционная функция.** Отсутствие перемешивания в режиме СНА обуславливает отсутствие в строгом смысле

непрерывной (сплошной) компоненты в спектре мощности. В то же время, спектр траектории на СНА не является дискретным! Спектр СНА занимает как бы промежуточное положение между дискретным и непрерывным случаями и имеет специальное название: сингулярно-непрерывный спектр. Особенность сингулярно-непрерывного спектра в том, что он включает плотное множество  $\delta$ -пигов самоподобной структуры и обладает свойствами фракталов.

Так как спектр СНА не является непрерывным, автокорреляционная функция  $\Psi(\tau)$  не стремится к нулевому пределу при  $\tau \rightarrow \infty$ . Для траекторий на СНА, как правило, наблюдается спадание  $\Psi(\tau)$  до некоторого предельного ненулевого уровня. При этом  $\Psi(\tau)$ , также как и спектр, будет демонстрировать масштабно-инвариантные свойства.

Необходимо отметить, что диагностика режима СНА в численных экспериментах представляет собой весьма трудную, нестандартную задачу и требует проведения тонких вычислений с использованием хорошей современной техники. В противном случае режим СНА и квазипериодический режим с большим числом комбинационных частот в спектре различить не удается.

## Заключение

Анализ структуры и свойств аттракторов нелинейных диссипативных систем как образов сложных непериодических автоколебаний, проведенный в лекциях 4 и 5, позволяет сделать следующие выводы:

- Классические свойства детерминированного хаоса как непериодических экспоненциально неустойчивых решений соответствующих динамических систем демонстрируют грубые гиперболические системы и системы типа Лоренца. Им соответствуют в качестве математических образов странные (или практически странные) аттракторы. Их отличительной особенностью является фрактальность геометрической структуры аттрактора, дробная метрическая размерность и наличие хотя бы одного положительного показателя спектра ЛХП как следствие перемешивания. Грубые гиперболические аттракторы и аттракторы типа Лоренца малочувствительны к шумовому воздействию. Бассейны притяжения таких аттракторов являются гладкими, однородными; свойства аттрактора не чувствительны к изменению начальных условий.
- Более сложными объектами являются квазиаттракторы, которые включают конечную или бесконечную совокупность регулярных и хаотических притягивающих подмножеств, сосуществующих одновременно

при фиксированных параметрах системы. Вариация параметров системы приводит к различным бифуркациям этих подмножеств, которых может быть бесконечное число при конечном изменении параметров. Бассейны притяжения сосуществующих аттракторов представляют собой чрезвычайно сложную структуру вложенных областей, обладающих фрактальной геометрией. В результате квазиаттракторы демонстрируют высокую чувствительность к изменению начальных условий и действию шума.

- Экспоненциальная неустойчивость индивидуальных траекторий и "странная" геометрия аттрактора однозначно не связаны. Существуют режимы хаотических (неустойчивых) автоколебаний, которым соответствуют регулярные в геометрическом смысле аттракторы. Это так называемые хаотические нестранные аттракторы. С другой стороны, можно наблюдать непериодические устойчивые по Ляпунову колебания, соответствующий аттрактор которых является странным геометрическим объектом. В этом случае мы имеем дело со странными нехаотическими аттракторами.

## Лекция 6

# Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью

*Вводится в рассмотрение математическая модель автономной автоколебательной системы с 1.5 степенями свободы, реализующая режимы детерминированного хаоса спирального типа. Обсуждается связь модели с классическими генераторами квазигармонических колебаний Теодорчика и Ван дер Поля.*

*In this lecture we introduce into consideration a mathematical model of an autonomous self-sustained system with 1.5 degrees of freedom. This system demonstrates regimes of deterministic chaos of the spiral type. We also discuss the relation between this model and the classical Theodorichik and Van der Pol generators of quasiharmonic oscillations.*



## Введение

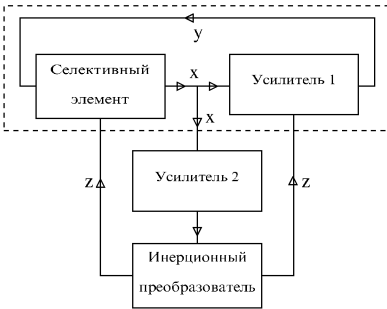
Изучение режимов динамического хаоса осуществляется по трем основным направлениям. Первое включает строгие математические исследования свойств гиперболических систем. Следует отметить исключительную важность фундаментальных аналитических результатов для правильного понимания и трактовки экспериментальных данных. Второе направление, типичное для естественнонаучных исследований, связано с анализом динамики конкретных систем, представляющих собой математические модели процессов, возникающих в реальных колебательных системах. Наибольший интерес для нелинейной динамики представляет третье направление. Оно включает разработку и исследование простейших базовых моделей, реализующих те или иные фундаментальные свойства хаотических систем. Поясним, о чем идет речь. Хорошо известно, например, что для изучения основных свойств автоколебаний достаточно рассмотреть уравнения генератора Ван дер Поля. Эта динамическая система исчерпывающим образом описывает механизмы рождения и свойства предельного цикла как математического образа периодических автоколебаний. При этом уравнения модели генератора являются наиболее простыми из динамических систем с предельным циклом в качестве решения. Размерность фазового пространства системы равна двум, то есть является минимальной для систем с устойчивыми, близкими к синусоидальным, колебаниями. Уравнения содержат квадратичную нелинейность и только один управляющий параметр, задающий режимы колебаний.

Названные направления составляют основную задачу теории колебаний как науки, изучающей фундаментальные явления на примерах анализа динамики базовых моделей соответствующих явлений. С этой точки зрения теория нелинейных колебаний — это наука, в которой вводятся в рассмотрение и анализируются наиболее простые из возможных математические модели фундаментальных явлений, происходящих в мире колебательных систем.

Открытие эффекта детерминированного хаоса привело к необходимости формирования нового раздела нелинейной теории колебаний, связанного с разработкой и анализом динамики базовых моделей хаоса. Необходимо иметь в распоряжении совокупность моделей детерминированного хаоса, которые наиболее просто иллюстрируют типичные бифуркационные механизмы переходов к хаосу, топологическую структуру основных типов странных аттракторов, бифуркации хаотических аттракторов, их фрактальность и т.д. В этой лекции мы введем в рассмот-

рение одну из таких базовых моделей хаоса — генератор с инерционной нелинейностью (генератор Анищенко–Астахова).

## Общие уравнения генераторов с 1.5 степенями свободы



**Рис. 6.1.** Блок-схема инерционного самосогласованного воздействия на основные элементы классического генератора.

Автономные системы с трехмерным фазовым пространством демонстрируют довольно ясную картину хаотической динамики маломерных систем. Введем наиболее общие уравнения таких систем, исходя из результатов, полученных применительно к генераторам с 1 степенью свободы, фазовое пространство которых — плоскость. В общем виде автоколебательные системы на плоскости описываются уравнением

$$\ddot{x} + \varphi(x, \vec{\mu})\dot{x} + \Psi(x, \vec{\mu}) = 0, \quad (6.1)$$

где  $x$  — динамическая переменная;  $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$  — совокупность управляющих параметров;  $\varphi(x, \vec{\mu})$  и  $\Psi(x, \vec{\mu})$  — нелинейные функции, характеризующие действие сил, обеспечивающих возможность автоколебаний.

Уравнение (6.1) можно обобщить на определенный класс систем с 1.5 степенями свободы. Рассмотрим радиотехническое устройство, блок-схема которого изображена на рис. 6.1. Пунктирной линией выделена основная часть генератора, состоящая из усилителя 1, селективного элемента (например, колебательного контура или моста Вина) и цепи положительной обратной связи. При выполнении соответствующих амплитудных и фазовых условий в таком генераторе возникают автоколебания, описываемые уравнением (6.1).

Дополнительная цепь обратной связи осуществляет инерционное преобразование воздействующей переменной  $x(t)$  в отклик  $z(t)$ , управляющий параметрами усилителя и селективного элемента основного блока генератора. С учетом дополнительной обратной связи уравнение

системы, представленной на рис. 6.1, можно записать как

$$\begin{aligned} \ddot{x} + F_1(x, z, \vec{\mu})\dot{x} + F_2(x, z, \vec{\mu}) &= 0, \\ \dot{z} &= F_3(x, z, \vec{\mu}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь  $F_i$  — в общем случае нелинейные функции. Фазовая переменная  $z(t)$  в (6.2) связана с переменной  $x(t)$  посредством дифференциального оператора первого порядка. Если взаимосвязь отклика  $z(t)$  на воздействие  $x(t)$  безынерционна, т.е. описывается алгебраическим полиномом типа

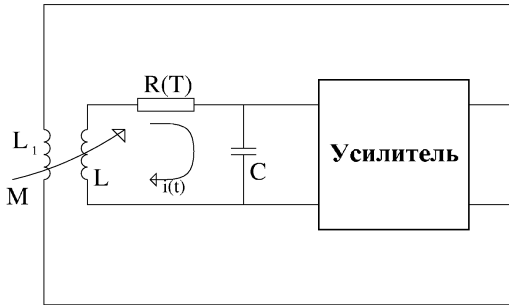
$$z = \sum_{n=0}^k C_n x^n = \varphi(x), \quad (6.3)$$

то уравнения (6.2) сводятся к уравнению (6.1). Если же переменная  $z$  зависит от  $x$  инерционным образом, т.е. задается дифференциальным уравнением 1-го порядка, то уравнения (6.2) описывают процессы колебаний в трехмерном фазовом пространстве и являются обобщением уравнения (6.1) на этот случай.

Известные динамические системы, моделирующие колебания в генераторах с 1.5 степенями свободы, допускают форму записи вида (6.2) с исключением третьей переменной и, при необходимости, с введением гладких замен масштабов координат и времени.

Общая форма записи трехмерных динамических систем в виде (6.2) не вскрывает в деталях принципиальные с физической точки зрения различия конкретных систем, такие как способ возбуждения колебаний, возможность генерирования двухчастотных колебаний, хаотических колебаний и пр. При необходимости можно вводить в рассмотрение некоторые подклассы систем, удовлетворяющих (6.2), но отличающихся по некоторым признакам в связи с конкретными ограничениями на явный вид функций  $F_i(x, z, \vec{\mu})$  в (6.2). В частности, выделяют два подкласса генерирующих систем, удовлетворяющих в общем виде уравнениям (6.2), но отличающихся механизмами возбуждения колебаний. В первом подклассе возбуждение автоколебаний осуществляется благодаря компенсации собственных потерь при положительной обратной связи. Ко второму подклассу систем относят генераторы, представляющие собой некоторый диссипативный контур, параметрически возбуждаемый за счет инерционного воздействия усиленного сигнала с контура на элементы самого контура.

Однако указанное разделение автоколебательных систем по типу самовозбуждения колебаний с точки зрения общих механизмов перехода к



**Рис. 6.2.** Классическая схема генератора с инерционной нелинейностью.

хаосу не является принципиальным. Имея разную физическую основу, автоколебания с ростом управляющего параметра могут претерпевать идентичные каскады бифуркаций.

## Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью

Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью (ГИН) является одной из базовых моделей детерминированного хаоса. Достаточно простая и понятная с радиофизической точки зрения модель ГИН демонстрирует все характерные для квазиаттракторов закономерности, причиной возникновения которых является наличие в системе состояния равновесия типа “седло-фокус”. Модель ГИН базируется на классической схеме генератора Теодорчика и в предельных случаях переходит в модель генератора Ван дер Поля.

В классическом генераторе с инерционной нелинейностью Теодорчика автоколебания обеспечиваются введением в колебательный контур термосопротивления  $R(T)$ , свойства которого нелинейным образом зависят от протекающего через него тока (рис. 6.2).

Уравнение для тока  $i(t)$  в контуре имеет вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left[ \frac{R(T)}{L} - \frac{MS_0}{LC} \right] \frac{di}{dt} + \left[ \frac{1}{LC} + \frac{1}{L} \frac{\partial R(T)}{\partial T} \frac{dT}{dt} \right] i = 0, \quad (6.4)$$

где  $S_0$  — крутизна характеристики усилителя, который предполагается линейным;  $M$  — взаимная индуктивность цепи обратной связи;  $R(T)$  — сопротивление термистора, зависящее от температуры  $T$ ;  $L$  и  $C$  — индуктивность и емкость в колебательном контуре.

Полагая зависимость  $R(T)$  линейной ( $R(T) = R_0 + LbT$ ) и считая, что процесс теплообмена подчиняется закону Ньютона:

$$\rho q \frac{dT}{dt} + kT = R(T)i^2,$$

где  $q$  — удельная теплоемкость нити термистора, а  $\rho$  — ее масса, получаем замкнутую систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i &= (\mu - bT) \frac{di}{dt} - bi \frac{dT}{dt}, \\ \frac{dT}{dt} + \gamma T &= \alpha(T)i^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $\mu = \omega_0^2 S_0 M - R_0/L$ ;  $\omega_0^2 = 1/LC$ ;  $\gamma = k/\rho q$ ;  $\alpha(T) = \alpha_0 + bLT/\rho q$ ;  $\alpha_0 = R_0/\rho q$ . В безразмерных переменных  $x = ai$ ,  $\dot{y} = -x$ ,  $z = bT/\omega_0$ ,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $a = \sqrt{\alpha b \rho q / \omega_0 k}$  уравнения (6.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + zx^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь  $m = \mu/\omega_0 = \omega_0 S_0 M - R_0/\omega_0 L$ ,  $g = \gamma/\omega_0$ ,  $\dot{x} = dx/d\tau$ .

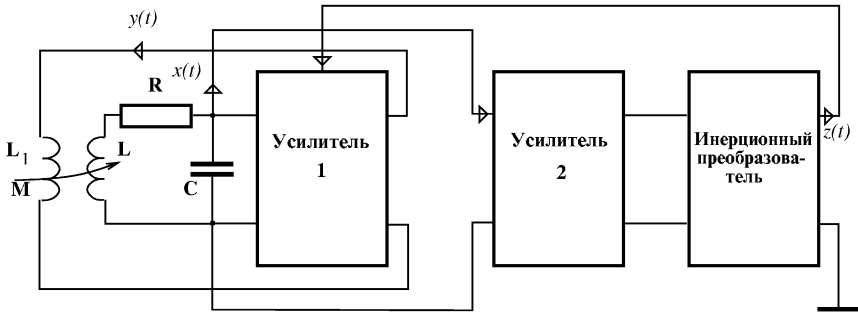
В трехмерной двухпараметрической системе (6.6) параметр  $m$  пропорционален разности вносимой и рассеиваемой энергий,  $g$  — параметр, характеризующий относительное время релаксации термистора. В дальнейшем  $m$  будем называть параметром возбуждения, а  $g$  — параметром инерционности генератора.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 6.3. Здесь колебательный контур в отличие от классического случая (рис. 6.2) не содержит нелинейных элементов. Усилитель 1 управляется дополнительной цепью обратной связи, содержащей линейный усилитель 2 и инерционный преобразователь. Дифференциальные уравнения генератора можно записать в явном виде, конкретизировав зависимость  $S(x, V)$  усилителя 1 и задав уравнения инерционного преобразования  $V(x)$ .

Аппроксимируем полиномом функцию  $S^1(x)$ , т.е. крутизну усилителя 1, без учета воздействия дополнительной обратной связи:

$$S^1(x) = S_0 - S_1 x^2, \quad (6.7)$$

где  $x$  — напряжение на входе усилителя 1;  $S_0$  и  $S_1$  — постоянные положительные коэффициенты. Предположим, что механизм воздействия



**Рис. 6.3.** Модифицированная схема генератора с инерционной нелинейностью.

цепи инерционной обратной связи подчиняется закономерности

$$S = S^1(x) - bV = S_0 - S_1x^2 - bV, \quad (6.8)$$

где  $V = V(x)$  — напряжение на выходе инерционного преобразователя;  $b$  — параметр. Пусть инерционное преобразование осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{V} = -\gamma V + \varphi(x). \quad (6.9)$$

Уравнение для тока в контуре генератора (рис. 6.3)

$$Ldi/dt + Ri + C^{-1} \int (i - MSdi/dt)dt = 0$$

совместно с уравнениями (6.8) и (6.9) дает замкнутую систему, сводящуюся в безразмерных переменных к виду

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + g\Phi(x), \quad (6.10)$$

где  $d = d(S_1)$  — параметр, отвечающий степени влияния нелинейности крутизны характеристики;  $\Phi(x)$  — функция, описывающая свойства инерционного преобразователя. В генераторе действуют два механизма нелинейного ограничения амплитуды колебаний. Первый — безинерционный и связан с нелинейностью характеристики усилителя, второй — инерционный, обусловленный зависимостью крутизны  $S$  от напряжения  $V$ . Пусть усилитель работает на линейном участке характеристики

( $S_1 = 0$ ), а инерционный преобразователь собран по схеме двухполупериодного квадратичного детектора с  $RC$ -фильтром и описывается уравнением

$$\dot{z} = -gz + gx^2. \quad (6.11)$$

Параметр инерционности  $g$  равен отношению периода колебаний контура  $T_0$  к постоянной времени фильтра  $\tau_f = R_f C_f$ .

При сделанных предположениях уравнения (6.10) переходят в уравнения классического генератора (6.6). Значит, если усилитель 1 линейный, а инерционный преобразователь удовлетворяет (6.11), то математические модели генераторов, схемы которых изображены на рис. 6.2 и 6.3, неразличимы. Схема с детектором в экспериментальном отношении более удобна, так как позволяет варьировать инерционные свойства генератора регулировкой постоянной времени фильтра, что практически неосуществимо при использовании термистора.

Вид уравнений (6.10) не изменится, если в качестве селективного элемента использовать  $RC$ -цепочку в виде моста Вина. Для обеспечения условий генерации в этом случае нужно применить два каскада усиления, как это показано на рис. 6.4. Для симметричного моста Вина управляющие параметры  $m$  и  $g$  в уравнениях (6.10) просто и с точки зрения эксперимента удобным образом выражаются через параметры схемы:

$$m = K_0 - 3, \quad g = R_0 C_0 / \tau_f, \quad (6.12)$$

где  $K_0$  — коэффициент усиления двухкаскадного усилителя;  $R_0 C_0$  и  $\tau_f$  — постоянные времени моста Вина и фильтра детектора. В физическом эксперименте параметры  $m$  и  $g$  легко менять, варьируя коэффициент усиления и постоянную времени фильтра. Как показали исследования, динамика генератора, моделируемого уравнениями (6.10), принципиальным образом зависит от вида функции  $\Phi(x)$ , т.е. от свойств инерционного преобразователя. Если  $\Phi(x)$  представляет собой симметричную функцию, то уравнения (6.10) имеют в качестве решения только предельный цикл. Однако если  $\Phi(x)$  не является симметричной (например,  $\Phi(x) = \exp(x - 1)$ ), то модель (6.10) демонстрирует как периодические, так и хаотические режимы колебаний. Более детальные исследования показали, что асимметрия  $\Phi(x)$  является необходимым условием для реализации в модели (6.10) особой траектории типа петли сепаратрисы седло-фокуса. Именно наличие особой траектории является фундаментальной причиной рождения режимов детерминированного хаоса.

В качестве примера вида функции  $\Phi(x)$ , когда модель (6.10) приоб-

ретают свойства генератора хаоса, мы выберем

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

С физической точки зрения это соответствует использованию однополупериодного детектора в схеме инерционного преобразователя.

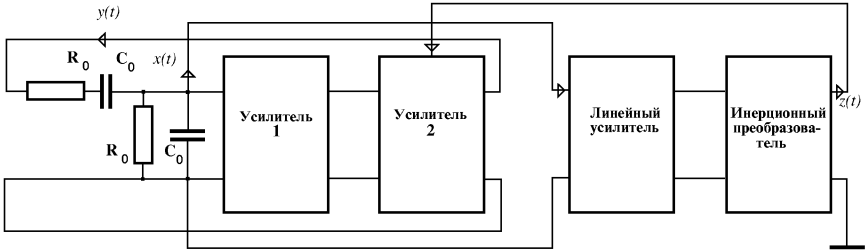


Рис. 6.4. Схема RC-генератора с инерционной нелинейностью.

Определив функцию  $\Phi(x)$  в соответствии с (6.13), из (6.10) получаем уравнения модифицированного генератора с инерционной нелинейностью, представляющие собой трехмерную трехпараметрическую нелинейную диссипативную систему:

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2. \quad (6.14)$$

Исключением переменной  $y$  уравнения генератора с инерционной нелинейностью (6.14) приводятся к виду (6.2):

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (m - z - 3dx^2)\dot{x} + [1 - gz + g\Phi(x)]x &= 0, \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Автоматически регулируемый нелинейный осциллятор (6.15) характеризуется инерционной зависимостью диссипации и частоты от переменной  $x$ . В случае сильной инерционности системы ( $\tau_f \gg T_0$ ), когда  $g \rightarrow 0$ , система вырождается в двумерную:

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = 0, \quad (6.16)$$

$$a = m - z_0, \quad b = 3d/(m - z_0), \quad z_0 = z(0),$$

и независимо от вида функции  $\Phi(x)$  совпадает по форме записи с уравнениями генератора Ван дер Поля.



Другой асимптотический случай — безынерционный генератор, соответствующий стремлению параметра  $g$  в бесконечность. Из третьего уравнения системы при этом условии следует алгебраическая взаимосвязь переменных  $x$  и  $z$ , сводящая исходную систему к виду

$$\ddot{x} - [m - \Phi(x) - 3dx^2]\dot{x} + x = 0. \quad (6.17)$$

Полная аналогия с уравнением Ван дер Поля в этом предельном случае достигается при условии  $\Phi(x) = x^2$ . В реальном генераторе с инерционной нелинейностью область значений параметра инерционности  $g$ , в которой система ведет себя принципиально как трехмерная, ограничена некоторым интервалом  $g_1 \leq g \leq g_2$ . За его пределами приближенным описанием могут служить рассмотренные асимптотические уравнения на фазовой плоскости.

Математическая модель модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (6.14) есть нелинейная трехмерная диссипативная система с тремя независимыми параметрами, задающая поток в  $\mathbf{R}^3$ :

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leq z < \infty,$$

где переменная  $z$  определена на положительной полуоси, так как с физической точки зрения представляет собой протектированное напряжение  $x(t)$  на выходе фильтра. Дивергенция векторного поля скоростей потока (6.14) зависит от параметров и фазовых координат:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = m - g - 3dx^2 - z. \quad (6.18)$$

Исследования в квазилинейном приближении  $m < g \ll 1$  свидетельствуют о том, что система глобально диссипативна и что для любых начальных данных из области определения фазовых переменных всегда справедливо  $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ . В квазилинейном приближении  $z \approx m$  и независимо от координаты  $x$  дивергенция отрицательна. При  $m > g$ , где  $g$  — конечно (наиболее интересная область генерирования нелинейных колебаний), знак дивергенции зависит от координат. Условием диссипативности является

$$m - g < z + 3dx^2. \quad (6.19)$$

Для автоколебаний при  $d \neq 0$  это условие всегда выполняется. В этом смысле параметр  $d$  определяет безынерционную диссипативную нелинейность системы. Если же усилитель работает на линейном участке характеристики и нелинейное ограничение амплитуды за счет инерционной цепи обратной связи наступает раньше, чем значения перемен-

ной  $x$  выходят в область нелинейности характеристики  $S(x)$ , то выражение (6.19) принимает вид

$$m - g < z(\tau). \quad (6.20)$$

Последнее неравенство разделяет фазовое пространство системы на две области плоскостью  $z = z^0 = m - g$ . Для  $z > z^0$  система диссипативна, для  $z < z^0$  фазовый объем в локальной окрестности любой траектории системы расширяется. Стационарные режимы автоколебаний реализуются в том случае, когда подкачка энергии и ее расход в среднем по времени компенсируются, что возможно при условии

$$m - g < \bar{z}, \quad (6.21)$$

где  $\bar{z}$  — среднее по времени значение переменной  $z(\tau)$ . Для достаточно больших  $m$  ( $m > 1$ ) неравенство (6.21) может не выполняться и траектории системы будут уходить в бесконечность, если диссипативная нелинейность отсутствует ( $d = 0$ ).

Система (6.10) характеризуется единственной особой точкой в начале координат. Если функция  $\Phi(x)$  не содержит линейных по  $x$  членов, линеаризация системы в особой точке приводит к характеристическому полиному

$$(g + s)(s^2 - ms + 1) = 0, \quad (6.22)$$

собственные значения которого есть

$$s_{1,2} = m/2 \pm (i/2)\sqrt{4 - m^2}, \quad s_3 = -g. \quad (6.23)$$

В области параметров  $g > 0$ ,  $-2 < m < 0$  действительные части всех собственных значений отрицательны и особая точка устойчива. С физической точки зрения параметр  $g$  всегда положителен. Параметр  $m$  может быть как меньше нуля (генератор недовозбужден), так и больше нуля (в режимах генерации). В области  $0 < m < 2$  особая точка есть седло-фокус с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (6.23). Линия  $m = 2$  бифуркационная, и она отвечает смене седло-фокуса на седло-узел.

Как следует из (6.23), в системе (6.10) имеется уникальная возможность независимого управления свойствами устойчивого и неустойчивого многообразий. В режиме генерации ( $m > 0$ ) состояние равновесия характеризуется двумерным неустойчивым многообразием и одномерным устойчивым, что определяется независимыми параметрами  $m$  и  $g$ .

Как видно из (6.23), в бифуркационной точке  $m = 0$  собственные значения  $s_{1,2}$  пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью:

$$\partial Res_{1,2}(m)/\partial m|_{m=0} = 1/2.$$

При этом третье собственное значение  $s_3 = -g$  отделено от мнимой оси. Реализуется классическая бифуркация Андронова–Хопфа: бифуркация рождения цикла из седло-фокуса.

## Заклучение

Модель генератора Анищенко–Астахова является простейшей динамической системой с 1.5 степенями свободы, прекрасно иллюстрирующий структуру и свойства так называемого спирального хаоса. Спиральный хаос возникает в дифференциальных системах, реализующих особое решение в виде петли сепаратрисы седло-фокуса или седло-узла. Для таких систем возможность хаотической динамики следует из известной теоремы Шильникова. ГИН реализует все известные механизмы возникновения детерминированного хаоса: каскад Фейгенбаума, перемежаемость различного типа, включая перемежаемость “хаос–хаос”, порядок Шарковского. В неавтономном режиме ГИН демонстрирует все типичные эффекты, обусловленные переходом к хаосу через квазипериодические колебания (разрушение двумерного тора, удвоение торов и др.). Важной особенностью ГИН является то, что все параметры системы имеют ясный физический смысл и допускают измерения в реальном эксперименте. Исследованиям динамики ГИН как в численном, так и в натурном эксперименте посвящена практически полностью монография [3], которую можно рекомендовать в качестве учебника для изучения эффекта детерминированного хаоса.

## Лекция 7

# Синхронизация колебаний

*На примере генератора Ван дер Поля обсуждается эффект вынужденной синхронизации периодических колебаний. Рассматривается влияние флуктуаций и эффективная внешняя синхронизация. Общность и фундаментальность результатов иллюстрируется сложным примером синхронизации ритма сердца человека.*

*In this lecture the effect of forced synchronization of periodical oscillations is discussed using the Van der Pol generator as example. The influence of fluctuations and effective forced synchronization are considered. The generic and fundamental priority of the results is illustrated by complex example of synchronization of cardiorhythm.*

## Введение

Синхронизация автоколебаний — одно из фундаментальных нелинейных явлений природы. Его можно рассматривать как простейший пример самоорганизации взаимодействующих систем. Под синхронизацией обычно понимают установление некоторых соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия. Эффект синхронизации, открытый Гюйгенсом еще в XVII веке, привлек к себе особый интерес ученых в нашем столетии в связи с развитием науки и техники. В настоящее время детально разработана ставшая классической теория синхронизации периодических автоколебаний, рассмотрены случаи синхронизации квазипериодических колебаний и колебаний в присутствии случайных флуктуаций [16]. В рамках классической теории различают вынужденную синхронизацию, то есть синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и взаимную синхронизацию, наблюдающуюся при взаимодействии двух и более автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты синхронизации, связанные с двумя классическими механизмами: захватом собственных частот (и, соответственно, фаз) колебаний или же подавлением одной из собственных частот взаимодействующих систем.

## Синхронизация периодических колебаний. Классическая теория

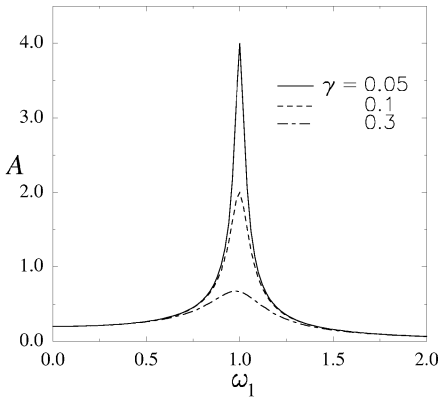
Среди наиболее типичных физических явлений, наблюдающихся в динамических системах при внешнем гармоническом возбуждении, отметим резонанс, синхронизацию и возбуждение режима динамического хаоса. Эффект резонанса, хотя и очень важный в естествознании, однако является наиболее простым среди названных выше.

Рассмотрим линейный диссипативный осциллятор при внешнем возбуждении гармонической силой:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a \sin \omega_1 t. \quad (7.1)$$

Если зафиксировать амплитуду воздействия  $a = \text{const}$  и пронаблюдать отклик системы при вариации частоты  $\omega_1$  и коэффициента диссипации  $\gamma$ , то мы получим результат, представленный на рис. 7.1. Явление резонанса заключается в резком возрастании амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты внешней силы  $\omega_1$  с собственной ча-

стотой автономного осциллятора  $\omega_p = \sqrt{\omega_0 - \gamma^2/2} \approx \omega_0$ . Резонанс характеризуется типичными зависимостями  $A(\omega_1)$ , которые носят название резонансных кривых. Резонансные свойства систем широко распространены в природе и используются в технике. В частности, эффект резонанса служит одним из основных при создании динамических систем, способных совершать незатухающие периодические колебания в автономном режиме.



**Рис. 7.1.** Зависимость амплитуды вынужденных колебаний в системе (7.1) от частоты внешнего воздействия для различных значений коэффициента диссипации. Остальные параметры:  $\omega_0 = 1.0$ ,  $a = 0.2$ .

стота периодических колебаний. Математическим образом устойчивых незатухающих периодических колебаний на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  является замкнутая фазовая траектория, названная А. Пуанкаре предельным циклом.

С физической точки зрения понятию предельного цикла отвечает режим так называемых “автоколебаний”, когда характеристики устойчивого периодического режима не зависят от начальных условий, а определяются исключительно свойствами самой системы. Система (7.2) характеризуется единственным состоянием равновесия типа фокус на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  в нуле координат. Собственные значения со-

Примером могут служить так называемые генераторы томсоновского типа, близкие к линейным консервативным осцилляторам. Если к резонансной системе с малой диссипацией подключить усилитель и ввести обратную связь, удовлетворяющую неким специальным амплитудным и фазовым условиям, то мы получим генератор незатухающих близких к гармоническим колебаний.

**Генератор Ван дер Поля.** Наиболее простым и классическим примером генератора томсоновского типа служит известная модель Ван дер Поля [6,16]:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7.2)$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр, характеризующий степень обратной связи,  $\omega_0$  — ча-

стояния равновесия легко вычислить [3]:

$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}. \quad (7.3)$$

Как следует из (7.3), при переходе  $\varepsilon$  через нуль в область положительных значений состояния равновесия теряет устойчивость. При  $\varepsilon = 0$  имеем  $s_{1,2} = \pm i$ . Состояние равновесия типа фокус претерпевает бифуркацию рождения предельного цикла Андронова–Хопфа. Амплитуда цикла растет пропорционально корню квадратному из надкритичности  $(\sqrt{\varepsilon})^*$ , а период цикла при  $0 < \varepsilon < 1$  определяется соотношениями

$$T \cong \frac{2\pi}{\omega(\varepsilon)}, \quad \omega(\varepsilon) = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad (7.4)$$

то есть частота генерации при  $0 < \varepsilon < 1$  близка к собственной частоте резонансного контура  $\omega_0$ .

Рассмотрим динамику генератора (7.2) при воздействии на него аддитивной гармонической силы [16]:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega_1 t + \phi_0). \quad (7.5)$$

Получить решение уравнения (7.5) с помощью компьютера не представляет труда. Однако для понимания сути динамических явлений проведем приближенное аналитическое исследование, которое позволит нам глубже понять физический смысл эффекта синхронизации. Для этого обсудим вначале понятие фазы колебаний. Термин “фаза колебаний” первоначально был введен для гармонических процессов типа  $x(t) = A \exp(i\omega t) = A(\cos \omega t + i \sin \omega t)$ . В полярной системе координат это колебание изображается как вращение вектора  $A$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Фазе колебаний отвечает угол поворота вектора  $A$  во времени  $\phi = \omega t$ . Значению угла в начальный момент времени  $\phi_0 = \omega t_0$  отвечает начальная фаза, с которой регистрируется колебательный процесс во времени  $t > t_0$ .

В диссипативных нелинейных системах такое определение фазы использовать нельзя, так как колебания в них не могут быть строго гармоническими. Как же поступить в такой ситуации? Ответ зависит от того, какую динамическую систему и какой тип автоколебаний мы исследуем.

---

\*В уравнении (6.2) безразмерная переменная нормирована на  $\sqrt{\varepsilon}$ , поэтому является постоянной и равной 2.

Вернемся к системе (7.5). При малых  $0 < \varepsilon \ll 1$  и  $a = 0$  уравнение (7.5) описывает автоколебания в генераторе томсоновского типа. В этом случае решение  $x(t)$  можно искать в виде

$$x(t) = A(t) \cos [\omega_1 t + \phi(t)], \quad \dot{x}(t) = -\omega_1 A(t) \sin [\omega_1 t + \phi(t)], \quad (7.6)$$

где  $A(t)$  — медленно меняющаяся во времени амплитуда колебаний,  $\phi(t)$  — медленно меняющаяся во времени фаза колебаний,  $\omega_1$  — частота внешнего сигнала в (7.5). Иначе говоря, мы вводим в рассмотрение понятие мгновенной амплитуды  $A(t)$  и мгновенной фазы колебаний:

$$\Phi(t) = \omega_1 t + \phi(t). \quad (7.7)$$

Решение уравнений (7.5) будем искать в виде:

$$x(t) = A(t) \cos \Phi(t). \quad (7.8)$$

В этом случае зависящая от времени компонента фазы  $\phi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$  представляет собой мгновенную разность фаз между результирующим, близким к гармоническому, процессом  $x(t)$  и внешним гармоническим сигналом. Условие медленного изменения фазы  $\phi(t)$  во времени означает, что  $\dot{\phi}(t) \ll \omega_1$ . Опуская процедуру несложных, но громоздких преобразований, описанную во многих учебниках, запишем явный вид уравнений первого приближения для мгновенной амплитуды  $A(t)$  и мгновенной фазы  $\phi(t)$

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\varepsilon A}{2} \left( 1 - \frac{A^2}{4} \right) - \mu \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \Delta - \frac{\mu}{A} \cos \phi, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где  $\mu = a/2\omega_1$  — параметр нелинейности системы (7.9),  $\Delta = (\omega_0^2 - \omega_1^2)/2\omega_1 \cong \omega_0 - \omega_1$  — расстройка по частоте между собственной частотой автономного генератора и частотой внешнего сигнала в (7.5),  $\varepsilon$  — параметр возбуждения генератора.

Уравнения (7.9) по смыслу представляют собой усредненные по времени уравнения, которые часто называются системой “укороченных уравнений”. Неподвижной точке системы (7.9) ( $\dot{A} = 0$ ,  $\dot{\phi} = 0$ ) будет отвечать периодическое решение исходной системы (7.5), а периодическому решению (7.9) — двухчастотное квазипериодическое решение уравнения (7.5).



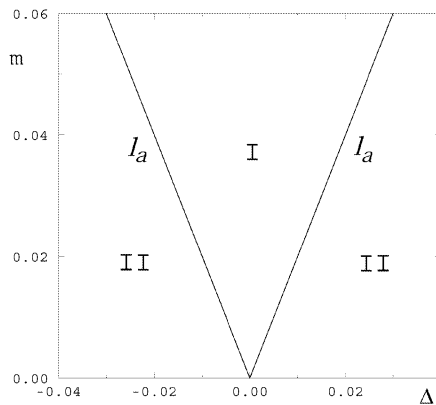
Отметим, что укороченные уравнения получены в приближении медленно меняющихся амплитуды и фазы и, как показывают расчеты, могут описывать процесс  $x(t)$  в (7.5) при условии, что  $\mu \leq 0.05$ .

Предположим, что система уравнений (7.9) имеет в качестве решения неподвижную точку (или состояние равновесия)  $\dot{A} = 0$ ,  $\dot{\phi} = 0$ , и она устойчива. Условие  $\dot{A} = 0$  означает постоянство во времени амплитуды колебаний, а условие  $\dot{\phi} = 0$  означает, что  $\dot{\Phi} = \omega_1$  (см. (7.7)), то есть частота вынужденных колебаний в системе (7.5) будет совпадать с частотой внешней силы. Если этот режим колебаний возможен и является устойчивым, то частота колебаний в неавтономном генераторе (7.5) изменится и окажется равной частоте внешней силы  $\omega_1$ . При этом амплитуда колебаний во времени меняться не будет. Генератор “подстроится” по частоте, и реализуется эффект вынужденной синхронизации.

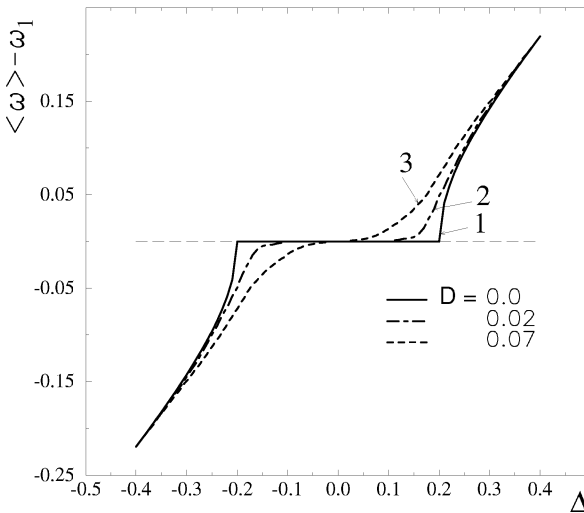
Найти координаты неподвижной точки  $A^0(\mu, \Delta)$  и  $\phi^0(\mu, \Delta)$  можно аналитически, решая (7.9) при условии равенства нулю правых частей уравнений. Можно также аналитически исследовать устойчивость  $A^0$  и  $\phi^0$ . Расчеты показывают, что на плоскости параметров  $(\mu, \Delta)$  существует область их значений, в которой состояние равновесия устойчиво. Эта область представлена на рис. 7.2. На границах области (линии  $l_a$ ) равновесие теряет устойчивость, из равновесия рождается предельный цикл (переход из области I в области II).

Как уже отмечалось, в полной системе (7.5) состоянию равновесия отвечает предельный цикл, а циклу — двумерный тор. Это означает, что в области I мы имеем устойчивые колебания с частотой  $\omega_1$ , а вне ее — квазипериодические колебания с двумя независимыми частотами  $\omega_1$  и  $\omega_0$ . Область I, в которой частота колебаний генератора  $\omega_0 = \omega_1$ , называется областью синхронизации на основном тоне.

Эффект синхронизации иллюстрирует также зависимость разности частоты колебаний системы (7.5) и частоты внешнего воздействия от



**Рис. 7.2.** Область синхронизации, отвечающая устойчивости неподвижной точки системы (6.9).



**Рис. 7.3.** Зависимость разности средней частоты колебаний в системе (6.5) и частоты внешнего воздействия от величины параметра расстройки для различных значений интенсивности шума.

расстройки  $\Delta$  (кривая 1 на рис. 7.3). Как видно из рисунка, в конечной области значений параметра расстройки частота собственных колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия. Вне области синхронизации частота колебаний генератора отличается от частоты внешней силы и в системе реализуется режим двухчастотных квазипериодических колебаний. Интересным представляется следующий вопрос: что будет происходить при дальнейшем увеличении расстройки, то есть при дальнейшем увеличении частоты внешней силы в области квазипериодических колебаний? Для ответа на данный вопрос введем в рассмотрение так называемое число вращения Пуанкаре, как отношение частот  $\theta = \omega_1/\omega$ . Здесь  $\omega_1$  — частота внешней силы, а  $\omega$  — частота колебаний генератора. В рассмотренном выше случае синхронизации на основном тоне мы имеем  $\omega = \omega_1$  и число вращения равно единице. Этот случай отвечает резонансу 1 : 1 на двумерном торе. Как видно из рис. 7.3 (кривая 1), при выходе из области синхронизации  $\omega \neq \omega_1$ , а их разность монотонно растет с увеличением  $\omega_1$ . Это означает, что число вращения также будет изменяться по величине, принимая последовательно то иррациональные, то рациональные значения.

Рациональным значениям числа вращения  $\theta = m : n$  отвечают более сложные (в сравнении с резонансом  $1 : 1$ ) резонансные циклы на торе. Области устойчивости этих циклов определяют соответствующие области синхронизации или области захвата частоты и фазы. С увеличением порядка резонансов (с ростом  $m$  и  $n$ ) области синхронизации становятся заметно уже, но сохраняют качественно форму области синхронизации при резонансе  $1 : 1$  (см. рис. 7.2). Если произвести расчеты зависимости  $\omega - \omega_1$  от расстройки  $\Delta$  в диапазоне  $0 \geq |\Delta| \geq 1$ , используя исходные уравнения (6.5), то мы получим график с бесконечным числом “полочек” типа рис. 7.3, ширина которых уменьшается с ростом  $m$  и  $n$ . Этот график имеет фрактальную структуру и носит название “дьявольской лестницы”.

Рассмотренный выше случай динамики генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии отвечает случаю так называемой внешней или вынужденной синхронизации. При внешней синхронизации воздействие на генератор является однонаправленным, обратная реакция генератора на источник внешней силы отсутствует. На практике реализуется и более общий случай — взаимодействие двух автоколебательных систем с различными собственными частотами  $\omega_1^0$  и  $\omega_2^0$ . Данное взаимодействие характеризуется тем, что колебания двух генераторов оказывают влияние друг на друга, а связь между ними осуществляется в обоих направлениях. Исследования показали, что качественного различия между этими случаями нет: эффект синхронизации наблюдается и при взаимной связи между двумя генераторами. Отличие может состоять лишь в том, что частота синхронных колебаний может быть  $\omega_1^0$ ,  $\omega_2^0$  или не совпадать с ними, занимая промежуточное значение  $\omega_1^0 < \omega_p < \omega_2^0$ . Эффект синхронизации двух взаимодействующих генераторов называют взаимной синхронизацией.

Совокупность рассмотренных динамических явлений в неавтономном и связанных генераторах позволяет сформулировать критерии и основные свойства нелинейного явления, называемого синхронизацией. Основным признаком как внешней, так и взаимной синхронизации является установление режима колебаний с постоянным и рациональным значением числа вращения Пуанкаре  $\theta = m : n$ , которое сохраняется в некоторой конечной области значений параметров системы, называемой областью синхронизации. Область синхронизации характеризуется эффектом захвата частоты и фазы колебаний. Захват частоты означает рациональное отношение двух исходно независимых частот  $\omega_1 : \omega_2 = m : n$  всюду в области синхронизации. Захвату фаз отвечает

постоянство разности фаз колебаний взаимодействующих генераторов в области синхронизации ( $\dot{\phi} = 0$ ,  $\phi_{st} = \text{const}$ ).

С физической точки зрения эффект синхронизации состоит в том, что два характерных собственных временных масштаба взаимодействующих колебательных систем, которые в отсутствие связи являлись независимыми, при взаимодействии оказываются целочисленно кратными или рационально связанными. При этом важно, что эта кратность оказывается фиксированной в некоторой конечной области значений параметров системы, называемой областью синхронизации.

## Синхронизация генератора Ван дер Поля в присутствии шума. Эффективная синхронизация

Выше мы рассмотрели задачу синхронизации генератора гармонической внешней силой в динамическом описании, не учитывающем воздействие случайных возмущений. В реальных системах всегда присутствует шум в виде естественных флуктуаций, обусловленных наличием диссипации, а также в виде случайных воздействий внешней среды. Необходимо выяснить, какие принципиальные отличия в динамике генератора могут быть вызваны случайными возмущениями; в частности, каково влияние шумов на эффект синхронизации.

Задача о синхронизации генератора типа Ван дер Поля в присутствии шумов впервые была поставлена и решена в работах Р. Л. Стратоновича [17]. Им рассматривалась задача о воздействии шумов на генератор в предположении, что интенсивность шума много меньше квадрата амплитуды гармонического воздействия. Кроме того, предполагалось, что статистические характеристики флуктуаций близки к характеристикам белого шума. В частности, источники шума считались достаточно широкополосными и время корреляции шума много меньше времени установления стационарных значений амплитуды и фазы колебаний.

Синхронизация генератора Ван дер Поля с учетом шума описывается стохастическим уравнением

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega_1 t + \phi_0) + \sqrt{2D} \xi(t), \quad (7.10)$$

в котором в сравнении с (7.5) добавлена случайная сила — источник белого шума  $\xi(t)$  интенсивности  $D$ . Из (7.10) Р.Л. Стратоновичем были получены стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) для

мгновенной амплитуды и фазы колебаний

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \frac{\varepsilon A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{4}\right) - \mu \sin \phi + \sqrt{2D}\xi_1(t), \\ \dot{\phi} &= \Delta - \frac{\mu}{A} \cos \phi + \frac{\sqrt{2D}}{A}\xi_2(t),\end{aligned}\quad (7.11)$$

где  $\xi_{1,2}(t)$  — некоррелированные источники шума,  $D$  — интенсивность шума. Наибольший интерес представляет второе уравнение системы (7.11). Если эффект синхронизации исследуется только с точки зрения режима захвата фазы (и частоты), без учета динамики амплитуды, в этом случае принято говорить о режиме фазовой синхронизации. Второе уравнение (7.11) характеризует передемпфированное броуновское движение разности фаз  $\phi$  в одномерном наклоненном периодическом потенциале  $U(\phi) = -\Delta \cdot \phi - \frac{\mu}{A} \sin \phi$ . Величина расстройки  $\Delta$  определяет наклон потенциала, а отношение  $\mu/A$  — высоту потенциальных барьеров. В случае  $\Delta < \mu/A$  минимумы потенциала  $\phi_k = \arccos(\Delta \cdot A/\mu) + 2\pi k$  соответствуют синхронизации, так как мгновенная разность фаз остается постоянной во времени. Наличие шума приводит к диффузии разности фаз в потенциале  $U(\phi)$ :  $\phi(t)$  флуктуирует вблизи минимумов потенциала  $\phi_k$  и более или менее часто совершает переходы из одной потенциальной ямы в другую, меняясь скачком на  $2\pi$ .

С физической точки зрения эффективная синхронизация, то есть синхронизация зашумленного автогенератора, проявляется в том, что режим захвата частоты (или фазы) наблюдается не на бесконечных временах, а на ограниченных отрезках времени  $t > T_0$ , где  $T_0$  — период внешнего периодического сигнала. Воздействие шума приводит к случайному во времени сбою режима синхронизации. Кроме того, бифуркация разрушения синхронизации, которая хорошо видна на графике рис. 7.3 в виде резкого излома кривой 1 на границах области синхронизации, в присутствии шума как бы “размывается”. Кривые 2 и 3 на рис. 7.3 демонстрируют некий плавный переход от режима эффективной синхронизации к ее разрушению с увеличением параметра расстройки.

## Синхронизация сердечного ритма

Представленные выше классические результаты получены на самой простой модели автоколебательной системы с почти гармоническими колебаниями, которой является генератор Ван дер Поля. Опыт иссле-

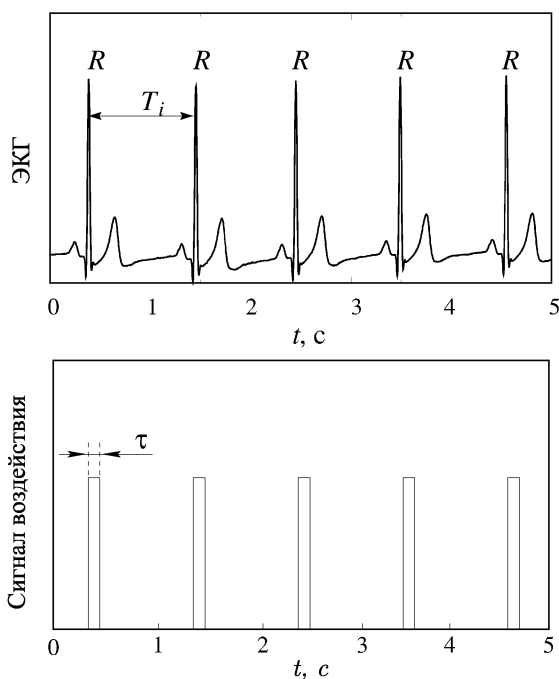
дований последних 50 лет убедительно показал, что теория синхронизации генератора Ван дер Поля отражает все принципиальные стороны эффекта синхронизации генераторов периодических колебаний. Более того, выяснилось, что основные, установленные в классической теории, эффекты качественно сохраняются и для генераторов хаотических и даже стохастических колебаний, то есть воспроизводятся в гораздо более сложных системах [4].

С целью иллюстрации фундаментальных свойств эффекта синхронизации рассмотрим экспериментальные результаты по синхронизации сердечного ритма человека внешним слабым периодическим сигналом. В жизни часто приходится слышать, что сердце здорового человека “работает как часы”. За этим неявно подразумевается, что сердечно-сосудистая система человека есть автоколебательная система, функционирующая в режиме периодических колебаний. С научной точки зрения здесь пока еще нет полной ясности. То, что сердце демонстрирует автоколебательный процесс, сейчас ни у кого не вызывает сомнений. Доказательством может служить факт, что изолированное сердце человека или животных вне организма продолжает сокращаться! Это означает, что колебания сердца не есть результат неавтономного (внешнего) воздействия на него со стороны какой-либо подсистемы организма. Более сложный вопрос о периодичности колебаний. Эксперименты свидетельствуют, что колебания сердца не являются строго периодическими и характеризуются “вариабельностью ритма”. Причина нерегулярности процесса сердечных сокращений может объясняться воздействием шума (или сигналов других подсистем организма), а может объясняться принципиально хаотическим режимом функционирования. Это еще предстоит выяснить.

Так как колебания сердца близки к периодическим, являются самоподдерживающимися и незатухающими, мы можем рассматривать их как результат работы автоколебательной системы. Если это так, то сердечно-сосудистая система должна демонстрировать эффект синхронизации. И мы постараемся это доказать.

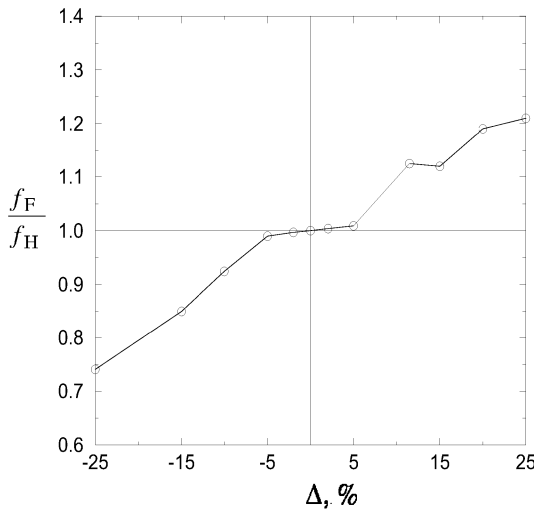
Рассмотрим результаты, полученные совместно сотрудниками лаборатории нелинейной динамики и лаборатории экспериментальной физиологии СГУ. Схема проведения экспериментов была следующей. Исследовалась группа студентов в количестве 40 человек, у которых отсутствовали признаки сердечно-сосудистых заболеваний. У каждого вначале снималась электрокардиограмма (ЭКГ) в режиме спокойного состояния. По ЭКГ определялась средняя частота сердечного ритма. Далее испытуемый садился в кресло перед экраном компьютерного монитора.

С помощью специальных программ компьютер мог генерировать периодические импульсы с заданной частотой, которой можно было управлять. Периодическое воздействие представляло собой последовательность всплесков на экране (периодически высвечивался красный квадрат на экране), сопровождаемую синхронными звуковыми импульсами. Интенсивность воздействия была очень слабой, что специально контролировалось измерением ряда физиологических характеристик (давление крови, амплитуда  $R$  зубца ЭКГ и др.). Спустя некоторое время после окончания переходного процесса вновь снималась ЭКГ, теперь уже в режиме внешнего воздействия. Данные через преобразователь вводились в память компьютера, а затем обрабатывались.



**Рис. 7.4.** Типичные реализации ЭКГ и сигнала внешнего воздействия.

Рассмотрим результаты. На рис. 7.4 представлены типичные графики ЭКГ и сигнала воздействия. Длительность импульсов воздействия  $\tau$  составляла  $\approx 10\%$  от длительности среднего значения кардиоинтервала  $\tau \approx 0.1\langle T_i \rangle$ . Сначала исследовалась реакция сердечно-сосудистой систе-



**Рис. 7.5.** Экспериментальная зависимость относительной частоты кардиоритма от нормированной расстройки частот.

мы на внешний сигнал, частота которого  $f_F$  выбиралась равной средней частоте сердечного ритма  $f_H = 1/\langle T_i \rangle$ . Было установлено, что внешнее воздействие приводит к захвату частоты сердечного ритма ( $f_F = f_H$ ) на конечных временах  $t_T = 20 \div 50$  сек. ЭКГ демонстрировали случайно чередующиеся интервалы времени, на которых  $f_H = f_F$ , и участки времени, на которых это условие нарушалось ( $f_H \neq f_F$ ). Регистрировался режим эффективной синхронизации на основном тоне. Если это так, то эффект должен сохраняться при введении малой расстройки частоты  $\Delta = (f_{rмH} - f_F)/f_H$ . Эксперименты это подтвердили. На рис. 7.5 приведена зависимость относительной частоты сердечного ритма  $f_F/f_H$  от расстройки  $\Delta$ . Результаты свидетельствуют о том, что при фиксированной амплитуде воздействия реализуется режим эффективной синхронизации в конечном интервале расстройки частоты  $\Delta \cong \pm 5\%$ . Сравнивая графики рис. 7.5 и рис. 7.3 (кривые 2 и 3), можно утверждать, что слабый внешний сигнал приводит к эффективной синхронизации сердечного ритма человека. Исследования показали, что эффект синхронизации демонстрировали более 90% испытуемых. Отличия для каждого из конкретных участников экспериментов наблюдались лишь в значениях интервалов расстройки  $\Delta$  и средних длительностях времен захвата. Сам же эффект синхронизации не вызывал никаких сомнений.



## Заклучение

На примере наиболее простой автоколебательной системы, которой является генератор Ван дер Поля, мы рассмотрели основные физические свойства эффекта вынужденной синхронизации периодических колебаний внешней гармонической силой. Синхронизации отвечает режим захвата частоты (и фазы) колебаний генератора внешней силой. Захват частоты характеризуется тем, что частота генератора “подстраивается” и становится равной частоте внешнего сигнала. Эффект захвата частоты является грубым, то есть реализуется в конечной области значений амплитуды и частоты синхронизирующего воздействия. Эта область называется областью синхронизации. Воздействие шума приводит к случайным во времени сбоям режима синхронизации и в этом случае мы говорим об эффективной синхронизации.

Для иллюстрации фундаментального эффекта синхронизации мы рассмотрели реакцию на внешний периодический сигнал наиболее сложной из всех известных автоколебательных систем — сердечно-сосудистой системы человека. Полученные результаты убедительно подтвердили, что эффект захвата частоты уверенно регистрируется и для кардиоритма человека, демонстрируя режим внешней эффективной синхронизации.

## Лекция 8

# Стохастический резонанс и стохастическая синхронизация

*Рассматриваются явления стохастического резонанса и стохастической синхронизации в качестве иллюстрации нового класса явлений, обусловленных воздействием шума на нелинейные системы. Показано, что внешний шум может повышать степень упорядоченности процессов колебаний, выступая в роли конструктивного фактора.*

*In this lecture effects of stochastic resonance and stochastic synchronization are considered as an illustration of a new class of phenomena caused by the influence of noise on nonlinear systems. It is shown that external noise enables to increase the order degree of oscillations by playing the role of a constructive factor.*

## Введение

Слово “шум” в обыденном сознании ассоциируется с чем-то, что мешает, вносит беспорядок. Со времен изобретения радио и начала его быстрого применения для передачи информации одной из основных инженерных проблем была (и остается) проблема подавления шумов, снижения степени их влияния на систему. Однако шум принципиально неустраним: шум той или иной природы всегда присутствует в системе, будь то радиофизический генератор, химическая реакция, биологическая популяция, человеческий организм или любая другая система. В связи с этим возникают вопросы: Всегда ли шум вызывает “негативные” последствия? Возможны ли случаи, когда шум может увеличивать степень порядка в системе, то есть брать на себя роль создающего фактора?

Положительный ответ на последний вопрос, на первый взгляд, противоречит нашей интуиции. Действительно, трудно себе представить, что с увеличением уровня шума могут быть улучшены, скажем, условия приема сигнала, то есть повышена чувствительность приемника. В этой связи отметим, что наша интуиция, чаще всего, базируется на “линейном” мышлении, которое может быть проиллюстрировано на простом примере. Предположим, что мы подаем на вход какого-то устройства сигнал, состоящий из двух компонент: периодической и случайной, шумовой. Если это устройство линейное, то на его выходе будет опять сумма периодической и шумовой компонент сигнала, каждая из которых преобразуется одинаково. Действует принцип суперпозиции: отклик системы на воздействие суммы сигналов равен сумме откликов на каждый сигнал в отдельности. Подавляющее число процессов в окружающей нас природе подчиняется нелинейным законам, для которых принцип суперпозиции не работает. Нелинейность, как и наличие шума, является неотъемлемой чертой окружающего нас мира, начиная с простого маятника и кончая сложными живыми организмами и сложными техническими системами. Нелинейные свойства систем являются основной причиной многообразия нетривиальных эффектов и одной из главных причин таких фундаментальных явлений, как самоорганизация материи, динамический хаос и другие.

Исследования последних лет показали, что в нелинейных системах шум может играть конструктивную роль, индуцируя новые режимы, образуя структуры и таким образом упорядочивая систему. Эффекты подобного типа получили название *индуцированных шумом переходов*. Яркий пример — явление *стохастического резонанса* (СР), которое на-

блюдается для широкого класса систем, подверженных одновременному воздействию двух сил: малой, периодической во времени, и случайной. При увеличении уровня шума на входе отклик системы на воздействие малого периодического сигнала растет до определенного значения интенсивности шума, а затем начинает убывать. Если по одной оси координат отложить значения интенсивности шума, а по другой — величину, характеризующую отклик системы на периодическое воздействие (такой величиной может быть, например, отношение сигнал/шум), то получается кривая, имеющая максимум при некотором значении уровня шума. Кривая такого вида напоминает резонансную кривую для колебательных систем. Эффект явно нетривиален, поскольку противоречит нашей интуиции. Действительно, мы увеличиваем уровень шума на входе системы, вносим дополнительный беспорядок в систему, а на выходе получаем усиленную периодическую компоненту! Для линейных систем это в принципе невозможно. Отношение сигнал/шум в линейных системах будет монотонно падать с увеличением уровня шума на входе [4,18].

СР наблюдается для широкого класса физических, биологических, химических систем. Однако первоначально СР был предложен итальянскими физиками около 20 лет назад для объяснения наступления ледниковых периодов Земли. Исследования показали, что глобальные изменения климата Земли являются почти периодическим процессом с периодом порядка 100 000 лет. Частотный спектр климатических временных рядов имеет заметный пик на соответствующей частоте. Этот период был отнесен к малым периодическим возмущениям орбитальных параметров Земли. Возникает вопрос: как малые медленные вибрации орбитальных параметров могут вызывать катастрофические события планетарного масштаба, приводящие к наступлению ледниковых периодов? В качестве ответа на этот вопрос был предложен эффект СР. В представленной модели роль слабого периодического сигнала играли периодические вибрации орбитальных параметров Земли, а шум представлял собой быстрые флуктуации, обусловленные климатической динамикой. За счет эффекта СР слабые вибрации орбитальных параметров могут вызвать усиленный отклик, что может привести к катастрофическим изменениям климата. В настоящее время изучение СР стало интенсивно развивающейся областью исследований в современной физике. Общность этого явления для систем различной природы привлекла к нему внимание биологов, химиков, инженеров. Проблеме СР посвящаются крупные международные конференции и регулярные обзоры в ведущих международных изданиях [18]. У эффекта СР существует много аспектов прикладного и теоретического характера. В этой

лекции мы остановимся на одном из фундаментальных аспектов СР, а именно: мы покажем, что СР может рассматриваться как обобщение явлений классического резонанса и синхронизации на случай, когда период колебаний системы представляется не фиксированной постоянной величиной, а является случайной функцией времени. На основании результатов наших исследований мы дадим описание нового физического явления, которое названо эффектом стохастической синхронизации. Этот эффект является обобщением классических представлений о синхронизации на случай стохастических систем.

## Механизм СР

С явлением резонанса мы знакомимся в раннем детстве, раскачивая качели. Если частота внешней силы  $f_1$ , действующей на колебательную систему, совпадает с ее собственной частотой  $f_0$ , то отклик системы на периодическое воздействие возрастает: качели замечательно раскачиваются. Зависимость амплитуды колебаний от частоты внешней силы  $f_1$  имеет максимум при  $f_1 = f_0$ .

Свойство резонанса в диссипативных колебательных системах используется для создания устройств и систем, совершающих незатухающие периодические колебания (автоколебания). В отличие от просто колебаний, амплитуда и частота автоколебаний в некоторых пределах не зависят от начальных условий и целиком определяются свойствами системы. При воздействии внешней периодической силы на автоколебательную систему наблюдаются явления *синхронизации*. Эффект заключается в том, что частота автоколебательной системы подстраивается под частоту внешней периодической силы, происходит *захват частоты*, причем совпадение частот наблюдается в конечной области изменений параметров системы, чему соответствует *область синхронизации* на плоскости параметров. Явление синхронизации имеет место и при взаимодействии автоколебательных систем. В этом случае захватываются частоты парциальных подсистем.

Основная картина СР может быть описана на примере движения частицы в двухъямном симметричном потенциале  $U(x)$  с большим трением под действием двух сил: стохастической  $F(t)$  (шум) и периодической  $A \cos(2\pi f_0 t)$  (сигнал) [18,19]. В отсутствие сигнала и шума система имеет два устойчивых состояния равновесия  $x_1$  и  $x_2$ , соответствующих минимумам потенциала в ямах, и неустойчивое, соответствующее максимуму потенциальной энергии  $x_0$  (см. рис. 8.1). В модели климатических изменений, с которой началась история СР, одно устойчивое состояние

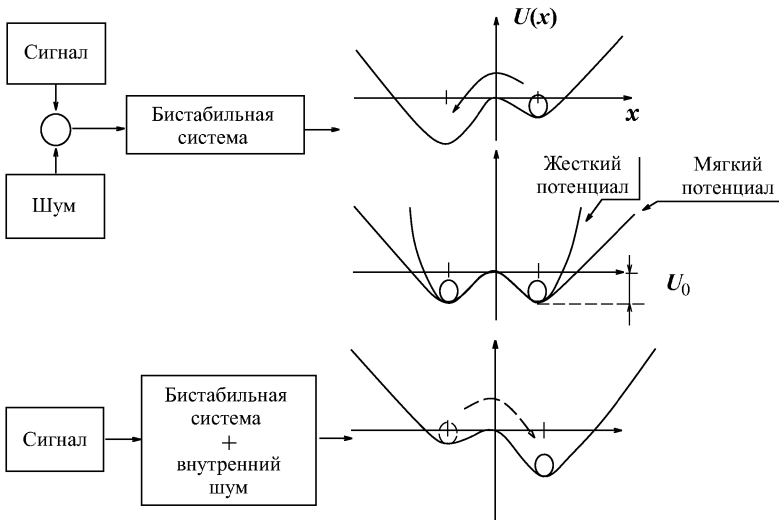
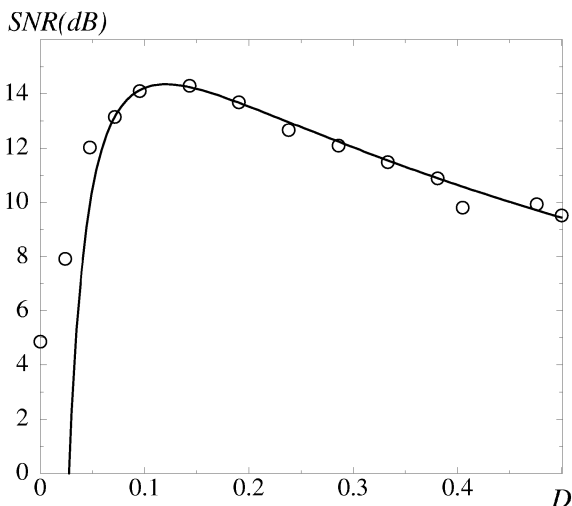


Рис. 8.1. Профиль бистабильного потенциала.

соответствует нормальному климату, а второе — ледниковому периоду. В зависимости от начальных условий частица попадет в одно из двух устойчивых состояний равновесия. Из-за большого трения колебательные движения в системе невозможны. Наличие случайной силы приводит к случайным вибрациям внутри потенциальной ямы. Когда случайная сила принимает большие значения, частица может преодолеть потенциальный барьер  $\Delta U$  и перескочить в другую яму. При малой интенсивности шума большие значения случайной силы действуют крайне редко и перескоки частицы из ямы в яму также будут редки. Таким образом, при малых интенсивностях шума  $D < \Delta U$  динамика частицы включает движения двух типов: быстрое (флуктуации внутри потенциальных ям) и медленное (представленное перескоками из одной ямы в другую). Времена нахождения частицы в той или другой потенциальной яме являются случайными, а среднее время жизни частицы в потенциальной яме  $\langle T \rangle$  подчиняется закону Аррениуса, выражающемуся в экспоненциальной зависимости от величины потенциального барьера  $\Delta U$  и интенсивности шума  $D$ :  $\langle T \rangle \propto e^{\Delta U/D}$ . Чем выше потенциальный барьер и ниже уровень шума, тем дольше (экспоненциально дольше!) частица будет флуктуировать в потенциальной яме. Данная система не имеет собственной детерминированной частоты, однако существует характерный временной масштаб, статистическая величина  $\langle T \rangle$  и свя-

занная с ней *средняя частота переключений*  $f_s = \frac{1}{2(T)}$ , играющая роль собственной частоты. Эта величина экспоненциально чувствительна к изменению уровня шума, то есть контролируется шумом. Включим в рассмотрение слабый периодический сигнал. “Слабый” означает, что амплитуда периодической силы мала настолько, что сигнал сам по себе не может перебросить частицу из одной потенциальной ямы в другую, а приводит лишь к периодической модуляции потенциала. Сигнал вносит периодическую компоненту в случайный процесс перескоков частицы. Если средняя частота перескоков совпадает с частотой периодического сигнала,  $f_s = f_0$ , то процесс перескоков в среднем будет следовать фазе периодической силы. Наблюдается существенный рост отклика бистабильной системы на периодическое возмущение, то есть наблюдается резонансное явление. Фундаментальное отличие этого эффекта от классического резонанса в том, что в нашем случае система сама по себе не имеет собственной *детерминированной частоты*, а обладает лишь контролируемой шумом средней частотой перескоков. Поэтому это явление было названо *стохастическим резонансом*. СР, таким образом, является обобщением классического явления резонанса на случай систем, обладающих характерным временным масштабом, управляемым шумом. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что при малых амплитудах и низких частотах сигнала отношение сигнал/шум (signal-to-noise ratio, SNR), чаще всего используемое для количественной оценки СР, описывается формулой  $SNR \propto \left(\frac{\Delta U}{D}\right)^2 e^{-\Delta U/D}$ . Качественная зависимость SNR от интенсивности шума схематически показана на рис. 8.2. С увеличением уровня шума  $D$  отношение сигнал/шум растет, достигает максимального значения при оптимальном уровне шума, который соответствует резонансному условию, и затем убывает.

Сейчас известно, что СР наблюдается не только в бистабильных системах, но и в более сложных системах, например в системах с динамическим хаосом [4], и в более простых системах. Особенно интересны и перспективны приложения СР в биологии. В ряде работ [18] было показано, что СР может быть использован для объяснения феномена распознавания биологическими объектами чрезвычайно слабых сигналов, практически скрытых в шумовом окружении. Простейшая модель нейрона, который является “проводником” информации в живых объектах, представляет собой бистабильную систему с двумя устойчивыми состояниями, соответствующими невозбужденному и возбужденному (“горящему”) нейрону. За счет эффекта СР чувствительность такой системы к малым зашумленным сигналам может быть повышена в десятки и сотни раз!



**Рис. 8.2.** Зависимость SNR (произвольные единицы) от интенсивности шума  $D$ .  $\Delta U = 1/4$ .

### СР для сложных сигналов

Для практических приложений интересны сигналы, несущие информацию и имеющие сложный спектральный состав. В связи с этим мы исследовали СР для случаев амплитудной и фазовой модуляции. Было установлено, что для таких сигналов СР также наблюдается, то есть существует принципиальная возможность использования СР для обработки сложных сигналов. В работе [18] мы показали, что СР возможен для сигналов с конечной шириной спектральной линии. Более того, было теоретически предсказано, что за счет СР ширина спектральной линии на выходе бистабильной системы может быть уменьшена! Иными словами, сигнал может быть не только усилен, но и его качество может быть улучшено за счет СР.

### Явление стохастической синхронизации

Наличие в бистабильных системах характерного временного масштаба и соответствующей ему средней частоты перескоков делает стохастическую динамику этих систем похожей на детерминированную ди-

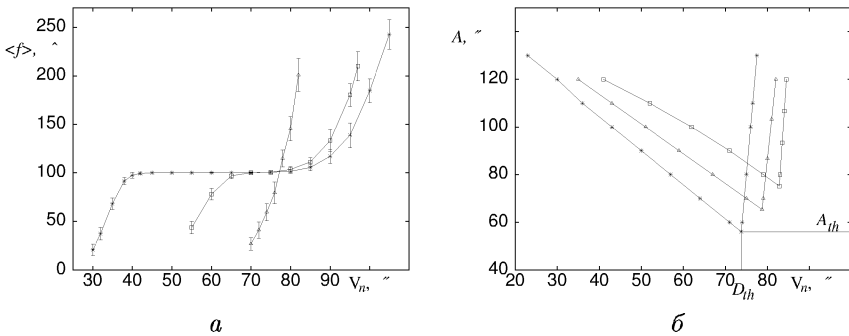


намику автоколебательных систем. Действительно, средняя частота переключений определяется исключительно интенсивностью шума и конфигурацией потенциала и не зависит от начальных условий. Возникает вопрос: возможно ли в этих системах явление, подобное синхронизации?

С целью получения ответа мы экспериментально исследовали триггер Шмитта, на вход которого одновременно подавались периодическое и шумовое напряжения. Триггер Шмитта — это простейшее электронное устройство с двумя состояниями. Если входное напряжение превышает пороговое значение, триггер переключается из одного состояния в другое. На выходе триггера мы имеем так называемый телеграфный сигнал, состоящий из случайной последовательности импульсов переключения. Результаты измерений показали, что действительно наблюдается явление синхронизации! Было установлено, что средняя частота переключений может быть захвачена внешним периодическим сигналом! На плоскости параметров “шумовое напряжение — амплитуда сигнала” удалось построить область синхронизации, в которой частота сигнала  $f_0$  и средняя частота переключений  $f_s$  совпадают. Результаты измерений приведены на рис. 8.3. Полученная область захвата частот качественно эквивалентна зонам синхронизации классических систем, которые могут быть найдены в любом учебнике по теории колебаний. Это принципиально новое явление отражает нетривиальный эффект. Система не имеет собственной детерминированной частоты, а средняя частота переключений является статистическим средним. Тем не менее, изменяя уровень шума (следовательно и среднюю частоту переключений), можно наблюдать явление синхронизации: захват частот, одна из которых является детерминированной, а другая — статистической величиной [18,4].

Эффекты синхронизации наблюдались нами и в системе двух связанных бистабильных элементов. В этой ситуации вообще отсутствует какая-либо детерминированная частота! В силу различия потенциальных барьеров, средние частоты переключений в парциальных системах в отсутствие связи разные. Однако при увеличении коэффициента связи наблюдается эффект захвата средних частот переключений парциальных систем [18].

Таким образом, в системах, обладающих характерными временными масштабами, контролируемым шумом, наблюдаются эффекты, родственные явлению синхронизации в автоколебательных системах. Мы назвали эту группу явлений “стохастической синхронизацией” (СС) по аналогии с СР. Явление СС обобщает классический эффект синхронизации автоколебательных систем на случай, когда системы вместо



**Рис. 8.3.** Зависимость  $f_s$  от шумового напряжения для разных значений амплитуды сигнала. Частота сигнала  $f_0 = 100$  Гц (а). Область синхронизации для триггера Шмитта (б).

детерминированных собственных частот обладают характерными временными масштабами, управляемыми шумами.

## СР и СС как явления самоорганизации

Синхронизация автоколебательных систем является одним из механизмов самоорганизации. Могут ли явления, обсуждаемые в предыдущих разделах, рассматриваться как процесс самоорганизации? Этот вопрос можно сформулировать и по-другому: можно ли, добавляя шум в систему, добиться ее упорядочивания? Для ответа на этот вопрос в работе [18] мы использовали идеи теории информации для описания эффекта СР. В самом деле, процесс переключений в бистабильной системе может быть ассоциирован с потоком информации о фазе и амплитуде входного сигнала через эту систему. На выходе система генерирует слова различной длины, состоящие из двух символов. В эксперименте мы измеряли так называемую энтропию информационного источника Шеннона. Эта величина является мерой степени беспорядка системы. Для абсолютно случайного процесса она максимальна и равна единице, для периодического процесса энтропия источника минимальна и равна нулю. Эксперимент показал, что зависимость энтропии источника от шумового напряжения имеет минимум. Этот минимум соответствует шумовому напряжению, при котором имеет место СР. Таким образом, величина, характеризующая степень беспорядка, при увеличении интенсивности шума может уменьшаться! Это доказывает, что выходной сигнал в режиме СР приобретает большую упорядоченность, СР приводит к самоорганизации.

## **Заключение**

Стохастический резонанс и стохастическая синхронизация, как установлено нами в процессе исследований, являются одним из универсальных механизмов самоорганизации сложных систем. Практические применения результатов исследований лежат в области обнаружения и обработки слабых зашумленных сигналов. Особенно перспективны приложения в области нейробиологии, где явление стохастической синхронизации, возможно, играет основную роль в распознавании живыми объектами слабых зашумленных сигналов.

## Лекция 9

# Динамический хаос и диагностика в биологии

*Обсуждаются принципиальные отличия в характеристиках хаотических сигналов, генерируемых динамическими системами в режимах детерминированного хаоса, от регулярных периодических и квазипериодических. На ряде конкретных примеров иллюстрируется возможность использования специфических количественных характеристик хаотических сигналов для решения диагностических задач в биологии и медицине.*

*In the lecture we discuss principal differences between characteristics of chaotic signals, generated by dynamical systems in the regime of deterministic chaos, and those of regular periodic and quasiperiodic signals. Using particular examples, we illustrate the possibility to apply of specific quantitative characteristics of chaotic signals for the purpose of diagnostics in biology and medicine.*

## Введение

Открытие эффекта динамического хаоса, который характеризуется возможностью детерминированных систем иметь в качестве решения непериодический (и не квазипериодический) во времени процесс незатухающих колебаний, относится к разряду наиболее фундаментальных результатов, оказывающих все большее влияние на осознание картины мира природы и законов, управляющих ее эволюцией. Если совсем недавно ответ на вопрос о возможных решениях обыкновенных дифференциальных уравнений исчерпывался указанием трех типов: состояние равновесия, периодическое или квазипериодическое, то с 1971 года мы можем говорить о новом, четвертом типе решения: об установившихся непериодических (шумоподобных) колебаниях в динамических системах в отсутствие каких-либо внешних или внутренних флуктуаций. Подчеркнем, что речь идет о динамическом описании временных процессов, базирующемся на детерминированности оператора эволюции применительно к макроскопическим координатам состояния динамической системы. Из рассмотрения исключаются стохастические процессы, анализ которых изначально предполагает наличие случайных закономерностей, обусловленных флуктуациями, и базируется на уравнениях статистической теории [2,11].

В чем же состоит принципиальная важность эффекта динамического хаоса для развития естествознания? Пожалуй наиболее важным мировоззренческим фактором является осознание того, что реальные динамические системы в условиях, когда их нелинейные свойства играют принципиальную роль, могут функционировать в режимах непериодических хаотических пульсаций в отсутствие случайных сил. Хаотические колебания по своему виду и характеристикам практически не отличаются от реализаций случайных процессов, но являются детерминировано определенными! До открытия динамического хаоса экспериментаторы довольно часто получали подобные результаты, однако с удивительным постоянством интерпретировали их как следствие воздействия шума, неисправности аппаратуры и т.д. Сегодня исследователи знают о возможном возникновении режима динамического хаоса и относятся к анализу полученных данных с более широких позиций.

Нет сомнения в том, что моделирование любых реальных процессов в природе с помощью динамических систем является мощным инструментом познания закономерностей эволюционных процессов в природе, применение которого все более и более расширяется. Типичным алгоритмом научного исследования свойств любой системы является

следующий. Система всесторонне анализируется; выделяются основные физические величины, характеризующие ее состояние; на основе известных законов природы устанавливаются функциональные взаимосвязи между этими величинами и в итоге формулируются эволюционные уравнения для координат состояния. Далее проводится анализ возможных решений модельной динамической системы. С этой целью динамика системы моделируется на компьютерах, позволяющих достаточно точно и быстро выявить типичные режимы ее функционирования при варьировании управляющих параметров и начальных условий. Модельные решения сравниваются с данными натурных экспериментов с исследуемой системой. Если отличия существенны, идет уточнение модели, вновь численный эксперимент, сравнение и т.д. В итоге формулируются динамические уравнения, представляющие собой математическую модель исследуемой системы.

Зависимость во времени координат состояния системы в режиме детерминированного (динамического) хаоса описывается сложной функцией, свойства которой требуют введения новых количественных характеристик для ее диагностики, отличных от характеристик периодического или квазипериодического режимов. Представим себе гармонический периодический сигнал  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$ . Гармоническое колебание исчерпывающим образом описывается, если заданы амплитуда  $A$ , частота  $\omega_0 = 2\pi f_0$  и начальная фаза колебания  $\phi$ . В спектральном представлении мы имеем единственную линию в спектре колебаний на частоте  $\omega_0$ , интенсивность которой однозначно определена амплитудой. В случае периодических негармонических колебаний картина изменится несущественно: периодический сигнал по теореме Фурье представляется в виде суммы гармонических компонент с различными амплитудами, фазами и частотами  $n\omega_0$ , кратными основной.

Квазипериодическое решение, в отличие от периодического, представляет собой суперпозицию тех же гармонических компонент с заданными амплитудами и фазами, но с более богатым спектром частот. В простейшем случае квазипериодического колебания с двумя независимыми частотами, которое можно представить себе в виде периодического сигнала частоты  $\omega_0$ , промодулированного периодическим сигналом более низкой частоты  $\Omega$ , спектр теоретически будет включать все комбинационные частоты  $\omega_{mn} = n\omega_0 + m\Omega$ ,  $n, m = \pm 1, \pm 2, \dots$  ( $m$  и  $n$  не могут быть равны нулю одновременно).

Сигналы любой природы представляют интерес с точки зрения информации, которую способны переносить. Полезная информация может быть заложена путем модуляции конкретного параметра системы.

Так, в случае гармонического сигнала информацию может содержать амплитуда, частота или фаза. Хорошо известны классические способы передачи информационных сообщений с помощью амплитудной, частотной или фазовой модуляции гармонических сигналов. Хаотический сигнал благодаря своей сложности с этой точки зрения принципиально отличается. Сложная структура хаотических сигналов потребовала существенного расширения совокупности параметров (или характеристик), с помощью которых можно описать отличительные особенности таких сигналов. Хаотические сигналы безусловно способны переносить большее количество информации, так как обладают заметно “большим числом степеней свободы”, описывающих сложность их структуры. Это обстоятельство служит основанием для использования специфических характеристик хаотических сигналов для диагностики динамических систем, которые генерируют эти сигналы.

## Количественные характеристики хаотических сигналов

Каковы же наиболее важные количественные характеристики хаотических сигналов, отличающие их от регулярных и позволяющие расширить спектр диагностических критериев состояния динамических систем? Перечислим наиболее важные из них.

**Степень хаотичности сигнала.** Так как хаотический сигнал является очень похожим по своей структуре на случайный, естественно, должны существовать количественные меры “степени случайности” хаотического сигнала. Фундаментальной характеристикой степени случайности является *энтропия*. Имея достаточно длинную хаотическую реализацию  $x(t)$ , нужно рассчитать плотность распределения вероятностей  $p(x)$ , которая для стационарных процессов не зависит от времени. Далее вычисляется энтропия  $H_x = - \int p(x) \log p(x) dx$ . В силу дискретности процедуры счета на ЭВМ, интеграл заменяется суммой и энтропия  $H^*$  всегда будет ограниченной положительной величиной.

Использование энтропии для характеристики хаотических процессов имеет более глубокое фундаментальное обоснование. Хаотические

---

\*Классическое понятие энтропии было введено для описания состояния консервативных систем, в которых нет диссипации энергии. Автоколебательные (или в общем случае открытые) системы всегда неконсервативны и энтропия будет зависеть от энергии системы. В этом случае для диагностики необходимо использовать некую перенормированную величину энтропии (энтропию Климонтовича [12]), которая не зависит от энергии системы.

траектории всегда неустойчивы в смысле Ляпунова. Степень неустойчивости имеет в качестве количественной меры так называемые положительные показатели Ляпунова. Именно наличие положительных показателей Ляпунова ведет к перемешиванию и “производит” энтропию динамической системы. Таким образом, энтропия и ляпуновский показатель являются взаимосвязанными количественными характеристиками степени хаотичности исследуемого процесса  $x(t)$ , что можно использовать в диагностических целях.

**Размерность хаотического аттрактора.** Как известно, хаотические аттракторы как образы динамического хаоса в фазовом пространстве системы имеют в общем случае дробную (нецелую) метрическую размерность. Этим специфическим свойством обладают только хаотические автоколебания и размерность аттрактора безусловно является характерным специфическим количественным критерием, позволяющим различать структуру хаотических колебаний. Размерность формально вводится как чисто геометрическая характеристика аттрактора. Однако и здесь имеет место фундаментальная взаимосвязь размерности, введенной из геометрических соображений, с динамическими свойствами аттрактора, характеризуемыми спектром ляпуновских экспонент, определяющих так называемую “ляпуновскую” размерность. Следствием является использование для диагностики как метрических (фрактальных) размерностей, так и ляпуновской (динамической) размерности аттракторов.

**Автокорреляционная функция и спектр мощности.** В силу аperiodической “шумоподобной” структуры хаотической реализации динамического процесса  $x(t)$  ее спектральная плотность мощности, вычисляемая как преобразование Фурье от интенсивности процесса, представляет собой непрерывную функцию частоты  $S(\omega)$ . Вид этой функции, наличие ярко выраженных максимумов на характерных частотах, частотный диапазон, включающий основную энергию колебаний, и другие свойства функции  $S(\omega)$  могут быть использованы в качестве диагностических критериев. В частности, если чисто формально рассматривать  $S(\omega)$  как плотность распределения мощности сигнала  $x(t)$  по частотам, то можно ввести понятие энтропии спектра  $H_\omega$  и т.д.

По теореме Винера–Хинчина спектр мощности  $S(\omega)$  через преобразование Фурье связан с автокорреляционной функцией процесса  $x(t)$ :  $\Psi(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$  (угловые скобки означают процедуру усреднения). Так как спектральная функция  $S(\omega)$  непрерывна в конечном интервале частот, автокорреляционная функция  $\Psi(\tau)$  будет иметь вид спадающей



во времени  $\tau$  функции. Время  $\tau_0$  спада  $\Psi(\tau)$  в заданное число раз называют временем корреляции, которое также характеризует степень случайности процесса и может быть использовано для диагностики.

Помимо вышеперечисленных характеристик хаотических колебаний для диагностики состояния системы могут быть использованы и ряд других специфических характеристик режимов динамического хаоса. Например, по имеющейся экспериментальной зависимости одной из координат процесса  $x(t)$ , которая вводится в память компьютера в виде дискретного временного ряда ( $x(i\Delta t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $\Delta t$  — время дискретизации), можно с помощью специальных методов восстановить аттрактор, топологически эквивалентный аттрактору исходной динамической системы, порождающей наблюдаемый экспериментально процесс  $x(t)$ . Структура восстановленного аттрактора, закономерности его эволюции при изменении условий эксперимента или режима функционирования исходной системы также могут использоваться для извлечения информации о системе и, следовательно, для диагностики.

Для анализа специального типа сигналов, представляющих собой некую непериодическую (хаотическую) последовательность временных интервалов  $t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , используется метод построения дискретных отображений последования. Такие отображения представляют собой дискретные динамические системы вида  $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ , где  $n$  — дискретное время,  $\mu$  — параметр системы. Функция  $f(x_n, \mu)$  позволяет по значению переменной в момент времени  $n$  получить ее значение на следующем шаге ( $n + 1$ ) итерационной процедуры. Предельное множество фазовых траекторий при  $n \rightarrow \infty$  характеризует аттрактор дискретной динамической системы. Свойства этого аттрактора можно описывать всеми вышеперечисленными количественными характеристиками, используя последние в качестве диагностических критериев. Примером такого рода сигналов в биологии и медицине являются последовательности  $RR$ -интервалов электрокардиограммы (ЭКГ) или последовательности интервалов времени между всплесками электрической активности нейронов (interspike intervals).

## Динамические болезни

В организме здорового индивидуума (будь то человек, животное, отдельный орган или даже клетка) обнаружен широкий набор различных временных ритмов. Эти ритмы практически всегда не отражают строгую периодичность процессов. Анализ ритмов сердцебиения, дыхания, давления крови, электроэнцефалограмм (ЭЭГ) и других процессов

свидетельствует о существенных отличиях указанных процессов от периодических. Эти отличия (например, для ЭЭГ) настолько явны, что высказываются предположения о соответствии нормальной динамики здоровых индивидуумов хаотическому режиму функционирования. Исследования таких процессов свидетельствуют о том, что наблюдаемый “хаос” может не быть следствием воздействия флуктуаций, а скорее всего присущ самой природе динамического процесса в организме. Та или иная степень хаотичности, характеризующая режим функционирования здорового индивидуума, может изменяться вследствие патологии в ту или иную сторону. Например, ЭЭГ здорового человека имеет достаточно высокую степень хаотичности, но при возникновении приступа эпилепсии демонстрирует переход к почти периодическому процессу. В то же время сердце здорового человека генерирует почти периодическую ЭКГ, но при некоторых типах заболеваний (аритмия, тахикардия) увеличивается число случайных сбоев ритма и соответственно возрастает степень хаотичности ЭКГ.

Характерные изменения в динамике какой-либо переменной состояния организма могут являться признаком патологии. Л. Гласс и М. Мэки ввели в науку термин “динамическая болезнь”, характеризуя им именно возникновение аномалии во временных зависимостях переменных состояния, описывающих режимы функционирования живых систем [21]. Богатство динамического поведения от периодичности до хаоса, наблюдаемое в физиологических системах и обнаруженное в относительно простых нелинейных системах малой размерности, дает надежду на саму возможность моделирования динамических болезней, их диагностику и в итоге лечение. Многие исследователи считают, что биология, физиология и медицина настолько отличаются от физики, что никогда не смогут стать предметом строгого теоретического анализа. Вместе с авторами книги [21] есть основания полагать и надеяться, что ряд обнаруженных и регистрируемых сейчас динамических явлений в живых организмах может быть более глубоко осознан и в перспективе математически описан на основе достижений современной теории динамических систем.

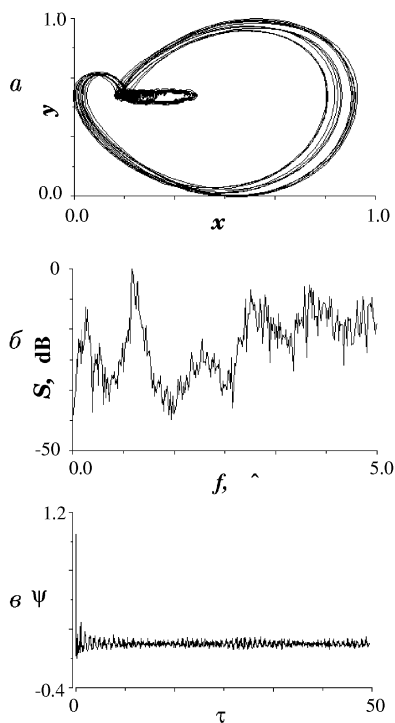
## **Моделирование динамики сердечного ритма**

Рассмотрим ряд конкретных примеров, иллюстрирующих часть положений, сформулированных выше. В качестве первого примера опи-

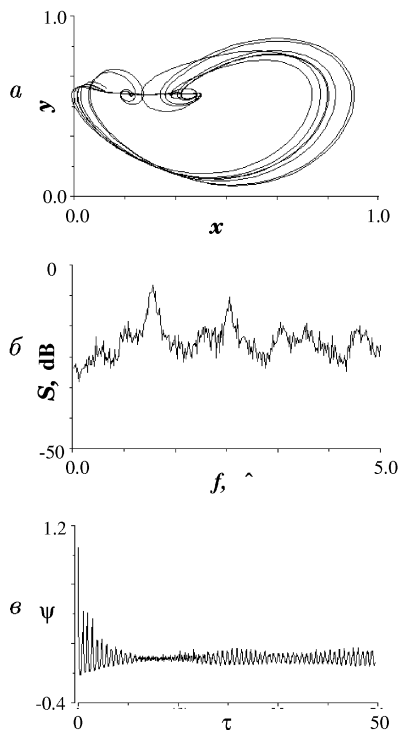
шем результаты экспериментов, проведенных в лаборатории нелинейной динамики СГУ по моделированию динамики сердечного ритма. В качестве исходного экспериментального материала использовались ЭКГ здорового человека (у которого отсутствуют признаки какого-либо сердечно-сосудистого заболевания). ЭКГ длительности 60 секунд с помощью аналого-цифрового преобразователя вводилась в память компьютера. Далее применялась современная техника вычислений, позволяющая по одномерному временному ряду численно решить задачу реконструкции модели динамической системы, решение которой с заданной точностью воспроизводит исходный сигнал ЭКГ. Задача реконструкции неоднозначна и, естественно, может иметь много решений. Мы остановились на наиболее простой модели, которая имела размерность  $N = 3$  и достаточно хорошо воспроизводила типичный кардицикл ЭКГ [22].

Исследования возможных динамических режимов колебаний в восстановленной динамической системе при вариации ее параметров показали, что эта модель описывает как режимы периодических, так и хаотических колебаний. Причем, изменяя некий управляющий параметр модели, можно было управлять степенью хаотичности результирующей ЭКГ, что отражало различные уровни вариабельности сердечного ритма. Исходная ЭКГ представляла собой непериодический сигнал. Подбором параметров реконструированной модели удалось найти режим ее функционирования, при котором характеристики исходной и модельной ЭКГ оказались близкими. На рис. 9.1 представлены фазовый портрет, спектр мощности и автокорреляционная функция экспериментально снятой ЭКГ, а на рис. 9.2 — те же характеристики, полученные из восстановленной математической модели. Нетрудно видеть достаточно хорошее соответствие прямых экспериментальных результатов с результатами, полученными с использованием модельной динамической системы.

Хотя представленные результаты уже удивительны в силу безусловно слишком простой процедуры моделирования, тем не менее можно еще более удивляться следующим данным. Известно, что структура спектральной плотности мощности (графики (б) на рис. 9.1 и 8.2) позволяет диагностировать ряд патологических отклонений в работе сердца человека. В частности, выделяют режимы, при которых частота сердечных сокращений практически постоянна (сердце “работает как часы”) и режимы с большой степенью аритмии, когда спектр становится практически равномерным в низкочастотной области, напоминая чисто шумовой процесс (сердцебиения с повышенной аритмией). В модель-



**Рис. 9.1.** Проекция аттрактора на плоскость (а), спектр мощности (б) и автокорреляционная функция (в), рассчитанные по экспериментальной ЭКГ здорового человека.



**Рис. 9.2.** Проекция аттрактора на плоскость (а), спектр мощности (б) и автокорреляционная функция (в) сигнала ЭКГ, полученного в результате решения реконструированной динамической системы.

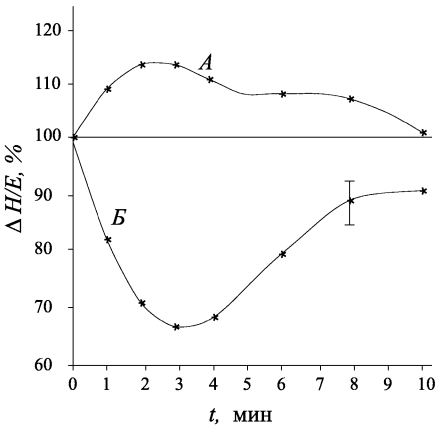
ной системе при вариации параметров удалось обнаружить как почти периодические, так и более развитые хаотические колебания. Другими словами, в зависимости от параметров, модельная система способна воспроизводить ЭКГ не только здорового человека, но и некоторые типы патологии.

## **Степень хаотичности как критерий диагностики**

В качестве иллюстрации рассмотрим два примера использования в качестве диагностического критерия количественных характеристик степени хаотичности процесса. В качестве исследуемых сигналов будем анализировать ЭКГ человека, а в качестве меры степени хаотичности выберем нормированную энтропию и старший показатель Ляпунова.

а) Обсудим вначале в общих чертах методику экспериментов, целью которых являлось исследование особенностей реакции здорового человека на слабые внешние раздражители (стресс). В качестве слабых стрессов использовались: физическая нагрузка (30 приседаний в течение 1 минуты), ментальная нагрузка (чтение незнакомого текста в течение 2 минут с целью его пересказа) и шумовое возмущение (одевались наушники и на 4 минуты включался генератор шума). Запись сигналов ЭКГ осуществлялась с частотой дискретизации 200 Гц и включала 60–70 кардиоинтервалов. Записи ЭКГ производились в исходном спокойном состоянии (до стрессорного воздействия) и по несколько раз во время воздействия и после его окончания. В зависимости от вида стресса временные интервалы между записями сигналов ЭКГ могли отличаться. В экспериментах участвовали практически здоровые мужчины (16 чел.) и женщины (14 чел.) в возрасте от 20 до 35 лет [23].

Отметим важное обстоятельство. Исходными (контрольными) данными в этих экспериментах являлись ЭКГ, записанные с пациентов до осуществления стрессорного воздействия. Необходимо было выяснить, какие характеристики ЭКГ демонстрируют наибольшую стабильность во времени у всех пациентов. С этой целью для всех испытуемых записывался сигнал ЭКГ в течение 20 минут. Далее вычислялись как традиционные характеристики (частота сердечных сокращений — ЧСС, ее дисперсия, интенсивность основной частоты сердечных сокращений и др.), так и нетрадиционные (спектр мощности, интегральная мощность, нормированная энтропия, время корреляции и др.). Было установлено, что наибольшую стабильность во времени для всех участников экспериментов демонстрировала именно нормированная энтропия! Изменения нормированной энтропии не превышали  $\pm 4\%$ , в то время как изменения всех других характеристик были в пределах от  $\pm 5 \div 6\%$  (ЧСС) до  $\pm 30 \div 40\%$  и более! Этот интересный факт достоин специального исследования, однако в рамках этой работы он служит экспериментальным обоснованием того, что нормированная энтропия может использоваться как количественная характеристика исходного (до стресса) состояния сердечно-сосудистой системы участников экспериментов.



**Рис. 9.3.** Зависимость во времени среднего изменения величины нормированной энтропии сигнала ЭКГ, обусловленного воздействием шума. *A* — результаты для женщин, *B* — результаты для мужчин. Нормировка осуществлялась на среднее по времени значение интенсивности колебаний сигнала ЭКГ. Средняя ошибка измерений составила  $\pm 4\%$ .

Исследования реакции на все указанные выше виды стрессорных воздействий позволили получить еще более удивительные результаты: из всей совокупности характеристик ЭКГ, записанных во время воздействий и после, устойчиво максимальные и достоверные изменения демонстрировала только одна — нормированная энтропия! В то время как артериальное давление при стрессах увеличивалось не более чем на 10%, ЧСС — на 8%, нормированная энтропия изменялась на 40 ÷ 70% и более!

Обсудим конкретные результаты реакции пациентов на воздействие шума, представленные на рис. 9.3. Графики отражают изменение нормированной энтропии  $\Delta H/E$  в сравнении с энтропией исходных ЭКГ во времени в течение 10 минут. Первые 4 минуты пациенты испытывали шумо-

вое воздействие малой интенсивности. Результаты просто удивительные, и вот почему. Как видно из графиков, нормированная энтропия достоверно фиксирует наличие стресса (отклонения от исходной нормы для графика *A* составляют 13% и для графика *B* — более 30%). Во-вторых, графики позволяют судить о времени релаксации, при котором изменения энтропии стремятся к нулю. И в-третьих, для испытуемых мужского пола (график *B*) энтропия при стрессе уменьшается, а для испытуемых женского пола (график *A*) — возрастает. Изменения нормированной энтропии в реакции человека на слабый шум приводят к росту степени хаотичности сигнала ЭКГ у женщин и к уменьшению у мужчин! Отметим, что представленные результаты полностью коррелируют с известными в биологии данными о половых различиях в реакциях на стресс, полученными другими методами.

**б)** Рассмотрим другой пример, где в качестве диагностического критерия также используется количественная характеристика степени ха-

отичности сигнала ЭКГ — старший показатель Ляпунова. Для анализа были выбраны 40 пациентов Саратовского кардиоцентра, страдающих ишемической болезнью сердца (ИБС) различной степени тяжести. С помощью специальных медицинских методов (коронарография, степень потребления миокардом кислорода, холтеровский мониторинг, физиологическая проба на ИБС и др.) 40 пациентов кардиоцентра врачами были разделены на 2 группы с различной степенью тяжести ИБС: 1 группа — 24 пациента, 2 группа — 16 пациентов. Отметим важное обстоятельство: применение стандартных методов обработки сигналов ЭКГ и  $RR$ -интервалов не позволило достоверно установить различия между больными 1-й и 2-й групп! Нашей задачей было доказательство возможности достоверного разделения больных по степени патологии на две группы, используя в качестве источника информации о состоянии здоровья только записи сигналов ЭКГ. Причем, нам были представлены ЭКГ всех 40 пациентов без указания на то, к какой группе они относятся.

В результате длительных детальных исследований, включающих расчеты на ЭВМ различных характеристик ЭКГ, было установлено, что разделение пациентов возможно. Наиболее достоверно это разделение осуществляется по старшему ляпуновскому показателю ЭКГ [24]\*.

Методика проведения экспериментов и результаты были следующими. Для каждого из 40 пациентов имелись записи двух последовательностей  $RR$ -интервалов по 350–500 точек: первая отвечала ЭКГ пациента в спокойном состоянии, вторая — во время установившегося процесса нагрузки, представляющей собой работу на велоэргометре. Пациенты крутили педали велоэргометра с частотой примерно 60 оборотов в минуту (нагрузка составляла 25 Вт) и после завершения переходного процесса осуществлялась запись последовательности  $RR$ -интервалов ЭКГ в течение 5–7 минут.

Обработка данных экспериментов показала, что у одной части пациентов под действием нагрузки ляпуновский показатель увеличивается (степень хаотичности сигнала ЭКГ возрастает), у другой — уменьшается (степень хаотичности падает). Более конкретно: у 12 пациентов из 16 (2-я группа) показатель Ляпунова при нагрузке возрастает, у 17 пациентов из 24 — уменьшается. Таким образом, изменение величины Ляпуновского показателя сигнала, представляющего собой запись последовательности кардиоинтервалов во времени, обусловленного реак-

---

\*Отметим, что в медицине достоверными считаются данные опытов, подтверждающиеся не менее чем для 66% от общего числа испытуемых, участвующих в эксперименте.

цией организма пациента на нагрузку, позволило установить принадлежность 29 пациентов из 40 (т.е. 72.5%) к 1-й или 2-й группе. Можно говорить о достоверной диагностике степени ИБС по ЭКГ!

Отметим важный факт. Как уже говорилось, степень хаотичности процесса характеризуется нормированной энтропией и положительными показателями Ляпунова. В экспериментах, описанных выше, этот факт подтвердился. Разделение пациентов на группы по степени тяжести ИБС достоверно можно провести, используя нормированную энтропию. Однако, с чисто технической точки зрения (длительность записей ЭКГ, точность вычислений и др.) в рассмотренных выше экспериментах ляпуновский показатель как диагностический критерий оказался более предпочтительным.

## **Заключение**

Применение современных достижений теории динамических систем и нелинейной динамики для математического моделирования функционирования и диагностики состояния живых систем является новым и перспективным направлением исследований, требующим объединения усилий физиков, математиков, биологов и медиков. Как любое новое направление в науке, оно подвергается усиленной критике и это естественно. Трудно представить себе и тем более доказать, что в недалеком будущем сердечно-сосудистая система человека будет адекватно описана математической моделью, параметры которой соответствуют физиологическому состоянию и воздействие на которые будет приводить к лечению той или иной болезни. Тем не менее многие серьезные исследователи верят в такое будущее и интенсивно работают для того, чтобы его приблизить.



## Лекция 10

# Реконструкция динамических систем

*Описываются современные методы и алгоритмы, используемые при решении задачи восстановления модельной динамической системы либо ее характеристик по одномерным временным рядам. Приводится пример конкретного применения описанных алгоритмов для реконструкции трехмерной дифференциальной системы Рössлера.*

*In the lecture modern methods and algorithms are described which are used for restoration of model dynamical system or its characteristics from one-dimensional time series. An example is given illustrating the application of the algorithms described for reconstruction of the three-dimensional differential Rössler system.*

## Введение

Важнейший метод исследования эволюционных процессов в естествознании состоит в построении математических моделей изучаемых систем и их анализе. Как сказал один из великих мыслителей прошлого века, любое утверждение истинно настолько, насколько оно базируется на математике. Наличие математической модели исследуемой системы существенно расширяет возможности ее изучения, позволяя решать задачи предсказания поведения системы во времени и зависимости режимов ее функционирования от параметров. Таким образом, одной из центральных является задача математического моделирования, решение которой дает возможность осуществления научного прогноза функционирования системы во времени, являющегося одной из главных проблем в естествознании.

Решение задачи моделирования теоретически не содержит проблем, если реальная система задана. Хорошо известный пример — колебательный  $LC$ -контур. На основе знания схемы контура и электрических законов не представляет труда записать основополагающие соотношения и получить уравнения классического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \omega_0^2 = 1/LC. \quad (10.1)$$

Решением уравнения (9.1) является гармонический колебательный во времени процесс, частота которого определяется параметрами контура  $L$  и  $C$ . При заданных начальных условиях  $x(t_0)$  и  $\dot{x}(t_0)$  состояние системы (9.1) будет однозначно известно для любого времени  $t \geq t_0$ .

Однако очень часто приходится сталкиваться с более сложной ситуацией, когда детальные сведения о реальной системе либо отсутствуют вовсе, либо явно недостаточны. Единственная информация о свойствах системы содержится лишь в экспериментальной зависимости одной из координат состояния системы во времени. Такая зависимость  $a(t)$ , измеренная в течение конечного времени  $t_0$ , называется *наблюдаемой* (или реализацией) системы, а при дискретизации с шагом  $\Delta t$ :  $a(i\Delta t) = a_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $N = [t_0/\Delta t]$ , она носит название *одномерного временного ряда*. Делается предположение о том, что наблюдаемая  $a(t)$  является детерминировано определенной, то есть представляет собой одномерную проекцию фазовой траектории, порождаемой некоторой динамической системой (ДС). Задачей реконструкции динамической системы является восстановление модельной ДС, решение которой с известной степенью точности воспроизводит одномерную наблюдаемую  $a(t)$  на заданном интервале времени  $t_0$  и для  $t > t_0$ . Проблема реконструкции ДС,

таким образом, относится к классу обратных задач, решение которых не может быть однозначным.

В рамках настоящей лекции мы ограничимся рассмотрением проблемы восстановления (реконструкции) ДС в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или дискретных отображений по одномерному временному ряду. Важно при этом не забывать, что временной ряд  $a(i\Delta t)$  предполагается детерминировано определенным, то есть отражает эволюционный процесс реальной ДС, управляемой детерминированными динамическими законами. Естественно, что такое предположение сужает класс рассматриваемых сигналов. В частности, если временной ряд есть следствие абсолютно случайного (шумового) процесса, то говорить о реконструкции не имеет смысла [4,25].

Попытаемся понять основные проблемы, с которыми связано решение задачи реконструкции. Первая обусловлена необходимостью введения каким-либо образом координат состояния системы. Ведь нам известна зависимость во времени (на *конечном* интервале!) лишь одной из координат реальной системы  $a(t)$ . Как ввести новые координаты и сколько их должно быть? Какова размерность ДС, которую мы хотим восстановить?

Предположим, что нам удалось как-то решить эту проблему и мы знаем размерность  $n$  модельной ДС. Сразу возникает второй, не менее важный вопрос: как записать сами уравнения? Каков вид модельного оператора эволюции, который в случае ОДУ определяется правыми частями системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка? Дать обоснованные ответы на эти два вопроса по сути дела и есть содержание раздела теории динамических систем, рассматривающего проблему реконструкции ДС по одномерным временным рядам.

В 1980 г. была опубликована работа Н. Пакарда, в которой показано, что фазовый портрет динамической системы может быть восстановлен по скалярному временному ряду  $a_i$ , если в качестве недостающих координат вектора состояния используется тот же самый ряд  $a_i$ , взятый с некоторым запаздыванием. В 1981 г. была доказана теорема, утверждающая, что по одномерной реализации  $a(t)$  ДС, обладающей аттрактором  $A$ , принадлежащим гладкому  $d$ -мерному многообразию, методом задержки можно получить  $n$ -мерную реконструкцию  $A_R$  исходного аттрактора как множество векторов  $\vec{x}(t)$  в  $R^n$  при  $n \geq 2d + 1$  (теорема Такенса):

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \Lambda_n(a(t)) = (a(t), a(t + \tau), \dots, a(t + (n - 1)\tau)) = \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Согласно теореме, отображение  $\Lambda_n : A \rightarrow A_R$  является гладким и обратимым на  $A_R$  почти при любой задержке  $\tau$  (если  $N \rightarrow \infty$ ).

Попытаемся разобраться в содержании теоремы Такенса. Она обосновывает введение в качестве новых координат состояния системы значений одномерного временного ряда  $a(i\Delta t)$ , взятых через некоторый интервал времени  $\tau$ :

$$x_1(t) = a(t), x_2(t) = a(t + \tau), x_3(t) = a(t + 2\tau), \dots \quad (10.3)$$

Число координат состояния конечно и должно превышать размерность аттрактора  $d$ . Вновь возникает вопрос: как реально выбрать время задержки  $\tau$ ? Каким способом определить число  $n$ , которое задает размерность модельной системы уравнений?

К сожалению, ответов на поставленные вопросы на основе только теоретических результатов получить нельзя, требуется привлечение данных экспериментальных исследований. Попытаемся дать ответы на эти вопросы.

1. С точки зрения положений теории задержка  $\tau$  может быть произвольной. Однако совершенно ясно, что если  $\tau$  слишком мало, то  $i$ -я и  $(i + 1)$ -я координаты точек фазовой траектории практически неотличимы друг от друга. Реконструируемый аттрактор в этом случае располагается вблизи главной диагонали пространства вложения (“линии идентичности”). А этого допускать нельзя в силу определения: координаты состояния есть независимые переменные, однозначно определяющие состояние системы. С другой стороны, если время задержки очень велико, координаты оказываются некоррелированными, и реконструированный аттрактор не отражает истинной динамики. На основе экспериментов установлено, что оценка оптимального времени задержки может быть получена из расчетов автокорреляционной функции  $\psi(\tau_0) = \langle a(t) \cdot a(t + \tau_0) \rangle$ , которая для сложных непериодических процессов будет спадающей во времени  $\tau_0$ . Значение  $\tau_0$ , соответствующее времени достижения первого нуля функции  $\psi(\tau_0)$ , используется в экспериментальных исследованиях для оценки задержки  $\tau$  в (9.2) при введении новых координат состояния модельной системы.

2. Теперь нужно каким-то способом найти  $n$ , чтобы определить размерность реконструируемой системы. Из теории следует, что для определения  $n$  необходимо знать размерность аттрактора реальной динамической системы, которая может быть определена следующим образом. Выбрав произвольное (небольшое) значение размерности пространства вложения  $n_0$ , реконструируем аттрактор и определим его размерность

$d_F$  с помощью специальных алгоритмов. Затем повторим данную процедуру, увеличивая  $n_0$  до тех пор, пока величина размерности  $d_F$  не перестанет претерпевать заданных изменений. Соответствующее значение  $d_F$  для хаотических аттракторов будет нецелым. Далее определяется ближайшее сверху целое число, и находится  $d$  — размерность пространства, в которое “укладывается” наш аттрактор. С помощью формулы Манэ

$$n \geq 2d + 1 \tag{10.4}$$

определяется размерность пространства вложения, необходимая для реконструкции аттрактора (а значит, и размерность модельной динамической системы), и таким образом ответ на второй вопрос получен.

Из сказанного следует, что для получения динамического описания на основе одномерного временного ряда нужно решить следующие задачи: определить размерность пространства вложения, реконструировать аттрактор в новом модельном фазовом пространстве и, наконец, записать явный вид модельной системы. Рассмотрим теперь эти этапы более подробно.

## Определение размерности вложения и реконструкция аттрактора

Предположим, что в результате эксперимента получены значения некоторой физической величины  $a$ , то есть набор  $a_i = a(i\Delta t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Будем считать, что временной ряд  $a_i$  порождается некоторой ДС с непрерывным или дискретным временем, представляя собой дискретизованную с шагом  $\Delta t$  одномерную проекцию фазовой траектории. Эта траектория принадлежит аттрактору системы, размерность которого равна  $d$ . Согласно Такенсу, задать вектор состояния можно по методу (9.2). Размерность пространства вложения  $n$  определяется на основании формулы Манэ (9.4), то есть требует предварительного вычисления величины  $d$ . На практике значение  $n$ , определяемое формулой (9.4), часто оказывается завышенным, и можно ограничиться пространством меньшей размерности ( $n < d$ ).

Вначале необходимо определить размерность аттрактора  $d$ . Для ее оценки обычно вычисляют так называемую корреляционную размерность, используя формулу

$$D_c = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lg C(\epsilon, N)}{\lg \epsilon}, \tag{10.5}$$

где  $C(\epsilon, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} v(\epsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$  — корреляционный интеграл,  $\epsilon$  — размер ячейки разбиения фазового пространства,  $N$  — число точек, используемых для оценки размерности,  $v$  — функция Хевисайда,  $\vec{x}_i = \vec{x}(i\Delta t)$ . Для определения  $D_c$  строят зависимость  $\lg C(\epsilon, N)$  от  $\lg \epsilon$  и ищут на ней линейный участок, наклон которого и определяет искомое значение размерности. Кроме того, иногда анализируют зависимость  $D_c(n)$  и увеличивают  $n$  до тех пор, пока  $D_c$  не достигнет насыщения.

Известно, что при вычислении  $D_c$  существуют ограничения на величину  $\epsilon$ . Если  $\epsilon$  приближается к размерам аттрактора  $\epsilon_{max}$ , то линейная зависимость  $\lg C(\epsilon, N)$  от  $\lg \epsilon$  пропадает, что объясняется влиянием границ аттрактора, где число соседей у каждой точки обычно меньше, чем в “середине”. В пределе, если  $\epsilon = \epsilon_{max}$ , то  $\lg C(\epsilon, N) = 1$ . С другой стороны, при уменьшении значения  $\epsilon$  существует некоторое  $\epsilon_{min}$ , такое, что для  $\epsilon < \epsilon_{min}$  структура аттрактора остается неразрешенной. Как следствие, вновь нарушается линейная зависимость  $\lg C(\epsilon, N)$  от  $\lg \epsilon$ .

Одной из проблем при расчете размерности является выбор величин  $N$  и  $\Delta t$ . Целесообразнее их подбирать не по отдельности, а с учетом размера временного окна  $N\Delta t$ . При этом следует принимать во внимание существование фундаментальных ограничений на величину  $D_c$ , определяемых формулой

$$D_{max} = \frac{2 \lg N}{\lg(1/r)}, \quad r = \frac{\epsilon}{\epsilon_{max}}, \quad (10.6)$$

которая означает, что алгоритм расчета размерности не может дать значение больше, чем  $D_{max}$  при заданном числе точек  $N$ . Иными словами, если  $r = 0.1$  и  $N = 1000$ , то  $D_{max} \leq 6$ ; если  $N = 100000$ , то  $D_{max} \leq 10$ . В результате возникают определенные сложности в случае, когда требуется отличить детерминированный процесс в системе с достаточно большим числом степеней свободы от истинно случайного процесса.

Знание размерности позволит нам реконструировать аттрактор методом (9.2), как было описано выше.

Метод задержки Такенса является наиболее известным, но не единственным способом задания вектора состояния. Альтернативой ему служит так называемый метод последовательного дифференцирования, имеющий определенные преимущества при решении задачи реконструкции. Идея данного метода следующая. Пусть имеется временной ряд  $a(i\Delta t) = a_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Задание вектора состояния в фазовом пространстве производится следующим образом:

$$\vec{x}(t) = (a(t), da(t)/dt, \dots, d^{n-1}a(t)/dt^{n-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (10.7)$$

Поскольку известны значения  $a_i$  только в дискретные моменты времени  $i\Delta t$ , координаты  $x_j$  вектора  $\vec{x}$  определяются путем численного дифференцирования исходного временного ряда по приближенным математическим формулам. Очевидно, что точность вычисления производных будет определяться малостью величины шага дискретизации  $\Delta t$ . Недостатком метода является повышенная чувствительность к шуму, что ограничивает его применимость для пространств вложения большой размерности (по крайней мере, без проведения предварительной процедуры фильтрации).

### Реконструкция динамической системы

После восстановления фазового портрета аттрактора ДС любым из вышеперечисленных методов может быть решена задача реконструкции оператора эволюции. Наиболее простой способ для этого — создать  $n$ -мерное дискретное отображение

$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= F_1(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}), \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n,i+1} &= F_n(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}), \end{aligned} \tag{10.8}$$

где  $x_{j,i}$  — координаты вектора состояния, рассмотренного в моменты времени  $i\Delta t$ ,  $F_j$  — нелинейные функции.

В рамках алгоритма глобальной реконструкции для получения конкретного вида эволюционного оператора функции  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  представляют в виде разложения по некоторому базису, ограничиваясь при этом конечным числом членов разложения. В простейшем случае задание  $F_j$  может осуществляться полиномами некоторой степени  $\nu$ :

$$F_j(\vec{x}_i) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_{k,i}^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^n l_k \leq \nu, \tag{10.9}$$

где  $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$  — неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. Для аппроксимации могут применяться полиномы Лежандра, либо может использоваться более сложная методика. Для задания  $F_j$  мы ограничимся формулой (9.9).

Система уравнений (9.8) допускает запись для любого номера  $i$ . Для нахождения коэффициентов (9.9) необходимо решить систему  $N$  линей-

ных алгебраических уравнений

$$x_{j,i+1} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_{k,i}^{l_k}, \quad i = 1, \dots, N \quad (10.10)$$

с неизвестными  $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$ , в которой  $N$  — число точек скалярного временного ряда, используемых для аппроксимации правых частей,  $\nu$  — степень полинома.

При заданных  $n$  и  $\nu$  число коэффициентов  $K$  полиномов (9.9) в общем случае может быть определено по формуле  $K = (n + \nu)! / (n! \nu!)$ . Как правило,  $N \gg K$ , поэтому для конкретизации эволюционного оператора система уравнений (9.10) решается методом наименьших квадратов. Получающаяся математическая модель является громоздкой, но при условии удачного выбора общего вида нелинейных функций ее решение воспроизводит сигнал с высокой степенью точности.

Аналогичным образом можно реконструировать не только дискретные отображения, но и математические модели в виде системы ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Смысл функций в правых частях тот же, что и ранее. Так как на первом этапе алгоритма была осуществлена реконструкция фазовой траектории, это значит, что все  $x_i$  известны; следовательно, можно определить производные от них. Поэтому (9.11) снова есть не что иное, как система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Если в качестве способа задания вектора состояния в фазовом пространстве используется метод последовательного дифференцирования, то математическую модель можно восстановить в более простом виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (10.12)$$

в силу того, что взаимосвязь между координатами однозначно задается равенством (9.7).



## Пример реконструкции динамической системы

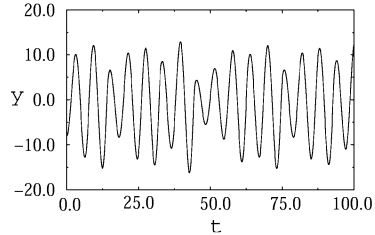
Рассмотрим конкретный пример применения описанного алгоритма. С этой целью используем известную динамическую систему Ресслера, описывающую режим неперiodических колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(y + z), \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c). \end{aligned} \quad (10.13)$$

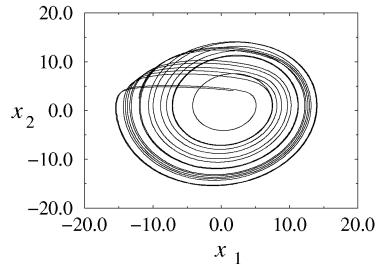
При значениях параметров  $a = 0.15$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10.0$  система (9.13) характеризуется режимом хаотического аттрактора.

Используем в качестве одномерного временного ряда  $a_i$  зависимость во времени одной из координат  $y(i\Delta t)$ , полученную численным интегрированием уравнений (9.13). Будем считать, что вид системы (9.13) и ее размерность нам неизвестны. Наблюдаемая  $a(t) = y(t)$ , заданная на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq 100$ , представлена на рис. 10.1.

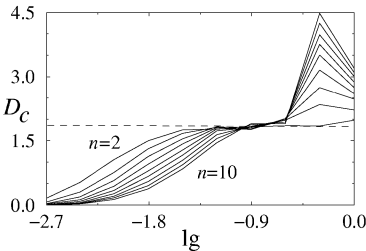
Для задания вектора состояния реконструированной системы воспользуемся теоремой Такенса (9.2). Рассчитывая по наблюдаемой  $a(t)$  автокорреляционную функцию, находим время спадания ее до нуля  $\tau_0 \approx 1.6$  и используем эту величину в качестве времени задержки в (9.2). На рис. 10.2 представлена проекция реконструированного аттрактора на плоскость двух переменных:  $x_1(t) = y(t)$  и  $x_2(t) = y(t + \tau)$ .



**Рис. 10.1.** Временная зависимость координаты  $y$  системы Ресслера (9.13).



**Рис. 10.2.** Реконструированный аттрактор в проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$ , где  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = y(t + \tau)$ . Время задержки определялось как время достижения первого нуля автокорреляционной функции (что соответствует приблизительно  $1/4$  базового периода колебаний).



**Рис. 10.3.** Результаты расчета корреляционной размерности (при варьировании размерности пространства вложения  $n$ ). Получено значение  $D_c \approx 1.9$  (соответствующее “полочке”). Данное значение позволяет в принципе ограничиться 3-мерным пространством для вложения аттрактора и, соответственно, ограничиться системой 3-х ОДУ 1-го порядка при моделировании.

систему запишем в виде (9.11), используя полиномиальную аппроксимацию (9.9) и ограничившись значением  $\nu = 2$ . Результаты расчетов коэффициентов, определяющих вид правых частей уравнений (9.11) для  $n = 3$  и  $\nu = 2$ , приведены в таблице.

В результате процедуры реконструкции ДС по одномерному временному ряду мы получили трехмерную ДС вида (9.11) с коэффициентами, приведенными в таблице. Теперь проведем сравнение результатов, которые можно получить, интегрируя как тестовую модель (9.13), так и модельную ДС (9.11). Результаты интегрирования модельной ДС (9.11) представлены на рис. 10.4 в виде зависимости  $x_1(t)$ . Сравнение данных рис. 10.4 с данными рис. 10.1 показывает качественное сходство реального и модельного колебательных процессов. Однако важным, конечно, являются количественные соответствия. Возможно ли с помощью реконструированной системы осуществить прогноз эволюции системы во времени за пределами интервала, на котором нам известна наблюдаемая? С этой целью проведем следующий эксперимент. Возьмем в качестве начального значения координату последней точки наблюдаемой

Для определения размерности модельной системы нужно рассчитать размерность аттрактора и размерность пространства вложения. Для оценки размерности аттрактора вычислим его корреляционную размерность  $D_c$  (9.5), используя специальные алгоритмы. На рис. 10.3 приведены результаты расчета зависимости  $D_c$  от  $\lg \epsilon$ , где  $\epsilon$  — размер ячейки разбиения фазового пространства. Как видно из графиков, вне зависимости от размерности пространства вложения  $n$  имеется “полочка” на уровне  $D_c \approx 1.9$ , который и принимаем за значение искомой размерности.

Таким образом, реконструируемый аттрактор имеет размерность  $D \approx 2$  и может быть “вложен” в трехмерное фазовое пространство. Это означает, что мы можем искать модельную ДС в виде системы ОДУ третьего порядка ( $n = 3$ ). Искомую

Таблица

			Значение коэффициента аппроксимации		
$l_1$	$l_2$	$l_3$	1-е уравнение	2-е уравнение	3-е уравнение
0	0	0	0.0	0.0	-0.189
0	0	1	0.0	1.0	-9.91
0	0	2	0.0	0.0	0.0
0	1	0	1.0	0.0	0.507
0	1	1	0.0	0.0	1.003
0	2	0	0.0	0.0	-0.150
1	0	0	0.0	0.0	-10.07
1	0	1	0.0	0.0	-0.145
1	1	0	0.0	0.0	1.026
2	0	0	0.0	0.0	-0.145

Коэффициенты аппроксимации нелинейностей в случае полиномиального представления функций  $F_j$  (9.9). Параметры реконструкции  $n = 3$ ,  $\nu = 2$ . Для реконструкции аттрактора используется метод последовательного дифференцирования (9.7). Величины  $l_j$  обозначают степени переменных состояния  $x_i$  в правых частях системы (9.11).

(рис. 10.1) в момент времени  $t_0 = 100$ . Далее проинтегрируем как исходную, так и модельную системы с начальными условиями при  $t = t_0$  и сравним результаты для  $t > t_0$ .

На рис. 10.5 приведены соответствующие графики зависимостей  $y(t)$  для тестовой системы (9.13) и  $x_1(t)$  для реконструированной ДС. Как следует из рис. 10.5, прогноз эволюции системы во времени осуществляется с некоторой ошибкой, которая со временем нарастает. Конкретное время прогноза можно указать, задав точность предсказания. Из результатов рис. 10.5 следует, что если ограничиться ошибкой  $\pm 5\%$ , то время предсказания в нормированных единицах будет составлять примерно  $T = 12.0$ , то есть около двух базовых квазипериодов колебаний системы.

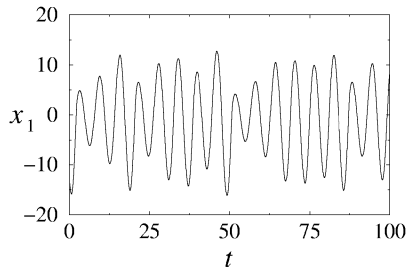
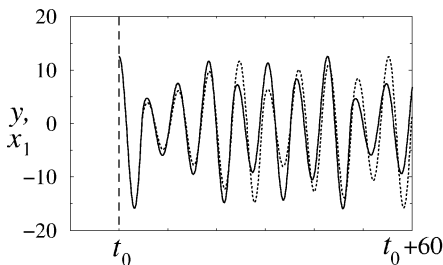


Рис. 10.4. Зависимость  $x_1(t)$ , полученная численным интегрированием реконструированной системы.

## Заключение

Описание алгоритма реконструкции модельных динамических систем по одномерным временным рядам и конкретный пример их практического применения, приведенные в настоящей работе, иллюстрируют



**Рис. 10.5.** Возможность предсказания поведения системы (9.13) после окончания наблюдения за генерируемым данной системой сигналом (рис. 10.1), то есть для времен  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ , где  $T$  — время предсказания с устраивающей экспериментатора степенью точности. Пунктир — результат интегрирования системы (9.13), сплошная линия — решение реконструированной модельной системы.

проблема реконструкции приводит к уменьшению ошибок и увеличению времени прогноза.

как возможности современных методов моделирования, так и их недостатки. Нужно согласиться с тем, что техника реконструкции пока еще остается достаточно сложной и требует (помимо глубоких знаний современной нелинейной динамики) физической интуиции и экспериментального искусства.

Выбранный для иллюстрации пример является далеко не простым, так как реконструируются хаотические автоколебания. С этим связаны и ошибки реконструкции, ограничивающие время предсказания. Если в качестве наблюдаемой мы имеем более простой тип движения (например, периодические коле-

# Заключение

В соответствии с программой, описанной в предисловии, в книге представлены девять лекций по теоретическим основам нелинейной динамики конечномерных систем. Безусловно, рассмотренные проблемы не исчерпывают всего богатства явлений, составляющих предмет изучения этой науки. Во-первых, этого просто невозможно сделать в силу очень широкого разнообразия научных направлений и конкретных задач нелинейной динамики. Достаточно указать теорию универсальности критических явлений в дискретных динамических системах, теорию размерности, теорию механизмов перехода к хаосу и т.д. Во-вторых, любая попытка изложения научных проблем, по которым автор не имеет достаточного опыта исследовательской работы, может привести к некомпетентным утверждениям и сыграть негативную роль в формировании научных пристрастий молодых людей. В связи с этим я ограничился кругом вопросов, которыми занимался вместе с учениками более пятнадцати лет.

В книге обсуждаются научные проблемы, которые являются фундаментальными и необходимыми будущим специалистам по нелинейной динамике вне зависимости от их конкретной научной деятельности. Надо признать, что лекции отличаются по уровню сложности изложения. Отчасти это связано с их конкретным содержанием, и, конечно, с личными пристрастиями автора. Тем не менее хочется надеяться, что эта книга будет интересна достаточно широкому кругу молодых людей, стремящихся найти свой путь в большую науку.

# Литература

1. Аносов Д.В. Динамическая система // Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979.
2. Анищенко В.С. Динамические системы // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 11. С. 77–84.
3. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
4. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
5. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Наука, 2000 (в печати).
6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
7. Постон Т., Стюард И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
8. Анищенко В.С. Устойчивость, бифуркации, катастрофы // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 6.
9. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
10. Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН, 1978. Т. 125, вып. 1. С. 123–168.
11. Анищенко В.С. Детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 6. С. 70–76.
12. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
13. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

14. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
15. Анищенко В.С. Аттракторы динамических систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 109–127.
16. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
17. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
18. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 7–39.
19. Анищенко В.С., Нейман А.Б. Стохастический резонанс и стохастическая синхронизация // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 5–14.
20. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Хованов И.А. Стохастический резонанс при многочастотном воздействии // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 8/9. С. 1380–1392.
21. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
22. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. Может ли режим работы сердца здорового человека быть регулярным? // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 8. С. 1005–1010.
23. Анищенко В.С., Сапарин П.И. Нормированная энтропия как диагностический признак реакции сердечно-сосудистой системы человека на внешнее воздействие // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3–4. С. 54–64.
24. Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С., Гриднев В.И., Довгалевский П.Я. Анализ  $RR$ -интервалов с помощью показателей Ляпунова // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 3–14.
25. Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С. Реконструкция динамических систем // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 9. С. 1075–1092.

Учебное издание

Анищенко Вадим Семенович

ЗНАКОМСТВО С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ

*Лекции соросовского профессора*

*Компьютерная верстка А.В. Климичина*

*Оформление Д.В. Соколова*

*Технические редакторы Л. А. Сидорова, Н. Н. Левина*

---

Подписано в печать 19.02.02. Формат 60 × 84 1/16.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37. Уч. изд. л. 8,44.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.

Тираж 1200 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: [borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

---